ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 230

Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 230 (2023)

Дата публикации 11 декабря 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года — Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска	А. С. Бондарев
	М. В. Шамолин
Научный редактор выпуска	А. В. Овчинников
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782–4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 230

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ «СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXXIV».

ВОРОНЕЖ, 3–9 МАЯ 2023 г.

Часть 1

Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 3–7
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-3-7

УДК 517.927.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. **Г. Э. АБДУРАГИМОВ**

Аннотация. В работе с помощью теоремы Красносельского о неподвижных точках оператора установлены достаточные условия существования по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. Для доказательства единственности положительного решения использован принцип сжатых отображений. Приведенные результаты продолжают исследования автора по данной тематике.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение дробного порядка, положительное решение, краевая задача, функция Грина.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR ONE NONLINEAR FRACTIONAL FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

© 2023 **G. E. ABDURAGIMOV**

Abstract. In this paper, using the Krasnoselsky fixed-point theorem, we establish sufficient conditions for the existence of a positive solution to the boundary-value problem for one nonlinear fractional functional differential equation. To prove the uniqueness of a positive solution, we use the Banach fixed-point theorem. The results presented continue the author's research on this topic.

Keywords and phrases: fractional functional differential equation, positive solution, boundary-value problem, Green's function.

AMS Subject Classification: 34K10

1. Введение. Дифференциальные уравнения дробного порядка или дробные дифференциальные уравнения в последнее время вызывают повышенный интерес, появилось множество книг и статей посвященных дробному исчислению. Возрос интерес, в том числе, к исследованию вопросов существования и единственности положительного решения краевых задач для нелинейных дробно - дифференциальных уравнений. В основе упомянутых исследований, как правило, лежит применение методов нелинейного анализа. В этом отношении отметим некоторые актуальные публикации (см. [2–6]).

Несмотря на достаточно интенсивное развитие теории дробно-дифференциальных уравнений, следует отметить, что работ, в которых рассматривались бы вопросы существования и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений дробного порядка, сравнительно мало. В данной работе предпринята попытка восполнить этот пробел. С помощью известной теоремы Го—Красносельского о неподвижной точке положительного оператора получены достаточные условия существования хотя бы одного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. Далее на основе принципа сжимающих отображений доказана единственность такого решения. Среди последних исследований автора в этом направлении можно выделить, например, статью [1].

2. Постановка задачи и основные результаты. Введем следующие обозначения: C — пространство $C[0,1]$, $\mathbb{L}_p$ — пространство $\mathbb{L}_p(0,1)$, $\mathbb{W}^n_\alpha$ — пространство вещественных функций $D^{\alpha-(n-1)}$, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной порядка $(n-2)$. Рассмотрим краевую задачу

$$D^\alpha x(t) + f\big(t,(Tx)(t)\big) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = x''(0) = \ldots x^{(n-1)} = 0, \tag{2}$$

$$x'(1) = 0, \tag{3}$$

где $\alpha \in (n-1,n]$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) — некоторое действительное число, D^α — дробная производная Капуто (см. [5]), $T : C \to \mathbb{L}_p$ ($1 < p < \infty$) — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна, непрерывна на $[0,1]\times[0,\infty)$, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot,0) \equiv 0$.

Определение. *Положительным решением* задачи (1)–(3) будем называть положительную в интервале $(0,1)$ функцию $\mathbb{W}^n_\alpha$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1) и граничным условиям (2), (3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-D^\alpha x(t)$ с краевыми условиями (2), (3):

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}t - \dfrac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant t, \\ \dfrac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}t, & \text{если } t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция Грина $G(t,s)$ обладает следующими свойствами:

(i) $G(t,s) > 0$, $(t,s) \in (0,1)\times(0,1)$;

(ii) $G(t,s) \leqslant \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} G(t,s) = G(1,s)$, $(t,s) \in [0,1]\times[0,1]$;

(iii) $G(t,s) \geqslant \varphi(t) G(1,s)$, $(t,s) \in [0,1]\times[0,1]$, где $\varphi(t) = t$.

Предположим, что функция $f(t,u)$ при п.в. $t \in [0,1]$ и любых неотрицательных u удовлетворяет условию

$$f(t,u) \leqslant b u^{p/q}, \tag{5}$$

где $b > 0$, $q \in (1,\infty)$. Это позволяет придать уравнению (4) операторный вид $x = GNTx$, где $N : \mathbb{L}_p \to \mathbb{L}_q$ — оператор Немыцкого, $G\colon \mathbb{L}_q \to C$.

Очевидно, оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций.

Обозначим через $\tilde{K}$ конус неотрицательных функций пространства C, удовлетворяющих условию

$$x(t) \geqslant \varphi(t)\|x\|_C, \quad t \in [0,1].$$

Лемма 1. *Оператор A оставляет инвариантным конус $\tilde{K}$.*

Доказательство. В силу свойств (i) и (ii) функции Грина для $x \in \tilde{K}$ и неравенства $(Ax)(t) \geqslant 0$ на $[0,1]$ имеем

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\bigl(s,(Tx)(s)\bigr)\,ds \geqslant \varphi(t) \int_0^1 G(1,s) f\bigl(s,(Tx)(s)\bigr)\,ds \geqslant$$

$$\geqslant \varphi(t) \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \int_0^1 G(1,s) f\bigl(s,(Tx)(s)\bigr)\,ds \geqslant \varphi(t)\|Ax\|_C.$$

Отсюда следует $A(\tilde{K}) \subset \tilde{K}$. □

Легко видеть, что в силу теоремы Арцела—Асколи оператор $A : \tilde{K} \to \tilde{K}$ вполне непрерывен.

В дальнейшем для доказательства существования по крайней мере одного положительного решения задачи (1)–(3) нам понадобится следующая известная теорема Го—Красносельского (см. [7]).

Теорема 1. *Пусть X — банахово пространство и $P \subset X$ — конус в X. Предположим, что Ω_1, Ω_2 — такие открытые подмножества в X, что $\theta \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, и $A : P \to P$ — такой вполне непрерывный оператор, что выполнено одно из двух условий*:

(a) $\|Au\| \leqslant \|u\|$ *для всех* $u \in P \cap \partial\Omega_1$ *и* $\|Au\| \geqslant \|u\|$ *для всех* $u \in P \cap \partial\Omega_2$;
(b) $\|Au\| \geqslant \|u\|$ *для всех* $u \in P \cap \partial\Omega_1$ *и* $\|Au\| \leqslant \|u\|$ *для всех* $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Тогда A имеет неподвижную точку в $P \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega_1 = \bigl\{x \in \tilde{K} : \|x\|_C < r_1\bigr\}, \quad \partial\Omega_1 = \bigl\{x \in \tilde{K} : \|x\|_C = r_1\bigr\},$$
$$\Omega_2 = \bigl\{x \in \tilde{K} : \|x\|_C < r_2\bigr\}, \quad \partial\Omega_2 = \bigl\{x \in \tilde{K} : \|x\|_C = r_2\bigr\},$$
$$\Omega = \overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1,$$

где $0 < r_1 < r_2$.

Теорема 2. *Пусть $p < q$, выполнено неравенство* (5) *и*

$$f(t,u) \geqslant a(t)u^{p/q} \tag{6}$$

при п.в. $t \in [0,1]$ и $u \geqslant 0$, где $a(t) \in \mathbb{L}_q$ — неотрицательная и не равная тождественно нулю функция. Кроме того, допустим, что

$$\int_0^1 G(1,s) a(s) (T\varphi)^{p/q}(s)\,ds > 0.$$

Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Найдем такое число $r_1 > 0$, что при $x \in \partial\Omega_2$

$$\|Ax\|_C \leqslant \|x\|_C. \tag{7}$$

В силу (5) и свойства (ii) функции Грина для $x \in \partial\Omega_2$ имеем

$$\|Ax\|_C = (Ax)(1) = \int_0^1 G(1,s) f\bigl(s,(Tx)(s)\bigr)\,ds \leqslant b \int_0^1 G(1,s)(Tx)^{p/q}(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{p/q} \leqslant b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{p/q} \|x\|_C^{p/q} = b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{p/q} r_2^{p/q-1} \|x\|_C, \tag{8}$$

где τ — норма оператора T, $1/q' + 1/q = 1$. Выбрав

$$0 < r_2 \leqslant \left(\frac{1}{b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{p/q}}\right)^{q/(p-q)},$$

легко убедиться в выполнении соотношения (7).

Покажем теперь существование такого числа $r_1 > 0$, что $\|Ax\|_C \geqslant \|x\|_C$ для всех $x \in \partial\Omega_1$. Воспользовавшись условием (6) теоремы и свойством 2 функции Грина, имеем

$$\|Ax\|_C = (Ax)(1) = \int\limits_0^1 G(1,s)f\big(s,(Tx)(s)\big)\,ds \geqslant \int\limits_0^1 G(1,s)a(s)(Tx)^{p/q}(s)\,ds \geqslant$$
$$\geqslant \|x\|_C^{p/q}\int\limits_0^1 G(1,s)a(s)(T\varphi)^{p/q}(s)\,ds = r_1^{p/q-1}\int\limits_0^1 G(1,s)a(s)(T\varphi)^{p/q}(s)\,ds\cdot\|x\|_C. \quad (9)$$

Положив

$$r_1 \geqslant \left(\int\limits_0^1 G(1,s)a(s)(T\varphi)^{p/q}(s)\,ds\right)^{q/(q-p)},$$

очевидно, придем к требуемому соотношению.

Таким образом, при соответствующем выборе r и R можно обеспечить выполнение условия (b) теоремы 1, гарантирующее существование у вполне непрерывного оператора A крайней мере одной неподвижной точки в Ω, что в свою очередь равносильно существованию хотя бы одного положительного решения краевой задачи (1)–(3). □

Замечание. В случае $p > q$ с привлечением условия (a) теоремы 1 аналогично можно доказать существование по крайней мере одного положительного решения задачи (1)–(3).

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы 2 оператор A отображает замкнутое множество Ω в себя.*

Доказательство. Для $x \in \tilde{K}$, $\|x\|_C \leqslant r_2$, взяв соответственно

$$0 < r_2 \leqslant \left(\frac{1}{b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{p/q}}\right)^{q/(p-q)}$$

на основании (8) имеем

$$\|Ax\|_C \leqslant b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{p/q}\|x\|_C^{p/q} \leqslant b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{p/q}r_2^{p/q}\|x\|_C.$$

С другой стороны, взяв в качестве r_1 число, границы которого определены в теореме 2, для $x \in \tilde{K}$, $\|x\|_C \geqslant r_1$ из (9) получим

$$\|Ax\|_C \geqslant \|x\|_C^{p/q}\int\limits_0^1 G(1,s)a(s)(T\varphi)^{p/q}(s)\,ds \geqslant \int\limits_0^1 G(1,s)a(s)(T\varphi)^{p/q}(s)\,ds\cdot r_1^{p/q-1} \geqslant r_1. \qquad \square$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Кроме того, предположим, что функция $f(t,u)$ дифференцируема по u, производная $f'_u(t,u)$ монотонно убывает по u и*

$$\tau\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} < 1, \quad (10)$$

где $\theta(t) = g(t)f'_u(t, r_1(T1)(t))$, $1/p' + 1/p = 1$. Тогда краевая задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение.

Доказательство. Для любых $x_1, x_2 \in \Omega$ ввиду монотонности функции $f'_u(t,u)$ по u и в силу формулы конечных приращений Лагранжа и неравенства Гельдера имеем

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_C \leqslant \int\limits_0^1 G(t,s)\big|f'_u\big(s,(T\tilde{x})(s)\big)\big|\big|(Ty)(s)\big|\,ds$$
$$\leqslant \int\limits_0^1 G(1,s)\big|f'_u\big(s,r_1(T1)(s)\big)\big|\big|(Ty)(s)\big|\,ds \leqslant \|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\|Ty\|_{\mathbb{L}_p} \leqslant \tau\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\|y\|_C,$$

где $1/p' + 1/p = 1$, $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$, функция $\tilde{x}(t)$ принимает значения, промежуточные между $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Теперь из принципа сжимающих отображений с учетом леммы 2 и условия (10) теоремы следует, что краевая задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдурагимов Г. Э.* О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка// Вестн. росс. ун-тов. Мат. — 2023. — *28*, № 142. — С. 101–110.
2. *Afshari H., Sajjadmanesh M.* Solution of some boundary value problems including nonlinear fractional differential equations// Math. Oper. Res. — 2020. — *6*. — P. 149–156.
3. *Cabada A., Om Kalthoum W.* Existence and uniqueness of positive solutions for nonlinear fractional mixed problems// Georgian Math. J. — 2021. — *28*, № 6. — P. 843–858.
4. *Ibnelazyz L., Guida K., Hilal K., Melliani S.* New existence results for nonlinear fractional integrodifferential equations// Adv. Math. Phys. — 2021. — *2021*. — 5525591.
5. *Li H., Chen Y.* Multiple positive solutions for a system of nonlinear Caputo-type fractional differential equations// J. Funct. Spaces. — 2020. — № 2020. — P. 1–10.
6. *Marasi H., Aydi Y.* Existence and uniqueness results for two-term nonlinear fractional differential equations via a fixed point technique// J. Math. — 2021. — *2021*. — 6670176.
7. *Zhou W.-X., Zhang J.-G., Li J.-M.* Existence of multiple positive solutions for singular boundary value problems of nonlinear fractional differential equations// Adv. Differ. Equ. — 2014. — *2014*. — 97.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович
Дагестанский государственный университет, Махачкала
E-mail: gusen_e@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 8–24
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-8-24

УДК 517.51

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ «УГЛОМ» И МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

© 2023 г. **Г. АКИШЕВ**

Аннотация. В статье рассматриваются пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ 2π-периодических функций многих переменных и наилучшее приближение «углом» функции тригонометрическими полиномами, смешанный модуль гладкости функции из этого пространства. Приведены свойства смешанного модуля гладкости функции и доказаны усиленные варианты прямой и обратной теорем приближения «углом».

Ключевые слова: пространство Лоренца, тригонометрический полином, наилучшее приближение «углом», модуля гладкости.

INEQUALITIES FOR THE BEST "ANGULAR" APPROXIMATION AND THE SMOOTHNESS MODULUS OF A FUNCTION IN THE LORENTZ SPACE

© 2023 **G. AKISHEV**

Abstract. In this paper, we consider the Lorentz space $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ of 2π-periodic functions of several variables, the best "angular" approximation of such functions by trigonometric polynomials, and the mixed smoothness modulus of functions from this space. The properties of the mixed smoothness modulus are given and strengthened versions of the direct and inverse theorems on the "angular" approximations are proved.

Keywords and phrases: Lorentz space, trigonometric polynomial, best "angular" approximation, smoothness modulus.

AMS Subject Classification: 41A10, MSC 41A25, 42A05

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{T}^m = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \leqslant x_j < 2\pi;\ j = 1, \ldots, m\}$ — m-мерный куб и $\mathbb{I}^m = [0,1)^m$.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций $f(\boldsymbol{x})$, которые имеют 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left\{ \frac{\tau}{p} \int\limits_0^1 \big(f^*(t)\big)^\tau t^{\tau/p-1} dt \right\}^{1/\tau}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leqslant \tau < \infty,$$

конечна, где $f^*(y)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\boldsymbol{x})|$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [24, гл. 1, разд. 3, с. 213–216].

В случае $\tau = p$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$ (см. [15, гл. 1, разд. 1.1, с. 11].

Через $\mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим множество всех функций $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x})dx_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Обозначим через $\mathbb{Z}_+^m$ — множество точек с неотрицательными целыми координатами, а через $a_{\boldsymbol{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle \boldsymbol{n}, 2\pi\boldsymbol{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, где $\mathbb{Z}^m$ — множество точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами. Положим

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f, 2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\rho(\boldsymbol{s})} a_{\boldsymbol{n}}(f)e^{i\langle \boldsymbol{n}, 2\pi\boldsymbol{x}\rangle},$$

где

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j, \quad s_j = 1, 2, \dots,$$

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : \ 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, \ j = 1, \dots, m\right\}.$$

Величина

$$Y_{l_1,\dots,l_m}(f)_{p,\tau} = \inf_{T_{l_j}} \left\| f - \sum_{j=1}^m T_{l_j} \right\|_{p,\tau}^*, \quad l_j = 0, 1, 2, \dots,$$

называется наилучшим приближением «углом» функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ тригонометрическими полиномами, где $T_{l_j} \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — тригонометрический полином порядка l_j по переменной x_j, $j = 1, \dots, m$ (в случае $\tau = p$ см. [9, 17, 19, 43]).

Определение 1.1. Смешанный модуль гладкости функции порядка k функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ определяется по формуле (в случае $\tau = p$ см. [4, гл. 1, разд. 11] и [43])

$$\omega_{\boldsymbol{k}}(f, \boldsymbol{t})_{p,\tau} = \omega_{k_1,\dots,k_m}(f, t_1, \dots, t_m)_{p,\tau} = \sup_{|h_1|\leqslant t_1,\dots,|h_m|\leqslant t_m} \left\|\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\boldsymbol{k}}(f)\right\|_{p,\tau},$$

где $\Delta_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{k}} f(2\pi\boldsymbol{x}) = \Delta_{t_m}^{k_m}(\dots\Delta_{t_1}^{k_1} f(2\pi\boldsymbol{x}))$ — смешанная разность порядка $\boldsymbol{k}$ с шагом $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_m)$.

Для функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T})$ одной переменной т.е. при $m = 1$, наилучшее приближение тригонометрическими полиномами T_n порядка не выше n, обозначается символом $E_n(f)_{p,\tau}$. В случае $\tau = p$ вместо $E_n(f)_{p,p}$ будем писать $E_n(f)_p$. Модуль гладкости порядка k функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ обозначается символом $\omega_k(f, \delta)_p$; при $k = 1$ пишут $\omega(f, \delta)_p$.

Постановка задачи. В теории приближения функций под прямыми теоремами понимают неравенства, в которых наилучшие приближения функций из некоторого пространства сверху оцениваются через ее модули гладкости, а обратными теоремами называются неравенства, в которых модули гладкости функций сверху оценивается через ее наилучшие приближения.

Первая прямая теорема была доказана Д. Джексоном в [39].

Теорема 1.1 (см. [9])**.** *Для любой функции $f \in C[0, 2\pi]$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_\infty \leqslant C\omega(f, \pi/n)_\infty. \tag{1.1}$$

Неравенства вида (1.1) принято называть неравенством Джексона. Е. Кваде (см. [44]) распространил неравенство Джексона на пространства $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$.

В общем случае прямая теорема известна в следующей формулировке.

Теорема 1.2. *Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \leqslant C\omega_k(f, \pi/n)_p. \tag{1.2}$$

В случае $k = 2$ теорему 1.2 опубликовал Н. И. Ахиезер (см. [5]). С. Б. Стечкин (см. [25]) доказал неравенство (1.2) для модудля гладкости произвольного порядка $k \in \mathbb{N}$ в пространстве непрерывных функций $C(\mathbb{T})$. Как отмечено в [11], его рассуждения справедливы и для пространств $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$.

Для $k = 1$ неравенство (1.2) в случае $0 < p < 1$, независимо доказали Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд (см. [27]) и В. И. Иванов (см. [10]). При $0 < p < 1$ и $k \geqslant 2$ аналог неравенства (1.2) доказали Э. А. Стороженко и П. Освальд (см. [28]).

В 1965 г. М. Ф. Тиман (см. [29,30]) для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, $\gamma = \max\{2, p\}$ доказал следующий усиленный вариант неравенства (1.2):

$$\frac{1}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k\gamma-1}E_\nu^\gamma(f)_p\right)^{1/\gamma} \leqslant C\omega_k(f,\pi/n)_p. \tag{1.3}$$

Первые результаты в обратных теоремах теории приближения принадлежат С. Н. Бернштейну и Ш. Валле Пуссену (см. библиографию в [11]).

Первая общая обратная теорема была доказана Р. Салемом (см. [45]) в пространстве непрерывных функций. Известна следующая общая обратная теорема к теореме 1.2.

Теорема 1.3. *Если $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k \in \mathbb{N}$, то*

$$\omega_k(f,\pi/n)_p \leqslant \frac{C(k)}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_\nu(f)_p. \tag{1.4}$$

Теорему 1.3 в случае $k = 1$, $p = \infty$ доказал Р. Салем (см. [45]), а для $k \in \mathbb{N}$, $p = \infty$ — С. Б. Стечкин (см. [25]). При $1 < p < \infty$ эту теорему доказали А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман (см. [31]). Как отмечено в [11], теорема 1.3 для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ доказывается методом С. Б. Стечкина.

Усиленный вариант теоремы 1.3 для $p = 2$ доказал С. Б. Стечкин (см. [26]), а для всех $1 < p < \infty$ — М. Ф. Тиман (см. [32]).

Теорема 1.4 (см. [32])**.** *Если $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, $\beta = \min\{2, p\}$, $k \in \mathbb{N}$, то*

$$\omega_k(f,\pi/n)_p \leqslant \frac{C(k)}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k\beta-1}E_\nu^\beta(f)_p\right)^{1/\beta}. \tag{1.5}$$

Для модулей гладкости положительного порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, неравенства (1.2), (1.4), (1.5) доказал Р. Таберски (см. [46,47]).

Для функций одной переменной прямые и обратные теоремы теории приближения известны и в перестановочно-инвариантных пространствах (см. [34, 38, 40]), в частности, в пространстве Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T})$ (см. [35,42]).

Прямые и обратные теоремы между наилучшим приближением «углом» и смешанным модулем гладкости функции многих переменных $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, доказал М. К. Потапов (см. [17–19]); их усиленные варианты доказаны в [43]; двумерный аналог неравенства (1.3) в пространстве Лебега со смешанной нормой доказан Е. С. Смаиловым, М. Г. Есмаганбетовым и Б. К. Шаяхметовой (см. [32]).

В [20,21] определен обобщенный модуль гладкости функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и доказаны прямая и обратная теоремы теории приближения «углом» для этого модуля гладкости.

Основная цель статьи — найти соотношения между наилучшим приближением «углом» и смешанным модулем гладкости функции в пространстве $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 \leqslant p, \tau < \infty$.

Статья состоит из введения и трех разделов. В разделе 2 приведены некоторые следствия известных теорем. В разделе 3 приведены свойства смешанного модуля гладкости функции из пространства Лоренца. Основные результаты сформулированы и доказаны в разделе 4. Теоремы 4.1 и 4.2 являются усиленными вариантами прямой и обратной теорем теории приближения «углом» в пространстве Лоренца. В случае $\tau = p$ из этих теорем следует [43, теорема 9.1].

Через $C(p, q, y, \dots)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют такие положительные постоянные C_1, C_2, что $C_1 \cdot A(y) \leqslant B(y) \leqslant C_2 \cdot A(y)$. Для краткости записи, в случае выполнения неравенств $B \geqslant C_1 A$ или $B \leqslant C_2 A$ часто будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно.

2. Вспомогательные утверждения. Напомним определение дробной производной функции и сформулируем утверждения, которые часто применяются в доказательствах результатов статьи.

Для функции $f \in \mathring{L}(\mathbb{T}^m)$ и вектора $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ с неотрицательными координатами оператор дробного дифференцирования определяется по формуле (см. [8, гл. 3, раздел 15])

$$f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}) := f^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathring{\mathbb{Z}}^m} \prod_{j=1}^{m} (in_j)^{\alpha_j} a_{\boldsymbol{n}}(f) e^{i\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle},$$

где

$$\mathring{\mathbb{Z}}^m = \left\{ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^m : \prod_{j=1}^{m} n_j \neq 0 \right\}, \quad (in_j)^{\alpha_j} = |n_j|^{\alpha_j} e^{i\pi\alpha_j/2 \operatorname{sign} n_j}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Для функции $f \in \mathring{L}_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$, известно следующее соотношение (см. [8, гл. 3, раздел 15]):

$$\|f^{(\boldsymbol{\alpha})}\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\alpha}\rangle} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p, \tag{2.1}$$

которое понимается в том смысле, что из конечности какой-либо части следует конечность другой его части и выполняются двусторонние неравенства. Используя соотношение (2.1) и интерполяционную теорему в пространстве Лоренца, нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $1 < p, \tau < \infty$ *и* $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. *Тогда выполняется соотношение*

$$\|f^{(\boldsymbol{\alpha})}\|_{p,\tau} \asymp \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\alpha}\rangle} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}.$$

Теорема 2.2 (см. [2])**.** *Пусть* $1 < p, \tau < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *выполняется соотношение*

$$\|f\|_{p,\tau} \asymp \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}.$$

3. Смешанный модуль гладкости функции и его свойства в пространстве Лоренца. Обозначим через e_m множество индексов $\{1, \ldots, m\}$, через e его произвольное подмножество и через $|e|$ — количество элементов e.

Если $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ — элемент m-мерного пространства, имеющий неотрицательные координаты, то $\boldsymbol{r}^e = (r_1^e, \ldots, r_m^e)$ — вектор с компонентами $r_j^e = r_j$ при $j \in e$ и $r_j^e = 0$ при $j \notin e$.

Пусть $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_m)$ — элемент m-мерного пространства с целыми положительными координатами и $e \subset e_m$ — непустое множество. Положим

$$G_{\boldsymbol{l}}(e) = \Big\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : |k_j| \leqslant l_j, \ j \in e, \ |k_j| > l_j, \ j \notin e \Big\}.$$

Для заданных чисел $b_{\boldsymbol{n}}$ смешанная разность определяется по формуле

$$\Delta b_{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{\varepsilon}\leqslant\boldsymbol{1}} (-1)^{m - \sum\limits_{j=1}^{m} \varepsilon_j} b_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\varepsilon}},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = 0$ или $\varepsilon_j = 1$, и $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1} + \boldsymbol{\varepsilon} = (n_1 - 1 + \varepsilon_1, \ \ldots, \ n_m - 1 + \varepsilon_m)$.

Будем рассматривать следующие частные суммы по различным переменным:

$$S_{\boldsymbol{l}}(f, 2\pi\boldsymbol{x}) = S_{l_1,\ldots,l_m}(f, 2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{|k_1|\leqslant l_1} \ldots \sum_{|k_m|\leqslant l_m} a_{\boldsymbol{k}}(f) e^{i\langle \boldsymbol{k}, 2\pi\boldsymbol{x}\rangle}$$

— частная сумма по всем переменным;

$$S_{l_1,\infty}(f, 2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{|k_1|\leqslant l_1} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} a_{\boldsymbol{k}}(f) e^{i\langle \boldsymbol{k}, 2\pi\boldsymbol{x}\rangle}$$

— частная сумма по переменной $x_1 \in [0,1)$. В более общем случае

$$S_{\boldsymbol{l}^e,\boldsymbol{\infty}}(f,2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\prod_{j\in e}[-l_j,l_j]\times\mathbb{R}^{m-|e|}} a_{\boldsymbol{k}}(f)e^{i\langle\boldsymbol{k},2\pi\boldsymbol{x}\rangle}$$

— частная сумма по переменным $x_j \in [0,1)$ при $j \in e$.

Для заданного подмножества $e \subset e_m$ положим

$$U_{\boldsymbol{l}}(f,2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{e\subset e_m, e\neq\varnothing} \sum_{\boldsymbol{k}\in G_{\boldsymbol{l}}(e)} a_{\boldsymbol{k}}(f)e^{i\langle\boldsymbol{k},2\pi\boldsymbol{x}\rangle}.$$

В частности, для $m = 2$ имеем (см., например, [43])

$$U_{l_1,l_2}(f,2\pi\boldsymbol{x}) = S_{l_1,\infty}(f,2\pi\boldsymbol{x}) + S_{\infty,l_2}(f,2\pi\boldsymbol{x}) - S_{l_1,l_2}(f,2\pi\boldsymbol{x}).$$

Приведем некоторые свойства смешанного модуля гладкости функции. Они доказываются известными методами (см., например, [15,17]).

Лемма 3.1. *Пусть* $1 < p,\tau < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$ *для* $j = 1,\dots,m$ *и* $f,g \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) $\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\delta_1,\dots,\delta_{i-1},0,\dots,\delta_{i+1},\dots,\delta_m)_{p,\tau} = \omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,0,\dots,0)_{p,\tau} = 0$;
(2) $\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f+g,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau} \ll \omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau} + \omega_{\boldsymbol{\alpha}}(g,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau}$;
(3) $\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau}$ *не убывает по каждой переменной* $\delta_j \geqslant 0$, $j = 1,\dots,m$;
(4) *для чисел* $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1,\dots,m$, *справедливо соотношение*

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\lambda_1\delta_1,\dots,\lambda_m\delta_m)_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^{m} \lambda_j^{\alpha_j}\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau};$$

(5) *для* $0 < t_j \leqslant \delta_j$, $j = 1,\dots,m$, *справедливо соотношение*

$$\prod_{j=1}^{m} \delta_j^{-\alpha_j}\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j}\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,t_1,\dots,t_m)_{p,\tau};$$

(6) *для тригонометрического полинома*

$$T_{\boldsymbol{n}}(2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1}\dots\sum_{k_m=-n_m}^{n_m} c_{\boldsymbol{k}}e^{i\langle\boldsymbol{k},2\pi\boldsymbol{x}\rangle}, \quad n_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1,\dots,m, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^m,$$

и его производной $T_{\boldsymbol{n}}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}(2\pi\boldsymbol{x})$ *справедливо неравенство*

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(T_{\boldsymbol{n}},\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^{m} \delta_j^{\alpha_j}\left\|T_{\boldsymbol{n}}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}\right\|_{p,\tau}.$$

Лемма 3.1 доказывается так же, как [43, теорема 4.1]. В случае $\tau = p$ лемма 3.1 ранее доказана как [43, теорема 5.1].

Лемма 3.2 (неравенство Бернштейна)**.** *Пусть* $1 < p,\tau < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1,\dots,m$. *Тогда для тригонометрического полинома* $T_{\boldsymbol{n}}$ *имеет место неравенство*

$$\left\|T_{\boldsymbol{n}}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}\right\|_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{\alpha_j}\|T_{\boldsymbol{n}}\|_{p,\tau}.$$

Лемма 3.3. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$ *и* $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. *Тогда*

$$\left\|f - U_{l_1,\dots,l_m}(f)\right\|_{p,\tau} \ll Y_{l_1,\dots,l_m}(f)_{p,\tau}.$$

Лемма 3.4 (прямая теорема)**.** *Если* $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$, *то*

$$Y_{\boldsymbol{n}}(f)_{p,\tau} \ll \omega_{\boldsymbol{k}}\left(f,\frac{1}{n_1+1},\dots,\frac{1}{n_m+1}\right)_{p,\tau}.$$

Лемма 3.5 (обратная теорема). *Если $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, то*

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{1}{n_1+1}, \dots, \frac{1}{n_m+1}\right)_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^{m} n_j^{-\alpha_j} \sum_{\nu_1=1}^{n_1+1} \dots \sum_{\nu_m=1}^{n_m+1} \prod_{j=1}^{m} \nu_j^{\alpha_j-1} Y_{\boldsymbol{\nu}}(f)_{p,\tau}.$$

В случае $\tau = p$ леммы 3.3–3.5 доказаны в [17, 43]. Для $\tau \neq p$ они доказываются аналогично.

Теорема 3.1. *Пусть $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^2)$, $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$, $\alpha_j, n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$. Тогда*

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau} \asymp n_1^{-\alpha_1} n_2^{-\alpha_2} \left\| S_{n_1,n_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f) \right\|_{p,\tau} + n_1^{-\alpha_1} \left\| S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f - S_{\infty,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau} +$$
$$+ n_2^{-\alpha_2} \left\| S_{\infty,n_2}^{(0,\alpha_2)}(f - S_{n_1,\infty}(f)) \right\|_{p,\tau} + \left\| f - (S_{n_1,\infty}(f) + S_{\infty,n_2}(f) - S_{n_1,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau}.$$

Доказательство. По свойству нормы (квазинормы) для любого числа h_i и $n_i \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)) \right\|_{p,\tau} \ll \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f - S_{n_1,\infty}(f) - S_{\infty,n_2}(f) + S_{n_1,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau} +$$
$$+ \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(S_{n_1,\infty}(f - S_{\infty,n_2}(f)))) \right\|_{p,\tau} + \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(S_{\infty,n_2}(f - S_{n_1,\infty}(f)))) \right\|_{p,\tau} +$$
$$+ \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(S_{n_1,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau} = C\{I_1 + I_2 + I_3 + I_4\}. \quad (3.1)$$

Оценим I_1. Введем обозначение

$$\varphi(2\pi x_1, 2\pi x_2) = f(2\pi x_1, 2\pi x_2) - S_{n_1,\infty}(f, 2\pi x_1, 2\pi x_2) -$$
$$- S_{\infty,n_2}(f, 2\pi x_1, 2\pi x_2) + S_{n_1,n_2}(f, 2\pi x_1, 2\pi x_2).$$

Тогда по свойству нормы и ее инвариантности относительно сдвига имеем

$$I_1 = \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(\varphi)) \right\|_{p,\tau} \ll$$
$$\ll \sum_{\nu_1=0}^{\alpha_1} C_{\nu_1}^{\alpha_1} \sum_{\nu_2=0}^{\alpha_2} C_{\nu_2}^{\alpha_2} \left\| \varphi\big(2\pi x_1 + (\alpha_1 - \nu_1)h_1, 2\pi x_2 + (\alpha_2 - \nu_2)h_2\big) \right\|_{p,\tau} \ll \|\varphi\|_{p,\tau}. \quad (3.2)$$

Оценим I_2. Введем обозначение

$$\psi(2\pi x_1, 2\pi x_2) = f(2\pi x_1, 2\pi x_2) - S_{\infty,n_2}(f, 2\pi x_1, 2\pi x_2).$$

Тогда по свойству нормы имеем

$$I_2 = \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(S_{n_1,\infty}(\psi) \right\|_{p,\tau} \ll \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1} S_{n_1,\infty}(\psi) \right\|_{p,\tau}. \quad (3.3)$$

В [43] доказано, что

$$\left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1} S_{n_1,\infty}(\psi) \right\|_{p} \ll n_1^{-\alpha_1} \left\| S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(\psi) \right\|_{p}, \quad 1 < p < \infty,$$

для $0 < h_1 < \pi/n_1$. По экстраполяционной теореме (см. [37, теорема 2.1], [34]) будем иметь

$$\left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1} S_{n_1,\infty}(\psi) \right\|_{p,\tau} \ll n_1^{-\alpha_1} \left\| S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(\psi) \right\|_{p,\tau}, \quad 1 < p, \tau < \infty.$$

Следовательно, из (3.3) получим

$$I_2 \ll n_1^{-\alpha_1} \left\| S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(\psi) \right\|_{p,\tau}, \quad 1 < p, \tau < \infty, \quad (3.4)$$

для $0 < h_1 < \pi/n_1$. Аналогично доказывается, что

$$I_3 \ll n_2^{-\alpha_2} \left\| S_{\infty,n_2}^{(0,\alpha_2)}(f - S_{n_1,\infty}(f)) \right\|_{p,\tau}, \quad (3.5)$$

$$I_3 \ll n_1^{-\alpha_1} n_2^{-\alpha_2} \left\| S_{n_1,n_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f)) \right\|_{p,\tau} \quad (3.6)$$

для $0 < h_1 < \pi/n_1$, $0 < h_2 < \pi/n_2$, $1 < p,\tau < \infty$. Теперь из неравенств (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6) получим

$$\omega_{\boldsymbol\alpha}\left(f,\frac{\pi}{n_1},\frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau} \ll n_1^{-\alpha_1}n_2^{-\alpha_2}\left\|S_{n_1,n_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f)\right\|_{p,\tau} + n_1^{-\alpha_1}\left\|S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f-S_{\infty,n_2}(f))\right\|_{p,\tau}+ \\ + n_2^{-\alpha_2}\left\|S_{\infty,n_2}^{(0,\alpha_2)}(f-S_{n_1,\infty}(f))\right\|_{p,\tau} + \left\|f-(S_{n_1,\infty}(f)+S_{\infty,n_2}(f)-S_{n_1,n_2}(f))\right\|_{p,\tau}.$$

Докажем противоположное неравенство. В силу ограниченности оператора прямоугольной частичной суммы ряда Фурье функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p,\tau < \infty$, имеем

$$A_1 := \left\|f-(S_{n_1,\infty}(f)+S_{\infty,n_2}(f)-S_{n_1,n_2}(f))\right\|_{p,\tau} \ll Y_{n_1,n_2}(f)_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty.$$

Согласно прямой теореме теории приближения «углом» в пространстве Лоренца (лемма 3.4) отсюда получим

$$A_1 \ll \omega_{\boldsymbol\alpha}\left(f,\frac{\pi}{n_1},\frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty. \tag{3.7}$$

Введем обозначение

$$A_2 := \left\|S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f-S_{\infty,n_2}(f))\right\|_{p,\tau}.$$

В [43] доказано, что

$$\left\|S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f-S_{\infty,n_2}(f))\right\|_{p} \ll n_1^{\alpha_1}\|\Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1}(f-S_{\infty,n_2}(f))\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Согласно экстраполяционной теореме (см. [37, теорема 2.1], [34]) будем иметь

$$A_2 \ll n_1^{\alpha_1}\left\|\Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1}(f-S_{\infty,n_2}(f))\right\|_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty.$$

Обозначая $\Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1}(f) = F$, отсюда получим

$$A_2 \ll n_1^{\alpha_1}\left\|F-S_{\infty,n_2}(F)\right\|_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty.$$

Так как $S_{0,\infty}(F) = S_{0,n_2}(F)$, то

$$A_2 \ll n_1^{\alpha_1}\left\|F-S_{0,\infty}(F)-S_{\infty,n_2}(F)+S_{0,n_2}(F)\right\|_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty.$$

Отсюда согласно прямой теореме теории приближения «углом» в пространстве Лоренца (лемма 3.4) и свойству модуля гладкости получим

$$A_2 \ll n_1^{\alpha_1}\omega_{\boldsymbol\alpha}\left(F,\pi,\frac{\pi}{n_2+1}\right)_{p,\tau} \ll n_1^{\alpha_1}\omega_{\boldsymbol\alpha}\left(F,\pi,\frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau} = \\ = Cn_1^{\alpha_1}\sup_{|h_1|\leqslant\pi,|h_2|\leqslant\pi/n_2}\left\|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}F)\right\|_{p,\tau} \ll n_1^{\alpha_1}\sup_{|h_2|\leqslant\pi/n_2}\left\|\Delta_{h_2}^{\alpha_2}F\right\|_{p,\tau} = \\ = Cn_1^{\alpha_1}\sup_{|h_2|\leqslant\pi/n_2}\left\|\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(\Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1}f)\right\|_{p,\tau} \ll n_1^{\alpha_1}\omega_{\boldsymbol\alpha}\left(f,\frac{\pi}{n_1},\frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}.$$

Таким образом,

$$A_2 \ll n_1^{\alpha_1}\omega_{\boldsymbol\alpha}\left(f,\frac{\pi}{n_1},\frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty. \tag{3.8}$$

Аналогично можно доказать, что

$$A_3 := \left\|S_{\infty,n_2}^{(0,\alpha_2)}(f-S_{n_1,\infty}(f))\right\|_{p,\tau} \ll n_2^{\alpha_2}\omega_{\boldsymbol\alpha}\left(f,\frac{\pi}{n_1},\frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty, \tag{3.9}$$

$$A_4 := \left\|S_{n_1,n_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f)\right\|_{p,\tau} \ll n_2^{\alpha_2}\omega_{\boldsymbol\alpha}\left(f,\frac{\pi}{n_1},\frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}, \qquad 1 < p,\tau < \infty. \tag{3.10}$$

Теперь из неравенств (3.7)–(3.10) следует, что

$$\Big\|f-(S_{n_1,\infty}(f)+S_{\infty,n_2}(f)-S_{n_1,n_2}(f))\Big\|_{p,\tau}\ll$$
$$\ll \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f,\frac{\pi}{n_1},\frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}+n_1^{-\alpha_1}n_2^{-\alpha_2}\Big\|S^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{n_1,n_2}(f)\Big\|_{p,\tau}+$$
$$+n_1^{-\alpha_1}\Big\|S^{(\alpha_1,0)}_{n_1,\infty}(f-S_{\infty,n_2}(f))\Big\|_{p,\tau}+n_2^{-\alpha_2}\Big\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,n_2}(f-S_{n_1,\infty}(f))\Big\|_{p,\tau}. \quad \square$$

В случае $\tau=p$ теорема 3.1 доказана в [43, теорема 5.1].

4. Прямые и обратные теоремы приближения в пространстве Лоренца.

Теорема 4.1. *Пусть* $1<p<+\infty$, $1<\tau<\infty$, $\alpha_j\in\mathbb{N}$, $j=1,\dots,m$, $\sigma=\max\{2,\tau\}$. *Если* $f\in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, *то*

$$\prod_{j=1}^m n_j^{-\alpha_j}\left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1+1}\dots\sum_{\nu_m=1}^{n_m+1}\prod_{j=1}^m \nu_j^{\sigma\alpha_j-1}Y^{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}}(f)_{p,\tau}\right)^{1/\sigma}\ll\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f,\frac{\pi}{n_1},\dots,\frac{\pi}{n_m}\right)_{p,\tau},\quad n_j\in\mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$I_{\boldsymbol{n}}(f):=\prod_{j=1}^m n_j^{-\alpha_j}\left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1+1}\dots\sum_{\nu_m=1}^{n_m+1}\prod_{j=1}^m \nu_j^{\sigma\alpha_j-1}Y^{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}}(f)_{p,\tau}\right)^{1/\sigma}.$$

Для заданного $n_j\in\mathbb{N}$ выберем такое неотрицательное целое число k_j, что $2^{k_j}\leqslant n_j<2^{k_j+1}$, $j=1,\dots,m$. Тогда в силу монотонного убывания $\{Y^{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}}(f)_{p,\tau}\}$ по каждому индексу ν_j, $j=1,\dots,m$, нетрудно убедиться, что

$$I^{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(f)\ll\prod_{j=1}^m 2^{-k_j\alpha_j\sigma}\sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}\dots\sum_{\mu_m=1}^{k_m+1}\prod_{j=1}^m 2^{\mu_j\alpha_j\sigma}Y^{\sigma}_{[2^{\mu_1-1}],\dots,[2^{\mu_m-1}]}(f)_{p,\tau}. \tag{4.2}$$

Докажем теорему для $m=2$. Тогда (4.2) имеет вид

$$I^{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(f)\ll\prod_{j=1}^2 2^{-k_j\alpha_j\sigma}\sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}\sum_{\mu_2=1}^{k_2+1}\prod_{j=1}^2 2^{\mu_j\alpha_j\sigma}Y^{\sigma}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}. \tag{4.3}$$

Так как

$$U_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f,2\pi\boldsymbol{x})=S_{[2^{\mu_1-1}],\infty}(f,2\pi\boldsymbol{x})+S_{\infty,[2^{\mu_2-1}]}(f,2\pi\boldsymbol{x})-S_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f,2\pi\boldsymbol{x})$$
$$=\sum_{n_1=[2^{\mu_1-1}]}^{\infty}\ \sum_{n_2=[2^{\mu_2-1}]}^{\infty}a_{\boldsymbol{n}}(f)e^{i\langle\boldsymbol{n},2\pi\boldsymbol{x}\rangle},$$

то согласно определению наилучшего приближения «углом» и теореме 2.1 имеем

$$Y_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\leqslant\Big\|f-U_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)\Big\|_{p,\tau}\ll\left\|\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=\mu_2}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}. \tag{4.4}$$

Теперь из неравенств (4.3) и (4.4), по свойству нормы и в силу неравенства $(a+b)^{\theta}\leqslant C(a^{\theta}+b^{\theta})$, для $0<\theta<\infty$, $a,b\geqslant 0$ получим

$$I_{\boldsymbol{n}}^{\sigma}(f) \ll \prod_{j=1}^{2} 2^{-k_j\alpha_j\sigma} \sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}\sum_{\mu_2=1}^{k_2+1}\prod_{j=1}^{2} 2^{\mu_j\alpha_j\sigma} \left(\left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} + \right.$$
$$+ \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} + \left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} +$$
$$\left. + \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} \right)^{\sigma} \ll \prod_{j=1}^{2} 2^{-k_j\alpha_j\sigma} \sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}\sum_{\mu_2=1}^{k_2+1}\prod_{j=1}^{2} 2^{\mu_j\alpha_j\sigma} \times$$
$$\times \left(\left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} + \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} + \right.$$
$$\left. + \left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} + \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} \right). \quad (4.5)$$

Так как $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2$, то

$$\sum_{\mu_j=0}^{k_j+1} 2^{\mu_j\alpha_j\sigma} \asymp 2^{k_j\alpha_j\sigma}.$$

Поэтому из (4.5) получим

$$I_{\boldsymbol{n}}^{\sigma}(f) \ll \left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} +$$
$$+ 2^{-k_1\alpha_1\sigma}\sum_{\mu_1=0}^{k_1+1} 2^{\mu_1\alpha_1\sigma} \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} +$$
$$+ 2^{-k_2\alpha_2\sigma}\sum_{\mu_2=0}^{k_2+1} 2^{\mu_2\alpha_2\sigma} \left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} +$$
$$+ \prod_{j=1}^{2} 2^{-k_j\alpha_j\sigma} \sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}\sum_{\mu_2=1}^{k_2+1}\prod_{j=1}^{2} 2^{\mu_j\alpha_j\sigma} \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} =$$
$$= C\bigl\{I_1(f) + I_2(f) + I_3(f) + I_4(f)\bigr\}. \quad (4.6)$$

Согласно теореме 2.1 имеем

$$I_1(f) \ll \bigl\| f - (S_{n_1,\infty}(f) + S_{\infty,n_2}(f) - S_{n_1,n_2}(f)) \bigr\|_{p,\tau}^{\sigma}. \quad (4.7)$$

Теперь оценим величину

$$I_2(f) = 2^{-k_1\alpha_1\sigma}\sum_{\mu_1=0}^{k_1+1} 2^{\mu_1\alpha_1\sigma} \left\{ \int_0^1 \left(\left[\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right]^{*}(t) \right)^{\tau} t^{\tau/p-1}dt \right\}^{\sigma/\tau}. \quad (4.8)$$

Введем обозначение

$$\varphi_{\mu_1}(\boldsymbol{x}) = 2^{\mu_1\alpha_1}\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,\boldsymbol{x})|^2\right)^{1/2}, \quad \mu_1 = 0,1,\ldots,k_1.$$

Тогда

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1\sigma}\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,\boldsymbol{x})|^2\right)^{\sigma/2}\right)^{1/\sigma} = \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\varphi_{\mu_1}^{\sigma}(\boldsymbol{x})\right)^{1/\sigma}.$$

Предположим, что $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$. Тогда пространство $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ является τ-вогнутым (см., например, [16, 36]). Следовательно, по определению τ-вогнутого пространства справедливо неравенство

$$\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\varphi_{\mu_1}^{\sigma}(\boldsymbol{x})\right)^{1/\sigma}\right\|_{p,\tau} \gg \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\|\varphi_{\mu_1}\|_{p,\tau}^{\tau}\right)^{1/\tau}.$$

В силу обозначения φ_{μ_1} это означает, что

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}2^{\mu_1\alpha_1\sigma}\left\|\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^{\sigma}\right)^{1/\sigma} \ll$$
$$\ll \left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1\sigma}\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,\boldsymbol{x})|^2\right)^{\sigma/2}\right)^{1/\sigma}\right\|_{p,\tau} \tag{4.9}$$

в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$. Если $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, то $\tau < 2$. Тогда согласно неравенству Йенсена имеем

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\|\varphi_{\mu_1}\|_{p,\tau}^{\sigma}\right)^{1/\sigma} = \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\|\varphi_{\mu_1}\|_{p,\tau}^{2}\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\|\varphi_{\mu_1}\|_{p,\tau}^{\tau}\right)^{1/\tau}.$$

Известно, что если $1 < p < \tau$, то пространство $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ является τ-вогнутым (см. [16]). Поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\|\varphi_{\mu_1}\|_{p,\tau}^{\sigma}\right)^{1/\sigma} \ll \left\|\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\varphi_{\mu_1}\right\|_{p,\tau} \tag{4.10}$$

в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $\tau > p > 1$, т.е. $1 < p < \tau < 2$. Так как

$$\sum_{k=0}^{\mu}2^{k\alpha_1\sigma} \ll 2^{\mu\alpha_1\sigma},$$

то согласно неравенству Потапова—Йохансона (см. [41, 43]) имеем

$$\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1\sigma}\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,2\pi\boldsymbol{x})|^2\right)^{\sigma/2} \ll \sum_{\nu_1=0}^{k_1}2^{\nu_1\alpha_1\sigma}\left(\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,2\pi\boldsymbol{x})|^2\right)^{\sigma/2} \tag{4.11}$$

почти для всех $\boldsymbol{x} \in [0,1)^2$. Теперь из неравенств (4.9), (4.10), (4.11) и согласно неравенству Йенсена получим

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} 2^{\mu_1\alpha_1\sigma} \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma}\right)^{1/\sigma} \ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2} \left(\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{\sigma/2}\right)^{1/\sigma} \right\|_{p,\tau} \ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1\sigma} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} \qquad (4.12)$$

в случаях $\sigma = \max\{2, \tau\} = \tau > p > 1$ или $\sigma = \max\{2, \tau\} = 2$, $1 < p < \tau\infty$. Теперь из неравенств (4.8) и (4.12) следует, что

$$I_2(f) \ll 2^{k_1\alpha_1\sigma} \left\| \left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} \qquad (4.13)$$

в случаях $\sigma = \max\{2, \tau\} = \tau > p > 1$ или $\sigma = \max\{2, \tau\} = 2$, $1 < p < \tau < \infty$.

Пусть $\sigma = \max\{2, \tau\} = 2$ и $1 < \tau < p < \infty$, т.е. $1 < \tau < 2$. Согласно обозначению функции φ_{μ_1}, меняя порядок суммирования, нетрудно убедиться, что

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} \varphi_{\mu_1}^{\sigma}(\boldsymbol{x})\right)^{1/\sigma} = \left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} \sum_{\mu_1=0}^{k_1} 2^{\mu_1\alpha_1 2} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f, 2\pi\boldsymbol{x})|^2\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f, 2\pi\boldsymbol{x})|^2\right)^{1/2} \qquad (4.14)$$

почти для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^2$. Следовательно,

$$\left\| \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} \varphi_{\mu_1}^{\sigma}\right)^{1/\sigma} \right\|_{p,\tau} \asymp \left\| \left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}.$$

По теореме 2.2 отсюда получим

$$\left\| \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} \varphi_{\mu_1}^{\sigma}\right)^{1/\sigma} \right\|_{p,\tau} \asymp \left\| \sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} \delta_{\boldsymbol{\nu}}(f) \right\|_{p,\tau} \qquad (4.15)$$

в случае $\sigma = \max\{2, \tau\} = 2$.

Введем обозначение

$$B_{\nu_1,k_2}(\boldsymbol{x}) = 2^{\nu_1\alpha_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} \delta_{\boldsymbol{\nu}}(f, 2\pi\boldsymbol{x}), \quad \nu_1 = 0, 1, \ldots, k_1.$$

Тогда набор этих функций $\{B_{\nu_1,k_2}\}_{\nu_1=0}^{k_1}$, при фиксированном k_2, будет ортогональной системой, т.е.

$$\int\limits_{\mathbb{I}^m} B_{\nu_1,k_2}(\boldsymbol{x}) B_{s_1,k_2}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0$$

при $\nu_1 \neq s_1$. Поэтому используя [1, лемма 1.4], как в доказательстве [2, лемма 1.5], можно убедиться, что

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} \|B_{\nu_1,k_2}\|_{p,\tau}^2\right)^{1/2} \ll \left\|\sum_{\mu_1=0}^{k_1} B_{\nu_1,k_2}\right\|_{p,\tau} \tag{4.16}$$

в случае $1 < p \leqslant 2$, $1 < \tau < 2$. Согласно обозначению $B_{\nu_1,k_2}(\boldsymbol{x})$, из неравенств (4.15), (4.16) получим

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} \|B_{\nu_1,k_2}\|_{p,\tau}^2\right)^{1/2} \ll \left\|\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} \delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)\right\|_{p,\tau} \asymp \left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} \varphi_{\mu_1}^{\sigma}\right)^{1/\sigma}\right\|_{p,\tau},$$

в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $1 < p \leqslant 2$, $1 < \tau < 2$. Значит,

$$\left\|\left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau} \ll \left\|\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} \delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)\right\|_{p,\tau} \tag{4.17}$$

в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $1 < p \leqslant 2$, $1 < \tau < 2$.

Таким образом, неравенство (4.12), а значит, и (4.13), верно и в случае $1 < \tau < p \leqslant 2$.

Пусть $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau$, т. е. $2 < \tau < \infty$. Введем обозначение

$$V_{\mu_1,k_2}(\boldsymbol{x}) = 2^{\mu_1\alpha_1}\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,2\pi\boldsymbol{x})|^2\right)^{1/2}.$$

Если $2 < p < \infty$, $2 < \tau < \infty$, то согласно [1, лемма 1.4] будем иметь

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} 2^{\mu_1\alpha_1\tau}\left\|\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^{\tau}\right)^{1/\tau} = \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} \|V_{\mu_1,k_2}\|_{p,\tau}^{\tau}\right)^{1/\tau} \ll$$

$$\ll \left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} |V_{\mu_1,k_2}|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau} = C\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} 2^{\mu_1\alpha_1 2} \sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau} \ll$$

$$\ll \left\|\left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau} \ll \left\|\sum_{\nu_1=0}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} 2^{\nu_1\alpha_1}\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)\right\|_{p,\tau}.$$

Следовательно, из неравенства (4.8) получим

$$I_2(f) \ll \left\|\sum_{\nu_1=0}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} 2^{\nu_1\alpha_1}\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)\right\|_{p,\tau} \tag{4.18}$$

в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau$ и $2 < p < \infty$, т.е. неравенство (4.13) верно и в случае $2 < \tau < p < \infty$.

Таким образом, в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau$ неравенство (4.13) верно для всех $1 < p < \infty$.

В силу теорем 2.2 и 2.1 из (4.13) получим

$$I_2(f) \ll 2^{-k_1\alpha_1\sigma}\left\|S_{2^{k_1},\infty}^{(\alpha_1,0)}(f - S_{\infty,2^{k_2}}(f))\right\|_{p,\tau}^{\sigma} \tag{4.19}$$

в случаях $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$ или $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $1 < p < \tau < \infty$. Аналогично можно доказать, что

$$I_3(f) \ll 2^{-k_2\alpha_2\sigma}\left\|S_{\infty,2^{k_2}}^{(0,\alpha_2)}(f - S_{2^{k_1},\infty}(f))\right\|_{p,\tau}^{\sigma}, \tag{4.20}$$

$$I_4(f) \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\sigma}\left\|S^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{2^{k_1},2^{k_2}}(f)\right\|^{\sigma}_{p,\tau} \tag{4.21}$$

в случаях $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$ или $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$ и $1 < p < \tau < \infty$. Поэтому из неравенств (4.6), (4.7) и (4.19)–(4.21) следует, что

$$I^{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(f) \ll \left\|f - (S_{n_1,\infty}(f) + S_{\infty,n_2}(f) - S_{n_1,n_2}(f))\right\|^{\sigma}_{p,\tau} + \\ + 2^{-k_1\alpha_1\sigma}\left\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{k_1},\infty}(f - S_{\infty,2^{k_2}}(f))\right\|^{\sigma}_{p,\tau} + 2^{-k_2\alpha_2\sigma}\left\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{k_2}}(f - S_{2^{k_1},\infty}(f))\right\|^{\sigma}_{p,\tau} + \\ + 2^{-k_2\alpha_2\sigma}\left\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{k_2}}(f - S_{2^{k_1},\infty}(f))\right\|^{\sigma}_{p,\tau} + 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\sigma}\left\|S^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{2^{k_1},2^{k_2}}(f)\right\|^{\sigma}_{p,\tau} \tag{4.22}$$

в случаях $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$ или $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $1 < p < \tau < \infty$.

Теперь в силу теоремы 3.1 и свойства модуля гладкости из неравенства (4.22) получим утверждение теоремы. □

Теорема 4.2. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < \infty$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,\dots,m$, $\beta = \min\{2,\tau\}$. *Если* $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, *то*

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{\pi}{n_1},\dots,\frac{\pi}{n_m}\right)_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^{m} n_j^{-\alpha_j}\left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1+1}\dots\sum_{\nu_m=1}^{n_m+1}\prod_{j=1}^{m}\nu_j^{\beta\alpha_j-1}Y^{\beta}_{\boldsymbol{\nu}}(f)_{p,\tau}\right)^{1/\beta}, \quad n_j \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Для $n_j \in \mathbb{N}$ выберем неотрицательное целое число k_j, удовлетворяющее условию $2^{k_j} \leqslant n_j < 2^{k_j+1}$, $j = 1,\dots,m$. Тогда по свойству смешанного модуля гладкости функции получим

$$I_5(f) := \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right)_{p,\tau} \ll \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau}.$$

Далее, по свойствам смешанного модуля гладкости функции отсюда получим

$$I^{\tau}_5(f) \ll \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f - S_{2^{k_1},\infty}(f) - S_{\infty,2^{k_2}}(f) + S_{2^{k_1},2^{k_2}}(f), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} + \\ + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{2^{k_1},\infty}(f), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{\infty,2^{k_2}}(f), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{2^{k_1},2^{k_2}}(f), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} \ll \\ \ll \left\|f - S_{2^{k_1},\infty}(f) - S_{\infty,2^{k_2}}(f) + S_{2^{k_1},2^{k_2}}(f)\right\|^{\tau}_{p,\tau} + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{2^{k_1},\infty}(f - S_{\infty,2^{k_2}}(f)), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} + \\ + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{\infty,2^{k_2}}(f - S_{2^{k_1},\infty}(f)), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{2^{k_1},2^{k_2}}(f), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} \ll \\ \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\|S^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{2^{k_1},2^{k_2}}(f)\right\|^{\tau}_{p,\tau} + 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{k_1},\infty}(f - S_{\infty,2^{k_2}}(f))\right\|^{\tau}_{p,\tau} + \\ + 2^{-k_2\alpha_2\tau}\left\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{k_2}}(f - S_{2^{k_1},\infty}(f))\right\|^{\tau}_{p,\tau} + \left\|f - S_{2^{k_1},\infty}(f) - S_{\infty,2^{k_2}}(f) + S_{2^{k_1},2^{k_2}}(f)\right\|^{\tau}_{p,\tau} = \\ = C\{I_6 + I_7 + I_8 + I_9\}. \tag{4.23}$$

Согласно теореме 2.1 будем иметь

$$I_6 \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}|\delta^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|^{\tau}_{p,\tau} \ll \\ \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|^{\tau}_{p,\tau}. \tag{4.24}$$

Пусть $\beta=\min\{2,\tau\}=2$ и $2<p<\infty$. Тогда согласно [2, лемма 1.2] из (4.24) получим

$$I_6 \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2}\|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)\|_{p,\tau}^2\right\}^{\tau/2} \ll$$

$$\ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2}Y^2_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right\}^{\tau/2}. \quad (4.25)$$

Если $\beta=\min\{2,\tau\}=\tau$ и $1<p<\infty$, то в силу [2, леммы 1.1, 1.4] из (4.24) получим

$$I_6 \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\tau}\|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)\|_{p,\tau}^\tau \ll$$

$$\ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\tau}Y^\tau_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}. \quad (4.26)$$

Таким образом (см. (4.25) и (4.26))

$$I_6 \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\beta}Y^\beta_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right)^{\tau/\beta} \quad (4.27)$$

в случае $\beta=\min\{2,\tau\}=2$ и $2<p<\infty$ или $\beta=\min\{2,\tau\}=\tau$ и $1<p<\infty$.

Оценим I_7. По теореме 2.1 будем иметь

$$I_7 \ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}^{(\alpha_1,0)}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^\tau \ll$$

$$\ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}2^{\mu_1\alpha_1 2}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^\tau. \quad (4.28)$$

Если $\beta=\min\{2,\tau\}=2$ и $2<p<\infty$, то согласно [2, лемма 1.2] (см. также [1]) из (4.28) следует, что

$$I_7 \ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1 2}\left\|\left(\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^2\right)^{\tau/2} \ll$$

$$\ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1 2}\left\|\left(\sum_{\mu_1=k_1+1}^{\infty}\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^2\right)^{\tau/2} \ll$$

$$\ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1 2}Y^2_{[2^{\mu_1-1}],[2^{k_2}]}(f)_{p,\tau}\right\}^{\tau/2} \ll$$

$$\ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2}Y^2_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right\}^{\tau/2}. \quad (4.29)$$

Пусть $\beta=\min\{2,\tau\}=\tau$ и $1<p<\infty$. Тогда согласно [2, леммы 1.1, 1.4] из (4.28) получим

$$I_7 \ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1} 2^{\mu_1\alpha_1\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^{\tau} \ll$$

$$\ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1} 2^{\mu_1\alpha_1\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_1=k_1+1}^{\infty}\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^{\tau} \ll$$

$$\ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1} 2^{\mu_1\alpha_1\tau} Y^{\tau}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{k_2}]}(f)_{p,\tau} \ll$$

$$\ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2} 2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\tau} Y^{\tau}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}. \qquad (4.30)$$

Аналогично (4.29) и (4.30) можно доказать, что

$$I_8 \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2} 2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2} Y^{2}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right\}^{\tau/2} \qquad (4.31)$$

в случае $\beta = \min\{2,\tau\} = 2$ и $2 < p < \infty$ и

$$I_8 \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2} 2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\tau} Y^{\tau}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau} \qquad (4.32)$$

в случае $\beta = \min\{2,\tau\} = \tau$ и $1 < p < \infty$.

По лемме 3.4 имеем

$$I_9 \ll Y^{\tau}_{[2^{k_1}],[2^{k_2}]}(f)_{p,\tau} \qquad (4.33)$$

для $1 < p,\tau < \infty$. Теперь из неравенств (4.23), (4.27), (4.29), (4.31), (4.33) следует, что

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)_{p,\tau} \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2} 2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2} Y^{2}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right\}^{1/2} \qquad (4.34)$$

в случае $\beta = \min\{2,\tau\} = 2$ и $2 < p < \infty$. Если $\beta = \min\{2,\tau\} = \tau$ и $1 < p < \infty$, то

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)_{p,\tau} \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)}\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2} 2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\tau} Y^{\tau}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right)^{1/\tau}. \qquad (4.35)$$

Нетрудно видеть, что из неравенств (4.34) и (4.35) вытекает утверждение теоремы. □

В случае $\tau = p$ теоремы 4.1 и 4.2 доказаны в [43]. Из теорем 4.1 и 4.2 следуют леммы 3.4 и 3.5 соответственно.

Заключение Задачу о точности константы в неравенствах Джексона—Стечкина исследовали Н. П. Корнейчук [14], В. И. Бердышев [7], Н. И. Черных [33], А. Г. Бабенко [6], В. И. Иванов [13] (см. также библиографию в [11,12]). О. И. Смирнов доказал теорему Джексона с точной константой для приближения «углом» функций в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$ при $1 \leqslant p < 2$ (см. [23]).

Основные результаты работы представлены на международной Воронежской весенней математической школе 3–9 мая 2023 г. (см. [47]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акишев Г.* Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца// Тр. ИММ УрО РАН. — 2017. — *23*, № 3. — С. 3–21.
2. *Акишев Г.* Оценки наилучших приближений функций класса Никольского—Бесова в пространстве Лоренца тригонометрическими полиномами// Тр. ИММ УрО РАН. — 2020. — *26*, № 2. — С. 5–27.

3. *Акишев Г.* Неравенства для наилучшего приближения «углом» и модуля гладкости функции в пространстве Лоренца// Мат. Междунар. Воронеж. весенней мат. школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXIV» (Воронеж, 3–9 мая 2023 г.). — Воронеж: ВГУ, 2023. — С. 37–38.
4. *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. — Алма-Ата: Наука, 1976.
5. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Гостехиздат, 1947.
6. *Бабенко А. Г.* О в неравенстве Джексона—Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2001. — *7*, № 1. — С. 30–46.
7. *Бердышев В. И.* О теореме Джексона в L_p// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1967. — *88*. — С. 3–16.
8. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
9. *Бугров Я. С.* Приближение тригонометрическими полиномами функций многих переменных// в кн.: Труды научного объединения преподавателей физико-математических факультетов педагогических институтов Дальнего Востока. Т. 1. — Хабаровск, 1962. — С. 1–28.
10. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике Lp для $0 < p < 1$// Мат. заметки. — 1975. — *56*, № 2. — С. 15–40.
11. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения периодических функций в работах С. Б. Стечкина и их развитие// Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — *16*, № 4. — С. 5–17.
12. *Иванов В. И.* Константы Джексона и константы Юнга в векторных L_p-пространствах// Изв. Тульск. гос. ун-та. — 1995. — *1*, № 1. — С. 67–85.
13. *Иванов В. И., Смирнов О. И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. — Тула: ТулГУ, 1995.
14. *Конейчук Н. П.* Точная константа в неравенстве Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций// Докл. АН СССР. — 1962. — *145*, № 3. — С. 314–315.
15. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.
16. *Новиков С. Я.* Последовательности функций в симметричных пространствах. — Самара: Самар. ун-т, 2008.
17. *Потапов М. К.* О приближении «углом»// Proc. Conf. Constructive Theory of Functions. — Budapesht: Akad. Kiado, 1972. — С. 371–399.
18. *Потапов М. К.* Приближение «углом» и теоремы вложения// Math. Balkan. — 1972. — *2*. — С. 183–198.
19. *Потапов М. К.* Изучение некоторых классов функций при помощи приближения «углом»// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1972. — *117*. — С. 256–291.
20. *Руновский К. В.* Прямая теорема теории приближений для общего модуля гладкости// Мат. заметки. — 2014. — *95*, № 6. — С. 899–910.
21. *Руновский К. В., Омельченко Н. В.* Смешанный обобщенный модуль гладкости и приближение «углом» из тригонометрических полиномов// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 3. — С. 421–432.
22. *Смаилов Е. С., Есмаганбетов М. Г., Шаяхметова Б. К.* О дифференциальных свойствах функций в $L_{p_1,p_2}[0,2\pi]^2$// в кн.: Сб. науч. тр. «Современные вопросы теории функции и функционального анализа». — Караганда, 1988. — С. 86–100.
23. *Смирнов О. И.* Приближение в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$ «углом»// Изв. Тульск. гос. ун-та. — 1995. — *1*, № 1. — С. 116–123.
24. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.
25. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1951. — *15*, № 3. — С. 219–242.
26. *Стечкин С. Б.* О теореме Колмогорова—Селиверстова// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1953. — *17*, № 6. — С. 499–512.
27. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$// Мат. сб. — 1975. — *98*, № 3. — С. 395–415.
28. *Стороженко Э. А., Освальд П.* Теоремы Джексона в пространствах $L_p(R^n)$, $0 < p < 1$// Сиб. мат. ж. — 1978. — *19*, № 4. — С. 888–901.
29. *Тиман М. Ф.* Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p// АН Азерб. ССР. — 1965. — С. 18–25.
30. *Тиман М. Ф.* О теореме Джексона в пространствах L_p// Укр. мат. ж. — 1966. — *1*. — С. 134–137.

31. *Тиман А. Ф., Тиман М. Ф.* Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем// Докл. АН СССР. — 1950. — *71.* — С. 17–19.
32. *Тиман М. Ф.* Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p// Мат. сб. — 1958. — *46*, № 1. — С. 125–132.
33. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1992. — *198.* — С. 232–241.
34. *Akgun R.* Approximation by polynomials in rearrangement invariant quasi Banach function spaces// Banach J. Math. Anal. — 2012. — *6*, № 2. — P. 113–131.
35. *Gogatishvili A., Opic B., Tikhonov S., Trebels W.* Ulyanov-type inequalities between Lorentz–Zygmund spaces// J. Fourier Anal. Appl. — 2014. — *20.* — P. 1020–1049.
36. *Creekmore J.* Type and cotype in Lorentz $L_{p,q}$ spaces// Proc. Kön. Ned. Akad. Wetensch. — 1981. — *84*, № 2. — P. 145–152.
37. *Gurbea G. P., Cuerva J., Perez C.,* Extrapolation with weights, rearrangement function spaces, modular inequalities and applications to singular integrals// Adv. Math. — 2006. — *203.* — P. 256–318.
38. *Yurt H., Guven A.* Multivariate approximation theorems in weighted Lorentz spaces// Mediterr. J. Math. — 2015. — *12.* — P. 863–876.
39. *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annaheruny stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Frades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung. — Göttingen, 1911.
40. *Jafarov S. Z.* Approximation by trigonometric polynomials in rearrangement invariant quasi Banach function spaces// Mediterr. J. Math. — 2015. — *12.* — P. 37–50.
41. *Johansson H.* Embedding of H_p^ω in some Lorentz spases// Res. Rept. Univ. Umea. — 1975. — *6.* — P. 1–36.
42. *Kokilashvili V., Yildirir Y. E.* On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces// J. Funct. Spaces Appl. — 2010. — *8.* — P. 67–86.
43. *Potapov M. K., Simonov B. V., Tikhonov S. Yu.* Mixed moduli of smoothness in L_p, $1 < p < \infty$: A survey// Surv. Approx. Theory. — 2013. — *8.* — P. 1–57.
44. *Quade E. S.* Trigonometric approximation in the mean// Duke Math. J. — 1937. — *3.* — P. 529–543.
45. *Salem R.* Sur certaines fonctions continues et le propriétés de leur séries de Fourier// C. R. Acad. Sci. — 1935. — *201.* — P. 703–705.
46. *Taberski R.* Differences, moduli and derivatives of fractional orders// Comment. Math. Prace Mat. — 1976–1977. — *19*, № 2. — P. 389–400.
47. *Taberski R.* Indirect approximation theorems in L^p-metrics $(1 < p < \infty)$// Banach Center Publ. — 1979. — *4.* — P. 247–259.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Акишев Габдолла
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Казахстанский филиал, Астана, Казахстан
E-mail: akishev_g@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 25–40
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-25-40

УДК 517.977: 534.112

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАДАННЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2023 г. **В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША**

Аннотация. Статья посвящена разработке конструктивного подхода к решению задачи оптимального граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой, динамика которой моделируется одномерным волновым уравнением с кусочно постоянными характеристиками. Специфика предлагаемого подхода позволяет удовлетворить многоточечные промежуточные условия. Полученные результаты проиллюстрированы конкретным примером.

***Ключевые слова*:** колебания, оптимальное управление, неоднородный процесс, волновое уравнение, разделение переменных.

OPTIMAL BOUNDARY CONTROL FOR A DISTRIBUTED INHOMOGENEOUS OSCILLATORY SYSTEM WITH GIVEN INTERMEDIATE CONDITIONS

© 2023 **V. R. BARSEGHYAN, S. V. SOLODUSHA**

Abstract. In this paper, we develop a constructive approach to the problem of optimal boundary control for a distributed inhomogeneous oscillatory system whose dynamics is modeled by a one-dimensional wave equation with piecewise constant characteristics. Using the approach proposed, one may satisfy multi-point intermediate conditions. The results obtained are illustrated by a specific example.

***Keywords and phrases*:** oscillations, optimal control, inhomogeneous process, wave equation, separation of variables.

***AMS Subject Classification*:** 93C95, 70Q05

1. Введение. Изучению задач управления, в том числе и оптимального, распределенных колебательных систем, где задаются начальное, конечное, а также и многоточечные промежуточные условия, посвящена многочисленная литература, в частности, работы [1, 3–5, 7, 8, 10–20, 24–28] (см. также библиографию в этих работах). Одна из первых задач, где колебательная система состоит из двух разных кусочно однородных сред (разнородных распределенных составных систем), сформулирована А. Г. Бутковским и рассмотрена в [7]. В [4, 5, 8, 10, 12–15, 28] рассмотрены задачи граничного управления колебаниями распределенных систем, состоящих из разнородных участков (с кусочно постоянными характеристиками). Исследование этих задач, как правило, основывается на использовании метода бегущих волн и получении формул типа Даламбера.

Работа С. В. Солодуши выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема No. AAAA-A21-121012090034-3).

Задачам управления и оптимального управления составных динамических систем посвящены, в частности, работы [1, 2, 4, 5, 7, 8, 10–15, 19–24, 27, 28]. В отличие от [1, 19, 20, 24] здесь представлена задача оптимального граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой с управляющими смещениями обоих концов. В качестве промежуточных условий учитываются заданные в разные промежуточные моменты времени значения функции колебания (прогиба) и производной от этой функции (скоростей точек). Критерий качества определен на всем временном интервале. Будем считать, что колебательный процесс характеризуется разными физическими свойствами (т.е. состоит из двух участков, которые имеют различные упругие свойства и плотность). При этом длины этих участков таковы, что время прохождения волны по каждому из них одинаково. Настоящая работа наиболее близка к исследованиям, представленным в [1, 19, 20, 24].

Цель данной статьи заключается в разработке аналитической методики построения оптимального граничного управляющего воздействия. Управление реализуется за счет смещения, которое прилагается на двух концах и за конечный временной промежуток переводит колебания из известного начального состояния (через многоточечные промежуточные) в заданное конечное состояние. Статья структурирована в соответствии со схемой построения решения задачи. В разделе 2 сформулирована постановка задачи. В разделе 3 исходная задача сведена к задаче с нулевыми граничными условиями. Для ее решения в разделах 4 и 5 используются метод разделения переменных и методы теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. Построение оптимальной функции управления с помощью проблем моментов приведено в разделе 5. В разделах 6 и 7 приведены результаты, иллюстрирующие применение полученных формул на конкретных примерах.

2. Постановка задачи. Рассмотрим колебания распределенной кусочно однородной среды, которая расположена вдоль отрезка $-l_1 \leqslant x \leqslant l$ и состоит из двух участков длины $-l_1$ и l соответственно, так что $-l_1 \leqslant x \leqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant l$. Обозначим через $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$ скорость прохождения волны по i-му ($i = 1, 2$) участку, где $\rho_i = \mathrm{const}$ — плотность, $k_i = \mathrm{const}$ — модуль Юнга. Пусть величины l_1 и l удовлетворяют равенству

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}, \tag{2.1}$$

так что время прохождения волны по первому участку (где $-l_1 \leqslant x \leqslant 0$) равно времени прохождения волны по второму участку (где $0 \leqslant x \leqslant l$).

Будем считать, что функцией $Q(x,t)$, $-l_1 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, задается состояние неоднородного процесса, динамика которого описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2.2}$$

с условиями на границах

$$Q(-l_1, t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.3}$$

и с сопряженными условиями при $x = 0$ (точка соединения участков)

$$Q(0-0,t) = Q(0+0,t), \quad a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0+0}. \tag{2.4}$$

Начальные (при $t = t_0 = 0$) и конечные (при $t = T$) условия заданы следующим образом:

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.5}$$

$$Q(x,T) = \varphi_T(x), \quad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \leqslant x \leqslant l. \tag{2.6}$$

Пусть в некоторые моменты времени

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$$

известны промежуточные значения функции состояния и ее производной в виде

$$Q(x,t_i) = \varphi_i(x), \quad -l_1 \leqslant x \leqslant l, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2}, \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l_1 \leqslant x \leqslant l, \quad j = 2\alpha, \qquad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2}. \tag{2.8}$$

В условиях (2.7) и (2.8) предполагается, что m — четное число. В формуле (2.3) функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ являются управляющими воздействиями (граничные управления). Дополнительно будем считать, что функция $Q(x,t) \in C^2(\Omega_T)$, $\varphi_i(x) \in C^2[-l_1, l]$ и $\psi_j(x) \in C^1[-l_1, l]$, где множество $\Omega_T = \{(x,t): \ x \in [-l_1, l], \ t \in [0,T]\}$, а все функции таковы, что выполняются условия согласования (см. [1, 19, 20, 24]).

Указанным динамическим процессом могут быть представлены продольные (поперечные) колебания кусочно однородного стержня (струны), где ρ — плотность, k — модуль упругости (натяжение струны). Отметим также, что распределенный кусочно однородный колебательный процесс (2.2) описывается системой переменной структуры (см. [1, 2, 19–22, 24]. Сформулируем далее задачу оптимального граничного управления неоднородными колебаниями системы (2.2) с условиями, заданными в промежуточные моменты времени.

Требуется найти такие оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, в (2.3), под воздействием которых колебательное движение системы (2.2) из заданного начального состояния (2.5) переходит в конечное состояние (2.6), удовлетворяя условиям (2.7), (2.8) и минимизируя функционал

$$\left[\int_0^T \left(\mu^2(t) + \nu^2(t)\right) dt\right]^{1/2}. \tag{2.9}$$

Так как в промежуточные моменты времени t_k, $k = \overline{1,m}$, известны или только значения функции колебания (2.7), или только значения ее производной (2.8), то целесообразно использовать такой подход решения сформулированной задачи оптимального управления, где будет учтена специфика промежуточных условий (2.7), (2.8).

3. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Для построения решения введем такую новую переменную ξ (см. [1, 19, 20, 24]), что

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{a_2}{a_1}x, & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{3.1}$$

Замена вида (3.1) приводит к преобразованию (растяжению либо к сжатию) отрезка $-l_1 \leqslant x \leqslant 0$ относительно точки $x = 0$. Легко видеть, что, в силу (2.1), вместо отрезка $-l_1 \leqslant x \leqslant 0$ имеем $-l \leqslant \xi \leqslant 0$. Таким образом, для функции $Q(\xi, t)$ получим одинаковое на участках длины l уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, & -l \leqslant \xi \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, & 0 \leqslant \xi \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \leqslant \xi \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.2}$$

с условиями на границах

$$Q(-l,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.3}$$

начальными условиями

$$Q(\xi,0)=\varphi_0(\xi),\quad \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_0(\xi),\quad -l\leqslant x\leqslant l, \tag{3.4}$$

промежуточными условиями

$$Q(\xi,t_i)=\varphi_i(\xi),\quad -l\leqslant\xi\leqslant l,\quad i=2\alpha-1,\quad \alpha=1,\dots,\frac{m}{2}, \tag{3.5}$$

$$\left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=t_j}=\psi_j(x),\quad -l\leqslant\xi\leqslant l,\quad j=2\alpha,\qquad \alpha=1,\dots,\frac{m}{2}, \tag{3.6}$$

и конечными условиями

$$Q(\xi,T)=\varphi_T(\xi),\quad \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T}=\psi_T(\xi),\quad -l\leqslant\xi\leqslant l, \tag{3.7}$$

а также сопряженными условиями при $\xi=0$ (точке соединения участков)

$$Q(0-0,t)=Q(0+0,t),\quad a_1\rho_1\left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0-0}=a_2\rho_2\left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0+0}. \tag{3.8}$$

Для удобства здесь все функции после замены (3.1) оставлены в исходных обозначениях.

Принимая во внимание неоднородность граничного условия (3.3), решение задачи (3.2) будем искать в виде

$$Q(\xi,t)=V(\xi,t)+W(\xi,t), \tag{3.9}$$

где для искомой функции $V(\xi,t)$ справедливы однородные граничные условия

$$V(-l,t)=V(l,t)=0, \tag{3.10}$$

а функция $W(\xi,t)$ — решение уравнения (3.2) с условиями

$$W(-l,t)=\mu(t),\quad W(l,t)=\nu(t), \tag{3.11}$$

удовлетворяющая условию

$$W(\xi,t)=\frac{1}{2l}\Big[(l-\xi)\mu(t)+(l+\xi)\nu(t)\Big]. \tag{3.12}$$

Из (3.2), (3.9) и (3.12) для определения функции $V(\xi,t)$ получим

$$\frac{\partial^2V(\xi,t)}{\partial t^2}=a_2^2\frac{\partial^2V(\xi,t)}{\partial\xi^2}+F(\xi,t),\quad -l\leqslant\xi\leqslant l,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3.13}$$

где

$$F(\xi,t)=\frac{1}{2l}\Big[(\xi-l)\ddot{\mu}(t)-(\xi+l)\ddot{\nu}(t)\Big]. \tag{3.14}$$

Заметим, что функция $V(\xi,t)$ удовлетворяет условию сопряжения (3.8) в точке $\xi=0$. Согласно (3.1) будем иметь

$$\varphi_0(-l_1)=\varphi_0(-l),\quad \varphi_i(-l_1)=\varphi_i(-l),\quad \psi_j(-l_1)=\psi_j(-l), \tag{3.15}$$

$$\varphi_T(-l_1)=\varphi_T(-l),\quad \psi_0(-l_1)=\psi_0(-l),\quad \psi_T(-l_1)=\psi_T(-l). \tag{3.16}$$

Из начальных (3.4), промежуточных (3.5), (3.6) и конечных (3.7) условий, с учетом условий согласования и (3.15) получим, что решение $V(\xi,t)$ задачи (3.13) должно удовлетворять начальным условиям

$$\begin{aligned} V(\xi,0)&=\varphi_0(\xi)-\frac{1}{2l}\Big[(l-\xi)\varphi_0(-l)+(l+\xi)\varphi_0(l)\Big],\\ \left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0}&=\psi_0(\xi)-\frac{1}{2l}\Big[(l-\xi)\psi_0(-l)+(l+\xi)\psi_0(l)\Big], \end{aligned} \tag{3.17}$$

промежуточным условиям

$$\begin{aligned} V(\xi,t_i) &= \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}(l-\xi)\varphi_i(-l), \qquad i = 2\alpha-1, \qquad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2}, \\ \left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} &= \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l}(l-\xi)\psi_j(-l), \qquad j = 2\alpha, \qquad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

и конечным условиям

$$\begin{aligned} V(\xi,T) &= \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\Big[(l-\xi)\varphi_T(-l) + (l+\xi)\varphi_T(l)\Big], \\ \left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T} &= \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\Big[(l-\xi)\psi_T(-l) + (l+\xi)\psi_T(l)\Big]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Исходная задача сведена к задаче оптимального управления колебанием, описываемым неоднородным уравнением (3.13) с однородными граничными условиями (3.10). Полученная задача оптимального управления формулируется следующим образом.

Требуется найти оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, доставляющие минимум функционала (2.9), под воздействием которых вынужденное колебание, моделируемое уравнением (3.13) с граничными условиями (3.10), переходит из заданного начального состояния (3.17) через промежуточные состояния (3.18) в конечное состояние (3.19).

4. Сведение решения задачи с нулевыми граничными условиями к проблеме моментов. С учетом однородных граничных условий (3.10) решение уравнения (3.13) ищем в виде

$$V(\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}, \quad V_k(t) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} V(\xi,t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}d\xi. \tag{4.1}$$

Функции $F(\xi,t)$, $\varphi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ представим в виде рядов Фурье в базисе $\left\{\sin\frac{\pi k\xi}{l},\ k=1,2,\ldots\right\}$ и, подставив их значения вместе с $V(\xi,t)$ в уравнение (3.13), (3.14) и в условия (3.17)–(3.19), для каждого k получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2\pi k}{l}\right)^2, \tag{4.2}$$

$$F_k(t) = \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\ddot{\nu}(t)\big(2(-1)^k - 1\big) - \ddot{\mu}(t)\right] \tag{4.3}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} V_k(0) &= \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\varphi_0(-l) - \varphi_0(l)\big(2(-1)^k - 1\big)\right], \\ \dot{V}_k(0) &= \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\psi_0(-l) - \psi_0(l)\big(2(-1)^k - 1\big)\right], \end{aligned} \tag{4.4}$$

промежуточными условиями

$$\begin{aligned} V_k(t_i) &= \varphi_k^{(i)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\varphi_i(-l) - \varphi_i(l)\big(2(-1)^k - 1\big)\right], \qquad i = 2\alpha-1, \qquad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2}, \\ \dot{V}_k(t_j) &= \psi_k^{(j)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\psi_j(-l) - \psi_j(l)\big(2(-1)^k - 1\big)\right], \qquad j = 2\alpha, \qquad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

и конечными условиями

$$\begin{aligned} V_k(T) &= \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\varphi_T(-l) - \varphi_T(l)\big(2(-1)^k - 1\big)\right], \\ \dot{V}_k(T) &= \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\psi_T(-l) - \psi_T(l)\big(2(-1)^k - 1\big)\right]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь коэффициенты Фурье функций $F(\xi,t)$, $\varphi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ и $\psi_k^{(j)}$ соответственно.

Общее решение уравнения (4.2) представим в виде

$$V_k(t) = V_k(0)\cos\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau. \tag{4.7}$$

Следуя [15–20] и учитывая условия (4.5) и (4.6), из (4.7) получим, что функции управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для всех $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют следующим выражениям:

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau + E_k\int\limits_0^T \nu(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau = C_{1k},\\
\int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau + E_k\int\limits_0^T \nu(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau = C_{2k},\\
\int\limits_0^T \mu(\tau)h_k^{(i)}(\tau)d\tau + E_k\int\limits_0^T \nu(\tau)h_k^{(i)}(\tau)d\tau = C_{1k}(t_i), \quad i = 2\alpha-1,\\
\int\limits_0^T \mu(\tau)g_k^{(j)}(\tau)d\tau + E_k\int\limits_0^T \nu(\tau)g_k^{(j)}(\tau)d\tau = C_{2k}(t_j), \quad j = 2\alpha,
\end{gathered} \tag{4.8}$$

где $\alpha = 1, \dots, m/2,\ E_k = 1 - 2(-1)^k$,

$$\begin{aligned}
C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k} + X_{1k} + E_kY_{1k}\right], & C_{2k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k} + X_{2k} + E_kY_{2k}\right],\\
C_{1k}(t_i) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} + E_kY_{1k}^{(i)}\right], & C_{2k}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} + E_kY_{2k}^{(j)}\right],
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{1k}(t_i) &= \lambda_kV_k(t_i) - \lambda_kV_k(0)\cos\lambda_kt_i - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_kt_i,\\
\tilde{C}_{2k}(t_j) &= \dot{V}_k(t_j) + \lambda_kV_k(0)\sin\lambda_kt_j - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_kt_j,\\
\tilde{C}_{1k} &= \lambda_kV_k(T) - \lambda_kV_k(0)\cos\lambda_kT - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_kT,\\
\tilde{C}_{2k} &= \dot{V}_k(T) + \lambda_kV_k(0)\sin\lambda_kT - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_kT,\\
X_{1k} &= \lambda_k\varphi_T(-l) - \psi_0(-l)\sin\lambda_kT - \lambda_k\varphi_0(-l)\cos\lambda_kT,\\
X_{2k} &= \psi_T(-l) - \psi_0(-l)\cos\lambda_kT + \lambda_k\varphi_0(-l)\sin\lambda_kT,\\
Y_{1k} &= \lambda_k\varphi_T(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_kT - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_kT,\\
Y_{2k} &= \psi_T(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_kT + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_kT,\\
X_{1k}^{(i)} &= \lambda_k\varphi_i(-l) - \psi_0(-l)\sin\lambda_kt_i - \lambda_k\varphi_0(-l)\cos\lambda_kt_i,\\
Y_{1k}^{(i)} &= \lambda_k\varphi_i(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_kt_i - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_kt_i,\\
X_{2k}^{(j)} &= \psi_j(-l) - \psi_0(-l)\cos\lambda_kt_j + \lambda_k\varphi_0(-l)\sin\lambda_kt_j,\\
Y_{2k}^{(j)} &= \psi_j(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_kt_j + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_kt_j,
\end{aligned}$$

$$h_k^{(i)}(\tau) = \begin{cases}\sin\lambda_k(t_i-\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant t_i,\\ 0, & t_i < \tau \leqslant T,\end{cases} \qquad g_k^{(j)}(\tau) = \begin{cases}\cos\lambda_k(t_j-\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant t_j,\\ 0, & t_j < \tau \leqslant T.\end{cases}$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к поиску функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$, которые для всех $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют интегральным соотношениям (4.8) и, кроме того, обеспечивают минимум функционала (2.9) для $0 \leqslant t \leqslant T$.

На практике, как правило, ограничиваются некоторыми первыми значениями n $(k = \overline{1, n})$ гармоник и решают задачу синтеза управлений, привлекая методы теории оптимального управления конечномерными системами. Будем строить решение задачи, придерживаясь этого подхода. Отметим, что при произвольном фиксированном значении число выражений в (4.8) равно $(2+m)n$, которым должны одновременно удовлетворять искомые функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$, определяется по формуле $(2+m)n$, где m — число промежуточных моментов времени. Тогда из соотношения (4.8) следует справедливость следующего важного результата данного пункта — утверждение о вполне управляемости (см. [2,6,9]).

Теорема 4.1. *Для произвольного числа первых n гармоник динамический процесс, описываемый уравнением* (4.2) *с условиями* (4.4)–(4.6), *вполне управляем на промежутке времени* $[0,T]$ *тогда и только тогда, когда для любых значений величин C_{1k}, C_{2k} и $C_{1k}(t_i)$, $C_{2k}(t_j)$, $i=2\alpha-1$, $j=2\alpha$, $\alpha=1,\dots,m/2$, $k=\overline{1,n}$, определяемых условиями* (4.9), *можно найти управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $t\in[0,T]$, удовлетворяющие условию* (4.8).

5. Решение задачи. Вообще говоря, функционал (2.9) можно рассматривать как квадрат нормы соответствующего линейного нормированного пространства. Так как интегральные соотношения (4.8), порожденные функциями $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, линейны, то задачу определения оптимального управления для n $(n=1,2,\dots)$ можно рассматривать как проблему моментов (см. [2,3,9]). Следовательно, для решения этой задачи можно воспользоваться алгоритмом решения проблемы моментов.

Таким образом, для решения конечномерной (при $k=\overline{1,n}$) проблемы моментов (2.9) и (4.8), следуя [2, 9], нужно найти такие величины p_k, q_k, γ_{ik} γ_{jk}, $i=2\alpha-1$, $j=2\alpha$, $\alpha=1,\dots,m/2$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^{n}\left[p_kC_{1k}+q_kC_{2k}+\sum_{\substack{i=2\alpha-1\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{ik}C_{1k}(t_i)+\sum_{\substack{i=2\alpha\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{jk}C_{2k}(t_j)\right]=1, \tag{5.1}$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2=\min_{(5.1)}\int_0^T\Big[h_{1n}^2(\tau)+h_{2n}^2(\tau)\Big]d\tau, \tag{5.2}$$

где

$$h_{1n}(\tau)=\sum_{k=1}^{n}\left[p_k\sin\lambda_k(T-\tau)+q_k\cos\lambda_k(T-\tau)+\sum_{\substack{i=2\alpha-1\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{ik}h_k^{(i)}(\tau)+\sum_{\substack{i=2\alpha\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{jk}g_k^{(j)}(\tau)\right],$$

$$h_{2n}(\tau)=\sum_{k=1}^{n}E_k\left[p_k\sin\lambda_k(T-\tau)+q_k\cos\lambda_k(T-\tau)+\sum_{\substack{i=2\alpha-1\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{ik}h_k^{(i)}(\tau)+\sum_{\substack{i=2\alpha\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{jk}g_k^{(j)}(\tau)\right].$$

Для поиска величин p_k^0, q_k^0, γ_{ik}^0, γ_{jk}^0, $k=\overline{1,n}$, $i=2\alpha-1$, $j=2\alpha$, $\alpha=1,\dots,m/2$, минимизирующих (5.2), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Для этого введем

$$F_n=\int_0^T\Big[\big(h_{1n}(\tau)\big)^2+\big(h_{2n}(\tau)\big)^2\Big]d\tau+ \\ +\beta_n\left[\sum_{k=1}^{n}\left(p_kC_{1k}+q_kC_{2k}+\sum_{\substack{i=2\alpha-1\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{ik}C_{1k}(t_i)+\sum_{\substack{i=2\alpha\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{jk}C_{2k}(t_j)\right)-1\right],$$

где β_n — неопределенный множитель Лагранжа. Используя указанный метод, выполним вычисление производных функции F_n по p_k, q_k, γ_{ikk}, γ_{jk}, $k=\overline{1,n}$, $i=2\alpha-1$, $j=2\alpha$, $\alpha=1,\dots,m/2$.

Далее, приравняв полученные выражения нулю, получаем следующую систему интегральных равенств:

$$\int_0^T \Big[h_{1n}(\tau)+E_k h_{2n}(\tau)\Big]\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau=-\frac{\beta_n}{2}C_{1k},\quad \int_0^T \Big[h_{1n}(\tau)+E_k h_{2n}(\tau)\Big]h_k^{(i)}(\tau)d\tau=-\frac{\beta_n}{2}C_{1k}(t_i),$$

$$\int_0^T \Big[h_{1n}(\tau)+E_k h_{2n}(\tau)\Big]\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau=-\frac{\beta_n}{2}C_{2k},\quad \int_0^T \Big[h_{1n}(\tau)+E_k h_{2n}(\tau)\Big]g_k^{(j)}(\tau)d\tau=-\frac{\beta_n}{2}C_{2k}(t_j),$$

$$i=2\alpha-1,\quad \alpha=1,\dots,\frac{m}{2},\quad j=2\alpha,\quad k=\overline{1,n}.$$

Дальнейшие построения решения не приводятся, так как они аналогичны действиям, приведенным в [1, 20, 24–26]. Отметим, что в результате указанных построений получим оптимальные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ для любого $n=1,2,\dots$, которые представляются в следующем виде:

$$\mu_n^0(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[G_k\Big(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\Big)+\sum_{\substack{i=2\alpha-1\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k(t_i-\tau)+\sum_{\substack{i=2\alpha\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{jk}^0\cos\lambda_k(t_j-\tau)\right], & \\ \hfill 0\leqslant\tau\leqslant t_1, & \\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[G_k\Big(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\Big)+\sum_{\substack{i=2\alpha-1\\ \alpha=2}}^{m/2}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k(t_i-\tau)+\sum_{\substack{i=2\alpha\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{jk}^0\cos\lambda_k(t_j-\tau)\right], & \\ \hfill t_1<\tau\leqslant t_2, & \\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big[G_k\Big(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\Big)+\gamma_{mk}^0\cos\lambda_k(t_m-\tau)\Big], & t_{m-1}<\tau\leqslant t_m,\\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}G_k\Big(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\Big), & t_m<\tau\leqslant t_{m+1}=T,\end{cases}\tag{5.3}$$

$$\nu_n^0(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}E_k\left[G_k\Big(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\Big)+\sum_{\substack{i=2\alpha-1\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k(t_i-\tau)+\sum_{\substack{i=2\alpha\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{jk}^0\cos\lambda_k(t_j-\tau)\right], & \\ \hfill 0\leqslant\tau\leqslant t_1, & \\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}E_k\left[G_k\Big(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\Big)+\sum_{\substack{i=2\alpha-1\\ \alpha=2}}^{m/2}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k(t_i-\tau)+\sum_{\substack{i=2\alpha\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{jk}^0\cos\lambda_k(t_j-\tau)\right], & \\ \hfill t_1<\tau\leqslant t_2, & \\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}E_k\Big[G_k\Big(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\Big)+\gamma_{mk}^0\cos\lambda_k(t_m-\tau)\Big], & t_{m-1}<\tau\leqslant t_m,\\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}E_kG_k\Big(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\Big), & t_m<\tau\leqslant t_{m+1}=T,\end{cases}\tag{5.4}$$

где

$$G_k\Big(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\Big)=p_k^0\sin\lambda_k(T-\tau)+q_k^0\cos\lambda_k(T-\tau).$$

Здесь через p_k^0, q_k^0, γ_{ik}^0, γ_{jk}^0 обозначены значения величин p_k, q_k, γ_{ikk}, γ_{jk}, $k=\overline{1,n}$, $i=2\alpha-1$, $j=2\alpha$, $\alpha=1,\ldots,m/2$, при которых (5.2) принимает минимальное значение с условием (5.1), а

$$(\rho_n^0)^2=\int\limits_0^T\Big[\big(h_{1n}^0(\tau)\big)^2+\big(h_{2n}^0(\tau)\big)^2\Big]\,d\tau,$$

$$h_{1n}^0(\tau)=\sum_{k=1}^{n}\left[G_k\Big(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\Big)+\sum_{\substack{i=2\alpha-1\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{ik}^0h_k^{(i)}(\tau)+\sum_{\substack{i=2\alpha\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{jk}^0g_k^{(j)}(\tau)\right],$$

$$h_{2n}^0(\tau)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[G_k\Big(p_k^0,\,q_k^0,\,\lambda_k,\,T,\,\tau\Big)+\sum_{\substack{i=2\alpha-1\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{ik}^0h_k^{(i)}(\tau)+\sum_{\substack{i=2\alpha\\ \alpha=1}}^{m/2}\gamma_{jk}^0g_k^{(j)}(\tau)\right].$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1. *При согласовании исходных данных задачи, указанных в п.* 1, *и выполнении условий вполне управляемости задача оптимального управления* (2.1)–(2.9) (*или* (3.13), (3.17)–(3.19), (2.9)) *для произвольного числа первых n гармоник имеет решение, определяемое формулами* (5.3) *и* (5.4).

Подставляя выражения оптимальных управлений $\mu_n^0(t)$ и $\nu_n^0(\tau)$ в (4.3), а полученное для функций $F_k^0(\tau)$ выражение — в (4.7), получим функцию $V_k^0(t)$, $t\in[0,T]$, $k=\overline{1,n}$. Далее, из формулы (4.1) имеем

$$V_n^0(\xi,t)=\sum_{k=1}^{n}V_k^0(t)\sin\frac{\pi k}{l}\xi, \tag{5.5}$$

а из (3.9)–(3.12) получим оптимальную функцию колебания для первых n гармоник $Q_n^0(\xi,t)$ в виде

$$Q_n^0(\xi,t)=V_n^0(\xi,t)+W_n^0(\xi,t), \tag{5.6}$$

где

$$W_n^0(\xi,t)=\frac{1}{2l}\Big[(l-\xi)\mu_n^0(t)+(l+\xi)\nu_n^0(t)\Big]. \tag{5.7}$$

С учетом принятого обозначения (3.1) и согласно (5.5)–(5.7), оптимальная функция $Q_n^0(x,t)$ при $-l_1\leqslant x\leqslant l$ имеет вид

$$Q_n^0(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}V_k^0(t)\sin\frac{\pi k}{l_1}x+\frac12\left[\left(1-\frac{x}{l_1}\right)\mu_n^0(t)+\left(1+\frac{x}{l_1}\right)\nu_n^0(t)\right], & -l_1\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}V_k^0(t)\sin\frac{\pi k}{l}x+\frac12\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_n^0(t)+\left(1+\frac{x}{l}\right)\nu_n^0(t)\right], & 0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T.\end{cases} \tag{5.8}$$

Легко убедиться, что для $Q_n^0(x,t)$ при $x=0$ выполняются условия сопряжения (2.4).

6. Построение решения в случае $m=2$. Для иллюстрации полученных формул предположим, что в граничных условиях (2.3) $Q(l,t)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$ (т.е. $\nu(t)=0$), и в промежуточные моменты времени t_1 и t_2 ($0=t_0<t_1<t_2<t_3=T$) заданы функции

$$Q(x,t_1)=\varphi_1(x),\quad -l_1\leqslant x\leqslant l, \tag{6.1}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_2}=\psi_2(x),\quad -l_1\leqslant x\leqslant l. \tag{6.2}$$

Тогда из формулы (4.3) следует, что $F_k(t) = -\dfrac{a_2}{\lambda_k l}\ddot{\mu}(t)$. В этом случае интегральные условия (4.8) запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{1k}, \qquad &&\int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k\,(T-\tau)\,d\tau = C_{2k},\\ &\int\limits_0^T \mu(\tau)h_k^{(1)}\,(\tau)\,d\tau = C_{1k}(t_1), &&\int\limits_0^T \mu(\tau)g_k^{(2)}\,(\tau)\,d\tau = C_{2k}(t_2), \end{aligned} \tag{6.3}$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k} &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k} + X_{1k}\right], \qquad &C_{1k}(t_1) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k}(t_1) + X_{1k}^{(1)}\right],\\ C_{2k} &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k} + X_{2k}\right], &C_{2k}(t_2) &= \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k}(t_2) + X_{2k}^{(2)}\right], \end{aligned}$$

Постоянные $\tilde{C}_{1k}$, $\tilde{C}_{2k}$, $\tilde{C}_{1k}(t_1)$, $\tilde{C}_{2k}(t_2)$, X_{1k}, X_{2k}, $X_{1k}^{(1)}$, $X_{2k}^{(2)}$ определяются из формулы (4.9).

Для простоты изложения выберем $n = 1$ $(k = 1)$ и построим функцию $\mu_n^0(\tau)$ оптимального граничного управления. В выделенном случае из (5.3) получим

$$\mu_1^0(t) = \begin{cases} \mu_1^{(1)0}(t) = \dfrac{1}{(\rho_1^0)^2}\Big[p_1^0\sin\lambda_1(T-t) + q_1^0\cos\lambda_1(T-t) + \\ \qquad\qquad + \gamma_{11}^0\sin\lambda_1(t_1-t) + \gamma_{21}^0\cos\lambda_1(t_2-t)\Big], & 0 \leqslant t \leqslant t_1,\\ \mu_1^{(2)0}(t) = \dfrac{1}{(\rho_1^0)^2}\Big[p_1^0\sin\lambda_1(T-t) + q_1^0\cos\lambda_1(T-t) + \\ \qquad\qquad + \gamma_{21}^0\cos\lambda_1(t_2-t)\Big], & t_1 < t \leqslant t_2,\\ \mu_1^{(3)0}(t) = \dfrac{1}{(\rho_1^0)^2}\Big[p_1^0\sin\lambda_1(T-t) + q_1^0\cos\lambda_1(T-t)\Big], & t_2 < t \leqslant t_3 = T. \end{cases}$$

Для поиска значений p_1, q_1, γ_{11}, γ_{21} и β_1 будем иметь следующую линейную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} a_{11}p_1 + b_{11}q_1 + c_{111}^{(1)}\gamma_{11} + c_{211}^{(2)}\gamma_{21} = -\frac{\beta_1}{2}C_{11},\\ d_{11}p_1 + e_{11}q_1 + f_{111}^{(1)}\gamma_{11} + f_{211}^{(2)}\gamma_{21} = -\frac{\beta_1}{2}C_{21},\\ a_{11}^{(1)}p_1 + b_{11}^{(1)}q_1 + c_{111}^{(11)}\gamma_{11} + c_{211}^{(21)}\gamma_{21} = -\frac{\beta_1}{2}C_{11}(t_1),\\ d_{11}^{(2)}p_1 + e_{11}^{(2)}q_1 + f_{111}^{(12)}\gamma_{11} + f_{211}^{(22)}\gamma_{21} = -\frac{\beta_1}{2}C_{21}(t_2),\\ p_1C_{11}(T) + q_1C_{21}(T) + \gamma_{11}C_{11}(t_1) + \gamma_{21}C_{21}(t_2) = 1, \end{gathered} \tag{6.4}$$

где

$$\begin{gathered} a_{11} = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 T, \quad b_{11} = d_{11} = \frac{1}{2\lambda_1}\sin^2\lambda_1 T, \quad e_{11} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 T,\\ a_{11}^{(1)} = c_{111}^{(1)} = \frac{t_1}{2}\cos\lambda_1(T-t_1) - \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1\cos\lambda_1 T,\\ c_{211}^{(2)} = d_{11}^{(2)} = \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_2\sin\lambda_1 T + \frac{t_2}{2}\sin\lambda_1(T-t_2),\\ b_{11}^{(1)} = f_{111}^{(1)} = \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1\sin\lambda_1 T - \frac{t_1}{2}\sin\lambda_1(T-t_1), \quad c_{111}^{(11)} = \frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 t_1, \end{gathered}$$

$$e_{11}^{(2)} = f_{211}^{(2)} = \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_2 \sin\lambda_1 T + \frac{t_2}{2}\cos\lambda_1(T-t_2),$$
$$c_{211}^{(21)} = f_{111}^{(12)} = \frac{1}{2\lambda_1}\sin\lambda_1 t_1 \sin\lambda_1 t_2 - \frac{t_1}{2}\sin\lambda_1(t_2-t_1), \quad f_{211}^{(22)} = \frac{t_2}{2} + \frac{1}{4\lambda_1}\sin 2\lambda_1 t_2.$$

7. Результаты вычислительного эксперимента. Для простоты предположим, что

$$a_1 = \frac{3}{5}a_2, \quad t_1 = 3\frac{l}{a_2}, \quad t_2 = 8\frac{l}{a_2}, \quad T = 12\frac{l}{a_2}, \quad l = 1, \quad l_1 = \frac{l}{a_2}a_1 = \frac{3}{5}, \quad a_2 = \frac{1}{3}.$$

Пусть состояние струны и скорости точек при $t = 0$ заданы следующими функциями:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} x^3 + l_1 x^2, & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^3 - l x^2, & 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \qquad \psi_0(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}l_1 x, & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}l x, & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Пусть при $t = t_1 = 9$ задано промежуточное состояние струны в виде функции (6.1):

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -x^3 - l_1 x^2, & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x^3 + l x^2, & 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

при $t = t_2 = 24$ задана функция (6.2):

$$\psi_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}l_1 x, & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}l x, & 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

а при $t = T = 36$ задано следующее конечное состояние:

$$\varphi_T(x) = 0, \quad \psi_T(x) = 0, \quad -l_1 \leqslant x \leqslant l.$$

Из (6.3), (6.4) имеем

$$\begin{gathered} 18p_1 - \frac{9}{2}\gamma_{11} + \frac{456}{125\,\pi^3} = 0, \quad 18q_1 + 12\gamma_{21} + \frac{918}{25\,\pi^4} = 0, \quad -\frac{9}{2}p_1 + \frac{9}{2}\gamma_{11} = 0, \\ 12q_1 + 12\gamma_{21} + \frac{612}{25\,\pi^4} = 0, \quad p_1\frac{912}{125\,\pi^3} + q_1\frac{1836}{25\,\pi^4} + \gamma_{21}\frac{1224}{25\,\pi^4} = 1. \end{gathered} \tag{7.1}$$

Решение (7.1) имеет вид

$$p_1^0 = \gamma_{11}^0 = \frac{9500}{3\,(1755675 + 23104\,\pi^2)}\,\pi^5, \quad q_1^0 = \frac{95625}{4\,(1755675 + 23104\,\pi^2)}\,\pi^4,$$
$$\gamma_{21}^0 = 0, \quad \beta_1^0 = -\frac{46875}{4\,(1755675 + 23104\,\pi^2)}\,\pi^8,$$

так что

$$\left(\rho_k^0\right)^2 = \frac{46875}{8\,(1755675 + 23104\,\pi^2)}\,\pi^8.$$

Для функции колебания (5.8) $Q_1^0(x,t)$ получаем:

$$Q_1^0(x,t) = \begin{cases} V_1^{(1)0}(t)\sin\frac{5}{3}\pi x + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}x\right)\mu_1^{(1)0}(t), & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ V_1^{(1)0}(t)\sin\pi x + \frac{1}{2}\,(1-x)\,\mu_1^{(1)0}(t), & 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

при $0 \leqslant t \leqslant t_1$;

$$Q_1^0(x,t) = \begin{cases} V_1^{(2)0}(t)\sin\frac{5}{3}\pi x + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}x\right)\mu_1^{(2)0}(t), & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ V_1^{(2)0}(t)\sin\pi x + \frac{1}{2}\,(1-x)\,\mu_1^{(2)0}(t), & 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

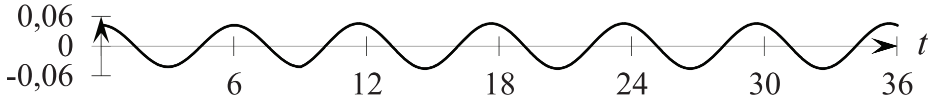

Рис. 1. График функции $\mu_1^0(t)$.

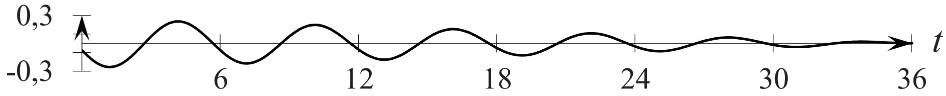

Рис. 2. График функции $V_1^0(t)$.

при $t_1 < t \leqslant T$; здесь функция управления имеет вид

$$\mu_1^0(t) = \begin{cases} \dfrac{102}{25\,\pi^4}\cos\dfrac{1}{3}\pi\,t, & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \dfrac{102}{25\,\pi^4}\cos\dfrac{1}{3}\pi\,t - \dfrac{608}{1125\,\pi^3}\sin\dfrac{1}{3}\pi\,t, & t_1 < t \leqslant T, \end{cases}$$

а функция $V_1^0(t)$ имеет вид

$$V_1^0(t) = \begin{cases} -\dfrac{304}{125\,\pi^3}\cos\dfrac{1}{3}\pi\,t + \dfrac{17(t-36)}{25\,\pi^4}\sin\dfrac{1}{3}\pi\,t, & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \dfrac{304(t-36)}{3375\,\pi^3}\cos\dfrac{1}{3}\pi\,t + \left(\dfrac{17t}{25\,\pi^4} - \dfrac{27844}{1125\,\pi^4}\right)\sin\dfrac{1}{3}\pi\,t, & t_1 < t \leqslant T. \end{cases}$$

Их графики представлены на рис. 1 и 2.

Выражения и графики (см. рис. 3–6) функций прогиба струны и ее производной представлены ниже. При $t = 0$ функции $Q_1^0(x,0)$ и $\dot{Q}_1^0(x,0)$ равны соответственно

$$Q_1^0(x,0) = \begin{cases} -\dfrac{304}{125\pi^3}\sin\dfrac{5}{3}\pi x + \dfrac{51}{25\pi^4}\left(1 - \dfrac{5}{3}x\right), & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -\dfrac{304}{125\pi^3}\sin\pi x + \dfrac{51}{25\pi^4}\left(1 - x\right), & 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial Q_1^0(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} -\dfrac{204}{25\pi^3}\sin\dfrac{5}{3}\pi x, & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -\dfrac{204}{25\pi^3}\sin\pi x, & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

При $t = 9$ функция $Q_1^0(x,9)$ равна

$$Q_1^0(x,9) = \begin{cases} \dfrac{304}{125\pi^3}\sin\dfrac{5}{3}\pi x - \dfrac{51}{25\pi^4}\left(1 - \dfrac{5}{3}x\right), & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \dfrac{304}{125\pi^3}\sin\pi x - \dfrac{51}{25\pi^4}\left(1 - x\right), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

При $t = 24$ функция $\dot{Q}_1^0(x,24)$ равна

$$\left.\frac{\partial Q_1^0(x,t)}{\partial t}\right|_{t=24} = \begin{cases} -\dfrac{68}{25\pi^3}\sin\dfrac{5}{3}\pi x - \dfrac{304}{3375\pi^2}\left(1 - \dfrac{5}{3}x\right), & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -\dfrac{68}{25\pi^3}\sin\pi x - \dfrac{304}{3375\pi^2}\left(1 - x\right), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

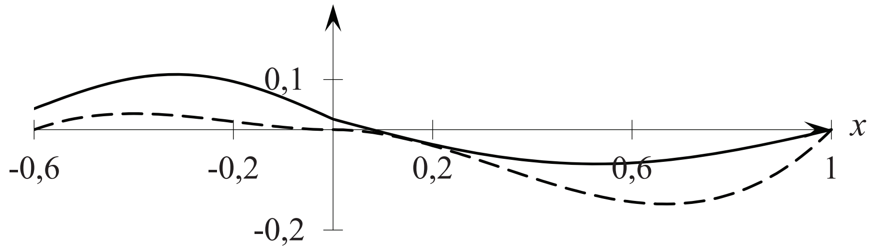

Рис. 3. Графики $Q_1^0(x,0)$ (сплошная линия) и $\varphi_0(x)$ (пунктирная линия).

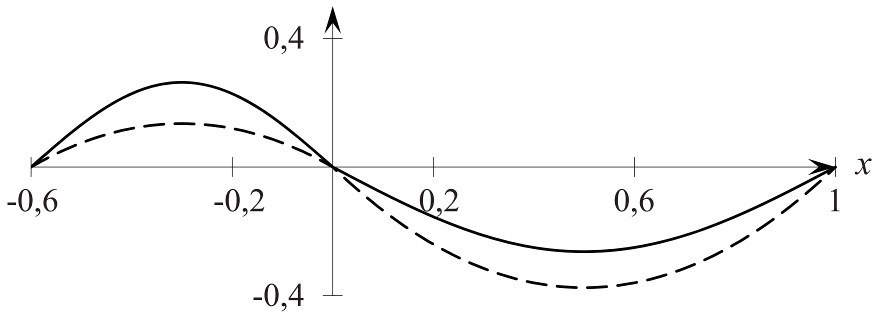

Рис. 4. Графики функций $\dot{Q}_1^0(x,0)$ (сплошная линия) и $\psi_0(x)=0$ (пунктирная линия).

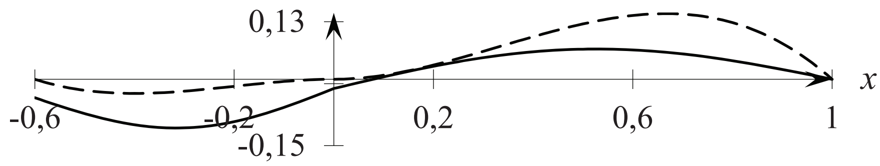

Рис. 5. Графики функций $Q_1^0(x,9)$ (сплошная линия) и $\varphi_1(x)$ (пунктирная линия).

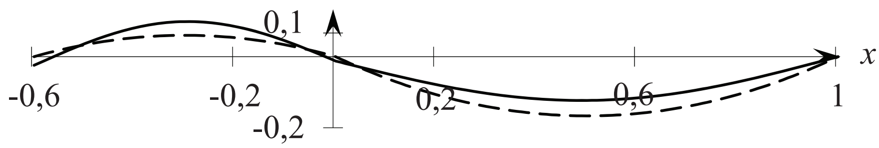

Рис. 6. Графики функций $\dot{Q}_1^0(x,24)$ (сплошная линия) и $\psi_2(x)$ (пунктирная линия).

При $t=T=36$

$$Q_1^0(x,36)=\begin{cases}\dfrac{51}{25\pi^4}\left(1-\dfrac{5}{3}x\right), & -l_1\leqslant x\leqslant 0,\\ \dfrac{51}{25\pi^4}\left(1-x\right), & 0\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial Q_1^0(x,t)}{\partial t}\right|_{t=36}=\begin{cases}-\dfrac{304}{3375\pi^2}\left(1-\dfrac{5}{3}x\right), & -l_1\leqslant x\leqslant 0,\\ -\dfrac{304}{3375\pi^2}(1-x), & 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

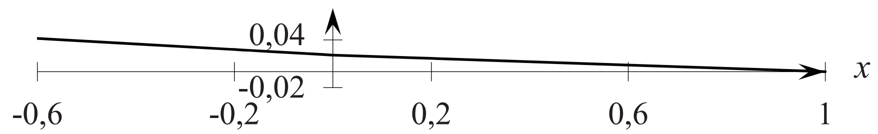

Рис. 7. Графики функций $Q_1^0(x,36)$ (сплошная линия) и $\varphi_T(x)=0$.

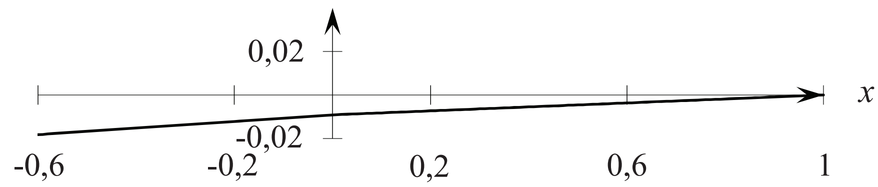

Рис. 8. Графики функций $\dot{Q}_1^0(x,36)$ (сплошная линия) и $\psi_T(x)=0$.

Для сравнительного анализа полученных результатов введем величины

$$\varepsilon_1(x,t_i)=\left|Q_1^0(x,t_i)-\varphi_i(x)\right|,\quad \hat{\varepsilon}_1(x,t_j)=\left|\dot{Q}_1^0(x,t_j)-\psi_j(x)\right|,$$

где $i=0,1,3,\ j=0,2,3$ ($i=j=3$ соответствуют моменту времени $t_3=T$). Имеем

$$\max_{-3/5\leqslant x\leqslant 1}\varepsilon_1(x,0)=\max_{-3/5\leqslant x\leqslant 1}\varepsilon_1(x,9)\approx 0{,}091,\qquad \max_{-3/5\leqslant x\leqslant 1}\varepsilon_1(x,36)\approx 0{,}042,$$

$$\int\limits_{-3/5}^{1}\varepsilon_1(x,0)dx=\int\limits_{-3/5}^{1}\varepsilon_1(x,9)dx\approx 0{,}082,\qquad \int\limits_{-3/5}^{1}\varepsilon_1(x,36)dx\approx 0{,}029,$$

$$\max_{-3/5\leqslant x\leqslant 1}\hat{\varepsilon}_1(x,0)\approx 0{,}128,\qquad \max_{-3/5\leqslant x\leqslant 1}\hat{\varepsilon}_1(x,24)\approx 0{,}029,\qquad \max_{-3/5\leqslant x\leqslant 1}\hat{\varepsilon}_1(x,36)\approx 0{,}018,$$

$$\int\limits_{-3/5}^{1}\hat{\varepsilon}_1(x,0)dx\approx 0{,}129,\qquad \int\limits_{-3/5}^{1}\hat{\varepsilon}_1(x,24)dx\approx 0{,}033,\qquad \int\limits_{-3/5}^{1}\hat{\varepsilon}_1(x,36)dx\approx 0{,}013.$$

На основе представленных результатов вычислительного эксперимента можно сделать вывод, что даже при $n=1$ поведение функции прогиба (под воздействием построенного оптимального граничного управления) достаточно близко к заданным исходным функциям.

8. Заключение. В данной статье предложен и проиллюстрирован на конкретном примере конструктивный метод построения оптимального граничного управления колебательным процессом распределенной неоднородной системы с известными условиями в начальный, промежуточные и конечный моменты времени. При этом форма прогиба и скорости точек были заданы в разные промежуточные моменты времени. Критерий качества задавался на весь интервал времени. Эффективность предлагаемого метода проиллюстрирована на модельном примере. Результаты вычислительного эксперимента показали хорошее согласование решения с исходными данными. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании оптимального граничного управления процессами распределенных неоднородных колебаний в физических и технологических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барсегян В. Р.* Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости// Диффер. уравн. процессы управл. — 2022. — № 2. — С. 41–54.

2. *Барсегян В. Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. — М.: Наука, 2016.
3. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975.
4. *Егоров А. И., Знаменская Л. Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами// Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — *17*, № 1. — С. 85–92.
5. *Зверева М. Б., Найдюк Ф. О., Залукаева Ж. О.* Моделирование колебаний сингулярной струны// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2014. — № 2. — С. 111–119.
6. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
7. *Ильин В. А.* Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 159–163.
8. *Ильин В. А.* О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков// Докл. РАН. — 2010. — *435*, № 6. — С. 732–735.
9. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
10. *Кулешов А. А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 5. — С. 594–597.
11. *Львова Н. Н.* Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой// Автомат. телемех. — 1973. — № 10. — С. 22–32.
12. *Провоторов В. В.* Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн// Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2012. — № 1. — С. 62–71.
13. *Рогожников А. М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами// Докл. РАН. — 2012. — *444*. — С. 488–491.
14. *Amara J. Ben, Beldi E.* Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients// SIAM J. Control Optim. — 2019. — *57*, № 5. — P. 3360–3387.
15. *Amara J. Ben, Bouzidi H.* Null boundary controllability of a one-dimensional heat equation with an internal point mass and variable coefficients// J. Math. Phys. — 2018. — *59*, № 1. — P. 1–22.
16. *Barseghyan V. R.* Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points of time// Mech. Solids. — 2019. — *54*, № 8. — P. 1216–1226.
17. *Barsegyan V. R.* The problem of optimal control of string vibrations// Int. Appl. Mech. — 2020. — *56(4)*. — P. 471–48.
18. *Barseghian V. R.* String vibration observation problem// Proc. 1 Int. Conf. “Control of Oscillations and Chaos” (Cat. No. 97TH8329), Vol. 2 (St. Petersburg, Russia, August 27-29, 1997). — St. Petersburg, 1997. — P. 309–310.
19. *Barseghyan V. R.* The problem of boundary control of displacement at two ends by the process of oscillation of a rod consisting of two sections of different density and elasticity// Mech. Solids. — 2023. — *58*, № 2. — P. 483–491.
20. *Barseghyan V. R.* Optimal boundary control of a distributed heterogeneous vibrating system with given states at intermediate times// Comput. Math. Math. Phys. — 2022. — *62*. — P. 2023–2032.
21. *Barseghyan V. R.* On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure// Proc. Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (Moscow, Russia, June 1-3, 2016). — IEEE, 2016. — P. 1–3.
22. *Barseghyan V. R.* Control of stage by stage changing linear dynamic systems// Yugoslav. J. Oper. Res. — 2012. — *22*, № 1. — P. 31–39.
23. *Barseghyan V. R., Barseghyan T. V.* On an approach to the problems of control of dynamic system with nonseparated multipoint intermediate conditions// Automat. Remote Control. — 2015. — *76*, № 4. — P. 549–559.
24. *Barseghyan V., Solodusha S.* On the optimal control problem for vibrations of the rod/string consisting of two non-homogeneous sections with the condition at an intermediate time// Mathematics. — 2022. — *10*, № 23. — P. 4444.
25. *Barseghyan V., Solodusha S.* Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time// Lect. Notes Comput. Sci. — 2021. — *12755*. — P. 299–313.
26. *Barseghyan V., Solodusha S.* On one problem in optimal boundary control for string vibrations with a given velocity of points at an intermediate moment of time// Proc. Int. Russian Automation Conference (RusAutoCon) (Sochi, September 5-11, 2021). — IEEE, 2021. — P. 343–349.

27. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time// J. Phys. Conf. Ser. — 2021.
28. *Mercier D., Regnier V.* Boundary controllability of a chain of serially connected Euler–Bernoulli beams with interior masses// Collect. Math. — 2009. — *60*, № 3. — P. 307–334.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа С. В. Солодуши выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема No. АААА-А21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барсегян Ваня Рафаелович
Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения;
Ереванский государственный университет
E-mail: `barseghyan@sci.am`

Солодуша Светлана Витальевна
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
E-mail: `solodusha@isem.irk.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 41–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-41-49

УДК 517.9

ОБ АЛГЕБРЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

© 2023 г. **А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО, Н. Б. УСКОВА**

Аннотация. В работе рассматриваются интегральные операторы с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty)$. Показано, что такие операторы образуют подалгебру алгебры ограниченных линейных операторов. Исследование оператора с ядром, зависящим от разности аргументов, проведено с применением банаховых $L_1(\mathbb{Z})$-модулей. Отмечены различие и сходство подалгебры интегральных операторов с соответствующей подалгеброй разностных операторов с инволюцией.

***Ключевые слова*:** интегральный оператор, полукарлемановское ядро, инволюция, банахов модуль, разностный оператор, спектр, свертка.

ON THE ALGEBRA OF INTEGRAL OPERATORS WITH INVOLUTION

© 2023 **A. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO, N. B. USKOVA**

Abstract. In this paper, we consider integral operators with kernels depending on the sum and difference of arguments in the space $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty)$. We prove that such operators form a subalgebra of the algebra of bounded linear operators. The study of operators with kernels depending on the difference of arguments was carried out using Banach $L_1(\mathbb{Z})$-modules. The differences and similarities between the subalgebra of integral operators and the corresponding subalgebra of difference operators with involution are noted.

***Keywords and phrases*:** integral operator, semi-Carleman kernel, involution, Banach module, difference operator, spectrum, convolution.

***AMS Subject Classification*:** 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. Пусть $L_p = L_p(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $p \in [1,\infty]$, — банахово пространство измеримых и суммируемых со степенью p на $\mathbb{R}$ классов эквивалентности функций, существенно ограниченных при $p=\infty$, со значениями в $\mathbb{C}$. Нормы в L_p, $p \in [1,\infty]$, задаются формулами

$$\|x\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

Отдельно отметим наиболее используемые далее пространства L_1 и L_2. Пространство L_1 является банаховой алгеброй суммируемых на $\mathbb{R}$ классов измеримых комплексных функций со сверткой функций

$$(f*g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \quad t\in\mathbb{R}, \quad f,g\in L_1,$$

в качестве операции умножения.

Пространство L_2 является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,g) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\,dt, \quad f,g\in L_2;$$

ISSN 2782–4438

норма в L_2 порождается этим скалярным произведением.

Для функций из L_1 рассмотрим преобразование Фурье, задаваемое формулой

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in L_1.$$

Через $\widehat{L}_1(\mathbb{R})$ обозначим банахову алгебру преобразований Фурье функций из L_1 с поточечным умножением функций в качестве операции умножения и нормой

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \max_{\lambda\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)|.$$

Заметим, что алгебра $\widehat{L}_1$ изометрична L_1. Преобразование Фурье обычным образом расширяется на функции из L_2, причем для $f \in L_1 \cap L_2$ имеет место равенство Парсеваля

$$\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2.$$

В работах Е. Л. Александрова (см. [1–7]) изучались интегральные операторы с ядрами, зависящими от суммы и разности аргументов вида

$$(Af)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} k(t-\tau)f(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}} h(t+\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad f, k, h \in L_2,$$

с областью определения $D(A) = \{f \in L_2, Af \in L_2\}$.

Определение 1.1 (см. [3, 26, 29])**.** Ядром Карлемана (C-ядром) называется всякая измеримая комплекснозначная функция $K : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим условиям: $K(x, y) \in L_2$ как функция переменной y для почти всех $x \in \mathbb{R}$;

$K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ для почти всех $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Если выполнено только условие (i), то функция K называется полукарлемановским ядром (SC-ядром).

В цитируемых выше работах предполагается, что оператор A обладает SC-ядром. Отметим, что условие принадлежности функций k, h, f пространству L_2 является основополагающим.

В [1–7] оператор A представляется в виде суммы двух операторов A^- и A^+ с ядрами, зависящими от разности и от суммы аргументов. Исследуются свойства этих операторов. В частности, происходит построение резольвент и спектральных функций. Отметим работу [21], в которой оператор A также действует в L_2, но $k, h \in L_1$; в этой работе также описан спектр оператора A.

Будем рассматривать в работе интегральный оператор с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов вида

$$(A_{\alpha,\beta}x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \alpha(\tau - t)x(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(\tau + t)x(\tau)\,d\tau,$$

где $\alpha, \beta \in L_1$ и $x \in L_p$, $p \in [1,\infty)$. В работе показано, что такие операторы образуют подалгебру $\mathcal{M}$ из алгебры ограниченных операторов, найден спектр, а также рассмотрены отдельно свойства оператора A^-. Для этого привлекается теория банаховых $L_1(\mathbb{R})$-модулей, основные положения которой изложены в [10, 23, 27, 28].

Кроме того, в работе отмечаются различия и сходство подалгебры $\mathcal{M}$ рассматриваемых операторов $A_{\alpha,\beta}$ и соответствующей подалгебры разностных операторов с инволюцией, изученной в [11].

2. Постановка задачи.

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое комплексное банахово пространство. Символом $\operatorname{End}\mathcal{X}$ будем обозначать банахову алгебру ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$, с нормой

$$\|X\|_\infty = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Xx\|, \quad X \in \operatorname{End}\mathcal{X}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Символом $I \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ будем обозначать тождественный оператор.

Определение 2.1. Оператор $J \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ называется инволюцией, если $J^2 = I$.

Заметим, что соответствующая операция изначально называлась сдвигом Карлемана $(Jx)(t) = x(\omega - t)$, $x \in L_2[0, \omega]$ (см. [18, 25]), затем использовались термины «отклоняющийся аргумент» [8], «инволютивное отклонение» [9], сейчас же используется, в основном, термин «инволюция» [15, 17, 19, 20], который мы и будем употреблять.

Простейшей или стандартной инволюцией в L_p, $p \in [1, \infty]$, является оператор отражения

$$(Jx)(t) = x(-t). \tag{1}$$

Именно его мы и будем рассматривать.

Очевидно, что оператор J, определенный формулой (1), как и любой оператор инволюции, имеет два собственных значения ± 1. При этом собственному значению 1 отвечает подпространство четных функций из L_p, а значению -1 — подпространство нечетных функций из L_p. Любую функцию $f \in L_p$, $p \in [1, \infty]$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций

$$f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} + \frac{f(t) - f(-t)}{2} = f_+(t) + f_-(t).$$

Отметим, что в случае, если $\mathcal{X}$ — абстрактное банахово пространство и $J \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ — инволюция, то любой такой вектор, что $Jx = x$ называется четным вектором, а если $Jx = -x$, то вектор x называется нечетным вектором.

Обозначим через $\mathcal{X}_+$ и $\mathcal{X}_-$ соответственно подпространства четных и нечетных векторов из $\mathcal{X}$. Отметим, что $\mathcal{X}_+$ и $\mathcal{X}_-$ — замкнутые подпространства и пространство $\mathcal{X}$ представимо в виде их прямой суммы

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \oplus \mathcal{X}_-. \tag{2}$$

Введем два оператора P_+, $P_- \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ формулами

$$P_+ = \frac{I + J}{2}, \quad P_- = \frac{I - J}{2}.$$

Свойства оператора P_+ и P_- удобно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 2.1. *Операторы P_+ и P_- обладают следующими свойствами*:

(i) P_+ *и* P_- — *проекторы*;
(ii) $P_+ + P_- = I$, $P_+ P_- = 0$;
(iii) $JP_+ = P_+$, $JP_- = -P_-$;
(iv) $J = P_+ - P_-$ (*спектральное разложение оператора* J);
(v) $\operatorname{Im} P_+ = \mathcal{X}_+$, $\operatorname{Im} P_- = \mathcal{X}_-$.

Таким образом, есть два проектора, осуществляющих разложение пространства $\mathcal{X}$ в виде прямой суммы (2).

Для любой функции $\alpha \in L_1$ введем в рассмотрение оператор свертки A_α, определенный формулой

$$(A_\alpha x)(t) = (\alpha * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(\tau) x(t - \tau)\, d\tau = \int_{\mathbb{R}} \alpha(t - \tau) x(\tau)\, d\tau = \int_{\mathbb{R}} \alpha(\tau) S(-\tau) x(\tau)\, d\tau, \quad x \in L_p.$$

Оператор A_α является интегральным оператором с ядром, зависящим от разности аргументов.

Если $\alpha \in L_1 \cap L_2$, то оператор A_α, согласно определению 1.1, является интегральным оператором с SC-ядром и аналогом оператора A^- из [1–7]. В отличие от оператора A^-, оператор A_α определен для всех $x \in L_p$, $p \in [1, \infty)$, ввиду принадлежности функции α пространству L_1.

Рассмотрим оператор $A_\alpha + A_\beta J$, α, $\beta \in L_1$. Это интегральный оператор с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов:

$$(A_\alpha + A_\beta J)x = \int_{\mathbb{R}} \alpha(\tau) x(t - \tau)\, d\tau + \int_{\mathbb{R}} \beta(\tau) x(-t + \tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \alpha(t - \tau) x(\tau)\, d\tau + \int_{\mathbb{R}} \beta(t + \tau) x(\tau)\, d\tau, \quad x \in L_p;$$

при этом соответствующее ядро является SC-ядром. Отметим, что

$$\|A_{\alpha,\beta}\| \leqslant \|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1.$$

Областью определения $D(A_{\alpha,\beta})$ оператора $A_{\alpha,\beta}$ есть все пространство L_p, $p \in [1, \infty)$. Отметим также, что при $\alpha, \beta \in L_1 \cap L_2$ и $x \in L_2$ оператор $A_{\alpha,\beta}$ есть оператор $A^- + A^+$ из [1].

3. Некоторые сведения из теории банаховых $L_1(\mathbb{R})$-модулей. Будем изучать свойства операторов A_α и $A_{\alpha,\beta}$. В рассматриваемом случае $\alpha, \beta \in L_1$ это удобнее сделать, привлекая теорию банаховых $L_1(\mathbb{R})$-модулей, элементы которой мы и изложим в этом разделе. Будем, кроме работ [10, 23, 27, 28], также использовать результаты из [13, 14, 24].

Определение 3.1. Комплексное банахово пространство $\mathcal{X}$ называется невырожденным банаховым $L_1(\mathbb{R})$-модулем, если задано билинейное отображение $(f, x) \mapsto fx : L_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, обладающее следующими свойствами:

(i) $(ab)x = a(bx)$, a, $b \in L_1$, $x \in \mathcal{X}$;
(ii) $\|ax\| \leqslant \|a\|_1 \|x\|$, $a \in L_1$, $x \in \mathcal{X}$;
(iii) если $ax = 0$ для всех $a \in L_1$, то $x = 0$.

Невырожденный банахов $L_1(\mathbb{R})$-модуль называется также гармоничным пространством или пространством Винера—Банаха.

Определение 3.2. Отображение $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$ называется представлением группы $\mathbb{R}$ операторами из $\operatorname{End} \mathcal{X}$, если $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$. Представление $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$ называется сильно непрерывным, если каждая функция вида

$$\tau_x : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}, \quad \tau_x(t) = T(t)x, \quad x \in \mathcal{X},$$

непрерывна, и изометрическим, если

$$\|T(t)x\| = \|x\| \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Одним из стандартных представлений является оператор сдвига функции

$$S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}, \quad (S(s)x)(t) = x(t+s), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Оно является изометрическим и сильно непрерывно при $\mathcal{X} = L_p$, $p \in [1, \infty)$. Далее в качестве представления мы будем рассматривать именно оператор сдвига функций.

Определение 3.3. Модульная структура на $\mathcal{X}$ ассоциирована с представлением $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$, если для всех $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{R}$, имеют место равенства

$$S(t)(fx) = (S(t)f)x = f(S(t)x).$$

Обычно пишут вместо $\mathcal{X}$ пару $(\mathcal{X}, S)$. Это подчеркивает, что модульная структура на $\mathcal{X}$ ассоциирована с представлением S. Формула

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) S(-\tau)x \, d\tau, \quad f \in L_1, \quad x \in \mathcal{X},$$

определяет на $\mathcal{X} = L_p$, $p \in [1, \infty)$, структуру банахова $L_1(\mathbb{R})$-модуля, ассоциированного с представлением S.

Далее нам понадобятся определение и свойства спектра Бёрлинга элементов банахова модуля.

Определение 3.4. Пусть $(\mathcal{X}, S)$ — банахов $L_1(\mathbb{R})$-модуль и Y — некоторое подмножество из $\mathcal{X}$. Спектр Бёрлинга $\lambda(Y) = \Lambda(Y, S)$ определяется формулой

$$\Lambda(Y, S) = \Big\{\lambda \in \mathbb{R} : \text{ равенство } fx = 0 \text{ для всех } x \in Y \text{ означает } \widehat{f}(\lambda) = 0, \ f \in L_1\Big\}.$$

Если $x \in \mathcal{X}$, то

$$\Lambda(x) = \Big\{\lambda \in \mathbb{R} : \ fx \neq 0 \text{ для любой } f \in L_1 \text{ такой, что } \widehat{f}(\lambda) \neq 0\Big\}.$$

Отметим, что спектр Бёрлинга можно рассматривать как обобщение понятия носителя. Так, если $\mathcal{X} = L_2$, то $\Lambda(x, S) = \operatorname{supp} \widehat{x}$.

Известные свойства спектра Бёрлинга удобно сформулировать в виде леммы. В ней через $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$ обозначено некоторое представление (не обязательно S), которое вначале не предполагается изометрическим.

Лемма 3.1 (см. [10]). *Пусть $(\mathcal{X}, T)$ — банахов $L_1(\mathbb{R})$-модуль. Имеют место следующие свойства*:

(i) $\Lambda(Y)$ *замкнуто для любого подмножества* $Y \subseteq \mathcal{X}$;
(ii) $\Lambda(Y) = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $Y = \{0\}$;
(iii) $\Lambda(Ax + By) \subseteq \Lambda(x) \cup \Lambda(y)$ *для любых* $A, B \in \operatorname{End} \mathcal{X}$, *перестановочных со всеми* $T(f)$, $f \in L_1(\mathbb{R})$;
(iv) $\Lambda(fx) \subseteq (\operatorname{supp} \widehat{f}) \cap \Lambda(x)$ *для* $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$;
(v) $fx = 0$, *если* $(\operatorname{supp} \widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$ *для* $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$;
(vi) $fx = x$, *если* $\Lambda(x)$ — *компакт и* $\widehat{f} = 1$ *в некоторой окрестности множества* $\Lambda(x)$.

Отметим, что последние два свойства из предыдущей леммы могут быть усилены дляизометрического представления T.

Лемма 3.2 (см. [13, лемма 3.7.32]). *Пусть $(\mathcal{X}, T)$ — банахов $L_1(\mathbb{R})$-модуль и представление T является изометрическим. Тогда для $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{X}$ справедливы следующие утверждения*:

(v′) $fx = 0$, *если* $(\operatorname{supp} \widehat{f}) \cap \Lambda(x)$ *счетно и* $\widehat{f}(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in (\operatorname{supp} \widehat{f}) \cap \Lambda(x)$;
(vi′) $fx = x$, *если* $\Lambda(x)$ — *компакт со счетной границей и* $\widehat{f} = 1$ *на* $\Lambda(x)$.

Приведем еще одну лемму из [14].

Лемма 3.3 (см. [14, лемма 2]). *Пусть $\mathcal{X}$ — банахов B-модуль. Тогда для любого элемента $a \in B$ спектр $\sigma(A)$ оператора $Ax = ax : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ совпадает с множеством $\widehat{a}(\Lambda(x))$.*

4. Основные результаты.

Вернемся к операторам A_α и $A_{\alpha,\beta}$.

Лемма 4.1. *Операторы инволюции и свертки неперестановочны. Операторы инволюции и сдвига неперестановочны.*

Доказательство. Пусть $f \in L_1$, $g \in L_p$. Тогда $f * g \in L_p$ и

$$(J(f * g))(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau) g(-t - \tau)\, d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(-t - \tau) g(\tau)\, d\tau, \quad (f * Jg)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t + u) g(u)\, du,$$
$$(JSx)(t) = x(-t + s), \quad (SJx)(t) = x(-t - s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

□

Следствие 4.1. *Если $f \in L_1$ — четная функция и $g \in L_p$, то*
$$(J(f * g))(t) = (f * Jg)(t).$$

Непосредственной проверкой доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Операторы A_α перестановочны между собой и с операторами сдвига S. Операторы A_α неперестановочны с операторами инволюции.*

Из леммы 3.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Имеют место следующие свойства.*

(i) *Ядро* $\operatorname{Ker} A_\alpha$ *оператора* A_α *состоит из таких* $x \in L_p$, $p \in [1, \infty)$, *что* $(\operatorname{supp} \widehat{\alpha}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$.
(ii) $\Lambda(A_\alpha x) \subset \Lambda(x) \cap (\operatorname{supp} \widehat{\alpha})$, $x \in L_p$.
(iii) *Если* $x \in L_2$, *то* $\operatorname{Ker} A_\alpha$ *состоит из таких* $x \in L_2$, *что* $(\operatorname{supp} \widehat{\alpha}) \cap (\operatorname{supp} \widehat{x}) = \varnothing$.
(iv) *В пространстве* L_2 *оператор* A_α *самосопряжен, если* $\alpha(-t) = \overline{\alpha(t)}$, $t \in \mathbb{R}$.

Применив к оператору A_α лемму 3.3, получим следующее утверждение.

Лемма 4.4. *Спектр $\sigma(A_\alpha)$ оператора A_α совпадает с замыканием множества* $\operatorname{Im}\widehat{\alpha}$.

Отметим, что результаты леммы 4.4 аналогичны формуле для спектра оператора A^- из [1–7] при $\alpha \in L_1 \cap L_2$. Также заметим, что свойство (iv) леммы 4.3, касающееся самосопряженности оператора A_α, полностью идентично соответствующему свойству для оператора A^- из [1–7]. Оно также означает, что оператор A^- (или A_α) является в этом случае оператором с ядром Карлемана.

Заметим также, что к оператору $A_\beta J$ лемма 4.4 неприменима.

Лемма 4.5. *Пусть $|\lambda| > \|\alpha\|_1$. Тогда оператор $A_\alpha - \lambda I$ обратим и имеет место формула*

$$(A_\alpha - \lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{A_\alpha^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Пусть $|\lambda| > \|\beta\|_1$. Тогда оператор $A_\beta J - \lambda I$ обратим и

$$(A_\beta J - \lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(A_\beta J)^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Лемма 4.6. *Операторы $A_{\alpha,\beta}$ образуют банахову подалгебру $\mathcal{M} \in \operatorname{End} L_p$, $A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'} = A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, где*

$$\widetilde{\alpha} = \alpha * \alpha' + \beta * J\beta', \quad \widetilde{\beta} = \alpha * \beta' + \beta * J\alpha'.$$

Доказательство. Имеем

$$A_{\alpha,\beta} - A_{\alpha',\beta'} = (A_\alpha + A_\beta J)(A_{\alpha'} + A_{\beta'} J) = A_\alpha A_{\alpha'} + A_\beta J A_{\beta'} J + A_\alpha A_\beta J + A_\beta J A_{\alpha'}.$$

Теперь каждое слагаемое рассмотрим отдельно. Очевидно, что

$$(A_\alpha A_{\alpha'} x)(t) = A_\alpha\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \alpha'(t-\tau)x(\tau)\,d\tau\right) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \alpha(t-\tau)\alpha'(\tau-u)\,d\tau\,x(u)\,du,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \alpha(t-\tau)\alpha'(\tau-u)\,d\tau = \widetilde{\alpha}(t-u), \quad (A_\alpha A_{\alpha'}x)(t) = (A_{\widetilde{\alpha}_1}x)(t),$$

где $\widetilde{\alpha}_1 = \alpha * \alpha'$. Аналогично,

$$(A_\beta J A_{\alpha'} x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \beta(-t-\tau)\alpha'(-\tau-u)x(u)\,du\,d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_1(t+u)x(u)\,du,$$

где

$$\widetilde{\beta}_1(t+u) = \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(t+z+u)\alpha'(z)\,dz,$$

т.е. $\widetilde{\beta}_1 = \beta * J_{\alpha'}$. Остальные слагаемые рассматриваются аналогично. □

Отметим, что операторы A_α образуют в $\mathcal{M}$ замкнутую подалгебру (без единицы), а операторы $A_\beta J$ подалгебры не образуют.

Перейдем к нахождению спектра оператора $A_{\alpha,\beta} : L_2 \to L_2$. Пусть F — оператор, осуществляющий преобразование Фурье функции $x \in L_2$, $Fx = \widehat{x}$. Положим $A_{\alpha,\beta}x = F^{-1}\widehat{A}_{\alpha,\beta}Fx$, $x \in L_2$, где $\widehat{A}_{\alpha,\beta} : L_2 \to L_2$ — линейный ограниченный оператор, действующий по формуле $\widehat{A}_{\alpha,\beta}y = \widehat{\alpha}y + \widehat{\beta}Jy$, $y \in L_2$. Каждой функции $y \in L_2$ поставим в соответствие пару функций $\overline{y} = (y_+, y_-)$, где $y_\pm(\lambda) = y(\pm\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Пусть $Uy = \overline{y}$, где $U : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$. Оператор U является унитарным. Введем оператор

$$B_{\alpha,\beta} : L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) \to L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \quad B_{\alpha,\beta} = UFA_{\alpha,\beta}F^{-1}U^{-1}.$$

Лемма 4.7. *Оператор $A_{\alpha,\beta}$ подобен оператору $B_{\alpha,\beta}$ вида*

$$B\overline{y}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}(\lambda) & \widehat{\beta}(\lambda) \\ \widehat{\beta}(-\lambda) & \widehat{\alpha}(-\lambda) \end{pmatrix} \overline{y}(\lambda) = Q(\lambda)\overline{y}(\lambda),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathbb{C}^2$.

Лемма проверяется непосредственным вычислением.

Лемма 4.8. $\sigma(A_{\alpha,\beta}) = \sigma(B)$, $\sigma(B) = \overline{\operatorname{Ran}\delta_1 \cup \operatorname{Ran}\delta_2}$, *где*

$$\delta_{1,2}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\alpha}(\lambda) + \widehat{\alpha}(-\lambda) \pm \left((\widehat{\alpha}(\lambda) - \widehat{\alpha}(-\lambda))^2 + 4\widehat{\beta}(\lambda)\widehat{\beta}(-\lambda)\right)^{1/2}\right).$$

Отметим, что представленная выше замена $Uy = \overline{y}$, $y \in \mathcal{X}$, использовалась также в [21] в спектральном анализе интегральных операторов с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов, а также в [16, 22] для перехода от дифференциального оператора первого порядка с инволюцией к оператору Дирака.

Применим также формулу для резольвенты оператора A^- к оператору $A_\alpha : L_2 \to L_2$, $\alpha \in L_1 \cap L_2$, из [2, 3]. Тогда

$$(R_{A_\alpha}y)(u) = -\frac{y(u)}{\lambda} + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\alpha(u-\tau)}{\alpha(u-\tau) - \lambda} y(\tau)\, d\tau.$$

Согласно [2, 3] отсюда следует, что R_{A_α} не является интегральным оператором; он является пределом интегральных операторов с полукарлемановскими ядрами.

5. Интегральные и разностные операторы с инволюцией. Интересна аналогия между операторами $A_{\alpha,\beta}$ и разностными операторами специального вида.

Пусть $l_p = l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, $p \in [1, \infty)$, — пространство двусторонних комплексных последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^p\Big)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty), \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|.$$

Пространство l_2 является гильбертовым со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\overline{y(n)};$$

норма порождается этим скалярным произведением. Пространство l_∞ является алгеброй с поточечным умножением $(xy)(n) = x(n)y(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, x, $y \in l_\infty$.

Стандартная (или простейшая) инволюция в любом банаховом пространстве с двусторонним базисом $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ задается формулой $(Jx)(n) = x(-n)$, где $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e_n x(n)$.

Для любой последовательности $\alpha \in l_\infty$ определим оператор $A_\alpha \in \operatorname{End} l_p$, $p \in [1, \infty)$, формулой

$$A_\alpha x = \alpha x, \quad (A_\alpha x)(n) = \alpha(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $\|A_\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_\infty$. Определим также оператор $A_{\alpha,\beta}$, α, $\beta \in l_1$, следующим образом:

$$A_{\alpha,\beta}x = \alpha x + \beta Jx, \quad x \in l_p, \quad p \in [1, \infty).$$

Оператор $A_{\alpha,\beta}$ действует по формуле

$$(A_{\alpha,\beta}x)(n) = \alpha(n)x(n) + \beta(n)x(-n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_p, \quad p \in [1, \infty),$$

и в стандартном базисе пространства l_p имеет разреженную матрицу $A_{\alpha,\beta} \sim (a_{ij})$, где $a_{ii} = \alpha(i)$, $a_{i,-i} = \beta(i)$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a_{00} = \alpha(0) + \beta(0)$, а остальные элементы нулевые. Множество таких операторов $A_{\alpha,\beta}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}$. Очевидно, что

$$I = A_{e,0} = eI + 0J \in \widetilde{\mathcal{M}}, \quad J = A_{0,e} = 0I + eJ \in \widetilde{\mathcal{M}}.$$

Здесь символом $e \in l_\infty$ обозначена такая последовательность, что $e(n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, $\|e\|_\infty = 1$, и символом 0 — нулевая последовательность, т.е. $0(n) = 0$ для всех n.

Лемма 5.1. *Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ является наполненной банаховой подалгеброй в* $\operatorname{End} l_p$*,* $p \in [1, \infty)$*, с единицей.*

Напомним, что наполненность подалгебры означает, что любой обратимый в $\operatorname{End} l_p$ элемент из $\widetilde{\mathcal{M}}$ обратим также и в $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Таким образом, между операторами $A_{\alpha,\beta}$ в l_p и $A_{\alpha,\beta}$ в L_p прослеживается аналогия. Оба класса операторов образуют подалгебры в банаховых алгебрах соответствующих ограниченных линейных операторов. Только в случае разностных операторов эта подалгебра наполненная.

Также (см. [11]) обратим внимание на формулу

$$A_{\alpha,\beta} A_{\alpha',\beta'} = A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}},$$

для разностных операторов, где

$$\widetilde{\alpha} = \alpha\alpha' + \beta' J\beta, \quad \widetilde{\beta} = \alpha\beta' + \beta J\alpha',$$

которая аналогична соответствующей формуле для интегральных операторов $A_{\alpha,\beta}$.

Известно (см. [22]), что для разностных операторов из $\operatorname{End} l_p$, $p \in [1, \infty)$, спектр оператора не зависит от пространства l_p, $p \in [1, \infty)$, поэтому спектральные свойства таких операторов обычно исследуются в l_2.

Лемма 5.2. *Спектр оператора* $A_{\alpha,\beta} \in \operatorname{End} l_p$*,* $p \in [1, \infty)$*,* $\alpha, \beta \in l_\infty$*, есть замыкание множества чисел*

$$\left\{\alpha(0) + \beta(0),\ \frac{1}{2}\Big(\alpha(n) + \alpha(-n) \pm \big(\alpha(n) - \alpha(-n)\big)^2 + 4\beta(n)\beta(-n)\Big)^{1/2}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Подчеркнем аналогию между леммой 5.2 и леммой 4.8, касающейся формул для спектра разностного и интегрального оператора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров Е. Л.* О спектральных функциях одного интегрального оператора с ядром Карлемана// Изв. вузов. Мат. — 1969. — № 7. — С. 3–12.
2. *Александров Е. Л., Кириченко Б. И.* Интегральные операторы Карлемана с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов// Сиб. мат. ж. — 1977. — *18*, № 1. — С. 3–22.
3. *Александров Е. Л., Кириченко Б. И.* О спектральных функциях интегральных операторов Карлемана с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов// Сиб. мат. ж. — 1978. — *19*, № 6. — С. 1219–1231.
4. *Александров Е. Л., Кириченко Б. И.* Характеристические свойства (SC)-операторов с ядрами, зависящими от разности аргументов// Сиб. мат. ж. — 1979. — *20*, № 5. — С. 931–941.
5. *Александров Е. Л.* Характеристические свойства полукарлемановских операторов с ядрами вида $k(x-y) + h(x+y)$// Мат. заметки. — 1984. — *36*, № 2. — С. 189–200.
6. *Александров Е. Л.* Спектральные свойства операторов с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов// Изв. вузов. Мат. — 1991. — *8*. — С. 3–8.
7. *Александров Е. Л.* Спектральные функции самосопряженных и симметрических операторов умножения в пространствах $L^2(X, \mu)$// Мат. заметки. — 2000. — *67*, № 6. — С. 803–810.
8. *Андреев А. А., Шиндин И. П.* О корректности граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом// в кн.: Аналитические методы в теории дифференциальных и интегральных уравнений. — Куйбышев: КГУ, 1987. — С. 3–6.
9. *Андреев А. А., Огородников Е. Н.* О корректности начальных краевых задач для одного гиперболического уравнения с вырождением порядка и инволютивным отклонением// Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2000. — № 9. — С. 32–36.
10. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — *69*, № 3. — С. 3–54.
11. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральные свойства разностных операторов с инволюцией// Тр. Междунар. науч. конф. ББАктуальные проблемы прикладной математики, информатики и механикиЮЮ (Воронеж, 4-6 декабря 2023 г.). — Воронеж: ВГУ, 2023. — С. 7–11.
12. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 1997. — *61*, № 6. — С. 3–26.

13. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов// Совр. мат. Фундам. напр. — 2004. — *9.* — С. 3–151.
14. *Баскаков А. Г.* Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе// Сиб. мат. ж. — 1979. — *20*, № 5. — С. 942–952.
15. *Бурлуцкая М. Ш.* Вопросы спектральной теории для операторов с инволюцией и приложения. — Воронеж: Научная книга, 2020.
16. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией// Докл. РАН. — 2007. — *414*, № 4. — С. 443–446.
17. *Владыкина В. Е., Шкаликов А. А.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией// Докл. РАН. — 2019. — *484*, № 1. — С. 12–17.
18. *Карапетянц Н. К., Самко С. Г.* Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1988.
19. *Крицков Л. В., Сарсенби А. М.* Базисность Рисса системы корневых функций для операторов второго порядка с инволюцией// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 35–48.
20. *Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16.* — С. 1091–1132.
21. *Пальчиков А. Н.* Спектральный анализ интегральных операторов с ядром, зависящим от разности и суммы аргументов// Изв. вузов. Мат. — 1990. — № 3. — С. 80–83.
22. *Хромов А. П., Кувардина Л. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией// Изв. вузов. Мат. — 2008. — № 5. — С. 67–76.
23. *Baskakov A. G., Krishtal I. A.* Memory estimation of inverse operators// J. Funct. Anal. — 2014. — *267.* — P. 2551–2605.
24. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* Closed operator functional calculus in Banach modules and applications// J. Math. Anal. Appl. — 2020. — *492*, № 2. — 124473.
25. *Carleman P.* Sur la théorie des équations intégrales lineaires et ses applications// Verh. Int. Math.-Kongr. — 1932. — *1.* — P. 138–151.
26. *Carleman T.* Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique. — Uppsala Univ. Årsskrift, 1923.
27. *Loomis L. H.* An Introduction of Abstract Harmonic Analysis. — Toronto–New York–London: Van Nostrand, 1953.
28. *Reiter H., Stegeman J. D.* Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups. — Oxford–London: Oxford Univ. Press, 2000.
29. *Schreiber M.* Semi-Carleman operators// Acta Sci. Math. — 1963. — *24.* — P. 82–86.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баскаков Анатолий Григорьевич
Воронежский государственный университет
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валериевна
Воронежский государственный педагогический университет
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Ускова Наталья Борисовна
Воронежский государственный технический университет
E-mail: nat-uskova@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 50–55
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-50-55

УДК 517.956

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. **Ю. В. ЗАСОРИН**

Аннотация. Рассматривается проблема единственности решения для однородных уравнений в классе аналитических функционалов $Z'(\mathbb{R}^n)$ с псевдодифференциальными операторами, коммутирующими относительно сдвигов. Устанавливаются условия на символы операторов, позволяющие так разбить этот класс операторов на классы эквивалентности, что внутри каждого класса какое-либо условие регулярности решения на бесконечности, обеспечивающее единственность решения уравнения с каким-либо представителем этого класса, обеспечивает единственность решения и для уравнений со всеми остальными представителями того же класса.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, эквивалентность, единственность решения.

UNIQUENESS THEOREM FOR ONE CLASS OF PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 **Yu. V. ZASORIN**

Abstract. The uniqueness of solutions for homogeneous equations in the class of analytic functionals $Z'(\mathbb{R}^n)$ with pseudodifferential operators commuting under shifts is discussed. We establish conditions for the symbols of operators that allow one to partition this class of operators into equivalence classes in such a way that within each class, any condition of the regularity of solutions at infinity that guarantees the uniqueness of a solution for an equation with some representative of this class, also guarantees the uniqueness of a solution for equations with all representatives of the same class.

***Keywords and phrases*:** pseudo-differential equation, equivalence, uniqueness of solution.

***AMS Subject Classification*:** 26A12, 30D15, 26A48

1. Введение. Одна из самых неприятных проблем, связанных с вопросами единственности дифференциальных (псевдодифференциальных) уравнений во всем $\mathbb{R}^n$

$$P(D)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

связана либо с выбором подходящего класса решений, либо с выбором подходящего условия регулярности решения на бесконечности, поскольку если класс слишком узок, а условие слишком жесткое, то возникают уже проблемы разрешимости уравнения (1) при простейших функциях (распределениях) $f(x)$. Так, во второй половине прошлого века было получено огромное количество универсальных условий, обеспечивающих единственность решения уравнений вида (см., например, $[1, 2, 5–7]$). Однако главным недостатком большинства из них является противоречие с разрешимостью: так, например, фундаментальное решение уравнения Лапласа в важнейшем случае $n = 3$ не удовлетворяет практически ни одному из этих условий. В то же время в случае $n \geqslant 3$ хорошо известное условие

$$u(x) = o(1), \quad x \to \infty, \tag{2}$$

обеспечивает как единственность решения уравнения (1) с оператором Лапласа в качестве $P(D)$ в весьма широких классах классах распределений (например, в шварцевском классе $S'(\mathbb{R}^n)$ распределений умеренного роста), так и разрешимость для весьма обширного множества функций (распределений) $f(x)$.

При этом возникает закономерный вопрос: для каких еще уравнений условие (2) обеспечивает единственность решения? Этот же вопрос справедлив и для других столь же мягких условий (например, условий типа Зоммерфельда и т. п.). В случае уравнений с постоянными коэффициентами в шварцевском классе $S'(\mathbb{R}^n)$ ответ на этот вопрос дан в [1, 2] в том смысле, что было получено весьма простое условие на операторы $P(D)$, позволяющее факторизовать их на так называемые *классы эквивалентности*, обладающие тем свойством, что какое-либо условие регулярности решения на бесконечности, обеспечивающее единственность решения уравнения (1) с каким-либо представителем $P(D)$ какого-либо класса эквивалентности, обеспечивает единственность решений и для уравнений со всеми прочими операторами этого же самого класса эквивалентности. Однако необходимо отметить два момента: 1) для ряда задач современной физики уже в случае уравнений с постоянными коэффициентами класс $S'(\mathbb{R}^n)$ может оказаться недостаточно широк (примеры см. в [3, 4]); 2) сам класс дифференциальных уравнений с операторами конечного порядка также может оказаться слишком узким, поэтому имеется необходимость распространить соответствующие результаты хотя бы на некоторые классы псевдодифференциальных операторов. Настоящая работа и призвана восполнить эти пробелы.

2. Постановка задачи и предварительные результаты. Перейдем к точным формулировкам. Пусть x, y, ξ — точки из $\mathbb{R}^n$, $D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, $D_k = -i\partial/\partial x_k$. Через $Z(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство таких пробных аналитических функций $\varphi(x)$ (см., например, [6]), что их фурье-образы $\widehat{\varphi}(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а через $Z'(\mathbb{R}^n)$ — двойственное к $Z(\mathbb{R}^n)$ пространство так называемых *аналитических функционалов* $u(x) : Z'(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ (см. [6]), содержащее в себе пространство $S'(\mathbb{R}^n)$. Пусть, далее, $\mathcal{M}$ — пространство всех псевдодифференциальных операторов

$$P(D) : Z'(\mathbb{R}^n) \to Z'(\mathbb{R}^n),$$

коммутирующих со сдвигами, действующих по правилу

$$(P(D)u)\widehat{\ }(\xi) = P(\xi)\widehat{u}(\xi),$$

где функция $P(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, как всегда, будет называться *символом* оператора $P(D)$. (В том случае, если $P(\xi)$ представляет собой полином, оператор $P(D)$ является просто дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами).

Обозначим через

$$\mathcal{N}(P) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : P(\xi) = 0\} \tag{3}$$

множество всех вещественных нулей оператора $P(D) \in \mathcal{M}$. Аналогично (3), символами $\mathcal{N}(Q), \dots$ будем обозначать соответствующие множества вещественных нулей других операторов $Q(D), \dots \in \mathcal{M}$.

Определение 1. Будем говорить, что операторы $P(D)$ и $Q(D)$ *эквивалентны* (обозначение $P(D) \sim Q(D)$), если $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(Q)$. Если же $\mathcal{N}(P) = \varnothing$, то будем писать $P(D) \sim 0$.

Определение 2. Будем говорить, что оператор $P(D)$ *подчинен* оператору $Q(D)$ (обозначение $P(D) \prec Q(D)$), а оператор $Q(D)$ *доминирует* над оператором $P(D)$ (обозначение $Q(D) \succ P(D)$), если $\mathcal{N}(P) \subset \mathcal{N}(Q)$.

Замечание. Несложно заметить, что отношение эквивалентности превращает класс $\mathcal{M}$ в объединение непересекающихся *классов эквивалентности* $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{N})$, где множество $\mathcal{N} = \mathcal{N}(P)$ определяется любым произвольно выбранным представителем $P(D) \in \mathcal{P}$. При этом отношение подчиненности делает это множество еще и частично упорядоченным: $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$, если $P(D) \prec Q(D)$ для каких-либо представителей $P(D) \in \mathcal{P}$ и $Q(D) \in \mathcal{Q}$. Кроме того, совокупность $\{P(D)\}$ обладает еще и структурой полугруппы: например, можно ввести операцию умножения классов эквивалентности $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, определив произведение классов $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ как класс эквивалентности, содержащий оператор $P(D)Q(D)$, где $P(D)$ и $Q(D)$ — произвольные представители классов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. Однако эти вопросы не представляют большого интереса для автора данной работы, тем более, что они достаточно подробно освещены в [1].

Пусть $P(D)$ и $Q(D)$ — какие-либо операторы из $\mathcal{M}$. Рассмотрим два уравнения:

$$P(D)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$Q(D)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где $u(x)$ — распределение из $Z'(\mathbb{R}^n)$, и добавим к каждому из них одно и то же условие:

$$\Psi(D)u(x) = \theta(|x|^{-\lambda}), \quad x \to \infty, \tag{6}$$

где $\Psi(D) \in \mathcal{M}$, $\lambda \geqslant 0$, а символ $\theta(\cdot)$ может означать либо $o(\cdot)$, либо $O(\cdot)$, причем сами символы $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$ могут означать как равномерные оценки, так и оценки по каждому фиксированному направлению, по нескольким фиксированным направлениям или оценку по одному-единственному направлению. Кроме того, само условие (6) может быть единственным, может представлять собой систему условий (с различными операторами $\Psi(D)$, и, наконец, семейство условий. Так, например, условие Зоммефельда

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + ik_0\right) u(x) = o\big(r^{(1-n)/2}\big), \quad r = |x| \to \infty, \tag{7}$$

можно интерпретировать как семейство условий:

$$\big(\boldsymbol{e} \cdot D - k_0\big)u(x) = o\big(r^{(1-n)/2}\big), \quad r = |x| \to \infty, \tag{8}$$

где вектор $\boldsymbol{e}$ пробегает все точки единичной сферы $\omega_1 \subset \mathbb{R}^n$. Наконец, само условие (6) следует понимать в смысле теории распределений:

$$\Psi(D)(u * \varphi)(x) = \theta(|x|^{-\lambda}), \quad x \to \infty, \tag{9}$$

для всех $\varphi(x) \in Z'(\mathbb{R}^n)$, где символ $*$ означает свертку:

$$(u * \varphi)(x) = \langle u(y); \varphi(x-y)\rangle. \tag{10}$$

Из ограничения (9) следует, в частности, что если распределение $u(x)$ удовлетворяет условию (6), то ему будут удовлетворять и все его производные.

Полагая теперь $\mathcal{N} = \mathcal{N}(P)$, обозначим через $Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N})$ подпространство всех распределений из $Z'(\mathbb{R}^n)$, носители фурье-образов которых локализованы на множестве $\mathcal{N}$:

$$Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}) = \big\{u \in Z'(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(\widehat{u}) \subset \mathcal{N}\big\}, \tag{11}$$

а через $Z'(\mathbb{R}^n, \Psi)$ — подпространство всех распределений из $Z'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию (6). Наконец, положим

$$Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}, \Psi) = Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}) \cap Z'(\mathbb{R}^n, \Psi). \tag{12}$$

Сформулируем простое утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Предложение. *Если распределение $u(x) \in Z'(\mathbb{R}^n)$ является решением уравнения* (4)*, то $\operatorname{supp}(\widehat{u}) \subset \mathcal{N}_P$ (т.е. $u(x) \in Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_P)$).*

Доказательство аналогично доказательству этого же утверждения в случае шварцевского пространства $S'(\mathbb{R}^n)$ распределений умеренного роста (см., например, [5]).

3. Принципы эквивалентности и подчиненности.

Лемма. *Если задача* (4), (6) *имеет единственное (тривиальное) решение, то подпространство $Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}, \Psi)$ тривиально (т.е, содержит только нулевой функционал).*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $R > 0$ и рассмотрим замкнутый шар $V_R = \{|x| \leqslant R\}$. Далее, положим $\mathcal{N}_R = \mathcal{N} \cap V_R$. Фиксируем произвольное распределение $u(x) \in Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}, \Psi)$ и обозначим чрез $v(x) \in Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_R, \Psi)$ новое распределение, фурье-образ которого $\widehat{v}(\xi)$ является сужением $\widehat{u}(\xi)$ на V_R. Поскольку распределение $\widehat{v}(\xi)$ является распределением с компактным носителем, то оно имеет конечный порядок сингулярности (см., например, [6]), а значит (см. формулы (11) и (12)) найдется такое целое положительное N, что

$$P^N(\xi)\widehat{v}(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

или, что то же самое,

$$P^N(D)v(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Положим теперь $v_1(x) = P^{N-1}(D)v(x)$; тогда, в силу равенства (13),

$$P(D)v_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

причем распределение $v_1(x)$ также удовлетворяет и условию

$$\Psi(D)v(x) = \theta(|x|^{-\lambda}), \quad x \to \infty \tag{15}$$

(см. (12)). Но задача (14), (15) — это, по сути дела, задача (4), (6), а значит, в силу предположения леммы, $v_1(x)$ является нулевым функционалом. Полагая теперь $v_2(x) = P^{N-2}(D)v(x)$, точно такими же рассуждениями покажем, что и распределение $v_2(x)$ является нулевым функционалом. Продолжая рассуждения, на N-м шаге устанавливаем, что и распределение $v(x)$ есть нулевой функционал. Но это означает, что сужение распределения $\widehat{u}(\xi)$ на каждый шар V_R равно нулю, откуда следует, что $\widehat{u}(\xi)$ (а вместе с ним и $u(x)$) — нулевые функционалы. □

Пусть теперь $P(D) \sim Q(D)$, и пусть одна из задач (4), (6) или (5), (6) имеет только тривиальное решение. Тогда подпространство $Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}, \Psi)$ тривиально, а поскольку решение другой задачи принадлежит также этому подпространству, то и оно может быть только нулевым функционалом. Предположим теперь, что одна из задач (например, (4), (6)) имеет неединственное (нетривиальное) решение, а другая задача (в нашем случае — (5), (6)) — только тривиальное. Это невозможно, поскольку из единственности решения задачи (5), (6) следует тривиальность подпространства $Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}, \Psi)$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1 (принцип эквивалентности). *Если $P(D) \sim Q(D)$, то обе задачи (4), (6) и (5), (6) либо (одновременно) имеют только единственное (тривиальное) решение, либо (одновременно) имеют только неединственные нетривиальные решения.*

Далее, пусть теперь $P(D) \prec Q(D)$. Поскольку теперь $Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}(P), \Psi) \subset Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}(Q), \Psi)$, то из леммы и теоремы 1 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2 (принцип подчиненности). *Если $P(D) \prec Q(D)$, то из единственности решения задачи (5), (6) следует единственность решения задачи (4), (6), а из неединственности решения задачи (4), (6) следует неединственность задачи (5), (6).*

4. Приложение. В заключение сформулируем и докажем еще одно утверждение, которое может оказаться крайне полезным для выбора условия регулярности решения на бесконечности.

Теорема 3. *Пусть множество $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ состоит из конечного числа поверхностей:*

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_N,$$

имеющих в каждой из своих точек по крайней мере одну общую фиксированную нормаль $\boldsymbol{\nu}$. Тогда для любого распределения $u(x) \in Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N})$ и любой пробной функции $\varphi(x) \in Z(\mathbb{R}^n)$ выражение

$$q(t) = (u * \varphi)(t\boldsymbol{\nu}), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

есть квазиполином скалярной переменной t, степень и коэффициенты которого, возможно, зависят от функции $\varphi(x)$.

Доказательство. Несложно заметить,что множество $\mathcal{N}$ может быть локализовано в конечном объединении $(n-1)$-мерных параллельных гиперплоскостей

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_1 \cup \dots \cup \mathcal{H}_m, \quad m \leqslant N, \tag{17}$$

имеющих ту же самую общую нормаль $\boldsymbol{\nu}$, о которой шла речь в формулировке теоремы. Не ограничивая общности, можно считать, что эта нормаль совпадает с направляющим ортом последней координатной оси: $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{e}_n$ (этого всегда можно добиться поворотом осей), а значит,

$$\mathcal{H}_k = \Big\{\xi = (\xi', \xi_n): \ \xi_n = a_k\Big\}, \quad a_k \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Далее, в силу равенства (16) определения подпространств $Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N})$ (см. формулу (11)) получаем

$$u(x) = u_1(x) + \cdots + u_m(x), \tag{19}$$

где $u_k(x) \in Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_k)$, $k = 1, \ldots, m$, а следовательно (см. формулы (16) и (19)),

$$q(t) = q_1(t) + \cdots + q_m(t), \tag{20}$$

где

$$q_k(t) = (u_k * \varphi)(t\boldsymbol{\nu}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Фиксируем произвольную пробную функцию $\varphi(x) \in Z(\mathbb{R}^n)$ и положим

$$\psi(\xi) = (\varphi(-x))^{\vee}(\xi) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда в силу равенства (10) и формулы Планшереля имеем

$$q_k(t) = \big\langle \widehat{u}_k(\xi);\ (\varphi(t\boldsymbol{e}_n - x))^{\vee}(\xi)\big\rangle. \tag{22}$$

Поскольку в силу свойств преобразования Фурье

$$(\varphi(t\boldsymbol{e}_n - x))^{\vee}(\xi) = \exp(it\xi_n)\psi(\xi),$$

равенство (22) принимает вид:

$$q_k(t) = \big\langle \widehat{u}_k(\xi); \exp(it\xi_n)\psi(\xi)\big\rangle. \tag{23}$$

Так как $\psi(\xi)$ — финитная функция, то носитель $\operatorname{supp}(\psi)$ локализован в некотором шаре V_R, а равенство (23) принимает вид

$$q_k(t) = \big\langle v_k(\xi); \exp(it\xi_n)\psi(\xi)\big\rangle, \tag{24}$$

где распределение $v_k(\xi)$ есть сужение $\widehat{u}_k(\xi)$ на множество $\mathcal{H}_k \cap V_R$. Поскольку, в силу равенства (18), (финитное) распределение имеет вид

$$v_k(\xi) = \sum_{j=0}^{N(k)} w_{kj}(\xi') \otimes \delta^{(j)}(\xi_n - a_k),$$

(см. [6]), где $\delta(\cdot)$ — одномерная дельта-функция Дирака, то равенство (24) может быть переписано в виде

$$q_k(t) = \sum_{j=0}^{N(k)} \Big\langle w_{kj}(\xi');\ \big(D^j_{\xi_n}(\exp(it\xi_n)\psi(\xi))\big)\Big|_{\xi_n = a_k}\Big\rangle,$$

откуда следует, что $q_k(t)$ — квазиполином переменной t, а в силу формулы (20) — и $q(t)$ также является квазиполиномом переменной t. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Засорин Ю. В.* О теоремах единственности для уравнений в частных производных и универсальности условия регулярности решения на бесконечности// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2021. — № 3. — С. 48–58.
2. *Засорин Ю. В.* О корректной разрешимости задач Коши для нестационарных уравнений с невыделенной старшей производной по времени и определении следа распределения на гиперплоскости начальных данных// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *191*. — С. 47–73.
3. *Засорин Ю. В.* Метод перенормировки потенциала для одной модели типа Хартри—Фока—Слейтера// Теор. мат. физ. — 2002. — *130*, № 3. — С. 375–382.
4. *Засорин Ю. В.* Метод мультипольного псевдопотенциала для некоторых задач квантовой теории рассеяния// Теор. мат. физ. — 2003. — *135*, № 3. — С. 504–514.

5. *Хёрмандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. — М.: ИЛ, 1959.
6. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965.
7. *Hörmander L.* Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constsnt coefficients// Isr. J. Math. — 1973. — *16*. — P. 103–116.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Засорин Юрий Валентинович
Воронежский государственный университет
E-mail: `York-York-York-1960@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 56–74
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-56-74

УДК 517.51, 517.53

ОБ УТОЧНЕННОЙ ФУНКЦИИ РОСТА ОТНОСИТЕЛЬНО МОДЕЛЬНОЙ

© 2023 г. М. В. КАБАНКО, К. Г. МАЛЮТИН, Б. Н. ХАБИБУЛЛИН

Посвящается академику Л. С. Понтрягину

Аннотация. Понятие уточненного порядка широко используется в теориях целых, мероморфных, субгармонических и плюрисубгармонических функций. В статье приводится общая трактовка этого понятия как уточненной функции роста относительно модельной функции роста. Классический уточненный порядок — это уточненный порядок в смысле Валирона. Наше определение использует лишь одно условие. Такая форма определения новая и для классического уточненного порядка. В данном обзоре показано, что для любой функции, определенной на положительном луче, рост которой определяется модельной функцией роста, существует собственная уточненная функция роста относительно данной модельной функции роста.

***Ключевые слова*:** проблема Адамара, модельная функция роста, уточненный порядок, выпуклая функция, целая функция, субгармоническая функция.

ON THE PROXIMATE GROWTH FUNCTION RELATIVE TO THE MODEL GROWTH FUNCTION

© 2023 M. V. KABANKO, K. G. MALYUTIN, B. N. KHABIBULLIN

Abstract. The concept of proximate order is widely used in the theories of integer, meromorphic, subharmonic, and plurisubharmonic functions. In this paper, we provide a general interpretation of this concept as a proximate growth function relative to the model growth function. The classical proximate order is the proximate order in the sense of Valiron. Our definition uses only one condition. This form of definition is new for the classical proximate order. In this review, we show that for any function defined on a positive ray whose growth is determined by a model growth function, there is a proximate growth function relative to the model growth function.

***Keywords and phrases*:** Hadamard problem, model growth function, proximate order, convex function, entire function, subharmonic function.

***AMS Subject Classification*:** 26A12, 30D15, 26A48

1. Введение. В теории целых и субгармонических функций одной из важнейших проблем является проблема связи между ростом целой или субгармонической функции и распределением нулей целой или распределением риссовской меры субгармонической функции. А. Пуанкаре в своём мемуаре [22] выделил две проблемы наибольшей важности, указав, с одной стороны, на связь между ростом целой функции и ее жанром, с другой стороны, — на связь между ростом целой функции и ее коэффициентами Тейлора. Начало разработке методов исследования поставленных

Работа К. Г. Малютина выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00012). Работа Б. Н. Хабибуллина выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

проблем положили труды Э. Бореля [17] и Ж. Адамара [19]. В дальнейшем их идеи получили развитие в работах П. Бутру, А. Вимана, Д. Пойа, Ж. Валирона, Э. Линделефа, А. Принсгейма, А. Данжуа, Э. Майе, Дж. Литтлвуда и других математиков. Простейшая характеристика роста целой функции f — это максимум её модуля $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, а для субгармонической функции v на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ — её максимум $\mathcal{M}_v(r) = \max\limits_{|z|=r} v(z)$ по $r \geqslant 0$.

Начиная с работ Ж. Адамара и Э. Бореля математиков интересовал вопрос о нахождении возможно более узких классов функций H, в которых для любой целой функции f нашлась бы возрастающая неограниченная функция h, $r > 0$, с условием

$$\sigma_f := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} \in (0, +\infty) \tag{1}$$

и с возможностью вычислить эту величину, называемую *типом f относительно h*, по тейлоровским коэффициентам или по распределению нулей функции f. Для подкласса целых функций конечного порядка эту задачу решил Ж. Валирон (см. [25]), введя понятие уточнённого порядка. Он показал, что каждая целая функция конечного порядка имеет свой уточненный порядок $\rho(r)$, $r > 0$, для которого тип функции f относительно функции $h(r) := r^{\rho(r)}$ нормален, т.е. выполняется (1). Более общая теорема доказана Б. Я. Левиным [8, гл. I, теорема 16]. Напомним классическое определение уточнённого порядка.

Абсолютно непрерывная функция ρ на некотором луче $(a, +\infty)$ называется *уточнённым порядком в смысле Валирона*, если одновременно существуют два предела

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \varrho \in (0, +\infty), \quad \lim_{r\to\infty} r\rho'(r) \ln r = 0. \tag{2}$$

Здесь под $\rho'(r)$ мы понимаем наибольшее производное число в точке r.

Накладывая дополнительные требования (такие как монотонность, дифференцируемость достаточное число раз или бесконечная дифференцируемость, аналитичность в некотором угле и др.), классы уточненных порядков, применяемых для изучения роста целых функций, постоянно сужали (см., например, [7–10, 12, 15, 16]). Универсальной шкалы роста целых и субгармонических функций, конечно, не существует, но возможность использовать достаточно узкий класс эталонных функций, с которыми можно сравнивать в том или ином смысле рост произвольной целой или субгармонической функции, имеет большое значение. А. Ю. Попов нашел узкие плотные классы функций сравнения роста из целых функций, коэффициенты которых обладают тем свойством, что их обратные величины являются моментами положительной меры, аналитической на $(0, +\infty)$ (см. [11]).

Проблему Адамара (точнее, Бореля—Адамара) на современном математическом языке можно сформулировать как проблему нахождения таких узких плотных классов функций, с помощью которых можно описывать рост целых и субгармонических функций (или специальных подмножеств целых и субгармонических функций). Из сказанного видно, что решение задач, связанных с проблемой Адамара, возникшей более ста лет назад, остается актуальным и в настоящее время. Условие (1) дает точную асимптотическую оценку логарифма максимума модуля целой или максимума модуля субгармонической функции сверху, но во многих вопросах современного анализа важное значение приобрели и нижние оценки целых функций.

В связи с этим замечанием Г. Г. Брайчев (см. [1–3]) расширил задачу Адамара, понимая под ее решением нахождение возможно более узких классов функций H, таких, что для любой целой функции f дополнительно к (1) найдется функция $h_1 \in H$, удовлетворяющая условию

$$\underline{\sigma}_f := \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h_1(r)} \in (0, \infty) \tag{3}$$

и с возможностью вычисления и этой величины по коэффициентам ряда Тейлора функции f. Такие классы функций он называет плотными классами двустороннего сравнения роста (верхнего и нижнего) во множестве всех целых функций. Более того, оценки относительного роста максимума модуля целой или субгармонической функции, определяемые формулами (1) и (3), можно уточнять и находить такие классы эталонных функций, в которых для любой целой функции f нашлись бы функции $\bar{h}$ и $\bar{h}_1$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$\varlimsup_{r\to+\infty}(\ln M_f(r)-\bar{h}(r))=0,\qquad \varliminf_{r\to+\infty}(\ln M_f(r)-\bar{h}_1(r))=0.$$

Таким образом, под обобщенной проблемой Адамара в смысле Г. Г. Брайчева мы понимаем отыскание возможно более узких классов функций, в которых для любой целой функции f нашлись бы функции, дающие точные двусторонние асимптотические оценки $\ln M_f(r)$ и тейлоровских коэффициентов $f(z)$, удовлетворяющих таким оценкам.

Обсуждаемые выше проблемы свидетельствуют о сложности и многогранности задач, восходящих к Адамару. Аналогичные проблемы возникают не только в пространствах целых функций, а также и в классах субгармонических, мероморфных функций в различных областях (ограниченных и неограниченных) комплексной плоскости и в многомерном комплексном анализе. В настоящей статье мы ограничиваемся рассмотрением классов эталонных функций, введенных в [13]. Результаты из [13] приводятся и доказываются ниже в следующем разделе 2 в несколько модифицированной форме в полном объёме с целью автономности изложения в настоящем обзоре исходных для исследования утверждений. Введённое в [13] понятие модельной функции роста охватывает весьма широкий класс функций. Функции f конечного порядка относительно модельной функции могут иметь порядок роста в классическом его понимании равный бесконечности или нулю, т.е.

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln f(r)}{\ln r}=\begin{bmatrix}\infty,\\ 0.\end{bmatrix}$$

Например, к модельным функциям роста относятся функции от $r>0$ вида $\exp^{\circ n} r$, где $\exp^{\circ n}$ — n-кратная суперпозиция ($n=1,2,\dots$) показательной функции exp, степени логарифмической функции $\ln^p(e+r)$ при любом $p\geqslant 1$, и вообще любая дифференцируемая функция $M(r)>0$ при всех $r>0$ с возрастающей функцией $rM'(r)>0$ при всех $r>0$.

Далее $\mathbb{R}$ — множество *действительных* чисел, а $\mathbb{R}^+=\{r\in\mathbb{R}\colon r\geqslant 0\}$ и $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ — множества соответственно *положительных* и *строго положительных* чисел. Функция f с *областью значений* в $\mathbb{R}$ и областью определения $R\subset\mathbb{R}$ называется *положительной* (обозначение $f\geqslant 0$) (соответственно *строго положительной*, $f>0$), если $f(R)\subset\mathbb{R}^+$ (соответственно, $f(R)\subset\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$). Функция f на $R\subset\mathbb{R}$ называется *возрастающей* (соответственно, *строго возрастающей*), если для любых пар точек $x_1,x_2\in R$ из $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1)<f(x_2)$). Аналогично для отрицательности и убывания. Действия над функциями на R поточечные.

Из классических свойств *выпуклых функций* M на открытом интервале $I\subset\mathbb{R}$ отметим следующие: функция M *непрерывна* и в каждой точке $r\in I$ имеет *производные слева* $M'_-(r)$ и *справа* $M'_+(r)$, которые равны между собой вне некоторого счетного множества E, а функции $r\mapsto rM'_-(r)$ и $r\mapsto rM'_+(r)$ — возрастающие (см. [14, гл. I], [20, гл. I]). Другими словами, в случае $I=(r_0,+\infty)$ с $r_0\in\mathbb{R}^+$ функция $z\mapsto M(|z|)$ по переменной $z\in\mathbb{C}$ является *субгармонической радиальной функцией* вне замкнутого круга радиуса r_0 с центром в нуле (см. [20, гл. III]).

Функция M на открытом интервале $I\subset\mathbb{R}^+$ называется *выпуклой относительно* ln, если функция $m\colon x\mapsto M(e^x)$ выпукла. Далее под *производной* $M'(r)$ в точке r выпуклой относительно ln функции M вне исключительного множества E будем понимать одну из производных $M'_-(r)$ или $M'_+(r)$, доопределяя ее в точках множества E равенством $M'(r)=\varlimsup_{r>x\to r}M'_-(x)$.

В данном кратком обзоре будет показано, что для любой функции, определенной на $\mathbb{R}^+$, рост которой определяется модельной функцией роста M, существует собственная уточненная функция роста относительно модельной функции роста M и собственная миноранта. Таким образом, рассматривается вариант проблемы Адамара в версии, близкой к подходу Г. Г. Брайчева, для широких классов целых и субгармонических функций. Доказательства носят конструктивный характер. Для построения уточненной функции роста используются идеи и конструкции из диссертации А. Ф. Гришина [4] и его работ с соавторами [5, 6].

2. Обобщение уточненного порядка. Следуя [13], введем следующие определения.

Определение 1. Функция M на открытом луче $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, строго положительная и выпуклая относительно ln, для которой $M'(r) > 0$ при всех $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ и $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$, называется *модельной функцией роста.*

Определение 2. Строго положительная дифференцируемая функция V на некотором луче $(r_0, +\infty) \subset \mathbb{R}^+$ называется *уточненной функцией роста относительно модельной функции роста* M, если существует хотя бы один из равных между собой пределов

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{(\ln V(r))'}{(\ln M(r))'} = \lim_{r\to+\infty} \frac{(\ln v(x))'}{(\ln m(x))'} = \lim_{r\to+\infty} \frac{m(x)v'(x)}{m'(x)v(x)} \in \mathbb{R}^+, \tag{4}$$

где функция $m\colon x \mapsto M(e^x)$ по определению 1 выпукла на $\mathbb{R}$, а функция $v\colon x \mapsto V(e^x)$ дифференцируема на $(\ln r_0, +\infty)$.

Замечание 1. Легко видеть, что при существовании хотя бы одного из пределов в (4) все остальные пределы в (4) существуют и равенства в (4) верны.

Замечание 2. Использование в (4) вместе с $M(r)$ и $V(r)$ пары функций $m(\ln r) = M(r)$ и $v(\ln r) = V(r)$ для $r \in \mathbb{R}^+_*$ обусловлено связью нашего подхода к функциям роста с общей идеологией по этому направлению, разработанной К. Кизельманом в [21].

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится версия обобщённого правила Лопиталя, которое достаточно детально изложено и обсуждается в [3, гл. 2, § 1].

Лемма 1 (см. [24, теорема 1])**.** *Пусть функции f и g дифференцируемы на некотором открытом луче $(r_0, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Если существуют пределы*

$$\lim_{r\to+\infty} |g(r)| = +\infty, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{f'(r)}{g'(r)} := L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}, \tag{5}$$

то существует предел

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{f(r)}{g(r)} = L = \lim_{r\to+\infty} \frac{f'(r)}{g'(r)}. \tag{6}$$

Замечание 3. Специфика приведенного варианта обобщённого правила Лопиталя в том, что в условиях (5) не требуется традиционного условия существования бесконечного предела $\lim\limits_{r\to+\infty} |f(r)| = +\infty$ для функции f из числителей в (5) и (6).

Теорема 1. *Пусть M — модельная функция роста, а V — строго положительная дифференцируемая функция на некотором открытом луче $(r_0, +\infty) \subset \mathbb{R}^+$. Тогда эквивалентны следующие два утверждения:*

(i) *Функция V — уточненная функция роста относительно функции M.*

(ii) *Для функции*

$$\rho_M(r) := \frac{\ln V(r)}{\ln M(r)}, \quad r \in (r_0, +\infty), \tag{7}$$

существуют два конечных предела

$$\varrho = \lim_{r\to+\infty} \rho_M(r) = \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln V(r)}{\ln M(r)} \in \mathbb{R}^+, \tag{8}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{M'(r)} \ln M(r) \rho'_M(r) = \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r)}{(\ln M(r))'} \rho'_M(r) = 0. \tag{9}$$

При выполнении любого из двух утверждений (i) *или* (ii) *справедливы равенства*

$$\varrho = \lim_{r\to+\infty} \rho_M(r) = \lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}. \tag{10}$$

Доказательство. Вычисляя производную функции (7), получим

$$\rho_M'(r)=\frac{(V'(r)/V(r))\ln M(r)-(M'(r)/M(r))\ln V(r)}{(\ln M(r))^2}=\frac{M'(r)}{M(r)\ln M(r)}\left(\frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}-\frac{\ln V(r)}{\ln M(r)}\right),$$

откуда по определению (7) функции ρ_M имеем

$$\frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}=\frac{\ln V(r)}{\ln M(r)}+\frac{M(r)\ln M(r)}{M'(r)}\rho_M'(r)=\rho_M(r)+\frac{M(r)}{M'(r)}\rho_M'(r)\ln M(r). \tag{11}$$

Отсюда, если выполнено утверждение (ii) теоремы и существуют пределы (8)–(9), то

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}=\lim_{r\to+\infty}\rho_M(r)+\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{M'(r)}\rho_M'(r)\ln M(r)=\varrho+0=\varrho\in\mathbb{R}^+.$$

Таким образом, существуют пределы (4), справедливо равенство (10), и по определению функции V выполнено утверждение (i) теоремы.

Обратно, пусть выполнено утверждение (i) теоремы, т.е. существует предел

$$\varrho:=\lim_{r\to+\infty}\frac{(\ln V(r))'}{(\ln M(r))'}\in\mathbb{R}^+. \tag{12}$$

По обобщённому правилу Лопиталя из леммы 1, применённому к паре функций $g:=\ln M$ и $f:=\ln V$ при значении $L:=\varrho$ из (12), по свойствам модельной функции роста M из определения функции ρ_M в обозначении (7) существует

$$\lim_{r\to+\infty}\rho_M(r)=\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln V(r)}{\ln M(r)}=\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{g(r)}=L=\varrho.$$

Таким образом, доказано существование предела (8) из утверждения (ii) теоремы, а также установлено равенство (10). Наконец, из равенств (10) и (11) получаем

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{M'(r)}\rho_M'(r)\ln M(r)=\lim_{r\to+\infty}\rho_M(r)-\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}=\varrho-\varrho=0,$$

что дает существование предела (9), равного нулю, и завершает вывод утверждения (ii) из утверждения (i). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть положительная на луче $(r_0,+\infty)\subset\mathbb{R}^+$ функция ρ дифференцируема. Тогда эквивалентны следующие три утверждения*:

(i) *Функция ρ — уточнённый порядок в смысле Валирона и $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=\varrho\in\mathbb{R}^+$.*

(ii) *Функция $V(r)=r^{\rho(r)}$, $r\in(r_0,+\infty)$, — уточнённая функция роста относительно тождественной модельной функции роста $M:=\mathrm{id}\colon r\mapsto r$, что означает существование хотя бы одного предела из* (4), *а значит, и каждого в* (4):

$$\varrho=\lim_{r\to+\infty}\frac{rV'(r)}{V(r)}=\lim_{r\to+\infty}\frac{(\ln V(r))'}{(\ln r)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln v(x))'}{(\ln e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{v'(x)}{v(x)}\in\mathbb{R}^+, \tag{13}$$

где, как и выше, $v(x):=V(e^x)$ при $x\in(\ln r_0,+\infty)$.

(iii) *Существует предел*

$$\lim_{r\to+\infty}\bigl(\rho(r)+r\rho'(r)\ln r\bigr)=\varrho. \tag{14}$$

Доказательство. Утверждение (i) следствия — это, ввиду определения уточнённого порядка в смысле Валирона, в точности утверждение (ii) теоремы 1 при $M:=\mathrm{id}$, где соотношения (8) и (9) — это соответственно первое и второе соотношения в (13).

Утверждение (ii) следствия в случае тождественной функции $M:=\mathrm{id}$ совпадает с утверждением (i) теоремы 1. Величина ϱ в (13) совпадает с величиной $\varrho:=\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)\in\mathbb{R}^+$ из утверждения (i) следствия согласно равенству (10) теоремы 1.

Наконец, равенство (14) утверждения (iii) следствия — это в точности первое равенство в (13) из утверждения (ii) следствия, поскольку в данном случае

$$\frac{rV'(r)}{V(r)} = \frac{r\big(r^{\rho(r)}\big)'}{r^{\rho(r)}} = r\big(\rho(r)\ln r\big)' = r\rho'(r)\ln r + \rho(r) \quad \text{при } r \in (r_0, +\infty).$$

Тем самым, следствие доказано. □

Замечание 4. Эквивалентность утверждений (i) и (iii) следствия 1 показывает, что при определении дифференцируемого уточнённого порядка в смысле Валирона достаточно одного условия-предела (14), а не двух условий-пределов из определения (2) (см. Введение).

Определение 3. Функция ρ_M, определяемая равенством (7), называется *уточнённым порядком относительно модельной функции роста M.*

Замечание 5. В силу определения (7) уточненная функция роста V относительно модельной функции роста M представляется в виде

$$V(r) = M^{\rho_M(r)}(r), \quad r \in (r_0, +\infty). \tag{15}$$

Далее, если из контекста понятно, о какой модельной функции роста M идет речь, в обозначении ρ_M уточнённого порядка относительно M нижний индекс M часто будем опускать и писать $\rho(r) := \rho_M(r)$. Кроме того, в теореме 8 в конце статьи встретится обозначение $V_1(r) = M^{\rho_1(r)}(r)$, где у ρ_1 индекс M не указан.

Пример 1. Широкий класс модельных функций роста предоставляют важнейшие характеристики роста субгармонических функций $v \not\equiv -\infty$ на $\mathbb{C}$, а именно: её максимум $\mathcal{M}_v(r)$ на окружностях из введения, а также

$$\mathcal{C}_v(r) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\,d\theta, \quad \mathcal{B}_v(r) := \frac{2}{\pi r^2}\int\limits_0^{r} \mathcal{C}_v(s)s\,ds$$

— соответственно *интегральное среднее по окружности и по кругу радиуса r с центром в нуле* (см. [23, определение 2.6.7, теорема 2.6.8]).

3. Операторы J_0^i и J_∞^i.

Определение 4. Пусть функции ε и φ определены на полуоси $[a, \infty)$ и ограничены снизу на любом отрезке $[a, N]$, причем $\varphi(r) > 0$. Определим оператор $J_0^i(\varepsilon, \varphi)$ равенством

$$\varepsilon_0^i(r) = J_0^i(\varepsilon, \varphi)(r) := \frac{1}{\varphi(r)} \inf_{t\in[a,r]} \varepsilon(t)\varphi(t).$$

Так как $\inf\limits_{t\in[a,r]} \varepsilon(t)\varphi(t) \leqslant \varepsilon(r)\varphi(r)$, то $\varepsilon_0^i \leqslant \varepsilon$. Очевидно, что $\varepsilon_0^i\,\varphi$ — убывающая функция.

Определение 5. Пусть функции ε и φ определены на полуоси $[a, \infty)$, $\varphi(r) > 0$, и пусть функция $\varepsilon\,\varphi$ ограничена снизу. Определим оператор $J_\infty^i(\varepsilon, \varphi)$ равенством

$$\varepsilon_\infty^i(r) = J_\infty^i(\varepsilon, \varphi)(r) := \frac{1}{\varphi(r)} \inf_{t\in[r,\infty)} \varepsilon(t)\varphi(t).$$

Аналогично, из неравенства $\inf\limits_{t\in[r,\infty)} \varepsilon(t)\varphi(t) \leqslant \varepsilon(r)\varphi(r)$ следует, что $\varepsilon_\infty^i \leqslant \varepsilon$. Очевидно, что $\varepsilon_\infty^i\,\varphi$ — возрастающая функция.

Докажем две теоремы о свойствах операторов $J_0^i(\varepsilon, \varphi)$ и $J_\infty^i(\varepsilon, \varphi)$. Для доказательства используем идеи работы [4].

Теорема 2. *Пусть φ — непрерывная, возрастающая, неограниченная функция на полуоси $[a, \infty)$ и $\varphi(a) > 0$, а функция ε на $[a, \infty)$ возрастающая и $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$. Положим $\varepsilon_0^i = J_0^i(\varepsilon, \varphi)$. Справедливы следующие утверждения*:

(i) $\varepsilon_0^i \leqslant \varepsilon$;

(ii) *произведение* $\varepsilon_0^i\,\varphi$ — *убывающая функция на* $[a,\infty)$;
(iii) ε_0^i — *возрастающая функция на* $[a,\infty)$ *и* $\lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon_0^i(r)=0$;
(iv) ε_0^i — *непрерывная функция на* $[a,\infty)$;
(v) *если произведение* $\varepsilon_0^i\,\varphi$ *не является постоянной функцией ни в какой окрестности бесконечности, то существует возрастающая неограниченная последовательность точек* r_n *на* $[a,\infty)$, *для которой* $\varepsilon(r_n+h)-\varepsilon(r_n-0)>0$ *при любом значении* $h>0$ *и одновременно* $\varepsilon_0^i(r_n)=\varepsilon(r_n-0)$;
(vi) *если* φ — *дифференцируемая функция, то*

$$\frac{1}{|\varepsilon_0^i(r)|}\,\varlimsup_{h\to 0}\left|\frac{\varepsilon_0^i(r+h)-\varepsilon_0^i(r)}{h}\right|\leqslant\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}.$$

Доказательство. Справедливость утверждений (i) и (ii) была отмечена ранее. При выборе значения $r_2>r_1$ получаем

$$\varepsilon_0^i(r_2)=\frac{1}{\varphi(r_2)}\min\left\{\inf_{t\in[a,r_1]}\varepsilon(t)\varphi(t),\ \inf_{t\in[r_1,r_2]}\varepsilon(t)\varphi(t)\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{\min\{\varepsilon_0^i(r_1)\varphi(r_1),\varepsilon(r_1)\varphi(r_2)\}}{\varphi(r_2)}=\min\left\{\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)}\varepsilon_0^i(r_1),\varepsilon(r_1)\right\}. \quad (16)$$

Так как $\varepsilon(r_1)\geqslant\varepsilon_0^i(r_1)$, $\varphi(r_2)\geqslant\varphi(r_1)$, $\varepsilon_0^i(r_1)\leqslant 0$, то $\varepsilon_0^i(r_2)\geqslant\varepsilon_0^i(r_1)$, и мы доказали, что функция ε_0^i является возрастающей.

Кроме того, пусть ϵ — произвольное отрицательное число. Найдем такое r_1, что $\varepsilon(r_1)>\epsilon$. Затем мы можем выбрать число R таким образом, чтобы при $r_2>R$ и фиксированном r_1 выполнялось неравенство

$$\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)}\varepsilon_1(r_1)>\epsilon.$$

Тогда из неравенства (16) следует, что при $r_2>R$ выполняется неравенство $\varepsilon_0^i(r_2)>\epsilon$. Утверждение (iii) теоремы доказано.

Далее из неравенства (16) и свойств (ii) и (iii) следует, что

$$\varepsilon_0^i(r_1)\left(\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)}-1\right)\geqslant\varepsilon_0^i(r_2)-\varepsilon_0^i(r_1)\geqslant 0. \quad (17)$$

Из этого неравенства и непрерывности функции φ следует непрерывность функции ε_0^i, и утверждение (iv) теоремы доказано.

Если теперь предположить, что функция φ дифференцируема, то из неравенства (17) следует утверждение (vi) теоремы.

Далее, пусть T есть значение функции $\varepsilon_0^i\,\varphi$ и $T\neq\varepsilon_0^i(a)\varphi(a)$. Пусть

$$E:=E(T)=\{t:\varepsilon_0^i(t)\varphi(t)=T\},\quad r=r(T)=\inf E.$$

Из непрерывности функции $\varepsilon_0^i\,\varphi$ следует, что $r(T)>a$ и $\varepsilon_0^i(r(T))\varphi(r(T))=T$.

Докажем, что для любого $\sigma\in(0,r-a]$ имеет место равенство

$$\varepsilon_0^i(r)\varphi(r)=\inf_{t\in[a,r]}\varepsilon(t)\varphi(t)=\inf_{t\in(r-\sigma,r]}\varepsilon(t)\varphi(t). \quad (18)$$

Предположим противное, а именно, пусть существует такое $\sigma_0\in(0,r-a]$, что

$$\inf_{t\in(r-\sigma_0,r]}\varepsilon(t)\varphi(t)>\inf_{t\in[a,r]}\varepsilon(t)\varphi(t),$$

т.е.

$$\inf_{t\in[a,r-\sigma_0]}\varepsilon(t)\varphi(t)=\inf_{t\in[a,r]}\varepsilon(t)\varphi(t).$$

В этом случае выполняется равенство

$$\varepsilon_0^i(r-\sigma_0)\varphi(r-\sigma_0)=\varepsilon_0^i(r)\varphi(r)=T,$$

что противоречит определению числа $r=r(T)$. Тем самым, равенство (18) доказано.

Из (18) следует, что для любого $\sigma \in (0, r-a]$ найдется такая точка $\bar t \in (r-\sigma, r]$, что
$$\varepsilon(r-\sigma)\varphi(\bar t) \leqslant \varepsilon(\bar t)\varphi(\bar t) < \varepsilon_0^i(r)\varphi(r) + \sigma.$$
Переходя в этом неравенстве к пределу при $\sigma \to +0$, получим, с учетом п. (i),
$$\varepsilon(r-0)\varphi(r) \leqslant \varepsilon_0^i(r)\varphi(r), \quad \varepsilon(r-0) = \varepsilon_0^i(r).$$
Если для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(r-0) - \varepsilon(r+\ h) <\ 0$, то положим
$$\bar r = \bar r(T) = r = r(T).$$
Если для некоторого $h > 0$ выполняется равенство $\varepsilon(r-0) - \varepsilon(r+h) = 0$, то положим
$$barr(T) = \sup\bigl\{t \colon \varepsilon(t) = \varepsilon(r-0)\bigr\}.$$
Тогда для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(\bar r - 0) - \varepsilon(\bar r + h) < 0$. Пусть $\bar r > r$. Функция ε_0^i есть возрастающая миноранта функции ε. Поскольку $\varepsilon_0^i(r) = \varepsilon(r-0) = \varepsilon(\bar r - 0)$, то
$$\varepsilon_0^i(\bar r) \geqslant \varepsilon_0^i(r) = \varepsilon(\bar r - 0), \quad \varepsilon_0^i(\bar r) = \varepsilon(\bar r - 0).$$
Таким образом, мы показали, что справедливы соотношения
$$\varepsilon_0^i(\bar r(T)) = \varepsilon(\bar r(T) - 0),$$
$$\varepsilon(\bar r(T) - 0) - \varepsilon(\bar r(T) + h) < 0 \quad \text{для любого } h > 0,$$
$$\varepsilon_0^i(r(T))\,\varphi(r(T)) = T.$$
Предположим, что функция $\varepsilon_0^i\,\varphi$ не постоянна ни в какой окрестности бесконечности. Тогда можно выбрать строго возрастающую последовательность T_n значений функции $\varepsilon_0^i\,\varphi$, для которой
$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_0^i(t)\varphi(t).$$
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \bar r(T_n) = \infty$, и в качестве последовательности r_n в п. 5) можно взять $r_n = \bar r(T_n)$. Утверждение (v) доказано. Теорема 2 полностью доказана. □

Теорема 3. *Пусть φ — непрерывная возрастающая неограниченная функция на $[a,\infty)$ и $\varphi(a) > 0$, а функция ε — убывающая на $[a,\infty)$ и $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$. Тогда для $\varepsilon_\infty^i := J_\infty^i(\varepsilon,\varphi)$ справедливы следующие утверждения*:

(i) $\varepsilon_\infty^i \leqslant \varepsilon$;
(ii) *произведение $\varepsilon_\infty^i\,\varphi$ — возрастающая функция на $[a,\infty)$*;
(iii) *ε_∞^i — убывающая функция на $[a,\infty)$ и $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon_0^i(r) = 0$*;
(iv) *ε_∞^i — непрерывная функция на $[a,\infty)$*;
(v) *если произведение $\varepsilon_\infty^i\,\varphi$ не является постоянной функцией ни в какой окрестности бесконечности, то существует возрастающая неограниченная последовательность точек r_n на $[a,\infty)$, для которой $\varepsilon_\infty^i(r_n) = \varepsilon(r_n+0)$, $\varepsilon(r_n+0) - \varepsilon(r_n - h) < 0$ для любого $h > 0$*;
(vi) *если φ — дифференцируемая функция, то*
$$\frac{1}{\varepsilon_\infty^i(r)} \varlimsup_{h\to 0} \left|\frac{\varepsilon_\infty^i(r+h) - \varepsilon_\infty^i(r)}{h}\right| \leqslant \frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}.$$

Доказательство. Справедливость первых двух утверждений теоремы была отмечена при определении оператора $J_\infty^i(\varepsilon,\varphi)$. Далее при $r_2 > r_1$ имеем
$$\varepsilon_\infty^i(r_1) = \frac{1}{\varphi(r_1)} \min\left\{\inf_{t\in[r_1,r_2]} \varepsilon(t)\varphi(t),\ \inf_{t\in(r_2,\infty)} \varepsilon(t)\varphi(t)\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\varphi(r_1)} \min\Bigl\{\varepsilon(r_2)\varphi(r_1),\ \varepsilon_\infty^i(r_2)\varphi(r_2)\Bigr\} = \min\left\{\varepsilon(r_2),\ \frac{\varphi(r_2)}{\varphi(r_1)}\varepsilon_\infty^i(r_2)\right\}.$$
С помощью этого неравенства способом, указанным в предыдущей теореме, доказываются утверждения (iii), (iv), (vi) теоремы.

Далее, пусть T — значение функции $\varepsilon^i_\infty \varphi$,

$$E := E(T) = \{t : \varepsilon_1(t)\varphi(t) = T\}, \quad r = r(T) = \sup E.$$

Тогда для любого $\sigma > 0$ выполняется равенство

$$\varepsilon^i_\infty(r)\varphi(r) = \inf_{t\in[r,\infty)} \varepsilon(t)\varphi(t) = \inf_{t\in[r,r+\sigma)} \varepsilon(t)\varphi(t). \tag{19}$$

Предположим противное: пусть существует такое $\sigma_0 > 0$, что

$$\inf_{t\in[r,r+\sigma_0)} \varepsilon(t)\varphi(t) > \inf_{t\in[r,\infty)} \varepsilon(t)\varphi(t),$$

т.е.

$$\inf_{t\in[a,r+\sigma_0]} \varepsilon(t)\varphi(t) = \inf_{t\in[a,r]} \varepsilon(t)\varphi(t).$$

Из этого равенства следует, что

$$\varepsilon^i_\infty(r+\sigma_0)\varphi(r+\sigma_0) = \varepsilon^i_\infty(r)\varphi(r) = T,$$

что противоречит определению числа T. Тем самым, равенство (19) доказано.

Из (19) следует, что для любого $\sigma > 0$ найдется такая точка $\bar t \in [r, r+\sigma)$, что

$$\varepsilon(r+\sigma)\varphi(\bar t) \leqslant \varepsilon(\bar t)\varphi(\bar t) < \varepsilon^i_\infty(r)\varphi(r) + \sigma.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\sigma \to +0$, в силу п. (i) получим

$$\varepsilon(r+0) \leqslant \varepsilon^i_\infty(r), \quad \varepsilon^i_\infty(r) = \varepsilon(r+0).$$

Если для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(r+0) - \varepsilon(r-h) < 0$, то положим

$$\bar r = \bar r(T) = r = r(T).$$

Если для некоторого $h > 0$ выполняется равенство $\varepsilon(r+0) - \varepsilon(r-h) = 0$, то положим

$$\bar r(T) = \inf\{t : \varepsilon(t) = \varepsilon(r+0)\}.$$

Тогда для любого $h > 0$ либо выполняется неравенство $\varepsilon(\bar r+0) - \varepsilon(\bar r - h) < 0$, и в этом случае полагаем $\varepsilon(t) = \varepsilon(a)$ при $t < a$, либо $\bar r = a$. Так как ε^i_∞ — убывающая миноранта функции ε, то

$$\varepsilon^i_\infty(\bar r) \geqslant \varepsilon^i_\infty(r) = \varepsilon(r+0) = \varepsilon(\bar r+0).$$

Отсюда следует, что $\varepsilon^i_\infty(\bar r) = \varepsilon(\bar r+0)$. Таким образом, выполняются соотношения

$$\varepsilon^i_\infty(\bar r(T)) = \varepsilon(\bar r(T)+0),$$
$$\varepsilon(\bar r(T)+0) - \varepsilon(\bar r(T)-h) < 0 \quad \text{для любого } h>0, \text{ либо } \bar r(T) = a,$$
$$\varepsilon^i_\infty(r(T))\varphi(r(T)) = T.$$

Далее, повторяя рассуждения предыдущей теоремы, получаем, что справедливо утверждение (v) теоремы. Теорема 3 полностью доказана. □

4. Операторы J_0 и J_∞.

Операторы J_0 и J_∞ были введены А. Ф. Гришиным (см. [4]).

Определение 6. Пусть функции ε и φ определены на полуоси $[a,\infty)$ и ограничены сверху на любом отрезке $[a,N]$, причем $\varphi(r) > 0$ при всех $r \in [a,\infty)$. Оператор $J_0(\varepsilon,\varphi)$ определяется равенством

$$J_0(\varepsilon,\varphi)(r) := \frac{1}{\varphi(r)} \sup_{t\in[a,r]} \varepsilon(t)\varphi(t), \quad r\in[a,\infty).$$

Теорема 4. *Пусть φ — непрерывная, возрастающая, неограниченная функция на полуоси $[a,\infty)$ и $\varphi(a) > 0$, а ε — убывающая функция на $[a,\infty)$ и $\lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon(r) = 0$. Положим $\varepsilon_0 := J_0(\varepsilon,\varphi)$ при $r\in[a,\infty)$. Справедливы следующие утверждения*:

(i) $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon$ *на* $[a,\infty)$;

(ii) *произведение* $\varepsilon_0\varphi$ — *возрастающая функция на* $[a,\infty)$;

(iii) ε_0 — *убывающая функция на* $[a,\infty)$ *и* $\lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon_0(r) = 0$;

(iv) *произведение* $\varepsilon_0\varphi$ — *непрерывная функция на* $[a,\infty)$;

(v) *если произведение $\varepsilon_0\varphi$ не постоянная функция ни в какой окрестности бесконечности, то существует возрастающая неограниченная последовательность точек r_n на $[a,\infty)$, для которой $\varepsilon(r_n-0)-\varepsilon(r_n+h)>0$ при любом значении $h>0$ и одновременно $\varepsilon_0(r_n)=\varepsilon(r_n-0)$;*

(vi) *если φ — дифференцируемая функция, то*

$$\frac{1}{\varepsilon_0(r)}\varlimsup_{h\to 0}\left|\frac{\varepsilon_0(r+h)-\varepsilon_0(r)}{h}\right|\leqslant\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}.$$

Доказательство. Теорема 4 доказана А. Ф. Гришиным в [4]. Её доказательство аналогично доказательству теоремы 2, поэтому приведём только некоторые рассуждения, не претендуя на авторство.

(i) Так как $\sup\limits_{t\in[a,r]}\varepsilon(t)\varphi(t)\geqslant\varepsilon(r)\varphi(r)$, то $\varepsilon_0\geqslant\varepsilon$.

Утверждение (ii) следует из неравенства $\sup\limits_{t\in E}f(t)\leqslant\sup\limits_{t\in E'}f(t)$, если $E\subset E'$.

(iii) Пусть $r_1<r_2$. Так как $\varepsilon_0(r_1)\geqslant\varepsilon(r_1)$, $\varphi(r_2)\geqslant\varphi(r_1)$, то

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(r_1)&=\max\{\varepsilon_0(r_1),\varepsilon(r_1)\}\geqslant\\&\geqslant\max\left\{\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)}\varepsilon_0(r_1),\varepsilon(r_1)\right\}=\frac{1}{\varphi(r_2)}\max\Big\{\varphi(r_1)\varepsilon_0(r_1),\ \varepsilon(r_1)\varphi(r_2)\Big\}\geqslant\\&\geqslant\frac{1}{\varphi(r_2)}\max\left\{\sup_{t\in[a,r_1]}\varepsilon(t)\varphi(t),\ \sup_{t\in[r_1,r_2]}\varepsilon(t)\varphi(t)\right\}=\frac{1}{\varphi(r_2)}\sup_{t\in[a,r_2]}\varepsilon(t)\varphi(t)=\varepsilon_0(r_2).\end{aligned}\tag{20}$$

Отсюда следует, что ε_0 — убывающая функция.

Пусть $\epsilon>0$ — произвольное фиксированное число, а $r_1>0$ выбрано так, что $\varepsilon(r_1)<\epsilon$. Выберем число $R>0$ таким, чтобы при $r_2>R$ и фиксированном r_1 выполнялось неравенство

$$\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)}\varepsilon_0(r_1)<\epsilon.$$

Тогда из неравенства (20) получаем

$$\varepsilon_0(r_2)\leqslant\max\left\{\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)}\varepsilon_0(r_1),\ \varepsilon(r_1)\right\}<\epsilon$$

при $r_2>R$. Свойство (iii) доказано.

(iv) Непрерывность функции ε_0 следует из непрерывности φ и неравенства

$$\varepsilon_0(r_1)\left(\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)}-1\right)\leqslant\varepsilon_0(r_2)-\varepsilon_0(r_1)\leqslant 0.$$

Если φ — дифференцируемая функция, то отсюда следует утверждение (vi) теоремы.

(v) Далее, пусть T — значение функции $\varepsilon_0\,\varphi$,

$$E:=E(T)=\big\{t:\varepsilon_0(t)\varphi(t)=T\big\},\quad r=r(T)=\inf E.$$

Для любого $\sigma\in(0,r-a]$ имеет место равенство

$$\sup_{t\in[a,r]}\varepsilon(t)\varphi(t)=\sup_{t\in(r-\sigma,r]}\varepsilon(t)\varphi(t),$$

которое доказывается аналогично равенству (18). Из него следует, что $\varepsilon(r-0)=\varepsilon_0(r)$.

Если для любого $h>0$ выполняется неравенство $\varepsilon(r-0)-\varepsilon(r+h)>0$, то положим

$$\bar r=\bar r(T)=r=r(T).$$

Если для некоторого $h>0$ выполняется равенство $\varepsilon(r-0)-\varepsilon(r+h)=0$, то положим

$$\bar r(T)=\sup\big\{t:\varepsilon(t)=\varepsilon(r-0)\big\}.$$

Тогда для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(\bar r - 0) - \varepsilon(\bar r + h) > 0$. Функция ε_0 — убывающая мажоранта функции ε. Поскольку $\varepsilon_0(r) = \varepsilon(r-0) = \varepsilon(\bar r - 0)$, то

$$\varepsilon_0(\bar r) \leqslant \varepsilon_0(r) = \varepsilon(\bar r - 0), \quad \varepsilon_0(\bar r) = \varepsilon(\bar r - 0).$$

Таким образом, справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\varepsilon_0(\bar r(T)) = \varepsilon(\bar r(T) - 0),\\ \varepsilon(\bar r(T) - 0) - \varepsilon(\bar r(T) + h) > 0 \quad \text{для любого } h > 0,\\ \varepsilon_0(\bar r(T))\,\varphi(\bar r(T)) = T.\end{gathered}$$

Предположим теперь, что функция $\varepsilon_0\,\varphi$ не является постоянной ни в какой окрестности бесконечности. Тогда мы можем выбрать такую строго возрастающую последовательность T_n значений функции $\varepsilon_0\,\varphi$, что

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_0(t)\varphi(t).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \bar r(T_n) = \infty$, и в качестве последовательности r_n в п. (v) теоремы можно взять $r_n = \bar r(T_n)$. Утверждение (v) доказано. □

Определение 7. Пусть функции ε и φ определены на полуоси $[a,\infty)$, причем $\varphi(r) > 0$ при всех $r \in [a,\infty)$, а функция-произведение $\varepsilon\,\varphi$ ограничена сверху. Оператор $J_\infty(\varepsilon,\varphi)$ определяется равенством

$$J_\infty(\varepsilon,\varphi)(r) := \frac{1}{\varphi(r)} \sup_{t\in[r,\infty)} \varepsilon(t)\varphi(t), \quad r \in [a,\infty).$$

Теорема 5. *Пусть φ — возрастающая, непрерывная, неограниченная функция на полуоси $[a,\infty)$, $\varphi(a) > 0$, а ε — возрастающая на $[a,\infty)$ функция и $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$. Положим $\varepsilon_\infty = J_\infty(\varepsilon,\varphi)$. Справедливы следующие утверждения*:

(i) $\varepsilon_\infty \geqslant \varepsilon$ *на* $[a,\infty)$;

(ii) *произведение $\varepsilon_\infty\,\varphi$ — убывающая функция на $[a,\infty)$*;

(iii) *ε_∞ — возрастающая функция на $[a,\infty)$ с $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon_0(r) = 0$*;

(iv) *произведение $\varepsilon_\infty\,\varphi$ — непрерывная функция на $[a,\infty)$*;

(v) *если произведение $\varepsilon_\infty\,\varphi$ не является постоянной функцией ни в какой окрестности бесконечности, то существует возрастающая неограниченная последовательность точек r_n на $[a,\infty)$, для которой $\varepsilon(r_n+0) - \varepsilon(r_n - h) > 0$ при любом значении $h > 0$ и одновременно $\varepsilon_\infty(r_n) = \varepsilon(r_n + 0)$*;

(vi) *если φ — дифференцируемая функция, то*

$$\frac{1}{\varepsilon_\infty(r)} \varlimsup_{h\to 0} \left| \frac{\varepsilon_\infty(r+h) - \varepsilon_\infty(r)}{h} \right| \leqslant \frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}.$$

Доказательство. Теорема 5 доказана А. Ф. Гришиным в [4]. Её доказательство аналогично доказательству теорем 2, 3, 4, поэтому приведём только некоторые рассуждения.

(i) Так как $\sup\limits_{t\in[r,\infty)} \varepsilon(t)\varphi(t) \geqslant \varepsilon(r)\varphi(r)$, то $\varepsilon_\infty \geqslant \varepsilon$.

Утверждение (ii) следует из неравенства $\sup\limits_{t\in E} f(t) \geqslant \sup\limits_{t\in E'} f(t)$, если $E' \subset E$.

(iii) Пусть $r_2 > r_1$. Так как $\varepsilon_\infty(r) \geqslant \varepsilon(r)$, $\varphi(r_2) \geqslant \varphi(r_1)$, $\varepsilon \leqslant 0$, $\varepsilon_\infty \leqslant 0$, то

$$\begin{aligned}\varepsilon_\infty(r_1) = \frac{1}{\varphi(r_1)} \max\left\{ \sup_{t\in[r_1,r_2]} \varepsilon(t)\varphi(t),\ \sup_{t\in(r_2,\infty)} \varepsilon(t)\varphi(t) \right\} \leqslant\\ \leqslant \max\left\{ \varepsilon(r_2),\ \frac{\varphi(r_2)}{\varphi(r_1)} \varepsilon_\infty(r_2) \right\} \leqslant \max\bigl\{\varepsilon(r_2), \varepsilon_\infty(r_2)\bigr\} \leqslant \varepsilon_\infty(r_2).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что ε_∞ — возрастающая функция. Из последней цепочки неравенств способом, указанным в теоремах 2, 3, 4, доказываются утверждения (iii), (iv), (vi) теоремы.

(v) Далее пусть T — значение функции $\varepsilon_\infty \varphi$,

$$E := E(T) = \{t : \varepsilon_1(t)\varphi(t) = T\}, \quad r = r(T) = \sup E.$$

Для любого $\sigma > 0$ имеет место равенство

$$\sup_{t\in[r,\infty)} \varepsilon(t)\varphi(t) = \sup_{t\in[r,r+\sigma)} \varepsilon(t)\varphi(t),$$

которое доказывается аналогично равенству (19). Из него следует, что $\varepsilon(r+0) = \varepsilon_\infty(r)$.

Если для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(r+0) - \varepsilon(r-h) > 0$, то положим

$$\bar r = \bar r(T) = r = r(T).$$

Если для некоторого $h > 0$ выполняется равенство $\varepsilon(r+0) - \varepsilon(r-h) = 0$, то положим

$$\bar r(T) = \inf\bigl\{t : \varepsilon(t) = \varepsilon(r+0)\bigr\}.$$

Тогда для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(\bar r+0) - \varepsilon(\bar r-h) > 0$ (считаем, что $\varepsilon(t) = \varepsilon(a)$ при $t < a$), либо $\bar r = a$.

Функция ε_∞ — возрастающая мажоранта функции ε. Поскольку

$$\varepsilon_\infty(\bar r) \leqslant \varepsilon_\infty(r) = \varepsilon(r+0) = \varepsilon(\bar r+0),$$

то $\varepsilon_\infty(\bar r) = \varepsilon(\bar r+0)$. Таким образом, справедливы соотношения

$$\varepsilon_\infty(\bar r(T)) = \varepsilon(\bar r(T)+0),$$
$$\varepsilon(\bar r(T)+0) - \varepsilon(\bar r(T)-h) > 0 \quad \text{для любого } h > 0, \text{ либо } \bar r = a,$$
$$\varepsilon_\infty(\bar r(T))\varphi(\bar r(T)) = T.$$

Далее, повторяя рассуждения теорем 2, 3, 4, получаем, что справедливо утверждение (v) теоремы. Это завершает схему доказательства теоремы. □

5. Собственная уточненная функция роста. Применим теоремы 4 и 5 при построения собственной уточненной функции роста для возрастающей строго положительной функции A конечного порядка относительно модельной функции роста M.

Теорема 6. *Пусть M — модельная функция роста, A — возрастающая строго положительная функция конечного порядка относительно модельной функции роста M в том смысле, что*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln A(r)}{\ln M(r)} = \varrho \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда существует такая уточнённая функция роста $V : r \mapsto (M(r))^{\varrho+\psi(r)}$ относительно модельной функции роста M, что

(i) $\rho(r) = \varrho + \psi(r)$ — *абсолютно непрерывная монотонная функция*;

(ii) $\lim\limits_{r\to\infty} \psi(r) = 0, \quad \varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{A(r)}{V(r)} = 1;$

(iii) *если $\psi \not\equiv 0$, то функции ψ и $\psi \ln^2 M$ монотонны при $r \geqslant r_0$, где $M(r_0) \geqslant e$, и имеют различные направления роста. В частности,*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \left|\frac{\psi(r+h) - \psi(r)}{h}\right| \leqslant \frac{2|\psi(r)|M'(r)}{M(r)\ln M(r)} \quad \text{при } r \geqslant r_0.$$

Кроме того, в этом случае $A \leqslant V$, а также существуют такие последовательности $r_n \to \infty$ и $t_{k,n}$, что

$$\lim_{k\to\infty} t_{k,n} = r_n, \quad \lim_{k\to\infty} A(t_{k,n}) = V(r_n).$$

Доказательство. Положим

$$\psi_1(r) = \frac{\ln A(r)}{\ln M(r)} - \varrho.$$

Тогда $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \psi_1(r) = 0$. Рассмотрим два случая с вариантами.

1. Сперва предположим, что существует такая последовательность $r_n \to +\infty$, что $\psi_1(r_n) \geqslant 0$. В этом случае положим
$$\psi_2(r) = \sup_{u\in[r,+\infty)} \psi_1(u).$$
Тогда ψ_2 — убывающая функция, $\psi_2 \geqslant \psi_1$ и $\lim\limits_{r\to\infty} \psi_2(r) = 0$. Причем, если для некоторого r неравенство $\psi_2(r-0) > \psi_2(r+h)$ выполняется для любого $h > 0$, то существует последовательность t_n, для которой
$$\lim_{n\to\infty} t_n = r, \quad \lim_{n\to\infty} \psi_1(t_n) = \psi_2(r-0). \tag{21}$$
Действительно, так как $\psi_1 \leqslant \psi_2$, то
$$\varlimsup_{t\to r} \psi_1(t) \leqslant \varlimsup_{t\to r} \psi_2(t) = \psi_2(r-0).$$
Поэтому, если равенство (21) не выполнено, то существуют числа $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$, для которых при $t \in [r-\delta, r+\delta]$ имеет место неравенство $\psi_1(t) < \psi_2(r-0) - \epsilon$. Тогда при $x \in (r-\delta, r+\delta)$ получаем соотношения
$$\psi_2(x) = \sup_{t\in[x,\infty)} \psi_1(t) = \max\Bigl\{\sup_{t\in[x,r+\delta]} \psi_1(t),\ \psi_2(r+\delta)\Bigr\} \leqslant \max\bigl\{\psi_2(r-0)-\epsilon,\ \psi_2(r+\delta)\bigr\}.$$
Переходя в полученном неравенстве к пределу при $x \to r-0$, имеем
$$\psi_2(r-0) \leqslant \max\bigl\{\psi_2(r-0)-\epsilon,\ \psi_2(r+\delta)\bigr\} < \psi_2(r-0).$$
Получили противоречие и, тем самым, равенство (21) доказано.

Далее рассмотрим два альтернативных предположения.

Вариант 1.1. Предположим, что существует такая окрестность бесконечности $U = (N, \infty)$, что для $r \in U$ выполняется неравенство
$$\psi_2(r)(\ln M(r))^{3/2} \leqslant 1. \tag{22}$$
Положим в этом случае $\psi(r) \equiv 0$. Тогда выполняются соотношения $A(r_n) \geqslant M^\varrho(r_n)$ на последовательности $r_n \to +\infty$ и
$$A(r) \leqslant (M(r))^\varrho e^{1/\sqrt{\ln r}} \quad \text{при } r \in U.$$
Отсюда получаем
$$\frac{A(r)}{M^\varrho(r)} \leqslant e^{1/\sqrt{\ln r}} \text{ при } r \in U, \quad \frac{A(r_n)}{M^\varrho(r_n)} \geqslant 1, \quad \varlimsup_{r\to\infty} \frac{V(r)}{M^\varrho(r)} = 1.$$
В этом варианте $V = M^\varrho$ — необходимая уточненная функция роста.

Вариант 1.2. Рассмотрим случай, когда предположение варианта 1.1 неверно, то есть неравенство (22) не выполняется ни в какой окрестности бесконечности. В этом случае в любой окрестности бесконечности найдется такая точка r', что
$$\psi_2(r')(\ln M(r'))^{3/2} > 1 \quad \text{или} \quad \psi_2(r')(\ln M(r'))^2 > \sqrt{\ln M(r')}. \tag{23}$$
Положим тогда $\psi(r) = J_0(\psi_2, \ln^2 M)(r)$. В качестве числа a, участвующего в определении оператора J_0, можно взять число r_0, для которого $M(r_0) \geqslant e$. В этом случае $\psi_1 \leqslant \psi_2 \leqslant \psi$. Отсюда следует неравенство $A(r) \leqslant V(r) = M(r)^{\varrho+\psi(r)}$ при $r \geqslant r_0$. Кроме того, из неравенства (23) следует, что функция $\psi \ln^2 M$ не постоянна ни в какой окрестности бесконечности. Тогда согласно п. (v) теоремы 4 существует последовательность $r'_n \to +\infty$, для которой
$$\psi(r'_n) = \psi_2(r'_n - 0), \quad \psi_2(r'_n - 0) - \psi_2(r'_n + h) > 0 \text{ для любого } h > 0.$$
При этом из соотношения (21) следует, что существует такая последовательность t_k, что
$$\lim_{k\to\infty} t_k = r'_n, \quad \lim_{k\to\infty} \psi_1(t_k) = \psi_2(r'_n - 0) = \psi(r'_n).$$
Тогда
$$A(t_k) = M^{\varrho+\psi_1(t_k)}(t_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} M^{\varrho+\psi(r'_n)}(r'_n) = V(r'_n),$$
а оценка производной в п. (iii) следует из п. (vi) теоремы 4, если в определении оператора $J_0(\varepsilon, \varphi)$ положить $\varepsilon = \psi_2$, $\varphi = \ln^2 M$. Таким образом, теорема в этом случае доказана.

2. Пусть теперь существует число a, для которого $\psi_1(r) < 0$ при $r \geqslant a$. В этом случае обозначим
$$\psi_2(r) = \sup_{x\in[a,r]} \psi_1(x).$$
Тогда ψ_2 — возрастающая функция, причем $\lim\limits_{r\to\infty} \psi_2(r) = 0$ и $\psi_1 \leqslant \psi_2$. Кроме того, если для некоторого r выполняется неравенство $\psi_2(r+0) - \psi_2(r-h) > 0$ для достаточно малых $h > 0$, то существует такая последовательность t_k, что
$$\lim_{k\to\infty} t_k = r, \quad \lim_{k\to\infty} \psi(t_k) = \psi_2(r+0). \tag{24}$$
Это утверждение доказывается аналогично соотношению (21). Действительно, ввиду неравенства $\psi_1 \leqslant \psi_2$ имеем соотношения
$$\varlimsup_{t\to r} \psi_1(t) \leqslant \varlimsup_{t\to r} \psi_2(t) = \psi_2(r+0).$$
Поэтому, если равенство (24) не верно, то существуют числа $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$, для которых при $t \in [r-\delta, r+\delta]$ будет выполняться неравенство $\psi_1(t) < \psi_2(r+0) - \epsilon$. Тогда при $x \in (r-\delta, r+\delta)$ имеют место соотношения
$$\psi_2(x) = \sup_{t\in[a,x]} \psi_1(t) = \max\left\{\psi_2(r-\delta),\ \sup_{t\in[r-\delta,x]} \psi_1(t)\right\} \leqslant \max\bigl\{\psi_2(r-\delta),\ \psi_2(r+0)-\epsilon\bigr\}.$$
Переходя в полученном неравенстве к пределу при $x \to r+0$, имеем
$$\psi_2(+0) \leqslant \max\bigl\{\psi_2(r-\delta),\ \psi_2(r+0)-\epsilon\bigr\} < \psi_2(r+0).$$
Получили противоречие; тем самым, равенство (24) доказано.

Рассмотрим два варианта.

Вариант 2.1. Предположим, что существует такая окрестность бесконечности $U = (N, \infty)$, что для $r \in U$ выполняется неравенство
$$\psi_2(r)(\ln M(r))^{3/2} \geqslant -1 \tag{25}$$
в некоторой окрестности бесконечности. Положим тогда $\psi(r) \equiv 0$. В этом случае в некоторой окрестности бесконечности выполняются неравенства
$$\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\ln M(r)}}\right) M^{\varrho}(r) \leqslant A(r) < M^{\varrho}(r).$$
Тогда $V(r) = M^{\varrho}(r)$ — необходимая уточненная функция роста.

Вариант 2.2. Рассмотрим случай, когда предположение варианта 2.1 неверно, т.е. неравенство (25) не выполнено ни в какой окрестности бесконечности. В этом случае в любой окрестности бесконечности найдется такая точка r', что
$$\psi_2(r')(\ln M(r'))^{3/2} < -1 \quad \text{или} \quad \psi_2(r')(\ln M(r'))^{2} < -\sqrt{\ln M(r')}. \tag{26}$$
Положим тогда $\psi(r) = J_\infty(\psi_2, \ln^2 M)(r)$. В этом случае $\psi_1 \leqslant \psi_2 \leqslant \psi$. Отсюда следует неравенство $A(r) \leqslant V(r) = M(r)^{\rho+\psi(r)}$. Кроме того, из неравенства (26) следует, что функция $\psi \ln^2 M$ не постоянна ни в какой окрестности бесконечности. Тогда по п. (v) теоремы 5 существует последовательность $r'_n \to +\infty$, для которой
$$\psi(r'_n) = \psi_2(r'_n+0), \quad \psi_2(r'_n+0) - \psi_2(r'_n-h) > 0 \text{ для любого } h > 0.$$
При этом из соотношения (24) следует, что существует такая последовательность t_k, что
$$\lim_{k\to\infty} t_k = r'_n, \quad \lim_{k\to\infty} \psi_1(t_k) = \psi_2(r'_n+0) = \psi(r'_n).$$
Тогда
$$A(t_k) = M^{\varrho+\psi_1(t_k)}(t_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} M^{\varrho+\psi(r'_n)}(r'_n) = V(r'_n).$$
Оценка производной в п. (iii) следует из п. (vi) теоремы 5, если в определении оператора $J_\infty(\varepsilon,\varphi)$ положить $\varepsilon = \psi_2$, $\varphi = \ln^2 M$. Тем самым теорема полностью доказана. $\square$

6. Собственная миноранта. Применим теоремы 2 и 3 при построения собственной миноранты для возрастающей строго положительной функции A конечного порядка относительно модельной функции роста M, которая оценивает функцию A снизу.

Теорема 7. *Пусть M — модельная функция роста, A — возрастающая строго положительная функция конечного нижнего порядка относительно модельной функции роста M в том смысле, что*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln A(r)}{\ln M(r)} = \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда существует уточнённая функция роста $V : r \mapsto \bigl(M(r)\bigr)^{\alpha+\psi(r)}$ относительно модельной функции роста M, обладающая следующими свойствами:

(i) $\rho(r) = \alpha + \psi(r)$ — *абсолютно непрерывная монотонная функция;*

(ii) $\lim\limits_{r\to\infty} \psi(r) = 0, \quad \varliminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{A(r)}{V(r)} = 1;$

(iii) *если $\psi \not\equiv 0$, то функции ψ и $\psi \ln^2 M$ — монотонные при $r \geqslant r_0$, где $M(r_0) \geqslant e$, и имеют различные направления роста. В частности,*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \left|\frac{\psi(r+h)-\psi(r)}{h}\right| \leqslant \frac{2|\psi(r)|M'(r)}{M(r)\ln M(r)} \quad \textit{при} \quad r \geqslant r_0.$$

Кроме того, в этом случае $A \geqslant V$, а также существуют такие последовательности $r_n \to \infty$ и $t_{k,n}$, что

$$\lim_{k\to\infty} t_{k,n} = r_n, \quad \lim_{k\to\infty} A(t_{k,n}) = V(r_n).$$

Доказательство. Положим

$$\psi_1(r) = \frac{\ln A(r)}{\ln M(r)} - \alpha.$$

Тогда $\varliminf\limits_{r\to\infty} \psi_1(r) = 0$. Рассмотрим два случая с вариантами.

1. Сперва предположим, что существует такая последовательность $r_n \to +\infty$, что $\psi_1(r_n) \leqslant 0$. В этом случае положим

$$\psi_2(r) = \inf_{u\in[r,+\infty)} \psi_1(u).$$

Тогда ψ_2 — возрастающая функция, $\psi_2 \leqslant \psi_1$ и $\lim\limits_{r\to\infty} \psi_2(r) = 0$. Причем, если для некоторого r неравенство $\psi_2(r+0) < \psi_2(r+h)$ выполняется для любого $h > 0$, то существует последовательность t_n, для которой

$$\lim_{n\to\infty} t_n = r, \quad \lim_{n\to\infty} \psi_1(t_n) = \psi_2(r+0). \tag{27}$$

Действительно, так как $\psi_2 \leqslant \psi_1$, то

$$\psi_2(r+0) = \varliminf_{t\to r} \psi_2(t) \leqslant \varliminf_{t\to r} \psi_1(t).$$

Поэтому, если равенство (27) не выполнено, то существуют числа $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$, для которых при $t \in [r-\delta, r+\delta]$ имеет место неравенство $\psi_1(t) > \psi_2(r+0)+\epsilon$. Тогда при $x \in (r-\delta, r+\delta)$ получаем соотношения

$$\psi_2(x) = \inf_{t\in[x,\infty)} \psi_1(t) = \min\left\{\inf_{t\in[x,r+\delta]} \psi_1(t),\ \psi_2(r+\delta)\right\} \geqslant \min\bigl\{\psi_2(r+0)+\epsilon,\ \psi_2(r+\delta)\bigr\}.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $x \to r+0$, имеем

$$\psi_2(r+0) \geqslant \min\bigl\{\psi_2(r+0)+\epsilon;\ \psi_2(r+\delta)\bigr\} > \psi_2(r+0).$$

Получили противоречие и, тем самым, равенство (27) доказано.

Далее рассмотрим два альтернативных предположения.

Вариант 1.1. Предположим, что существует такая окрестность бесконечности $U=(N,\infty)$, что для $r\in U$ выполняется неравенство

$$\psi_2(r)\bigl(\ln M(r)\bigr)^{3/2}\geqslant -1. \tag{28}$$

Положим тогда $\psi(r)\equiv 0$. В этом случае выполняются неравенства $A(r_n)\leqslant M^\alpha(r_n)$ на последовательности $r_n\to+\infty$ и

$$A(r)\geqslant \bigl(M(r)\bigr)^\alpha e^{-\frac{1}{\sqrt{\ln M(r)}}}\quad \text{при } r\in U.$$

Отсюда получаем

$$\frac{A(r)}{M^\alpha(r)}\geqslant e^{-\frac{1}{\sqrt{\ln M(r)}}}\ \text{при } r\in U,\qquad \frac{A(r_n)}{M^\alpha(r_n)}\leqslant 1,\qquad \varlimsup_{r\to\infty}\frac{A(r)}{M^\varrho(r)}=1.$$

В этом варианте $V=M^\alpha$ — необходимая уточненная функция роста.

Вариант 1.2. Рассмотрим случай, когда предположение варианта 1.1 неверно, т.е. неравенство (28) не выполняется ни в какой окрестности бесконечности. В этом случае в любой окрестности бесконечности найдется такая точка r', что

$$\psi_2(r')\bigl(\ln M(r')\bigr)^{3/2}<-1\quad \text{или}\quad \psi_2(r')\bigl(\ln M(r')\bigr)^2<-\sqrt{\ln M(r')}. \tag{29}$$

Положим тогда $\psi(r)=J_0^i(\psi_2,\ln^2 M)(r)$. В качестве числа a, участвующего в определении оператора J_0^i, можно взять число r_0, для которого $M(r_0)\geqslant e$. В этом случае $\psi_1\geqslant\psi_2\geqslant\psi$. Отсюда следует неравенство $A(r)\geqslant V(r)=M(r)^{\alpha+\psi(r)}$ при $r\geqslant r_0$. Кроме того, из неравенства (29) следует, что функция $\psi\ln^2 M$ не постоянна ни в какой окрестности бесконечности. Тогда по п. (v) теоремы 2 существует последовательность $r'_n\to+\infty$, для которой

$$\psi(r'_n)=\psi_2(r'_n-0),\qquad \psi_2(r'_n+h)-\psi_2(r'_n-0)>0$$

для любого $h>0$. При этом из соотношения (27) следует, что существует такая последовательность t_k, что

$$\lim_{k\to\infty}t_k=r'_n,\qquad \lim_{k\to\infty}\psi_1(t_k)=\psi_2(r'_n+0)=\psi(r'_n).$$

Тогда

$$A(t_k)=M^{\varrho+\psi_1(t_k)}(t_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}M^{\varrho+\psi(r'_n)}(r'_n)=V(r'_n),$$

а оценка производной в п. (iii) следует из п. (vi) теоремы 2, если в определении оператора $J_0^i(\varepsilon,\varphi)$ положить $\varepsilon=\psi_2$, $\varphi=\ln^2 M$. Теорема в этом случае доказана.

2. Пусть теперь существует число a, для которого $\psi_1(r)>0$ при $r\geqslant a$. В этом случае обозначим

$$\psi_2(r)=\inf_{x\in[a,r]}\psi_1(x).$$

Тогда ψ_2 — убывающая функция, $\lim\limits_{r\to\infty}\psi_2(r)=0$ и $\psi_1\geqslant\psi_2$. Причем, если для некоторого r выполняется неравенство, $\psi_2(r-h)>\psi_2(r-0)$ для достаточно малых $h>0$, то существует такая последовательность t_k, что

$$\lim_{k\to\infty}t_k=r,\qquad \lim_{k\to\infty}\psi(t_k)=\psi_2(r-0). \tag{30}$$

Это утверждение доказывается аналогично соотношению (27). Действительно, в силу $\psi_1\geqslant\psi_2$

$$\varliminf_{t\to r}\psi_1(t)\geqslant\varliminf_{t\to r}\psi_2(t)=\psi_2(r-0).$$

Поэтому, если равенство (30) не верно, то существуют числа $\epsilon>0$ и $\delta>0$, для которых при $t\in[r-\delta,r+\delta]$ будет выполняться неравенство $\psi_1(t)>\psi_2(r-0)+\epsilon$. Тогда при $x\in(r-\delta,r+\delta)$ имеют место соотношения

$$\psi_2(x)=\inf_{t\in[a,x]}\psi_1(t)=\min\left\{\psi_2(r-\delta),\ \inf_{t\in[r-\delta,x]}\psi_1(t)\right\}\geqslant\min\bigl\{\psi_2(r-\delta),\ \psi_2(r-0)+\epsilon\bigr\}.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $x\to r-0$, имеем

$$\psi_2(r-0)\geqslant\min\bigl\{\psi_2(r-\delta),\ \psi_2(r-0)+\epsilon\bigr\}>\psi_2(r-0).$$

Получили противоречие; тем самым, равенство (30) доказано.

Рассмотрим два варианта.

Вариант 2.1. Предположим, что существует такая окрестность бесконечности $U = (N, \infty)$, что для $r \in U$ выполняется неравенство

$$\psi_1(r)(\ln M(r))^{3/2} \leqslant 1 \tag{31}$$

в некоторой окрестности бесконечности. Положим тогда $\psi(r) \equiv 0$. В этом случае в некоторой окрестности бесконечности выполняются неравенства

$$\exp\left(\frac{1}{\sqrt{\ln M(r)}}\right) M^{\alpha}(r) \geqslant A(r) > M^{\alpha}(r).$$

Тогда $V = M^{\alpha}$ — необходимая уточненная функция роста.

Вариант 2.2. Рассмотрим случай, когда предположение варианта 2.1 неверно, т.е. неравенство (31) не выполнено ни в какой окрестности бесконечности. В этом случае в любой окрестности бесконечности найдется такая точка r', что

$$\psi_2(r')\big(\ln M(r')\big)^{3/2} > 1 \quad \text{или} \quad \psi_2(r')\big(\ln M(r')\big)^{2} > \sqrt{\ln M(r')}. \tag{32}$$

Положим тогда $\psi = J_{\infty}^{i}(\psi_2, \ln^2 M)$. В этом случае $\psi_1 \geqslant \psi_2 \geqslant \psi$. Отсюда следует неравенство $A(r) \geqslant V(r) = M(r)^{\alpha+\psi(r)}$. Кроме того, из неравенства (32) следует, что функция $\psi \ln^2 M$ не является постоянной ни в какой окрестности бесконечности. Тогда согласно п. (v) теоремы 3 существует последовательность $r'_n \to +\infty$, для которой

$$\psi(r'_n) = \psi_2(r'_n + 0), \quad \psi_2(r'_n + 0) - \psi_2(r'_n - h) < 0$$

для любого $h > 0$. При этом из соотношения (30) следует, что существует такая последовательность t_k, что

$$\lim_{k\to\infty} t_k = r'_n, \quad \lim_{k\to\infty} \psi_1(t_k) = \psi_2(r'_n - 0) = \psi(r'_n).$$

Тогда

$$A(t_k) = M^{\varrho+\psi_1(t_k)}(t_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} M^{\alpha+\psi(r'_n)}(r'_n) = V(r'_n).$$

Оценка производной в п. (iii) следует из п. (vi) теоремы 3, если в определении оператора $J_{\infty}^{i}(\varepsilon, \varphi)$ положить $\varepsilon = \psi_2$, $\varphi = \ln^2 M$. Теорема полностью доказана. □

7. Промежуточная функция роста. В теории роста целых и субгармонических функций для $M = \mathrm{id}$ находит применение следующая теорема, которую мы докажем в общем случае.

Теорема 8. *Пусть A — положительная функция на $\mathbb{R}^+$ и $V(r) = M^{\rho(r)}(r)$ — уточненная функция роста относительно модельной функции роста M, для которой*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{A(r)}{V(r)} = 0.$$

Тогда существует такой уточненный порядок ρ_1 относительно модельной функции роста M, что для функции $V_1(r) = M^{\rho_1(r)}(r)$ имеют место равенства

$$\lim_{r\to\infty} \rho_1(r) = \lim_{r\to\infty} \rho(r), \quad \lim_{r\to\infty} \frac{V_1(r)}{V(r)} = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{A(r)}{V_1(r)} = 0.$$

Доказательство. Положим

$$\varepsilon(r) = \frac{A(r)}{V(r)}, \quad \varepsilon_1(r) = \sup_{t\in[r,\infty)} \varepsilon(t).$$

Тогда ε_1 — убывающая функция, $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon_1(r) = 0$ и $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Положим

$$\varepsilon_2(r) = J_0(\varepsilon_1, \ln M)(r).$$

Тогда по теореме 4 функция ε_2 является убывающей и $\varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_1$, а $\varepsilon_2 \ln M$ — возрастающая функция; в частности, существует такое число $K > 0$, что

$$\varepsilon_2(r) \geqslant \frac{K}{\ln M(r)}, \quad |\varepsilon_2'(r)| \leqslant \frac{M'(r)}{M(r)\ln M(r)}\,\varepsilon_2(r), \tag{33}$$

где под $\varepsilon_2'(r)$ понимается нижнее производное число в точке r.

Пусть теперь функция ρ_1 определяется из равенства

$$(M(r))^{\rho_1(r)} = \sqrt{\varepsilon_2(r)}\,(M(r))^{\rho(r)}. \tag{34}$$

Тогда

$$\rho_1(r) = \frac{1}{2}\frac{\ln \varepsilon_2(r)}{\ln M(r)} + \rho(r), \quad \lim_{r\to\infty} \rho_1(r) = \lim_{r\to\infty} \rho(r), \tag{35}$$

а также, логарифмируя (34), получаем $\rho_1 \ln M = \frac{1}{2}\ln \varepsilon_2 + \rho \ln M$. Дифференцирование этого соотношения даёт равенство

$$\frac{\rho_1'(r)\,M(r)\ln M(r)}{M'(r)} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_2'(r)}{\varepsilon_2(r)}\cdot\frac{M(r)}{M'(r)} + \frac{\rho'(r)\,M(r)\ln M(r)}{M'(r)} + \rho(r) - \rho_1(r). \tag{36}$$

Для первого слагаемого в правой части согласно второму неравенству из (33) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{|\varepsilon_2'(r)|}{\varepsilon_2(r)}\cdot\frac{M(r)}{M'(r)} \leqslant \frac{1}{\ln M(r)} \to 0 \quad \text{при } r\to\infty,$$

а второе слагаемое в правой части (36) также стремится к нулю при $r \to \infty$ согласно равенству (9) теоремы 1. Таким образом, согласно второму равенству в (35) левая часть в (36) стремится к нулю при $r \to \infty$, и согласно утверждению (ii) теоремы 1 функция ρ_1 является уточненным порядком относительно модельной функции роста M. При этом

$$\frac{V_1(r)}{V(r)} = \sqrt{\varepsilon_2(r)}, \quad \frac{A(r)}{V_1(r)} = \varepsilon(r)\frac{V(r)}{V_1(r)} = \frac{\varepsilon(r)}{\sqrt{\varepsilon_2(r)}} \leqslant \sqrt{\varepsilon_2(r)},$$

где $\lim\limits_{r\to\infty} \sqrt{\varepsilon_2(r)} = 0$. Теорема полностью доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брайчев Г. Г.* Экстремальные задачи в теории относительного роста выпуклых и целых функций/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ, 2018.
2. *Брайчев Г. Г.* Об одной проблеме Адамара и сглаживании выпуклых функций// Владикавказ. мат. ж. — 2005. — *7*, № 3. — С. 11–25.
3. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. — М.: Прометей, 2005.
4. *Гришин А. Ф.* Субгармонические функции конечного порядка/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Харьков: ХГУ, 1992.
5. *Гришин А. Ф., Малютина Т. И.* Об уточненном порядке// в кн.: Комплексный анализ и математическая физика (Кытманов А. М., ред.). — Красноярск: КГУ, 1998. — С. 10–24.
6. *Гришин А. Ф., Поединцева И. В.* Абелевы и тауберовы теоремы для интегралов// Алгебра и анализ. — 2014. — *26*, № 3. — С. 1–88.
7. *Казьмин Ю. А.* Сравнения функции// в кн.: Математическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1985.
8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ.
9. *Маергойз Л. С.* Индикаторная диаграмма целой функции уточненного порядка и ее обобщенные преобразования Бореля—Лапласа// Алгебра и анализ. — 2000. — *12*, № 2. — С. 1–63.
10. *Осколков В. А.* О некоторых вопросах теории целых функций// Мат. сб. — 1993. — *184*, № 1. — С. 129–148.
11. *Попов А. Ю.* Об обращении обобщенного преобразования Бореля// Фундам. прикл. мат. — 1999. — *5*, № 3. — С. 817–841.
12. *Таров В. А.* Гладко меняющиеся функции и совершенные уточненные порядки// Мат. заметки. — 2004. — *76*, № 2. — С. 258–264.
13. *Хабибуллин Б. Н.* Обобщение уточненного порядка// Докл. Башкир. ун-та. — 2020. — *5*, № 1. — С. 1–5.

14. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.
15. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения// Изв. вузов. Мат. — 1967. — *2*. — С. 100–108.
16. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений// Изв. вузов. Мат. — 1968. — *6*. — С. 115–121.
17. *Borel E.* Lessons sur les fonctions entières. — Paris: Gauthier-Vilars, 1921.
18. *Earl J. P., Hayman W. K.* Smooth majorants for functions of arbitrarily rapid growth// Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1991. — *109*, № 3. — P. 565–569.
19. *Hadamard J.* Essai d'étude des fonctions données par leur dévéloppement de Taylor// J. Math. Pure Appl. — 1892. — *8*, № 2. — P. 154–186.
20. *Hörmander L.* Notions of Convexity. — Boston: Birkhäuser, 1994.
21. *Kiselman C. O.* Order and type as measures of growth for convex or entire functions// Proc. London Math. Soc. (3). — 1993. — *66*, № 1. — P. 152–186.
22. *Poincaré H.* Theorie spectrale pour des operateurs elliptiques// Bull. S.M.F. — 1883. — *11*. — P. 136–144.
23. *Ransford Th.* Potential Theory in the Complex Plane. — Cambridge: Cambrige Univ. Press, 1995.
24. *Taylor A. E.* L'Hospital's Rule// Am. Math. Month. — 1952. — *59*, № 1. — P. 20–24.
25. *Valiron G.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière// Ann. Fac. Sci. Toulouse. — 1913. — *5*, № 3. — P. 117–257.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа К. Г. Малютина выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00012). Работа Б. Н. Хабибуллина выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кабанко Михаил Владимирович
Курский государственный университет
E-mail: kabankom@gmail.com

Малютин Константин Геннадьевич
Курский государственный университет
E-mail: malyutinkg@gmail.com

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 75–87
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-75-87

УДК 517.929

ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ НА ДИНАМИКУ РЕШЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «СПРОС-ПРЕДЛОЖЕНИЕ»

© 2023 г. **А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ**

Аннотация. Рассматривается обобщенный вариант одной из самых известных математических моделей макроэкономики, известной под названием «спрос-предложение». Основной вариант такой модели имеет единственный аттрактор: состояние экономического равновесия. В работе анализируется нелинейная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными и запаздыванием в правой части. Анализ решений из окрестности состояния равновесия сведен к изучению локальных бифуркаций комплексного уравнения Гинзбурга—Ландау. Для основной краевой задачи показано существование циклов, в том числе циклов, зависящих от пространственной переменной.

Ключевые слова: математическая модель «спрос-предложение», краевая задача, уравнение Гинзбурга—Ландау, бифуркация, устойчивость, цикл, асимптотика.

THE INFLUENCE OF DELAY AND SPATIAL FACTORS ON THE DYNAMICS OF SOLUTIONS IN THE MATHEMATICAL MODEL “SUPPLY-DEMAND”

© 2023 **A. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV**

Abstract. A generalized version of the macroeconomic model “supply-demand” is considered. The main version of this model possesses a single attractor, namely, the state of economic equilibrium. We analyze a nonlinear boundary-value problem for a partial differential equation with delay on the right-hand side. The analysis of solutions in a neighborhood of the equilibrium state is reduced to the study of local bifurcations of the complex Ginzburg–Landau equation. For the basic boundary-value problem, the existence of cycles is proved, including cycles depending on the spatial variable.

Keywords and phrases: mathematical model «supply-demand», boundary-value problem, Ginzburg–Landau equation, bifurcation, stability, cycle, asymptotics.

AMS Subject Classification: 34K18, 37G05, 37N40

1. Введение. Одной из самых известных моделей макроэкономики следует считать модель «спрос-предложение». Иногда ее называют модель рынка (модель рынка одного товара). В основе модели лежит закон Сэя, согласно которому предложение товара рождает спрос (см. [1, 12, 14]). Приведем эту модель в наиболее известной форме:

$$\dot{p} = D(p) - S(p). \tag{1}$$

Здесь $p = p(t)$ — цена товара ($p \geqslant 0$), $D(p)$ — функция, характеризующая спрос, $S(p)$ — предложение товара. Принято считать, что эти функции обладают следующими свойствами:

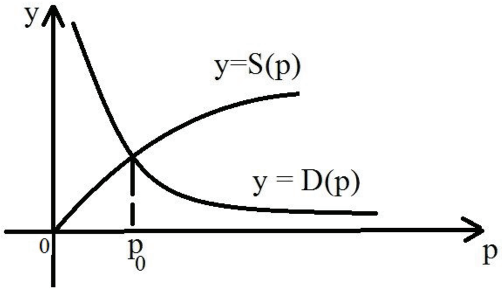

Рис. 1

(a) при $p \in (0, \infty)$ или $p \in [0, \infty)$ функции $S(p), D(p)$ достаточно гладко зависят от своего аргумента p;
(b) $D'(p) < 0$, т.е. $D(p)$ — убывающая функция;
(c) $\lim\limits_{p\to 0} D(p) = D_0, D_0 = \infty$ или $D_0 \gg 1$;
(d) $\lim\limits_{p\to\infty} D(p) = 0$;
(e) $S'(p) > 0$, т.е. $S(p)$ — возрастающая функция;
(f) $\lim\limits_{p\to 0} S(p) = 0$;
(g) $\lim\limits_{p\to\infty} S(p) = S_\infty$, $S_\infty = \infty$ или $S_\infty \gg 1$.

На рис. 1 представлены графики этих функций в системе координат pOy при $p > 0$. Точки их пересечения представляют собой координаты состояния равновесия $p = p_0 > 0$. Согласно представлениям многих экономистов, вплоть до середины прошлого века, рыночной экономике характерно наличие состояния равновесия, которое устанавливается «автоматически». Это как раз демонстрируют решения уравнения (1): его состояние равновесия $p = p_0$ — единственный аттрактор, к которому стремятся все решения дифференциального уравнения (1). Иными словами, решение $p(t) = p_0$ асимптотически устойчиво в целом ($p = p_0$ — глобальный аттрактор).

Вместе с тем, как отмечают специалисты, для экономики характерна цикличность, и поэтому требуются иные математические модели, использующие обыкновенные дифференциальные уравнения с бо́льшим числом уравнений и, конечно, переменных.

С другой стороны возможен иной подход, который не предполагает замену уравнения (1) некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Во многих случаях уравнение (1) играет базовую роль, и его часто называют не только уравнением «спрос-предложение», но и уравнением Эванса (Вальраса—Эванса).

Другой подход состоит в учете такого фактора макроэкономических процессов, как запаздывания (см. [13], а также учет пространственных эффектов. В одном из возможных вариантов это приводит к следующему уравнению:

$$p_t = D(p_h) - S(p_h) + \varepsilon d p_{xx}, \tag{2}$$

где $p = p(t, x)$, $D(p_h)$, $S(p_h)$ — функции спроса и предложения, $p_h = p(t - h, x)$, $d, h, \varepsilon > 0$. Подчеркнем, что d — первоначальный коэффициент «диффузии». Уравнение (1) будем рассматривать вместе с краевыми условиями

$$p_x(t, 0) = p_x(t, \pi) = 0, \tag{3}$$

которые принято называть условиями «непроницаемости». Для простоты предполагаем, что экономика расположена в «одномерном» регионе. Понятно, что это модельная ситуация: обычно экономические регионы двумерны.

Замечание 1. Изначально следует считать, что пространственная переменная $y \in [0, l]$ и l — достаточно большая постоянная, а ε появляется как нормировочный множитель при переходе к отрезку $[0, \pi]$. Действительно, пусть сначала уравнение (2) имело вид

$$p_t = D(p_h) - S(p_h) + dp_{yy},$$

где $y \in [0, l]$. Замена $x = y\pi/l$ приводит последнее уравнение к уравнению (2), где $\varepsilon = (\pi/l)^2 \ll 1$, если l — достаточно большая положительная постоянная.

Отметим, что присутствие отклонения h достаточно естественно, так как и предложение и спрос ориентируются на цену «прошлого» рыночного дня. «Мгновенной» реакции нет даже на валютной или фондовой биржах.

Прежде чем перейти к основному анализу краевой задачи (2), (3), удобнее переписать ее в ином виде.

2. Основная краевая задача. Положим $p(t, x) = p_0 + u(t, x)$. Тогда $p_h(t, x) = p_0 + v(t, x)$, где $v(t, x) = u(t - h, x)$. Перепишем уравнение (2) в отклонениях относительно состояния равновесия $p = p_0$. Пусть $F(p) = D(p) - S(p)$; тогда

$$F(p_0 + v) = D(p_0 + v) - S(p_0 + v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + F_0(v),$$

где $a_0 = F(p_0) = 0$, $a_1 = F'(p_0)$, $a_2 = F''(p_0)/2$, $a_3 = F'''(p_0)/6$, а через $F_0(v)$ обозначены слагаемые, имеющие порядок малости выше третьего. Напомним, что $F'(p_0) < 0$ и для удобства при дальнейших построениях положим $a = -a_1 (a > 0)$.

Итак, вместо краевой задачи (2), (3) далее будем рассматривать краевую задачу следующего вида:

$$u_t = \varepsilon d u_{xx} - av + a_2 v^2 + a_3 v^3 + F_0(v), \tag{4}$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \tag{5}$$

Отметим, что краевая задача (4), (5) допускает решения, не зависящие от x, которые можно находить как решения уравнения с отклоняющимся аргументом

$$w_t = -ay + a_2 y^2 + a_3 y^3 + F_0(y), \tag{6}$$

где теперь $w = w(t)$, $y = y(t) = w(t - h)$. Если дополнить уравнение (6) начальным условием

$$w(t) = f(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{7}$$

где функция $f(t) \in C^k[-h, 0]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то начально-краевая задача (6), (7) имеет единственное решение при $t \in [0, T]$ (см. [10]), где $T > 0$. Решение задачи Коши (6), (7) порождает гладкий нелинейный полупоток (см. [10, 11]).

Прежде чем перейти к анализу краевой задачи (4), (5), рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся уравнения (6). Одним из основных таких вопросов следует считать вопрос об устойчивости нулевого решения в линейном (первом) приближении. Это приводит к необходимости анализа следующего дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом:

$$w_t = -ay, \quad y(t) = w(t - h). \tag{8}$$

Уравнение с отклоняющимся аргументом (8) имеет счетный набор решений

$$w(t) = \exp(\lambda t),$$

где λ — корни характеристического уравнения (см., например, [10])

$$\lambda = -a \exp(-\lambda h). \tag{9}$$

У характеристического уравнения (9) все корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, если величина отклонения h достаточно мала. При увеличении h у уравнения (9) могут появиться решения, принадлежащие мнимой оси ($\operatorname{Re} \lambda = 0$). Подчеркнем, что корень $\lambda = 0$ исключен. Далее через H будем обозначать наименьшее значение h, при котором уравнение (9) имеет корни на мнимой оси. При этом H находим после анализа уравнения $i\sigma = -a \exp(-i\sigma h)$, у которого можно указать счетный набор решений

$$\sigma_n = \frac{\omega_n}{h_n}, \quad \omega_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad h_n = \left(\frac{\pi + 4\pi n}{2a}\right),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Подходящее решение получаем при $n = 0$, т.е. $H = h_0 = \pi/(2a)$, $\sigma_0 = a$. Заметим, что при выбранном H дифференциальное уравнение (8) имеет решение

$$w(t) = \exp(i\sigma t), \quad \sigma = a.$$

Наряду с указанным решением имеется периодическое решение $\overline{w}(t) = \exp(-i\sigma t)$.

Лемма 1. *Характеристическое уравнение* (9) *при* $h < H$ *имеет корни в левой полуплоскости, а при* $h > H$ *у него есть корни в правой полуплоскости. Наконец, при* $h = H$ *у характеристического уравнения* (9) *есть два чисто мнимых собственных значения* $\pm i\sigma$, $\sigma = a$.

Следствие 1. *Отмеченные выше утверждения позволяют заключить, что*

(i) *все решения линейной краевой задачи* (8) *асимптотически устойчивы при* $h < H$ *и неустойчивы при* $h > H$;
(ii) *нулевое решение нелинейного дифференциального уравнения* (6) *асимптотически устойчиво при* $h < H$ *и неустойчиво при* $h > H$;
(iii) *при* $h = H$ *реализуется критический случай в задаче об устойчивости решения* $w = 0$ *уравнения* (6)
(iv) *линейное дифференциальное уравнение* (8) *имеет периодические решения с периодом* $2\pi/\sigma$.

Положим

$$h = H(1 + \gamma\varepsilon),$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\gamma = 0, \pm 1$, т.е. ε_0 — некоторая достаточно малая положительная постоянная. При таких значениях h в следующих разделах рассмотрим вопросы о локальных бифуркациях в окрестности состояния экономического равновесия.

3. Нормальная форма. Рассмотрим краевую задачу (4), (5) при выбранных значениях параметра h и пронормируем эволюционную переменную t, положив

$$t = (1 + \gamma\varepsilon)\tau. \tag{10}$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (4) можно после замены (10) переписать следующим образом:

$$u_\tau = (1 + \gamma\varepsilon)\Big(-av + a_2v^2 + a_3v^3 + O(v^4)\Big) + \varepsilon d(1 + \gamma\varepsilon)u_{xx}, \tag{11}$$

$$u_x(\tau, 0) = u_x(\tau, \pi) = 0. \tag{12}$$

В краевой задаче (11), (12) $v(\tau, x) = u(\tau - H, x)$, $H = \pi/(2a)$.

В такой ситуации краевая задача (11), (12) имеет двумерное инвариантное многообразие, состоящее из решений, не зависящих от x. Эти решения можно найти, как решения вспомогательного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

$$w_\tau = (1 + \gamma\varepsilon)\big(-ay + a_2y^2 + a_3y^3 + O(y^4)\big), \tag{13}$$

где $y(\tau, \varepsilon) = w(\tau - H, \varepsilon)$. Подчеркнем, что теперь величина отклонения не зависит от ε.

Из результатов работ [4, 6, 11] вытекает, что у решений дифференциального уравнения (13) существует гладкое двумерное инвариантное (центральное) многообразие $M_2(\varepsilon)$. На нем решения уравнения (13) могут быть заданы в виде дифференциального уравнения первого порядка для комплекснозначной функции $z(s)$, где $s = \varepsilon\tau$ — медленное время. Это уравнение может быть записано в следующем виде (см. [2, 9]):

$$z' = (\alpha + i\beta)z + (l_1 + il_2)z|z|^2, \tag{14}$$

где $\alpha, \beta, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ и априори считаем, что в нашем случае ляпуновская величина $l_1 \neq 0$. Обычно в теории динамических систем уравнение (14) называют нормальной формой (см. [2, 9]) в задаче об анализе бифуркаций Андронова—Хопфа.

Решения на этом многообразии можно искать в следующем виде:

$$w(\tau, z, \overline{z}, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}w_1(\tau, z, \overline{z}) + \varepsilon w_2(\tau, z, \overline{z}) + \varepsilon^{3/2}w_3(\tau, z, \overline{z}) + O(\varepsilon^2), \tag{15}$$

где
$$w_1(\tau, z, \overline{z}) = z(s)q(\tau) + \overline{z}(s)\overline{q}(\tau), q(\tau) = \exp(i\sigma\tau),$$
а функции $w_2(\tau, z, \overline{z})$, $w_3(\tau, z, \overline{z})$ обладают следующими свойствами:

(a) они достаточно гладко зависят от своих аргументов при всех τ и $|z| \leqslant r_0$, где r_0 — некоторая положительная постоянная;

(b) по переменной τ имеют период $2\pi/\sigma$ $(\sigma = a)$;

(c) удовлетворяют следующим равенствам $M_\pm(w_j) = 0$, $j = 2, 3$, где использованы обозначения
$$M_\pm(\varphi) = \frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\sigma} \varphi(\tau)q_\pm(\tau)d\tau, \quad q_+(\tau) = q(\tau), \quad q_-(\tau) = \overline{q}(\tau).$$

Далее будут использованы обозначения $y_k(\tau, z, \overline{z}) = w_k(\tau - H, z, \overline{z})$, $k = 1, 2, 3$. Если теперь подставить сумму (15) в дифференциальное уравнение (13) и приравнять члены с $\varepsilon^{1/2}$, ε, $\varepsilon^{3/2}$, то при $\varepsilon^{1/2}$ получим равенство, выполненное за счет выбора функции $w_1(\tau, z, \overline{z})$. Наконец, выделяя слагаемые при ε и $\varepsilon^{3/2}$, получим два линейных неоднородных дифференциальных уравнения с отклоняющимся аргументом:
$$\dot{w}_2 + ay_2 = a_2y_1^2, \tag{16}$$
$$\begin{aligned}\dot{w}_3 + ay_3 = -(z'q + \overline{z}'\overline{q}) - \gamma a(zq\exp(-i\sigma H) + \overline{zq}\exp(i\sigma H)) + \\ + aH(z'q\exp(-i\sigma H) + \overline{z}'\overline{q}\exp(i\sigma H)) + 2a_2y_1y_2 + a_3y_1^3.\end{aligned} \tag{17}$$
Добавим также, что $\sigma H = \omega = \pi/2$ и поэтому $\exp(i\sigma H) = i, \exp(-i\sigma H) = -i$. Наконец, точкой обозначены производные функций по τ.

Замечание 2. Неоднородное дифференциальное уравнение
$$\dot{w} + ay = f(\tau),$$
где $f(\tau)$ — достаточно гладкая $(2\pi/\sigma)$-периодическая функция, корректно разрешимо, если $M_\pm(f) = 0$, а решение последнего неоднородного дифференциального уравнения выбирается однозначно, если для этого решения выполнены равенства $M_\pm(w) = 0$.

Равенства $M_\pm(f) = 0$ носят традиционное название условий разрешимости (см. [8]. Очевидно, что для уравнения (16) условия разрешимости выполнены и, кроме того, подходящее решение имеет следующий вид:
$$w_2(\tau, z, \overline{z}) = \eta_2 z^2q^2 + \eta_0|z|^2 + \overline{\eta}_2\overline{z}^2\overline{q}^2,$$
где
$$\eta_2 = a_2\frac{1 + 2i}{5a}, \quad \eta_0 = \frac{2a_2}{a}.$$
Условия разрешимости, примененные к дифференциальному уравнению (17), позволяют получить следующее равенство:
$$-\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)z' + i\gamma az + (\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2)z|z|^2 = 0,$$
где
$$\tilde{l}_1 + i\tilde{l}_2 = -i\left(3a_3 + 2a_2^2\frac{11 + 2i}{5a}\right).$$
В результате в правой части нормальной формы (14) коэффициенты l_1 и l_2 определяются следующими равенствами:
$$l_1 = \frac{2}{5a(4 + \pi^2)}\Big(2a_2^2(4 - 11\pi) - 15\pi aa_3\Big), \quad l_2 = -\frac{4}{5a(4 + \pi^2)}\Big(15aa_3 + 2a_2^2(11 + \pi)\Big);$$
при этом
$$\alpha = \frac{2\pi a\gamma}{4 + \pi^2}, \quad \beta = \frac{4a\gamma}{4 + \pi^2}.$$

Отметим, что знак α определяется знаком γ. Напомним, что величину l_1 принято называть ляпуновской величиной (первой ляпуновской величиной). Далее будем считать, что $l_1 \neq 0$. При $l_1 = 0$ необходима корректировка правой части нормальной формы (14) и алгоритма ее построения.

Хорошо известно (см. [2], что нормальная форма (14) при $\alpha/l_1 < 0$ имеет периодическое решение

$$z = z_a(s) = \sqrt{-\frac{\alpha}{l_1}}\,\exp(i\sigma_1 s), \quad \sigma_1 = \beta - \frac{\alpha l_2}{l_1}.$$

Решение $z_a(s)$ устойчиво, если $l_1 < 0$ ($\alpha > 0$), и неустойчиво, если $l_1 > 0$ ($\alpha < 0$). Иногда такое решение называют циклом Андронова—Хопфа нормальной формы (14).

Если теперь возвратиться к анализу краевой задачи (11), (12), то ее решения в окрестности двумерного инвариантного многообразия $M_2(\varepsilon)$ и с учетом того, что коэффициент при второй производной мал (пропорционален ε), можно искать в виде суммы аналогичной правой части формулы (15), но в которой уже $z = z(s, x)$.

Это означает что решение краевой задачи (11), (12) мы ищем в следующем виде:

$$u(\tau, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_1(\tau, z, \overline{z}) + \varepsilon w_2(\tau, z, \overline{z}) + \varepsilon^{3/2} w_3(\tau, z, \overline{z}) + O(\varepsilon^2),$$

где в отличие от суммы (15) комплекснозначные функции $z = z(s, x)$, $\overline{z} = \overline{z}(s, x)$ зависят не только от эволюционной переменной s, но и от x. Естественно, что функция $z(s, x)$ по переменной x должна удовлетворять условиям непроницаемости (однородным краевым условиям Неймана).

В результате практически не измененного алгоритма, использованного при построении нормальной формы (14), для вспомогательной комплекснозначной функции $z(s, x)$ получаем краевую задачу

$$z_s = (\alpha + i\beta)z + (l_1 + il_2)z|z|^2 + g z_{xx}, \tag{18}$$

$$z_x(s, 0) = z_x(s, \pi) = 0, \tag{19}$$

где постоянные α, β, l_1, l_2 были определены ранее; они такие же, что и в нормальной форме (14). Наконец,

$$g = g_1 - ig_2, \quad g_1 = \frac{4d}{4 + \pi^2}, \quad g_2 = \frac{2\pi d}{4 + \pi^2}.$$

Краевую задачу (18), (19) также можно называть нормальной формой, но уже основной краевой задачи (4), (5) или даже краевой задачи (2), (3). Еще раз отметим, что те решения краевой задачи (18), (19), которые не зависят от x, удовлетворяют нормальной форме (14), т.е. нормальную форму (18), (19) можно интерпретировать как обобщенный вариант традиционной нормальной формы для краевой задачи (18), (19). Иногда ее называют не нормальной формой, а квазинормальной формой, но в данной работе будем использовать простой вариант терминологии, т.е. «нормальная форма».

Добавим, что при анализе нормальной формы определяющую роль играет знак l_1. В нашем случае знак l_1 однозначно не определяется, но в большинстве случаев он отрицателен. Например, если $a_3 > 0$, то неравенство $l_1 < 0$ выполнено. Неравенство $l_1 < 0$ будет справедливо, если даже $a_3 < 0$, но a_2^2 — достаточно большая постоянная. Добавим, что краевая задача (18), (19) имеет периодическое решение $z_a(s)$, которое является периодическим решением нормальной формы (14).

4. Анализ нормальной формы. В этом разделе будем рассматривать краевую задачу (18), (19) при дополнительном предположении, что $\alpha > 0$, $l_1 < 0$. Для упрощения анализа этой краевой задачи удобно ее перенормировать. Положим

$$s = \frac{\Theta}{\alpha}, \quad z = R_0 \zeta, \quad R_0 = \sqrt{-\frac{\alpha}{l_1}}. \tag{20}$$

Тогда краевая задача (18), (19) в новых переменных будет иметь следующий вид:

$$\zeta_\Theta = (1 + i\beta_0)\zeta - (1 + ic)\zeta|\zeta|^2 + (b_1 - ib_2)\zeta_{xx}, \tag{21}$$

$$\zeta_x(\Theta, 0) = \zeta_x(\Theta, \pi) = 0, \tag{22}$$

где теперь $\beta_0 = \beta/\alpha$, $c = l_2/l_1$, $b_1 = g_1/\alpha$, $b_2 = g_2/\alpha$. Сразу отметим, что краевая задача (21), (22) имеет периодическое решение

$$\zeta_a(\Theta) = \exp(i\omega\Theta), \quad \omega = \beta_0 - c.$$

Это периодическое решение называют однородным циклом краевой задачи (21), (22), или циклом Андронова—Хопфа. Второе название мотивировано тем, что решение $\zeta_a(\Theta)$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\zeta_\Theta = (1 + i\beta_0)\zeta - (1 + ic)\zeta|\zeta|^2,$$

которое может быть проинтерпретировано как нормальная форма, к изучению которой приводит анализ бифуркаций Андронова—Хопфа (см., например, [2]).

Цикл Андронова—Хопфа устойчив в данной ситуации как решение последнего обыкновенного дифференциального уравнения. Если же мы изучаем вопрос об устойчивости цикла Андронова—Хопфа как решения краевой задачи (21), (22), то для этого требуется дополнительный анализ. Приступим к нему и положим

$$\zeta(\Theta, x) = \exp(i\omega\Theta)(1 + \varkappa(\Theta, x)). \tag{23}$$

Подстановка равенства (23) в краевую задачу (21), (22) позволяет после преобразований получить краевую задачу уже для новой комплекснозначной функции $\varkappa(\Theta, x)$. Она имеет следующий вид:

$$\varkappa_\Theta = -(1 + ic)\Big(\varkappa + \overline{\varkappa} + 2\varkappa\overline{\varkappa} + \varkappa^2 + \varkappa^2\overline{\varkappa}\Big) + (b_1 - ib_2)\varkappa_{xx}, \tag{24}$$

$$\varkappa_x(\Theta, 0) = \varkappa_x(\Theta, \pi) = 0. \tag{25}$$

Тем самым анализ устойчивости цикла Андронова—Хопфа краевой задачи (21), (22) оказался сведенным к аналогичному вопросу для нулевого решения новой краевой задачи (24), (25). Для анализа устойчивости в первом приближении следует рассмотреть линеаризованный вариант краевой задачи (24), (25)

$$\varkappa_\Theta = A\varkappa, \tag{26}$$

$$\varkappa_x(\Theta, 0) = \varkappa_x(\Theta, \pi) = 0, \tag{27}$$

где через A обозначен линейный дифференциальный оператор

$$A\varkappa = -(1 + ic)(\varkappa + \overline{\varkappa}) + (b_1 - ib_2)\varkappa_{xx}.$$

Изучим устойчивость решений краевой задачи (26), (27) записав ее в действительной форме. Для этого положим $\varkappa_1 = \operatorname{Re}\varkappa$, $\varkappa_2 = \operatorname{Im}\varkappa$ и $W = \operatorname{colon}(\varkappa_1, \varkappa_2)$. После разделения действительных и мнимых частей получаем уже краевую задачу в $\mathbb{R}^2$:

$$W_\Theta = \boldsymbol{A}W,\ W_x(\Theta, 0) = W_x(\Theta, \pi) = 0. \tag{28}$$

В линейной краевой задаче (28)

$$\boldsymbol{A}W = \begin{pmatrix} -2 + b_1\partial^2 & b_2\partial^2 \\ -2c - b_2\partial^2 & b_1\partial^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Как обычно, вопрос об устойчивости решений краевой задачи (28) можно свести к анализу спектра линейного дифференциального оператора $\boldsymbol{A}$. Собственные элементы оператора (29) можно искать в следующем виде:

$$E_n(x) = a_n \cos nx, \quad a_n = \operatorname{colon}(a_{1n}, a_{2n}), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Двумерные векторы a_n будем искать как собственные векторы матриц A_n:

$$A_n a_n = \lambda_n a_n,$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 - b_1 n^2 & -b_2 n^2 \\ -2c + b_2 n^2 & -b_1 n^2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, собственные числа матриц A_n следует искать как корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2P_n\lambda + Q_n = 0,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, $P_n = 1 + b_1 n^2 > 0$ при всех n, $Q_n = n^2\big((b_1^2 + b_2^2)n^2 + 2(b_1 - cb_2)\big)$. Ясно, что $Q_0 = 0$ и, следовательно, $\lambda_{01} = 0$, $\lambda_{02} = -2 < 0$.

Для устойчивости решений линейной краевой задачи (28) должны быть выполнены неравенства $Q_n > 0$. Тогда все остальные собственные числа линейного дифференциального оператора $\boldsymbol{A}$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости ($\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\gamma_0 < 0$). Но неравенства $Q_n > 0$ будут выполнены при всех $n \in \mathbb{N}$, если $Q_1 > 0$. Отметим следующее: если $Q_1 = 0$, то все коэффициенты $Q_k > 0$ при $k = 2, 3, \dots$.

Для продолжения анализа вопроса об устойчивости введем новые параметры, положив

$$\eta_1 = b_1, \quad \frac{b_2}{b_1} = \delta > 0, \quad \eta > 0.$$

Тогда неравенство $Q_1 > 0$ можно записать в виде

$$\eta(1 + \delta^2) + 2(1 - c\delta) > 0.$$

Наконец, условие $Q_1 = 0$ приводит к равенству

$$\eta = \eta_* = \frac{2(c\delta - 1)}{1 + \delta^2},$$

и такое критическое значение η существует, если $c\delta > 1$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Если $\eta \in (0, \eta_*)$, то линейный дифференциальный оператор $\boldsymbol{A}$ имеет по крайней мере одно собственное значение, расположенное в правой полуплоскости, а решения вспомогательной задачи* (28) *неустойчивы. При $\eta \in [\eta_*, \infty)$ эти решения устойчивы.*

Напомним, что линейный дифференциальный оператор (29) всегда имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственный элемент $\operatorname{colon}(0, 1)$. При $\eta = \eta_*$ нулевое собственное значение становится двукратным и ему отвечают собственные элементы $\operatorname{colon}(0, 1)$ и $\operatorname{colon}(k, 1)\cos x$, где $k = (1 - c\delta)/(c + \delta)$.

Подчеркнем, что при $\eta = \eta_*$ оператор $\boldsymbol{A}$ имеет двукратное нулевое собственное значение, а остальные его собственные числа лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\gamma_0 < 0$.

Возвратимся к комплексной форме записи и рассмотрим линейный дифференциальный оператор $A_0 = A$ при $\eta = \eta_*$. Он определен равенством

$$A_0\varkappa = -(1 + ic)(\varkappa + \overline{\varkappa}) + \eta_*(1 - i\delta)\varkappa_{xx},$$

у которого есть двукратное собственное число $\lambda = 0$. Ему отвечают собственные элементы

$$e_0(x) = i, \quad e_1(x) = (k + i)\cos x.$$

Замечание 3. При дальнейших построениях нам потребуются условия разрешимости неоднородного дифференциального уравнения

$$A_0\varkappa = \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$, но лишь в частных случаях:

(a) при $\varphi(x) = \varphi_0 + i\psi_0$ условие разрешимости состоит в выполнении равенства $\psi_0 = c\varphi_0$;

(b) при $\varphi(x) = (\varphi_1 + i\psi_1)\cos x$ условие разрешимости состоит в выполнении равенства $\varphi_1 = \delta\psi_1$.

Здесь $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1 \in \mathbb{R}$.

Подчеркнем, что в обоих случаях решения соответствующего неоднородного уравнения, если они существуют (т.е. при выполнении условий разрешимости), то заведомо не могут быть выбраны единственным образом. Естественно их выбор предполагает дополнительные условия, которые и обеспечивают единственность.

В случае, когда выполнено условие (a), решение следует искать в виде $\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2$, где выбор $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ подчинен равенству $\varkappa_2 = c\varkappa_1$. Если рассматривается вариант (b), то решение выбирается в виде $\varkappa(x) = (\varkappa_3 + i\varkappa_4)\cos x$, и равенство $\varkappa_3 = \delta\varkappa_4$ обеспечивает выбор подходящего решения. Итак, соответствующие решения таковы:

$$\text{(a)}\ -(1 + ic)\frac{\varphi_0}{2}, \qquad \text{(b)}\ (\delta + i)\frac{1 + \delta^2}{1 - \delta^2 - 2c\delta}\,\frac{\psi_1}{2}.$$

5. Бифуркационная задача. Пусть в краевой задаче (24), (25) величина η выбрана таким образом, что

$$\eta = \eta_*(1 - \nu\mu), \tag{30}$$

где $\nu = \pm 1$ (или $\nu = 0$), $\mu \in (0, \mu_0)$, а $0 < \mu_0 \ll 1$, т.е. μ в дальнейшем интерпретируем как малый положительный параметр.

Рассмотрим теперь оператор A из правой части уравнения (26), если в нем $b_1 = \eta_*(1 - \nu\mu)$, а $b_2 = \delta\eta = \delta\eta_*(1 - \nu\mu)$. В результате получим линейный дифференциальный оператор

$$Ay = A(\mu)y = A_0 y - \mu A_1 y,$$

где

$$A_0 y = -(1 + ic)(y + \overline{y}) + \eta_*(1 - i\delta)y_{xx}, \quad A_1 y = \nu\eta_*(1 - i\delta)y_{xx}.$$

Наконец, здесь $y = y(x)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая краевым условиям $y'(0) = y'(\pi) = 0$. У данного оператора $A(\mu)$ при всех значениях параметров имеется нулевое собственное значение, которое отвечает собственной функции $y(x) = i$. Кроме этого, у данного оператора при достаточно малых μ есть собственное число $\lambda_1(\mu)$, где

$$\lambda_1(\mu) = 2\nu\frac{(c\delta - 1)^2}{\delta^2 + 2c\delta - 1}\mu + o(\mu).$$

При этом в случае $\delta^2 + 2c\delta - 1 > 0$, так как $\delta = \pi/2$. Из последнего равенства ясно, что $\lambda_1 > 0$, если $\nu = 1$, т.е. $\eta < \eta_*$; напротив, при $\nu = -1$ получаем $\eta > \eta_*$. При вычислении λ_1 использованы условия разрешимости. Как уже отмечалось, при $\eta < \eta_*$ происходит потеря устойчивости нулевого состояния равновесия краевой задачи (24), (25), если в ней положить $\eta = b_1$ и $\delta = b_2/b_1$.

Перейдем теперь к анализу бифуркаций в окрестности цикла Андронова—Хопфа краевой задачи (21), (22), если для цикла реализуется случай, близкий к критическому спектра устойчивости. Для этого перепишем ее при соответствующем выборе коэффициентов правой части, т.е. в данном разделе вместо краевой задачи (21), (22) будем изучать краевую задачу в следующем варианте:

$$\zeta_\Theta = (1 + i\beta_0)\zeta - (1 + ic)\zeta|\zeta|^2 + \eta_*(1 - \nu\mu)(1 - i\delta)\zeta_{xx}, \tag{31}$$

$$\zeta_x(\Theta, 0) = \zeta_x(\Theta, \pi) = 0. \tag{32}$$

Краевая задача (31), (32) в окрестности однородного цикла (цикла Андронова—Хопфа) имеет двумерное интегральное многообразие (см. [5], решения на котором удовлетворяют системе из двух действительных дифференциальных уравнений

$$\rho_0' = G_0(\rho, \mu), \tag{33}$$

$$\rho' = G(\rho, \mu). \tag{34}$$

При этом решения, принадлежащие этому многообразию, будем искать в виде

$$\zeta(\Theta, x, \mu) = \exp(i\omega\Theta + i\rho_0)\bigl(1 + \varkappa(\Theta, x, \rho_0, \rho)\bigr), \tag{35}$$

где $\rho_0(\Theta, \mu), \rho(\Theta, \mu)$ — решения системы (33), (34), которая также может быть интерпретирована как нормальная форма, но уже краевой задачи (31), (32). Замена (35) на первом этапе приводит к новой краевой задаче уже для функции $\varkappa$. Итак, вместо краевой задачи (31), (32) получаем следующую краевую задачу:

$$\varkappa_\Theta + iG_0(\rho, \mu)(1 + \varkappa) = A(\mu)\varkappa - (1 + ic)\bigl(2\varkappa\overline{\varkappa} + \varkappa^2 + \varkappa^2\overline{\varkappa}\bigr), \tag{36}$$

$$\varkappa_x(\Theta, 0) = \varkappa_x(\Theta, \pi) = 0, \tag{37}$$

где $A(\mu)$ — линейный дифференциальный оператор, введенный ранее. Решения краевой задачи (36), (37) будем искать в следующем виде:

$$\varkappa(x, \rho, \mu) = \rho\Gamma_1(x) + \rho^2\Gamma_2(x) + \rho^3\Gamma_3(x) + \mu\rho\Gamma_0(x) + \ldots, \tag{38}$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по сравнению с выписанными в явном виде. Как было показано в [5], для этих слагаемых справедлива оценка сверху

$$M(\mu\rho^2 + \mu^2|\rho| + \rho^4), \quad M = \mathrm{const} > 0.$$

Выше $\rho = \rho(\Theta) = \rho(\Theta, \mu)$ — решения дифференциального уравнения (34). Уместно отметить, что дифференциальное уравнение (34) можно изучать отдельно, так как его правая часть не зависит от $\rho_0(\Theta)$. В свою очередь, $\rho_0(\Theta)$ находим после того, как определим $\rho(\Theta)$ из уравнения (34). После этого следует $\rho(\Theta)$ подставить в правую часть уравнения (33) и определить $\rho_0(\Theta)$ интегрированием правой части этого уравнения.

Пусть $\Gamma_1(x) = (k+i)\cos x$. Подставим теперь сумму (38) в краевую задачу (36) и приравняем слагаемые при ρ, ρ^2, ρ^3, $\mu\rho$. В результате получим последовательность линейных краевых задач. В [5] этот алгоритм обсуждался более подробно. Особо подчеркнем, что слагаемые в правых частях уравнений (33), (34) имеют порядок малости выше первого. Как уже отмечалось, для линеаризованной задачи при $\mu = 0$ в правой части (33), (34) с необходимостью должно быть $G_0 = G = 0$ ($\rho_0 = \rho = \mathrm{const}$). Там же было показано, что функции $G_0(\rho,\mu), G_1(\rho,\mu)$ имеют следующий вид:

$$G_0(\rho,\mu) = G_0\rho^2 + \ldots, \quad G(\rho,\mu) = \mu G_1\rho + G_3\rho^3 + \ldots.$$

Точками обозначены слагаемые, которые по совокупности переменных имеют порядок малости выше выписанных в явном виде. В результате получим три линейные неоднородные краевые задачи для определения функций $\Gamma_2(x)$, $\Gamma_3(x)$, $\Gamma_0(x)$ из правой части суммы (38).

Для $\Gamma_2(x)$ получаем краевую задачу

$$-A_0\Gamma_2(x) = \Phi_2(x), \tag{39}$$

$$\Gamma_{2x}(0) = \Gamma_{2x}(\pi) = 0, \tag{40}$$

где

$$\Phi_2(x) = -iG_0 - \frac{1}{2}(1+ic)(3k^2+1+2ki) - \frac{1}{2}(1+ic)(3k^2+1+2ki)\cos 2x.$$

Для $\Gamma_3(x)$ получаем краевую задачу

$$-A_0\Gamma_3(x) = \Phi_3(x), \tag{41}$$

$$\Gamma_{3x}(0) = \Gamma_{3x}(\pi) = 0, \tag{42}$$

где

$$\Phi_3(x) = -iG_0\Gamma_1(x) - G_3\Gamma_1(x) - 2(1+ic)\Big(\Gamma_1(x)\overline{\Gamma}_2(x) + \\ + \overline{\Gamma}_1(x)\Gamma_2 + \Gamma_1(x)\Gamma_2(x)\Big) - (1+ic)\Gamma_1^2(x)\overline{\Gamma}_1(x).$$

При $\mu\rho$ образуется следующая краевая задача:

$$-A_0\Gamma_0 = \nu\eta_*(1-i\delta)(k+i)\cos x - G_1(k+i)\cos x, \tag{43}$$

$$\Gamma_{0x}(0) = \Gamma_{0x}(\pi) = 0. \tag{44}$$

Приступим к анализу трех последних линейных неоднородных краевых задач. Из условий разрешимости краевой задачи (39), (40) вытекает, что она имеет решение в рассматриваемом классе функций, если

$$G_0 = -k(1+c^2).$$

При таком выборе постоянной G_0 соответствующее решение краевой задачи (39), (40) имеет вид

$$\Gamma_2 = (\delta_1 + i\delta_2) + (\delta_3 + i\delta_4)\cos 2x,$$

где

$$\delta_1 = -\frac{3k^2+1-2kc}{4}, \quad \delta_2 = c\delta_1, \quad \delta_3 = \frac{3k^2-1}{12}, \quad \delta_4 = \frac{3kc-6k^2-1+\eta_*(1-3k^2)}{12\delta\eta_*}.$$

После достаточно простых, но громоздких вычислений из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (41), (42) получаем

$$G_3 = \frac{1}{k-\delta}\Big((1+k\delta)G_0 + \frac{3}{4}(k^2+1)\big((1+kc)\delta + c - k\big) + \\ + \big(\delta(1+3kc) + c - 3k\big)(2\delta_1+\delta_3) + \big(\delta(c+k) + ck - 1\big)(2\delta_2+\delta_4)\Big),$$

где постоянная k была определена при линейном анализе, а постоянные G_0, δ_1, δ_2, δ_3, $\delta_4 \in \mathbb{R}$ были найдены на втором этапе реализации алгоритма.

Наконец, рассмотрим неоднородную краевую задачу (43), (44). Условия ее разрешимости позволяют найти, что

$$G_1 = 2\nu \frac{(c\delta - 1)^2}{\delta^2 + 2c\delta - 1}.$$

Уместно отметить, что $\delta^2 + 2c\delta - 1 > 0$. В изучаемой задаче $\delta = \pi/2 > 1$ ($c > 0$). Подчеркнем, что величина G_1 и есть коэффициент при μ в разложении по степеням малого параметра собственного числа $\lambda_1(\mu)$ линейного дифференциального оператора $A(\mu)$.

Перейдем теперь к анализу нормальной формы (33), (34) и выпишем ее в «укороченной» форме (см. [9]). Итак, рассмотрим следующий вариант нормальной формы:

$$\rho_0' = G_0\rho^2, \tag{45}$$

$$\rho' = \mu G_1 \rho + G_3\rho^3. \tag{46}$$

При этом, как нетрудно заметить, уравнение (46) не зависит от $\rho_0(\Theta)$ и поэтому это дифференциальное уравнение можно анализировать отдельно. Ясно, что $G_1 > 0$, если $\nu = 1$ и $G_1 < 0$, если $\nu = -1$. Поэтому основную роль при анализе уравнения (46) играет его коэффициент G_3. Для него была приведена формула. Ввиду ее громоздкости аналитическое исследование знака G_3 затруднительно; оно было проведено с привлечением численных методов. Оказалось, что при всех значениях параметров $G_3 < 0$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Дифференциальное уравнение* (46) *имеет два ненулевых асимптотически устойчивых состояния равновесия, если в равенстве для* G_1 *выбрать* $\nu = 1$:

$$S_\pm: \ \rho_\pm = \pm\mu^{1/2}\chi, \quad \chi = \sqrt{-\frac{G_1}{G_3}}.$$

При таком выборе ν *нулевое состояние равновесия дифференциального уравнения* (46) *неустойчиво. При* $\nu = -1$ *и* $\nu = 0$ *уравнение* (46) *имеет асимптотически устойчивое нулевое состояние равновесия. Ненулевых состояний равновесия это уравнение при* $\nu = -1$ *или* $\nu = 0$ *не имеет.*

Из леммы 3 вытекает, что система дифференциальных уравнений (45), (46) имеет два интегральных многообразия $V_\pm(\mu)$, соответствующих $S_\pm$. Определяющие их решения нормальной формы (45), (46) имеют вид

$$\rho = \pm\mu^{1/2}\chi, \quad \rho_0 = \mu G_0 \chi^2 \Theta + \mathrm{const}\,.$$

Данные интегральные многообразия являются локальными аттракторами, если состояния равновесия $S_\pm$ асимптотически устойчивы.

Из результатов работы [5] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует такая положительная постоянная* μ_0*, что при* $\mu \in (0, \mu_0)$ *состояниям равновесия* $S_\pm$ *дифференциального уравнения* (46) *соответствуют два состояния равновесия* $E_\pm$ *краевой задачи* (24), (25)*. Они наследуют устойчивость состояний равновесия уравнения* (46)*. Для них справедливы асимптотические формулы*

$$\varkappa_\pm(x, \mu) = \pm\mu^{1/2}\chi(k + i)\cos x + \mu\chi^2\Gamma_2(x) + o(\mu),$$

где

$$\Gamma_2(x) = (\delta_1 + i\delta_2) + (\delta_3 + i\delta_4)\cos 2x$$

(*см. краевую задачу* (39), (40)).

Следствие 2. *Состояниям равновесия краевой задачи* (24), (25) *соответствуют периодические решения краевой задачи* (21), (22)*. Для этих решений справедливы асимптотические формулы*

$$\zeta_\pm(\Theta, x, \mu) = \exp\Big(i\omega\Theta + i(\mu G_0\chi^2 + o(\mu))\Theta\Big)(1 + \varkappa_\pm(x, \mu)).$$

При их выводе использована замена (35). *Наконец, с помощью равенств* (20) *можно получить аналогичные формулы уже для краевой задачи* (18), (19)

$$z_{\pm}(s,x,\mu)=R_0\exp\Big(i\omega\alpha s+i(\mu G_0\chi^2+o(\mu))\alpha s\Big)(1+\varkappa_{\pm}(x,\mu)). \tag{47}$$

Решения (47) *краевой задачи* (18), (19) *устойчивы* (*орбитально асимптотически устойчивы*).

6. Основной результат. Основной результат устанавливает соответствие между решениями нормальной формы (18), (19) (краевой задачи (18), (19)) и основной краевой задачи, подлежащей изучению, т.е. краевой задачи (4), (5), а также с первоначально выбранной краевой задачей (2), (3), естественно, при соответствующем выборе параметров уравнений.

Теорема 2. *Существует такая постоянная* ε_0 , *что при всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *каждому периодическому решению нормальной формы* (18), (19) *соответствует периодическое решение краевой задачи* (11), (12) *и в конечном итоге краевой задачи* (4), (5):

(i) *циклу Андронова—Хопфа нормальной формы* (18), (19) *соответствует пространственно однородный цикл краевой задачи* (4), (5), *который порождается периодическим решением*

$$u_a(t,\varepsilon)=\varepsilon^{1/2}\left[\sqrt{-\frac{\alpha}{l_1}}\exp\Big(i(\sigma+\varepsilon\sigma_1)t\Big)+\sqrt{-\frac{\alpha}{l_1}}\exp\Big(-i(\sigma+\varepsilon\sigma_1)t\Big)\right]+O(\varepsilon),$$

где $\sigma=a$, $\sigma_1=\beta-\alpha l_2/l_1$, *если, конечно, такой цикл существует* $(\alpha/l_1<0)$;

(ii) *каждому циклу* (47) *соответствует пространственно неоднородный цикл*

$$u_{\pm}(t,x,\varepsilon,\mu)=\varepsilon^{1/2}R_0\Big(\exp\big(iQ(t,\varepsilon,\mu)\big)\big(1+\varkappa_{\pm}(x,\mu)\big)+ \\ +\exp\big(-iQ(t,\varepsilon,\mu)\big)\big(1+\overline{\varkappa}_{\pm}(x,\mu)\big)\Big)+O(\varepsilon),$$

где

$$Q(t,\varepsilon,\mu)=\Big(\sigma+\omega\alpha\varepsilon+\big(\mu G_0\chi^2+o(\mu)\big)\omega\alpha\varepsilon\Big)\frac{t}{1+\gamma\varepsilon},\quad \sigma_1=\omega\alpha.$$

Построенные периодические решения наследуют устойчивость соответствующих им решений нормальной формы. Наконец, равенства

$$p_a(t,\varepsilon)=p_0+u_a(t,\varepsilon),\quad p_{\pm}(t,x,\varepsilon,\mu)=p_0+u_{\pm}(t,x,\varepsilon,\mu)$$

восстанавливают решения первоначального варианта системы «спрос-предложения» (*см. краевую задачу* (2), (3)).

Правая часть второй асимптотической формулы из теоремы 2 содержит два независимых малых параметра ε и μ. «Основной» из них ε, а от μ зависит только компоненты решения нормальной формы (45), (46). Подчеркнем, что при достаточно малых ε и μ частота колебаний близка к σ, а период, естественно, к $2\pi/\sigma$. Напомним, что $\sigma=a$, и в принципе период колебаний экономики может быть любым. Если величина $2\pi/\sigma$ мала, то принято говорить о краткосрочных циклах — циклах Китчина. При умеренном a имеем среднесрочные циклы (циклы Жуглара) и, наконец, если $a\ll 1$, то период $T=2\pi/a$ достаточно велик, и речь идет о долгосрочных циклах Кондратьева (см. [3, 7]).

7. Заключение. Как уже отмечалось, классический вариант модели «спрос-предложение» не может адекватно моделировать макроэкономические процессы, так как анализ поведения решений системы дифференциальных уравнений (1) противоречит экономической практике. Весь опыт макроэкономической динамики показывает, что рыночная экономика не обязательно имеет устойчивое состояние равновесия и, более того, для нее характерна цикличность.

Вместе с тем учет двух таких факторов, как запаздывание спроса и предложения и учет пространственного взаимодействия, способны изменить радикально динамику такой модели.

В работе была рассмотрена краевая задача (2), (3). Ее анализ позволил найти периодические по t решения циклы — циклы Андронова—Хопфа, а также пространственно неоднородные циклы. Современные математические методы продемонстрировали, что динамика даже в достаточно простой на первый взгляд модели может быть сложной и не вступать в противоречие с наблюдаемым, реальным процессом экономическим процессом.

Для анализа обобщенной модели рынка одного товара использовались такие методы теории динамических систем как метод интегральных (инвариантных) многообразий, а также соответствующая редакция метода нормальных форм в применении к динамическим системам с бесконечномерным фазовым пространством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агапова Т. А., Серегина С. Ф.* Макроэкономика. — М.: Дело и сервис, 2004.
2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
3. *Кондратьев Н. Д.* Особое мнение. — М.: Наука, 1993.
4. *Куликов А. Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний (*Колесов Ю. С.*, ред.). — Ярославль: ЯрГУ, 1976. — С. 114–129.
5. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шрёдингера// Диффер. уравн. — 2010. — *46*, № 9. — С. 1290–1299.
6. *Куликов Д. А.* Эффект запаздывания и экономические циклы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *217*. — С. 41–50.
7. *Лебедев В. В., Лебедев К. В.* Математическое моделирование нестационарных процессов. — М.: еТест, 2011.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
9. *Guckenheimer J., Holmes P. J.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. — New York: Springer, 1983.
10. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1977.
11. *Marsden J. E., McCraken M.* The Hopf Bifurcations and Its Applications. — New York: Springer, 1976.
12. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
13. *Radin M. A., Kulikov A. N., Kulikov D. A.* The influence of spatial effects on the dynamics of solutions in Keynes' mathematical model of the business cycle// Nonlin. Dyn. Psychol. Life Sci. — 2022. — *26*, № 4. — P. 441–463.
14. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Куликов Анатолий Николаевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 88–95
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-88-95

УДК 51-72, 517.97

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВНЕШНИМИ НАГРУЗКАМИ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ СОСТАВНОГО ТЕЛА, КОНТАКТИРУЮЩЕГО С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ С ОСТРОЙ КРОМКОЙ

© 2023 г. **Н. П. ЛАЗАРЕВ, Г. М. СЕМЕНОВА, Е. С. ЕФИМОВА**

Аннотация. Рассмотрена неклассическая математическая модель, описывающая механический точечный контакт композитного тела с препятствием специальной геометрии. Нелинейность модели обусловлена условиями типа неравенства в рамках соответствующей вариационной задачи. Сформулирована задача оптимального управления, в которой управлением служат функции внешних нагрузок, а функционал стоимости задается с помощью слабо полунепрерывного сверху функционала, определенного на пространстве Соболева. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. Для последовательности решений, соответствующей максимизирующей последовательности, доказана сильная сходимость в соответствующем пространстве Соболева.

***Ключевые слова*:** жесткое включение, условие непроникания, вариационная задача.

OPTIMAL CONTROL OF EXTERNAL LOADS IN THE EQUILIBRIUM PROBLEM FOR A COMPOSITE BODY CONTACTING WITH A RIGID INCLUSION WITH A SHARP EDGE

© 2023 **N. P. LAZAREV, G. M. SEMENOVA, E. S. EFIMOVA**

Abstract. In this paper, we consider a nonclassical mathematical model that describes the mechanical point contact of a composite body with an obstacle of special geometry. The nonlinearity of the model is due to inequality-type conditions within the framework of the corresponding variational problem. An optimal control problem is formulated in which the controls are functions of external loads, and the cost functional is specified using a weakly upper semi-continuous functional defined on the Sobolev space. The solvability of the optimal control problem is proved. For the sequence of solutions corresponding to the maximizing sequence, the strong convergence in the corresponding Sobolev space is proved.

***Keywords and phrases*:** rigid inclusion, non-penetration condition, variational problem.

***AMS Subject Classification*:** 35A15, 49J40, 74B99

Введение. Один из широко известных подходов в моделировании контактных задач механики деформируемого твердого тела использует граничные условия типа неравенств. Данный подход, предполагающий условия непроникания был впервые предложен А. Синьорини в 1933 г. Одна из особенностей задач подобного вида связана с тем, что зона контакта заранее неизвестна. Нелинейные задачи с такими односторонними ограничениями, приводят к исследованию вариационных формулировок (см. [10, 19, 24]). К настоящему времени изучен широкий класс контактных задач для упругих, вязкоупругих тел для различных случаев возможных контактных взаимодействий.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2023-947, соглашение от 16.02.2023).

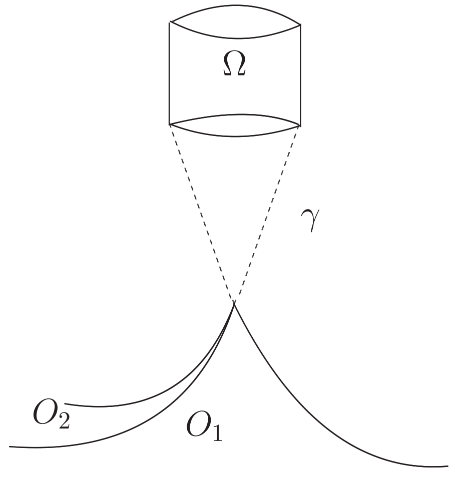

Рис. 1

для упругих, вязкоупругих тел для различных случаев возможных контактных взаимодействий. Для упругих тел исследованы следующие контактные задачи: о контакте пластины со штампом (см. [8]), с тонким упругим препятствием (см. [5–7,16]), с приклеенной другой пластиной по одному краю трещины (см. [23]). С контактными задачами для термоупругих тел и вязкоупругих тел можно ознакомиться, например, в [4,12], соответственно. Условия непроникания нашли широкое применение для класса задач о составных телах и композитах, содержащих жесткие и упругие включения (см. [3,18,21]). Асимптотическое разложение перемещений в окрестности вершины жесткого включения в случаях как с отслоением, т.е. при наличии трещины, так и без отслоения получено в [13]. В отличие от контактной задачи Синьорини с заданным неподвижным препятствием (см. [2,11]), в недавней статье [20] исследована задача, описывающая квазистатическое вдавливание твердого штампа в деформируемое тело, в которой глубина вдавливания штампа заранее неизвестна.

Задачи о точечном контакте для тел с жесткими включениями впервые были предложены и изучены в 2022 г. (см. [1,22]). Их особенность, в отличие от классических задач Синьорини с односторонними условиями на множестве положительной меры, состоит в том, что условие непроникания ставится в отдельных точках, или для более общего случая — на множествах меры нуль.

В настоящей работе для трехмерной задачи о точечном контакте исследовано оптимальное управление внешними нагрузками. Кроме того, для максимизирующей последовательности последовательности функций нагрузок, доказана сильная сходимость соответствующей последовательности решений контактных задач в пространстве Соболева.

1. Постановка задачи равновесия. Сформулируем контактную задачу для упругого тела, содержащего жесткое включение на внешней границе. Такая модель может описывать композитные тела со специальными жесткими покрытиями. Рассмотрим ограниченную односвязную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из двух поверхностей Γ_1, Γ_2: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\operatorname{meas}(\Gamma_1) > 0$. Конус

$$\gamma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = \alpha^2 x_3^2,\ x_3 \in [0,1]\right\}, \quad 0 < \alpha,$$

является частью Γ_2, причем $\gamma \subset \operatorname{int}(\Gamma_2)$ (см. рис. 1).

Будем считать, что тонкое жесткое включение задается с помощью конуса γ, а жесткое недеформируемое препятствие — поверхностью

$$O = \bigcup_{l=1}^{4} O_l,$$

составленной из четырех частей:

$$O_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 = \psi_1(x_1, x_2)\},$$
$$O_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 = \psi_2(x_1, x_2)\},$$
$$O_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 = \psi_3(x_1, x_2)\},$$
$$O_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 = \psi_4(x_1, x_2)\},$$

где $\psi_l(0,0) = 0$, $l = 1,2,3,4$. При этом функции $\psi_l(x_1, x_2)$, $l = \overline{1,4}$, являются непрерывными выпуклыми вверх (на соответствующих квадрантах) функциями относительно оси Ox_3, совпадающими на координатных осях плоскости Ox_1x_2, так чтобы функция

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} \psi_1(x_1, x_2), & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \\ \psi_2(x_1, x_2), & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0, \\ \psi_3(x_1, x_2), & x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0, \\ \psi_4(x_1, x_2), & x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

была непрерывной на плоскости и дифференцируемой на каждом квадранте плоскости Ox_1x_2 и удовлетворяющей свойствам $\left|\partial\psi(0,0)/\partial\mu\right| \leqslant \alpha$, для произвольного единичного вектора μ плоскости Ox_1x_2. Кроме того, считаем, что функция $\psi(x_1, x_2)$ убывает вдоль любого луча плоскости Ox_1x_2, выходящего из начала координат.

Обозначим через $W = (w_1, w_2, w_3)$ вектор перемещений. Предположим, что тело, занимающее область Ω, закреплено на границе Γ_1, т.е.

$$W = (0,0,0) \quad \text{на } \Gamma_1. \tag{1}$$

Введем следующее пространство Соболева:

$$H^{1,0}_{\Gamma_1}(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_1\}, \quad H(\Omega) = H^{1,0}_{\Gamma_1}(\Omega)^3.$$

Выпишем определяющие соотношения для трехмерной теории упругости в рамках тензоров деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad \sigma_{ij}(W) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i,j = 1,2,3, \tag{2}$$

где запятая в первой формуле (2) обозначает соответствующую производную, по повторяющимся индексам ведется суммирование (соглашение Эйнштейна). Тензор коэффициентов упругости задается элементами c_{ijkl}, которые предполагаются симметричными и положительно определенными:

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i,j,k,l = 1,2,3,$$
$$c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geqslant c_0|\xi|^2 \ \forall \xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i,j = 1,2,3, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Чтобы привести вариационную формулировку, описывающую состояние равновесия тела с жестким тонким включением γ на границе, введем функционал энергии

$$\Pi(W) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W) - \int\limits_\Omega FW,$$

где вектор $F = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega)^3$ описывает внешние силы, действующие на тело, $FW = f_i w_i$. Коэрцитивность функционала $\Pi(W)$, обеспечивается известным неравенством Корна:

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W) \geqslant c\|W\|^2_{H(\Omega)} \quad \forall W \in H(\Omega), \tag{3}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от W.

Замечание 1. Неравенство (3) дает эквивалентность стандартной нормы в $H(\Omega)$ и полунормы, определяемой левой частью (3).

Пространство инфинитезимальных жестких перемещений $R(Z)$ состоит из аффинных функций и задает линейную структуру перемещений на некотором подмножестве $Z \subset \overline{\Omega}$ (см. [14]):

$$R(Z) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \mid \rho(x) = Bx^t + C;\ x \in Z\}, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c_1, c_2, c_3), \quad x^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_1, c_2, c_3 — некоторые вещественные числа. В частности, для поверхности γ имеем пространство $R(\gamma)$.

В рамках линейной теории упругости, рассуждая для бесконечно малых перемещений, выпишем условие непроникания для перемещений композитного тела относительно препятствия O. С учетом заданной структуры перемещений точек жесткого включения γ мы можем записать данное условие в виде системы следующих неравенств:

$$\begin{cases} c_3 \geqslant \psi_1(c_1, c_2,), & \text{если } c_1 \geqslant 0,\ c_2 \geqslant 0, \\ c_3 \geqslant \psi_2(c_1, c_2,), & \text{если } c_1 \geqslant 0,\ c_2 \leqslant 0, \\ c_3 \geqslant \psi_3(c_1, c_2,), & \text{если } c_1 \leqslant 0,\ c_2 \leqslant 0, \\ c_3 \geqslant \psi_4(c_1, c_2,), & \text{если } c_1 \leqslant 0,\ c_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

В соответствии с этими ограничениями рассмотрим следующие множества допустимых перемещений:

$$K_1 = \Big\{W \in H(\Omega) :\ W|_\gamma = \rho,\ \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant \psi_1(c_1, c_2,),\ c_1 \geqslant 0,\ c_2 \geqslant 0\Big\},$$
$$K_2 = \Big\{W \in H(\Omega) :\ W|_\gamma = \rho,\ \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant \psi_2(c_1, c_2,),\ c_1 \geqslant 0,\ c_2 \leqslant 0\Big\},$$
$$K_3 = \Big\{W \in H(\Omega) :\ W|_\gamma = \rho,\ \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant \psi_3(c_1, c_2,),\ c_1 \leqslant 0,\ c_2 \leqslant 0\Big\},$$
$$K_4 = \Big\{W \in H(\Omega) :\ W|_\gamma = \rho,\ \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant \psi_3(c_1, c_2,),\ c_1 \leqslant 0,\ c_2 \geqslant 0\Big\}.$$

Обозначим объединение всех четырех множеств K_l, $l = \overline{1,4}$ через K_s: $K_s = \bigcup\limits_{l=1}^{4} K_l$.

Рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$\text{найти такую функцию } U \in K_s, \text{ что } \Pi(U) = \inf_{W \in K_s} \Pi(W). \tag{5}$$

В силу свойств функций ψ_l, $l = \overline{1,4}$ очевидно, что каждое из множеств K_l, $l = \overline{1,4}$, выпукло и замкнуто (см. [1]). В то же время можно заметить, что объединение K_s этих множеств замкнуто, но не выпукло (это нетрудно установить, следуя примеру для двумерных множеств в [22]).

Наряду с исходной задачей (5) рассмотрим следующие четыре вспомогательные задачи:

$$\text{найти такую функцию } U_l \in K_l, \text{ что } \Pi(U_l) = \inf_{W \in K_l} \Pi(W),\ l = \overline{1,4}. \tag{6}$$

Коэрцитивность и слабая полунепрерывность снизу $\Pi(W)$ на гильбертовом пространстве $H(\Omega)$ гарантирует, что $\Pi(W)$ достигает своих минимумов над K_l, $l = \overline{1,4}$, на некоторых функциях $U_1 \in K_1$, $U_2 \in K_2$, $U_3 \in K_3$, $U_4 \in K_4$ соответственно. Кроме того, ввиду строгой выпуклости функционала энергии, для каждого фиксированного $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ соответствующая вспомогательная задача (6) имеет единственное решение U_l, $l = 1, 2, 3, 4$. Искомую функцию U можно найти как функцию, обеспечивающую минимум по четырем оптимальным значениям, т.е.

$$\Pi(U) = \min\{\Pi(U_1), \Pi(U_2), \Pi(U_3), \Pi(U_4)\}, \tag{7}$$

где U_l — решения вспомогательных задач (6) (см. [1]).

Отметим, что каждая из четырех вспомогательных задач допускает дифференциальную формулировку при условии достаточной гладкости. Не нарушая общности, выберем задачу минимизации для множества K_1. Итак, предположим, что $U_1 \in K_1$ обладает дополнительной гладкостью.

Для начала заметим, что задача (6) минимизации функционала энергии над множеством K_1 эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$U_1 \in K_1, \quad \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(U_1)\varepsilon_{ij}(W - U_1) \geqslant \int\limits_{\Omega} F(W - U_1) \quad \forall W \in K_1. \tag{8}$$

В рамках предположения о гладкости решения задача (6) эквивалентна следующей краевой задаче (см. [1]), состоящей из уравнения равновесия

$$-\sigma_{ij,j}(U_1) = F_i \quad \text{в } \Omega,\ i = 1, 2, 3, \tag{9}$$

и следующих граничных условий:

$$\sigma_\tau(U_1) = 0, \quad \sigma_\nu(U_1) = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \setminus \gamma, \tag{10}$$

$$\int\limits_{\gamma} \Big(\sigma_\nu(U_1)(W - \rho^1)\nu + \sigma_\tau(U_1)(W_\tau - \rho^1_\tau)\Big) \geqslant 0 \quad \forall W \in K_1, \quad \rho^1 = U_1 \quad \text{на } \gamma, \tag{11}$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор нормали к Γ,

$$\sigma_\nu(V) = \sigma_{ij}(V)\nu_i\nu_j, \quad \overline{V}\nu = \overline{v}_i\nu_i,$$
$$\sigma_\tau(V) = \big(\sigma^1_\tau(V), \sigma^2_\tau(V), \sigma^3_\tau(V)\big) = \big(\sigma_{1j}(V)\nu_j, \sigma_{2j}(V)\nu_j, \sigma_{3j}(V)\nu_j\big) - \sigma_\nu(V)\nu,$$
$$\overline{V}_\tau = (\overline{V}_{\tau 1}, \overline{V}_{\tau 2}, \overline{V}_{\tau 3}), \quad \overline{V}_{\tau i} = \overline{v}_i - (\overline{V}\nu)\nu_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Неравенство (11), представляет собой соотношение, выражающее принцип виртуальных перемещений (ср. [15]).

2. Задача оптимального управления. Наряду с основной задачей равновесия (5) рассмотрим семейство задач о равновесии, сформулированных относительно множества $\mathcal{F}$, элементами которого являются функции F, описывающие внешние нагрузки. Предположим, что $\mathcal{F}$ — ограниченное, замкнутое и выпуклое множество в $L^2(\Omega)^3$. Заметим, что данные свойства $\mathcal{F}$ гарантируют слабую замкнутость $\mathcal{F}$. Для постановки задачи оптимального управления рассмотрим слабо полунепрерывный сверху функционал $G : H(\Omega) \to \mathbb{R}$. В качестве примеров можно указать функционал

$$G_1(W) = \|W - W_0\|_{L^2(\Omega)^3}$$

с ясным физическим смыслом, характеризующий отклонение вектора смещения от заданной функции W_0, или функционал $G_2(W) = c_1$ (или $G_2(W) = c_2$), отражающий положение вершины конуса жесткого включения. Другой тип возможных функционалов может быть связан с величиной напряжений; при этом можно рассматривать, например, интеграл

$$G_3 = -\left|\int\limits_{V\cap\Omega} \sigma_{kl}(W)\right|$$

с фиксированными $k, l \in \{1, 2, 3\}$, где V — окрестность кривой $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 = \alpha^2\}$, ограничивающей жесткое включение.

Определим функционал качества $J_G : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ равенством

$$J_G(F) = G(U_F),$$

где функции $F \in \mathcal{F}$ служат контролем для данной задачи. С учетом отмеченных особенностей сформулируем следующую задачу оптимального управления:

$$\text{найти такую функцию } F^* \in \mathcal{F}, \text{ что } J_G(F^*) = \sup_{F \in \mathcal{F}} J_G(F). \tag{12}$$

Следует отметить, что задача о наиболее желательном положения вершины конуса включения для равновесного состояния составного тела может быть интересной с точки зрения приложений.

Теорема 1. *Существует решение задачи оптимального управления* (12).

Доказательство. Пусть $\{F_n\}$ — максимизирующая последовательность. Ввиду ограниченности и слабой замкнутости множества $\mathcal{F}$ можно выделить такую сходящуюся подпоследовательность (обозначаемую тем же индексом) $\{F_n\}$, что

$$F_n \to F^* \text{ в } L^2(\Omega)^3 \text{ при } n \to \infty,\ F^* \in \mathcal{F}.$$

Поскольку каждой последовательности F_n, $n \in \mathbb{N}$, соответствует решение U_{F_n}, которое далее мы обозначаем через U_n, существует хотя бы одна подпоследовательность $\{F_{n_k}\}$, $F_{n_k} \to F^*$, для которой соответствующие решения U_{n_k} принадлежат K_l для всех $k \in \mathbb{N}$, где l — это выбранное число из множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Зафиксируем выбранное значение l, так как в противном случае последовательность $\{F_n\}$ не сходится к F^* при $n \to \infty$. Теперь рассмотрим для $\{U_{n_k}\} \subset K_l$ следующие неравенства с $k \in \mathbb{N}$ и фиксированным значением l:

$$U_{n_k} \in K_l, \quad \int\limits_\Omega \sigma_{ij}(U_{n_k})\varepsilon_{ij}(W - U_{n_k}) \geqslant \int\limits_\Omega F_{n_k}(W - U_{n_k}) \quad \forall W \in K_l. \tag{13}$$

После подстановки $W = 0$ в (13) получим

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(U_{n_k})\varepsilon_{ij}(U_{n_k}) \leqslant \int\limits_\Omega F_{n_k}U_{n_k} \leqslant \|F_{n_k}\|_{L^2(\Omega)^3}\|U_{n_k}\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

Так как множество $\mathcal{F}$ ограничено, последние неравенства вместе с (3) дают равномерную оценку

$$\|U_{n_k}\|_{H(\Omega)} \leqslant C.$$

Следовательно, можно выделить подпоследовательность $\{U_{n_k}\}$ (по-прежнему обозначаемую тем же индексом), слабо сходящуюся к некоторому U^* в $H(\Omega)$ при $k \to \infty$. Заметим, что K_l слабо замкнуто, так как оно выпукло и замкнуто. Это означает, что $U^* \in K_l$. При помощи теорем вложения заключаем, что $U_{n_k} \to U^*$ сильно в $L^2(\Omega)^3$ при $k \to \infty$.

Теперь приступим к анализу (13) при произвольной фиксированной функции $W \in K_l$. Имея в виду соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega F_{n_k}U_{n_k} = \int\limits_\Omega F^*U^*,$$

а также слабую полунепрерывность снизу билинейной формы

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(\cdot)\varepsilon_{ij}(\cdot),$$

обосновываем предельный переход при $k \to \infty$ в (13). В результате имеем

$$U_{n_k} \in K_l, \quad \int\limits_\Omega \sigma_{ij}(U^*)\varepsilon_{ij}(W - U^*) \geqslant \int\limits_\Omega F^*(W - U^*) \quad \forall W \in K_l. \tag{14}$$

Ввиду произвольности $W \in K_l$ в вариационном неравенстве (14) получаем, что $U^* = U_{F^*}$. Наконец, учитывая слабую сходимость $\{F_{n_k}\}$ и слабую полунепрерывность сверху функционала G, получаем

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} J_G(F) = \limsup_{n\to\infty} J_G(F_{n_k}) \leqslant J_G(F^*) = G(U_{F^*}) \leqslant \sup_{F\in\mathcal{F}} J_G(F).$$

Теорема доказана. □

Следующий результат позволяет улучшить качество сходимости $\{U_{n_k}\}$ к U^* при $k \to \infty$.

Теорема 2. *Подпоследовательность решений $\{U_{n_k}\}$, выбранная при доказательстве теоремы 1, сходится к U^* сильно в $H(\Omega)$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Можно показать, что U_{n_k} обладает следующим свойством:

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(U_{n_k})\varepsilon_{ij}(U_{n_k}) = \int\limits_\Omega F_{n_k}U_{n_k} \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Действительно, для этого достаточно сравнить два неравенства, полученные подстановкой в (13) тестовых функций двух типов, а именно, $W = 0$ и $W = 2U_{n_k}$. Аналогичное равенство выполняется для U^*:

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(U^*)\varepsilon_{ij}(U^*) = \int\limits_{\Omega} F^* U^*. \tag{16}$$

Учитывая, что $F_{n_k} \to F^*$ слабо в $L^2(\Omega)^3$ и $U_{n_k} \to U^*$ сильно в $L^2(\Omega)^3$, можем перейти к пределу в (15). В результате имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(U_{n_k})\varepsilon_{ij}(U_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} F_{n_k} U_{n_k} = \int\limits_{\Omega} F^* U^* = \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(U^*)\varepsilon_{ij}(U^*). \tag{17}$$

Вспоминая замечание (1), приходим к утверждению теоремы. □

Замечание 2. Заметим, что в формулировке основной задачи вместо разбиения плоскости на четыре сектора (квадранты плоскости) можно рассмотреть, вообще говоря, любое конечное разбиение плоскости осями на n секторов ($n \geqslant 3$), проходящими через начало координат. При этом количество вспомогательных задач также будет n. В этом случае можно сформулировать аналогичную задачу оптимального управления, доказать ее разрешимость и установить соответствующий результат о сильной сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лазарев Н. П., Федотов Е. Д.* Трёхмерная задача типа Синьорини для композитных тел, контактирующих острыми гранями жёстких включений// Челяб. физ.-мат. ж. — 2022. — *7*, № 4. — С. 412–423.
2. *Намм Р. В., Цой Г. И.* Решение контактной задачи теории упругости с жестким включением// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 4. — С. 699–706.
3. *Николаева Н. А.* О равновесии упругих тел с трещинами, пересекающими тонкие включения// Сиб. ж. индустр. мат. — 2019. — *22*, № 4. — С. 68–80.
4. *Попова Т. С.* Задача о контакте вязкоупругой пластины с упругой балкой// Сиб. ж. индустр. мат. — 2016. — *19*, № 3. — С. 41–54.
5. *Рудой Е. М., Хлуднев А. М.* Односторонний контакт пластины с тонким упругим препятствием// Сиб. ж. индустр. мат. — 2009. — *12*, № 2. — С. 120–130.
6. *Фурцев А. И.* О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение// Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2017. — *17*, № 4. — С. 94–111.
7. *Фурцев А. И.* Задача о контакте пластины и балки при наличии сцепления// Сиб. ж. индустр. мат. — 2019. — *22*, № 2. — С. 105–117.
8. *Хлуднев А. М.* Оптимальное управление пластиной над препятствием// Сиб. мат. ж. — 1990. — *31*, № 1. — С. 172–178.
9. *Хлуднев А. М., Попова Т. С.* Об иерархии тонких включений в упругих телах// Мат. заметки СВФУ. — 2016. — *23*, № 1. — С. 87–107.
10. *Andersson L. E., Klarbring A.* A review of the theory of elastic and quasistatic contact problems in elasticity// Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A. — 2001. — *359*. — P. 2519–2539.
11. *Fichera G.* Existence Theorems in Elasticity// in: Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity (*Truesdell C.*, eds.). — Berlin–Heidelberg: Springer, 1973. — P. 347—389.
12. *Homberg D., Khludnev A.* A thermoelastic contact problem with a phase transition// IMA J. Appl. Math. — 2006. — *71*, № 4. — P. 479–495.
13. *Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., Tani A.* Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity// Z. Angew. Math. Mech. — 2012. — *92*, № 9. — P. 716–730.
14. *Khludnev A. M.* Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions// Eur. J. Mech. A. Solids. — 2010. — *29*, № 3. — P. 392–399.
15. *Khludnev A. M.* Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies// Arch. Appl. Mech. — 2013. — *83*. — P. 1493–1509.
16. *Khludnev A. M., Hoffmann K. H., Botkin N. D.* The variational contact problem for elastic objects of different dimensions// Sib. Math. J. — 2006. — *47*. — P. 584–593.

17. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of Cracks in Solids. — Southampton–Boston: WIT-Press, 2000.
18. *Khludnev A., Leugering G.* On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks// Math. Meth. Appl. Sci. — 2010. — *33.* — P. 1955–1967.
19. *Kikuchi N., Oden J. T.* Contact Problems in Elasticity: Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. — Philadelphia: SIAM, 1988.
20. *Kovtunenko V. A.* Quasi-variational inequality for the nonlinear indentation problem: a power-law hardening model// Phil. Trans. Roy. Soc. A. — 2022. — *380*, № 2236. — 20210362.
21. *Lazarev N.* Inverse problem for cracked inhomogeneous Kirchhoff-Love plate with two hinged rigid inclusions// Boundary-Value Probl. — 2021. — № 1. — P. 88.
22. *Lazarev N. P., Kovtunenko V. A.* Signorini-type problems over non-convex sets for composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions// Mathematics. — 2022. — *10*, № 2. — P. 250.
23. *Pyatkina E. V.* A contact problem for two plates of the same shape glued along one edge of a crack// J. Appl. Ind. Math. — 2018. — *12*, № 2. — P. 334–346.
24. *Rademacher A., Rosin K.* Adaptive optimal control of Signorini's problem// Comput. Optim. Appl. — 2018. — *70.* — P. 531–569.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2023-947, соглашение от 16.02.2023).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Лазарев Нюргун Петрович
Северо-Восточный Федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск
E-mail: nyurgun@ngs.ru

Семенова Галина Михайловна
Северо-Восточный Федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск
E-mail: sgm.08@yandex.ru

Ефимова Елена Сергеевна
Северо-Восточный Федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск
E-mail: oslame@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 96–130
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-96-130

УДК 517.9; 531.01

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ. IV. СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ n-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2023 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе предъявлены тензорные инварианты (первые интегралы, дифференциальные формы) для динамических систем на касательных расслоениях к гладким n-мерным многообразиям отдельно при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, а также при любом конечном n. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — *227*. — С. 100–128. Вторая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — *228*. — С. 92–118. Третья часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — *229*. — С. 90–119.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC, POTENTIAL AND DISSIPATIVE SYSTEMS. IV. SYSTEMS ON TANGENTS BUNDLES OF n-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2023 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we present tensor invariants (first integrals and differential forms) for dynamical systems on the tangent bundles of smooth n-dimensional manifolds separately for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, and for any finite n. We demonstrate the connection between the existence of these invariants and the presence of a full set of first integrals that are necessary for integrating geodesic, potential, and dissipative systems. The force fields acting in systems considered make them dissipative (with alternating dissipation).

The first part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **227** (2023), pp. 100–128. The second part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **228** (2023), pp. 92–118. The third part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **229** (2023), pp. 90–119.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-07).

СОДЕРЖАНИЕ

4. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении n-мерного многообразия

Введение. В данном разделе представлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким n-мерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Как показано ранее, задача о движении $(n+1)$-мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, которое можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее $(n+1)$-мерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к n-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (т.е. имеющих существенно особые точки) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Такое же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n-мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n+1)$-мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n-мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского (например, в модели Клейна) и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Важные частные случаи систем с n степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора [72, 73]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем представлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким n-мерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [57, 58]). Показана связь наличия данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, n-мерного пространства Лобачевского. Указаны достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем рассмотрены системы с потенциальными полями сил специального вида, указаны достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. В заключение рассмотрено усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией, и указаны достаточные условия интегрируемости.

4.1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к n-мерному многообразию.

4.1.1. Координаты на касательном расслоении и коэффициенты связности. Рассмотрим гладкое n-мерное риманово многообразие $M^n\{\alpha,\beta\}$ с координатами (α,β), $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha,\beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^n\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\ldots,\dot\beta_{n-1};\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее достаточно общий случай задания новых кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot\alpha = z_n f_n(\alpha), \tag{4.1.1a}$$
$$\dot\beta_1 = z_{n-1} f_1(\alpha), \tag{4.1.1b}$$
$$\dot\beta_2 = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \tag{4.1.1c}$$
$$\dot\beta_3 = z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \tag{4.1.1d}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{4.1.1e}$$
$$\dot\beta_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}), \tag{4.1.1f}$$

где $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, …, z_n, в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических, например, с $n(n-1)+1$ ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на расслоении n-мерных поверхностей вращения, пространства Лобачевского и т. д.):

$$\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \tag{4.1.2a}$$
$$\ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \tag{4.1.2b}$$
$$\ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \tag{4.1.2c}$$
$$\begin{gathered}\ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 + \\ + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\end{gathered} \tag{4.1.2d}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{4.1.2e}$$
$$\begin{gathered}\ddot\beta_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2} + \\ + \ldots + \Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\end{gathered} \tag{4.1.2f}$$
$$\begin{gathered}\ddot\beta_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1} + \\ + \ldots + \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1} = 0;\end{gathered} \tag{4.1.2g}$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае кинематических соотношений (4.1.1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$, примут вид

$$\begin{gathered}\dot z_1 = -f_n(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] z_1 z_n - \\ - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] z_1 z_{n-1} - \\ - f_2(\alpha) g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] z_1 z_{n-2} - \ldots - \\ - f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] z_1 z_2,\end{gathered} \tag{4.1.3a}$$

$$\begin{aligned}\dot z_2 = &-f_n(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)+Df_{n-2}(\alpha)\right]z_2z_n-\\ &-f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)+Dg_{n-3}(\beta_1)\right]z_2z_{n-1}-\ldots-\\ &-f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)+Dr_1(\beta_{n-3})\right]z_2z_3-\\ &-\frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r^2_2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned}\tag{4.1.3b}$$

. . . .

$$\begin{aligned}\dot z_{n-1} = &-f_n(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)\right]z_{n-1}z_n-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z^2_{n-2}-\ldots-\\ &-\frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned}\tag{4.1.3c}$$

$$\begin{aligned}\dot z_n = &-f_n(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+Df_n(\alpha)\right]z_n^2-\\ &-\frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z^2_{n-1}-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z^2_{n-2}-\ldots-\\ &-\frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_n(\alpha)}g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2;\end{aligned}\tag{4.1.3d}$$

здесь, как и далее, $DQ(q) = d\ln|Q(q)|/dq$, и уравнения геодезических (4.1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (4.1.1) почти всюду эквивалентны составной системе (4.1.1), (4.1.3) на многообразии $TM^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ с новой частью координат $z_1,\ldots,z_n$ на касательном пространстве.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (4.1.2) (к системе (4.1.1), (4.1.3)).

(a) Системы на касательном расслоении к n-мерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$-мерного пространства; такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для движения динамически симметричного $(n+1)$-мерного твердого тела.
(b) Системы на касательных расслоениях более общих n-мерных поверхностей вращения.
(c) Системы на касательном расслоении n-мерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Отметим также, что в [50] рассмотрены примеры систем геодезических на касательном расслоении n-мерной сферы с различными метриками, а в [7] — примеры систем геодезических на расслоении n-мерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского.

4.1.2. О количествах «неизвестных» функций и условий, на них накладываемых. Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении n-мерного гладкого многообразия, то количество разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет равно $n^2(n+1)/2$. Ясно, что общая задача интегрирования уравнений геодезических весьма сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции, определяющие координаты на касательном расслоении (в нашем случае $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ из (4.1.1)).

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся лишь ненулевыми коэффициентами связности, формирующей уравнения геодезических (4.1.2); их количество равно $n(n-1)+1$. По этому числу выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении: их число равно $n(n-1)/2+1$. Таким образом, имеем $3n(n-1)/2+2$ функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Определим количество алгебраических и дифференциальных условий $(B(n))$, накладываемых на имеющиеся $A(n)=3n(n-1)/2+2$ функций и достаточных для полного интегрирования уравнений геодезических. Количество таких функциональных условий должно быть меньше $A(n)$, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(n)$, тем больше разность $A(n) - B(n)$ и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(n) = (n-1)^2 + n(n-1)/2 + 1$ условий на имеющиеся $A(n)$ функций. Число $B(n)$ складывается из трех слагаемых: $B(n) = B_1(n) + B_2(n) + B_3(n)$. Число $B_1(n)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$:

$$f_1(\alpha) \equiv \ldots \equiv f_{n-1}(\alpha) =: f(\alpha), \tag{4.1.4a}$$

$$g_1(\beta_1) \equiv \ldots \equiv g_{n-2}(\beta_1) =: g(\beta_1), \tag{4.1.4b}$$

$$h_1(\beta_2) \equiv \ldots \equiv h_{n-3}(\beta_2) =: h(\beta_2), \tag{4.1.4c}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$i_1(\beta_{n-2}) =: i(\beta_{n-2}), \tag{4.1.4d}$$

т.е. $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$. Число $B_2(n)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности:

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{\alpha, n-1}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \tag{4.1.5a}$$

$$\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{1, n-1}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1), \tag{4.1.5b}$$

$$\Gamma^3_{23}(\alpha, \beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{2, n-1}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_3(\beta_2), \tag{4.1.5c}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Gamma^{n-1}_{n-2, n-1}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{4.1.5d}$$

т.е. $B_2(n) = n(n-1)/2$. Число $B_3(n)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3, \ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$f_n^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)\right] + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha, \beta) \equiv 0, \tag{4.1.6a}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n^2(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha, n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] + \\ + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma^\alpha_{n-1, n-1}(\alpha, \beta) \equiv 0, \tag{4.1.6b}$$

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)\right] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha, \beta) \equiv 0, \tag{4.1.6c}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1, n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] + \\ + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma^1_{n-1, n-1}(\alpha, \beta) \equiv 0, \tag{4.1.6d}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{n-2}^2(\alpha) g_{n-3}^2(\beta_1) h_{n-4}^2(\beta_2) \ldots r_1^2(\beta_{n-3}) \left[2\Gamma^{n-1}_{n-2, n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] + \\ + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma^{n-2}_{n-1, n-1}(\alpha, \beta) \equiv 0, \tag{4.1.6e}$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_n(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \tag{4.1.6f}$$

т.е. $B_3(n) = n(n-1)/2 + 1$. Итак, в рассматриваемом случае

$$B(n) = B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = \\ = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 1,$$

при этом

$$A(n) - B(n) = \frac{3n(n-1)}{2} + 2 - (n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} - 1 = n,$$

что говорит об увеличении количества «произвольных» функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n — размерность рассматриваемого риманова многообразия.

Замечание 4.1. Пусть выполнены условия (4.1.4), (4.1.5), при этом реализуется система дифференциальных равенств (4.1.6). Тогда справедливы следующие тождества (их число равно $n(n-1)/2+1$):

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha), \quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1), \quad \ldots, \tag{4.1.7a}$$

$$\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{4.1.7b}$$

$$\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{22}(\beta_1), \quad \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2), \quad \ldots, \tag{4.1.7c}$$

$$\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{n-1,n-1}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{4.1.7d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\beta_{n-2}), \tag{4.1.7e}$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha), \tag{4.1.7f}$$

а также тождества (их число равно $(n-1)(n-2)/2$)

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha) \equiv g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1) \equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2) \equiv \ldots \equiv$$
$$\equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =: \Gamma_n(\alpha), \tag{4.1.8a}$$

$$\Gamma^1_{22}(\beta_1) \equiv h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2) \equiv \ldots \equiv h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{4.1.8b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{4.1.8c}$$

$$\Gamma^{n-3}_{n-2,n-2}(\beta_{n-3}) \equiv i^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-3}_{n-1,n-1}(\beta_{n-3},\beta_{n-2}). \tag{4.1.8d}$$

Доказательство. В условиях замечания первая группа из первых $n-1$ равенств из (4.1.6) переписывается в виде

$$f_n^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] + f^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{4.1.9a}$$

$$f_n^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{4.1.9b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0. \tag{4.1.9c}$$

Из (4.1.9) следуют тождества (4.1.7a) и (4.1.7b) и тождества (4.1.8a). Далее, в условиях замечания вторая группа из $n-2$ равенств (4.1.6) переписывается в виде

$$\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] + g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{4.1.10a}$$

$$\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] + g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{4.1.10b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] + g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0. \tag{4.1.10c}$$

Из (4.1.10) следуют тождества (4.1.7c) и (4.1.7d) и тождества (4.1.8b) и т. д. Наконец, в условиях замечания $(n-1)$-я группа, состоящая из одного равенства (4.1.6e), переписывается в виде

$$\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})\right] + i^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0. \tag{4.1.11}$$

Отсюда следует тождество (4.1.7e), а из (4.1.6f) следует (4.1.7f). □

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 4.1.

Замечание 4.2. Пусть выполнены условия (4.1.4), (4.1.5), при этом реализуются $(n-1)^2+1$ тождеств (4.1.7) и (4.1.8). Тогда система дифференциальных равенств (4.1.6) принимает следующий вид:

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha) \equiv g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1) \equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2) \equiv \ldots \equiv$$
$$\equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =: \Gamma_n(\alpha), \tag{4.1.12a}$$

$$\Gamma^1_{22}(\beta_1) \equiv h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2) \equiv \ldots \equiv h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{4.1.12b}$$

. . . .

$$\Gamma^{n-3}_{n-2,n-2}(\beta_{n-3}) \equiv i^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-3}_{n-1,n-1}(\beta_{n-3},\beta_{n-2}), \quad \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha) + \frac{d\ln|f_n(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \tag{4.1.12c}$$

$$f_n^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] + f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha) \equiv 0, \tag{4.1.12d}$$

$$2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) + g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1) \equiv 0, \tag{4.1.12e}$$

. . . .

$$2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2}) + i^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\beta_{n-2}) \equiv 0. \tag{4.1.12f}$$

Таким образом, при выполнении $(n-1)^2$ условий (4.1.4), (4.1.5) условия (4.1.6) (в количестве $n(n-1)/2+1$) и условие (4.1.12) (в количестве $n(n-1)/2+1$) эквивалентны в упомянутом смысле.

4.1.3. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы порядка $2n$ достаточно знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (4.1.1), (4.1.3) достаточно знать $n+1$ независимых тензорных инвариантов: или $n+1$ первых интегралов, или $n+1$ независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинацию из интегралов и форм общим количеством $n+1$. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (4.1.2), записанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{4.1.13}$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x};x) = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k, \tag{4.1.14}$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии. Подчеркнем, что в следующей теореме 4.1 (которая справедлива и при более общих условиях) накладывается $(n-1)^2 + n(n-1)/2 + 1$ алгебраических и дифференциальных соотношений (4.1.4), (4.1.5), (4.1.12) на $3n(n-1)/2+1$ функций: на $n(n-1)/2+1$ функций $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ из (4.1.1) и на $n(n-1)+1$, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ из (4.1.2).

Теорема 4.1. *Если выполнены условия* (4.1.4), (4.1.5), (4.1.12), *то система* (4.1.1), (4.1.3) *обладает полным набором, состоящим из $n+1$ первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_n,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 = C_1^2 = \mathrm{const}, \tag{4.1.15}$$

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{4.1.16}$$

$$\Phi_3(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{4.1.17}$$

. . . .

$$\Phi_n(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}, \tag{4.1.18}$$

$$\Phi_{n+1}(\beta_{n-2},\beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\,db = C_{n+1} = \mathrm{const}, \tag{4.1.19}$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}, \tag{4.1.20}$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}, \quad \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\Gamma_{n-1}(b)db\right\}. \tag{4.1.21}$$

Более того, после замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_n(\alpha)\frac{d}{d\tau} \tag{4.1.22}$$

и фазовых переменных

$$\begin{gathered} w_n = z_n,\ w^*_{n-1} = \ln|w_{n-1}|, \quad w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}, \\ w^*_s = \ln\left|w_s + \sqrt{1+w_s^2}\right|, \quad s = 1,\ldots,n-2, \\ w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}, \quad \ldots, \quad w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}} \end{gathered} \tag{4.1.23}$$

фазовый поток системы (4.1.1), (4.1.3) *сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении* $TM^n\{w_n, w^*_{n-1}, \ldots, w^*_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$, *т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма*

$$dw_n \wedge dw^*_{n-1} \wedge \ldots \wedge dw^*_1 \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge \ldots \wedge d\beta_{n-1}. \tag{4.1.24}$$

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 4.1, а именно, сделаем замены (4.1.22) независимой переменной и (4.1.23) фазовых переменных. Тогда система (4.1.1), (4.1.3) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_n, \\ \dot w_n = -\dfrac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)e^{2w^*_{n-1}}, \\ \dot w^*_{n-1} = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_n, \end{cases} \tag{4.1.25}$$

$$\begin{cases} \dot w^*_s = e^{w^*_{n-1}}\Xi_s\big(w^*_{s-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}\big)\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \dfrac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right], \\ \dot\beta_s = e^{w^*_{n-1}}\Xi_s\big(w^*_{s-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}\big)\dfrac{W_s(w^*_s)}{\sqrt{1+W_s^2(w^*_s)}}, \quad s = 1,\ldots,n-2, \end{cases} \tag{4.1.26}$$

$$\dot\beta_{n-1} = \pm\frac{e^{w^*_{n-1}}}{\sqrt{(1+W_1^2(w^*_1))\ldots(1+W_{n-2}^2(w^*_{n-2}))}}\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{4.1.27}$$

где

$$\begin{gathered} \Xi_s\big(w^*_{s-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}\big) = \pm\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots j(\beta_{s-1})\times \\ \times\frac{1}{\sqrt{(1+W_1^2(w^*_1))\ldots(1+W_{s-1}^2(w^*_{s-1}))}}, \quad s = 1,\ldots,n-2, \end{gathered} \tag{4.1.28}$$

и $w_s = W_s(w^*_s)$ в силу замены (4.1.23); при этом в составной системе (4.1.25)–(4.1.27) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ. При этом $j(\beta_s)$ — функция от соответствующего угла β_s (например, $f(\alpha)$, $g(\beta_1)$, …, $i(\beta_{n-2})$). В явном виде

$$\begin{aligned}
&\Xi_1(\alpha) = \pm\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)},\\
&\Xi_2(w_1^*;\alpha,\beta_1) = \pm\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)\frac{1}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}},\\
&\Xi_3(w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2) = \pm\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2)\frac{1}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))(1+W_2^2(w_2^*))}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\Xi_{n-2}(w_{n-3}^*,\dots,w_1^*;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-3}) = \pm\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2)\dots r(\beta_{n-3})\times\\
&\qquad\qquad\times\frac{1}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))\dots(1+W_{n-3}^2(w_{n-3}^*))}}.
\end{aligned}\tag{4.1.29}$$

Видно, что дивергенция правой части составной системы (4.1.25)–(4.1.27) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании $n+1$ первых интегралов. Дифференцирование функции (4.1.15) в силу системы (4.1.1), (4.1.3) дает

$$\begin{aligned}
&-2f_n(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_n(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_n^3-2\Big[f_n^2(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\Big]\frac{z_{n-1}^2z_n}{f_n(\alpha)}-\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-2\Big[f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma_{\alpha,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)\Big]+\\
&\qquad+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta)\Big]\frac{z_1^2z_n}{f_n(\alpha)}-\\
&\qquad-2\Big[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)\Big]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\Big]\frac{z_{n-2}^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-2\Big[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma_{1,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]+\\
&\qquad+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1,n-1}^{1}(\alpha,\beta)\Big]\frac{z_1^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-2\Big[f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\dots r_1^2(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma_{n-2,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\Big]+\\
&\qquad+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta)\Big]\times\\
&\qquad\times\frac{z_1^2z_2}{f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\dots r_1(\beta_{n-3})}\equiv 0,
\end{aligned}$$

если выполнена система дифференциальных равенств (4.1.6). Но, как указано выше, при выполнении $(n-1)^2$ условий (4.1.4), (4.1.5) $n(n-1)/2+1$ условий (4.1.6) и $n(n-1)/2+1$ условий (4.1.12) в известном смысле эквивалентны.

Далее, дифференцирование функции (4.1.16) в силу системы (4.1.1), (4.1.3) в условиях теоремы дает

$$-f_n(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (4.1.16).

Дифференцирование функции (4.1.17) в силу системы (4.1.1), (4.1.3) в условиях теоремы дает

$$-f_n(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\,\Psi_1(\beta_1) -$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\} z_{n-1}f(\alpha)\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\,\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (4.1.17).

В дальнейшем по предположению индукции считаем, что в условиях теоремы доказано существование первого интеграла вида

$$\Phi_{n-1}(z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-3}) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-3}(\beta_{n-3}) = C_{n-1} = \mathrm{const}\,. \tag{4.1.30}$$

Дифференцирование функции (4.1.18) в силу системы (4.1.1), (4.1.3) в условиях теоремы дает

$$-f_n(\alpha)z_1z_n\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right] +$$
$$+ z_1z_{n-1}f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) + \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right] +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ z_1z_2f(\alpha)g(\beta_1)\ldots r(\beta_{n-3})\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-3}(\beta_{n-3})\times$$
$$\times\left[(-1)^n\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) + (-1)^{n+1}\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ …, $\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}} = \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (4.1.18).

Наконец, рассмотрим два уровня C_{n-1} и C_n первых интегралов (4.1.30) и (4.1.18) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_n}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - C_n^2}}. \tag{4.1.31}$$

Будем искать угол β_{n-1} из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{z_1}{z_2}i(\beta_{n-2}).$$

Используя равенство (4.1.31), получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (4.1.19). Теорема доказана. □

Заметим также, что систему равенств (4.1.6) (или (4.1.12)) можно трактовать как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (4.1.15) (или см. ниже (4.2.2)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работу [3, 7]). Поиск первого интеграла (4.1.15) и интегралов (4.1.16)–(4.1.19) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Пример 4.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, когда метрика на n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$-мерного пространства (задача класса (a)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot\alpha - \Big[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 + \ldots + \\ + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2}\Big]\sin\alpha\cos\alpha = 0, \tag{4.1.32a}$$

$$\ddot\beta_1 + 2\dot\alpha\dot\beta_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \Big[\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_2\sin^2\beta_3 + \ldots + \\ + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-2}\Big]\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \tag{4.1.32b}$$

$$\ddot\beta_2 + 2\dot\alpha\dot\beta_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \Big[\dot\beta_3^2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_3 + \dot\beta_5^2\sin^2\beta_3\sin^2\beta_4 + \ldots + \\ + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-2}\Big]\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0, \tag{4.1.32c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\ddot\beta_{n-2} + 2\dot\alpha\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + \\ + 2\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} - \dot\beta_{n-1}^2\sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-2} = 0, \tag{4.1.32d}$$

$$\ddot\beta_{n-1} + 2\dot\alpha\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}} = 0 \tag{4.1.32e}$$

и имеющая первые интегралы (4.1.15)–(4.1.19), примет следующий вид:

$$\dot\alpha = -z_n, \tag{4.1.33a}$$

$$\dot z_n = -(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \tag{4.1.33b}$$

$$\dot z_{n-1} = z_{n-1}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{4.1.33c}$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_{n-2}z_{n-1}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{4.1.33d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot z_1 = z_1z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + \\ + z_1\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s+1}z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{4.1.33e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{4.1.33f}$$

$$\dot\beta_2 = -z_{n-2}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{4.1.33g}$$

....

$$\dot\beta_{n-1} = (-1)^n z_1\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}},\ \nu_1\in\mathbb{R}, \tag{4.1.33h}$$

если первое уравнение и группу последних $n-1$ уравнений системы (4.1.33) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 4.2. В обобщенных сферических координатах $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$, если метрика на n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (задача класса (а)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot\alpha - \left[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \tag{4.1.34a}$$

$$\begin{gathered}\ddot\beta_1 + \dot\alpha\dot\beta_1\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - \Big[\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2 + \\ + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_2\sin^2\beta_3 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-2}\Big]\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,\end{gathered} \tag{4.1.34b}$$

$$\begin{gathered}\ddot\beta_2 + \dot\alpha\dot\beta_2\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \Big[\dot\beta_3^2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_3 + \\ + \dot\beta_5^2\sin^2\beta_3\sin^2\beta_4 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-2}\Big]\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0,\end{gathered} \tag{4.1.34c}$$

....

$$\begin{gathered}\ddot\beta_{n-2} + \dot\alpha\dot\beta_{n-2}\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} - \\ - \dot\beta_{n-1}^2\sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-2} = 0,\end{gathered} \tag{4.1.34d}$$

$$\ddot\beta_{n-1} + \dot\alpha\dot\beta_{n-1}\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}} = 0 \tag{4.1.34e}$$

и имеющая первые интегралы (4.1.15)–(4.1.19), примет следующий вид:

$$\dot\alpha = -z_n, \tag{4.1.35a}$$

$$\dot z_n = -(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \tag{4.1.35b}$$

$$\dot z_{n-1} = z_{n-1}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + (z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{4.1.35c}$$

$$\begin{gathered}\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - (z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\end{gathered} \tag{4.1.35d}$$

....

$$\begin{gathered}\dot z_1 = z_1z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + \\ + z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s+1}z_{n+1-s}\,\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\},\end{gathered} \tag{4.1.35e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{4.1.35f}$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{4.1.35g}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = (-1)^n z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R}, \tag{4.1.35h}$$

если первое и группу последних $n-1$ уравнений системы (4.1.35) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 4.3. В случае n-мерного пространства Лобачевского (с координатами $x_1 = \beta_1$, ..., $x_{n-1} = \beta_{n-1}$, $y = \alpha$, задача класса (c)) n-параметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\left(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2 - \ldots - \dot{\beta}_{n-1}^2\right) = 0, \quad \ddot{\beta}_1 - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 = 0, \quad \ldots, \quad \ddot{\beta}_{n-1} - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} = 0 \tag{4.1.36}$$

и имеющая первые интегралы (4.1.15)–(4.1.19), примет следующий вид:

$$\dot{\alpha} = z_n\nu_1\alpha, \tag{4.1.37a}$$

$$\dot{z}_n = -z_{n-1}^2\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2} - \ldots - z_1^2\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_n}, \tag{4.1.37b}$$

$$\dot{z}_{n-1} = z_{n-1}z_n\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}, \tag{4.1.37c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{z}_1 = z_1 z_n\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_n}, \tag{4.1.37d}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}\frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}}, \tag{4.1.37e}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1\frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_n}}, \quad \nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{R}, \tag{4.1.37f}$$

если первое и группу последних $n-1$ уравнений системы (4.1.37) рассматривать как новые кинематические соотношения.

4.2. Инварианты систем на касательном расслоении к n-мерному многообразию в потенциальном силовом поле.

4.2.1. Введение внешнего потенциального силового поля. Теперь несколько модифицируем составную динамическую систему (4.1.1), (4.1.3) и получим систему *консервативную*. Именно, внесем с систему гладкое (внешнее) консервативное силовое поле со следующими проекциями на оси $\dot{z}_1$, ..., $\dot{z}_n$:

$$\tilde{F}(z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}) \\ F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}) \\ \vdots \\ F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_n(\alpha)f_n(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ примет следующий вид:

$$\dot\alpha = z_n f_n(\alpha), \tag{4.2.1a}$$

$$\begin{aligned}\dot z_n = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f_n(\alpha)\big[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)\big]z_n^2 -\\ - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_{n-1}^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots -\\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{4.2.1b}$$

$$\begin{aligned}\dot z_{n-1} = F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n -\\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots -\\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{4.2.1c}$$

. . . .

$$\begin{aligned}\dot z_2 = F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}) -\\ - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2z_n -\\ - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2z_{n-1} - \ldots -\\ - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2z_3 -\\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{4.2.1d}$$

$$\begin{aligned}\dot z_1 = F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}) -\\ - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1z_n -\\ - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]z_1z_{n-1} -\\ - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]z_1z_{n-2} - \ldots -\\ - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big]z_1z_2,\end{aligned} \tag{4.2.1e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{4.2.1f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{4.2.1g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{4.2.1h}$$

. . . . ,

$$\dot\beta_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}), \tag{4.2.1i}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned}&\ddot\alpha - F_n(\alpha)f_n^2(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\ &\ddot\beta_1 - F_{n-1}(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\ &\ddot\beta_2 - F_{n-2}(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 +\\ &\qquad + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\ &\ddot\beta_3 - F_{n-3}(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h_1^2(\beta_2) + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 +\\ &\qquad + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\end{aligned}$$

. . . . ,

$$
\begin{gathered}
\ddot\beta_{n-2} - F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\dots r_1^2(\beta_{n-3}) + \\
+ 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2} + \ldots + \\
+ \Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \\
\ddot\beta_{n-1} - F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) + \\
+ 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1} + \ldots + \\
+ \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1} = 0
\end{gathered}
$$

на касательном расслоении $TM^n\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\ldots,\dot\beta_{n-1};\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$.

4.2.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы (4.2.1) порядка $2n$ достаточно знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (4.2.1) достаточно знать $n+1$ независимых тензорных инвариантов: или $n+1$ первых интегралов, или $n+1$ независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством $n+1$. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже. Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 4.2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются $(n-1)^2+n(n-1)/2+1$ алгебраических и дифференциальных соотношений (4.1.4), (4.1.5), (4.1.12) на $3n(n-1)/2+1$ функций: на $n(n-1)/2+1$ функций $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ и на $n(n-1)+1$, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Теорема 4.2. *Если выполнены условия* (4.1.4), (4.1.5), (4.1.12), *то система* (4.2.1) *обладает полным набором, состоящим из $n+1$ первых интегралов*

$$
\Phi_1(z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = z_1^2+\ldots+z_n^2+V(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = C_1 = \mathrm{const},
$$

$$
V(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = V_n(\alpha)+\sum_{k=1}^{n-1}V_{n-k}(\beta_k) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F_n(a)da - 2\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\beta_{k,0}}^{\beta_k}F_{n-k}(b)db, \tag{4.2.2}
$$

а также, для простоты, при $F_{n-k}(\beta_k)\equiv 0$, $k=1,\ldots,n-1$, — первых интегралов (4.1.16)–(4.1.19). *Более того, после замен независимой переменной* (4.1.22) *и фазовых пеперменных* (4.1.23) — *фазовый поток системы* (4.2.1) *сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^n\{w_n,w^*_{n-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма* (4.1.24).

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 4.2, а именно, сделаем замены независимой переменной (4.1.22) и фазовых переменных (4.1.23). Тогда система (4.2.1) распадается следующим образом:

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = w_n, \\
\dot w_n = F_n(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)e^{2w^*_{n-1}}, \\
\dot w^*_{n-1} = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_n,
\end{cases} \tag{4.2.3}
$$

$$
\begin{cases}
\dot w^*_s = e^{w^*_{n-1}}\Xi_s\big(w^*_{s-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}\big)\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s)+\dfrac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right], \\
\dot\beta_s = e^{w^*_{n-1}}\Xi_s\big(w^*_{s-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}\big)\dfrac{W_s(w^*_s)}{\sqrt{1+W_s^2(w^*_s)}}, \quad s=1,\ldots,n-2,
\end{cases} \tag{4.2.4}
$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \pm\frac{e^{w^*_{n-1}}}{\sqrt{\left(1+W_1^2(w_1^*)\right)\ldots\left(1+W_{n-2}^2(w_{n-2}^*)\right)}}\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{4.2.5}$$

где

$$\Xi_s\left(w^*_{s-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}\right) = \pm\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots j(\beta_{s-1})\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(1+W_1^2(w_1^*)\right)\ldots\left(1+W_{s-1}^2(w_{s-1}^*)\right)}},\quad s=1,\ldots,n-2, \tag{4.2.6}$$

и $w_s = W_s(w^*_s)$ в силу замены (4.1.23); при этом в составной системе (4.2.3)–(4.2.5) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ. При этом $j(\beta_s)$ — функция от соответствующего угла β_s (например, $f(\alpha)$, $g(\beta_1)$, …, $i(\beta_{n-2})$). При этом, более явно,

$$\begin{gathered}
\Xi_1(\alpha) = \pm\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)},\\
\Xi_2(w_1^*;\alpha,\beta_1) = \pm\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)\frac{1}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}},\\
\Xi_3(w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2) = \pm\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2)\frac{1}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))(1+W_2^2(w_2^*))}},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Xi_{n-2}(w^*_{n-3},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}) =\\
= \pm\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})\frac{1}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))\ldots(1+W_{n-3}^2(w_{n-3}^*))}}.
\end{gathered} \tag{4.2.7}$$

Видно, что дивергенция правой части составной системы (4.2.3)–(4.2.5) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании $n+1$ первого интеграла; при этом доказательство существования интегралов (4.1.16)–(4.1.19) проводится так же, как в теореме 4.1. Дифференцирование функции (4.2.2) в силу системы (4.2.1) дает

$$\begin{gathered}
2z_nF_n(\alpha)f_n(\alpha) + 2z_{n-1}F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha)+\\
+2z_{n-2}F_{n-2}(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) + 2z_{n-3}F_{n-3}(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2)+\ldots+\\
+2z_2F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})+\\
+2z_1F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}) - 2f_n(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_n(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_n^3-\\
-2\left[f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)\Big]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]\frac{z^2_{n-1}z_n}{f_n(\alpha)}-\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-2\Bigg[f_n^2(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)\right]+\\
+f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Bigg]\frac{z_1^2z_n}{f_n(\alpha)}-\\
-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z^2_{n-2}z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\right]+\right.\\
\left.+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-2\left[f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\right]+\right.\\
\left.+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\right]\times\\
\times\frac{z_1^2z_2}{f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})}-\\
-2z_nF_n(\alpha)f_n(\alpha)-2z_{n-1}F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha)-2z_{n-2}F_{n-2}(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1)-\\
-2z_{n-3}F_{n-3}(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2)-\ldots-2z_2F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})-\\
-2z_1F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2})\equiv 0,
\end{gathered}
$$

если выполнена система дифференциальных равенств (4.1.6). Но, как указано выше, при выполнении $(n-1)^2$ условий (4.1.4), (4.1.5) $n(n-1)/2+1$ условий (4.1.6) и $n(n-1)/2+1$ условий (4.1.12) в известном смысле эквивалентны. Теорема доказана. □

4.3. Инварианты систем на касательном расслоении к n-мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией.

4.3.1. Введение внешнего силового поля со знакопеременной диссипацией. Несколько модифицировав систему (4.2.1), получим систему *с диссипацией*. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b>0$, в первом уравнении системы (4.3.1) (в отличие от системы (4.2.1)), но и следующая линейная зависимость гладкого (внешнего) силового поля от $z_1,\ldots,z_n$ в проекциях на оси $\dot z_1,\ldots,\dot z_n$ соответственно:

$$
\tilde F(z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})=
$$
$$
=\begin{pmatrix}
F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2})\\
F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\\
\vdots\\
F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha)\\
F_n(\alpha)f_n(\alpha)
\end{pmatrix}+
\begin{pmatrix}
z_1F_1^1(\alpha)\\
z_2F_2^1(\alpha)\\
\vdots\\
z_{n-1}F_{n-1}^1(\alpha)\\
z_nF_n^1(\alpha)
\end{pmatrix}.
$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ примет вид

$$
\dot\alpha=z_nf_n(\alpha)+b\delta(\alpha), \tag{4.3.1a}
$$

$$
\begin{gathered}
\dot z_n=F_n(\alpha)f_n(\alpha)-f_n(\alpha)\Big[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+Df_n(\alpha)\Big]z_n^2-\\
\frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_{n-1}^2-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2-\ldots-\\
-\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2+z_nF_n^1(\alpha),
\end{gathered}\tag{4.3.1b}
$$

$$\dot{z}_{n-1} = F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) -$$
$$- f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\Big] z_{n-1}z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_{n-2}^2 - \ldots -$$
$$- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_{n-1}F^1_{n-1}(\alpha), \tag{4.3.1c}$$

....

$$\dot{z}_2 = F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}) -$$
$$- f_n(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] z_2 z_n -$$
$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] z_2 z_{n-1} - \ldots -$$
$$- f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right] z_2 z_3 -$$
$$- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F^1_2(\alpha), \tag{4.3.1d}$$

$$\dot{z}_1 = F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}) -$$
$$- f_n(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] z_1 z_n -$$
$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] z_1 z_{n-1} -$$
$$- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] z_1 z_{n-2} - \ldots -$$
$$- f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] z_1 z_2 + z_1 F^1_1(\alpha), \tag{4.3.1e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{4.3.1f}$$
$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{4.3.1g}$$
$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{4.3.1h}$$

....

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}), \tag{4.3.1i}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot{\alpha} - \Big\{b\tilde{\delta}(\alpha) + F^1_n(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)\right]\Big\}\dot{\alpha} -$$
$$- F_n(\alpha)f_n^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F^1_n(\alpha) + b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)\right] +$$
$$+ \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$
$$\ddot{\beta}_1 - \left\{F^1_{n-1}(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right]\right\}\dot{\beta}_1 - F_{n-1}(\beta_1)f_1^2(\alpha) +$$
$$+ 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$
$$\ddot{\beta}_2 - \left\{F^1_{n-2}(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right]\right\}\dot{\beta}_2 -$$
$$- F_{n-2}(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 +$$
$$+ \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$
$$\ddot{\beta}_3 - \left\{F^1_{n-3}(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + Df_3(\alpha)\right]\right\}\dot{\beta}_3 -$$
$$- F_{n-3}(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h_1^2(\beta_2) + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 +$$
$$+ 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

....,

$$
\begin{gathered}
\ddot\beta_{n-2}-\Big\{F_2^1(\alpha)+b\delta(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)+Df_{n-2}(\alpha)\Big]\Big\}\dot\beta_{n-2}-\\
-F_2(\beta_{n-2})f^2_{n-2}(\alpha)g^2_{n-3}(\beta_1)h^2_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})+\\
+2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-2}+2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}+\ldots+\\
+\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1}=0,\\
\ddot\beta_{n-1}-\Big\{F_1^1(\alpha)+b\delta(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)\Big]\Big\}\dot\beta_{n-1}-\\
-F_1(\beta_{n-1})f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})+2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-1}+\\
+2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1}+\ldots+\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1}=0
\end{gathered}
$$

на касательном расслоении $TM^n\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\ldots,\dot\beta_{n-1};\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$. Здесь $\tilde\delta(\alpha)=d\delta(\alpha)/d\alpha$.

4.3.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы (4.3.1) порядка $2n$ достаточно знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (4.3.1) достаточно знать $n+1$ независимых тензорных инвариантов: или $n+1$ первых интегралов, или $n+1$ независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством $n+1$. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 4.3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются $(n-1)^2+n(n-1)/2+1$ алгебраических и дифференциальных соотношений (4.1.4), (4.1.5), (4.1.12) на $3n(n-1)/2+1$ функций: на $n(n-1)/2+1$ функций $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ и на $n(n-1)+1$, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (4.3.1) порядка $2n$ при выполнении свойств (4.1.4), (4.1.5), (4.1.12), а также при равенстве нулю проекций внешней силы на оси $\dot z_1$, …, $\dot z_{n-1}$ (т.е. отлична от нуля лишь проекция внешней силы на ось $\dot z_n$):

$$F_1(\beta_{n-1})\equiv\ldots\equiv F_{n-1}(\beta_1)\equiv 0. \tag{4.3.2}$$

Тогда система (4.3.1) допускает отделение независимой подсистемы седьмого порядка:

$$\dot\alpha=z_nf_n(\alpha)+b\delta(\alpha), \tag{4.3.3a}$$

$$
\begin{multlined}
\dot z_n=F_n(\alpha)f_n(\alpha)-\frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z^2_{n-1}-\frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2-\ldots-\\
-\frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2+z_nF_n^1(\alpha),
\end{multlined}
\tag{4.3.3b}
$$

$$
\begin{multlined}
\dot z_{n-1}=-f_n(\alpha)\Big[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n-f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)z^2_{n-2}-\ldots-\\
-f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2+z_{n-1}F^1_{n-1}(\alpha),
\end{multlined}
\tag{4.3.3c}
$$

. . . .

$$
\begin{multlined}
\dot z_2=-f_n(\alpha)\Big[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)\Big]z_2z_n-f(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)\Big]z_2z_{n-1}-\ldots-\\
-f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})+Dr(\beta_{n-3})\Big]z_2z_3-\\
-f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\beta_{n-2})z_1^2+z_2F_2^1(\alpha),
\end{multlined}
\tag{4.3.3d}
$$

$$
\begin{multlined}
\dot z_1=-f_n(\alpha)\Big[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)\Big]z_1z_n-f(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)\Big]z_1z_{n-1}-\\
-f(\alpha)g(\beta_1)\Big[2\Gamma_3(\beta_2)+Dh(\beta_2)\Big]z_1z_{n-2}-\ldots-\\
-f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+Di(\beta_{n-2})\Big]z_1z_2+z_1F_1^1(\alpha),
\end{multlined}
\tag{4.3.3e}
$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1} f(\alpha), \tag{4.3.3f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1), \tag{4.3.3g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \tag{4.3.3h}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot\beta_{n-2} = z_2 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3}), \tag{4.3.3i}$$

при наличии также последнего уравнения

$$\dot\beta_{n-1} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}). \tag{4.3.4}$$

Далее, наложим определенные ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому предположим, что выполнены следующие равенства:

$$F_1^1(\alpha) \equiv \dots \equiv F_{n-1}^1(\alpha) =: F^1(\alpha). \tag{4.3.5}$$

Для полного интегрирования (по Якоби) рассматриваемой системы (4.3.3), (4.3.4) при условии (4.3.5) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{gathered} w_n = z_n, \quad w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}, \quad w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1}, \\ w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad \dots, \quad w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}} \end{gathered} \tag{4.3.6}$$

система (4.3.3), (4.3.4) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot w_n = F_n(\alpha) f_n(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) w_{n-1}^2 + w_n F_n^1(\alpha), \\ \dot w_{n-1} = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) w_{n-1} w_n + w_{n-1} F^1(\alpha), \end{cases} \tag{4.3.7}$$

$$\begin{cases} \dot w_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1}) \dfrac{1 + w_s^2}{w_s} f(\alpha) g(\beta_1) \widetilde{\dots} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \dfrac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \dot\beta_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1}) f(\alpha) g(\beta_1) \widetilde{\dots}, \quad s = 1, \dots, n-2, \end{cases} \tag{4.3.8}$$

$$\dot\beta_{n-1} = \mathcal{Z}_1(w_1, \dots, w_{n-1}) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}), \tag{4.3.9}$$

где в системах (4.3.8) символом $\widetilde{\dots}$ показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \dots$, зависящая от соответствующего угла β_s, при этом

$$\mathcal{Z}_k(w_1, \dots, w_{n-1}) \equiv z_k, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

— функции в силу замены (4.3.6).

Видно, что для полной интегрируемости системы (4.3.7)–(4.3.9) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (4.3.7), по одному — для систем (4.3.8) (после соответствующих замен независимого переменного в них, таких систем $n-2$ штуки) и дополнительный тензорный инвариант, «привязывающий» уравнение (4.3.9) (т.е. всего $n+1$ инвариантов).

Наложим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \tag{4.3.10}$$

где $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$, $\Delta(\alpha) = \delta(\alpha)/f_n(\alpha)$, а для некоторых $\lambda_n^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} &F_n(\alpha) = \lambda_n^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_n^0 \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha), \\ &F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_n(\alpha) \frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_n(\alpha), \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Условие (4.3.10) назовем «геометрическим», а условия из группы (4.3.11) — «энергетическими». При этом $\lambda_1^1 = \ldots = \lambda_{n-1}^1 =: \lambda^1$ в силу (4.3.5). Условие (4.3.10) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_n(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условия группы (4.3.11) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую *(знако)переменную диссипацию.*

Теорема 4.3. *Пусть выполняются условия* (4.3.10) *и* (4.3.11). *Тогда система* (4.3.7)–(4.3.9) *обладает* $n+1$ *независимыми, вообще говоря, трансцендентными* (см. [24]) (*т.е. имеющими существенно особые точки*) *первыми интегралами.*

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 4.3 для начала сопоставим системе третьего порядка (4.3.7) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_n}{d\alpha} = \dfrac{F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}^2/f_n(\alpha) + w_n F_n^1(\alpha)}{w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}w_n/f_n(\alpha) + w_{n-1}F^1(\alpha)}{w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{4.3.12}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_n = u_2\Delta(\alpha), \quad w_{n-1} = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_n(\alpha)}, \tag{4.3.13}$$

приводим систему (4.3.12) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \dfrac{F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_n(\alpha) + \Delta(\alpha)F_n^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_n(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \tag{4.3.14}$$

что, учитывая (4.1.12), почти всюду эквивалентно

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\Bigg[F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\dfrac{\Delta^2(\alpha)u_1^2}{f_n(\alpha)} - \\ \qquad\qquad - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + \Big[\Delta(\alpha)F_n^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_2\Bigg], \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\Bigg[\Big[f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\dfrac{\Delta^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_1u_2 + \\ \qquad\qquad + \Big[\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_1\Bigg]; \end{cases} \tag{4.3.15}$$

напомним, что $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$.

Теперь для интегрирования системы (4.3.15) потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (4.3.10) и (4.3.11). Действительно, после их выполнения система (4.3.15) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_n^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_n^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1 u_2 + (\lambda^1 - b)u_1}. \tag{4.3.16}$$

Уравнение (4.3.16) имеет вид уравнения Абеля (см. [10]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$ данное уравнение имеет первый интеграл

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_n^0}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{4.3.17}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \frac{f_n^2(\alpha)(w_n^2 + w_{n-1}^2) + (b - \lambda^1)w_n\delta(\alpha)f_n(\alpha) - \lambda_n^0\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)f_n(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{4.3.18}$$

Замечание 4.3. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (4.3.7) (как часть системы (4.3.7)–(4.3.9)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. Если же α не является периодической координатой, то в данном случае имеем систему со знакопеременной диссипацией. При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (4.1.12), геометрического и энергетических условий (4.3.10), (4.3.11) (но при любой гладкой функции $F_n(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_n^1 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot w_n = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - \kappa f_n(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_{n-1}^2 - bw_n f_n(\alpha)\tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w_{n-1} = \kappa f_n(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_{n-1}w_n - bw_{n-1}f_n(\alpha)\tilde\Delta(\alpha). \end{cases} \tag{4.3.19}$$

Действительно, система (4.3.19) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1}^2 + w_n^2 + 2bw_n\Delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{4.3.20}$$

$$\Phi_2(w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1}\Delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{4.3.21}$$

где

$$V(\alpha) = -2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F_n(a)da.$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов имеем

$$\Phi_2(w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1}f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} =$$

$$= w_{n-1}f(\alpha)\exp\left\{-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma_n(b)\frac{f^2(b)}{f_n^2(b)} + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right]db\right\} \cong w_{n-1}\exp\left\{-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_n(b)\frac{f^2(b)}{f_n^2(b)}db\right\},$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (4.3.10), (4.3.11) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1 = -b$, перепишется в виде

$$w_{n-1}\exp\left\{\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{db}\ln|\Delta(b)|db\right\} \cong w_{n-1}\Delta(\alpha) \tag{4.3.22}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.3.20), (4.3.21) также является первым интегралом системы (4.3.19). Но при $\lambda^1 = \lambda_n^1 \neq -b$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 + (b - \lambda^1) w_n \Delta(\alpha) - \lambda_n^0 \Delta^2(\alpha) \tag{4.3.23}$$

и (4.3.21) по отдельности не является первым интегралом системы (4.3.7). Однако отношение функций (4.3.23), (4.3.21) является первым интегралом системы (4.3.7) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_n^1$ и b.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.3.7) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (4.3.17) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_n^0. \tag{4.3.24}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_n^0 \geqslant 0, \tag{4.3.25}$$

и фазовое пространство системы (4.3.7) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (4.3.24).

Таким образом, в силу соотношения (4.3.17) первое уравнение системы (4.3.15) при условиях (4.3.10) и (4.3.11) и при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(-\lambda_n^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 U_1(C_1, u_2)}{u_2 + b},$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_n^0)}\right\};$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (4.3.25). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (4.3.7) примет вид

$$-\int \frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} = \int \frac{(b + u_2)du_2}{2\big(-\lambda_n^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2\big) + C_1\big\{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_n^0)}\big\}/2}. \tag{4.3.26}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln|\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 - \frac{\lambda^1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_n^0,$$

то правая часть равенства (4.3.26) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \mp \frac{b}{2} I_1,$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{4.3.27}$$

При вычислении интеграла (4.3.27) возможны три случая.

I: $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_n^0$. В этом случае

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 + 4\lambda_n^0} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}}\right| +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}}\right| + \text{const}.$$

II: $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_n^0$. В этом случае

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_n^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}\,.$$

III: $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_n^0$. В этом случае

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}\,.$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1=\frac{w_n}{\Delta(\alpha)}-\frac{\lambda^1-b}{2},$$

получаем окончательный вид для величины I_1:

I. При $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_n^0$

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_n^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_n^0}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_n^0}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_n^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_n^0}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_n^0}}\right|+\mathrm{const}\,.$$

II. При $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_n^0$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_n^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}\,.$$

III. При $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_n^0$

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}\,.$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (4.3.7) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_n^1$): предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [24]).

Замечание 4.4. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (4.3.17). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n,w_{n-1};\alpha)=G\left(\Delta(\alpha),\frac{w_n}{\Delta(\alpha)},\frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)}\right)=C_2=\mathrm{const}\,. \tag{4.3.28}$$

Выражение первого интеграла (4.3.28) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (которая может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы (4.3.7)–(4.3.9) порядка $2n$ при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (4.3.7). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти по одному первому интегралу — для систем (4.3.8) (меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.3.9).

Первые интегралы для систем (4.3.8) будут иметь следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s)=\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)}=C_{s+2}=\mathrm{const},\quad s=1,\ldots,n-2; \tag{4.3.29}$$

функции $\Psi_s(\beta_s)$, $s=1,\ldots,n-2$, определены в (4.1.21).

В предыдущих переменных z первые интегралы (4.3.29) таковы:

$$
\begin{gathered}
\Theta_3'(z_{n-1},\ldots,z_1;\beta_1)=\frac{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\ \Psi_1(\beta_1)}=C_3'=\mathrm{const},\\
\Theta_4'(z_{n-2},\ldots,z_1;\beta_2)=\frac{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\ \Psi_2(\beta_2)}=C_4'=\mathrm{const},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Theta_n'(z_2,z_1;\beta_{n-2})=\frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\ \Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}=C_n'=\mathrm{const}\,.
\end{gathered}
\tag{4.3.30}
$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.3.9), находится по аналогии с (4.1.19):

$$
\Theta_{n+1}(\beta_{n-2},\beta_{n-1})=\beta_{n-1}\pm\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b)-C_n^2}}\,db=C_{n+1}=\mathrm{const},
\tag{4.3.31}
$$

где, после взятия интеграла (4.3.31), вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно формально подставить левые части равенств (4.3.29) (или (4.3.30)) при $s=n-3,n-2$ соответственно.

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (4.3.7)–(4.3.9) имеет $n+1$ первых интегралов, которые являются, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа, имеющих существенно особые точки). Теорема 4.3 доказана. □

4.3.3. Инвариантные дифференциальные формы систем со знакопеременной диссипацией.

Теорема 4.4. *Если для системы вида* (4.3.7)–(4.3.9) *выполняются геометрическое и энергетические свойства* (4.3.10), (4.3.11), *то у нее также существуют $n+1$ функционально независимых между собой инвариантных дифференциальных форм с трансцендентными, вообще говоря, коэффициентами (т.е. имеющими существенно особые точки; ср. [24]). Эти дифференциальные формы, для простоты, при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_n^1$ примут следующий вид*:

$$
\begin{aligned}
&\rho_1(w_n,w_{n-1};\alpha)dw_n\wedge dw_{n-1}\wedge d\alpha,\\
&\rho_2(w_n,w_{n-1};\alpha)dw_n\wedge dw_{n-1}\wedge d\alpha,\\
&\rho_{2+s}(w_s;\beta_s)=\frac{1}{\sqrt{1+w_s^2}}\,dw_s\wedge d\beta_s,\quad s=1,\ldots,n-2,\\
&\rho_{n+1}(w_n,w_{n-1};\alpha,\beta_{n-2},\beta_{n-1})dw_n\wedge dw_{n-1}\wedge d\alpha\wedge d\beta_{n-2}\wedge d\beta_{n-1},
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\rho_1(w_n,w_{n-1};\alpha)=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_n}{U_2(C_1,u_n)}\right\}\cdot\frac{u_n^2+u_{n-1}^2+(b-\lambda^1)u_n-\lambda_n^0}{u_{n-1}},\\
&u_k=\frac{w_k}{\Delta(\alpha)},\quad k=n-1,n,\\
&\rho_2(w_n,w_{n-1};\alpha)=\Delta(\alpha)\cdot\exp\left\{\int\frac{(2b+\lambda^1+u_n)du_n}{U_2(C_1,u_n)}\right\},\\
&\rho_{n+1}(w_n,w_{n-1};\alpha,\beta_{n-2},\beta_{n-1})=\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_n}{U_2(C_1,u_n)}\right\}\cdot\Theta_{n+1}(\beta_{n-2},\beta_{n-1});
\end{aligned}
$$

вообще говоря, они зависимы с первыми интегралами (4.3.18), (4.3.28), (4.3.29), (4.3.31).

Доказательство. I. Система (4.3.7) составной рассматриваемой системы (4.3.7)–(4.3.9) при выполнении свойств (4.3.10), (4.3.11) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot w_n = \lambda_n^0 \Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) f_n(\alpha) - \kappa f_n(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_{n-1}^2 + \lambda_n^1 w_n f_n(\alpha)\tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w_{n-1} = \kappa f_n(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_{n-1} w_n + \lambda^1 w_{n-1} f_n(\alpha)\tilde\Delta(\alpha). \end{cases} \tag{4.3.32}$$

После замен независимой и фазовой переменных

$$\frac{d}{dt} = f_n(\alpha)\frac{d}{d\tau}, \quad w_{n-1}^* = \ln|w_{n-1}| \tag{4.3.33}$$

система (4.3.32) примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = w_n + b\Delta(\alpha), \\ \dot w_n = X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = \lambda_n^0 \Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) - \kappa \dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}\, e^{2w_{n-1}^*} + \lambda_n^1 w_n \tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w_{n-1}^* = X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = \kappa \dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_n + \lambda^1 \tilde\Delta(\alpha); \end{cases} \tag{4.3.34}$$

при этом в системе (4.3.34) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ.

В принципе замена фазовой переменной (4.3.33) носит технический характер, и при этом можно использовать как переменную w_{n-1}^*, так и переменную w_{n-1}.

Для системы (4.3.34) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_n, w_{n-1}^*; \alpha)$, соответствующие дифференциальным формам объема $\rho(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) dw_n \wedge dw_{n-1}^* \wedge d\alpha$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}\Big[\rho(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) X(w_n, w_{n-1}^*; \alpha)\Big] = 0, \tag{4.3.35}$$

где

$$X(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = \Big\{ X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha),\ X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha),\ X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) \Big\} \tag{4.3.36}$$

— векторное поле рассматриваемой системы (4.3.34) в координатах $(w_n, w_{n-1}^*; \alpha)$. Уравнение (4.3.35) перепишется в виде

$$X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha)\rho_{w_n} + X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha)\rho_{w_{n-1}^*} = \\ = -\rho \operatorname{div} X(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \tag{4.3.37}$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = (b + \lambda_n^1)\tilde\Delta(\alpha). \tag{4.3.38}$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (4.3.37) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot\alpha = X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \\ \dot w_n = X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \\ \dot w_{n-1}^* = X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \\ \dot\rho = -\rho(b + \lambda_n^1)\tilde\Delta(\alpha). \end{cases} \tag{4.3.39}$$

У системы, состоящей из первых трех уравнений системы (4.3.39), уже найдены два первых интеграла (4.3.18) и (4.3.28). Найдем третий независимый первый интеграл системы (4.3.39) уравнений характеристик.

Сопоставим системе (4.3.39) следующую неавтономную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dw_n}{d\alpha} = \dfrac{\lambda_n^0\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\tilde{\Delta}(\alpha)w_{n-1}^2/\Delta(\alpha) + \lambda_n^1 w_n\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_n + b\Delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \dfrac{\kappa\tilde{\Delta}(\alpha)w_{n-1}w_n/\Delta(\alpha) + \lambda^1 w_{n-1}\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_n + b\Delta(\alpha)}, \\ \dfrac{d\rho}{d\alpha} = -\dfrac{(b+\lambda_n^1)\rho\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_n + b\Delta(\alpha)} \end{cases} \tag{4.3.40}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dw_n}{d\Delta} = \dfrac{\lambda_n^0\Delta - \kappa w_{n-1}^2/\Delta + \lambda_n^1 w_n}{w_n + b\Delta}, \\ \dfrac{dw_{n-1}}{d\Delta} = \dfrac{\kappa w_{n-1}w_n/\Delta + \lambda^1 w_{n-1}}{w_n + b\Delta}, \\ \dfrac{d\rho}{d\Delta} = -\dfrac{(b+\lambda_n^1)\rho}{w_n + b\Delta}. \end{cases} \tag{4.3.41}$$

После введения однородных переменных

$$w_n = u_2\Delta, \quad w_{n-1} = u_1\Delta, \tag{4.3.42}$$

похожих на соответствующие переменные в замене (4.3.13), система (4.3.41) перепишется в виде

$$\begin{cases} \Delta\dfrac{du_2}{d\Delta} + u_2 = \dfrac{\lambda_n^0 - \kappa u_1^2 + \lambda_n^1 u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{du_1}{d\Delta} + u_1 = \dfrac{\kappa u_1 u_2 + \lambda^1 u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{d\rho}{d\Delta} = -\dfrac{(b+\lambda_n^1)\rho}{u_2 + b} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta\dfrac{du_2}{d\Delta} = \dfrac{\lambda_n^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 - (b-\lambda_n^1)u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{du_1}{d\Delta} = \dfrac{(\kappa-1)u_1u_2 - (b-\lambda^1)u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{d\rho}{d\Delta} = -\dfrac{(b+\lambda_n^1)\rho}{u_2 + b}. \end{cases} \tag{4.3.43}$$

Из первых двух уравнений системы (4.3.43) получается первый интеграл (4.3.18). Из квадратуры

$$-\frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{(u_2+b)du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \tag{4.3.44}$$

где

$$U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)}\right\},$$
$$U_1(u_2) = u_2^2 + (b-\lambda^1)u_2 - \lambda_n^0, \quad C_1 \neq 0,$$

получается первый интеграл (4.3.28) (здесь учитывается, что $\kappa = -1$ и $\lambda^1 = \lambda_n^1$). Наконец, из квадратуры

$$\frac{d\rho}{(b+\lambda^1)\rho} = \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \tag{4.3.45}$$

получается первый интеграл, содержащий неизвестную функцию ρ.

Вычислим квадратуру (4.3.45). Справедливо инвариантное соотношение

$$\rho \cdot \exp\left\{-(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} = C_\rho = \text{const}, \tag{4.3.46}$$

которое является третьим, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (4.3.39).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (4.3.37) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \mathcal{F}\left[\Theta_1, \Theta_2\right], \tag{4.3.47}$$

где $\mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Θ_1, Θ_2 — два первых интеграла (4.3.18), (4.3.28) соответственно.

В частности, за два функционально независимых решения линейного уравнения (4.3.37) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha), \tag{4.3.48}$$

$$\rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha), \tag{4.3.49}$$

где $u_2 = w_n/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_{n-1}/\Delta(\alpha)$.

II. Рассмотрим далее системы (4.3.8). После замен независимых переменных

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} = \pm w_{n-1} f(\alpha)\frac{d}{d\tau},\\
&\frac{d}{dt} = \pm \frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1)\frac{d}{d\tau},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{d}{dt} = \pm \frac{w_{n-1}}{\sqrt{(1+w_1^2)\dots(1+w_{n-3}^2)}} f(\alpha) g(\beta_1)\dots r(\beta_{n-3})\frac{d}{d\tau}
\end{aligned} \tag{4.3.50}$$

при $s = n-2, \dots, 1$ соответственно системы (4.3.8) примут следующий вид:

$$\left\{\begin{aligned}
&\dot{w}_s = X_{w_s}(w_s; \beta_s) = \sqrt{1+w_s^2}\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right],\\
&\dot{\beta}_s = X_{\beta_s}(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}}, \quad s = 1, \dots, n-2, \quad j = r, \dots, h, g;
\end{aligned}\right\} \tag{4.3.51}$$

при этом в системах (4.3.51) точкой обозначена также производная по новым независимым переменным τ.

Для систем (4.3.51) будем искать интегральные инварианты с плотностями $\rho(w_s; \beta_s)$, соответствующие дифференциальным формам площади $\rho(w_s; \beta_s) dw_s \wedge d\beta_s$, $s = 1, \dots, n-2$, из следующих линейных дифференциальных уравнений:

$$\operatorname{div}\left[\rho(w_s; \beta_s) X(w_s; \beta_s)\right] = 0, \tag{4.3.52}$$

где

$$X(w_s; \beta_s) = \left\{X_{w_s}(w_s; \beta_s),\ X_{\beta_s}(w_s; \beta_s)\right\} \tag{4.3.53}$$

— векторные поля рассматриваемых систем (4.3.51) в координатах $(w_s; \beta_s)$. Уравнения (4.3.52) перепишутся в виде

$$X_{w_s}(w_s; \beta_s)\rho_{w_s} + X_{\beta_s}(w_s; \beta_s)\rho_{\beta_s} = -\rho \operatorname{div} X(w_s; \beta_s), \tag{4.3.54}$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}}\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right]. \tag{4.3.55}$$

Тогда системы уравнений характеристик линейных дифференциальных уравнений (4.3.54) в частных производных примут следующий вид:

$$\begin{cases}
\dot{w}_s = X_{w_s}(w_s; \beta_s),\\
\dot{\beta}_s = X_{\beta_s}(w_s; \beta_s),\\
\dot{\rho} = -\rho \dfrac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}}\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \dfrac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right].
\end{cases} \tag{4.3.56}$$

У систем, состоящих из первых двух уравнений систем (4.3.56), уже найдены первые интегралы (4.3.29). Найдем второй независимый первый интеграл для каждой из систем (4.3.56) уравнений характеристик. Сопоставим двум последним уравнениям систем (4.3.56) следующие неавтономные уравнения:

$$\frac{d\rho}{d\beta_s} = -\rho\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right], \quad s = 1, \ldots, n-2. \tag{4.3.57}$$

Последние уравнения дают следующие инвариантные соотношения:

$$\Theta_{\rho_{s+2}}(\beta_s;\rho) = \rho\cdot\Psi_s(\beta_s) = C_{\rho_{s+2}} = \text{const}, \tag{4.3.58}$$

которые являются вторыми, недостающими, первыми интегралами систем уравнений характеристик (4.3.56); функции $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \ldots, n-2$, определены в (4.1.21).

Таким образом, общие решения линейных уравнений (4.3.54) в частных производных примут следующий вид:

$$\rho = \frac{\mathcal{G}\left[\Theta_{s+2}\right]}{\Psi_s(\beta_s)}, \tag{4.3.59}$$

где $\mathcal{G}\left[\Theta_{s+2}\right]$ — произвольные гладкие функции одного аргумента, при этом Θ_{s+2} — первые интегралы (4.3.29), $s = 1, \ldots, n-2$.

В частности, если выбрать

$$\mathcal{G}\left[\Theta_{s+2}\right] = \frac{1}{\Theta_{s+2}} = \frac{\Psi_s(\beta_s)}{\sqrt{1+w_s^2}}, \tag{4.3.60}$$

то в качестве решений линейных уравнений (4.3.54) в частных производных можно взять

$$\rho_{2+s}(w_s;\beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1+w_s^2}}, \quad s = 1, \ldots, n-2. \tag{4.3.61}$$

III. Итак, инвариантные дифференциальные формы с функциями $\rho_p(w_n, w_{n-1};\alpha)$, $p = 1, 2$, а также $\rho_{2+s}(w_s;\beta_s)$, $s = 1, \ldots, n-2$, были получены выше через исследования отдельных систем (4.3.7), (4.3.8), которые сами составляют общую рассматриваемую составную систему (4.3.7)–(4.3.9). Возникает естественный вопрос: как связано нахождение инвариантных форм для отдельных систем с нахождением инвариантных форм для общей составной системы? Ответ на этот вопрос позволит, в частности, ответить и на вопрос о нахождении инвариантной формы, «привязывающей» уравнение (4.3.9).

Составная рассматриваемая система (4.3.7)–(4.3.9) при выполнении свойств (4.3.10), (4.3.11) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot w_n = \lambda_n^0\Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) f_n(\alpha) - \kappa f_n(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_{n-1}^2 + \lambda_n^1 w_n f_n(\alpha)\tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w_{n-1} = \kappa f_n(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_{n-1}w_n + \lambda^1 w_{n-1} f_n(\alpha)\tilde\Delta(\alpha), \end{cases} \tag{4.3.62}$$

$$\begin{cases} \dot w_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \ldots, w_{n-1})\dfrac{1+w_s^2}{w_s} f(\alpha)g(\beta_1)\ldots\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \dfrac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right], \\ \dot\beta_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \ldots, w_{n-1}) f(\alpha)g(\beta_1)\ldots, \quad s = 1, \ldots, n-2, \end{cases} \tag{4.3.63}$$

$$\dot\beta_{n-1} = \mathcal{Z}_1(w_1, \ldots, w_{n-1}) f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}). \tag{4.3.64}$$

После замен независимой и фазовых переменных

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} = f_n(\alpha)\frac{d}{d\tau}, \\ w_{n-1}^* = \ln|w_{n-1}|, \quad w_s^* = \ln\left|w_s + \sqrt{1+w_s^2}\right|, \quad s = 1, \ldots, n-2, \end{gathered} \tag{4.3.65}$$

составная система (4.3.62)–(4.3.64) примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = X_\alpha(w_n, w^*_{n-1};\alpha) = w_n + b\Delta(\alpha), \\ \dot w_n = X_{w_n}(w_n, w^*_{n-1};\alpha) = \lambda^0_n\Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) - \kappa\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}\,e^{2w^*_{n-1}} + \lambda^1_n w_n\tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w^*_{n-1} = X_{w^*_{n-1}}(w_n, w^*_{n-1};\alpha) = \kappa\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_n + \lambda^1\tilde\Delta(\alpha), \end{cases} \tag{4.3.66}$$

$$\begin{cases} \dot w^*_s = X_{w^*_s}(w^*_{n-1}, w^*_{s-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_s) = \\ \qquad\qquad = P_s(w^*_{n-1}, w^*_{s-1},\ldots,w^*_1)\dfrac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)\widetilde{\ldots}\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \dfrac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right], \\ \dot\beta_s = X_{\beta_s}(w^*_{n-1}, w^*_s,\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}) = \\ \qquad\qquad = Q_s(w^*_{n-1}, w^*_s,\ldots,w^*_1)\dfrac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)\widetilde{\ldots}, \quad s = 1,\ldots,n-2, \end{cases} \tag{4.3.67}$$

$$\dot\beta_{n-1} = X_{\beta_{n-1}}(w^*_{n-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\ldots,\beta_{n-2}) = R_s(w^*_{n-1},\ldots,w^*_1)\frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}g(\beta_1)\ldots i(\beta_{n-2}); \tag{4.3.68}$$

при этом в составной системе (4.3.66)–(4.3.68) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ.

В принципе, замена (4.3.65) носит технический характер, и при этом можно использовать как группу переменных w^*_{n-1}, …, w^*_1, так и группу переменных $w_{n-1},\ldots,w_1$.

Для составной системы (4.3.66)–(4.3.68) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_n, w^*_{n-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$, соответствующие дифференциальным формам объема $\rho(w_n, w^*_{n-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})dw_n\wedge dw^*_{n-1}\wedge\ldots\wedge dw^*_1\wedge d\alpha\wedge d\beta_1\wedge\ldots\wedge d\beta_{n-1}$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}\Big[\rho\big(w_n, w^*_{n-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\big)X\big(w_n, w^*_{n-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\big)\Big] = 0, \tag{4.3.69}$$

где

$$\begin{aligned} &X(w_n, w^*_{n-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = \\ &\qquad = \Big\{X_\alpha(w_n, w^*_{n-1};\alpha),\ X_{w_n}(w_n, w^*_{n-1};\alpha),\ X_{w^*_{n-1}}(w_n, w^*_{n-1};\alpha),\ldots, \\ &\qquad\qquad X_{w^*_2}(w^*_3, w^*_1;\alpha,\beta_1,\beta_2),\ \ldots,\ X_{\beta_{n-1}}(w^*_{n-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\Big\} \end{aligned} \tag{4.3.70}$$

— векторное поле рассматриваемой составной системы (4.3.66)–(4.3.68) в координатах (w_n, w^*_{n-1}, …, w^*_1; $\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$). Уравнение (4.3.69) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &X_\alpha(w_n, w^*_{n-1};\alpha)\rho_\alpha + X_{w_n}(w_n, w^*_{n-1};\alpha)\rho_{w_n} + \\ &\quad + X_{w^*_{n-1}}(w_n, w^*_{n-1};\alpha)\rho_{w^*_{n-1}} + \ldots + X_{\beta_{n-1}}(w^*_{n-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\rho_{\beta_{n-1}} = \\ &\qquad = -\rho\operatorname{div}X(w_n, w^*_{n-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}); \end{aligned} \tag{4.3.71}$$

при этом

$$\operatorname{div}X(w_n, w^*_{n-1},\ldots,w^*_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = (b+\lambda^1_n)\tilde\Delta(\alpha), \tag{4.3.72}$$

как и в случае (4.3.38) для «отдельной» системы (4.3.34)! Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (4.3.71) в частных производных примет следующий вид:

$$\dot\alpha = X_\alpha(w_n, w^*_{n-1};\alpha), \tag{4.3.73a}$$

$$\dot w_n = X_{w_n}(w_n, w^*_{n-1};\alpha), \tag{4.3.73b}$$

$$\dot w^*_{n-1} = X_{w^*_{n-1}}(w_n, w^*_{n-1};\alpha), \tag{4.3.73c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = X_{\beta_{n-1}}(w_{n-1}^*, \ldots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{4.3.73d}$$

$$\dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_n^1)\tilde{\Delta}(\alpha); \tag{4.3.73e}$$

она включает в себя систему уравнений характеристик (4.3.39) для уравнения в частных производных (4.3.37).

У системы, состоящей из первых $2n$ уравнений системы (4.3.73), уже найдены $n+1$ первых интегралов (4.3.18), (4.3.28), (4.3.29) и (4.3.31) (полный набор). Более того, найден и дополнительный первый интеграл (4.3.46), «привязывающий» уравнение (последнее уравнение системы (4.3.73)) на функцию ρ.

Таким образом, общее решение линейного уравнения (4.3.71) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \mathcal{H}\left[\Theta_1, \ldots, \Theta_{n+1}\right], \tag{4.3.74}$$

где $\mathcal{H}\left[\Theta_1, \ldots, \Theta_{n+1}\right]$ — произвольная гладкая функция $n+1$ аргументов, при этом $\Theta_1, \ldots, \Theta_{n+1}$ — $n+1$ первых интегралов (4.3.18), (4.3.28), (4.3.29), (4.3.31) соответственно. В частности, в качестве $n+1$ функционально независимых решений линейного уравнения (4.3.71) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha), \tag{4.3.75}$$

$$\rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha), \tag{4.3.76}$$

$$\rho_3(w_n, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_3(w_1; \beta_1), \tag{4.3.77}$$

. . . .

$$\rho_n(w_n, \ldots, w_1; \alpha, \beta_{n-2}) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_n(w_{n-2}; \beta_{n-2}), \tag{4.3.78}$$

$$\rho_{n+1}(w_n, w_{n-1}; \alpha, \beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}); \tag{4.3.79}$$

здесь

$$u_2 = \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \quad u_1 = \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)},$$

Видно, что в разделе III данного доказательства рассмотрен наиболее общий случай поиска инвариантных форм для составной системы (4.3.66)–(4.3.68). Также ясно, что найденные дифференциальные формы $\rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) dw_n \wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha$ и $\rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) dw_n \wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha$ будут инвариантными формами не только для системы (4.3.7), но и для составной системы (4.3.7)–(4.3.9). При этом для интегрирования составной системы (4.3.7)–(4.3.9) можно использовать как более громоздкие формы с функциями (4.3.77), (4.3.78), так и формы с функциями (4.3.61), имеющие более простой наглядный вид, поскольку составная система (4.3.7)–(4.3.9) распалась известным образом. Теорема 4.3 доказана. □

Итак, для полной интегрируемости системы (4.3.7)–(4.3.9) можно использовать или $n+1$ первых интегралов, или $n+1$ независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством $n+1$.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. [61,62]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (т.е. наличие у них существенно особых точек) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

В заключение укажем на многочисленные приложения, касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к n-мерной сфере, а также более общих систем на расслоении n-мерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского (см. [3, 7]). При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим работы [21, 22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. *Вейль Г.* Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
11. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
13. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
14. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
15. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
16. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
17. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
18. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
19. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
21. *Трофимов В В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
23. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
24. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
26. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
27. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.

28. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
29. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
30. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
31. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
32. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
33. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
34. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
35. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
36. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
37. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
38. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
39. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
40. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
41. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
42. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
43. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
45. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
46. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
47. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
48. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
49. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
50. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
51. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
52. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.

53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
60. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.
61. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — *507*, № 1. — С. 86–92.
62. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *205*. — С. 22–54.
63. *Шамолин М. В.* Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *205*. — С. 55–94.
64. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *208*. — С. 91–121.
65. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *209*. — С. 88–107.
66. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *209*. — С. 108–116.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *210*. — С. 77–95.
68. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *210*. — С. 96–105.
69. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *211*. — С. 29–40.
70. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *211*. — С. 41–74.
71. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *212*. — С. 120–138.
72. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *212*. — С. 139–148.

73. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n-мерных многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *213.* — С. 96–109.
74. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n-мерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *214.* — С. 82–106.
75. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n-мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *216.* — С. 133–152.
76. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — *509*, № 1. — С. 69–76.
77. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier–Villars, 1912.
78. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
79. *Shamolin M. V.* Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Proc. Int. Conf. “Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms” (DEMMCA 2021). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.
80. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-07).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru

CONTENTS

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с C2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.