

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 228



Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 228 (2023)

Дата публикации 9 октября 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редактор-составитель выпуска
Научный редактор выпуска
Компьютерная вёрстка

А. С. Бондарев
Н. И. Гусева
А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 228

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЗИМНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ»

ВОРОНЕЖ, 27 ЯНВАРЯ – 1 ФЕВРАЛЯ 2023 г.

Часть 2



Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Об одном достаточном признаке экспоненциальной устойчивости дифференциального уравнения нейтрального типа (А. С. Баландин)	3
Задача Дирихле на полуоси для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, содержащего степени генератора группы (А. В. Глушак)	10
Влияние конкуренции на динамику макроэкономических систем (А. Н. Куликов, Д. А. Куликов, Д. Г. Фролов)	20
О типе дельта-субгармонических функций обобщенного уточненного порядка (К. Г. Малютин, М. В. Кабанко)	32
Восстановление оператора Лапласа—Бесселя функции по спектру, заданному не везде (С. М. Ситник, В. Е. Федоров, М. В. Половинкина, И. П. Половинкин)	52
Спонтанная кластеризация в марковских цепях. IV. Кластеризация в турбулентной среде (В. В. Учайкин, В. А. Литвинов)	58
Об оптимальной линейной регрессии для нечетко-случайных величин (В. Л. Хацкевич)	85
Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем. II. Системы на касательных расслоениях трехмерных многообразий (М. В. Шамолин)	92



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 228 (2023). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-228-3-9

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ ПРИЗНАКЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

© 2023 г. А. С. БАЛАНДИН

Аннотация. Получено достаточное условие экспоненциальной устойчивости одного дифференциального уравнения нейтрального типа.

Ключевые слова: уравнение нейтрального типа, функционально-дифференциальное уравнение, последствие, устойчивость.

SUFFICIENT CRITERION FOR THE EXPONENTIAL STABILITY OF A DIFFERENTIAL EQUATION OF NEUTRAL TYPE

© 2023 A. S. BALANDIN

ABSTRACT. A sufficient condition for the exponential stability of one differential equation of neutral type is obtained.

Keywords and phrases: neutral-type equation, functional differential equation, aftereffect, stability.

AMS Subject Classification: 34K60

1. Постановка задачи. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, вещественных и комплексных чисел, соответственно, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $L_p(E)$, $1 \leq p < \infty$, — пространство суммируемых со степенью p функций, заданных на множестве E , с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_E |x(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

$L_\infty(E)$ — пространство ограниченных на E функций с нормой

$$\|x\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in E} |x(t)|,$$

$L_p = L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, I — тождественный оператор.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа

$$\left(I - \sum_{j=1}^J a_j S_h^j \right) \dot{x}(t) + \left(\sum_{m=0}^M b_m S_{r_m} \right) x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0005).

в следующих предположениях и обозначениях: $J \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}_0$, $a_j, h, b_m, r_m \in \mathbb{R}_+$,

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geq 0, \\ 0, & t-h < 0, \end{cases}$$

функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ предполагается суммируемой на каждом конечном отрезке $[0, l]$.

Решением уравнения (1) назовём абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

В силу [1, с. 84, теорема 1.1] и [4] уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо *формулой Коши*:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t Y(t-s)f(s) ds,$$

где $X: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, а $Y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ — *функцией Коши* уравнения (1).

В [4] установлена связь между фундаментальным решением и функцией Коши уравнения (1).

Теорема 1 (см. [4]). *Фундаментальное решение и функция Коши уравнения (1) связаны соотношением*

$$X(t) = (I - S)Y(t). \quad (2)$$

Уравнение (1) назовём *экспоненциально устойчивым*, если для функции Y справедливо неравенство

$$|Y(t)| \leq M_1 e^{-\gamma_1 t}, \quad M_1, \gamma_1 > 0. \quad (3)$$

Очевидно, что в силу равенства (2) из оценки (3) вытекает оценка

$$|X(t)| \leq M_2 e^{-\gamma_2 t}, \quad M_2, \gamma_2 > 0, \quad (4)$$

а на основе формулы Коши можно устанавливать точные оценки решения уравнения (1) при любых начальных условиях и внешних возмущениях. В [11] исследовалась устойчивость решений уравнения нейтрального типа относительно начальных функций из пространств Лебега интегрируемых функций, L_p , $1 \leq p \leq \infty$, были получены критерии устойчивости в терминах свойств функции Коши исследуемого уравнения, выделялись ситуации, когда асимптотическая устойчивость эквивалентна существованию экспоненциальной оценки для функции Коши.

В данной работе мы получим легко проверяемый достаточный признак устойчивости уравнения (1), обобщающий признак М. Ю. Вагиной и М. М. Кипниса (см. [7]).

2. Вспомогательные результаты. Обозначим через $g(p)$ характеристическую функцию уравнения (1):

$$g(p) = p \left(1 - \sum_{j=1}^J a_j e^{-pjh} \right) + \sum_{m=0}^M b_m e^{-pr_m}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2 (см. [5]). *Функция Коши уравнения (1) имеет оценку (3) тогда и только тогда, когда оператор $I - S$ имеет обратный в пространстве L_p , $1 \leq p \leq \infty$, и все нули функции g лежат слева от мнимой оси.*

Задача об обратимости оператора $I - S$ связана с расположением нулей полинома

$$1 - P_S(z) = 1 - \sum_{j=1}^J a_j z^j, \quad z \in \mathbb{C},$$

относительно единичного круга.

Из результатов работы [3] вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. Оператор $I - \sum_{j=1}^J a_j S_h^j$ имеет в пространстве L_p ограниченный обратный.

2. Оператор $\lambda I - S_h$, где λ — любой корень многочлена $1 - P_S(z)$, имеет в пространстве L_p ограниченный обратный.
3. Все нули многочлена $1 - P_S(z)$ расположены вне единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

В уравнении (1) запаздывания при производной соизмеримы, следовательно, для проверки обратимости оператора $I - S$ можно применить любое из утверждений 2–4 теоремы 3. Предположим, что оператор $(I - S)^{-1}$ не только существует, но и допускает конструктивное описание. Если подействовать им на обе части уравнения (1), то мы преобразуем его в уравнение запаздывающего типа, но содержащее бесконечное множество запаздываний. Следовательно, чтобы реализовать изложенную выше схему, необходимо располагать признаком устойчивости для уравнения с бесконечным числом запаздываний.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\dot{x}(t) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m S_{r_m} \right) x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (5)$$

где $0 \leq r_m \leq \rho_0 + \rho_1 m$, $0 \leq c_m \leq \beta_0 e^{-\beta_1 m}$, $\rho_0, \rho_1, \beta_0, \beta_1 > 0$. Разрешимость уравнения (5) также понимается в классе локально абсолютно непрерывных функций. Найдём достаточные условия экспоненциальной устойчивости уравнения (5).

Обоснуем возможность применения преобразования Лапласа к уравнению (5) и докажем вспомогательные леммы 1, 2 о свойствах полученных лаплас-образов. Известно (см. [2]), что фундаментальное решение уравнения (5) имеет оценку

$$|X(t)| \leq N_1 e^{\alpha_1 t}, \quad N_1, \alpha_1 > 0.$$

Тогда на любом конечном отрезке $[0, l]$ ряд $\sum_{m=0}^{\infty} c_m X(t - r_m)$ равномерно сходится к его сумме $S(t)$, сумма $S(t)$ является непрерывной функцией на каждом конечном отрезке $[0, l]$, а, значит, и на всей оси. Очевидно, что $S(t) = 0$ при $t < 0$ и

$$|S(t)| \leq N_2 e^{\alpha_2 t}, \quad t \geq 0, \quad N_2, \alpha_2 > 0.$$

Следовательно, к сумме ряда $S(t)$ применимо преобразование Лапласа. Кроме того, в силу [9, с. 473], в области $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \geq \operatorname{Re} p_0\}$ в изображении ряда $\sum_{m=0}^{\infty} c_m X(t - r_m)$ знаки интеграла и суммы можно переставлять местами.

Введем обозначения

$$\varphi(p) = p + \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-pr_m}, \quad d_\varepsilon = \{p \in \mathbb{C} : -\varepsilon \leq \operatorname{Re} p < 0\}, \quad D_\varepsilon = \{p \in \mathbb{C} : -\varepsilon \leq \operatorname{Re} p\}.$$

При доказательстве лемм 1, 2 и теоремы 4 используется схема доказательства из работ [6, 7], модифицированная для случая бесконечного множества запаздываний.

Лемма 1. Пусть коэффициенты уравнения (5) удовлетворяют соотношению

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m r_m < \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Тогда существует такое ε , что в области D_ε функция φ аналитична и не имеет нулей.

Доказательство. Разделим область D_ε на две подобласти: полосу d_ε и правую полуплоскость $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \geq 0\}$. Покажем аналитичность и отсутствие нулей функции φ в обеих областях.

Рассмотрим правую комплексную полуплоскость $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \geq 0\}$. Аналитичность функции φ в этой области вытекает из сходимости ряда $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$. Покажем, что функция φ не обращается в нуль. Для этого используем доказательство теоремы 3.2.1 из [6] и перенесём его на случай, когда функция φ является заданным функциональным рядом.

Пусть p движется по контуру K_R комплексной плоскости, содержащему отрезок I_R : $p = -i\omega$, $-R \leq \omega \leq R$, и полуокружность C_R : $p = Re^{i\omega}$, $-\pi/2 \leq \omega \leq \pi/2$. Согласно принципу аргумента для доказательства леммы достаточно показать, что $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \rightarrow 0$ при движении p по K_R при $R \rightarrow \infty$. Это будет означать отсутствие корней φ в правой полуплоскости. Очевидно, $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \rightarrow \pi$ при движении p по C_R , если $R \rightarrow \infty$. Рассмотрим движение по отрезку $p = -i\omega$, $0 \leq \omega \leq R$. Введем обозначения

$$u(\omega) = \operatorname{Re} \varphi(-i\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos(\omega r_m), \quad v(\omega) = \operatorname{Im} \varphi(-i\omega) = -\omega + \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sin(\omega r_m).$$

Покажем, что из условий $u(\omega) = 0$, $\omega > 0$ следует $v(\omega) < 0$, ибо тогда $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \rightarrow -\pi/2$ при движении p по отрезку $p = -i\omega$, $0 \leq \omega \leq R$, $R \rightarrow \infty$ и вследствие симметрии $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \rightarrow -\pi$ на I_R , а поэтому $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \rightarrow 0$ на K_R .

Очевидно, что при $t \geq 0$ выполняется неравенство $t + \cos t - (\pi/2) \sin t \geq 0$. Пусть $u(\omega) = 0$. Подставляя в неравенство $t = \omega r_m$, умножая обе части неравенства на b_m и суммируя по m от 0 до ∞ , имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m r_m \omega + \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos(\omega r_m) - \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sin(\omega r_m) \geq 0.$$

Так как выполняется (6) и $u(\omega) = 0$, то

$$\omega - \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin(\omega r_m) > 0,$$

вследствие чего $v(\omega) < 0$ и функция φ не имеет нулей в правой полуплоскости.

Теперь зафиксируем любое $\varepsilon_0 \in (0, \beta_1/\rho_1)$ и рассмотрим область d_{ε_0} на комплексной плоскости. В этой области имеет место оценка

$$|c_m e^{-pr_m}| \leq \beta_0 e^{-\beta_1 m} e^{\varepsilon_0(\rho_0 + \rho_1 m)} = \beta_0 e^{\varepsilon_0 \rho_0} e^{-(\beta_1 - \varepsilon_0 \rho_1)m}.$$

Ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \beta_0 e^{\varepsilon_0 \rho_0} e^{-(\beta_1 - \varepsilon_0 \rho_1)m}$$

сходится. Значит, ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-pr_m}$$

сходится равномерно относительно p , следовательно, функция φ аналитична. Заметим, что φ имеет конечное число нулей в области d_{ε_0} , так как $|\varphi(p)| \rightarrow \infty$ при $|p| \rightarrow \infty$. Осталось выбрать $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ так, чтобы в области d_ε у функции φ нулей не было, следовательно, функция φ аналитична в области D_ε и не имеет нулей. $\square$

Лемма 2. Пусть в области D_ε , $\varepsilon > 0$, функция $\varphi(p) - p$ аналитична и ограничена, а функция $\varphi(p)$ не имеет нулей. Тогда имеет место оценка

$$\left| \int_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty} \frac{e^{pt}}{\varphi(p)} dp \right| \leq N e^{-\varepsilon t}. \quad (7)$$

Доказательство. Заметим, что для любого $b < 0$ сходится и равен нулю следующий интеграл:

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0$$

(см. [8, с. 464–465]). Отсутствие нулей у функции $\varphi(p)$ гарантирует конечное значение интеграла (7) вдоль любого конечного отрезка интегрирования. Оценим интеграл вдоль всей прямой интегрирования:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} \frac{e^{pt}}{\varphi(p)} dp - \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp \right| &\leq \left| \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} \frac{g(p)}{(\varphi(p))p} e^{pt} dp \right| \leq \\ &\leq e^{-\varepsilon t} \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} \frac{|\varphi(p) - p| d(\operatorname{Im} p)}{|\varphi(p)||p|} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |O((\operatorname{Im} p)^{-2})| d(\operatorname{Im} p) \right) e^{-\varepsilon t} = Ne^{-\varepsilon t}. \quad \square \end{aligned}$$

Следующее утверждение обобщает известный результат М. Ю. Вагиной и М. М. Кипниса (см. [7]); для доказательства используется схема (модифицированная для бесконечного множества запаздываний) из [6, 7].

Теорема 4. Пусть коэффициенты уравнения (5) удовлетворяют соотношению (6). Тогда фундаментальное решение уравнения (5) имеет оценку (4).

Доказательство. По лемме 1 существует такое $\varepsilon > 0$, что в области D_ε функция φ аналитична и не имеет нулей, причём функция $\varphi(p) - p$ аналитична и ограничена, то есть выполняются условия леммы 2. По лемме 2 имеет место оценка интеграла (7), который с точностью до постоянного коэффициента является формулой обращения изображения $X_0(p) = (\varphi(p))^{-1}$ решения уравнения (5). Получим следующую оценку фундаментального решения X уравнения (5):

$$|X(t)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} \frac{e^{pt}}{\varphi(p)} dp \right| \leq Ne^{-\varepsilon t}. \quad \square$$

3. Основной результат. Введем обозначение

$$F(z) = (1 - P_S(z))^{-1} = \left(1 - \sum_{j=1}^J a_j z^j \right)^{-1}.$$

Теорема 5. Пусть выполнено любое из утверждений теоремы 3 и

$$\dot{F}(1)h \left(\sum_{m=0}^M b_m \right) + F(1) \left(\sum_{m=0}^M b_m r_m \right) < \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Тогда уравнение (1) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Выберем R так, чтобы $1 < R < |\lambda|$, где λ — минимальный по модулю корень многочлена $1 - P_S(z)$, по теореме 3 имеем $|\lambda| > 1$. Следовательно, функция F аналитична в круге $|z| \leq R$ и представима в виде ряда Тейлора

$$F(z) = \left(1 - \sum_{j=1}^J a_j z^j \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^J a_j z^j \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} z^k, \quad (9)$$

и для коэффициентов ряда выполнены неравенства Коши (см. [8, с. 58–59])

$$\left| \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq MR^{-k}. \quad (10)$$

Построим обратный оператор для $I - S$:

$$\left(I - \sum_{j=1}^J a_j S_h^j \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^J a_j S_h^j \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} S_h^k. \quad (11)$$

Поддействуем на обе части уравнения (1) оператором (11) и перепишем уравнение (1) в виде (5):

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} S_{kh} \left(\sum_{m=0}^M b_m S_{r_m} \right) x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Далее, меняя порядок суммирования, имеем

$$\dot{x}(t) + \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} b_m S_{kh+r_m} x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Применяя теорему 4, получим достаточное условие экспоненциальной оценки (4) фундаментального решения уравнения (1):

$$\sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} b_m (kh + r_m) < \frac{\pi}{2}.$$

Для того чтобы привести это неравенство к виду (8), осталось поменять порядок суммирования и использовать соотношение (9):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} kh \sum_{m=0}^M b_m + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \sum_{m=0}^M b_m r_m < \frac{\pi}{2}.$$

Для завершения доказательства достаточно ссылки на теорему 2. $\square$

Заметим, что в случае равенства нулю всех коэффициентов a_j и $M = 1$ неравенство (8) становится необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости уравнения $\dot{x}(t) + bx(t-r) = f(t)$. Таким образом, константа $\pi/2$ в (8) не может быть увеличена.

Следствие 1. Если точка (a_1, a_2) принадлежит внутренности треугольника с вершинами $(-2, -1)$, $(2, -1)$, $(0, 1)$ и

$$\frac{(a_1 + 2a_2)h}{(1 - a_1 - a_2)^2} \left(\sum_{m=0}^M b_m \right) + \frac{1}{1 - a_1 - a_2} \left(\sum_{m=0}^M b_m r_m \right) < \frac{\pi}{2},$$

то уравнение

$$\left(I - \sum_{j=1}^2 a_j S_h^j \right) \dot{x}(t) + \left(\sum_{m=0}^M b_m S_{r_m} \right) x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

экспоненциально устойчиво.

Следствие 2. Если $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| < 1$ и

$$\frac{na_n h}{(1 - a_n)^2} \left(\sum_{m=0}^M b_m \right) + \frac{1}{1 - a_n} \left(\sum_{m=0}^M b_m r_m \right) < \frac{\pi}{2},$$

то уравнение

$$(I - a_n S_h^n) \dot{x}(t) + \left(\sum_{m=0}^M b_m S_{r_m} \right) x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

экспоненциально устойчиво.

Следствие 3. Если $n, m \in \mathbb{N}$, $|a_n| < 1$ и

$$\frac{b_m h}{1 - a_n} \left(\frac{na_n}{1 - a_n} + m \right) < \frac{\pi}{2},$$

то уравнение

$$(I - a_n S_h^n) \dot{x}(t) + b_m (S_h^m x)(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

экспоненциально устойчиво.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Разматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. *Азбелев Н. В., Симонов П. М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. — Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.
3. *Баландин А. С.* Об асимптотической устойчивости одного класса дифференциально-разностных уравнений // Вестн. ПГТУ. — 2009. — 1. — С. 122–129.
4. *Баландин А. С.* О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Прикл. мат. вопр. управл. — 2018. — № 1. — С. 13–25.
5. *Баландин А. С.* Об устойчивости некоторых автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа // Сб. тр. XII Междунар. конф. «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (ПМТУКТ-2019). — Воронеж, 2019. — С. 59–63.
6. *Вагина М. Ю.* Локальная устойчивость некоторых видов логистического уравнения динамики популяции с запаздываниями. — Челябинск, 2004.
7. *Вагина М. Ю., Кипнис М. М.* Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // Мат. заметки. — 2003. — 74, № 5. — С. 786–789.
8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. — М.: Физматлит, 2001.
10. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. — New York: Springer, 2005.
11. *Malygina V., Chudinov K.* On the asymptotic behavior of solutions to linear autonomous neutral functional differential equations // Funct. Differ. Equations. — 2020. — 27, № 3–4. — P. 103–123.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0005).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баландин Антон Сергеевич

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

E-mail: balandin-anton@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 228 (2023). С. 10–19
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-228-10-19

УДК 517.983.23

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ, СОДЕРЖАЩЕГО СТЕПЕНИ ГЕНЕРАТОРА ГРУППЫ

© 2023 г. А. В. ГЛУШАК

Аннотация. Для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, содержащего степени неограниченного оператора, получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Дирихле на полуоси.

Ключевые слова: абстрактное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу, степени неограниченного оператора, задача Дирихле, однозначная разрешимость.

DIRICHLET PROBLEM ON THE SEMIAXIS FOR THE ABSTRACT EULER–POISSON–DARBOUX EQUATION CONTAINING POWERS OF THE GROUP GENERATOR

© 2023 А. V. GLUSHAK

ABSTRACT. For the abstract Euler–Poisson–Darboux equation containing powers of an unbounded operator, sufficient conditions for the unique solvability of the Dirichlet problem on the semiaxis are obtained.

Keywords and phrases: abstract Euler–Poisson–Darboux equation, degrees of an unbounded operator, Dirichlet problem, unique solvability.

AMS Subject Classification: 34G10

1. Введение. В банаховом пространстве E на полуоси $t \geq 0$ при $k < 1$ рассматривается задача Дирихле для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = -P(A)u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| \leq M, \quad (2)$$

где

$$P(A)u(t) = (-1)^{m+1}B_{2m}A^{2m}u(t) + \sum_{n=0}^{2m-1} B_n A^n u(t),$$

$B_n, n = 0, 1, \dots, 2m$ — ограниченные операторы, действующие в E , A — генератор C_0 -группы $T(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $D(A) \subset E$. Будем предполагать, что ограниченные операторные коэффициенты B_n и генератор группы A удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Область определения $D(A)$ инвариантна относительно ограниченных операторов $B_n, n = 0, 1, \dots, 2m$, $AB_n x = B_n A x, x \in D(A)$, и спектр $\sigma(B_{2m})$ оператора B_{2m} расположен правее вертикальной прямой $\operatorname{Re} \lambda = \delta > 0$ (условие параболичности).

Рассматриваемый случай назовем эллиптическим. Решением задачи Дирихле (1), (2) будем называть абстрактную функцию $u(t)$ со значением в $D(A^{2m})$, дважды непрерывно дифференцируемую при $t > 0$, непрерывную при $t \geq 0$ и удовлетворяющую уравнению (1) и условию (2).

Абстрактные параболические уравнения с оператором $P(A)$ исследовались ранее в [7], а в гиперболическом случае начальная задача для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, содержащего степени неограниченного оператора A , изучались в [2, 4]. В настоящей работе будет рассмотрена задача (1), (2) в эллиптическом случае, при этом мы будем использовать построенное в [7] фундаментальное решение $G(t, s)$ уравнения

$$\frac{\partial v(t, s)}{\partial t} = (-1)^{m+1} B_{2m} \frac{\partial^{2m} v(t, s)}{\partial s^{2m}} + \sum_{n=0}^{2m-1} (-1)^n B_n \frac{\partial^n v(t, s)}{\partial s^n}, \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

которое имеет вид

$$G(t, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\sigma} Q(t, \sigma) d\sigma, \quad (4)$$

где

$$Q(t, \sigma) = \exp \left(-t\sigma^{2m} B_{2m} + t \sum_{n=0}^{2m-1} (-i\sigma)^n B_n \right).$$

Наряду с уравнением (3) в области $t > 0, s \in \mathbb{R}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 w(t, s)}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial w(t, s)}{\partial t} = (-1)^m B_{2m} \frac{\partial^{2m} w(t, s)}{\partial s^{2m}} - \sum_{n=0}^{2m-1} (-1)^n B_n \frac{\partial^n w(t, s)}{\partial s^n}, \quad w(0, s) = \delta(s). \quad (5)$$

Применяя к задаче (5) преобразование Фурье по переменной $s \in \mathbb{R}$ и учитывая формулу связи решения задачи Дирихле для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с решением задачи Коши для параболического уравнения (см. [3, теорема 3]), введем в рассмотрение следующую операторную функцию, являющуюся решением задачи (5):

$$Z_k(t, s) = \frac{t^{1-k}}{2^k \pi \Gamma(1/2 - k/2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\sigma} \int_0^{\infty} \tau^{k/2-3/2} \exp \left(-\frac{t^2}{4\tau} \right) e^{Q(\tau, \sigma)} d\tau d\sigma = \int_0^{\infty} h_k(t, \tau) G(\tau, s) d\tau, \quad (6)$$

где $G(\tau, s)$ определена равенством (4),

$$h_k(t, \tau) = \frac{t^{1-k} \tau^{k/2-3/2}}{2^{1-k} \Gamma(1/2 - k/2)} \exp \left(-\frac{t^2}{4\tau} \right), \quad t \geq 0, \quad \tau > 0.$$

В дальнейшем для обоснования существования решения задачи Дирихле (1), (2) нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $t \geq 0, b > 0, \beta > 0, \gamma > 1$. Тогда для функции вида

$$f(t) = \int_0^{\infty} s^{-\gamma} \exp \left(-\frac{b}{s} - \frac{t}{s^\beta} \right) ds$$

существуют такие постоянные $M_1, M_2 > 0$, что справедлива оценка

$$f(t) \leq \frac{M_1}{M_2 + t^{(\gamma-1)/\beta}}. \quad (7)$$

Доказательство. При $t > 0$ после замены получим

$$f(t) = t^{(1-\gamma)/\beta} \int_0^{\infty} \xi^{-\gamma} \exp \left(-\frac{b}{\xi t^{1/\beta}} - \frac{1}{\xi^\beta} \right) d\xi < M_4 t^{(1-\gamma)/\beta},$$

что вместе с очевидным неравенством $f(t) \leq f(0) = M_3$ приводит к неравенству (7). $\square$

В зависимости от вида и свойств операторов A и $P(A)$ дальнейшее исследование будет разбито на два случая.

2. Задача Дирихле в случае $k < 1$. Рассмотрим задачу Дирихле в случае $k < 1$ при выполнении условия

$$P(A)u(t) = (-1)^{m+1} B_{2m} A^{2m} u(t).$$

Для этого случая в [7] установлена следующая оценка для фундаментального решения $G(t, s)$, определяемого равенством (4):

$$\left\| \frac{\partial^j G(t, s)}{\partial s^j} \right\| \leq M_j t^{-(j+1)/(2m)} \exp \left(-a t^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} \right), \quad a > 0. \quad (8)$$

Доказательство этой оценки проводится методами, развитыми в [9, гл. 1] для случая матричных коэффициентов B_j . В случае равномерной ограниченности группы $T(s)$ определена аналитическая полугруппа

$$U(t; P(A))x = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) T(s) x ds \quad (9)$$

с генератором $P(A)$, областью определения которого является $D(A^{2m})$.

Используем лемму 1 для оценки производных операторной функции $Z_k(t, s)$ в рассматриваемом в этом разделе случае.

Лемма 2. Для определяемой равенством (6) операторной функции $Z_k(t, s)$ и ее производных до порядка $j = 0, 1, \dots, 2m$ при $t > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| \leq \frac{M_{k,j} t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}}, \quad M_{k,j} > 0. \quad (10)$$

Доказательство. Продифференцируем равенство (6) и воспользуемся оценкой (8). После замены переменных будем иметь

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| &\leq M_j \int_0^\infty h_k(t, \tau) \tau^{-(j+1)/(2m)} \exp \left(-a \tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} \right) d\tau = \\ &= \frac{M_j t^{1-k}}{2^{1-k} \Gamma(1/2 - k/2)} \int_0^\infty \tau^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)} \exp \left(-\frac{t^2}{4\tau} - a \tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} \right) d\tau = \\ &= \frac{M_j t^{-(j+1)/m}}{2^{1-k} \Gamma(1/2 - k/2)} \int_0^\infty \xi^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)} \exp \left(-\frac{1}{4\xi} - \frac{a(|s|^m/t)^{2/(2m-1)}}{\xi^{1/(2m-1)}} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Оценив последний интеграл с помощью неравенства (7) из леммы 1 при

$$b = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2m-1}, \quad \gamma = \frac{j+1-m(k-3)}{2m},$$

получим требуемое неравенство (10):

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| &\leq \frac{M_j t^{-(j+1)/m}}{2^{1-k} \Gamma(1/2 - k/2)} \cdot \frac{M_1}{M_2 + \left(1/4 (|s|^m/t)^{2/(2m-1)} \right)^{(j+1+m-mk)(2m-1)/(2m)}} \leq \\ &\leq \frac{M_{k,j} t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}}. \quad \square \end{aligned}$$

Предполагая равномерную ограниченность группы $T(s)$, генератором которой является оператор A , введем в рассмотрение операторную функцию

$$W_k(t)x = \int_{-\infty}^{\infty} Z_k(t, s)T(s)x ds, \quad x \in E,$$

при этом сходимость интеграла и возможность его дифференцирования по переменной t обусловлены равенством (5) и оценкой (10). Операторная функция $W_k(t)$ будет использована при установлении однозначной разрешимости задачи Дирихле (1), (2).

Теорема 1. Пусть оператор A является генератором равномерно ограниченной группы $T(s)$, $u_0 \in D(A^{2m})$ и выполнено условие 1. Тогда задача Дирихле (1), (2) имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \int_{-\infty}^{\infty} Z_k(t, s)T(s)u_0 ds, \quad (11)$$

где $Z_k(t, s)$ определена равенством (6).

Доказательство. Поскольку функция $Z_k(t, s)u_0$ удовлетворяет задаче (5), то непосредственно проверяется, что определяемая равенством (11) функция $u(t) = W_k(t)u_0$ является решением задачи Дирихле (1), (2). Действительно, начальное условие $u(0) = u_0$ очевидно, а после интегрирования по частям внеинтегральные слагаемые обратятся в нуль, и мы получим

$$\begin{aligned} u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 Z_k(t, s)}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial Z_k(t, s)}{\partial t} \right) T(s)u_0 ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left((-1)^m B_{2m} \frac{\partial^{2m} Z_k(t, s)}{\partial s^{2m}} \right) T(s)u_0 ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left((-1)^m B_{2m} Z_k(t, s) \frac{d^{2m} T(s)u_0}{ds^{2m}} \right) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^m B_{2m} Z_k(t, s) A^{2m} T(s)u_0 ds = -P(A)u(t). \end{aligned}$$

Доказательство единственности решения задачи (1), (2) будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения этой задачи. Рассмотрим функцию двух переменных $w(t, y) = f(W_k(y)(u_1(t) - u_2(t)))$, где $f \in E^*$ (E^* — сопряженное пространство), $t, y \geq 0$. Очевидно, она удовлетворяет уравнению и условиям

$$\frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial w(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial w(t, y)}{\partial y}, \quad t, y > 0, \quad (12)$$

$$w(0, y) = 0, \quad \sup_{t, y \geq 0} \|w(t, y)\| < M. \quad (13)$$

Интерпретируем функцию $w(t, y)$ как обобщенную функцию и по переменной y применим I -преобразование. Для обычных экспоненциально убывающих при $y \rightarrow +\infty$ функций I -преобразование определяется равенством

$$\hat{w}(t, \lambda) = \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda y} I_p(\lambda y) w(t, y) dy,$$

где $p = (k-1)/2$, $I_p(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя. Распространение этого преобразования на обобщенные функции изложено в [10], [1, с. 63]; при этом пространством основных функций также являются экспоненциально убывающие при $y \rightarrow +\infty$ функции, на которых и обеспечивается корректное определение I -преобразования обобщенной функции $w(t, y)$.

Из условий (12), (13) для образа $\hat{w}(t, \lambda)$ в пространстве регулярных обобщенных функций получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}(t, \lambda)}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial \hat{w}(t, \lambda)}{\partial t} = \lambda^2 \hat{w}(t, \lambda), \quad t > 0, \quad (14)$$

$$\hat{w}(0, \lambda) = 0, \quad \sup_{\substack{t \geq 0, \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \|\hat{w}(t, \lambda)\| < M. \quad (15)$$

Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$\hat{w}(t, \lambda) = t^{(1-k)/2} (d_1(\lambda) I_{(k-1)/2}(\lambda t) + d_2(\lambda) K_{(k-1)/2}(\lambda t)),$$

где $I_{(k-1)/2}(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, $K_{(k-1)/2}(\cdot)$ — функция Макдональда.

Из второго условия в (15) вытекает равенство $d_1(\lambda) = 0$, а из первого условия в (15) — равенство $d_2(\lambda) = 0$. Поэтому $\hat{w}(t, \lambda) = w(t, y) = 0$ для любого $y \geq 0$. В силу произвольности функционала $f \in E^*$ при $y = 0$ получим равенство $u_1(t) \equiv u_2(t)$, и единственность решения задачи Дирихле (1), (2) установлена. $\square$

Пример 1. Пусть $k < 1$, $P(A)u(t) = (-1)^{m+1} A^{2m} u(t)$. Тогда, учитывая формулу (4), получим

$$Q(t, \sigma) = e^{-t\sigma^{2m}}, \quad G(t, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\sigma - t\sigma^{2m}} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(s\sigma) e^{-t\sigma^{2m}} d\sigma.$$

Последний интеграл только при $m = 1$ вычисляется в элементарных функциях и дает фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$G(t, s) \Big|_{m=1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right).$$

При $m \geq 2$ выражение для интеграла весьма громоздкое и содержит специальные функции. Например,

$$G(t, s) \Big|_{m=2} = \frac{\Gamma(5/4)}{\pi t^{1/4}} {}_0F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{s^4}{256t}\right) - \frac{\Gamma(3/4)s^2}{8\pi t^{3/4}} {}_0F_2\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}; \frac{s^4}{256t}\right),$$

где ${}_0F_2(\cdot)$ — гипергеометрическая функция.

Подставляя фундаментальное решение в (6) и учитывая интеграл 2.3.3.1 из [8], находим

$$\begin{aligned} Z_k(t, s) \Big|_{m=1} &= \frac{t^{1-k}}{2^{2-k} \sqrt{\pi} \Gamma(1/2 - k/2)} \int_0^\infty \tau^{k/2-2} \exp\left(-\frac{t^2 + s^2}{4\tau}\right) d\tau = \\ &= \frac{t^{1-k}}{2^{2-k} \sqrt{\pi} \Gamma(1/2 - k/2)} \int_0^\infty \xi^{-k/2} \exp\left(-\frac{t^2 + s^2}{4}\xi\right) d\xi = \frac{\Gamma(1 - k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 - k/2)} (t^2 + s^2)^{k/2-1}. \end{aligned}$$

Наконец, по формуле (11) запишем решение задачи Дирихле (1), (2) при $m = 1$ в виде

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \int_{-\infty}^\infty Z_k(t, s)T(s)u_0 ds = \frac{\Gamma(1 - k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 - k/2)} \int_{-\infty}^\infty \frac{T(s)u_0 ds}{(t^2 + s^2)^{1-k/2}}.$$

В частности, если $E = L_p(-\infty, \infty)$, $p > 1$, $T(s)$ — группа сдвигов с генератором $A = d/dx$, то при $m = 1$

$$u(t, x) = \frac{\Gamma(1 - k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 - k/2)} \int_{-\infty}^\infty \frac{u_0(x + s) ds}{(t^2 + s^2)^{1-k/2}} = \frac{\Gamma(1 - k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 - k/2)} \int_{-\infty}^\infty \frac{u_0(\xi) d\xi}{(t^2 + (\xi - x)^2)^{1-k/2}}.$$

Пусть $E = \mathbb{R}$, $A = iA_0$, $A_0 \in \mathbb{R}$, $T(s) = e^{iA_0 s}$; тогда

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \frac{\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iA_0 s} u_0 ds}{(t^2 + s^2)^{1-k/2}} = \frac{2\Gamma(1-k/2)t^{1-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k/2)} \int_0^{\infty} \frac{\cos(A_0 s) u_0 ds}{(t^2 + s^2)^{1-k/2}}.$$

Если $A_0 > 0$, то, вычисляя интеграл по формуле 2.5.6.4 из [8], получим

$$u(t) = \frac{2^{k/2+1/2}(A_0 t)^{1/2-k/2}}{\Gamma(1/2-k/2)} K_{1/2-k/2}(A_0 t) u_0,$$

где $K_\nu(\cdot)$ — функция Макдональда.

Из оценки (10), вообще говоря, не вытекает стремление решения $u(t) = W_k(t)u_0$ к нулю при $t \rightarrow \infty$. Приведем достаточное условие, обеспечивающее это стремление.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно при $s \in \mathbb{R}$

$$\left\| \int_0^s T(\tau) u_0 d\tau \right\| \leq \Upsilon \|u_0\|, \quad \Upsilon > 0. \quad (16)$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_k(t) u_0 = 0.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, запишем решение задачи Дирихле в виде

$$u(t) = W_k(t) u_0 = \int_{-\infty}^{\infty} Z_k(t, s) T(s) u_0 ds = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Z_k(t, s)}{\partial s} \int_0^s T(\tau) u_0 d\tau ds.$$

Применяя оценку (10) уже для производной, а также неравенство (16), получим

$$\|W_k(t) u_0\| \leq \Upsilon M_{k,1} \|u_0\| t^{1-k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{t^{1-k+2/m} + |s|^{m(1-k)+2}} = \frac{\Upsilon M_{k,1} \|u_0\|}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{1 + |\xi|^{m(1-k)+2}},$$

откуда и вытекает утверждение теоремы. $\square$

Отметим, что условие (16) выполнено, если, например, точка $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора A , $0 \in \rho(A)$. Тогда

$$\int_0^s T(\tau) u_0 d\tau = \int_0^s A T(\tau) A^{-1} u_0 d\tau = \int_0^s T'(\tau) A^{-1} u_0 d\tau = (T(s) - I) A^{-1} u_0,$$

и тем самым условие (16) справедливо, поскольку группа $T(t)$ равномерно ограничена.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда $E = H$ — гильбертово пространство и $A = iA_0$, где A_0 — самосопряженный оператор, действующий в H , $0 \in \rho(A_0)$. Пусть E_λ — спектральная функция оператора A_0 . По теореме Стоуна (см., например, [6, § 4, теорема 4.7]) оператор A_0 является генератором унитарной группы

$$T(t; A_0)x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda x, \quad x \in H,$$

которая удовлетворяет неравенству (16). Действительно,

$$\int_0^t T(s; A_0)x ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t e^{i\lambda s} ds dE_\lambda x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t} - 1}{i\lambda} dE_\lambda x = -i(T(t; A_0) - I) A_0^{-1} x,$$

и неравенство (16), очевидно, выполнено.

3. Задача Дирихле в случае $k < 1$. Рассмотрим задачу Дирихле при $k < 1$ и выполнении условий

$$P(A)u(t) = (-1)^{m+1} B_{2m} A^{2m} u(t) + \sum_{n=0}^{2m-1} B_n A^n u(t), \quad \sum_{n=0}^{2m-1} B_n A^n \neq 0.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$B = -\mu^{2m} B_{2m} + \sum_{n=0}^{2m-1} (-i\mu)^n B_n, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Условие 2. Если

$$\sum_{n=0}^{2m-1} B_n A^n \neq 0,$$

то при любом $\mu \in \mathbb{R}$ спектр $\sigma(B)$ оператора B не лежит на мнимой оси.

В случае выполнения условия 2 в [7] установлена следующая оценка фундаментального решения $G(t, s)$, определяемого равенством (4):

$$\left\| \frac{\partial^j G(t, s)}{\partial s^j} \right\| \leq M_j t^{-(j+1)/(2m)} \exp \left(-at^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} - \delta_1 t \right), \quad (17)$$

где $M_j > 0$, $a > 0$, $0 < \delta_1 < \delta$, постоянная δ взята из условия 1 (параболичности). Отметим, что в отличие от оценки (8) оценка (17) содержит множитель $\exp(-\delta_1 t)$.

Покажем, что условие 2 позволит ослабить требование равномерной ограниченности группы $T(s)$ при установлении разрешимости задачи Дирихле и допустить ее экспоненциальный рост.

Лемма 3. Если выполнены условия 2, то для операторной функции $Z_k(t, s)$, определяемой равенством (6), и ее производных до порядка $j = 0, 1, \dots, 2m$ существуют такие постоянные $M_{k,j}$, Ω , $\Omega_1 > 0$, что при $t > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| \leq \frac{M_{k,j} t^{1-k}}{t^{1-k+(j+1)/m} + |s|^{m(1-k)+j+1}} e^{-\Omega_1 t - \Omega |s|}. \quad (18)$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве леммы 2, продифференцируем равенство (6) и воспользуемся оценкой (17). Введя обозначения

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2, \quad 0 < a_1 < a, \quad a_2 = a - a_1, \quad 0 < b_1 < 1, \quad b_2 = 1 - b_1, \\ \delta_1 &= \delta_2 + \delta_3, \quad 0 < \delta_2 < \delta_1, \quad \delta_3 = \delta_1 - \delta_2, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| &\leq M_j \int_0^\infty h_k(t, \tau) \tau^{-(j+1)/(2m)} \exp \left(-a\tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} - \delta_1 \tau \right) d\tau = \\ &= \frac{M_j t^{1-k}}{2^{k-1} \Gamma(1/2 - k/2)} \int_0^\infty \tau^{k/2-3/2-(j+1)/(2m)} \times \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{(b_1 + b_2)t^2}{4\tau} - (a_1 + a_2)\tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} - (\delta_2 + \delta_3)\tau \right) d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

Покажем далее, что при $s \in \mathbb{R}$, $t, \tau > 0$ справедливы неравенства

$$\exp \left(-a_2 \tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} - \delta_3 \tau \right) \leq e^{-\Omega |s|}, \quad (20)$$

$$\exp \left(-b_2 \tau^{-1} t^2 - \delta_2 \tau \right) \leq e^{-\Omega_1 t}, \quad (21)$$

где

$$\Omega = a_2^{(2m-1)/(2m)} (\delta_3 (2m-1))^{1/(2m)} + \delta_3^{1/(2m)} (a_2/(2m-1))^{(2m-1)/(2m)}, \quad \Omega_1 = 2\sqrt{b_2 \delta_2}. \quad (22)$$

Очевидно, неравенство $\ddot{E}(20)$ выполнено при $s = 0$. Пусть теперь $s \neq 0$; докажем, что

$$a_2 \tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} + \delta_3 \tau \geq \Omega |s| \iff a_2 \left(\frac{|s|}{\tau} \right)^{1/(2m-1)} + \delta_3 \frac{\tau}{|s|} \geq \Omega.$$

Наименьшее значение функции $\varphi(t) = a_2 t^{1/(2m-1)} + \delta_3/t$ при $t > 0$ равно Ω , что и доказывает неравенство (20). Неравенство (21) получается из (20) заменой a_2 на b_2 , m на 1, s на t , δ_3 на δ_2 .

Учитывая неравенства (20), (21) из (19) выводим оценку

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^j Z_k(t, s)}{\partial s^j} \right\| &\leq \frac{M_j t^{1-k}}{2^{k-1} \Gamma(1/2 - k/2)} e^{-\Omega_1 t - \Omega |s|} \times \\ &\times \int_0^\infty \tau^{k/2 - 3/2 - (j+1)/(2m)} \exp \left(-\frac{b_1 t^2}{4\tau} - a_1 \tau^{1/(1-2m)} |s|^{2m/(2m-1)} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Оценка интеграла в неравенстве (23) фактически была произведена ранее в лемме 2. Применяя эту оценку, мы приходим к требуемому неравенству (18). $\square$

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1 и 2, $u_0 \in D(A^{2m})$, оператор A является генератором группы $T(s)$, $s \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей оценке

$$\|T(s)\| \leq \Upsilon e^{\omega |s|}, \quad \Upsilon \geq 1, \quad 0 \leq \omega < \Omega,$$

где постоянная Ω взята из (22). Тогда задача Дирихле (1), (2) имеет единственное решение, стремящееся к нулю при $t \rightarrow \infty$, которое представимо в виде

$$u(t) = W_k(t) u_0 = \int_{-\infty}^\infty Z_k(t, s) T(s) u_0 ds,$$

где $Z_k(t, s)$ определена равенством (6).

Доказательство. Сходимость определяющего функцию $u(t) = W_k(t) u_0$ интеграла и возможность его дифференцирования обусловлены оценкой (18). Проверим, что эта функция является решением задачи Дирихле (1), (2). Действительно, после интегрирования по частям внеинтегральные слагаемые обратятся в нуль, и мы получим

$$\begin{aligned} u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) &= \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\partial^2 Z_k(t, s)}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial Z_k(t, s)}{\partial t} \right) T(s) u_0 ds = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left((-1)^m B_{2m} \frac{\partial^{2m} Z_k(t, s)}{\partial s^{2m}} - \sum_{n=0}^{2m-1} (-1)^n B_n \frac{\partial^n Z_k(t, s)}{\partial s^n} \right) T(s) u_0 ds = \\ &= \int_{-\infty}^\infty Z_k(t, s) \left((-1)^m B_{2m} \frac{\partial^{2m} T(s) u_0}{\partial s^{2m}} - \sum_{n=0}^{2m-1} B_n \frac{\partial^n T(s) u_0}{\partial s^n} \right) ds = \\ &= \int_{-\infty}^\infty Z_k(t, s) \left((-1)^m B_{2m} A^{2m} T(s) u_0 - \sum_{n=0}^{2m-1} B_n A^n T(s) u_0 \right) ds = -P(A) u(t). \end{aligned}$$

Поскольку оценка (18) содержит множитель $\exp(-\Omega_1 t)$, то, очевидно, решение $u(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Остальные утверждения теоремы 3 уже фактически установлены в теореме 1. $\square$

Замечание 1. Если в теореме 3 условие 2 не выполнено, то, как и в теореме 1, группа $T(s)$ должна быть равномерно ограниченной. При этом указанное решение задачи Дирихле (1), (2), вообще говоря, не обязано стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. Для стремления решения к нулю, как и в теореме 2, от группы $T(s)$ следует потребовать выполнения неравенства (16).

Пример 3. Пусть $E = \mathbb{R}$, $A = iA_0$, $A_0 \in \mathbb{R}$, $T(s) = e^{iA_0 s}$, $m = 1$, $P(A) = B_2 A^2 + B_1 A + B_0$, где $B_2 > 0$ (условие параболичности). Пусть также $B_0 < 0$; при этом оператор $B = -\mu^2 B_2 - i\mu B_1 - B_0$ для $\mu \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию 2 и, кроме того, $B_1^2/(4B_2) - B_0 > 0$ (условие эллиптичности многочлена $P(A) = B_2 A^2 + B_1 A + B_0$). Тогда, учитывая результаты примера 1, получим

$$\begin{aligned} Q(t, \sigma) &= \exp(-tB_2\sigma^2 - itB_1\sigma + tB_0), \quad G(t, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t B_2}} \exp\left(-\frac{(s - tB_1)^2}{4tB_2} + tB_0\right), \\ Z_k(t, s) &= \frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\Gamma(1/2 - k/2)\sqrt{\pi B_2}} \int_0^\infty \tau^{k/2-2} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau} - \frac{(s - \tau B_1)^2}{4\tau B_2} + \tau B_0\right) d\tau = \\ &= \frac{t^{1-k}}{2^{2-k}\Gamma(1/2 - k/2)\sqrt{\pi B_2}} \int_0^\infty \tau^{k/2-2} \exp\left(-\frac{t^2 B_2 + s^2}{4\tau B_2} + \frac{sB_1}{2B_2} - \frac{\tau B_1^2}{4B_2} + \tau B_0\right) d\tau = \\ &= \frac{t^{1-k}(t^2 B_2 + s^2)^{k/4-1/2}}{2^{1-k}\Gamma(1/2 - k/2)\sqrt{\pi B_2} (B_1^2 - 4B_0 B_2)^{k/4-1/2}} \exp\left(\frac{sB_1}{2B_2}\right) K_{1-k/2}\left(\frac{\sqrt{(B_1^2 - 4B_0 B_2)(t^2 B_2 + s^2)}}{2B_2}\right); \end{aligned}$$

при этом был использован интеграл 2.3.16.1 из [8]. По формуле (11) запишем решение задачи Дирихле (1), (2) при $m = 1$ в виде

$$u(t) = W_k(t)u_0 = \int_{-\infty}^{\infty} Z_k(t, s)e^{iA_0 s} u_0 ds.$$

Наконец, отметим, что в силу экспоненциального убывания функции Макдональда при $s \rightarrow \infty$ в настоящем примере можно использовать не только чисто мнимые значения A , но и $A \in \mathbb{R}$, $|A| < \Omega$ при некоторых $\Omega > 0$.

4. Весовые граничные задачи в случае $k \geq 1$. Непосредственной проверкой устанавливается следующее утверждение.

Лемма 4. Если при $k < 1$ функция $v_k(t)$ удовлетворяет задаче Дирихле (1), (2), то при $k > 1$ функция $u(t) = t^{1-k}v_{2-k}(t)$ является ограниченным на бесконечности решением уравнения (1), удовлетворяющим условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{k-1}u(t) = u_0. \quad (24)$$

Из леммы 4 и теоремы 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $k > 1$, $u_0 \in D(A^{2m})$, выполнены условия 1 и 2, оператор A является генератором группы $T(s)$, $s \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей оценке

$$\|T(s)\| \leq \Upsilon e^{\omega|s|}, \quad \Upsilon \geq 1, \quad 0 \leq \omega < \Omega,$$

где постоянная Ω взята из (22). Тогда весовая задача Дирихле (1), (24) имеет единственное решение, стремящееся к нулю при $t \rightarrow \infty$, которое представимо в виде

$$u(t) = t^{1-k} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{2-k}(t, s)T(s)u_0 ds,$$

где $Z_{2-k}(t, s)$ определена равенством (6).

Как уже было установлено ранее, в случае, если выполнено условие 2, то определяемая равенством (9) полугруппа $U(t; P(A))$ является сжимающей, поэтому по теореме 5.6 из [6, гл. 1, § 5] оператор $P_{1/2} = -\sqrt{-P(A)}$ является генератором сжимающей полугруппы $U_1(t; P_{1/2})$, которая имеет вид

$$U_1(t; P_{1/2}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin(t\sqrt{\tau}) (\tau I + P_{1/2})^{-1} d\tau$$

(о дробных степенях операторов см., например, [6, гл. 1, § 5]).

В силу теоремы 3 [5] справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $k \geq 1$, $u_0 \in D(A^{2m})$, выполнены условия 1 и 2, оператор A является генератором группы $T(s)$, $s \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей оценке

$$\|T(s)\| \leq \Upsilon e^{\omega|s|}, \quad \Upsilon > 1, \quad 0 \leq \omega < \Omega,$$

где постоянная Ω взята из (22). Тогда функция

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(k)} \int_1^\infty (\xi^2 - 1)^{k/2-1} U_1(t\xi; P_{1/2})(-P_{1/2})^{k-1} u_1 d\xi$$

является единственным решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям вида

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^k u'(t) = u_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0. \quad (25)$$

Теорема 5, по сравнению с задачей (1), (24), содержит решение еще одной весовой граничной задачи при $k > 1$, а также решение задачи (1), (25) при $k = 1$, которое имеет вид

$$u(t) = -\int_1^\infty (\xi^2 - 1)^{-1/2} U_1(t\xi; -\sqrt{-P(A)}) u_1 d\xi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. — М.: Наука, 1977.
2. Воробьева С. А., Глушак А. В. Абстрактное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу, содержащее степени неограниченного оператора // Диффер. уравн. — 2001. — 37, № 5. — С. 706–709.
3. Глушак А. В. О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве // Диффер. уравн. — 1997. — 33, № 4. — С. 510–514.
4. Глушак А. В. О свойствах решений уравнений, содержащих степени неограниченного оператора // Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 10. — С. 1355–1365.
5. Глушак А. В. О связи решений абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с дробными степенями операторного коэффициента уравнения // Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 5. — С. 575–590.
6. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
7. Кононенко В. И., Шмулевич С. Д. Об одном абстрактном параболическом уравнении // Изв. вузов. Мат. — 1984. — № 4. — С. 72–75.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.
9. Эйдельман С. Д. Параболические системы. — М.: Наука, 1964.
10. Koh E. L., Zemanian A. N. The complex Hankel and I -transformations of generalized functions // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — 16, № 5. — P. 945–957.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Глушак Александр Васильевич

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: aaleglu@mail.ru, Glushak@bsu.edu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 228 (2023). С. 20–31
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-228-20-31

УДК 517.929

ВЛИЯНИЕ КОНКУРЕНЦИИ НА ДИНАМИКУ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2023 г. А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ, Д. Г. ФРОЛОВ

Аннотация. Изучается задача о взаимодействии (конкуренции) двух идентичных макроэкономических систем в случае, когда динамику каждой из них моделирует известная система дифференциальных уравнений Кейнса. Показано, что эту задачу можно интерпретировать как задачу о синхронизации двух автоколебательных систем. Анализ основан на методе интегральных многообразий и методе нормальных форм Пуанкаре. Показано, что в задаче возникают колебания трех типов: полностью синхронные автоколебания, противофазные, а также асимметричные. Для всех решений исследована их устойчивость и получены асимптотические формулы.

Ключевые слова: модель Кейнса, экономический цикл, конкуренция, интегральное многообразие, асимптотика, нормальная форма, устойчивость, бифуркация.

THE INFLUENCE OF COMPETITION ON THE DYNAMICS OF MACROECONOMIC SYSTEMS

© 2023 A. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV, D. G. FROLOV

ABSTRACT. The problem of interaction (competition) of two identical macroeconomic systems is studied in the case where the dynamics of each of them is modeled by the well-known Keynes system of differential equations. It is shown that this problem can be interpreted as the problem of synchronization of two self-oscillating systems. The analysis is based on the method of integral manifolds and Poincaré method of normal forms. We prove that three types of oscillations arise in the problem: completely synchronous self-oscillations, antiphase oscillations, and asymmetric oscillations. For all solutions, their stability is examined and asymptotic formulas are obtained.

Keywords and phrases: Keynes model, economic cycle, competition, integral manifold, asymptotics, normal form, stability, bifurcation.

AMS Subject Classification: 35L10, 35L30, 37N40

1. Введение. Одной из известных математических макроэкономических моделей можно считать модель Кейнса. К ее созданию привели идеи монографии [8]. В современной форме она приведена в монографии [13]:

$$Y'_\tau = I(Y, R) - S(Y, R), \quad R'_\tau = L(Y, R) - L_s. \quad (1)$$

Здесь через τ обозначено время, $Y = Y(\tau)$ — доход изучаемого экономического субъекта, R — процентная ставка (например, центрального банка или средняя ставка коммерческих банков,

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2023-948).

функционирующих в данном экономическом субъекте), $I(Y, R)$ — функция спроса на инвестиции, $S(Y, R)$ — функция сбережений, $L(Y, R)$ — суммарный спрос на деньги, а L_s — положительная постоянная, которую называют предложением денег. Более детальное обсуждение системы дифференциальных уравнений (1) можно найти в монографии [13], а также во многих статьях (см., например, [11, 12]).

При этом считают, что функции $I = I(Y, R)$, $S = S(Y, R)$, $L = L(Y, R)$ должны обладать следующими свойствами (см. [13]):

- (i) они достаточно гладко зависят от своих аргументов Y, R , если эти аргументы положительны;
- (ii) в том же диапазоне изменения аргументов Y и R справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial Y} &> 0, & \frac{\partial S}{\partial Y} &> 0, & \frac{\partial L}{\partial Y} &> 0, \\ \frac{\partial I}{\partial R} &< 0, & \frac{\partial S}{\partial R} &> 0, & \frac{\partial L}{\partial R} &< 0; \end{aligned}$$

- (iii) система дифференциальных уравнений (1) имеет единственное состояние равновесия с положительными координатами, т.е. при $Y, R > 0$ система уравнений

$$I(Y, R) - S(Y, R) = 0, \quad L(Y, R) - L_s = 0$$

имеет единственное решение $Y = Y_0$, $R = R_0$, где Y_0 , R_0 — некоторые положительные постоянные. В макроэкономике такое состояние равновесия называют состоянием экономического равновесия.

Отметим, что выполнение первых двух условий не обязательно означает, что такое состояние равновесия существует.

Система дифференциальных уравнений (1), в частности, была предложена для того, чтобы отразить в математической модели явление цикличности, характерное для рыночной экономики. С математической точки зрения анализ такой модели был бы более эффективен при большей конкретизации функций $I(Y, R)$, $S(Y, R)$, $L(Y, R)$ с сохранением необходимых свойств. В связи с этим вместо системы дифференциальных уравнений (1) предлагается изучать более конкретизированную систему дифференциальных уравнений

$$Y'_\tau = a_1 \frac{Y^2}{R} - a_2 Y R, \quad R'_\tau = a_3 \frac{Y}{R} - L_s, \quad (2)$$

где a_1, a_2, a_3 — некоторые положительные постоянные. Замены

$$\tau = \gamma_0 t, \quad R = \gamma_1 x, \quad Y = \gamma_2 y,$$

где

$$\gamma_0 = \frac{a_1}{a_2 a_3}, \quad \gamma_1 = \frac{a_3}{a_1}, \quad \gamma_2 = \frac{a_2 a_3^2}{a_1^3},$$

приводят систему дифференциальных уравнений (2) к следующей нормированной системе:

$$x'_t = \frac{y}{x} - \gamma, \quad y'_t = \frac{y^2}{x} - xy, \quad (3)$$

где теперь $\gamma = L_s a_1^2 / (a_2 a_3^2) > 0$. Величина γ играет роль основного параметра в системе дифференциальных уравнений (3).

Отметим, что система дифференциальных уравнений (3) имеет единственное состояние равновесия

$$S : x = \gamma, \quad y = \gamma^2. \quad (4)$$

Состояние равновесия (4) асимптотически устойчиво, если $\gamma \in (0, 1)$ и оно неустойчиво, если $\gamma \in (1, \infty)$. При $\gamma = 1$ в задаче об устойчивости S реализуется критический случай пары чисто мнимых собственных значений.

Если выбрать $\gamma = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то можно показать, что в окрестности состояния равновесия S у системы дифференциальных уравнений (3) существует устойчивый предельный цикл, амплитуда

которого пропорциональна $\varepsilon^{1/2}$ (см. [11, 12]). Этот цикл интерпретируют как «экономический цикл».

Пусть теперь рассматриваются две идентичные экономики, которые конкурируют (взаимодействуют). Возникает естественный вопрос о совместной динамике сформированной таким образом экономической системы. В качестве одной из возможных математических моделей, описывающих их совместную динамику, рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{y_1}{x_1} - \gamma + \varepsilon d(x_2 - x_1), & \dot{y}_1 = \frac{y_1^2}{x_1} - x_1 y_1 + \varepsilon d(y_2 - y_1), \\ \dot{x}_2 = \frac{y_2}{x_2} - \gamma + \varepsilon d(x_1 - x_2), & \dot{y}_2 = \frac{y_2^2}{x_2} - x_2 y_2 + \varepsilon d(y_1 - y_2), \end{cases} \quad (5)$$

где $\gamma = 1 + \nu\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\nu = \pm 1$ (подходящий знак будет выбран в процессе анализа системы дифференциальных уравнений (5)). Здесь и ниже точкой обозначается производная функций x_1, y_1, x_2, y_2 по основной (нормированной) переменной t . Наконец, $d \in \mathbb{R}$ и, естественно, $d \neq 0$. При $d = 0$ получаем две экономические модели, которые независимы (не связаны друг с другом). В такой ситуации ($d = 0$) каждая из подсистем совершает колебания с одинаковыми характеристиками, но при этом фазы колебаний независимы. При $d \neq 0$ возможно появление синхронизированных колебаний. Этот вопрос и будет изучаться далее. Особо отметим, что последние слагаемые в каждом из уравнений пропорциональны ε , где ε — малый параметр, т.е. конкуренция достаточно мала. Тем не менее, как будет показано далее, даже такой вариант учета конкурентного взаимодействия приводит к существенному влиянию экономик друг на друга.

В физике учет взаимодействия, принятый в системах (5), называют диффузионным: при $d > 0$ — диссипативным, а при $d < 0$ — активным (см. [4–6, 9]).

Замечание 1. Подчеркнем еще раз, что в данной работе изучается вопрос о синхронизации в случае «слабого» взаимодействия. Такая постановка достаточно типична для задач теории синхронизации. Вместе с тем учет конкурентного взаимодействия может быть произведен не только так, как это сделано в рамках системы (5).

В работе [11] вместо системы (5) изучалась система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{y_1}{x_1} - \gamma, & \dot{y}_1 = \frac{y_1^2}{x_1} - x_1 y_1 + \varepsilon d(y_2 - y_1), \\ \dot{x}_2 = \frac{y_2}{x_2} - \gamma, & \dot{y}_2 = \frac{y_2^2}{x_2} - x_2 y_2 + \varepsilon d(y_1 - y_2). \end{cases}$$

В последнем варианте постановки задача рассмотрена ситуация, когда нет взаимодействия (конкуренции) банковских систем. Иными словами банковские системы двух конкурирующих экономик достаточно изолированы друг от друга.

Вариант системы, предложенной в данной работе, предполагает учет взаимодействия (конкуренции) как на рынке товаров, так и в банковской сфере. Например, у предприятий первой экономической системы существует возможность получать кредиты у банков, обслуживающих вторую экономическую систему и наоборот.

2. Предварительные построения. Постановка задачи. В системе дифференциальных уравнений (5) сделаем замену

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 + \nu\varepsilon) + u_1, & y_1 &= (1 + \nu\varepsilon)^2 + u_2, \\ x_2 &= (1 + \nu\varepsilon) + v_1, & y_2 &= (1 + \nu\varepsilon)^2 + v_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Замена (6) позволяет сформировать систему дифференциальных уравнений для новых переменных $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $v_1 = v_1(t)$, $v_2 = v_2(t)$ — отклонений от состояния экономического равновесия. В результате получим

$$\begin{cases} \dot{u} = A_0 u + \varepsilon \nu A_1 u + F_2(u) + F_3(u) + F_0(u, \varepsilon) + \varepsilon d D(v - u), \\ \dot{v} = A_0 v + \varepsilon \nu A_1 v + F_2(v) + F_3(v) + F_0(v, \varepsilon) + \varepsilon d D(u - v), \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $u = \text{col}(u_1, u_2)$, $v = \text{col}(v_1, v_2)$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, нелинейные слагаемые $F_2(w)$, $F_3(w)$, где $w = \text{col}(w_1, w_2)$, определены следующим образом:

$$F_2(w) = \begin{pmatrix} w_1^2 - w_1 w_2 \\ w_1^2 - 3w_1 w_2 + w_2^2 \end{pmatrix}, \quad F_3(w) = \begin{pmatrix} -w_1^3 + w_1^2 w_2 \\ -w_1^3 + 2w_1^2 w_2 - w_1 w_2^2 \end{pmatrix},$$

а вектор-функция $F_0(w, \varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по отношению к совокупности переменных, т.е. w, ε .

Нелинейные слагаемые $F_2(w)$, $F_3(w)$ получены после подстановок (6) в правые части дифференциальных уравнений (5) и в явном виде выписаны только квадратичные и кубические слагаемые, играющие определяющую роль в дальнейших конструкциях. Естественно, остальные слагаемые могут быть также найдены, если продолжить разложение членов из правых частей систем (5) в соответствующие ряды Тейлора. В результате получили систему из четырех дифференциальных уравнений, линеаризованный вариант которой при $\varepsilon = 0$ имеет следующий вид:

$$\dot{u} = A_0 u, \quad \dot{v} = A_0 v. \quad (8)$$

Подчеркнем, что матрица A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i$, которым соответствуют собственные векторы $e = \text{col}(1, 1+i)$ и $\bar{e} = \text{col}(1, 1-i)$. Следовательно, каждая из подсистем (8) имеет периодические решения $E(t) = \exp(it)e$ и $\bar{E}(t) = \exp(-it)\bar{e}$.

Далее будем изучать окрестность нулевого состояния равновесия нелинейной системы дифференциальных уравнений (7) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где ε_0 — достаточно малая положительная постоянная. В частности, вопрос о существовании и устойчивости периодических решений. Эти и другие вопросы будут изучаться на основе применения и соответствующего развития метода нормальных форм и интегральных многообразий (см. например, [1, 7]).

3. Нормальная форма. Перейдем к вопросу о построении системы дифференциальных уравнений первого порядка — нормальной форме. Решения системы дифференциальных уравнений (7) будем искать в следующем виде (см., например, [3, 9, 10]):

$$u = \varepsilon^{1/2} q_u + \varepsilon p_u + \varepsilon^{3/2} r_u + O(\varepsilon^2), \quad v = \varepsilon^{1/2} q_v + \varepsilon p_v + \varepsilon^{3/2} r_v + O(\varepsilon^2), \quad (9)$$

где $q_u = q_u(t) = z_1 E(t) + \bar{z}_1 \bar{E}(t)$, $q_v = q_v(t) = z_2 E(t) + \bar{z}_2 \bar{E}(t)$, $z_j = z_j(s)$, $s = \varepsilon t$, $j = 1, 2$.

Прежде чем продолжить построение нормальной формы напомним некоторые достаточно известные факты.

Замечание 2. 1. Рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{w} = -A_0^* w, \quad A_0^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Система дифференциальных уравнений (10) имеет два линейно независимых 2π -периодических решения

$$H(t) = \exp(it)h, \quad \bar{H}(t) = \exp(-it)\bar{h} \quad (11)$$

где $h, \bar{h}$ — собственные элементы матрицы $-A_0^*$, отвечающие ее собственным числам $\pm i$ соответственно. Если в равенствах (11) выбрать $h = \text{col}((1-i)/2, i/2)$, $\bar{h} = \text{col}((1+i)/2, -i/2)$, то векторы $e, \bar{e}, h, \bar{h}$ образуют биортонормированную систему.

2. Пусть рассматривается система из двух линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\dot{w} = A_0 w + f(t) \quad (12)$$

где $w = \text{col}(w_1(t), w_2(t))$, $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t))$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — достаточно гладкие 2π -периодические функции. Система (12) имеет 2π -периодические решения тогда и только тогда, если

$$M_{\pm}(f) = 0, \quad M_+(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t), H(t)) dt, \quad M_-(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t), \bar{H}(t)) dt. \quad (13)$$

Равенства (13) носят название условий разрешимости (см. [2]). Решение $w_*(t)$ системы (12), для которого

$$M_{\pm}(w_*) = 0, \quad (14)$$

единственно.

Будем считать, что вектор-функции

$$p_u = p_u(t, z_1, \bar{z}_1), \quad p_v = p_v(t, z_2, \bar{z}_2), \quad r_u = r_u(t, z_1, \bar{z}_1), \quad r_v = r_v(t, z_2, \bar{z}_2)$$

из сумм (9) удовлетворяют следующим условиям:

- (i) они достаточно гладко зависят от своих аргументов;
- (ii) по t имеют период 2π ;
- (iii) $M_{\pm}(p_u) = M_{\pm}(p_v) = M_{\pm}(r_u) = M_{\pm}(r_v) = 0$.

Подставим суммы (9) в нелинейную систему (7) и приравняем слагаемые при одинаковых степенях ε , т.е. при $\varepsilon^{1/2}$, ε , $\varepsilon^{3/2}$, $\dots$. При $\varepsilon^{1/2}$ получим систему, для которой вектор-функция $\text{col}(q_u, q_v)$ является ее решением.

В результате для определения p_u , p_v , r_u , r_v получили системы линейных неоднородных уравнений следующего вида:

$$\dot{p}_u - A_0 p_u = G_u(t, z_1, \bar{z}_1), \quad \dot{p}_v - A_0 p_v = G_v(t, z_2, \bar{z}_2), \quad (15)$$

а также

$$\dot{r}_u - A_0 r_u = Q_u(t, z_1, \bar{z}_1), \quad \dot{r}_v - A_0 r_v = Q_v(t, z_2, \bar{z}_2), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} G_u &= \begin{pmatrix} G_{1u} \\ G_{2u} \end{pmatrix}, \quad G_v = \begin{pmatrix} G_{1v} \\ G_{2v} \end{pmatrix}, \quad Q_u = \begin{pmatrix} Q_{1u} \\ Q_{2u} \end{pmatrix}, \quad Q_v = \begin{pmatrix} Q_{1v} \\ Q_{2v} \end{pmatrix}, \\ G_{1u} &= q_{1u}^2 - q_{1u}q_{2u}, \quad G_{2u} = q_{1u}^2 - 3q_{1u}q_{2u} + q_{2u}^2, \\ G_{1v} &= q_{1v}^2 - q_{1v}q_{2v}, \quad G_{2v} = q_{1v}^2 - 3q_{1v}q_{2v} + q_{2v}^2, \\ Q_{1u} &= (2q_{1u}p_{1u} - q_{2u}p_{1u} - q_{1u}p_{2u}) + (-q_{1u}^3 + q_{1u}^2q_{2u}) - \\ &\quad - (z_1' \exp(it) + \bar{z}_1' \exp(-it)) - \nu q_{2u} + d(q_{1v} - q_{1u}), \\ Q_{2u} &= (2q_{1u}p_{1u} - 3(p_{1u}q_{2u} + p_{2u}q_{1u}) + 2q_{2u}p_{2u}) + (-q_{1u}^3 + 2q_{1u}^2q_{2u} - q_{1u}q_{2u}^2) - \\ &\quad - (z_1'(1+i) \exp(it) + \bar{z}_1'(1-i) \exp(-it)) + \nu(-4q_{1u} + q_{2u}) + d(q_{2v} - q_{1u}), \\ Q_{1v} &= (2q_{1v}p_{1v} - q_{2v}p_{1v} - q_{1v}p_{2v}) + (-q_{1v}^3 + q_{1v}^2q_{2v}) - \\ &\quad - (z_2' \exp(it) + \bar{z}_2' \exp(-it)) - \nu q_{2u} + d(q_{1u} - q_{1v}), \\ Q_{2v} &= (2q_{1v}p_{1v} - 3[p_{1v}q_{2v} + p_{2v}q_{1v}] + 2q_{2v}p_{2v}) + (-q_{1v}^3 + 2q_{1v}^2q_{2v} - q_{1v}q_{2v}^2) - \\ &\quad - (z_2'(1+i) \exp(it) + \bar{z}_2'(1-i) \exp(-it)) + \nu(-4q_{1v} + q_{2v}) + d(q_{2u} - q_{2v}). \end{aligned}$$

Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений (15) однозначно разрешимы в рассматриваемом классе функций. После громоздких вычислений оказалось, что решения систем (15), удовлетворяющих равенству (14) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} p_{1u} &= 0, \quad p_{2u} = z_1^2 i \exp(2it) - \bar{z}_1^2 i \exp(-2it), \\ p_{1v} &= 0, \quad p_{2v} = z_2^2 i \exp(2it) - \bar{z}_2^2 i \exp(-2it). \end{aligned}$$

Обратимся к системе дифференциальных уравнений (16). Из условий ее разрешимости (13) в классе 2π периодических функций получаем два равенства для $z_1(s)$, $z_2(s)$. После их преобразований полученные равенства приобретают форму дифференциальных уравнений для комплекснозначных функций $z_1 = z_1(s)$, $z_2 = z_2(s)$:

$$\begin{cases} z_1' = \frac{\nu}{2}(1+i)z_1 - \frac{1}{2}(1+i)z_1|z_1|^2 + d(z_2 - z_1), \\ z_2' = \frac{\nu}{2}(1+i)z_2 - \frac{1}{2}(1+i)z_2|z_2|^2 + d(z_1 - z_2). \end{cases} \quad (17)$$

Именно эту систему и следует интерпретировать как нормальную форму (см., например, [1, 7]). Подчеркнем, что здесь важен лишь укороченный ее вариант. В ней опущены слагаемые, стремящиеся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. Анализ нормальной формы. В этом разделе будем изучать систему дифференциальных уравнений (17). Можно показать, что она диссипативна. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(z, \bar{z}) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2$. Производная V в силу системы (17) равна

$$D_t V = \nu(|z_1|^2 + |z_2|^2) - (|z_1|^4 + |z_2|^4) + 2d(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) - 2d(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Пусть $v_1 = x_1^2 + y_1^2$, $v_2 = x_2^2 + y_2^2$; следовательно, $V = v_1 + v_2$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} D_t V &= (\nu - 2d)(v_1 + v_2) - (v_1^2 + v_2^2) + 4d(x_1 x_2 + y_1 y_2) \leq \\ &\leq (|\nu| - 2d + 2|d|)(v_1 + v_2) - (v_1^2 + v_2^2) \leq (|\nu| + 4|d|)(v_1 + v_2) - \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \\ &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(2(|\nu| + 4|d|) - (v_1 + v_2)). \end{aligned}$$

Напомним, что $\nu = \pm 1$, т.е. $|\nu| = 1$. Поэтому

$$D_t V = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(2(1 + 4|d|) - (v_1 + v_2)) < 0,$$

если $v_1 + v_2 > 2(1 + 4|d|)$. Но с геометрической точки зрения $v_1 + v_2 = r^2$, где r — радиус шара в пространстве $\mathbb{R}^4(\mathbb{C}^2)$ с центром в начале координат. Из результатов, изложенных в [2, гл. 2, § 17] это и доказывает диссипативность системы дифференциальных уравнений (17).

Лемма 1. Если $\nu = 1$, то при любом выборе d нулевое решение неустойчиво. Если же $\nu = -1$, то нулевое решение устойчиво при $d > -1/4$ и неустойчиво при $d < -1/4$. При $\nu = 0$ реализуется критический случай нулевого собственного значения в задаче об устойчивости решения $z_1 = z_2 = 0$.

Основной вопрос, который будет изучаться далее — это вопрос о существовании и устойчивости ненулевых периодических решений системы дифференциальных уравнений (17). Для этого в ней перейдем к тригонометрической форме записи комплексных переменных и положим

$$z_1(s) = \rho_1(s) \exp(i\varphi_1(s)), \quad z_2(s) = \rho_2(s) \exp(i\varphi_2(s)). \quad (18)$$

В результате получим сначала систему из четырех действительных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \rho_1' = \frac{\nu}{2}\rho_1 - \frac{1}{2}\rho_1^3 + d(\rho_2 \cos \psi - \rho_1), \\ \rho_2' = \frac{\nu}{2}\rho_2 - \frac{1}{2}\rho_2^3 + d(\rho_1 \cos \psi - \rho_2), \\ \varphi_1' = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}\rho_1^2 + d\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \sin \psi, \\ \varphi_2' = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}\rho_2^2 - d\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \sin \psi, \end{cases} \quad (19)$$

где $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\varphi_j = \varphi_j(s)$, $\rho_j = \rho_j(s)$, $j = 1, 2$. Если теперь из четвертого уравнения системы (19) вычтем третье, то получим следующую замкнутую систему дифференциальных уравнений для «медленных» переменных $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$, $\psi(s) = \varphi_2(s) - \varphi_1(s)$:

$$\begin{cases} \rho_1' = \frac{\nu}{2}\rho_1 - \frac{1}{2}\rho_1^3 + d(\rho_2 \cos \psi - \rho_1), \\ \rho_2' = \frac{\nu}{2}\rho_2 - \frac{1}{2}\rho_2^3 + d(\rho_1 \cos \psi - \rho_2), \\ \psi' = \frac{1}{2}(\rho_1^2 - \rho_2^2) - d\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \sin \psi. \end{cases} \quad (20)$$

Ясно, что каждому состоянию равновесия системы (20) соответствует периодическое решение системы дифференциальных уравнений (17), что вытекает, в частности, из вида замены (18).

Можно заметить, что система дифференциальных уравнений (20) может иметь состояния равновесия трех типов:

- (а) S_0 : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\psi = 0$, где с необходимостью $\rho = 1$, если $\nu = 1$ (при $\nu = -1$ оно отсутствует);
- (б) S_c : $\rho_1 = \rho_2 = p = \sqrt{\nu - 4d}$, $\psi = \pi$, которое существует, если $\nu - 4d > 0$;
- (с) S_a : состояния равновесия, для которых характерны условия $\rho_1 \neq \rho_2$ и $\psi \neq 0, \pi$.

Сначала рассмотрим вопрос об устойчивости состояния равновесия S_0 . Обозначим, через $B = \{b_{jk}\}$, $j, k = 1, 2, 3$, матрицу Якоби системы дифференциальных уравнений (20). Ее элементы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\nu}{2} - \frac{3}{2}\rho_1^2 - d, & b_{12} &= d \cos \psi, & b_{13} &= -d\rho_2 \sin \psi, \\ b_{21} &= d \cos \psi, & b_{22} &= \frac{\nu}{2} - \frac{3}{2}\rho_2^2 - d, & b_{23} &= -d\rho_1 \sin \psi, \\ b_{31} &= \rho_1 - d \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{\rho_2}{\rho_1^2} \right) \sin \psi, & b_{32} &= -\rho_2 - d \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2^2} \right) \sin \psi, & b_{33} &= -d \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \cos \psi. \end{aligned}$$

При анализе устойчивости состояния равновесия S_0 получаем матрицу B_0 , у которой собственные значения (при $\nu = 1$) равны

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1 - 2d, \quad \lambda_3 = -2d.$$

Лемма 2. *Состояние равновесия S_0 существует, если $\nu = 1$, и оно отсутствует, если $\nu = -1$ ($\nu = 0$). При этом оно асимптотически устойчиво, если $d > 0$, и неустойчиво, если $d < 0$ ($d \neq 0$ по условию).*

Лемма 3. *Состояние равновесия S_c существует, если $\nu - 4d > 0$. При этом оно асимптотически устойчиво, если $d < 0$, и неустойчиво, если $d > 0$.*

Доказательство леммы 3 опирается на анализ собственных значений матрицы B_c , т.е. матрицы Якоби, вычисленной в точке с координатами $\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{\nu - 4d}$, $\psi = \pi$. Она имеет собственные значения

$$\lambda_1 = 6d - \nu, \quad \lambda_2 = 4d - \nu, \quad \lambda_3 = 2d.$$

Следовательно, при $d < 0$ все собственные значения отрицательны и заведомо $\lambda_3 > 0$, если $d > 0$. Подчеркнем, что условие существования состояния S_c имеет вид $\nu - 4d > 0$.

Координаты состояний равновесия третьего типа S_a следует искать как корни следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \nu\rho_1 - \rho_1^3 = 2d(\rho_1 - \rho_2 \cos \psi), \\ \nu\rho_2 - \rho_2^3 = 2d(\rho_2 - \rho_1 \cos \psi), \\ \rho_1\rho_2(\rho_1^2 - \rho_2^2) = 2d(\rho_1^2 + \rho_2^2) \sin \psi, \end{cases} \quad (21)$$

при анализе которой следует учесть, что $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\psi \in \mathbb{R}$.

Преобразуем систему дифференциальных уравнений (21). Умножая первое уравнение системы (21) на ρ_1 , второе — на ρ_2 и вычитая одно из другого, получим

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \nu - 2d. \quad (22)$$

Умножая первое уравнение системы (21) на ρ_2 , второе — на ρ_1 и вычитая, получим

$$\rho_1\rho_2 = -2d \cos \psi. \quad (23)$$

Подставляя правые части равенств (22) и (23) в третье уравнение системы (21), приходим к новой системе для нахождения ρ_1, ρ_2, ψ :

$$\rho_1\rho_2 = -2d \cos \psi, \quad \rho_1^2 + \rho_2^2 = \nu - 2d, \quad \rho_2^2 - \rho_1^2 = (\nu - 2d) \operatorname{tg} \psi. \quad (24)$$

Сразу отметим, что у системы (24) решения существуют, если $\nu - 2d > 0$, т.е. $d \in (-\infty, \nu/2)$ (и $d \neq 0$). Подчеркнем, что при $d > 0$ величину ψ выбираем таким образом, что $\cos \psi < 0$ и, напротив,

при $d < 0$ следует выбрать ψ так, что $\cos \psi > 0$. Очевидно, что из системы уравнений (24) вытекают равенства

$$\begin{cases} \rho_1^2 = \frac{1}{2}(\nu - 2d)[1 - \operatorname{tg} \psi], \\ \rho_2^2 = \frac{1}{2}(\nu - 2d)[1 + \operatorname{tg} \psi]. \end{cases} \quad (25)$$

В частности, $\operatorname{tg}^2 \psi \in (0, 1)$. Если теперь уравнение (23) возвести в квадрат, использовать равенства (25), то после преобразований получим

$$\operatorname{tg}^4 \psi = \frac{(\nu + 2d)(\nu - 6d)}{(\nu - 2d)^2}. \quad (26)$$

При анализе системы (24) следует учесть (см. равенства (22), (26)), что

$$\nu - 2d > 0, \quad (\nu + 2d)(\nu - 6d) > 0$$

и при $\nu = -1$, $\nu = 0$ последние неравенства несовместимы. Если же $\nu = 1$, то $d \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/6)$. Пусть

$$\eta = \left(\frac{(1 + 2d)(1 - 6d)}{(1 - 2d)^2} \right)^{1/4}$$

и здесь $\eta \in (0, 1)$. Как известно, уравнение $\operatorname{tg} \psi = \eta$ имеет решения $\psi = \operatorname{arctg} \eta + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. В случае $d > 0$ ($\cos \psi < 0$) подходящим решением будет $\psi_+ = \operatorname{arctg} \psi + \pi$, а при $d < 0$ ($\cos \psi > 0$), соответственно, $\psi_- = \operatorname{arctg} \psi$.

Лемма 4. Если $\nu = -1$ или $\nu = 0$, то система уравнений (24) не имеет решений третьего типа.

Пусть $\nu = 1$. Тогда при $d \in (0, 1/6)$ эта система имеет два решения (два состояния равновесия для системы дифференциальных уравнений (20)):

$$\begin{aligned} (1) \quad \rho_1 = \eta_1 &= \sqrt{\frac{1 - 2d}{2}}(1 - \eta), \quad \rho_2 = \eta_2 = \sqrt{\frac{1 - 2d}{2}}(1 + \eta), \quad \psi = \psi_+ = \pi + \operatorname{arctg} \eta, \\ (2) \quad \rho_1 &= \eta_2, \quad \rho_2 = \eta_1, \quad \psi = \psi_- = \pi - \operatorname{arctg} \eta. \end{aligned}$$

Если $d \in (-1/2, 0)$, то получим также два набора решений:

$$\begin{aligned} (1) \quad \rho_1 = \eta_1 &= \sqrt{\frac{1 - 2d}{2}}(1 - \eta), \quad \rho_2 = \eta_2 = \sqrt{\frac{1 - 2d}{2}}(1 + \eta), \quad \psi = \operatorname{arctg} \eta, \\ (2) \quad \rho_1 = \eta_2 &= \sqrt{\frac{1 - 2d}{2}}(1 + \eta), \quad \rho_2 = \eta_1 = \sqrt{\frac{1 - 2d}{2}}(1 - \eta), \quad \psi = -\operatorname{arctg} \eta. \end{aligned}$$

Обозначим эти состояния равновесия $S_a(1)$ и $S_a(2)$. Анализ устойчивости $S_a(1)$, $S_a(2)$ предполагает анализ спектра матрицы Якоби B , вычисленной в точках с координатами (η_1, η_2, ψ) или (η_2, η_1, ψ) . Аналитический анализ характеристического уравнения в каждом из этих случаев не позволяет определить устойчивость (неустойчивость) этих состояний равновесия. Поэтому он был проведен следующим образом. Расположение корней характеристического уравнения опиралось на критерий Рауса—Гурвица, а знаки коэффициентов изучаемого многочлена и миноров определялись численно с использованием компьютера. Оказалось, что все состояния равновесия неустойчивы. Если условно записать характеристический многочлен в виде

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0,$$

то условия асимптотической устойчивости, как известно, сводятся к выполнению неравенств

$$P > 0, \quad Q > 0, \quad R > 0, \quad PQ - R > 0.$$

Компьютерные вычисления показали, что в рассматриваемой задаче об устойчивости состояний равновесия третьего типа $Q < 0$ и $PQ - R < 0$.

5. Основные результаты. Отметим, что состояниям равновесия S_0 , S_c , $S_a(1)$, $S_a(2)$ соответствуют либо периодические решения, либо состояния равновесия нормальной формы (17). Действительно, пусть S_0 — состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (20). Тогда третье и четвертое уравнения системы (19) запишутся в виде

$$\varphi'_1 = 0, \quad \varphi'_2 = 0,$$

т.е. $\varphi_1(s) = \alpha_1$, $\varphi_2(s) = \alpha_2$ и при этом $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и

$$z_1(s) = \exp(i\alpha), \quad z_2(s) = \exp(i\alpha).$$

Итак, нормальная форма (17) имеет однопараметрическое семейство решений вида

$$z_1(s) = z_2(s) = \exp(i\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Это семейство формирует одномерное инвариантное многообразие, которое будет локальным аттрактором. Подставив решения, определенные двумя последними равенствами, в суммы (9) можно заметить, что этим решениям нормальной формы (17) соответствуют периодические решения системы дифференциальных уравнений (7), а также (5), если в них $\gamma = 1 + \varepsilon$.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ система дифференциальных уравнений (7) при $\gamma = 1$ имеет устойчивый (орбитально асимптотически устойчивый) предельный цикл $C_0(\varepsilon)$, соответствующий S_0 . Для решений, его формирующих, справедливы асимптотические формулы*

$$u(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} u_{01}(t, \varepsilon) \\ u_{02}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad v(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} v_{01}(t, \varepsilon) \\ v_{02}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} v_{01}(t, \varepsilon) &= u_{01}(t, \varepsilon), \quad v_{02}(t, \varepsilon) = u_{02}(t, \varepsilon), \\ u_{01}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \left[\exp(i(t + \alpha)) + \exp(-i(t + \alpha)) \right] + o(\varepsilon), \\ u_{02}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \left[(1 + i) \exp(i(t + \alpha)) + (1 - i) \exp(-i(t + \alpha)) \right] + \\ &\quad + \varepsilon \left[i \exp(2i(t + \alpha)) - i \exp(-2i(t + \alpha)) \right] + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Равенства (6) восстанавливают периодические решения системы уравнений (5), принадлежащих окрестности состояния экономического равновесия

$$x_{01} = x_{02} = (1 + \varepsilon) + u_{01}(t, \varepsilon), \quad y_{01} = y_{02} = (1 + \varepsilon)^2 + u_{02}(t, \varepsilon).$$

Подчеркнем, что цикл соответствующий состоянию равновесия S_0 существует, если $\nu = 1$ и он устойчив (орбитально асимптотически устойчив), если $d > 0$. Такой цикл системы (5) принято называть синхронным (однородным) или циклом Андронова—Хопфа.

Рассмотрим теперь состояние равновесия S_c . Ему соответствует однопараметрическое семейство периодических решений нормальной формы (17)

$$z_1(s) = \sqrt{\nu - 4d} \exp(2ds + \varphi_1), \quad z_2(s) = \sqrt{\nu - 4d} \exp(2ds + \varphi_2), \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \pi, \quad \varphi_1 \in \mathbb{R},$$

которые, естественно, существуют при $\nu - 4d > 0$. Эти решения устойчивы, если $d < 0$ и неустойчивы при $d > 0$. Опираясь, на уравнения для интегральных многообразий (9), предшествующие построения, можно утверждать, что справедливо утверждение.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ система дифференциальных уравнений (7) имеет цикл $C_c(\varepsilon)$, соответствующий состоянию равновесия S_c системы дифференциальных уравнений (20), с наследованием свойств устойчивости. Для решений, его формирующих, справедливы асимптотические формулы*

$$u_c(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} u_{c1}(t, \varepsilon) \\ u_{c2}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad v_c(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} v_{c1}(t, \varepsilon) \\ v_{c2}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
u_{c1}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \sqrt{\nu - 4d} \left[\exp(i\sigma(\varepsilon)t + i\varphi) + \exp(-i\sigma(\varepsilon)t - i\varphi) \right] + o(\varepsilon), \\
u_{c2}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \sqrt{\nu - 4d} \left[(1+i) \exp(i\sigma(\varepsilon)t + i\varphi) + (1-i) \exp(-i\sigma(\varepsilon)t - i\varphi) \right] + \\
&\quad + \varepsilon(\nu - 4d) \left[i \exp(2i\sigma(\varepsilon)t + 2i\varphi) - i \exp(-2i\sigma(\varepsilon)t - 2i\varphi) \right] + o(\varepsilon), \\
v_{c1}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \sqrt{\nu - 4d} \left[\exp(i\sigma(\varepsilon)t + i(\varphi + \pi)) + \exp(-i\sigma(\varepsilon)t - i(\varphi + \pi)) \right] + o(\varepsilon), \\
v_{c2}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \sqrt{\nu - 4d} \left[(1+i) \exp(i\sigma(\varepsilon)t + i(\varphi + \pi)) + (1-i) \exp(-i\sigma(\varepsilon)t - i(\varphi + \pi)) \right] + \\
&\quad + \varepsilon(\nu - 4d) \left[i \exp(2i\sigma(\varepsilon)t + 2i(\varphi + \pi)) + \exp(-2i\sigma(\varepsilon)t - 2i(\varphi + \pi)) \right] + o(\varepsilon),
\end{aligned}$$

где $\sigma(\varepsilon) = (1 + 2d\varepsilon)$. Этим решениям систем (7) соответствуют периодические колебания системы (5) из окрестности состояния экономического равновесия:

$$\begin{aligned}
x_1(t, \varepsilon) &= (1 + \nu\varepsilon) + u_{c1}(t, \varepsilon), & y_1(t, \varepsilon) &= (1 + \nu\varepsilon)^2 + u_{c2}(t, \varepsilon), \\
x_2(t, \varepsilon) &= (1 + \nu\varepsilon) + v_{c1}(t, \varepsilon), & y_2(t, \varepsilon) &= (1 + \nu\varepsilon)^2 + v_{c2}(t, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Естественно, решения системы (5) существуют при тех ν , при которых существует состояние равновесия S_c системы дифференциальных уравнений (20); они устойчивы, если S_c асимптотически устойчиво, и неустойчивы при неустойчивом S_c .

Полученный в теореме 2 цикл системы дифференциальных уравнений (5) принят в теории синхронизации называть противофазным.

Наконец, состояниям равновесия $S_a(1)$, $S_a(2)$ системы дифференциальных уравнений (20) соответствуют циклы $C_{a1}(\varepsilon)$ и $C_{a2}(\varepsilon)$ системы дифференциальных уравнений (7), а также (5).

Теорема 3. Существует такое $\varepsilon_3 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ система дифференциальных уравнений (7) имеет неустойчивые циклы $C_{a1}(\varepsilon)$ и $C_{a2}(\varepsilon)$, соответствующие $S_a(1)$, $S_a(2)$. Для них справедливы асимптотические формулы, в которых выпишем только первые слагаемые. Так для цикла C_{a1} получаем, что

$$u_a(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} u_{a1}(t, \varepsilon) \\ u_{a2}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad v_a(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} v_{a1}(t, \varepsilon) \\ v_{a2}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
u_{1a}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \eta_1 \left[\exp(it + i\varphi_u) + \exp(-it - i\varphi_u) \right] + o(\varepsilon^{1/2}), \\
u_{2a}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \eta_1 \left[(1+i) \exp(it + i\varphi_u) + \exp(-it - i\varphi_u) \right] + o(\varepsilon^{1/2}), \\
v_{1a}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \eta_2 \left[\exp(it + i\varphi_v) + \exp(-it - i\varphi_v) \right] + o(\varepsilon^{1/2}), \\
v_{2a}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \eta_2 \left[(1+i) \exp(it + i\varphi_v) + (1-i) \exp(-it - i\varphi_v) \right] + o(\varepsilon^{1/2}),
\end{aligned}$$

где $\varphi_u \in \mathbb{R}$, $\varphi_v = \varphi_u + \psi$. При этом $\psi = \pi + \arctg \eta$, если $d \in (0, 1/6)$, и $\psi = \arctg \eta$, если $d \in (-1/2, 0)$.

Для цикла $C_{a2}(\varepsilon)$ получаем аналогичные формулы, но при их формировании необходимо в формуле для $C_{a1}(\varepsilon)$ поменять η_1 на η_2 , η_2 на η_1 и ψ на $-\psi$.

Естественно (см. предыдущие теоремы), циклу $C_{a1}(\varepsilon)$ систем (7) соответствует цикл $C_{a1}(\varepsilon)$ системы дифференциальных уравнений (5)

$$\begin{aligned}
x_1(t, \varepsilon) &= (1 + \nu\varepsilon) + u_{a1}(t, \varepsilon), & y_1(t, \varepsilon) &= (1 + \nu\varepsilon)^2 + u_{a2}(t, \varepsilon), \\
x_2(t, \varepsilon) &= (1 + \nu\varepsilon) + v_{a1}(t, \varepsilon), & y_2(t, \varepsilon) &= (1 + \nu\varepsilon)^2 + v_{a2}(t, \varepsilon),
\end{aligned}$$

а циклу $C_{a2}(\varepsilon)$ соответствует аналогичный цикл системы дифференциальных уравнений (5).

В теории синхронизации для циклов $C_{a1}(\varepsilon)$, $C_{a2}(\varepsilon)$ и им аналогичным используют наименование — асимметричные циклы. Такое название отчасти мотивировано тем, что первая и вторая компоненты совершают автоколебания с «разными амплитудами» ($\eta_2 \neq \eta_1$).

6. Заключение. В работе был рассмотрен вариант задачи о влиянии конкуренции или в более широкой терминологии о взаимодействии двух экономик в рамках известной модели макроэкономики — модели Кейнса. Выбран один из самых естественных вариантов воздействия одной экономики на другую и обратно. Даже такой вариант учета взаимодействия приводит к достаточно содержательным выводам. Например, синхронный режим существует всегда, т.е. остается возможность, когда колебания экономических показателей происходят синхронно. Вместе с тем не всегда такой вариант динамики устойчив. Он устойчив, если конкуренция носит чисто экономический характер и поэтому $d > 0$. При $d < 0$ реализуется вариант активной связи. В приложениях к экономике это означает, что существуют какие-либо не «экономические» формы воздействия одной экономики на другую, например, демпинг. В этом случае устойчивыми становятся противофазные колебания, когда подъем одной из экономик сопровождается падением показателей в другой, а через некоторое время ситуация меняется на противоположную, когда подъем второй экономики сопровождается падением первой. При этом по-прежнему существует полностью синхронный режим, но он неустойчив и поэтому практически не может быть реализован.

Эти и другие экономические выводы основаны на анализе динамической системы, характерной для такого раздела теории нелинейных колебаний как теория синхронизации. При этом использованы математически обоснованные методы анализа динамических систем. Их основу составляют метод интегральных многообразий и нормальных форм Пуанкаре. При построении основного объекта математической части исследования — нормальной формы была использована одна из модификаций алгоритма Крылова—Боголюбова перехода к «усредненной» системе для медленных переменных. Такой подход позволяет в случае слабой связи дать достаточно полный анализ малой окрестности состояния равновесия изучаемой динамической системы (состояния экономического равновесия).

Результаты, полученные в работе, были представлены в докладе на Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (27 января — 1 февраля 2023 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
3. Куликов Д. А. Автономные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2006. — 14, № 5. — С. 120–132.
4. Кузнецов А. П., Паксютов В. И. О динамике двух осцилляторов Ван дер Поля—Дуффинга с диссипативной связью // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2003. — 11, № 6. — С. 48–64.
5. Кузнецов А. П., Паксютов В. И., Роман Ю. П. Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов Ван дер Поля и Ван дер Поля—Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2007. — 15, № 4. — С. 3–15.
6. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное явление. — М.: Техносфера, 2003.
7. Guckenheimer J., Holmes P. J. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. — Berlin: Springer-Verlag, 1983.
8. Keynes J. M. General theory of employment, interest, and money. — New-York: Harcourt Brace, 1936.
9. Kulikov D. A. Self-similar cycles and their local bifurcations in the problem of two weakly coupled oscillators // J. Appl. Math. Mech. — 2010. — 74, № 4. — P. 389–400.
10. Kulikov D. A. Dynamics of coupled Van der Pol Oscillators // Journal of Mathematical Sciences. — 2022. — 262, № 6. — P. 817–824.
11. Radin M. A., Kulikov A. N., Kulikov D. A. Synchronization of fluctuations in the interaction of economies within the framework of the Keynes's business cycle model // Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences. — 2021. — 25, № 1. — P. 93–111.

12. *Radin M. A., Kulikov A. N., Kulikov D. A.* The influence of spatial effects on the dynamics of solutions in Keynes' mathematical model of the business cycle// *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*. — 2022. — 26, № 4. — P. 441–463.
13. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2023-948).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Куликов Анатолий Николаевич

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Фролов Дмитрий Геннадьевич

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: kulikov_d_a@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 228 (2023). С. 32–51
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-228-32-51

УДК 517.574, 517.53

О ТИПЕ ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОГО УТОЧНЕННОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. К. Г. МАЛЮТИН, М. В. КАБАНКО

Аннотация. В теории функций хорошо известна теорема Линделёфа о нулях целой функции: для того чтобы заданная последовательность была множеством нулей целой функции конечного порядка $\rho > 0$ и нормального типа, необходимо и достаточно, чтобы при нецелом ρ она имела конечную верхнюю плотность при этом порядке, а при целом ρ ещё дополнительно обладала некоторой асимптотической симметрией. В работе приведен обзор результатов, полученных в последнее время, относящихся к распространению теоремы Линделёфа на случай целых, аналитических в полуплоскости функций, а также мероморфных и субгармонических в комплексной плоскости и полуплоскости функций, рост которых определяется обобщённым уточнённым порядком. Аналогичные утверждения доказаны для дельта-субгармонических в комплексной плоскости. Полученные критерии сформулированы в терминах меры Рисса функции.

Ключевые слова: целая функция, мероморфная функция, субгармоническая функция, дельта-субгармоническая функция, обобщённый уточнённый порядок, тип функции, теорема Линделёфа, мера Рисса, полная мера.

ON THE TYPE OF DELTA-SUBHARMONIC FUNCTIONS OF GENERALIZED REFINED ORDER

© 2023 K. G. MALYUTIN, M. V. KABANKO

ABSTRACT. In function theory, the Lindelöf theorem on zeros of entire functions is well known: A given sequence is the set of zeros of an entire function of finite order $\rho > 0$ and normal type if and only if for noninteger ρ , it has a finite upper density at this order, and for integer ρ , it possesses, in addition, a certain asymptotic symmetry. In this paper, we give a review of recent results relating to the extension of Lindelöf theorem to the case of entire functions that are analytic in the half-plane and meromorphic and subharmonic functions in the complex plane and half-plane whose is determined by the generalized refined order. Similar statements are proved for delta-subharmonic functions in the complex plane. The resulting criteria are formulated in terms of the Riesz measure functions.

Keywords and phrases: entire function, meromorphic function, subharmonic function, delta-subharmonic function, generalized refined order, type of function, Lindelöf theorem, Riesz measure, full measure.

AMS Subject Classification: 31A05, 31A10, 30D15, 30D35

1. Введение. Вопросы описания нулей целых и аналитических функций, а также меры Рисса субгармонических функций, играют важную роль в теории функций. Классическая теорема Е. Линделёфа (см. [20]) утверждает, что нули целой функции конечного целого порядка и нормального типа, кроме конечной плотности должны обладать еще и определённой симметрией.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №22-21-00012).

Аналог теоремы Е. Линделёфа для субгармонических функций в комплексной плоскости и полуплоскости, рост которых определяется уточнённым порядком в смысле Валирона был получен А. Ф. Гришиным (см. [3–6]). Для целых и мероморфных во всей комплексной плоскости функций, рост которых определяется некоторой весовой функцией, обобщение этого критерия дано Л. Рубелом (см. [15]). Результат Л. Рубела распространён на дельта-субгармонические функции в полуплоскости в статье [11]. Соответствующие результаты, относящиеся к целым и аналитическим функциям в полуплоскости, рост которых определяется обобщённым уточнённым порядком, получены в [21].

Более тонкие результаты — это связь типа субгармонической функции с распределением её меры Рисса, в случае плоскости, или полной меры в случае полуплоскости. Известны классические результаты, когда тип функции определяется уточнённым порядком в смысле Валирона. Для целых функций соответствующие критерии можно найти в монографии Б. Я. Левина [10], а для мероморфных в комплексной плоскости — в монографии А. А. Гольдберга и И. В. Островского [2]. В статьях [22, 23] эти утверждения распространяются на целые, аналитические в полуплоскости, субгармонические в комплексной плоскости и полуплоскости функции, рост которых определяется обобщённым уточнённым порядком.

В данной работе мы распространяем эти утверждения на дельта-субгармонические в комплексной плоскости. Полученные критерии для плоскости формулируются в терминах меры Рисса функции.

Будем использовать следующие определения и терминологию. Через $K, M, \dots, \varepsilon, \delta, \dots$ будем обозначать положительные константы. Через $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ обозначаем множество целых положительных (натуральных) чисел, $\mathbb{C}$ — комплексную плоскость с вещественной осью $\mathbb{R}$ и положительной полуосью $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ — комплексную полуплоскость. G_+ означает пересечение множества G с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$, т.е. $G_+ = G \cap \mathbb{C}_+$. Одноточечные множества записываем без фигурных скобок, если это не вызывает разночтений. Для $+\infty \in \mathbb{R}$ используем и обозначение ∞ без знака $+$. Открытый круг радиуса r с центром в точке a будем обозначать через $C(a, r)$; в частности, $C(r) = C(0, r)$. Через $B(a, r) = \overline{C(a, r)}$ обозначим замкнутый круг, в частности, $B(r) = B(0, r)$, $\overline{G}$ — замыкание множества G , $D_+(r_1, r_2) = \overline{C(0, r_2)} \setminus C(0, r_1) \cap \mathbb{C}_+$ — замкнутое полукольцо в $\mathbb{C}_+$, $r_1 \leq r_2$. Через $x^+ := \sup\{0, x\} \in \mathbb{R}_+$ обозначаем неотрицательную часть элемента $x \in \mathbb{R}$, а через $x^- := (-x)_+ \in \mathbb{R}_+$ — его неположительную часть. Для расширенной числовой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ через $f^+ : x \mapsto f^+(x)$ обозначаем её неотрицательную, а $f^- := (-f)^+$ — неположительную часть.

1.1. Теорема Линделёфа для целых функций.

Определение 1.1. Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$, $r \in [0, +\infty)$, называется обобщённым уточнённым порядком, если она удовлетворяет условиям

$$0 < \alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) \leq \varrho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \rho(r) < +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho'(r) r \ln r = 0. \quad (1.1)$$

Здесь под ρ' мы понимаем наибольшее производное число. Если $\alpha = \varrho$, то функция ρ называется уточнённым порядком в смысле Валирона (часто — просто уточнённым порядком). Однако термин «уточнённый порядок» будем употреблять для обобщённого уточнённого порядка, поскольку, он будет наиболее часто встречаться в работе. Положим $V(r) = r^{\rho(r)}$, $r > 0$. Непосредственные вычисления дают соотношение

$$V'(r) = \frac{1}{r} V(r) (\rho(r) + r \ln r \rho'(r)).$$

Тогда из определения уточнённого порядка следует, что функция V при $\alpha > 0$ есть строго возрастающая функция в некоторой окрестности бесконечности. Ограничения, которые накладываются на функцию ρ , касаются ее поведения в окрестности бесконечности. В дальнейшем будем требовать, чтобы функция V при $\alpha > 0$ была монотонной, причем $\lim_{r \rightarrow +0} V(r) = V(0) = 1$. Это ограничение не уменьшает общности наших дальнейших рассуждений и носит технический характер, упрощая в некоторых случаях доказательства. Так, если для некоторой функции f в окрестности бесконечной точки справедливо неравенство $\ln |f(z)| \leq MV(|z|)$, то указанное ограничение

на функцию V позволяет в этом случае сделать заключение, что это неравенство, возможно с другой константой, справедливо во всей комплексной плоскости (полуплоскости).

Обозначим через $[\rho, \infty)$ пространство таких целых функций $f(z)$, что для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\ln |f(z)| \leq K_f V(|z|),$$

где $K_f > 0$ — постоянная, зависящая от f и не зависящая от z . Заметим, что пространство $[\rho, \infty)$ является областью целостности с обычными операциями.

Пусть $D = \{a_k, q_k\}_{k=1}^\omega$ — дивизор, т.е. множество различных комплексных чисел a_k вместе с их кратностями q_k , где $q_k \geq 1$ — целое число, $0 < r_0 \leq |a_k| \leq |a_{k+1}|$. Здесь $\omega \geq 0$ — целое число или бесконечность, если $\omega = 0$, то $D_f = \emptyset$. Введём меру, ассоциированную с дивизором D . Для множества G в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ введём обозначение $\mu_D(G) = \sum_{a_k \in G} q_k$. В частности,

при $r > 0$ положим $\mu_D(r) = \mu_D(C(0, r))$. Пусть $|D| = \bigcup_{k=1}^\infty a_k$. Включение $D \subset D' = \{b_n, p_n\}_{n=1}^\infty$ означает, что $|D| \subset |D'|$ и, если $a_k = b_n$, то $q_k \leq p_n$. Через D_f будем обозначать дивизор нулей функции f , через μ_f — величины, построенные с помощью дивизора D_f .

В теории функций хорошо известна следующая теорема Э. Линделёфа [20] (см. также [9, гл. 3, предложение 3.2], [26, Theorem 13.5.3]) о нулях целой функции конечного порядка и нормального типа.

Теорема 1.1. Пусть ρ — уточнённый порядок в смысле Валирона, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho > 0$. Для того чтобы дивизор D был дивизором нулей функции $f \in [\rho, \infty)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

(i) выполнение неравенства

$$\mu_D(r) \leq KV(r) \tag{1.2}$$

при некотором $K > 0$ и всех $r > 0$, если ϱ — нецелое число;

(ii) выполнение неравенства (1.2) при некотором $K > 0$ и всех $r > 0$ и существование такого комплексного числа α_ϱ , что функция

$$\frac{r^\rho}{V(r)} \left[\alpha_\varrho + \frac{1}{\varrho} \sum_{r_k < r} \frac{q_k}{a_k^\varrho} \right]$$

является ограниченной функцией от r , если ϱ — целое число.

Более тонкие результаты связаны с типом целой функции. Для целой функции f введём обозначение через $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Определение 1.2. Пусть ρ — уточнённый порядок, удовлетворяющий условию (1.1). Целая функция f называется функцией уточнённого порядка ρ , если

$$\sigma_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{V(r)} \neq 0, \infty.$$

Функция f называется функцией минимального типа относительно уточнённого порядка ρ , если $\sigma_f = 0$; функцией нормального типа, если $0 < \sigma_f < \infty$; функцией максимального типа, если $\sigma_f = \infty$.

Пусть D_f — дивизор нулей целой функции f и мера μ_f , соответствующая дивизору D_f , является мерой конечного V -типа, т.е.

$$\mu_f(r) \leq K_f V(r),$$

где $K_f > 0$ — константа, зависящая от функции f и не зависящая от r . Величина

$$\Delta_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu_f(r)}{V(r)}$$

называется верхней плотностью нулей функции f .

Определение 1.3. Целая функция f называется функцией конечного порядка, если

$$\varrho_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} < +\infty.$$

Число ϱ_f называется порядком функции f .

Теорема 1.2 (Э. Линделёф). Пусть f — целая функция нецелого порядка ϱ и ρ — некоторый уточнённый порядок в смысле Валирона, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho$. Если при этом $\Delta_f = 0$, то f — функция минимального типа по отношению к ρ ; если $0 < \Delta_f < \infty$, то f — функция нормального типа; если $\Delta_f = \infty$, то f — функция максимального типа.

Случай целого порядка ϱ является особым. В этом случае принадлежность функции к минимальному, нормальному или максимальному типу не определяется значением одной только верхней плотности Δ_f . Для того чтобы сформулировать соответствующий критерий, представим целую функцию f целого порядка ϱ в каноническом виде. Следующее утверждение о представлении целой функции f конечного порядка ϱ , восходящее к Ж. Адамару, является одной из классических теорем теории функций (см. [10, Chap. I, Theorem 13]).

Теорема 1.3. Целая функция f конечного порядка ϱ может быть представлена в виде

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{k=1}^{\omega} \left[E\left(\frac{z}{a_k}; p\right) \right]^{q_k}, \quad \omega \leq \infty, \quad (1.3)$$

где $a_k \neq 0$ — нули функции f кратности q_k , $p \leq \varrho$, $P(z) = \alpha_q z^q + \alpha_{q-1} z^{q-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ — полином степени q , не превосходящей ϱ , m — кратность нуля в точке $z = 0$.

Здесь

$$E(u; p) = (1 - u)e^{u + u^2/2 + \dots + u^p/p}, \quad p = 1, 2, \dots; \quad G(u; 0) = (1 - u),$$

— первичный множитель Вейерштрасса.

Равномерно сходящееся бесконечное произведение

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{\omega} \left[E\left(\frac{z}{a_k}; p\right) \right]^{q_k}$$

называется каноническим произведением нулей a_k , а число p — родом канонического произведения Π . Наибольшее из чисел p и q , где q — степень полинома P , называется родом целой функции f .

В исследовании функций целого порядка ϱ важную роль играет величина

$$\delta_f(r) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{r^\varrho}{V(r)} \left[\alpha_\varrho + \frac{1}{\varrho} \sum_{r_k < r} \frac{q_k}{a_k^\varrho} \right],$$

где α_ϱ — коэффициент при z^ϱ в экспоненциальном множителе в представлении (1.3). Положим

$$\delta_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |\delta_f(r)|, \quad \gamma_f = \max\{\Delta_f; \delta_f\}.$$

Вопрос о типе функции f по отношению к данному уточнённому порядку в смысле Валирона решается следующей теоремой Э. Линделёфа.

Теорема 1.4. Пусть ρ — уточнённый порядок в смысле Валирона, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho \geq 1$, ϱ — целое число.

- Если род p канонического произведения целой функции f целого порядка в представлении (1.3) равен её порядку $\varrho \geq 1$, то при $\gamma_f = 0$ функция $f(z)$ является функцией минимального типа, при $0 < \gamma_f < \infty$ — нормального типа, а при $\gamma_f = \infty$ — максимального типа.
- Если род p канонического произведения целой функции f целого порядка в представлении (1.3) меньше, чем её порядок $\varrho \geq 1$, тогда тип равен коэффициенту при z^ϱ в экспоненциальном множителе, стоящем перед каноническим произведением.

Замечание 1.1. В [20] теоремы 1.2 и 1.4 доказаны для случая $\rho(r) \equiv \varrho$. В приведенной формулировке они получены Б. Я. Левиным (см. [10, Chap. I, Theorems 17, 18]).

Теорема 1.1 распространена на случай обобщённого уточнённого порядка в [21]. Сформулируем один из результатов леммы 1.1 этой статьи в виде теоремы.

Теорема 1.5. Пусть ρ — обобщённый уточнённый порядок, удовлетворяющий условию (1.1). Для того чтобы дивизор D был дивизором нулей функции $f \in [\rho, \infty)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

(i) выполнение неравенства

$$\mu_D(r) \leq KV(r) \quad (1.4)$$

при некотором $K > 0$ и всех $r > 0$, если выполняется условие

$$[\alpha] < \alpha \leq \varrho < [\alpha] + 1; \quad (1.5)$$

(ii) выполнение условия (1.4) при некотором $K > 0$ и всех $r > 0$ и существование таких комплексных чисел α_j , $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих неравенству $\alpha \leq j \leq \varrho$, для которых величины

$$\frac{r^j}{V(r)} \left[\alpha_j + \frac{1}{j} \sum_{r_k < r} \frac{q_k}{a_k^j} \right]$$

являются ограниченными функциями от r , если условие (1.5) не выполняется.

Замечание 1.2. Теорема 1.1 — частный случай теоремы 1.5, если $[\alpha] < \alpha = \varrho < [\alpha] + 1$.

Распространение теорем 1.2 и 1.4 на случай обобщённого уточнённого порядка получено в [22].

Теорема 1.6. Пусть $f \in [\rho, \infty)$ и обобщённый уточнённый порядок ρ удовлетворяет условию (1.5). Если при этом $\Delta_f = 0$, то f — функция минимального типа по отношению к ρ , если $0 < \Delta_f < \infty$ — то нормального типа, и если $\Delta_f = \infty$ — то максимального.

Замечание 1.3. Теорема 1.2 — частный случай теоремы 1.6, когда ρ — уточнённый порядок в смысле Валирона и $\alpha = \varrho$ — нецелое число.

Случай целого порядка ϱ , как и в случае уточнённого порядка в смысле Валирона, является и здесь особенным. В этом случае, так же как и в теореме 1.4, принадлежность функции к минимальному, нормальному или максимальному типу не определяется значением одной только верхней плотностью Δ_f .

Рассмотрим представление Адамара (1.3) целой функции f конечного порядка ϱ . При $j \in \mathbb{N}$ и $r > 0$ определим величины

$$S(r; j, \mu_f) = \frac{1}{j} \iint_{|\zeta| \leq r} \frac{d\mu_f(\zeta)}{\zeta^j}$$

(здесь μ_f — мера, ассоциированная с точками a_k). Положим

$$L_j(r) = \frac{V(r)}{r^j}, \quad j = 1, 2, \dots; \quad \tilde{\alpha} = \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq \alpha\}; \quad \delta_{f,j}(r) = \alpha_j + S_+(r; j, \mu_f);$$

$$\delta_{f,j} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{|\delta_{f,j}(r)|}{L_j(r)}, \quad j = \tilde{\alpha}, \dots, [\varrho]; \quad \delta_f = \sum_{j=\tilde{\alpha}}^{[\varrho]} \delta_{f,j}, \quad \gamma_f = \max\{\Delta_f, \delta_f\}.$$

Вопрос о типе функции f по отношению к данному обобщённому уточнённому порядку решается следующим обобщением теоремы 1.4.

Теорема 1.7. Пусть f — целая функция целого порядка ϱ и ρ — некоторый уточнённый порядок, удовлетворяющий условию (1.1). Если при этом показатель $\gamma_f = 0$, то f — функция минимального типа по отношению к ρ , если $0 < \gamma_f < \infty$ — нормального типа, если $\gamma_f = \infty$ — максимального типа.

Замечание 1.4. Теорема 1.4 — частный случай теоремы 1.7, когда ρ — уточнённый порядок в смысле Валирона и $\alpha = \varrho$ — целое число.

В заключение остановимся на смысле условий $\delta_f < \infty$, $\delta_f = 0$, которые играют существенную роль в случае равенства $p = \varrho$. При этом равенстве ограниченность величины δ_f возможна только при особой симметрии в расположении нулей a_n . При отсутствии такой симметрии $\delta_f = \infty$. В этом случае, согласно теореме 1.7, f — функция максимального типа.

При данном обобщённом уточнённом порядке можно ввести понятие о категории функции, так же как это делается для уточнённого порядка в смысле Валирона.

Функции f и g относятся к одной категории, если σ_f и σ_g оба бесконечны, конечны и положительны или равны нулю. Для таких обобщённых категорий справедливо следующее утверждение:

Предложение. Категория произведения функций f и g не превосходит большей из категорий сомножителей, и если категории функций f и g различны, то совпадает с большей из этих категорий.

Доказательство проведём, воспользовавшись следующими соображениями, основанными на теоремах 1.6 и 1.7. Из равенства $\mu_{fg}(r) = \mu_f(r) + \mu_g(r)$ следует: $\Delta_{fg} \leq \Delta_f + \Delta_g$, причём знак равенства имеет место, если из двух слагаемых правой части по крайней мере одно равно нулю или только одно равно бесконечности.

У функций нецелого порядка, удовлетворяющих условию (1.5), величины σ_f и Δ_f одновременно равны нулю, бесконечности или положительному числу. Отсюда непосредственно следует утверждение для этого случая. Если условие (1.5) не выполняется, то надлежит ещё принять во внимание соотношение $\delta_{fg}(r) = \delta_f(r) + \delta_g(r)$. Утверждение в этом случае легко получится, если заметить, что по теореме 1.7 категория функции вполне определяется величиной $\gamma_f = \max\{\sigma_f, \Delta_f\}$. $\square$

2. Мероморфные и субгармонические функции.

2.1. Теорема Линделёфа для мероморфных функций. Введем необходимые определения. Пусть μ — мера (вообще говоря, знакопеременная, т.е. заряд) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $\mu(r)$ — мера круга $C(r)$. Если не оговорено противное, всюду предполагаем, что $0 \notin \text{supp } \mu$, поскольку это ограничение в рамках рассматриваемых вопросов всегда легко снимается. Введем *проинтегрированную (усредненную) функцию меры* μ :

$$N_\mu(r) = \int_0^r \frac{\mu(t)}{t} dt.$$

Пусть f — мероморфная функция на комплексной плоскости, $\{a_\nu\}$ и $\{b_\mu\}$ — последовательности нулей и полюсов функции f , с учетом их кратностей, не лежащих в $z = 0$. Положим

$$\mu_f^+(G) = \sum_{a_\nu \in G} 1, \quad \mu_f^-(G) = \sum_{b_\mu \in G} 1, \quad \mu_f(G) = \mu_f^+(G) - \mu_f^-(G), \quad |\mu_f| = \mu_f^+ + \mu_f^-,$$

$$|N|(r, f) = N_{|\mu_f|}(r), \quad N(r, f) = N_{\mu_f^-}(r), \quad N^+(r, f) = N_{\mu_f^+}(r),$$

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi, \quad T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Пусть $w(r)$ — определенная при $r > 0$ (для достаточно больших r) неотрицательная неубывающая функция. Число

$$\varrho = \varrho[w] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ w(r)}{\ln r}$$

называется *порядком* функции w . Функция w имеет конечный или бесконечный порядок в зависимости от того, будет ли $\rho < \infty$ или $\rho = \infty$.

Пусть ρ — обобщённый уточненный порядок, удовлетворяющий условию (1.1). Пусть функция w имеет конечный порядок ϱ . Число

$$\sigma = \sigma[w] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{w(r)}{V(r)}$$

называется *величиной типа* функции w относительно ρ . Если $\sigma = 0$, то w имеет *минимальный тип*, если $0 < \sigma < \infty$ — *нормальный*, если $\sigma = \infty$ — *максимальный тип*. Мероморфная функция f имеет тот же порядок и тип (относительно ρ), что и ее характеристическая функция $T(r, f)$.

Мероморфная функция конечного порядка допускает следующее удобное представление (см. [2, гл. II, теорема 4.1]).

Теорема 2.1. Пусть f — мероморфная функция конечного порядка ϱ , $\{a_\nu\}$ и $\{b_\mu\}$ — последовательности нулей и полюсов функции f , не лежащих в точке $z = 0$, p_1 — род последовательности $\{a_\nu\}$, p_2 — род последовательности $\{b_\mu\}$. Пусть в окрестности $z = 0$ функция f имеет разложение $f(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \dots$, $c_\lambda \neq 0$. Тогда

$$f(z) = z^\lambda e^{P(z)} \prod_{a_\nu} E\left(\frac{z}{a_\nu}, p_1\right) / \prod_{b_\mu} E\left(\frac{z}{b_\mu}, p_2\right), \quad (2.1)$$

где P — многочлен, степень которого q не превышает $[\varrho]$.

Число $p = \max\{q; p_1; p_2\}$ называется *родом функции* f .

Напомним, что *родом последовательности* $\{a_\nu\}$ называется такое наименьшее неотрицательное целое число p , что сходится ряд $\sum_{a_\nu} \frac{1}{|a_\nu|^{p+1}}$.

Замечание 2.1. Пусть выполнены условия теоремы Адамара. Введем обозначение $\{c_n\} = \{a_\nu\} \cup \{b_\mu\}$; пусть p' — род последовательности $\{c_n\}$. Тогда остается в силе представление (2.1), если в канонических произведениях Вейерштрасса заменить p_1 и p_2 на p' . Это же заключение остается в силе, если p_1 и p_2 заменить на род p функции f .

Теоремы Линделёфа 1.2 и 1.4 распространяются на мероморфные функции. Наиболее прост случай, когда порядок ϱ функции f — нецелое число (см. [2, гл. II, теорема 4.2]).

Теорема 2.2. Пусть порядок ϱ мероморфной функции f есть нецелое число, а ρ — такой уточненный порядок в смысле Валирона, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho$. Тогда типы $T(r, f)$ и $|N|(r, f)$ относительно ρ совпадают.

Рассмотрим теперь случай, когда мероморфная функция f имеет целый порядок $\varrho \geq 1$. Тогда род функции f равен или $\varrho - 1$, или ϱ . По теореме Адамара функцию f можно представить в виде

$$f(z) = e^{P(z)} \prod_{a_\nu} E\left(\frac{z}{a_\nu}, \varrho\right) / \prod_{b_\mu} E\left(\frac{z}{b_\mu}, \varrho\right), \quad (2.2)$$

где $P(z) = c_\varrho z^\varrho + c_{\varrho-1} z^{\varrho-1} + \dots + c_1 z$. Введем обозначения

$$\Delta_\mu = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mu_f|(r)}{V(r)}, \quad L_\varrho(r) = r^{\rho(r)-\varrho}, \quad \Omega_\varrho = \max\{\Delta_\mu; \Delta_\varrho\},$$

$$K_\varrho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{L_\varrho(r)} \left| c_\varrho + \frac{1}{\varrho} \iint_{|\zeta| \leq r} \frac{d\mu_f(\zeta)}{\zeta^\varrho} \right|.$$

Справедлива следующая теорема [2, гл. II, теорема 4.4].

Теорема 2.3 (Э. Линделёф). Пусть f — мероморфная функция целого порядка $\varrho \geq 1$, ρ — такой уточненный порядок в смысле Валирона, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho$. Тогда функция f имеет минимальный, нормальный или максимальный тип относительно ρ в зависимости от того, будет ли соответственно $\Omega_\varrho = 0$, $0 < \Omega_\varrho < \infty$ или $\Omega_\varrho = \infty$.

В монографии [2] теорема Линделёфа доказана и для нулевого уточненного порядка (см. [2, гл. II, теорема 4.5]).

Теорема 2.4. Пусть f — трансцендентная мероморфная функция порядка $\varrho = 0$, а ρ — такой уточненный порядок в смысле Валирона, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 0$. Тогда типы $T(r, f)$ и $|N|(r, f)$ относительно ρ совпадают.

2.2. Субгармонические функции на комплексной плоскости. Мы не приводим определение и основные свойства субгармонических функций. Изложение теории субгармонических функций можно найти в книгах И. И. Привалова [14], У. Хеймана и П. Кеннеди [19], М. Цудзи [28]. Проблема Линделёфа для субгармонических функций в комплексной плоскости и полуплоскости рассматривается в [23].

Пусть v — субгармоническая функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $M_v(r) = \sup_{|z|=r} v(z)$. Известно, что M_v — возрастающая выпуклая относительно $\ln$ функция. Положим

$$\varrho_v = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_v(r)}{\ln r} \geq 0 \quad (v \neq 0).$$

Число ϱ_v называется *порядком субгармонической функции v* . Если $\varrho_v < \infty$, то v называется *функцией конечного порядка*.

Обозначим через μ_v меру Рисса субгармонической функции v конечного порядка ϱ . Не ограничивая общности рассуждений, далее предполагаем, что $v(0) = 0$. Представление Адамара для функции v имеет вид [19, Theorem 4.2]

$$v(z) = \iint \ln \left| E \left(\frac{z}{\zeta}; p \right) \right| d\mu_v(\zeta) + \operatorname{Re} P_q(z), \quad p \leq \varrho, \quad (2.3)$$

где

$$P_q(z) = \sum_{k=1}^q \alpha_k z^k, \quad q \leq \varrho. \quad (2.4)$$

Равномерно сходящийся интеграл $I(z)$ в правой части равенства (2.3) называется *каноническим интегралом меры μ_v* , а число p — *родом канонического интеграла $I(z)$* . Наибольшее из чисел p и q , где q — степень полинома в (2.4), называется *родом субгармонической функции v* .

Определение 2.1. Пусть ρ — уточнённый порядок. Величина

$$\sigma := \sigma_v = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{M_v(r)}{V(r)}$$

называется *типом субгармонической функции v относительно уточнённого порядка ρ* .

Если $\sigma = 0$, то функция v называется *функцией минимального типа*, если $0 < \sigma < \infty$ — *нормального типа*, и если $\sigma = \infty$ — *максимального типа* относительно уточнённого порядка ρ .

Определение 2.2. Пусть ρ — уточнённый порядок и пусть μ_v — мера Рисса субгармонической функции v . Величина

$$\Delta := \Delta_v = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu_v(r)}{V(r)},$$

где $\mu_v(r) = \mu_v(B(0, r))$, называется *верхней плотностью меры μ_v относительно уточнённого порядка ρ* .

Если в этом выражении существует предел, то Δ называется *плотностью меры μ_v относительно уточнённого порядка ρ* .

Первый основной результат статьи [23] — распространение теоремы 1.2 на субгармонические функции на комплексной плоскости, рост которых определяется обобщённым уточнённым порядком.

Теорема 2.5. Пусть v — субгармоническая функция нецелого порядка ϱ , и пусть уточнённый порядок ρ удовлетворяет условию (1.5). Если $\Delta_v = 0$, то v — функция минимального типа относительно ρ , если $0 < \Delta_v < \infty$ — то нормального типа, и если $\Delta_v = \infty$ — то максимального типа.

Случай целого порядка является более сложным. В этом случае значение верхней плотности Δ_v не является достаточным, чтобы определить будет ли функция минимального, нормального или максимального типа.

Определим величину δ_v для субгармонической функции v целого порядка ϱ следующим образом. Представим функцию v целого порядка ϱ в виде

$$v(z) = \iint \ln \left| G \left(\frac{z}{\zeta}; \varrho \right) \right| d\mu_v(\zeta) + \operatorname{Re} P_\varrho(z),$$

где $P_\varrho(z) = \alpha_\varrho z^\varrho + \alpha_{\varrho-1} z^{\varrho-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$. Положим

$$\tilde{\alpha} = \min \{j \in \mathbb{N} : j \geq \alpha\}, \quad \delta_{v,j}(r) = \alpha_j + \frac{1}{k} \iint_{B(0,r)} \frac{\mu_v(\zeta)}{\zeta^k}, \quad j = \tilde{\alpha}, \dots, \varrho;$$

$$\delta_{v,j} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\delta_{v,j}(r)|}{L_j(r)}, \quad \delta_v = \sum_{j=\tilde{\alpha}}^{\varrho} \delta_{v,j}, \quad \gamma_v = \max\{\Delta_v, \delta_v\}.$$

Вопрос о типе субгармонической функции целого порядка решается следующим обобщением теоремы Линделёфа 1.4.

Теорема 2.6. Пусть v — субгармоническая функция целого порядка $\varrho \geq 1$, а ρ — обобщённый уточнённый порядок, удовлетворяющий условию (1.1). Если $\gamma_v = 0$, то v — функция минимального типа относительно ρ , если $0 < \gamma_v < \infty$ — то нормального типа, а если $\gamma_v = \infty$ — то максимального типа.

2.3. Категория субгармонической функции. Две субгармонические функции v и g являются функциями одной категории, если величины σ_v и σ_g обе бесконечны, или обе конечны и положительны, или обе равны нулю.

Теорема 12 из [10, Chap. I] распространяется на эти обобщённые категории субгармонических функций.

Теорема 2.7. Категория суммы двух субгармонических функций v и g не превосходит наибольшей из категорий слагаемых; если категории v и g различны, то она совпадает с наибольшей категорией.

Замечание 2.2. Если разность двух субгармонических функций v и g есть субгармоническая функция ψ , то её категория не превосходит наибольшей из категорий функций v и g ; в этом случае категории v и g могут быть одинаковыми. Если они имеют разные категории, то категория функции ψ равна наибольшей из категорий v и g .

3. Субгармонические функции на полуплоскости.

3.1. Определения и терминология. Обозначим через SK пространство таких субгармонических функций v на полуплоскости $\mathbb{C}_+$, что v допускает положительную гармоническую мажоранту в каждой ограниченной области полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Функции v из SK обладают следующими свойствами (см. [17]):

- (a) $v(z)$ имеет не касательного предела $v(t)$ почти всюду на вещественной оси и $v(t) \in L_{\text{loc}}^1(-\infty, \infty)$;
- (b) существует такая знакопеременная мера (заряд) ν на вещественной оси, что

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(t + iy) dt = \nu([a, b]) - \frac{1}{2}\nu(\{a\}) - \frac{1}{2}\nu(\{b\}),$$

где $a, b \in (-\infty, \infty) \setminus E_v$, E_v — счётное множество. Мера ν называется *граничной мерой* функции v ;

- (c) $d\nu(t) = v(t) dt + d\sigma(t)$, где σ — сингулярная мера относительно меры Лебега.

Для функции $v \in SK$, следуя [17], определим *полную меру* $\lambda_v := \lambda$ формулой

$$\lambda(G) = 2\pi \int_{\mathbb{C}_+ \cap G} \operatorname{Im} \zeta d\mu(\zeta) - \nu(G),$$

где μ — мера Рисса функции v .

Полная мера определяет функцию $v \in SK$ так же, как мера Рисса μ определяет субгармоническую функцию в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Точнее, если функции $v_1, v_2 \in SK$ имеют одинаковую полную меру λ , то существует такая вещественная целая функция g , что $v_1(z) - v_2(z) = \operatorname{Im} g(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$.

Если t — точка исключительного множества E_v , определим $v(t)$, полагая

$$v(t) = \overline{\lim}_{z \rightarrow t, z \in \mathbb{C}_+} v(z),$$

когда t стремится к z вдоль любого пути. В силу этого замечания можно считать функцию $v \in SK$ определённой в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}_+}$.

Пусть $v \in SK$, $M_v(r) = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} v(re^{i\theta})$. Число

$$\varrho_v = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_v(r)}{\ln r}$$

называется *порядком субгармонической функции* v . Если $\varrho_v < \infty$, то v называется *функцией конечного порядка*.

Обозначим через $SK(\rho)$ пространство таких субгармонических в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций v , что для всех $z \in \mathbb{C}_+$ выполняется неравенство

$$M_v(r) \leq K_v V(|z|), \quad (3.1)$$

где $K_v > 0$ — постоянная, зависящая от v и не зависящая от z .

Замечание 3.1. Имеются различные определения порядка субгармонической в полуплоскости функции. Наиболее известные — это определения в смысле Левина (см. [10]), Говорова (см. [1]), Гришина (см. [18]), Титчмарша (см. [16]). Эти определения эквивалентны при $\varrho > 1$. Определение порядка, приведенное выше, — это определение в смысле Левина. Далее мы будем предполагать, что $\varrho > 1$.

3.2. Аналог теоремы Линделёфа для функций пространства SK . Пусть мера λ обладает следующими свойствами:

- (i) λ — конечная мера на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$;
- (ii) λ — положительная мера на $\mathbb{C}_+$;
- (iii) λ равна нулю в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$;
- (iv) λ не нагружает некоторую окрестность нуля, т.е. $0 \notin \operatorname{supp}(\lambda)$.

Совокупность условий (i)–(iv) в дальнейшем будем обозначать через $\{G\}$, а если выполняется условие

- (ii') λ — положительная мера на $\overline{\mathbb{C}_+}$,

то через $\{G^+\}$. Следующая теорема доказана А. Ф. Гришиным [4] (см. также [6, 18]).

Теорема 3.1. Пусть мера λ обладает свойствами $\{G\}$, а ρ — такой уточнённый порядок в смысле Валирона, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho > 1$. Для того, чтобы мера λ была полной мерой функции $v \in SK(\rho)$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- (i) выполнение неравенства

$$|\lambda|(r) \leq KrV(r) \quad (3.2)$$

при некотором $K > 0$ и всех $r > 0$, если ϱ — нецелое число;

- (ii) выполнение неравенства (3.2) при некотором $K > 0$ и всех $r > 0$ и существование такого действительного числа α_ϱ , что функция

$$\frac{r^\varrho}{V(r)} \left| \alpha_\varrho + \frac{1}{2\varrho} \iint_{B(0,r)} \frac{r^{2\varrho} - \tau^{2\varrho}}{r^{2\varrho}} \cdot \frac{\sin \varrho\varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{d\lambda(\zeta)}{\tau^{\varrho+1}} \right| \quad (\zeta = \tau e^{i\varphi})$$

является ограниченной функцией от r , если ϱ — целое число.

В [21] теорема 3.1 распространена на случай обобщённого уточнённого порядка. Сформулируем один из результатов этой статьи в виде теоремы.

Теорема 3.2. Пусть мера λ обладает свойствами $\{G\}$ и пусть ρ — такой обобщённый уточнённый порядок, что

$$1 < \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \alpha \leq \varrho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \rho(r). \quad (3.3)$$

Для того чтобы мера λ была полной мерой функции $v \in SK(\rho)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- (i) выполнение неравенства (3.2) при некотором $K > 0$ и всех $r > 0$, если выполняется условие (1.5);
(ii) выполнение неравенства (3.2) при некотором $K > 0$ и всех $r > 0$ и существование для всех целых j , удовлетворяющих неравенству $\alpha \leq j \leq \varrho$, таких действительных чисел α_j , что функции

$$\frac{r^j}{V(r)} \left| \alpha_j + \frac{1}{2j} \iint_{B(0,r)} \frac{r^{2j} - \tau^{2j}}{r^{2j}} \cdot \frac{\sin j\varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{d\lambda(\zeta)}{\tau^{j+1}} \right| \quad (\zeta = \tau e^{i\varphi})$$

являются ограниченными функциями от r , если условие (1.5), не выполняется.

Замечание 3.2. Теорема 3.1 — частный случай теоремы 3.2, если $\alpha = \varrho$.

3.3. Аналог теоремы Линделёфа для функций пространства JS . Функция v называется истинно субгармонической на $\mathbb{C}_+$, если v — субгармоническая функция на $\mathbb{C}_+$ и $\overline{\lim}_{z \rightarrow t} v(z) \leq 0$ для любой точки $t \in \mathbb{R}$. Полная мера истинно субгармонической функции — положительная мера, чем и объясняется сам термин. Заметим, что истинно субгармоническая функция принадлежит пространству SK (см. [17]). Обозначим через JS пространство истинно субгармонических функций, а через $JS(\rho)$ — подпространство, удовлетворяющее неравенству (3.1).

Следующая теорема доказана А. Ф. Гришиным [4] (см. также [6, 18]).

Теорема 3.3. Пусть v — истинно субгармоническая функция порядка $\varrho > 1$. Пусть λ — полная мера функции v , λ_1 — ограничение меры λ на круг $B(0, 1)$ и $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$. Тогда существуют такие вещественные числа $\{d_k\}_{k=1}^q$, $q \leq \varrho$, что

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K_0(z, \zeta) d\lambda_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint K_p(z, \zeta) d\lambda_2(\zeta) + \sum_{k=1}^q d_k \operatorname{Im} z^k, \quad p \leq \varrho, \quad (3.4)$$

где

$$K_p(z, \zeta) = \frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} \operatorname{Re} \left[\ln \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} + \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} \left(\frac{1}{\zeta^k} - \frac{1}{\bar{\zeta}^k} \right) \right], \quad p = 1, 2, \dots; \quad K_0(z, \zeta) = \frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right|.$$

Здесь и далее мы рассматриваем однозначную ветвь функции $\ln$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси.

Интегралы в правой части формулы (3.4) называются каноническими интегралами меры λ_2 и меры λ_1 , а число p называется родом канонического интеграла I_+ . Наибольшее из чисел p и q , где q — степень тригонометрического полинома в правой части (3.4), называется родом субгармонической функции $v \in JS$.

Определение 3.1. Пусть $\rho, \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \varrho > 1$, — уточнённый порядок. Величина

$$\sigma := \sigma_v = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{M_v(r)}{V(r)}$$

называется *типом функции* $v \in JS(\rho)$ *относительно уточнённого порядка* ρ . Если $\sigma = 0$, то функция v называется функцией минимального типа, если $0 < \sigma < \infty$ — функцией нормального типа, и если $\sigma = \infty$ — функцией максимального типа относительно уточнённого порядка ρ .

Определение 3.2. Пусть $\rho, \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \varrho > 1$, — уточнённый порядок, и пусть λ_v — полная мера субгармонической функции $v \in JS(\rho)$. Верхней плотностью меры λ_v относительно уточнённого порядка ρ называется

$$\Delta := \Delta_v = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_v(r)}{rV(r)},$$

где $\lambda_v(r) = \lambda_v(B_+(0, r))$. Если существует предел, то Δ называется плотностью меры λ_v относительно уточнённого порядка ρ .

Вопрос о типе функции из класса $JS(\rho)$ когда нижний порядок и порядок функции не целые числа и между ними нет целых чисел решается следующей теоремой из [23].

Теорема 3.4. Пусть $v \in JS(\rho)$ — истинно субгармоническая функция нецелого порядка $\varrho > 1$, ρ — обобщённый уточнённый порядок, удовлетворяющий условию (1.5). Если при этом $\Delta_v = 0$, то v — функция минимального типа относительно ρ , если $0 < \Delta_v < \infty$ — то нормального типа, и если $\Delta_v = \infty$ — то максимального типа.

Как и в случае плоскости, значение верхней плотности Δ_v , вообще говоря, не определяет тип функции $v \in JS(\rho)$ (минимальный, нормальный или максимальный).

Определим величину δ_v для субгармонической функции $v(z) \in JS(\rho)$ целого порядка $\varrho \geq 2$ следующим образом. Представим функцию v в виде

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \zeta) d\lambda_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint K_\varrho(z, \zeta) d\lambda_2(\zeta) + \sum_{j=1}^{\varrho} d_j \operatorname{Im}(z^j), \quad \varrho \geq 2.$$

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \min \{j \in \mathbb{N} : j \geq \alpha\}, \quad \delta_{v,j}(r) = d_j + S_+(r; j, \lambda), \quad j = \tilde{\alpha}, \dots, \varrho; \quad \delta_{v,j} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\delta_{v,j}(r)|}{L_j(r)}, \\ S_+(r; j, \lambda) &= \frac{1}{\pi j} \iint_{D_+(1, r)} \frac{\sin j\varphi}{\tau^j \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta), \quad \zeta = \tau e^{i\varphi}, \quad \delta_v = \sum_{j=\tilde{\alpha}}^{\varrho} \delta_{v,j}, \quad \gamma_v = \max \{\Delta_v, \delta_v\}. \end{aligned}$$

Следующий результат — это распространение теоремы 1.4 на субгармонические функции на комплексной полулоскости, рост которых определяется обобщённым уточнённым порядком (см. [23]).

Теорема 3.5. Пусть $v \in JS(\rho)$ — истинно субгармоническая функция целого порядка $\varrho \geq 2$ и ρ — обобщённый уточнённый порядок, удовлетворяющий условию (3.3). Если $\gamma_v = 0$, то v — функция минимального типа относительно $\rho(r)$, если $0 < \gamma_v < \infty$ — то нормального типа и если $\gamma_v = \infty$ — то максимального типа.

3.4. Категория истинно субгармонических функций. В [23] теорема 2.4 распространяется на случай обобщённой категории истинно субгармонических функций.

Теорема 3.6. Категория суммы $v + g$ двух истинно субгармонических функций v и g из пространства $JS(\rho)$ не превосходит наибольшей из категорий слагаемых, если категории v и g различны, то категория суммы совпадает с большей категорией слагаемых.

Следствие 3.1. Если разность двух истинно субгармонических функций v и g из пространства $JS(\rho)$ есть истинно субгармоническая функция ψ , то её категория не превышает большую из категорий функций v и g ; здесь категории v и g могут быть одинаковыми. Если они имеют разные категории, то категория функции ψ равна большей из категорий функций v и g .

4. Дельта-субгармонические функции на плоскости.

4.1. *Определения и терминология, формулировка результатов.* Прежде всего уточним понятие *дельта-субгармонической функции*. Обычно дельта-субгармонической функцией называют функцию представимую в виде разности двух субгармонических функций. Однако такое определение нуждается в корректировке. Скорректированное определение дельта-субгармонической функции приведено в [7].

Функция v в области $G \subset \mathbb{C}$ называется *дельта-субгармонической*, если выполняются следующие три условия:

- (i) Существует такое множество F емкости ноль, что на $G \setminus F$ справедливо представление $v = v_1 - v_2$, где v_1 и v_2 — субгармонические функции в области G . Посредством этого представления определяется мера Рисса μ_v функции v по формуле $\mu_v = \mu_v^{(1)} - \mu_v^{(2)}$, где $\mu_v^{(1)}$ и $\mu_v^{(2)}$ — меры Рисса функций v_1 и v_2 . При этом μ , вообще говоря, является зарядом. *Определяющее множество H функции v* — это множество точек $z \in G$, для которых найдется такое $\delta > 0$, что выполняется неравенство

$$\int_0^\delta \frac{|\mu_v|(C(z, t))}{t} dt < \infty,$$

где $|\mu_v| = |\mu_v^+| + |\mu_v^-|$, а $\mu_v = \mu_v^+ - \mu_v^-$ — жорданово разложение меры μ_v .

Заметим, что меры μ_v^+ и μ_v^- , вообще говоря, не являются мерами Рисса функций v_1 и v_2 , т.е. отличаются от мер $\mu_v^{(1)}$ и $\mu_v^{(2)}$.

- (ii) Для любой точки $z \in H$ выполняется равенство

$$v(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\delta} \int_0^{2\pi} v(z + \delta e^{i\theta}) d\theta.$$

- (iii) $v(z) = 0$ для $x \in G \setminus H$.

Пусть, как и выше, μ — мера (вообще говоря, знакопеременная, т.е. заряд) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $\mu(r)$ — мера круга $C(r)$. Если не оговорено противное, всюду предполагаем, что $0 \notin \text{supp } \mu$, поскольку это ограничение в рамках рассматриваемых вопросов всегда легко снимается. Для знакоположительной меры μ определим её род как наименьшее целое число p , для которого сходится интеграл

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta)}{|\zeta|^{p+1}}.$$

Пусть v — дельта-субгармоническая функция на комплексной плоскости. Положим

$$|N|(r, v) = N_{|\mu_v|}(r), \quad N(r, v) = N_{\mu_v^-}(r), \quad N^+(r, v) = N_{\mu_v^+}(r),$$

$$m(r, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^+(re^{i\varphi}) d\varphi, \quad T(r, v) = m(r, v) + N(r, v).$$

Дельта-субгармоническая функция v имеет тот же порядок и тип (относительно уточнённого порядка ρ), что и ее характеристическая функция $T(r, v)$.

С помощью канонических интегралов меры можно дать удобное представление дельта-субгармонических функций конечного порядка. Далее без ограничения общности рассуждений предполагаем, что $v(0) = 0$.

Теорема 4.1 (Ж. Адамар). Пусть v — дельта-субгармоническая функция конечного порядка ρ , $\mu_v = \mu_v^+ - \mu_v^-$ — жорданово разложение меры μ_v , p_1 — род меры μ_v^+ , p_2 — род меры μ_v^- . Тогда

$$v(z) = \iint \ln \left| G\left(\frac{z}{\zeta}; p_1\right) \right| d\mu_v^+(\zeta) - \iint \ln \left| G\left(\frac{z}{\zeta}; p_2\right) \right| d\mu_v^-(\zeta) + \text{Re } P_q(z), \quad p \leq \rho, \quad (4.1)$$

где $P_q(z) = \sum_{k=1}^q \alpha_k z^k$, $q \leq \varrho$ — некоторый многочлен, степень которого q не превышает $[\varrho]$.

Число $p = \max\{q, p_1, p_2\}$ называется *родом функции* v .

Замечание 4.1. Имеют место неравенства $\max\{\rho_{\mu_v^+}, \rho_{\mu_v^-}\} \leq \varrho$, $p \leq \varrho \leq p + 1$.

Замечание 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Обозначим через p' род меры $|\mu_v|$. Тогда остается в силе представление (4.1), если в канонических интегралах заменить p_1 и p_2 на p' . Это же заключение остается в силе, если p_1 и p_2 заменить на род p функции v .

Наиболее прост случай, когда на отрезке $[\alpha, \rho]$ нет целых чисел.

Теорема 4.2. Пусть ϱ — порядок дельта-субгармонической функции v , а ρ — уточненный порядок, удовлетворяющий условию (1.5). Тогда типы $T(r, v)$ и $|N|(r, v)$ относительно ρ либо оба равны нулю, либо оба нормальные, либо равны бесконечности.

Рассмотрим теперь случай, когда на отрезке $[\alpha, \varrho]$ есть целые числа и функция v имеет целый порядок $\varrho \geq 1$. Тогда род v равен или ϱ , или $\varrho - 1$. Не ограничивая общности, можно считать $v(0) = 0$. По теореме Адамара функцию v можно представить в виде

$$v(z) = \iint \ln \left| G\left(\frac{z}{\zeta}; \varrho\right) \right| d\mu_v(\zeta) + \operatorname{Re} P_\varrho(z), \quad (4.2)$$

где $P_\varrho(z) = c_\varrho z^\varrho + c_{\varrho-1} z^{\varrho-1} + \dots + c_1 z$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \min \{j \in \mathbb{N} : j \geq \alpha\}, \quad K_j(r) = c_j + \frac{1}{j} \iint_{|\zeta| \leq r} \frac{d\mu_v(\zeta)}{\zeta^j}, \quad \tilde{\alpha} \leq j \leq \varrho, \\ \Delta_N &= \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|N|(r, v)}{V(r)}, \quad \Delta_\mu = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mu_f|(r)}{V(r)}, \quad K_j = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|K_j(r)|}{L_j(r)}, \\ \Delta_K &= \max_{\tilde{\alpha} \leq j \leq \rho} \{K_j\}, \quad \Omega = \max \{\Delta_N; \Delta_K\}. \end{aligned}$$

Сформулируем наш второй главный результат.

Теорема 4.3. Пусть v — дельта-субгармоническая функция целого порядка $\varrho \geq 1$, ϱ — уточненный порядок, удовлетворяющий условию (1.1). Тогда функция v имеет минимальный, нормальный или максимальный тип относительно ρ в зависимости от того, будет ли соответственно $\Omega = 0$, $0 < \Omega < \infty$ или $\Omega = \infty$.

4.2. Предварительные сведения. Далее, не оговаривая это особо, будем предполагать, что ρ удовлетворяет соотношениям (1.1). Следующие две леммы доказаны в [12].

Лемма 4.1. Пусть ρ — обобщенный уточненный порядок. Если $b > a > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ асимптотически, равномерно относительно $t \in [a, b]$, выполняется соотношение

$$t^{\alpha-\varepsilon} \leq \frac{V(tr)}{V(r)} \leq t^{\rho+\varepsilon}.$$

Лемма 4.2. Пусть ρ — обобщенный уточненный порядок. Тогда при $\lambda < \alpha + 1$

$$\int_{\delta}^r \frac{V(t)}{t^\lambda} dt \leq \frac{V(r)r}{(\alpha + 1 - \lambda)r^\lambda} + o\left(\frac{V(r)r}{r^\lambda}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

а при $\lambda > \varrho + 1$

$$\int_r^\infty \frac{V(t)}{t^\lambda} dt \leq \frac{V(r)r}{(\lambda - \varrho - 1)r^\lambda} + o\left(\frac{V(r)r}{r^\lambda}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.3. Пусть ρ — обобщённый уточнённый порядок, $0 \leq p < \alpha \leq \varrho < p + 1$. Тогда

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \int_{c/r}^{\infty} \frac{V(r\tau)}{V(r)} \cdot \frac{d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} \leq \int_0^{\infty} \frac{\tau^{\varrho-p-1}}{1+\tau} d\tau = \frac{\pi}{\sin \pi(\rho-p)}.$$

Доказательство. Разобьём промежуток интегрирования $[c/r, \infty)$ на три части $[c/r, \varepsilon]$, $(\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$, $(\varepsilon^{-1}, \infty)$, где ε — произвольное малое положительное число. Оценим первый интеграл, используя неравенство (4.3):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{c/r}^{\varepsilon} \frac{V(r\tau)}{V(r)} \cdot \frac{d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} = \int_c^{\varepsilon r} \frac{V(t)}{V(r)} \cdot \frac{r^{p+1}dt}{t^{p+1}(r+t)} \leq \frac{r^p}{V(r)} \int_c^{\varepsilon r} \frac{V(t)}{t^{p+1}} dt \leq \\ &\leq \frac{r^p}{V(r)} \left(\frac{V(\varepsilon r)\varepsilon r}{(\alpha-p)(\varepsilon r)^{p+1}} + o\left(\frac{V(\varepsilon r)\varepsilon r}{(\varepsilon r)^{p+1}}\right) \right). \end{aligned}$$

Применяя лемму 4.1, получим отсюда

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} I_1 \leq \frac{\varepsilon^{\varrho-p}}{\alpha-p}. \quad (4.5)$$

Аналогично оценим третий интеграл, используя неравенство (4.4):

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\varepsilon^{-1}}^{\infty} \frac{V(r\tau)}{V(r)} \cdot \frac{d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} = \int_{r/\varepsilon}^{\infty} \frac{V(t)}{V(r)} \cdot \frac{r^{p+1}dt}{t^{p+1}(r+t)} \leq \frac{r^{p+1}}{V(r)} \int_{r/\varepsilon}^{\infty} \frac{V(t)}{t^{p+2}} dt \leq \\ &\leq \frac{r^{p+1}}{V(r)} \left(\frac{V(r/\varepsilon)(r/\varepsilon)}{(p+1-\varrho)(r/\varepsilon)^{p+2}} + o\left(\frac{V(r/\varepsilon)(r/\varepsilon)}{(r/\varepsilon)^{p+2}}\right) \right). \end{aligned}$$

Опять, применяя лемму 4.1, получим отсюда

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} I_3 \leq \frac{\varepsilon^{p+1-\varrho}}{p+1-\varrho}. \quad (4.6)$$

Второй интеграл оценим с помощью леммы 4.1:

$$I_2 = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} \frac{V(r\tau)}{V(r)} \cdot \frac{d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} \leq \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} \frac{\tau^{\varrho+\varepsilon} d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} \leq \int_0^{\infty} \frac{\tau^{\varrho-p-1+\varepsilon}}{1+\tau} d\tau.$$

Так как ε — произвольное малое положительное число, то из последнего неравенства и из (4.5), (4.6) получаем, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \int_{c/r}^{\infty} \frac{V(r\tau)}{V(r)} \cdot \frac{d\tau}{\tau^{p+1}(1+\tau)} \leq \int_0^{\infty} \frac{\tau^{\varrho-p-1}}{1+\tau} d\tau = \frac{\pi}{\sin \pi(\varrho-p)}.$$

Последний интеграл вычисляется с помощью вычетов (см., например, [8, гл. I]). □

Нам понадобится формула Пуассона—Иенсена для круга (см. [2]). Пусть v — дельта-субгармоническая функция в замкнутом круге $B(R)$. Тогда справедлива формула

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Re^{i\varphi}) \operatorname{Re} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi - \iint_{|\zeta| \leq R} \ln \left| \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z - \zeta)} \right| d\mu_v(\zeta). \quad (4.7)$$

При $z = 0$, $v(0) \neq -\infty, \infty$, формула (4.7) называется формулой Иенсена и принимает вид

$$v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Re^{i\varphi}) d\varphi - \iint_{|\zeta| \leq R} \ln \left| \frac{R}{\zeta} \right| d\mu_v(\zeta). \quad (4.8)$$

Обозначим через

$$c_k(r, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

коэффициенты Фурье функции v . Очевидно, что

$$|c_k(r, v)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v(re^{i\varphi})| d\varphi = m(r, v) + m(r, -v) \leq 2T(r, v). \quad (4.9)$$

Для данной меры μ введем обозначение $d\mu_k(\zeta) = \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}$, $\mu_k(r) = \mu_k(C(0, r))$.

В следующей лемме мы получаем выражения для коэффициентов Фурье, которые несколько отличаются от соответствующих формул, полученных в [?], и являются более удобными в наших исследованиях.

Лемма 4.4. Пусть v — дельта-субгармоническая функция в круге $C(0, R_0)$, $v(0) = 0$,

$$v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{2} (\alpha_k e^{ik\theta} + \bar{\alpha}_k e^{-ik\theta}) \quad (4.10)$$

— разложение в некоторой окрестности точки $z = 0$, $\mu_k := (\mu_v)_k$. Тогда для $0 < r < R_0$ справедливы соотношения

$$c_0(r, v) = N^+(r, v) - N(r, v); \quad (4.11)$$

$$c_k(r, v) = \frac{r^k}{2} \alpha_k + \frac{1}{2k} \iint_{|\zeta| \leq r} \frac{r^{2k} - \tau^{2k}}{r^k} d\mu_k(\zeta), \quad \zeta = \tau e^{i\varphi}, \quad (4.12)$$

при $k \geq 1$ и $c_k = \bar{c}_{-k}$ при $k \leq -1$.

Доказательство. Формула (4.11) совпадает с формулой Иенсена (4.8). Для доказательства (4.12) будем использовать формулу Пуассона—Иенсена (4.7). Так как

$$\operatorname{Re} \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{|k|} e^{ik(\theta-\varphi)}, \quad z = re^{i\theta},$$

при $0 \leq r < R < R_0$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Re^{i\varphi}) \operatorname{Re} \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} d\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(R, v) \left(\frac{r}{R}\right)^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Используем далее разложением ядра при $0 \leq r < \tau \leq R$, $\zeta = \tau e^{i\varphi}$:

$$\ln \left| \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z - \zeta)} \right| = \ln \frac{R}{\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \left(\frac{r}{\tau}\right)^k \left(1 - \frac{\tau^{2k}}{R^{2k}}\right) (e^{ik(\theta-\varphi)} + e^{-ik(\theta-\varphi)}).$$

Выберем z достаточно малым, чтобы выполнялось соотношение (4.10) и окрестность $B(0, |z|)$ не нагружала меру μ_v . Приравнявая коэффициенты Фурье правой и левой частей формулы (4.7), для $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1}{2} \alpha_k r^k = c_k(R) \left(\frac{r}{R}\right)^k - \frac{1}{2k} \iint_{|\zeta| \leq r} \left(\frac{r}{\tau}\right)^k \left(1 - \frac{\tau^{2k}}{R^{2k}}\right) e^{-ik\varphi} d\mu_v(\zeta).$$

Умножив это равенство на $(R/r)^k$, получим (4.12) при $r = R$. □

4.3. *Доказательство теоремы 4.2.* Докажем теорему 4.2. Предположим, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|N|(r, v)}{V(r)} = \Delta_N < \infty, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, v)}{V(r)} = \Delta_v < \infty.$$

Так как $|N|(r, v) \leq 2T(r, v) + O(1)$, то $\Delta_N \leq 2\Delta_v$, или

$$\Delta_v \geq 2^{-1}\Delta_N. \quad (4.13)$$

Далее воспользуемся неравенством из [2, гл. II], полученным при доказательстве теоремы 4.2:

$$\frac{T(r, v)}{V(r)} \leq o(1) + C(p)(p+1)(\Delta_N + \varepsilon) \int_{c/r}^{\infty} \frac{V(r\tau)}{V(r)} \cdot \frac{d\tau}{\tau^{\varrho+1}(1+\tau)}, \quad r \rightarrow \infty,$$

которое имеет место для всех $r \geq c$, где $c = \min |c_k| > 0$, $p = [\alpha] = [\varrho]$, $C(0) = 1$, $C(p) = 4(p+1)(2 + \ln p)$ при $p \geq 1$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $r \rightarrow \infty$ и используя лемму 4.3, получаем, что

$$\Delta_v \leq C(p)(p+1)(\Delta_N + \varepsilon) \frac{\pi}{\sin \pi(\varrho - p)}.$$

Учитывая произвольную малость ε , имеем

$$\Delta_v \leq C(p)(p+1) \frac{\pi}{\sin \pi(\varrho - p)} \Delta_N. \quad (4.14)$$

При $\Delta_N = \infty$ это неравенство тривиально. Вместе с (4.13) это доказывает теорему 4.2.

Следствие 4.1. Если дельта-субгармоническая функция v имеет нецелый порядок ϱ , $[\varrho] = p$, то

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|N|(r, f)}{T(r, f)} \geq \frac{\sin \pi(\varrho - p)}{C(p)(p+1)\pi}.$$

Доказательство с использованием неравенства (4.14) дословно повторяет доказательство следствия из теоремы 4.2 работы [2, гл. II].

4.4. *Доказательство теоремы 4.3.* Рассмотрим теперь случай, когда дельта-субгармоническая функция v имеет целый порядок $\varrho \geq 1$. Тогда род функции v равен или $\varrho - 1$, или ϱ . Воспользуемся идеями Л. Рубела (см. [15] и [2, гл. II, теорема 4.4]).

Пусть $v(0) = 0$ и в окрестности $z = 0$ имеет место разложение (4.10). Используя теорему Адамара, функцию v можно представить в виде (4.2). Отсюда легко получаем, что

$$\alpha_j = \begin{cases} c_j, & j = 1, \dots, \varrho, \\ -\frac{1}{j} \iint d\mu_j(\zeta), & j = \varrho + 1, \varrho + 2, \dots \end{cases} \quad (4.15)$$

Формулу (4.12) при $j = 1, 2, \dots$, можно записать так:

$$\alpha_j = \frac{2}{r^j} c_j(r, v) + \frac{1}{j} \iint_{|\zeta| \leq r} \frac{\tau^{2j} - r^{2j}}{r^{2j}} d\mu_j(\zeta), \quad \zeta = \tau e^{i\varphi}. \quad (4.16)$$

При $\tilde{\alpha} \leq j \leq \varrho$ имеем $\alpha_j = c_j$, и равенство (4.16) можно переписать следующим образом:

$$K_j(r) = \frac{2}{r^j} c_j(r, v) + \frac{1}{j} \iint_{|\zeta| \leq r} \left(\frac{\bar{\zeta}^j}{r^{2j}} \right) d\mu_v(\zeta), \quad (4.17)$$

откуда, учитывая (4.9), получаем

$$\frac{|K_j(r)|}{L_j(r)} \leq \frac{4T(r, v)}{V(r)} + \frac{1}{jV(r)} \iint_{t \leq r} \left(\frac{t}{r} \right)^j d|\mu_v|(t) \leq \frac{4T(r, v)}{V(r)} + \frac{|\mu_v|(t)}{jV(r)}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_K \leq 4\Delta_v + \Delta_\mu.$$

Из [2, гл. I, лемма 7.1]) следует, что $\Delta_\mu \leq |N|(er, f) \leq 2T(er, v) + O(1)$. Поэтому $\Delta_\mu \leq 2e^\varrho \Delta_v$. Значит, $\Delta_K \leq (4 + 2e^\varrho) \Delta_v$. С учётом неравенства (4.13) получаем

$$\Omega \leq (4 + 2e^\varrho + 2^{-1}) \Delta_v. \quad (4.18)$$

Предположим теперь, что $\Omega < \infty$. При $r > r(\varepsilon)$ выполняются асимптотические неравенства $|K_j(r)| < (K_j + \varepsilon)L_j(r)$ и $|\mu_v(r)| < (\Delta_\mu + \varepsilon)V(r)$, $\varepsilon > 0$. Оценим коэффициенты Фурье $c_j(r, v)$. При $j > \varrho$ из (4.15) и (4.16) получаем

$$-\frac{1}{j} \iint_{|\zeta| > r} d(\mu_v)_j(\zeta) = \frac{2}{r^j} c_j(r, v) + \frac{1}{j} \iint_{|\zeta| \leq r} \frac{\bar{\zeta}^j}{r^{2j}} d\mu_v(\zeta),$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$|c_j(r, v)| \leq \frac{|\mu_v|(r)}{2j} + \frac{r^j}{2j} \int_r^\infty \frac{d|\mu_v|(t)}{t^j} = \frac{r^j}{2} \int_r^\infty \frac{|\mu_v|(t)}{t^{j+1}} dt \leq \frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{2(j - \varrho)} V(r) + o\left(\frac{V(r)}{r^j}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Для оценки последнего неравенства использовали (4.4).

Так как $j \geq \varrho \geq 1$, то отсюда следует, что при $j \geq \varrho$

$$|c_j(r, v)| \leq \frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{2(j - \varrho)} V(r) + o\left(\frac{V(r)}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.19)$$

Если $1 \leq j \leq \tilde{\alpha} - 1$, то из (4.15) и (4.16) получаем

$$\begin{aligned} |c_j(r, v)| &\leq \frac{|c_j|}{2} r^j + \frac{|\mu_v|(r)}{2j} + \frac{r^j}{2j} \int_0^r \frac{d|\mu_v|(t)}{t^j} = \frac{|c_j|}{2} r^j + \frac{|\mu_v|(r)}{j} + \frac{r^j}{2} \int_0^r \frac{|\mu_v|(t)}{t^{j+1}} dt \leq \\ &\leq O(r^{\tilde{\alpha}-1}) + (\Delta_\mu + \varepsilon) \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{2(\alpha - j)} \right) V(r) + o\left(\frac{V(r)}{r^j}\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для оценки последнего неравенства использовали (4.3). Отсюда следует, что при $1 \leq j \leq \tilde{\alpha} - 1$

$$|c_j(r, v)| \leq O(r^{\tilde{\alpha}-1}) + (\Delta_\mu + \varepsilon) \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{2(\alpha - j)} \right) V(r). \quad (4.20)$$

Если $0 < \tilde{\alpha} \leq j \leq \varrho$, то из (4.17) находим

$$|c_j(r, v)| \leq \frac{|K_j(r)|}{2} r^j + \frac{|\mu_v|(r)}{2j} \leq \frac{1}{2} \left(K_j + \varepsilon + \frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{j} \right) V(r). \quad (4.21)$$

Наконец, по формуле Иенсена

$$c_0(r, v) = N^+(r, v) - N(r, v);$$

применяя неравенство (4.3), получим

$$|c_0(r, v)| \leq |N|(r, f) \leq (\Delta_\mu + \varepsilon) \int_0^r \frac{V(t)}{t} dt \leq \frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{\alpha} V(r) + o\left(\frac{V(r)}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.22)$$

В силу равенства Парсеваля и равенства $c_{-j}(r, v) = \overline{c_j(r, f)}$, $j \in \mathbb{N}$, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^2(re^{i\varphi}) d\varphi = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j(r, v)|^2 = |c_0(r, v)|^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} |c_j(r, v)|^2.$$

Используя неравенства (4.19), (4.20), (4.21), (4.22) и очевидное неравенство

$$(|a| + |b|)^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2),$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^2(re^{i\varphi})|d\varphi &\leq O(r^{2\tilde{\alpha}-2}) + 2 \left\{ \left(\frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{\alpha} \right)^2 + (\Delta_\mu + \varepsilon)^2 \sum_{j=1}^{\tilde{\alpha}-1} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{2(\alpha-j)} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=\tilde{\alpha}}^{\rho} \left(\frac{(K_j + \varepsilon)^2}{2} + \frac{(\Delta_\mu + \varepsilon)^2}{2j^2} \right) + \frac{(\Delta_\mu + \varepsilon)^2}{4} \sum_{j=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(j-\varrho)^2} \right\} (V(r))^2 = \\ &= O(r^{2\tilde{\alpha}-2}) + \{M_1(\Delta_K + \varepsilon)^2 + M_2(\Delta_\mu + \varepsilon)^2\} (V(r))^2, \end{aligned}$$

где

$$M_1 = \rho - \tilde{\alpha}, \quad M_2 = 2 \sum_{j=1}^{\tilde{\alpha}-1} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{2(\alpha-j)} \right)^2 + \sum_{j=\tilde{\alpha}}^{\rho} \frac{1}{j^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(j-\varrho)^2} < \infty.$$

С помощью неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\begin{aligned} m(r, v) + m(r, -v) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^2(re^{i\varphi}) d\varphi \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \{O(r^{-2}) + M_1(\Delta_K + \varepsilon)^2 + M_2(\Delta_\mu + \varepsilon)^2\}^{1/2} (V(r)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2T(r, v) &= m(r, v) + m(r, -v) + |N|(r, v) \leq \\ &\leq \{O(r^{-2}) + M_1(\Delta_K + \varepsilon)^2 + M_2(\Delta_\mu + \varepsilon)^2\}^{1/2} V(r) + \frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{\alpha} V(r) + o\left(\frac{V(r)}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 2\Delta_v &\leq \{M_1(\Delta_K + \varepsilon)^2 + M_2(\Delta_\mu + \varepsilon)^2\}^{1/2} + \frac{\Delta_\mu + \varepsilon}{\alpha}, \\ \Delta_v &\leq \frac{1}{2} \{M_1\Delta_K^2 + M_2\Delta_\mu^2\}^{1/2} + \frac{\Delta_\mu}{\alpha} \leq M_3\Omega. \end{aligned}$$

Таким образом, отсюда и из (4.18) мы получили неравенства

$$(4 + 2e^\varrho + 2^{-1})^{-1}\Omega \leq \Delta_v \leq M_3\Omega,$$

откуда следует утверждение теоремы 4.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. — Наука, 1986.
2. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970.
3. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций, I// Вестн. Харьков. гос. ун-та им. А. М. Горького. — 1968. — 6. — С. 3–29.
4. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций, II// Вестн. Харьков. гос. ун-та им. А. М. Горького. — 1968. — 7. — С. 59–84.
5. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций, III// Вестн. Харьков. гос. ун-та им. А. М. Горького. — 1969. — 8. — С. 126–135.
6. Гришин А. Ф. Субгармонические функции конечного порядка/ Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук — Харьков, 1992.
7. Гришин А. Ф., Куинь Н. В., Поединцева И. В. Вестн. Харьков. нац. ун-та. Сер. Мат., прикл. мат., мех. — 2014. — 1133. — С. 56–75.
8. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука, 1979.
9. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. — Львов: Вища школа, 1988.
10. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.

11. Малютин К. Г. Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости // Мат. сб. — 2001. — 192, № 6. — С. 51–70.
12. Малютин К. Г., Козлова И. И., Садык Н. Канонические функции допустимых мер в полуплоскости // Мат. заметки. — 2014. — 96, № 3. — С. 418–431.
13. Малютин К. Г., Садык Н. Представление субгармонических функций в полуплоскости // Мат. сб. — 2007. — 198, № 12. — С. 47–62.
14. Привалов И. И. Субгармонические функции. — М.-Л.: Гостехиздат, 1937.
15. Рубель Л. А. Обобщенное каноническое произведение // в кн.: Современные проблемы теории аналитических функций. — М.: Наука, 1965. — С. 264–269.
16. Титчмарш Е. Теория функций. — М.: Наука, 1980.
17. Fedorov M. A., Grishin A. F. Some questions of Nevanlinna theory for the complex half-plane // Math. Phys. Anal. Geom. — 1998. — 1, № 3. — P. 223–271.
18. Grishin A. F., Malyutina T. I. Subharmonic functions satisfying the local Levin condition // Isr. Math. Conf. Proc. — 2001. — 15. — P. 137–147.
19. Hayman W. K., Kennedy P. B. Subharmonic Functions. Vol. I.. — London–New York–San Francisco: Academic Press, 1976.
20. Lindelöf E. Fonctions entières d'ordre entier // Ann. Sci. Ec. Norm. Super. — 1905. — 41. — P. 369–395.
21. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Kostenko I. V. Generalization of the Lindelöf theorem to the case of Boutroux proximate order // J. Math. Sci. — 2022. — 262, № 3. — P. 301–311.
22. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Kostenko I. V. Generalization of the Lindelöf theorem to the case of Boutroux proximate order, II // J. Math. Sci. — 2022. — 262, № 5. — P. 609–616.
23. Malyutin K. G., Kabanko M. V. On the type of subharmonic functions of finite order // J. Math. Sci. — 2023. — 269, № 3. — P. 301–311.
24. Malyutin K. G., Kabanko M. V. Inverse formulas for the Fourier coefficients of meromorphic functions in a half-plane // J. Math. Sci. — 2022. — 260, № 6. — P. 798–806.
25. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Shevtsova T. V. Analytic functions of infinite order in half-plane // Probl. Anal. Iss. Anal. — 2022. — 11 (29), № 2. — P. 59–71.
26. Rubel L. A. Entire and Meromorphic Functions. — New York–Berlin–Heidelbergo: Springer, 1996.
27. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. Fr. — 1968. — 96. — P. 53–96.
28. Tsuji M. Potential Theory in Modern Function Theory. — Tokyo: Maruzen, 1959.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №22-21-00012).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Малютин Константин Геннадьевич
Курский государственный университет
E-mail: malyutinkg@gmail.com

Кабанко Михаил Владимирович
Курский государственный университет
E-mail: kabankom@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 228 (2023). С. 52–57
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-228-52-57

УДК 517.444, 517.9

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА—БЕССЕЛЯ ФУНКЦИИ ПО СПЕКТРУ, ЗАДАННОМУ НЕ ВЕЗДЕ

© 2023 г. С. М. СИТНИК, В. Е. ФЕДОРОВ, М. В. ПОЛОВИНКИНА,
И. П. ПОЛОВИНКИН

Аннотация. Приведены результаты, связанные с решением проблемы о наилучшем восстановлении дробной степени B -эллиптического оператора Лапласа—Бесселя гладкой функции по точно или приближенно известному ее преобразованию Фурье—Бесселя на некотором выпуклом множестве. Рассмотрены случаи первичных оценок в L_2^γ , L_∞ .

Ключевые слова: оператор Бесселя, оптимальное восстановление, экстремальная задача, преобразование Фурье—Бесселя.

RECOVERY OF THE LAPLACE—BESSEL OPERATOR OF A FUNCTION BY THE SPECTRUM, WHICH IS SPECIFIED NOT EVERYWHERE

© 2023 S. M. SITNIK, V. E. FEDOROV, M. V. POLOVINKINA, I. P. POLOVINKIN

ABSTRACT. In this paper, we present results related to the problem of the best recovery of a fractional power of the B -elliptic Laplace–Bessel operator of a smooth function from its Fourier–Bessel transform, which is known exactly or approximately on a certain convex set. The cases of primary estimates in L_2^γ and L_∞ are considered.

Keywords and phrases: Bessel operator, optimal recovery, extremal problem, Fourier–Bessel transform.

AMS Subject Classification: 26A33, 35Q92, 35B40, 43A32, 35J15

1. Введение. В [8, 9] Г. Г. Магарил-Ильяев и Е. О. Сивкова рассматривали задачу о восстановлении оператора Лапласа с его степенями, в том числе дробными, от некоторой функции из преобразования Фурье, заданного на некотором выпуклом множестве. Существует много случаев, когда определенные свойства оператора Лапласа и преобразования Фурье с небольшими изменениями, а иногда и буквально, переносятся на эллиптические сингулярные дифференциальные операторы, содержащие оператор Бесселя. В этом случае рабочим инструментом для исследования является преобразование Фурье—Бесселя (аналогично преобразованию Фурье). Теория весовых функциональных пространств, связанных с сингулярными дифференциальными операторами и преобразованием Фурье—Бесселя, была разработана И. А. Киприяновым (см. [3–5]) и развита в дальнейшем его учениками (см. [2, 7, 10, 11]). Огромный вклад в изучение развития приложений преобразования Фурье—Бесселя внесен Я. И. Житомирским (см. [1]), Б. М. Левитаном (см. [6]).

В настоящей статье приводятся аналоги результатов работ [8, 9] для случая преобразования Фурье—Бесселя и сингулярного B -эллиптического оператора Лапласа—Бесселя.

2. Необходимые сведения. Пусть

$$R_N^+ = \left\{ x = (x', x''), \quad x' = (x_1, \dots, x_n), \quad x'' = (x_{n+1}, \dots, x_N), \quad x_1 > 0, \dots, x_n > 0 \right\},$$

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad (x')^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}, \quad \gamma_i > 0.$$

Через Ω^+ будем обозначать область, прилегающую к гиперплоскостям $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Граница области Ω^+ состоит из двух частей: Γ^+ , расположенной в части пространства R_N^+ , и Γ_0 , принадлежащей гиперплоскостям $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$.

Через $L_p^\gamma(\Omega^+)$ будем обозначать линейное пространство функций, для которых

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\Omega^+)} = \left(\int_{\Omega^+} |f(x)|^p (x')^\gamma dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — объединение множества Ω^+ и множества Ω^- , полученного из Ω^+ симметрией относительно пространства $x' = 0$.

Смешанный обобщенный сдвиг определим формулой

$$f \rightarrow (T^y f)(x) = \prod_{i=1}^n T_{x_i}^{y_i} f(x', x'' - y''), \quad (1)$$

где каждый из обобщенных сдвигов $T_{x_i}^{y_i}$ определен по формуле (см. [6])

$$(T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\gamma_i}{2})} \times \\ \times \int_0^\pi f\left(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha}, x_{i+1}, \dots, x_N\right) \sin^{\gamma_i-1} \alpha d\alpha, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

а произведение $\prod_{k=1}^n T_{x_k}^{y_k}$ понимается как произведение (суперпозиция) операторов.

Обобщенная свертка функций $f, g \in L_p^\gamma(R_N^+)$ определяется формулой

$$(f * g)_\gamma(x) = \int_{R_N^+} f(y) T_x^y g(x) (y')^\gamma dy. \quad (3)$$

Прямое и обратное смешанные преобразования Фурье—Бесселя определяются соответственно формулами

$$F_{B,\gamma}[\varphi(x', x'')](\xi) = \int_{R_N^+} \varphi(x) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{-ix'' \cdot \xi''} (x')^\gamma dx = \\ = (2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^n \Gamma^2(\nu_k + 1) F_{B,\gamma}^{-1}[\psi(x', -x'')](\xi), \quad (4)$$

где

$$x' \cdot \xi' = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n, \quad x'' \cdot \xi'' = x_{n+1} \xi_{n+1} + \dots + x_N \xi_N, \quad |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n,$$

$$j_{\nu_k}(z_k) = \frac{2^{\nu_k} \Gamma(\nu_k + 1)}{z_k^{\nu_k}} J_{\nu_k}(z_k) = \Gamma(\nu_k + 1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m z_k^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m + \nu_k + 1)}$$

— нормированная функция Бесселя первого рода порядка ν_k , $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $J_{\nu_k}(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\nu_k = (\gamma_k - 1)/2$, $k = 1, \dots, n$. Далее будем пользоваться обозначением

$$\Pi = (2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^n \Gamma^2(\nu_k + 1). \quad (5)$$

3. Задача об оптимальном восстановлении степени оператора Лапласа—Бесселя функции в метрике L_2^γ . В-Эллиптический оператор Δ_B (термин и обозначения введены И. А. Киприяновым в [3]) определяется формулой

$$\Delta_B u = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=n+1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}. \quad (6)$$

Этот оператор называют также оператором Лапласа—Бесселя.

Будем использовать подход к дробным степеням оператора Δ_B , связанный с применением преобразования Фурье—Бесселя. Для любого $\alpha > 0$ равенство

$$(-\Delta_B)^{\alpha/2} f(x) = F_\gamma^{-1}(|\xi|^\alpha F_\gamma f(\xi))(x) \quad (7)$$

определяет α -ю степень оператора Δ_B .

Рассмотрим следующее пространство функций в $L_{2,\gamma}(R_+^N)$:

$$\mathcal{W}_2^\alpha(R_+^N) = \left\{ f(\cdot) \in L_{2,\gamma}(R_+^N) : (-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot) \in L_{2,\gamma}(R_+^N) \right\}.$$

Положим

$$W_2^\alpha(R_+^N) = \left\{ f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(R_+^N) : \|(-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_{2,\gamma}(R_+^N)} \leq 1 \right\}.$$

Далее, пусть $0 < \beta < \alpha$, $\delta \neq 0$. Требуется восстановить β -ю степень оператора Δ_B функции $f(\cdot) \in W_2^\alpha(R_+^N)$ по следующей информации: известна (наблюдается) некоторая функция $g(\cdot) \in L_{2,\gamma}(A)$, удовлетворяющая условию

$$\|F_\gamma f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_{2,\gamma}(A)} \leq \delta. \quad (8)$$

Будем интерпретировать функцию $g(\cdot) \in L_{2,\gamma}(A)$ как приближение с точностью до δ в метрике $L_{2,\gamma}(A)$ сужения $F_\gamma f(\cdot)\|_A$ на множество A преобразования Фурье—Бесселя функции $f(\cdot)$. Положим

$$U(\alpha, A, \delta) = \left\{ (f(\cdot) \in W_2^\alpha(R_+^N), g(\cdot) \in L_{2,\gamma}(A)) : \|F_\gamma f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_{2,\gamma}(A)} \leq \delta \right\}. \quad (9)$$

Под задачей оптимального восстановления β -й степени оператора Δ_B функции $f(\cdot)$ по вышеописанной информации понимается нахождение величины

$$E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_2^\alpha(R_+^N), A, \delta\right) = \inf_m \sup_{U(\alpha, A, \delta)} \left\| (-\Delta_B)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+^N)},$$

где точная нижняя грань берется по всем отображениям

$$m : L_{2,\gamma}(A) \rightarrow L_{2,\gamma}(R_+^N),$$

которые мы будем называть методами, следуя [8], а также и тех методов m , на которых инфимум достигается. Величину $E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_2^\alpha(R_+^N), A, \delta\right)$ будем называть *погрешностью оптимального восстановления*, а отображения m , на которых нижняя грань достигается — *оптимальными методами восстановления*.

Пусть

$$r_\Omega = \sup \{ r > 0 : B(0, r) \in \Omega \}, \quad \hat{r} = \hat{r}(\alpha, \beta, \delta) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{(\alpha-\beta)/2} (\Pi \delta^2)^{-1/(2\alpha)}.$$

Теорема 3.1 (см. [12]). Пусть $A \subset R_+^N$ — выпуклое множество. Если $0 \notin A$, то

$$E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_2^\alpha(R_+^N), A, \delta\right) = +\infty.$$

Теорема 3.2 (см. [12]). Пусть $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \subset R_+^N$ — выпуклая область. Пусть $0 \in \Omega$, $\delta = 0$. Тогда

$$E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{2,\gamma}^\alpha(R_+^N), \Omega^+, 0\right) = r_\Omega^{\beta-\alpha}.$$

При этом метод

$$\widehat{m}(F_\gamma f(\cdot)|_{\Omega^+})(t) = \mathbf{\Pi}^{-1} \int_{|\xi| \leq r_\Omega} \xi^\gamma |\xi|^\beta F_\gamma f(\xi) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(t_k \xi_k) \prod_{k=n+1}^N e^{it_k \xi_k} d\xi \quad (10)$$

является оптимальным.

Теорема 3.3 (см. [12]). Пусть $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \in R_+^N$ — выпуклая область и $0 \in \Omega$, $\delta > 0$. Тогда

$$E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{2,\gamma}^\alpha(R_+^N), \Omega^+, \delta\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)} \delta^2 \mathbf{\Pi}^{-1} r_\Omega^{2\beta} + \left(\frac{1}{r_\Omega}\right)^{(2\alpha-2\beta)}}, & r_\Omega < \widehat{r}, \\ (\delta^2 \mathbf{\Pi}^{-1})^{(\alpha-\beta)/(2\alpha)}, & r_\Omega \geq \widehat{r}. \end{cases}$$

При этом для каждого

$$r \in \left[0; \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2\beta)} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2\alpha-2\beta)}\right],$$

где $r_0 = \min\{r_\Omega, \widehat{r}\}$, метод

$$\begin{aligned} \widehat{m}(g(\cdot)|_{\Omega^+})(t) &= \mathbf{\Pi}^{-1} \int_{|\xi| \leq r_0} \xi^\gamma |\xi|^\beta g(\xi) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(t_k \xi_k) \prod_{k=n+1}^N e^{it_k \xi_k} d\xi + \\ &+ \mathbf{\Pi}^{-1} \int_{r \geq |\xi| \leq r_0} \xi^\gamma |\xi|^\beta \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)} \left(\frac{|\xi|}{r_0}\right)^{2\alpha}\right)^{-1} g(\xi) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(t_k \xi_k) \prod_{k=n+1}^N e^{it_k \xi_k} d\xi \quad (11) \end{aligned}$$

является оптимальным.

4. Задача об оптимальном восстановлении степени оператора Лапласа—Бесселя функции в метрике L_∞ . Рассмотрим для каждого фиксированного $\alpha > 0$ следующие функциональные пространства:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(\mathbb{R}_+^N) &= \left\{ f(\cdot) \in \mathcal{S}'_{ev} : (-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N), F_\gamma[f(\cdot)] \in L_\infty(\mathbb{R}_+^N) \right\}, \\ W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(\mathbb{R}_+^N) &= \left\{ f(\cdot) \in \mathcal{W}_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(\mathbb{R}_+^N) : \|(-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+^N)} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Пусть A — непустое измеримое множество в $\mathbb{R}_+^N$. Пусть $0 < \beta < \alpha$, $\delta \neq 0$. Рассмотрим задачу восстановления β -й степени оператора Δ_B от функции $f(\cdot) \in W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N)$, располагая следующей информацией: известна некоторая функция $g(\cdot) \in L_\infty(A)$, удовлетворяющая условию

$$\|F_\gamma f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta.$$

Функция $g(\cdot) \in L_\infty(A)$ трактуется как приближение ограничения $F_\gamma f(\cdot)|_A$ с точностью δ в метрике $L_\infty(A)$.

Следуя [8], мы называем всякое отображение

$$m : L_\infty(A) \longrightarrow L_2^\gamma(R_+^N)$$

методом восстановления. Ошибку метода восстановления определим как

$$e\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), A, \delta, m\right) = \sup_{U(\alpha, A, \delta)} \left\| (-\Delta_B)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(R_+^N)},$$

где

$$U(\alpha, A, \delta) = \left\{ (f(\cdot) \in W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), g(\cdot) \in L_\infty(A)) : \|F_\gamma f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta \right\}.$$

Значение

$$E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), A, \delta\right) = \inf_m e\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), A, \delta, m\right) = \\ = \inf_m \sup_{U(\alpha,A,\delta)} \left\| (-\Delta_B)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot) \right\|_{L_2^\gamma(R_+^N)}$$

называется погрешностью оптимального восстановления (точная верхняя грань берется по всем методам $m : L_\infty^\gamma(A) \rightarrow L_2^\gamma(R_+^N)$).

Задача оптимального восстановления для β -й степени оператора Δ_B функции $f(\cdot)$ на основе указанной информации понимается как нахождение значения $E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), A, \delta\right)$; отображение m , на котором нижняя граница достигается, считается оптимальным методом восстановления.

Введем обозначения

$$B(\zeta, \rho) = \{\chi \in \mathbb{R}^N : |\chi - \zeta| \leq \rho\}, \quad B_+(\zeta, \rho) = \{\chi \in \mathbb{R}_+^N : |\chi - \zeta| \leq \rho\}, \\ r_\Omega = \sup \{\rho > 0 : B(0, \rho) \subset \Omega\}, \\ \hat{r} = \hat{r}(\alpha, \beta, \delta) = \left(\frac{(|\gamma| + N + 2\alpha) \Gamma((|\gamma| + N)/2) \prod_{\kappa=1}^n \Gamma((\gamma_\kappa + 1)/2)}{2^{-|\gamma|-N+n+1} \pi^{(n-N)/2} \delta^2} \right)^{1/(|\gamma|+N+2\alpha)}, \\ r_0 = \min\{\hat{r}, r_\Omega\}.$$

Теорема 4.1 (см. [13]). Если $0 \notin \Omega^+$, то

$$E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), \Omega^+, \delta\right) = +\infty.$$

Теорема 4.2 (см. [13]). Если $0 \in \Omega$ и $r_\Omega < \hat{r}$, то

$$E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), \Omega^+, \delta\right) = \\ = \left(\frac{2^{2-N-2|\nu|} \delta^2 (\alpha - \beta) r_\Omega^{|\gamma|+N+2\beta}}{(|\gamma| + N + 2\beta)(|\gamma| + N + 2\alpha) \Gamma((|\gamma| + N)/2) \prod_{j=1}^n \Gamma((\gamma_j + 1)/2) \pi^{(N-n)/2}} + \frac{1}{r_\Omega^{2(\alpha-\beta)}} \right)^{1/2}.$$

Если $r_\Omega > \hat{r}$, то

$$E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_{\infty,2}^{\gamma,\alpha}(R_+^N), \Omega^+, \delta\right) = \\ = \sqrt{\frac{|\gamma| + N + 2\alpha}{|\gamma| + N + 2\beta}} \left(\frac{\delta^2}{2^{|\gamma|+N-n-1} \pi^{(N-n)/2} \Gamma((N + |\gamma|)/2) \prod_{j=1}^n \Gamma(\nu_j + 1)} \right)^{(\alpha-\beta)/(|\gamma|+N+2\alpha)}.$$

Метод

$$m(g) = \mathbf{\Pi}^{-1} \int_{B(0, r_0)_+} |\xi|^\beta \left(1 - \left(\frac{|\xi|}{r_0} \right)^{2(\alpha-\beta)} \right) g(\xi) \prod_{k=1}^n j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{ix'' \cdot \xi''} (\xi')^\gamma d\xi$$

является оптимальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Житомирский Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя// Мат. сб. — 1955. — 36, № 2. — С. 299–310.
2. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
3. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
4. Киприянов И. А. Преобразование Фурье—Бесселя и теоремы вложения для весовых классов// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1967. — 89. — С. 130–213.
5. Киприянов И. А., Куликов А. А. Теорема Пэли—Винера—Шварца для преобразования Фурье—Бесселя// Докл. АН СССР. — 1988. — 298, № 1. — С. 13–17.
6. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя// Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2. — С. 102–143.
7. Ляхов Л. Н. В-Гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
8. Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру// Мат. сб. — 2012. — 203, № 4. — С. 119–130.
9. Сивкова Е. О. Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье// Владикавказ. мат. ж. — 2012. — 14, № 4. — С. 63–72.
10. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
11. Muravnik A. B. Fourier–Bessel transformation of compactly supported nonnegative functions and estimates of solutions of singular differential equations// Funct. Differ. Equations. — 2001. — 8, № 3–4. — P. 353–363.
12. Polovinkina M. V. Recovery of the operator Δ_B from its incomplete Fourier–Bessel image// Lobachevskii J. Math. — 2020. — 41, № 5. — P. 839–852.
13. Sitnik S. M., Fedorov V. E., Polovinkina M. V., Polovinkin I. P. On recovery of the singular differential Laplace–Bessel operator from the Fourier–Bessel transform// Mathematics. — 2023. — 11. — P. 1103.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ситник Сергей Михайлович

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: sitnik@bsu.edu.ru

Федоров Владимир Евгеньевич

Челябинский государственный университет;

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского

Уральского отделения РАН, Екатеринбург

E-mail: kar@csu.ru

Половинкина Марина Васильевна

Воронежский государственный университет инженерных технологий

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Половинкин Игорь Петрович

Воронежский государственный университет;

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: polovinkin@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 228 (2023). С. 58–84
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-228-58-84

УДК 519.2:531/534

СПОНТАННАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ В МАРКОВСКИХ ЦЕПЯХ. IV. КЛАСТЕРИЗАЦИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

© 2023 г. В. В. УЧАЙКИН, В. А. ЛИТВИНОВ

Аннотация. В четвертой части обзора рассмотрены математические модели кластеризации, описывающие поведение частиц примесей (маркеров, меток) в турбулентной среде. Наряду с классическим подходом (Смолуховский, Ричардсон) описаны статистические модели, применяемые в компьютерном моделировании процессов (модель Неймана—Скотта, модель Метрополиса, марковские цепи). Обсуждаются некоторые аспекты процессов локального накопления и гравитационного осаждения частиц в турбулентной среде. Последний раздел посвящен важному в натуральных и численных экспериментах понятию о представительной выборке.

Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 125–144.

Вторая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 221. — С. 128–147.

Третья часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 222. — С. 115–133.

Ключевые слова: турбулентность, марковская цепь, спектр мощности, радиальная функция, численное моделирование.

SPONTANEOUS CLUSTERING IN MARKOV CHAINS. IV. CLUSTERING IN TURBULENT ENVIRONMENTS

© 2023 V. V. UCHAIKIN, V. A. LITVINOV

ABSTRACT. In the fourth part of the review, we discuss mathematical models of clustering that describe the behavior of impurity particles (markers, tags, etc.) in a turbulent environment. Along with the classical approach (Smoluchowski, Richardson), we describe statistical models used in computer modeling of processes (the Neyman–Scott and Metropolis models and Markov chains). Some aspects of the processes of local accumulation and gravitational sedimentation of particles in a turbulent environment are discussed. The last section is devoted to the concept of a representative sample, which is important in natural and numerical experiments.

The first part: Itogi Nauki Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 220. — P. 125–144.

The second part: Itogi Nauki Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 221. — P. 128–147.

The third part: Itogi Nauki Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 222. — P. 115–133.

Keywords and phrases: turbulence, Markov chain, power spectrum, radial function, numerical modeling.

AMS Subject Classification: 65P40

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-79-30017) и Министерства высшего образования и науки РФ (проект № 075-15-2021-581).

1. Введение. Молекулы в газе, капли воды в облаке, звезды в галактике, галактики во Вселенной в статистическом описании представляются случайными распределениями точек. В газе точками представляются молекулы, в галактиках — звезды, в скоплениях галактик — сами галактики. Есть свой резон и своя степень погрешности в каждом из этих описаний, но общая причина использования точечных представлений сплошной среды в особенностях математического анализа: даже если атомарность среды не имеет значения (как, например, в макроскопической гидродинамике), мы мысленно выделяем малую порцию (*жидкую точку*) и применяем к ее динамике уравнение для материальной точки. Рассматривая случайную модель непрерывной среды, мы вновь вынуждены прибегать к многоточечному ее представлению, разбивая ее на элементы и беря в рассмотрение их центры масс, или введя дискретную систему координат (решетку) и рассматривая свойства среде уже в неподвижных ее точках. Любой из этих подходов — первый (лагранжев) и второй (эйлеров) могут послужить основой для построения Марковских цепей, управляющих корреляциями системы.

Исследование прохождения частиц через вещество опирается на микроскопические данные о свойствах частиц и вещества. Если свойства эти таковы, что взаимодействия между ними могут рассматриваться в модели столкновений, теория строится на кинетических принципах, заложенных еще Больцманом. Его уравнение было выведено для частиц (молекул) одного типа, которые могли сталкиваться друг с другом, обмениваясь при этом импульсами и кинетическими энергиями (по этой причине оно оказалось нелинейным), но не исчезали и не возникали. Хотя в процессе решения делалось не вполне обоснованное предположение о *молекулярном хаосе*, постулирующее независимость потоков частиц входящих друг с другом в столкновения (позднее численное моделирование подтвердило вполне приемлемую точность этого приближения), оно сыграло ключевую роль в газодинамике. Однако настоящее господство оно обрело в динамике смеси газов, точнее, в динамике прохождения не взаимодействующих между собой частиц через не изменяющуюся в этом процессе среду. В такой постановке оно стало линейным и оказалось применимым для прохождения ядерных частиц (нейтронов, протонов, электронов, самих ядер и фотонов) через вещество в его твердом, жидком и газообразном состояниях. Несколько модифицировалось это уравнение в реакторной физике (появился распад ядер, увеличивающий число нейтронов в системе) и в физике высоких энергий (появились процессы рождения многих элементарных частиц разных типов). Это привело к замене одного кинетического уравнения системой подобных (и тоже линейных) уравнений соответственно полному числу типов частиц, участвующих в процессе. Наконец, третий класс задач, изучающих динамику взаимодействующих между собой частиц, и по этой причине нелинейных, как и первоначальное уравнение Больцмана, но в отличие от него, не допускающей ограничения лишь парными взаимодействиями, да еще и в модели молекулярного хаоса. Эти задачи и составляют *молекулярную динамику*. Их актуальность этих задач совпала по времени с рассветом компьютерных технологий и предопределило дальнейшую судьбу теории переноса, оторвав ее от аналитических методов, доступных адекватному пониманию, обсуждению, совершенствованию. Словесные описания численных кодов не идентичны записанным в символах, понятных компьютеру, и в этом могут скрываться будущие проблемы (по слухам из ненадежных источников, в программах, по которым построены действующие реакторы, спустя многие годы находили ошибки).

2. Кластеры.

2.1. Модель Неймана—Скотта. В практике научного эксперимента при определении структуры данных широкое применение получают методы кластерного анализа. Они предназначены для нахождения в многомерном пространстве признаков групп векторов, являющихся в каком-либо смысле близкими. Как правило, решение задачи кластеризации разбивается на два этапа. На первом этапе, исходя из матрицы данных X , строится матрица близости $R = [r_{ij}]$, где r_{ij} — расстояние между точками i и j . На втором этапе вводится некоторое правило, которое определяет порядок образования кластеров на основе анализа матрицы R . Традиционный подход, при котором она считается постоянной, а следовательно, множество точек рассматривается как статическая система, приводит к методам, ориентированным на определенную структуру такой системы.

При этом наличие промежуточных точек между кластерами и сама форма кластеров оказывают решающее влияние на достоверность кластеризации. «Жесткие» правила образования кластеров приводят к удовлетворительным результатам только в случае, когда структура выборки и структура, предполагаемая методом, совпадают. В целом ряде случаев можно избавиться от указанных недостатков: применив преобразование исходного множества точек, увеличивающее разделимость кластеров и степень близости элементов внутри кластеров. Широко распространены линейные и нелинейные отображения множества точек в пространства меньшей размерности. Если сокращение размерности нежелательно, то может быть построено отображение в пространство той же размерности (например, метод Боннера, последовательно «улучшающий» матрицу R).

Вывод о степени кластеризации системы случайных точек естественно делать путем сравнения ее с некой абстрактной системой, заведомо лишенной этого свойства. Таковой является, например, однородный пуассоновский ансамбль, задаваемый тремя известными постулатами:

- (i) пуассоновский закон распределения случайного числа заполнения точками любой ограниченной области,
- (ii) пропорциональность средних значений чисел заполнения величинам соответствующих объемов и
- (iii) взаимная независимость чисел заполнения непересекающихся объемов.

Для удобства сопоставления абстрактной и физической систем последнюю также удобно формализовать с помощью набора постулатов. В рамках модели Неймана—Скотта для пространственного распределения галактик этот набор выглядит следующим образом.

- (i) Число кластерных центров в любом элементе разбиения распределено по закону Пуассона;
- (ii) положения этих центров в каждом из элементов разбиения распределены равномерно и взаимно независимы;
- (iii) число частиц в каждом отдельном кластере описывается отрицательным биномиальным распределением;
- (iv) их положения относительно центра кластера считаются независимыми от других и распределенными по трехмерному нормальному закону.

Модель эта, несмотря на ее декларативный характер, обладает тремя несомненными достоинствами. Во-первых, она дает наглядный пример кластерной структуры, позволяющий во многих случаях визуально установить наличие кластерной структуры. Во-вторых, демонстрация ее первого применения (описание распределения галактик во Вселенной), убеждает в ее реалистичности, даже без дополнительных обоснований (хотя, конечно, не снимает вопроса о ее динамическом происхождении). В-третьих, введя принцип упорядочения связей по поколениям, она открыла путь к дальнейшему совершенствованию путем наращивая числа поколений, послужив тем самым прототипом более совершенных моделей (включая марковскую цепную модель).

2.2. Механическая интерпретация. Вывод о кластерной структуре точечного распределения делается на основе взаимного расположения частиц: если две частицы разделены расстоянием менее определенного значения r_c , то они принадлежат одному кластеру. Часто используется графическое представление связей, реализующих это ограничение. Разложение полученного графа выстраивает затем и всю структуру системы. Хотя этот метод относительно простой и быстрый, он совершенно бесполезен, пока кластеры не будут достаточно хорошо разделены. Например, два различных фрагмента, находящихся на расстоянии менее r_c , будут считаться единым кластером. С механической точки зрения удобно использовать для этой цели важнейший механический параметр — энергию.

Авторы работы [13], изучив связанные с кластеризацией проблемы и подходы к ним, пришли к выводу, что простым и достаточно емким определением кластера является следующее: *группа частиц C образует кластер, если (и только если) каждая из них связана с остальными, т.е. тогда и только тогда, когда одночастичная энергия $\epsilon_i^C \equiv T_i^C + \sum_{i \neq j} V_{ij}$ отрицательна для всех*

частиц в кластере. Здесь $T_i^C = p_i^2/2m_i$ — кинетическая энергия частицы в системе центра масс ЦМ кластера C , V_{ij} — потенциал взаимодействия i -й и j -й частиц этого кластера.

Очевидно, что это определение имеет смысл в ситуациях, когда кластеры хорошо отделены друг от друга, но у этого есть то преимущество, что его можно использовать и в тех случаях, когда система плотная и разные кластеры частично перекрываются в пространстве. Проблема сводится к *разбиению всей системы на непересекающиеся кластеры*, удовлетворяющие указанному критерию. Конечно, ему может удовлетворять не единственное разбиение (особенно, если система плотная), поэтому обычно берется разбиение, максимизирующее сумму энергий связи отдельных кластеров (эта величина не учитывает ни энергию взаимодействия кластеров, ни их кинетические энергии, и, вообще говоря, отличается от полной энергии связи системы).

Подробнее, это выглядит так. Начиная с начального произвольного кластерного разбиения C , следующее разбиение C' генерируется путем переноса одной из частиц исходного кластера C_i в другой кластер C_j (включая возможность его освобождения). Соответствующее изменение энергии кластеризации определяется выражением

$$\Delta E(C \rightarrow C') = E_{C'} - E_C = E_{C'_i} + E_{C'_j} - E_{C_i} - E_{C_j},$$

где C'_i обозначает остаток донорного кластера, а C'_j обозначает результирующий рецепторный кластер (т.е. после того, как C_j был дополнен перенесенной частицей). Повторением этой процедуры генерируется случайное блуждание по множеству кластерных разложений. Следуя *алгоритму Метрополиса* (см. [16] по поводу его авторства), новое разложение C' принимается с вероятностью $P(C')/P(C)$ (C' всегда принимается, если $P(C') > P(C)$).

Разумеется, описанную выше задачу можно решить путем непосредственного перебора всех возможных группировки частиц в различные кластерные созвездия. Эта процедура даст точное решение проблемы, но это будет непомерно медленно, да и интереса мало в такой унылой процедуре.

Существует и другой метод, более удобный в практическом приложении, хотя и не гарантирующий высокой точности (впрочем, решения подобных задач, к которым можно отнести оценивание дисперсий и корреляций, не нуждаются в высокой точности в силу их статистической природы). Он основан на процедуре статистической оптимизации с использованием *функции ценности*. Идея состоит в том, чтобы использовать процедуру Метрополиса для выборки из множества разбиений с использованием температуры, постепенное уменьшение которой концентрирует это множество вокруг оптимального значения подобно тому, как при стремлении температуры к нулю «вымерзают» лишние степени свободы. кластерное разложение с использованием постепенно уменьшающегося температурного параметра, поэтому что распределение концентрируется вокруг оптимальной кластеризации.

Таким образом, функция ценности кластерного разложения

$$C = \{C_1 C_2 \dots\}$$

ассоциируется с энергией кластеризации,

$$E_C \equiv \sum_n E_{C_n},$$

равной сумме энергий отдельных кластеров C_n , полученных вычислением полной энергии, характеризующей энергию этого кластера в его собственной системе координат и игнорируя взаимодействие с остальной частью системы. Каноническая вероятность, соответствующая конкретному разбиению кластера C , определяется выражением

$$P(C) = e^{-E_C/\tau},$$

где τ — температурный параметр в энергетических единицах.

Эта процедура производит выборку разбиения из канонического ансамбля, характеризуемого температурой T . Постепенное понижение её значения сужает допустимое множество разбиений, пока не останется одно, которое и принимается в качестве оптимального. Перебор вариантов разбиений можно рассматривать как блуждание в соответствующем пространстве. Чтобы ускорить этот процесс, можно рассматривать любые разбиения множества, без учета того, связаны ли на

самом деле составляющие его кластеры. Поэтому, траектория поиска может проходить через разбиения, «кластеры» в которых не соответствуют указанному критерию. В конечном итоге процедура блужданий завершается при условии, что энергии всех кластеров разбиения отрицательны. Таким образом, процесс поиска завершается разбиением, отвечающим тому же критерию, что и его реальный аналог, и в этом смысле статистически ему эквивалентным. В то же время авторы указывают на отсутствие гарантий того, что найденное этим алгоритмом локально оптимальное разбиение окажется и *глобально оптимальным*. Если этот вопрос принципиально важен, процедуру разбиения можно повторить много раз и выбрать *глобально оптимальный на данной выборке*. Таким образом, алгоритм решения этой задачи становится явно похожим на схему Монте-Карло с построением ансамбля траекторий марковских цепей и представлением искомого результата в виде статистической оценки некоторого функционала.

2.3. Алгоритм Метрополиса. Следуя Губернатису (см. [16]), подойдем к алгоритму Метрополиса со стороны статистической механики.

Согласно основному ее постулату, усредненная по гиббсовскому ансамблю функция фазовых переменных $F(p, q)$ динамической системы в равновесном состоянии выражается формулой

$$\bar{F} = \frac{\int F(p, q) \exp\left(-\frac{H(p, q)}{kT}\right) dp dq}{\int \exp\left(-\frac{H(p, q)}{kT}\right) dp dq},$$

где интегрирование выполняется по всему фазовому пространству системы. Размещая фазовые точки ансамбля равномерно по объему и переходя к суммированию по изоэнергетическим инфинитезимальным слоям, представим ее в виде

$$\bar{F} \simeq \frac{\sum_i F_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}{\sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)} = \sum_i F_i p_i.$$

Для случаев, когда число частиц достаточно велико, большинство конфигураций характеризуются малыми вероятностями p_i . Прямые вычисления методом Монте-Карло в этом случае крайне неэффективны. Алгоритм Метрополиса заменяет численное интегрирование суммированием

$$\bar{F} \simeq \frac{1}{M} \sum_m F_m,$$

выбирая конфигурации, индексированные m из больцмановского распределения вероятностей.

Губернатис цитирует Маршалла, одного из соавторов этого алгоритма: «... Простой способ осуществить это (выборку из больцмановского распределения), как посоветовал Теллер, это сделать пробный шаг: если это уменьшило энергию системы, принять это изменение; если увеличило, принять это с вероятностью $\exp(-\Delta E/kT)$ путем сравнения со случайным числом. Каждый такой шаг порождает очередной член ансамбля, по которому и усредняется наблюдаемая величина».

Алгоритм примечателен своей простотой, и эта простота является одной из причин его начальной популярности. Однако же главной причиной его дальнейшего распространения стало осознание возможности применения его к любым другим системам с известным распределением $p(i)$ и с другими вероятностями переходов $P(i \rightarrow j)$ вместо $\exp(-\Delta E/kT)$. Это обобщение естественным образом соединилось с концепцией марковских цепей. В расчетах систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, отслеживание траекторий обычно начинается спустя некоторое число шагов, достаточное, чтобы можно было говорить о равновесии. В этом состоянии

$$P(i \rightarrow j) = \min\{1, p(i)/p(j)\}, \quad P(i \rightarrow i) = 1 - \sum_{j \neq i} p(j)/p(i).$$

В случае больцмановского распределения $p(i)/p(j) = \exp(-\Delta E/kT)$. Следовательно, если переход понижает энергию, то $P(i \rightarrow j) = 1$, а если повышает — то $P(i \rightarrow j) = \exp(-\Delta E/kT)$. Второе

уравнение дает вероятность отклонения хода, но конфигурация повторяется в ансамбле, оставаясь частью цепи. Заметим, что этот алгоритм зависит только от соотношения значений вероятностей для двух разных конфигураций; следовательно, он не зависит от их константы нормировки. В статистической механике нормировочная постоянная $\sum_i \exp(-E_i/kT)$ для распределения

Больцмана называется *статистической суммой*; она является генератором всех равновесных статистических систем. Еще одно замечание касается формулы

$$p(i)P(i \rightarrow j) = p(j)P(j \rightarrow i),$$

выражающей *принцип детального равновесия*. Она говорит, что в стационарной марковской цепи вероятности прямого и обратного переходов совпадают. По существу, это ключевая идея понятия равновесия.

2.4. Динамическая модель. В [1] рассмотрен вариант модели кластеризации, основанной на нелинейном сжимающем отображении, заданном в явном виде. Руководствуясь известными представлениями о кластеризации гравитационных систем, авторы предложили стилизованную версию этого процесса, назвав ее *псевдогравитационной* моделью. Временная ось разбивается на отрезки, в которых происходит равноускоренное движение системы по закону

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{j \neq i}^N \frac{w_j(t')}{r_{ij}^q} (\mathbf{x}_j(t') - \mathbf{x}_i(t')), \quad i = 1, \dots, N,$$

где

$$\mathbf{x}_i|_{t=t'} = \mathbf{x}_i(t'), \quad \dot{\mathbf{x}}_i(t') = 0,$$

а штрихом отмечено начало временного отрезка. Состояние системы в конечный момент t'' этого отрезка определяется выражением

$$\mathbf{x}_i(t'') = (t'' - t')^2 \sum_{j \neq i}^N \mathbf{c}_{ij} + \mathbf{x}_i(t'),$$

где $t'' - t'$ — длина временного отрезка, $\mathbf{c}_{ij}$ — смещение точки $\mathbf{x}_i$ по вектору $\mathbf{x}_j(t') - \mathbf{x}_i(t')$:

$$\mathbf{c}_{ij} = \frac{w_j(t')}{r_{ij}^q(t')} (\mathbf{x}_j(t') - \mathbf{x}_i(t')).$$

В моменты остановки системы производится выделение групп, состоящих из наиболее близких точек, и $w_j(t')$ — число точек в группе, содержащей j -й элемент. В начальный момент $w_j(t_0) = 1$. Критерием останова алгоритма служит образование заданного количества классов либо резкое возрастание величины $r_{\min}$.

2.5. Корреляции, спектр мощности. Турбулентное состояние сплошной среды (жидкости, газа) описывается в терминах случайных функций пространственно-временных переменных (полей), разложение которых по сферическим гармоникам (преобразование Фурье) преобразует эти функции в суперпозицию плоских волн. Совокупность их волновых чисел вкупе с соответствующими амплитудами образует *спектр мощности* величины (плотности, давления, энергии), характеризующей данное состояние. Подобно тому как минимальное описание случайной среды достигается указанием ее среднего значения и дисперсии, минимальное описание случайного векторного поля (например, скорости) требует задания средних значений его компонент и корреляционных функций

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle v_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle,$$

чей фурье-образ

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} R_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

определяет энергетический спектр турбулентного поля. В изотропном случае

$$E(k) = 2\pi k^2 \Phi_{ii}(k).$$

Произведение $E(k)dk$ дает вклад в полную энергию системы волн, чьи волновые векторы имеют длину в интервале $(k, k+dk)$. Когда элементы турбулентной скорости имеют характерный размер $L = b$, можно положить

$$v(x) = \frac{x}{b^2} \exp\left(-\frac{(x/b)^2}{2}\right);$$

тогда для спектра получим

$$E(k) \propto k^4 \exp(-(bk)^2).$$

Плотность кинетической энергии турбулентного движения несжимаемой среды

$$\frac{\rho}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{\rho}{2} \langle v_i v_i \rangle = \frac{\rho}{2} \int \Phi_{ii}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \rho \int_0^\infty E(k) dk.$$

Из уравнения Навье—Стокса следует, что скорость изменения кинетической энергии

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\rho R_{ij}(0)}{2} \right] = -2\rho\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk = -\rho\varepsilon,$$

где ν — кинематическая вязкость, а ε — удельная диссипация. Из этого уравнения следует, что вследствие вязкости кинетическая энергия превращается в тепловую, и за большую часть диссипации энергии ответственны самые малые вихри (т.е. самые большие волновые числа k). Включение в рассмотрение сил инерции не изменяет полной кинетической энергии, а обеспечивают ее передачу от крупномасштабных структур турбулентности к мелкомасштабным. Согласно А. Н. Колмогорову, при больших значениях числа Рейнольдса мелкомасштабные структуры турбулентности находятся в статистическом равновесии. В таком состоянии распределение мелких вихрей по размерам зависит лишь от вязкости и параметров крупных вихрей. Колмогоров получил энергетический спектр в виде

$$E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3},$$

где ε — скорость переноса энергии от больших вихрей к меньшим, определяемая предыдущим уравнением. Простая интерпретация этого спектра основана на предположении, что крупномасштабный вихрь с характерным размером L_0 существует в течение времени $t_{L_0} = L_0/v_{L_0}$, где v_{L_0} — его скорость относительно соседних вихрей. При постоянном потоке энергии

$$v_L \propto L^{1/3}, \quad t_L \propto L^{2/3},$$

где v_L и t_L — скорость и время жизни L -вихря соответственно. Если (в магнитогидродинамике) скорость v_L окажется меньше альфвеновской скорости v_A , то магнитное поле будет подавлять её, а если v_L превысит скорость звука v_s , то часть кинетической энергии рассеется в виде ударных волн. В этих случаях имеем

$$v_L \propto \begin{cases} L^{1/2}, & v_L < v_A; \\ L, & v_L > v_s. \end{cases}$$

В. Гейзенберг выполнил расчет распределения энергии по волновым числам в равновесной области и получил

$$E(k) = \frac{C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}}{[1 + (8/3)(k/k_d)^4]^{4/3}},$$

где C — постоянная, а $k_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$ — предельное волновое число.

2.6. Марковская цепная модель. Стохастической альтернативой динамическому подходу выглядит модель, основанная на интерпретации взвешенных в турбулентной среде-носителе частиц как узлов независимых траекторий ансамбля обрывающихся марковских цепей. Первоначально предложенная для моделирования распределения галактик во Вселенной (см. [35]), она получила дальнейшее развитие в работах [36–39]. Как занимающая промежуточное положение между однородной пуассоновской средой и фрактальной пылью Мандельброта (при специальном выборе

ядра процесса), эта модель была названа *мезофрактальной*. Подробное изложение её дано во второй части данного обзора (см. [3]). Здесь мы касаемся ее лишь для сопоставления с динамической моделью, описанной в предыдущем разделе.

Начальная стадия процесса, в принципе, аналогична динамической модели. В трехмерном (для определенности) пространстве рассыпана бесконечная совокупность независимых точек, образующих однородный пуассоновский ансамбль со средней концентрацией n_0 . Каждая из них становится начальной точкой (начальным узлом) $\mathbf{x}_0$ одной из траекторий. Но теперь это случайные траектории, представляемые набором ломаных, последовательные точки излома (*узлы*). В отличие от динамической модели, где кластеризация порождалась подобием гравитационного притяжения между частицами, здесь она является следствием выбора переходной вероятности $P(\mathbf{x} \rightarrow d\mathbf{x}') = p(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}')d\mathbf{x}'$ векторов, соединяющих последовательные узлы (*пробеги*), в терминах частиц) из класса *изотропных распределений Леви—Фелдгейма* (ЛФ) $p^{(\alpha)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$. Все они имеют колоколообразную форму и (в стандартном варианте) различаются характеристическим показателем $\alpha \in (0, 2]$. При $\alpha = 2$ — это распределение Гаусса (с удвоенной дисперсией):

$$p^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi b^2)^{3/2}} e^{-(r/b)^2/4}.$$

Другим широко известным представителем этого семейства является трехмерное распределение Коши (Лоренца), которому соответствует $\alpha = 1$:

$$p^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^2 b^3 [1 + (r/b)^2]^2}.$$

В этих формулах b — масштабные множители размерности длины. Плотности ЛФ при других значениях α в элементарных функциях не выражаются, зато характеристическая функция при допустимых α ($0 < \alpha \leq 2$) имеет простой вид:

$$\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{k}) \equiv \int_{R^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = e^{-(bk)^\alpha}, \quad k = |\mathbf{k}|.$$

Появление в этой схеме ЛФ-распределений объясняется двумя причинами. Главная в том, что (при $\alpha \neq 2$) их плотности убывают с расстоянием по *степенным законам*. Это очень важный признак турбулентного режима, лежащий в основе современной его феноменологии и связанный, с одной стороны, с динамической нелокальностью дробно-дифференциального аппарата, и с другой — с негауссовой статистикой, обескураживающей отсутствием привычных моментов, лежащих в основе многих статистических алгоритмов. Вторая же причина, имеющая прямое отношение к проблеме кластеризации, заключается в одной особенности траекторий, построенных на ЛФ-переходных плотностях. Высокая концентрация вероятности в области малых расстояний вкупе с широко распределенной по пространству оставшейся вероятности (те самые степенные хвосты) в динамике проявляется перемежаемости двух процессов: субдиффузии («топтанья» на малом пятачке, обусловленные несколькими следующими друг за другом короткими перескоками) и перелет на большие расстояния за счет степенной асимптотики далекого крыла распределения. Воображаемая частица улетает, но мы следим за формированием кластеризованного множества узлов — следов столкновений (узлы марковской цепи), накопление которых и дает желаемый результат.

Подобно тому, как минимальное статистическое описание случайной величины дается ее математическим ожиданием и дисперсией, для минимального описания случайного поля (каковым является рассматриваемое множество случайных точек) необходимо задать его среднее значение (среднюю концентрацию, если мы про точки) и двухточечную (как минимум) корреляционную функцию. В статистически однородной и изотропной среде первая характеристика (концентрация n) постоянна по всему полю, вторая же (корреляционная функция ξ) зависит только от разделяющего их вектора $\mathbf{r}$ (в изотропной среде — только от его модуля). Как в экспериментах, так и в теории исследователи охотнее прибегают к фурье-образу этой функции, называемому

спектром мощности турбулентных пульсаций и обозначаемому через $P(\mathbf{k})$:

$$P(\mathbf{k}) = \int_{R^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \xi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

Но пульсации концентрации в множестве распределенных случайных точек, выражающиеся в локальных сгущениях и разрежениях — это и есть кластеры и перемежающиеся с ними пустоты.

Соответствующее преобразование интегральных уравнений для марковских цепей с включенными в них ЛФ-плотностями в качестве ядер приводит к 4-параметрической аппроксимации спектра мощности следующего вида:

$$P(k) = A \frac{e^{-(bk)^\alpha}}{1 - ce^{-(bk)^\alpha}}. \quad (1)$$

Впервые эта формула появилась в [40, формула (15.6.3)]; там же показано, что фурье-обращение её приводит к уравнению Орнштейна—Цернике для оригинала (корреляционной функции).

Представим себе, что эксперименты (натуральные или численные) подтвердили, что при подходящем выборе четверки этих параметров, удовлетворяющих условиям $A, b > 0$, $0 < c < 1$, $0 < \alpha \leq 2$, формула УЗ удовлетворительно аппроксимирует их результаты. В этом случае мы имеем достаточно информации, чтобы осуществить прямое моделирование описанного процесса методом Монте-Карло, и вычислить любые интересующие нас характеристики. Действительно, построенные по этим правилам траектории образуют ансамбль независимых траекторий марковской цепи с изотропной переходной вероятностью $p(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$ и прямолинейными отрезками, соединяющими последовательные узлы. Если концентрация начальных узлов равна n_0 , то такой же будут и концентрации первых, вторых и высших порядков узлов траекторий $n_0 = n_1 = n_2 = \dots$ и в отсутствие обрыва траекторий мы получим бесконечную плотность узлов. Представив себе построение отдельной траектории, скажем, методом Монте-Карло: пользуясь набором необходимых алгоритмов и источником стандартных случайных чисел, мы находим (выбираем) случайное положение узла траектории. Удобнее и нагляднее говорить о воображаемой точечной частице, прямолинейно перемещающейся в пространстве от столкновения до столкновения с обновлением каждый раз направления на новое, но выбранное из такого же изотропного распределения.

Введем теперь новый процесс: случайный обрыв траектории в одном из узлов. Ясно, что при этом продолжения траектории не будет: она оборвется. В терминах частиц это значит, что в каждом новом столкновении у них есть шанс выжить и есть погибнуть. Обозначим через c вероятность выжить в результате столкновения (на физическом языке — вероятность того, что столкновение завершится рассеянием). Легко показать, что $n = n_0/(1 - c)$. Таким образом, в случае $c = 1$ (детерминированное выживание при каждом столкновении) суммарная концентрация точек обращается в бесконечность, и по этой причине единица удалена из области значений параметра c . Заметим, что тема турбулентности сама по себе связана с негауссовой статистикой и нелокальными операторами через схему блужданий (см. [2, 4, 22]).

Пример, демонстрирующий качество аппроксимации турбулентного спектра формулой (1), показан на рис. 1. Особенно важно хорошее согласие за пределами инерционного интервала, в рамках которого UZ-аппроксимация так же хорошо ложится и на степенную форму колмогоровского спектра, обеспечивая плавный переход от одного режима к другому.

На рис. 3, взятом из работы [23], показаны попытки авторов аппроксимировать экспериментальные данные (точки) логнормальным распределением (штриховые кривые). Видно заметное отличие левых ветвей от эксперимента, тогда как мезофрактальное распределение работает вполне удовлетворительно.

Подробности аналитических вычислений и детали численных расчетов, связанные с этой аппроксимацией, приведены во второй [3] и третьей [5] частях обзора.

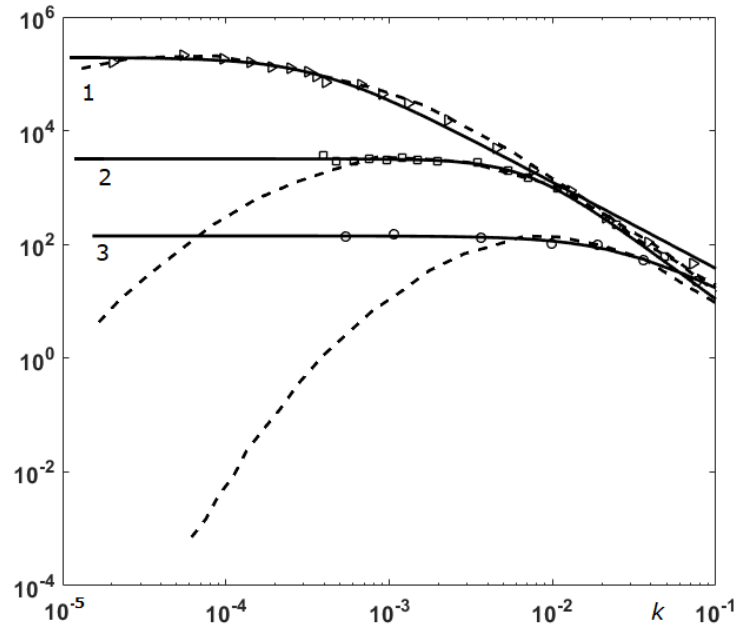


Рис. 1. Аппроксимация экспериментальных данных по спектру энергии в турбулентной среде (для разных значений Re от 23 до 1500, приведенных в [23], логнормальным распределением (штриховые линии, [23])) и мезофрактальным спектром (формула (1), сплошные кривые) со следующими параметрами: (1) $A = 0,0102$, $b = 0,045$, $c = 1$, $\alpha = 1,52$; (2) $A = 0,00077$, $b = 0,112$, $c = 1$, $\alpha = 2,13$; (3) $A = 0,0071$, $b = 0,0494$, $c = 0.99995$, $\alpha = 1,48$.

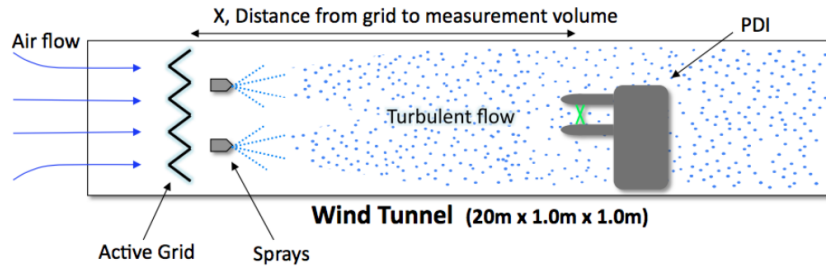


Рис. 2. Схема эксперимента в [31]

3. Инерционная кластеризация.

3.1. Общие соображения. Инерционное скопление частиц-примесей в турбулентной среде возникает в результате их перебросов из областей с высокой завихренностью и пониженными концентрациями в области с более высокими, куда они попадают (вместе с содержащим их элементом среды, выполняя движение по инерции (отсюда и термин)). Подробная зависимость кластеризации от свойств среды и пространственных масштабов процесса продолжает оставаться предметом интенсивных исследований, особенно при скоростях, приближающихся к звуковым (см. [20, 24, 26]).

Это явление, именуемое в литературе *инерционной кластеризацией*, не ограничивается облачной динамикой, а применима и к другим особенностям динамики континуума, загруженного распределенными в нем локальными примесями (движение капель топлива в двигателях внутреннего сгорания, формирование околопланетных структур, образование межзвездных облаков и др.).

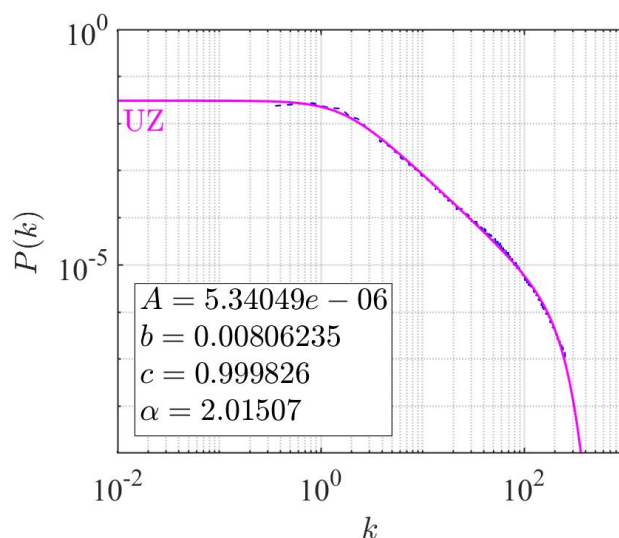


Рис. 3. Аппроксимация результатов эксперимента в [31] (точки) формулой (1) (кривая) для энергетического спектра мощности турбулентности

Было выдвинуто также предположение, что слияние капель в процессе инерционной кластеризации может привести к увеличению частоты столкновений капель воды, что может объяснить кратковременный масштаб образования дождя (см. [32]).

Турбулентные газовые потоки часто содержат частицы разного размера, например, пылинки или капли воды. Более крупные частицы могут иметь значительную инерцию и отделяться от потока. Это может привести к локальному увеличению их плотности, которое обычно описывается как кластеризация. Это может быть важно для объединения частиц в более крупные частицы. Этот процесс в конечном итоге приводит к формированию планетезималей в планетарных аккреционных дисках или к каплям дождя в облаках (см. [15]).

Другая ситуация, когда кластеризация частиц имеет важное значение, возникает в процессе «конкуренции» реактивных частиц за один и тот же газ-реагент. Концентрация последнего может быть значительно ниже внутри кластера частиц, чем снаружи, что дает в целом более низкую скорость реакции (см. [21]). Эта крупномасштабная кластеризация, что является наиболее важным феноменом в общем процессе. Причина в том, что малые кластеры частиц порядка шкалы Колмогорова имеют диффузионную временную шкалу, которая меньше, чем реакционная временная шкала, в которой частицы потребляют реагент.

В облаках и в большинстве промышленных применений сжимаемость воздуха довольно слаба, потому что скорости турбулентных потоков значительно меньше скорости звука. Облачная турбулентность управляется конвекцией, которая по своей сути является вихревым потоком. Существует большое разнообразие турбулентных течений, но в большинстве промышленных случаев турбулентность генерируется сдвиговыми течениями, порождающими вихревые потоки. Чтобы выделить отличительные свойства сжимающей и вихревой турбулентности, моделируют изотермическую турбулентность, применяя стохастическое воздействие, которое является либо вихревым, либо сжимающим (акустическим).

Для чисто акустической турбулентности энергетические спектры спадают с волновым числом k как k^{-2} , т.е. несколько медленнее спектра вихревой турбулентности ($k^{-5/3}$). Акустическая турбулентность не обязательно подразумевает большие числа Маха (объемная скорость может быть меньше скорости волны). Вязкость препятствует безвихревым потокам, но некоторый уровень завихренности всегда может существовать.

Вследствие указанных причин существует два довольно разных подхода к моделированию не взаимодействующих инерционных частиц. В одном из них жидкость интерпретируется как

идеализированный (без внутреннего давления) континуум, в другом — как движение невзаимодействующих точечных частиц. В обоих случаях частицы взаимодействуют с газом через трение. В работе [17] они условно названы *эйлеровым* и *лагранжевым* соответственно. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Лагранжев подход почти идеален для разреженных газов, но чувствителен при этом к статистическому (*дробовому*) шуму, обусловленному дискретностью текущей субстанции. Свободный от этого недостатка Эйлеров подход не в состоянии детально учесть взаимодействие масс соседних объемов, в частности, столкновений, исход которых зависит от формы и масс индивидуальных частиц материи, т.е. от скрытых параметров модели. Этот подход оперирует со средними характеристиками среды, отражающими свойства воображаемого статистического ансамбля. В лагранжевом описании, напротив, усреднение не проводится, а поскольку в каждом малом объеме обычно находится несколько частиц, обладающих индивидуальными скоростями. В частности, когда эти частицы движутся навстречу друг другу, мы имеем образование *каустик*.

В то же время лагранжево и эйлерово описания дополняют друг друга, образуя своего рода дуализм, подобный квантовомеханическому принципу дополнительности и могут также использоваться для оценки достоверности соответствующих режимов. Это позволяет нам изучать, например, когда и на каких масштабах длины статистический шум становится важным, и когда становится важным формирование каустики. Это может стать важным при больших параметрах распределения масс примесей и может привести к другим интересным эффектам, таким как неустойчивость потока и неустойчивость резонансного сопротивления (см. [34]).

Наиболее изученным аспектом турбулентной кинетики является центробежный эффект турбулентных вихрей, отбрасывающий частицы примеси от их центров к периферии (см. [8, 10, 42]).

3.2. Движение тяжелой частицы в вязкой жидкости. Под словом «тяжелая» здесь понимается наличие гравитации, придающей свободной частице ускорение $\mathbf{g}$. Скорость $\mathbf{v}$ сферической частицы с плотностью ρ_p и объемом $V_p = 4\pi a^3/3$ в неподвижной жидкости с плотностью ρ удовлетворяет уравнению

$$\rho_p V_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -6\pi\mu a \mathbf{v} - (1/2)\rho V_p \dot{\mathbf{v}} - 6a^2 \sqrt{\pi\rho\mu} \int_0^t \frac{\dot{\mathbf{v}}(t') dt'}{\sqrt{t-t'}} + (\rho_p - \rho) V_p \mathbf{g}.$$

Здесь μ и ρ — динамическая вязкость и плотность жидкости, окружающей частицу. В правой части (по порядку) — стоксова сила сопротивления, вклад присоединенной массы, запаздывающая сила Бассэ, архимедова сила и влияние сдвигового напряжения. Приведение жидкости в ламинарное движение со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ преобразует это уравнение к виду

$$\rho_p V_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 6\pi\mu a (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{1}{2}\rho V_p (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) + 6a^2 \sqrt{\pi\rho\mu} \int_0^t \frac{\dot{\mathbf{u}}(t') - \dot{\mathbf{v}}(t')}{\sqrt{t-t'}} dt' + \rho_p V_p \mathbf{g} + \rho V_p (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{g}).$$

Более подробное обсуждение этого уравнения движения легко найти в учебниках и монографиях по кинетической теории жидкостей и газов. Здесь мы отметим лишь, что оно основано на нескольких ограничительных предположениях, включая пренебрежение кривизной потока, поправками на скольжение и взаимодействием с границами и др. Очевидно, что последнее ограничение можно ослабить, введя более подробное описание столкновений-слияний частиц, но если объемная доля частиц достаточно мала (порядка 10^{-6}), а частицы электрически нейтральны, то взаимодействием между отдельной частицей и другими можно игнорировать на большей части ее траектории.

В [27] указаны основные черты рассматриваемого процесса. Частица, взвешенная в турбулентном поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, движется в газе по траектории $\mathbf{x}_p$ со скоростью $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{x}_p/dt$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t) - \mathbf{v}}{\tau_p},$$

где постоянная τ_p характеризует инерционные свойства частицы в совокупности с действием вязких сил со стороны турбулентной среды. Если радиус частицы a_p много меньше свободного пробега молекул газа λ_g (режим Эпштейна), вязкое время определяется формулой

$$\tau_p = \left(\frac{\rho_p}{\rho_g} \right) \left(\frac{a_p}{C_s} \right),$$

где C_s — скорость теплового движения молекул газа, ρ_g — плотность газа, ρ_p — плотность материала частиц. В противоположном случае, когда $a_p \gg \lambda_g$, а движение можно считать ламинарным, вязкое время дается законом Стокса:

$$\tau_p = \frac{2}{9} \left(\frac{\rho_p}{\rho_g} \right) \left(\frac{a_p^2}{\nu} \right).$$

Число Стокса $St \equiv \tau_p/\tau_\eta$ обычно и применяется для характеристики инерционности частицы, где $\tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$ — колмогоровское время. В несжимаемой среде $\varepsilon = \nu \langle \omega^2 \rangle$, $\tau_\eta = \langle \omega^2 \rangle^{-1/2}$. Грубая оценка на основе крупномасштабных свойств турбулентности дает

$$\tau_\eta \simeq (L/U) Re^{-1/2},$$

где L , U и Re — внешний масштаб длины, среднеквадратичная скорость потока и число Рейнольдса. Критической длиной в кластерной статистике инерциальных частиц является *колмогоровская длина диссипации* $\eta \equiv (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \simeq L Re^{-3/4}$.

Отметим, что процессы кластеризации частиц с $St < 1$ и $St > 1$ различны. Остановимся на этом подробнее.

Траектории малых частиц с числом $St \ll 1$ отклоняются от траекторий содержащих их жидких элементов лишь незначительно, и в фазовом пространстве их тоже приближенно можно принять за жидкость, задаваемую полем скоростей $v_i(\mathbf{x}, t)$. Полагая, что ускорение частицы dv_i/dt можно аппроксимировать локальным ускорением потока в этой точке du_i/dt , запишем

$$v_i(\mathbf{x}, t) \simeq u_i(\mathbf{x}, t) - \tau_p \frac{du_i(\mathbf{x}, t)}{dt}.$$

Предположение это резонно при $St \ll 1$, поскольку τ_p меньше τ_η наименьшего времени в потоке. В этом приближении дивергенция

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_i v_i = -\tau_p \partial_i u_j \partial_j u_i. \quad (2)$$

Это уравнение показывает, что поток частиц имеет конечную сжимаемость, даже если несущая жидкость несжимаема, и это является дополнительным механизмом кластеризации. Интуитивно понятно, что физическая причина скопления частиц заключается в их инерции, из-за которой они могут отставать или опережать элементы потока, когда сам поток испытывает ускорение или замедление.

Движение близких крупных частиц с числом $St \gg 1$ перестает быть когерентным и не соответствует более образу непрерывно текущей фазовой жидкости, становясь все более стохастическим, подобным тепловому движению молекул в кинетической теории. Авторы статьи [27] рассмотрели реакцию частиц с числом $St > 1$ на турбулентные вихри разных размеров, исследовали размеры турбулентных вихрей, масштаб времени оборота которых равен масштабу времени трения частиц, τ_p . Было установлено, что если τ_p соответствует инерционной шкале времени несущего потока, то

$$l_{\tau_p} \simeq \varepsilon^{1/2} \tau_p^{3/2} \simeq St^{3/2} \eta).$$

Частицы могут эффективно реагировать на вихри много больших размеров, чем l_{τ_p} . В этих масштабах движения частиц определяются несущим потоком, и заметной кластеризации частиц не происходит. Вихри меньших размеров не оказывают существенного влияния на относительное движение частиц, поскольку время отклика частицы τ_p значительно превышает время оборота вихря. Таким образом, в масштабах меньших l_{τ_p} поток и движения частиц не коррелируют, и относительная скорость двух частиц определяется их динамической памятью о разнице скоростей потока в масштабах порядка l_{τ_p} , где движения частиц частично коррелированы с потоком

носителя. Как отмечено выше, в этих малых масштабах частицы выполняют случайные относительные движения, и при $l \ll l_{\tau_p}$ кластеризация будет отсутствовать, а обнаружится лишь при $l \sim l_{\tau_p}$.

Для частиц с τ_p , превышающим время оборота T , все вихри развиваются в масштабе, меньшем этой величины, и l_{τ_p} не может быть определено. Движение этих частиц носит случайный характер и не связано со скоростью потока, их пространственное распределение можно считать однородным.

Интенсивность кластеризации для частиц инерционного диапазона уменьшается с увеличением St . Эти частицы кластеризуются в основном в масштабе длины l_{τ_p} , возрастающим с St . Следовательно, кластеры более крупных частиц пространственно более рассеяны, и так как ниже l_{τ_p} сильных флуктуаций нет, уровень концентрации внутри кластеров будет уменьшаться с увеличением St . Другими словами, более мелкие частицы могут образовывать кластеры с более высоким контрастом плотности, что усиливает кластеризацию.

3.3. Радиальная функция распределения. Количественное описание процесса кластеризации осуществляется с помощью *радиальной функции распределения* (РФР), представляющей собой отношение вероятности нахождения пары частиц в элементарных объемах, разделенных расстоянием r , к аналогичной вероятности в однородном пуассоновском ансамбле (см. [30]):

$$g(r) = \frac{\psi(r)/N}{(N-1)\delta V_r/V},$$

где $\psi(r)$ число частиц, находящихся на расстоянии r от каждой «пробной частицы», N — общее число популяции частиц в объеме V , $\delta V_r/V$ — относительный объем сферического слоя $(r, r + \delta r)$. Рид и Коллинз аппроксимировали радиальную функцию выражением

$$g(r) = c_0(l_K/r)^{c_1},$$

где $l_K = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ — колмогоровская длина, ε — средняя скорость диссипации, ν — кинематическая вязкость, а амплитуда c_0 и *кластерный показатель* c_1 — положительные постоянные. Степенной характер зависимости РФР от безразмерного аргумента l_K/r указывает на то, что кластеризация должна интерпретироваться как более сложное явление, чем синхронное выбрасывание групп примесных частиц из ядер вихрей, и турбулентность является важным механизмом, регулирующим распределение частиц аэрозоля по размерам в диапазоне примерно 1–20 мкм. Меньшие частицы коагулируют, главным образом, благодаря броуновскому движению, в то время как более крупные частицы могут коагулировать или оседать под действием силы тяжести. Если интересующие размеры примесных частиц много меньше колмогоровской длины (составляющей от 50 мкм до 1 мм), рост РФР в этой области может существенно увеличить скорость коагуляции. Существуют и другие меры количественной оценки кластеризации, но преимущество РФР в том, что она напрямую связана с важной кинетической характеристикой процесса — частотой столкновений капель (см. [11]).

В случае частиц двух типов (например, различающихся диаметрами) РФР представляется в бидисперсной форме

$$g_{ij}(r) = \frac{\psi_{ij}(r)/N_i}{N_j\delta V_r/V},$$

где $\psi_{ij}(r)$ — число j -частиц на расстоянии r от i -частиц. Безразмерной характеристикой степени инерциальной кластеризации служит число Стокса частиц данного типа в данной среде, определяемое как

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_K} = \frac{1}{18} \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right) \left(\frac{d}{l_K} \right)^2,$$

где $\tau_p \equiv \rho_p d^2 / (18\nu)$ — время движения частицы до ее остановки, $\tau_K \equiv (\nu/\varepsilon)^{1/2}$ — колмогоровский масштаб времени, $l_K \equiv \nu^{3/4} / \varepsilon^{1/4}$ — колмогоровский масштаб длины, d — диаметр частицы, ε — средняя скорость диссипации кинетической энергии турбулентного движения, ρ_p и ρ — плотности частиц и среды соответственно, а ν — кинематическая вязкость среды.

Эволюция реалистичных систем взвешенных частиц (например, капель в атмосферных облаках или твердых частиц в технических суспензиях) во многом зависит не только от их плотностей, но и от их размеров, точнее говоря, от их распределений по этим характеристикам, которые в компактном виде выражаются через распределения стоковых параметров РФР принимает вид

$$g(r) = \iint g_{ij}(r|St_i, St_j) p(St_i) p(St_j) dSt_i dSt_j,$$

где $p(St_j)d(St_i)$ — доля взвешенных частиц с параметрами Стокса в интервале $(St_j, St_j + dSt_i)$. В случае дискретного задания распределений

$$g(r) = \sum_i \sum_j g_{ij}(r|St_i, St_j) c_i c_j, \quad (3)$$

где $c_i = n_i / \sum n_i$ — относительные концентрации взвешенных частиц с параметром Стокса St_i . Справедливость представлений (2) и (3) подтверждается разложением уравнения (3), приводящим к равенству

$$g(r) = \frac{\sum_i \sum_j \psi_{ij}(r)}{N^2 \delta V_r / V}.$$

В [11, 28, 33] показано, что инерционная кластеризация хорошо наблюдается даже в масштабах, много меньших размеров турбулентных вихрей (соответствующих колмогоровской длине r_K), возрастая с уменьшением r по обратно-степенному закону, что можно объяснить теоретически в рамках диффузионно-дрейфовой модели (см. [7, 11, 43]).

Когда популяция примесей состоит из частиц двух типов i и j (например, двух разных диаметров), РФР обобщается до бидисперсной формы

$$g_{ij}(r) = \frac{\psi_{ij}/N_i}{N_j \delta V_r / V}.$$

3.4. Относительная диффузия Ричардсона. Образованию и началу роста кластеров предшествует процесс формирования областей с повышенной плотностью частиц — зон их предпочтительной концентрации. Задача о поведении вектора $\mathbf{r}$, соединяющего пару увлекаемых турбулентным потоком частиц примеси (известная ныне как *относительная турбулентная диффузия*), была поставлена и решена Ричардсоном в его классической работе 1926 г. Введя поле концентрации с нормированной на 1 плотностью $c(\mathbf{x})$ и предположив статистическую однородность, изотропность и стационарность ансамбля турбулентной среды, Ричардсон предложил для ковариации

$$q(\mathbf{r}) \equiv \int \langle c(\mathbf{x}) c(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle d^3 \mathbf{x}$$

уравнение

$$\frac{\partial q(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 K(r, t) \frac{\partial q(r, t)}{\partial r} \right)$$

с переменным коэффициентом относительной диффузии K , согласующимся с колмогоровским скейлингом,

$$K = \varepsilon^{1/3} r^{4/3} F(s),$$

где $F(s)$ — универсальная функция аргумента $s = \varepsilon^{1/3} r^{-2/3} t$. Из этих уравнений следует, что

$$q(r, t) = \frac{G(\varepsilon^{1/3} r^{-2/3} t)}{\varepsilon^{3/2} t^{9/2} N},$$

где N — нормировочная постоянная и

$$G(s) = \exp \left(\frac{9}{4} \int_1^s \frac{dx}{x^2 F(x)} \right).$$

Другим важным следствием колмогоровского скейлинга является закон Ричардсона—Обухова

$$\langle r^2 \rangle = C \varepsilon t^3,$$

где

$$C = \frac{6\pi}{N} \int_0^{\infty} s^{-17/2} G(s) ds.$$

Бэтчелор различал три режима: режим, в котором доминирует первоначальная разность скоростей, инерционный режим, и нормальный асимптотический режим диффузии двух коррелированных частиц.

Что касается инерционного режима, наиболее тесно связанного с колмогоровской феноменологией, предпринималось несколько попыток улучшить модель Ричардсона. Первая из них принадлежит тому же Бэтчелору (1952), возражавшему против зависимости K от текущего расстояния r и предпочитавшему чисто временную зависимость этого коэффициента, что эквивалентно выбору функции F в виде $F(s) = s^2$. Вторая модификация была предложена Крайчнаном (1996) на основе лагранжева описания стохастической динамики частиц, приводящей к диффузионному коэффициенту вида

$$K = \varepsilon^{1/3} r^{4/3} F(s)$$

с функцией $F(s) \propto s$ при малых s и выходящей на постоянное значение при $s \rightarrow \infty$. Стоит отметить, что эти три модели (Ричардсона и две ее модификации) предсказывали разные формы распределения вектора между частицами пары: в ричардсоновской модели $q(\mathbf{r}) \propto e^{-r^{2/3}}$ с заметным максимумом в окрестности нуля, тогда как в модификации Бэтчелора это гладкое гауссово распределение, а в модели Крайчнана оно подобно ричардсоновскому на малых расстояниях, но следует асимптотике $e^{-r^{2/3}}$ на больших. Фунг и др. (1992) указали на существенное расхождение между теоретическими предсказаниями постоянной Ричардсона—Обухова, охватывающие три порядка величины.

3.5. Численное моделирование. Приведем основные итоги численного моделирования процесса кластеризации инерционных частиц в турбулентном потоке вязкой среды, сформулированные в [27]. Моделировалось движение частиц 11 различных размеров, покрывающих диапазон Стоксовых чисел от 0,1 до 100 с последующим анализом радиальных функций распределения и характеристик случайного поля концентраций частиц примеси в однородной изотропной турбулентной среде. По результатам статистического анализа этих расчетов были сделаны следующие выводы.

- 1) При $St \sim 1$ РФР быстро возрастает с уменьшением радиуса и достигает больших значений в масштабах значительно ниже колмогоровской шкалы η . Это говорит о том, что турбулентная кластеризация может сильно увеличить частоту столкновений частиц из-за повышенной вероятности обнаружения соседей. При всех числах Стокса радиальные плотности ниже η следуют степенному закону, показатель которого μ достигает пика при $St \simeq 1$. Увеличение RDF может продолжаться до большего из двух масштабов: броуновская шкала или размер частиц.
- 2) При $St \sim 1$ РФР быстро возрастает с уменьшением радиуса и достигает больших значений в масштабах значительно ниже колмогоровской шкалы η . Это говорит о том, что турбулентная кластеризация может сильно увеличить частоту столкновений частиц из-за повышенной вероятности обнаружения соседей. При всех числах Стокса радиальные плотности ниже η следуют степенному закону, показатель которого μ достигает пика при $St \simeq 1$. Увеличение RDF может продолжаться до большего из двух масштабов: броуновская шкала или размер частиц.
- 3) На малых масштабах (порядка η) распределения частиц с $St \simeq 1$ характеризуются широкими хвостами. Ширина распределений для этих частиц быстро убывает. При заданном масштабе инерционного диапазона РФР пики ширины при числе Стокса в инерционном диапазоне (т.е. $St > 1$), и число Стокса с максимальной шириной РФР увеличивается с увеличением масштаба длины. Это говорит о том, что в масштабах длины, имеющих отношение к образованию планетезималей в протопланетных дисках, самая сильная кластеризация достигается частицами с $St \gg 1$.

- 4) Бидисперсные радиальные плотности в случае частиц разных размеров становятся плоскими на малых масштабах потому, что разные частицы имеют тенденцию группироваться в разных местах. Таким образом, вклад турбулентной кластеризации в темп столкновений между разными частицами слабее, чем в случае одинаковых частиц. Пространственный дрейф образуемых кластеров по мере изменения размера частиц сглаживает общее пространственное распределение частиц. Это обстоятельство служит предостережением относительно использования выводов, полученных в моделях с одинаковым фиксированным размером взвешенных частиц: они значительно завышают общую интенсивность кластеризации.

Бидисперсные РФР между частицами разных размеров различаются в малых масштабах из-за того, что разные частицы кластеризуются в разных местах, и вклад турбулентной кластеризации в скорость столкновений между частицами частиц слабее, чем в случае одинаковых частиц.

4. Столкновительная кластеризация.

4.1. Теория Смолуховского. Классическая модель коагуляции, сформулированная Смолуховским (современный взгляд на нее см. в [29]), основана на предположениях, что основную роль в процессе играют парные столкновения, что флуктуации концентраций достаточно малы, чтобы считать акты столкновений независимыми событиями, принадлежащими однородному ансамблю. В этом случае пробеги между столкновениями распределены по экспоненциальному закону, и эволюция концентраций описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка. Сталкивающиеся между собой объекты будем считать кластерами, состоящими из одинаковых (для простоты) элементов (единиц массы) и обозначать концентрацию k -кластеров (т.е. кластеров, состоящих из k единиц, $k = 1, 2, \dots, m$) через c_k . Система уравнений Смолуховского имеет вид

$$\partial_t c_k = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} K_{ij} c_i c_j - c_k \sum_{j=1}^m K_{kj} c_j + \eta \delta_{i1}.$$

В броуновской модели движения кластеров ядро системы K_{ij} определяется диффузионной теорией:

$$K_{ij} = 4\pi R_{ij} [D(i) + D(j)],$$

где R_{ik} — эффективный радиус поперечного сечения для i - k кластерных столкновений, $D(i)$ — коэффициент диффузии i -кластера. Для простых кластеров сферической формы R_{ij} пропорционален $(i^{1/3} + j^{1/3})$ и по формуле Стокса—Эйнштейна

$$K_{ij} = 2 + \left(\frac{i}{j}\right)^{1/3} + \left(\frac{j}{i}\right)^{1/3}.$$

Явное решение системы уравнений с ядром такого вида найдено не было, но в отсутствие зависимости K от размеров кластеров система решается аналитически.

Для броуновской коагуляции частиц, образующих фракталы, система Смолуховского применима, если применимо приближение среднего поля. Для столкновительного режима кластеризации можно ожидать, что последнее уравнение остается применимым, если радиус поперечного сечения заменить суммой средних радиусов $R_i + R_j$.

Классическое описание кинетики агрегации в рамках теории Смолуховского ограничивается рассмотрением лишь парных (двухчастичных) столкновений в предположении, что пространственное распределение этих случайных событий принадлежит классу однородных пуассоновских распределений и что вследствие этого применимо приближение среднего поля. Однако простого сравнения наблюдаемых и прогнозируемых распределений размеров кластеров недостаточно для проверки допустимости этих предположений хотя бы потому, что крупнозернистые представления лишь грубо отражают происходящие процессы.

В цитируемой статье сообщается о результатах компьютерного тестирования кинетики кластер-кластерной агрегации с использованием стандартных моделей твердых частиц кубической

формы на кубической же решетке. Проверялись как частота столкновений, так и эволюция распределений кластеров со временем. В заключение авторы отмечают, что хотя расчеты и показали принципиальную применимость приближения среднего поля к описанию агрегации частиц различных размеров, установить особенности ядра, порождающие фрактальные свойства наблюдаемых кластеров в этом приближении не удалось.

4.2. Реакционно-диффузионное уравнение. Уравнение Смолуховского послужило основой для развития кинетической модели реакционно-диффузионных (РД) процессов. Добавление пространственной переменной в список аргументов концентрации и диффузионного слагаемого в правую часть уравнения Смолуховского приводит к РД-уравнению следующего типа (см. [12]):

$$\partial_t c_k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} K_{ij} c_i(\mathbf{x}, t) c_j(\mathbf{x}, t) - c_k(\mathbf{x}, t) \sum_{j=1}^{\infty} K_{kj} c_j(\mathbf{x}, t) + D_k \Delta c_k(\mathbf{x}, t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Разумеется, в реальных процессах концентрации подвержены статистическим флуктуациям, но в это уравнение входят их средние значения. Кроме того, в нем учитываются только реакции между кластерами конечных размеров. При наличии бесконечного кластера (*геля*) уравнение необходимо дополнить членом $g(\mathbf{x}, t)$, описывающим его реакционную способность. Представляя ядро K_{ij} кластер-кластер столкновения в виде произведения их *масс* i и j , перепишем РД-уравнение в виде

$$\partial_t c_k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} ij c_i(\mathbf{x}, t) c_j(\mathbf{x}, t) - k c_k(\mathbf{x}, t) \left[\sum_{j=1}^{\infty} j c_j(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t) \right] + D_k \Delta c_k(\mathbf{x}, t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Как и в цитируемой работе, примем массовую плотность системы за единицу (т.е. положим $M = V$) и запишем закон сохранения массы в виде

$$V^{-1} \int dV \left[\sum_k k c_k(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t) \right] = 1$$

($g(\mathbf{x}, t)$ — плотность массы геля). Временная зависимость g определяется уравнением

$$\partial_t g(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k(\mathbf{x}, t),$$

утверждающим просто, что реакции между k -кластерами и гелем идут со скоростью $k c_k g$, добавляя k единиц в гель (предполагается, что гель не движется).

Аналитические решения этих уравнений с общим начальным условием $c_k(\mathbf{x}, 0)$, необходимые для вычисления пространственных флуктуаций неизвестны, однако имеется решение для важного частного случая, когда начальное распределение пространственно однородно, а ядро факторизуется:

$$c_k(\mathbf{x}, 0) = c_k(0), \quad g(\mathbf{x}, 0) = g(0), \quad K_{ij} = ij.$$

Эта модель представляет собой стилизованный вариант классических моделей полимеризации (см. [14]), описывающих рост разветвленных полимеров. Реакционная способность кластера в этой модели пропорциональна его массе. Соответственно, система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t c_k(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} ij c_i(\mathbf{x}, t) c_j(\mathbf{x}, t) - k c_k(\mathbf{x}, t) \left[\sum_{j=1}^{\infty} j c_j(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t) \right] + D_k \Delta c_k(\mathbf{x}, t), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \partial_t g(\mathbf{x}, t) &= g(\mathbf{x}, t) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Ее решения тоже не зависят от координат и удовлетворяют уравнениям

$$\dot{c}_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} ij c_i(t) c_j(t) - k c_k(t), \quad \dot{g}(t) = M_2(t) g(t),$$

где $M_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k(t)$ — второй момент концентраций. Отметим, что первый, согласно закону сохранения масс, удовлетворяет условию

$$M_1(t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k c_k(t) = 1 - g(t),$$

а момент n -го порядка определяется суммой

$$M_n(t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^n c_k(t).$$

Уравнение химических реакций является частным случаем *уравнения коагуляции* Смолуховского, соответствующего выбору $K_{ij} = ij$ для скоростей превращений K_{ij} . Для монодисперсных начальных условий имеем $c_k(0) = \delta_{k1}$, и распределение кластеров по размерам дается решением

$$c_k(t) = k^{k-2} (te^{-t})^k / k! t, \quad k = 1, 2, \dots$$

Концентрацию $g(t)$ геля теперь можно найти из закона сохранения масс:

$$M_1(t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k c_k(t) = 1 - g(t).$$

В предгелевой стадии ($t < t_c = 1$) вся масса содержится в золе:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k(t) = 1,$$

и $g(t)$ исчезает. На постгелевой стадии ($t > 1$) $g(t) = (t - t^*)/t$, где $t^*(t)$ — корень уравнения $t^* \exp(-t^*) = t \exp(-t)$ в интервале $0 < t^* < 1$. Это означает, что $g(t)$ линейно возрастает чуть выше t_c :

$$g(t) \sim 2(t - 1) \quad \text{при } t \downarrow 1.$$

При $t \rightarrow \infty$ находим, что $g(t) \rightarrow 1$ (вся масса теперь содержится в геле). Важной характеристикой точки геля является расходимость моментов $M_n(t)$ при $n \geq 2$. Так, при $n = 2$ оказывается, что $M_2(t) = (1 - t)^{-1}$, если $t < 1$, и $\sim (t - 1)^{-1}$, если $t \downarrow 1$.

4.3. Частицы в турбулентной среде. Авторы работы [9] начинают свой обзор с рассмотрения сферических частиц диаметром d_p и плотностью ρ_p в жидкости плотностью ρ и кинематической вязкостью $\nu = \mu/\rho$. В предположении о стоксовом сопротивлении в однородном и установившемся потоке время отклика частицы τ_p можно определить двумя способами: как характерное время отклика на мгновенное повышение скорости окружающей жидкости, $\rho_p d_p^2 / (18\mu)$, или время достижения конечной скорости осаждения частицы в покоящейся жидкости, $(\rho_p - \rho) d_p^2 / (18\mu)$.

Оба определения совпадают при $\rho_p/\rho \gg 1$. Строго говоря, инерционные частицы в турбулентных потоках нарушают стоксов закон трения, и вводятся эмпирические поправки для числа Рейнольдса. Турбулентность жидкости характеризуется скоростью диссипации, определяющей колмогоровские масштабы η , τ_η и u_η длины, времени и скорости соответственно. Подходящими для описания процесса безразмерными комбинациями представляются отношения плотностей ρ_p/ρ , длин d_p/l и времен $\tau_p/\tau \equiv St$ (число Стокса), где l и τ — характерные длина и время изменения потока. Авторы принимают их в качестве колмогоровских масштабов, порождаемых взаимодействием частиц с микромасштабной структурой турбулентности и в стоксовом приближении сопротивления пишут

$$St = \frac{1}{18} \frac{\rho_p}{\rho} \left(\frac{d_p}{\eta} \right)^2,$$

определяя масштабный параметр скорости осаждения формулой $Sv \equiv \tau_p g / u_\eta$, где $\tau_p g$ — конечная скорость частицы, ускоренной гравитацией в неподвижной жидкости. Большие пространственно-временные флуктуации локальной концентрации частиц наблюдаются в широком диапазоне значений параметров. Это явление, известное как *инерционная кластеризация*, наблюдалось в

многочисленных лабораторных и численных экспериментах, а также и в полевых измерениях атмосферных потоков.

Этот механизм традиционно связывается с тенденцией инерционных частиц оказаться в области потока определенной топологии (*предпочтительной областью*). Многочисленные моделирования подтвердили, что частицы реже встречаются в областях с высокой завихренностью, чем с высокой деформацией. Это подтверждает мнение о существенной роли центробежных сил, отбрасывающих частицы на периферию вихрей (как центрифуги), но является ли этот механизм единственным (или может быть даже основной) причиной кластеризации? Рассмотрим основные подходы к поиску ответа на этот вопрос.

Пространственное распределение частиц, взвешенных в турбулентной среде, формируется под действием множества вихрей различных масштабов, полное описание процесса кластеризации в этих условиях является непростой задачей. Для решения ее использовались различные методы (см. [6]), включая метод чисел заполнения при разбиении области наблюдения на ячейки, как это делается в квантовой статистической модели. Согласно многим экспериментальным данным кластеризация наиболее выражена для $St = O(1)$. Исследования с использованием концепции радиальной функции распределения (РФР), обеспечивающие многомасштабную количественную оценку кластеризации, подтвердили, что типичный размер кластера имеет порядок $O(10\eta)$, а кластеризация в сдвиговой турбулентности анизотропна вплоть до диссипативных масштабов. При $St < 1$ и расстояниях соответствующих диссипативному диапазону, эксперименты и моделирование выявили степенное поведение РФР — признак геометрического (можно сказать, фрактального) самоподобия (см. [31, 41]).

При более высоких St частицы слабо реагируют на мелкомасштабные вихри и кластеры в масштабах инерционного диапазона не проявляют более фрактальных свойств, а РФР спадают экспоненциально. В субколмогоровской области расстояния между частицами сравнимы с их диаметрами. Явуз и др. (2018) обнаружили, что РФР отклонилась от степенного закона и достигла более высоких уровней, что они объяснили межчастичным гидродинамическим взаимодействием. Последствия этого факта могут оказаться весьма серьезными для столкновительных моделей кластеризации, критическим образом зависящих от размеров частиц. В [25] использовались диаграммы Вороного для характеристики инерционной кластеризации: исследуемая область разделялась на ячейки, закрепленные за каждой частицей, а обратные объемы этих ячеек интерпретировались как локальные концентрации. Для частиц, случайно расположенных в пространстве, РФР ячеек хорошо аппроксимируется Г-распределением, в то время как инерционные частицы демонстрируют более широкое распределение.

Отдельные кластеры можно определить как наборы частиц, содержащиеся в связанных группах ячеек, меньших заданного порога. Выше определенного размера кластеры имеют извилистую форму, связанную с явно выраженным степенным законом, простирающееся до больших масштабов. Такие особенности были также обнаружены в изображениях снежинок в турбулентных воздушных потоках.

Средний размер кластера имеет тенденцию к росту с увеличением St и Re , а внутрикластерная концентрация примерно на порядок превышает среднюю, независимо от его размера. Время жизни кластера составляет несколько колмогоровских масштабов, увеличивающееся с размером кластера. Небольшие скопления обычно коагулируют на составные элементы, тогда как крупные кластеры рекомбинируют в другие крупные кластеры.

4.4. Накопление и осаждение примеси. Исследование частиц конечных размеров в однородных турбулентных потоках обычно мотивируется конкретными условиями, в которых гравитация играет важную роль (см. [26]). Модель центрифуги, привлекаемая для объяснения локальных неоднородностей распределения примесных частиц, строго говоря, применима лишь в режиме $St \ll 1$, для которого сжимаемость поля скоростей частицы равна напрямую связано с доминированием деформации над вращением. Однако кластеризация наиболее интенсивна при $St = O(1)$. С уменьшением St частицы отстают от потока, и поэтому их пространственное распределение не может полностью определяться полем мгновенной скорости жидкости. Более того, кластеры обладают самоподобной многомасштабностью, простирающейся выше и ниже колмогоровского размера

вихрей. Численное моделирование случайных потоков показало, что с увеличением St доминирующим фактором становится отставание частиц. Малые сгущения частиц со временем продолжают сжиматься, формируя фрактальные множества. Центробежный механизм доминирует для $St \ll 1$, тогда как вне этого режима он уступает место эредитарному механизму, отражающему влияние динамической предыстории частицы: динамика частиц отделяется от локального поля скоростей жидкости и прошлые взаимодействия с турбулентными всплесками жидкости приобретают все большее значение. Статистико-механические расчеты показали, что мелкомасштабная кластеризация обусловлена мультипликативным процессом усиления случайных сокращений и расширений.

В пределе малых St частицы увлекаются мгновенными локальными всплесками, тогда как в противоположном пределе они испытывают усредненное по пространству-времени влияние в том числе и за счет эредитарности. При $St > 1$ кластеры формируются на этапе, когда мелкомасштабная турбулентная активность (отслеживаемые по траекториям частиц) затухает, и они сохраняются до тех пор, пока такое спокойное состояние сохраняется. Вместо этого механизм подметания основан на представлении о том, что нулевое ускорение точки потока заметаются крупномасштабными вихрями, и частицы прилипают к этим потокам, потому что они движутся (в первом порядке) с одинаковой скоростью. Этот механизм будет действовать и для τ_p в инерционном диапазоне, заменив центробежный на средних и крупных масштабах, где кластеризация возникает в результате того, что более крупные вихри сметаю более мелкие, независимо от St .

Работы по численному моделированию кластеризации в загруженных турбулентных средах можно разделить на три класса моделирования: динамическое (прямое численное решение уравнения Навье—Стокса) моделирование, стохастическое моделирование случайных потоков и кинематическое моделирование (synthetic flows). Последнее основано на гармоническом разложении турбулентного поля (скорости, плотности, энергии)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1_k^N} \mathbf{A}_n \sin(\mathbf{k}_n \mathbf{x} + \omega t) \mathbf{B}_n \cos(\mathbf{k}_n \mathbf{x} + \omega t),$$

где порождаемое граничными условиями множество волновых векторов $\mathbf{k}_n$ вместе с перпендикулярными им векторными коэффициентами $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{B}_n$ формируют энергетический спектр и отвечает скорее классической эйлеровой концепции (разбив объем на ячейки и посчитав число частиц в каждой из них, мы получим представление состояния системы в терминах чисел заполнения, легко переводимое в решеточную модель; см. [18, 19]). Стохастическая же модель, в центре внимания которой находится одна из введенных в турбулентную среду частиц, а влияние остальной части системы на ее движение выражается введением автокорреляций, может рассматриваться как вероятностный аналог лагранжевой динамики, где тоже возможны два представления: через распределения вероятностей (пример — диффузионное уравнение) и через случайные процессы (пример — броуновское движение).

В модели марковских цепей учет влияния окружения на частицу осуществляется заменой обычных для марковского процесса экспоненциальных распределений интервалов или расстояний между их последовательными узлами распределениями другого типа, выбранными с учетом предварительной информации об особенностях моделируемого процесса.

В контексте динамики отдельных частиц, лагранжева статистика считается ключевой информацией для понимания особенностей динамики системы частицы + жидкость.

Измерения скорости оседания, выполненные в [41], показали наличие коллективных эффектов, проявляющихся в повышении скорости осаждения кластеризованных частиц. Результаты моделирования этих эффектов можно улучшить, введя локальные концентрации частиц вдоль их траекторий и типичные времена пребывания частиц в кластерах (см. [6]).

Из-за сложности экспериментального описания потоков, наполненных частицами, большая часть информации о поведении тяжелых частиц в однородных турбулентных потоках была получена в результате численного моделирования. Отсутствие экспериментальных результатов, подтверждающих данные, полученные с помощью численного моделирования, усложняет исследование различий между поведением, обусловленным взаимодействием частиц и турбулентностью,

и ложными эффектами, возникающими при численном моделировании. В этом контексте мы поставили перед собой задачу построить эксперимент, в котором тяжелые частицы можно было бы инжектировать в однородный изотропно затухающий турбулентный поток. Данные, полученные в этих хорошо контролируемых условиях, могут дать ценную информацию о поведении частиц в реальных турбулентных потоках, по крайней мере, в тех областях, где турбулентность можно считать однородной и изотропной.

Турбулентность приводит к преимущественной концентрации тяжелых частиц, создавая пространственно неоднородные распределения, даже если частицы однородно впрыскиваются в поток. Этот эффект, приводящий к образованию высоких местных концентраций (кластеров), подтверждается численными и натурными экспериментами.

В [41] была экспериментально исследована связь между этим эффектом и скоростью осаждения частиц. Для изучения характерных размеров кластеров на фоне распределенных в турбулентном потоке частиц (*маркеров*), авторы сопоставили наблюдаемые распределения чисел заполнения со *случайным распределением* (под которым они, как это нередко делается в физической литературе, понимали однородное пуассоновское распределение). Полученные в экспериментах двумерные расположения частиц на разных расстояниях от точки впрыскивания маркеров переводились в числа. В идеальном случае совместное распределение чисел заполнения описывается *полиномиальным распределением* (если суммарное число частиц задано, а их положения взаимно независимы) или *многомерным пуассоновским* (если суммарное число также случайно и подчиняется одномерному пуассоновскому распределению). Авторы игнорировали эти «тонкости», поэтому мы опустим их анализ, обратившись к близким по теме работам, на которые они, кстати, и ссылаются.

В работе [41] рассматривается численная модель движения тяжелых сферических частиц в однородной, изотропной, стационарной (в статистическом смысле) турбулентной среде (воздухе). Частицы считаются малыми по сравнению с колмогоровским масштабом турбулентности, а загроможденность ими жидкости достаточно невысокой, чтобы турбулентная структура не изменилась. В то же время их размер полагается значительно большим средней молекулярной длины свободного пробега с тем, чтобы время аэродинамического отклика было много больше времени, приходящегося на одно столкновение (при этом влияние броуновского движения окружающих частицу молекул пренебрежимо мало по сравнению с дисперсией, вносимой турбулентными вихрями).

Как хорошо известно, частицы накапливаются на нисходящей стороне вихрей и что скорость их осаждения увеличивается. Это явление было названо эффектом предпочтительного накопления, а ускоренное покидание этой зоны вихря частицами — *выметанием*. Анализ результатов привел авторов работы [6] к пониманию важной роли кластеров в этом процессе и основанной на ней простой феноменологической идее оценивать скорость осаждения частиц в суммой двух слагаемых

$$V_z = V_{is} + V_{cl}.$$

Первый член представляет собой скорость осаждения, которую имели бы изолированные частицы в турбулентном потоке. Этот член формируется стоксовой скоростью, которую частицы имели бы в неподвижной жидкости плюс влияние эффекта выметания. Это наблюдается при малой объемной доле частиц в потоке и подтверждается прямым численным моделированием. Второй член в уравнении обусловлен влиянием кластеров на скорость осаждения частиц внутри них. Чтобы оценить его величину, авторы моделировали кластеры как большие псевдочастицы с характерным размером l и средней плотностью ρ_{cl} , определяемая локальной концентрацией частиц в них

$$\rho_{cl} = (1 - c)\rho_{air} + c\rho_p.$$

Полагая далее, что кластеры находятся в вязкой среде ($Re \sim 10$), взаимодействие с окружающей средой-носителем можно выразить стоксовой силой сопротивления. Тогда

$$(\rho_{cl}\rho_{air})\frac{g\pi l^3}{6} = \frac{1}{2}\rho_{air}V_{cl}^2 C_D \frac{\pi l^2}{4},$$

где V_{cl} — скорость осаждения кластера. Отсюда

$$V_{cl} = \frac{K_T}{18} \frac{\rho_p}{\rho_{air}} \frac{g}{\nu_{air}} CL_{cl}^2,$$

где K_T — форм-фактор (равный 1 для сфер и принимающий значения из интервала $(0,3; 0,5)$) для удлиненных и утонченных структур.

Важно отметить линейную зависимость этого выражения от локальной концентрации частиц, что подтверждается экспериментальными данными. Несмотря на простоту модели, с экспериментальными данными показывает удовлетворительное согласие.

4.5. Аккреция. Если в газ с концентрацией N молекул массами m , находящийся в термодинамическом равновесии, внесен шарик радиусом r , то среднее время между последовательными соударениями с ним молекул равно

$$\tau_c \approx (\pi r^2 N v_T)^{-1} \approx \left[\pi r^2 N \left(\frac{kT}{m} \right)^{1/2} \right]^{-1},$$

где v_T — их средняя скорость. Если молекулы прилипают к нему, то суммарная масса M получающегося образования растет со скоростью

$$A = \frac{dM}{dt} \approx \frac{m}{\tau_c} \approx \pi r^2 N (kTm)^{1/2},$$

а радиус —

$$\frac{dr}{dt} \approx \frac{N}{\rho} (kTm)^{1/2} \approx \frac{A}{\pi r^2 \rho},$$

где ρ — плотность газа. Этим видом аккреции объясняется образование пылевых облаков в межзвездной среде.

Если планета, звезда или галактика имеют скорость v относительно газового облака, продолжительность их соударения (точнее, время полета, предшествующего столкновению)

$$\tau \sim \frac{r}{v},$$

где r — расстояние между объектами. Если планета, звезда или галактика обладают массой M , а облако имеет плотность ρ , то сила гравитации F , с которой объект действует на единицу объема газа,

$$F = \frac{GM\rho}{r^2},$$

а импульс, сообщаемый этой силой за время столкновения —

$$p = \tau_c F = \frac{GM\rho}{r} v.$$

Начальный импульс ρ становится равным p на критическом расстоянии

$$R_A = \frac{GM}{v^2} = 1,3 \cdot 10^{14} \left(\frac{10 \text{ км/с}}{v} \right)^2 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) [\text{см}].$$

Когда затравочный объект проходит сквозь газ, он захватывает газ в пределах критического радиуса аккреции R_A . Если R_A превосходит среднюю длину свободного пробега в газе, захваченный газ будет представлять собой турбулентное облако, окружающее затравочный объект. Турбулентное трение будет вызывать потери кинетической энергии газа, и газ будет оседать на него. Поскольку масса газовой сферы $\sim \rho R_A^3$, и она пополняется в течение времени τ_A , то скорость роста массы

$$A \approx \pi \rho R_A^2 v = \pi R_A^2 \mu m_H N v,$$

(μ — молекулярная масса, m_H — масса атома водорода), скорость увеличения радиуса

$$\frac{dr}{dt} = \frac{v}{4} \frac{\rho}{\rho_s},$$

где $\rho_s = 3M/(4\pi R^3)$ — плотность локального образования (планеты, звезды, галактики). Если кинетическая энергия аккрецирующего газа меньше гравитационной энергии этого образования, то весь газ осядет на него, и скорость роста массы выразится формулой

$$A = \pi\rho[R(R + R_A)]v.$$

При $\rho = 10^{-24}$ г/см³ (значение, характерное для межзвездной среды), $R = R_\odot$ и $v = 10$ км/с эта формула дает $A = 10^{-18}M_\odot$ в год при $M = M_\odot$.

Аккреция на объект массой M становится сверхзвуковой, если его радиус R меньше критического значения

$$R_s = \frac{5 - 3\gamma}{4} \frac{GM}{s^2}.$$

Здесь γ — показатель адиабаты, s — скорость звука в газе на бесконечности,

$$s = \left(\frac{\gamma P}{\rho} \right)^{1/2},$$

P и T — давление и температура газа. Если $v < s$ и имеет место аккреция, то $R < R_s$. В этом случае

$$R_A = \delta_\gamma \frac{GM}{s^2},$$

где

$$\delta_\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5 - 3\gamma} \right)^{(5-3\gamma)/(3\gamma-3)}.$$

В частности, $\delta_{5/3} = 0.5$, и $\delta_{4/3} = 1$. Скорость аккреции при $v < s$

$$A = 4\pi R_s^2 U_s \rho_s = \alpha_\gamma \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 c \rho \left(\frac{m_H c^2}{kT} \right)^{1/2} \approx \pi R_A^2 s \rho,$$

где скорость звука U_s на критическом расстоянии R_s равна

$$U_s = s \left(\frac{2}{5 - 3\gamma} \right)^{1/2},$$

а

$$\alpha_\gamma = \frac{\pi}{4\gamma^{1/2}} \left(\frac{2}{5 - 3\gamma} \right)^{(5-3\gamma)/[2(\gamma-1)]}.$$

Частные значения $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_{5/3} = 0.3$ и $\alpha_{4/3} = 1.4$.

5. Заключительные замечания о статистике. Представим себе множество точек, беспорядочно распределенных в некотором объеме V . Простейшей моделью такого распределения является однородный пуассоновский ансамбль. Последний термин означает, что если мы разобьем объем V на непересекающиеся элементы ΔV_i и сравним числа заполнения выбранного элемента с числами заполнения этого же элемента в других копиях ансамбля, то получим серию независимых случайных величин с одинаковым математическим ожиданием и нулевым (в силу независимости) коэффициентом корреляции. Поскольку этот *воображаемый* ансамбль реально построить невозможно, вновь напрягаем воображение, представляя себе, взят *очень большой* объем, в котором не только можно разместить множество одинаковых объемов V_j , что ни о каком влиянии их друг на друга говорить не придется. После этого провозглашается *эргодическая гипотеза* (т.е. *воображаемый закон*, согласно которому усреднение по ансамблю этих точечных распределений эквивалентно усреднению по элементам ΔV_i . Чтобы не осталось никаких сомнений, введем термин *представительная выборка* для таких наборов случайных переменных, для которых эта гипотеза выполняется. Теперь все сходится, как говорится, по определению, и ничего доказывать не надо.

В тех случаях, когда обсуждается поведение смесей в химических ретортах и лабораторных бассейнах, статистическая методология не кажется такой уж принципиальной, метеорологические аномалии (пылевые бури и морские штормы), конечно, усиливают интерес к ней, но то, что обсуждение самого интригующего аспекта естествознания — физической истории мироздания —

не может обойтись без привлечения ее к анализу мегаданных современной космологии, со всей очевидностью удостоверяет ее фундаментальный статус. Одним из центральных положений астростатистики и является вышеупомянутая гипотеза о представительной выборке. Вот что пишет об этом выдающийся астрофизик Ф. Дж. Э. Пиблс.

Основной принцип общепринятой космологической теории в формулировке Хаббла состоит в том, что доступная наблюдениям часть Вселенной является представительной выборкой Вселенной в целом. Конечно, вещество распределено чрезвычайно неоднородно: существуют звезды, галактики и скопления галактик. Поэтому необходимо считать, что предположение об однородности и изотропности применимо в статистическом смысле, т.е. в среднем по достаточно большим областям: считается, что Вселенная может рассматриваться как однородный и изотропный случайный процесс.

Представим себе, что распределение вещества определяется некоторым физическим процессом, включающим длинную и сложную последовательность событий. Тогда распределение в любом конкретном месте является результатом большего числа малых вариаций параметров в этой последовательности событий. Выборки, полученные на основе далеко отстоящих друг от друга областей, не коррелируют, и набор таких выборок является статистическим ансамблем, возникшим в результате большого числа независимых реализаций такого процесса, многоточечные корреляционные функции можно рассматривать как средние по ансамблю.

Гипотеза о представительной выборке утверждает, во-первых, что вполне разумно рассматривать достаточно удаленные друг от друга части Вселенной как независимые реализации одного и того же физического процесса, а во-вторых, что в пределах наблюдаемой Вселенной существует много независимых выборок, которые можно объединить в приближенный статистический ансамбль. В-третьих, гипотеза утверждает, что повороты не изменяют средние по ансамблю величины.

Особенно важен для анализа данных тест на воспроизводимость характеристик, полученных по наблюдениям различных областей пространства: различных частей неба или обзоров различной глубины. Этот тест необходим, чтобы проверить степень искажения данных в результате систематических ошибок, и он служит для надежной проверки гипотезы о представительной выборке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесчастных С. К., Фомина И. Н. Динамическая модель в задаче кластерного анализа// Автомат. телемех. — 1987. — 7. — С. 179–182.
2. Учайкин В. В. Нелокальные модели турбулентной диффузии// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 154. — С. 113–122.
3. Учайкин В. В. Спонтанная кластеризация в марковских цепях. II. Мезофрактальная модель// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 221. — С. 128–147.
4. Учайкин В. В., Ерлыкин А. Д., Сибатов Р. Т. Нелокальная (дробно-дифференциальная) модель переноса космических лучей в межзвёздной среде// Усп. физ. наук. — 2023. — 193, № 3. — С. 233–278.
5. Учайкин В. В., Кожеева Е. В. Спонтанная кластеризация в марковских цепях. III. Алгоритмы Монте-Карло// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 222. — С. 115–133.
6. Aliseda A., Cartellier A., Hainaux F. et al. Effect of preferential concentration on the settling velocity of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence// J. Fluid. Mech. — 2002. — 468. — P. 77–105.
7. Balkovsky E., Falkovich G., Fouzon A. Intermittent distribution of inertial particles in turbulent flows// Phys. Rev. Lett. — 2001. — 86. — P. 2790.
8. Bhatnagar A., Gustavsson K., Mitra D. Statistics of the relative velocity of particles in turbulent flows: monodisperse particles// Phys. Rev. E. — 2018. — 97, № 2. — 023105.
9. Brandt L., Coletti F. Particle-Laden Turbulence: Progress and Perspectives// Rev. Fluid Mech. — 2022. — 54. — P. 159–189.
10. Bragg A. D., Collins L. R. New insights from comparing statistical theories for inertial particles in turbulence: I. Spatial distribution of particles// New J. Phys. — 2014. — 16, № 5. — 055013.
11. Chun J., Koch D. L., Rani S. L., Ahluwalia A., Collins L. R. Clustering of aerosol particles in isotropic turbulence// J. Fluid Mech. — 2005. — 536. — P. 219–251.

12. *van Dongen P. G. J.* Spatial fluctuations in reaction-limited aggregation// J. Stat. Phys. — 1989. — 54, № 1/2. — P. 223–271.
13. *Dorso C., Randrup J.* Early recognition of clusters in molecular dynamics// Phys. Lett. B. — 1993. — 301, № 4. — P. 328–333.
14. *Flory P. J.* Principles of Polymer Chemistry. — Ithaca, New York: Cornell University Press, 1953.
15. *Grabowski W. W., Wang L. P.* Growth of cloud droplets in a turbulent environment// Ann. Rev. Fluid Mech. — 2013. — 45. — P. 293–324.
16. *Gubernatis J. E.* Marshall Rosenbluth and the Metropolis algorithm// Phys. Plasmas. — 2005. — 12, № 5. — 057303.
17. *Haugen N. E. L., Brandenburg A., Sandin C. et al.* Spectral characterisation of inertial particle clustering in turbulence// J. Fluid Mech. — 2022. — 934. — A37.
18. *Ijzermans R. H. A., Meneguz E., Reeks M. W.* Segregation of particles in incompressible random flows: singularities, intermittency and random uncorrelated motion// J. Fluid Mech. — 2010. — 653. — P. 99–136.
19. *Ijzermans R. H. A., Reeks M. W., Meneguz E., Picciotto M., Soldati A.* Measuring segregation of inertial particles in turbulence by a full Lagrangian approach// Phys. Rev. E. — 2009. — 80. — 015302.
20. *Ireland P. J., Collins L. R.* Direct numerical simulation of inertial particle entrainment in a shearless mixing layer// J. Fluid Mech. — 2012. — 74. — P. 301–320.
21. *Karchniwy E., Klimanek A., Haugen N. E. L.* The effect of turbulence on mass transfer rates between inertial polydisperse particles and fluid// J. Fluid Mech. — 2019. — 874. — P. 1147–1168.
22. *Kukushkin A. V., Kulichenko A. A.* Levy walks as a universal mechanism of turbulence// Nonlocal. Found. — 2023. — 3. — P. 602–620.
23. *Lee T.* Lognormality in turbulence energy spectra// Entropy. — 2020. — 22, № 6. — 669.
24. *Lu J., Nordsiek H., Shaw R. A.* Clustering of settling charged particles in turbulence: theory and experiments// New J. Phys. — 2010. — 12. — 123030.
25. *Monchaux R., Bourgoïn M., Cartellier A.* Preferential concentration of heavy particles: A Voronoi analysis// Phys. Fluids. — 2010. — 22, № 10. — 103304.
26. *Monchaux R., Bourgoïn M., Cartellier A.* Analyzing preferential concentration and clustering of inertial particles in turbulence// Int. J. Multiphase Flow. — 2012. — 40. — P. 1–18.
27. *Pan L., Padoan P., Scalo J., et al.* Turbulent clustering of protoplanetary dust and planetesimal formation// Astrophys. J. — 2011. — 740, № 1. — P. 6.
28. *Reade W. C., Collins L. R.* Effect of preferential concentration on turbulent collision rates// Phys. Fluids. — 2000. — 12. — P. 2530.
29. *Robert M., McGrady E. D.* On the validity of Smoluchowski's equation for cluster-cluster aggregation kinetics// J. Chem. Phys. — 1985. — 82, № 11. — P. 5269–5274.
30. *Saw E.-W., Shaw R. A., Salazar J. P. et al.* Spatial clustering of polydisperse inertial particles in turbulence: I. Comparing simulation with theory// New J. Phys. — 2012. — 14, № 10. — 105030.
31. *Saw E. W. et al.* Spatial clustering of polydisperse inertial particles in turbulence: II. Comparing simulation with experiment// New J. Phys. — 2012. — 14, № 10. — 105031.
32. *Shaw R. A.* Particle-turbulence interactions in atmospheric clouds// Ann. Rev. Fluid Mech. — 2003. — 35, № 183. — P. 183–227.
33. *Shaw R. A., Kostinski A. B., Larsen M. L.* Towards quantifying droplet clustering in clouds// Q. J. R. Meteorol. Soc. — 2002. — 128. — P. 1043.
34. *Squire J., Hopkins P. F.* The distribution of density in supersonic turbulence// Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2017. — 471, № 3. — P. 3753–3767.
35. *Uchaikin V. V.* Mathematical modelling of the distribution of galaxies in the Universe// J. Math. Sci. — 1997. — 84. — P. 1175–1178.
36. *Uchaikin V. V.* If the Universe were a Levy–Mandelbrot fractal...// Grav. Cosmology. — 2004. — 10, № 1-2. — P. 5–24.
37. *Uchaikin V. V.* The mesofractal universe driven by Rayleigh–Levy walks// Gen. Rel. Grav. — 2004. — 36, № 7. — P. 1689–1717.
38. *Uchaikin V., Gismyatov I., Gusarov G., Svetukhin V.* Paired Levy–Mandelbrot trajectory as a homogeneous fractal// Int. J. Bifurcation Chaos. — 1998. — 8. — P. 977–984.

39. *Uchaikin V. V., Gusarov G. G.* Levy flight applied to randommedia problems// J. Math. Phys. — 1997. — 38. — P. 2453–2464.
40. *Uchaikin V. V., Zolotarev V. M.* Chance and Stability. Stable Distributions and Their Applications. — Utrecht, The Netherlands: VSP, 1999.
41. *Wang L. P., Maxey M. R.* Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence// J. Fluid Mech. — 1993. — 256. — P. 27–68.
42. *Yavuz M. A., Kunnen R. P. J., Vanheijst G. J. F., et al.* Extreme small-scale clustering of droplets in turbulence driven by hydrodynamic interactions// Phys. Rev. Lett. — 2018. — 120, № 24. — 244504.
43. *Zaichik L. I., Alipchenkov V. M.* Pair dispersion and preferential concentration of particles in isotropic turbulence// Phys. Fluids. — 2003. — 15. — P. 1776.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-79-30017) и Министерства высшего образования и науки РФ (проект № 075-15-2021-581).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Учайкин Владимир Васильевич
Ульяновский государственный университет
E-mail: vuchaikin@gmail.com

Литвинов Владимир Андреевич
Барнаульский юридический институт МВД
E-mail: lva201011@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 228 (2023). С. 85–91
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-228-85-91

УДК 519.24

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ НЕЧЕТКО-СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

© 2023 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

Аннотация. Построена оптимальная линейная регрессия нечетко-случайных величин, в которой коэффициенты аналогичны случаю «обычных» случайных величин. Показано, что при определенных условиях оптимальная регрессия обладает максимальным коэффициентом корреляции с прогнозируемой нечетко-случайной величиной.

Ключевые слова: нечетко-случайные величины, оптимальная линейная регрессия.

ON OPTIMAL LINEAR REGRESSION FOR FUZZY RANDOM VARIABLES

© 2023 V. L. KHATSKEVICH

ABSTRACT. In this paper, we construct an optimal linear regression of fuzzy random variables whose coefficients are similar to the case of “ordinary” random variables. We prove under certain conditions, the optimal regression has a maximum correlation coefficient with the predicted fuzzy random value.

Keywords and phrases: fuzzy random variables, optimal linear regression.

AMS Subject Classification: 62A86

1. Введение. Нечетко-случайные величины возникли как раздел нечеткой математики в [13, 15, 18]. Они находят широкое применение в финансовой математике, прогнозировании, теории принятия решений и др. В частности, математическая модель случайного эксперимента с нечеткими исходами интерпретируется как нечетко-случайная величина. Современное состояние теории нечетко-случайных величин отражено в [3, 6, 8, 17, 19] и др. (см. также [14, гл. 5–7]).

Данная работа посвящена оптимальной линейной регрессии нечетко-случайных величин. Специфика нашего результата состоит в минимизации специальной формы, позволяющей вывести формулы для оптимальных коэффициентов линейной регрессии, аналогичные случаю «обычных» случайных величин. Кроме того, показано, что при определенных условиях оптимальное решение обладает максимальным коэффициентом корреляции с прогнозируемой нечетко-случайной величиной в классе линейных оценок.

Ниже под нечетким множеством A , заданным на универсальном пространстве U , будем понимать совокупность упорядоченных пар $(u, \mu_A(u))$, где функция принадлежности $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$, определяет степень принадлежности элемента $u \in U$ множеству A .

Мы опираемся на следующее определение нечеткого числа (ср. [2, гл. 2–4]). Нечетким числом называется нечеткое множество, универсальным множеством которого является множество действительных чисел $\mathbb{R}$, и которое дополнительно удовлетворяет следующим условиям:

- (i) носитель (supp) нечеткого числа — замкнутое и ограниченное (компактное) множество действительных чисел;

- (ii) функция принадлежности нечеткого числа выпукла;
- (iii) функция принадлежности нечеткого числа нормальна, т.е. супремум функции принадлежности равен единице;
- (iv) функция принадлежности нечеткого числа полунепрерывна сверху.

Будем использовать интервальное представление нечетких чисел. А именно, каждому нечеткому числу поставим в соответствие совокупность его α -интервалов.

Множество нечетких чисел, удовлетворяющих условиям (i)–(iv), обозначим J . Как известно, множество α -уровня нечеткого числа $\tilde{z} \in J$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяется соотношением

$$Z_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1], \quad Z_0 = \text{supp}(\tilde{z}).$$

Согласно введенным выше предположениям (i)–(iv) все α -уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую (нижнюю) границу интервала через $z^-(\alpha)$, а правую (верхнюю) — через $z^+(\alpha)$, т.е. $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Иногда числа $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют левым и правым индексами нечеткого числа соответственно.

Для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с интервалами α -уровня $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ по определению сумме $\tilde{z} + \tilde{u}$ соответствует интервал $[z^-(\alpha) + u^-(\alpha), z^+(\alpha) + u^+(\alpha)]$. Произведению $\beta\tilde{z}$ на положительное число β соответствует интервал $[\beta z^-(\alpha), \beta z^+(\alpha)]$, на отрицательное число $(-\gamma)$ — интервал $[-\gamma z^+(\alpha), -\gamma z^-(\alpha)]$.

Множество J можно метризовать с помощью различных метрик. В частности, для нечетких чисел $\tilde{z}, \tilde{w}$ определяют метрику следующим равенством (см., например, [11]):

$$d(\tilde{z}, \tilde{w}) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} h(Z_\alpha, W_\alpha),$$

где h — хаусдорфова метрика, т.е.

$$h(Z_\alpha, W_\alpha) = \max \left\{ |z^-(\alpha) - w^-(\alpha)|, |z^+(\alpha) - w^+(\alpha)| \right\},$$

где $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ — нижняя и верхняя границы α -уровневого множества Z_α соответственно и аналогично для $\tilde{w}$.

2. Нечетко-случайные величины, ковариация и дисперсия. Пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство, где Ω — множество элементарных событий, Σ — σ -алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω , P — вероятностная мера.

Измеримое отображение $\tilde{X} : \Omega \rightarrow J$ называют нечетко-случайной величиной (см., например, [18]), если при любом $\omega \in \Omega$ множество $\tilde{X}(\omega)$ является нечетким числом из J .

Рассмотрим интервалы α -уровней нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ при фиксированном ω . А именно,

$$X_\alpha(\omega) = \{t \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{X}(\omega)}(t) \geq \alpha\},$$

где $\mu_{\tilde{X}(\omega)}(t)$ — функция принадлежности нечеткого числа $\tilde{X}(\omega)$ и $\alpha \in (0, 1]$. Интервал $X_\alpha(\omega)$ представим в виде

$$X_\alpha(\omega) = [X^-(\omega, \alpha), X^+(\omega, \alpha)],$$

где границы $X^-(\omega, \alpha)$ и $X^+(\omega, \alpha)$ — случайные величины. Они называются соответственно левым и правым индексом нечетко-случайной величины $\tilde{X}$.

В дальнейшем будем рассматривать класс $\mathfrak{X}$ нечетко-случайных величин $\tilde{X}$, для которых выполнено следующее условие.

Условие 1. Для каждой нечетко-случайной величины $\tilde{X} \in \mathfrak{X}$ индексы $X^-(\omega, \alpha)$ и $X^+(\omega, \alpha)$ являются квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0, 1]$ функциями.

Положим

$$x^-(\alpha) = \int_{\Omega} X^-(\omega, \alpha) dP, \quad x^+(\alpha) = \int_{\Omega} X^+(\omega, \alpha) dP. \quad (1)$$

Нечеткое число $\tilde{x}$ с индексами, определяемыми формулой (1), называется нечетким ожиданием нечетко-случайной величины $\tilde{X}$.

В соответствии с [9] определим ковариацию между нечетко-случайными величинами $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ с интервалами α -уровня $[X^-(\omega, \alpha), X^+(\omega, \alpha)]$ и $[Y^-(\omega, \alpha), Y^+(\omega, \alpha)]$ формулой

$$\text{Cov} [\tilde{X}, \tilde{Y}] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\text{Cov} [X^-(\omega, \alpha), Y^-(\omega, \alpha)] + \text{Cov} [X^+(\omega, \alpha), Y^+(\omega, \alpha)] \right) d\alpha,$$

где под знаком интеграла стоят ковариации между соответствующими случайными величинами. Этой формуле можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{Cov} [\tilde{X}, \tilde{Y}] = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} & \left((X^-(\omega, \alpha) - x^-(\alpha))(Y^-(\omega, \alpha) - y^-(\alpha)) + \right. \\ & \left. + (X^+(\omega, \alpha) - x^+(\alpha))(Y^+(\omega, \alpha) - y^+(\alpha)) \right) dP d\alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

где $x^-(\alpha)$ и $x^+(\alpha)$ определяются формулами (1) и аналогично для $y^-(\alpha)$ и $y^+(\alpha)$.

Определение ковариации (2) обладает рядом свойств, которые аналогичны случаю вещественных случайных величин (см. [9]):

- (a) $\text{Cov} [\tilde{X} + \tilde{Z}, \tilde{Y}] = \text{Cov} [\tilde{X}, \tilde{Y}] + \text{Cov} [\tilde{Z}, \tilde{Y}];$
- (b) $\text{Cov} [c_1 \tilde{X}, c_2 \tilde{Y}] = c_1 c_2 \text{Cov} [\tilde{X}, \tilde{Y}],$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ — произвольные числа одного знака: $c_1 c_2 > 0$.

Как обычно, нечетко-случайные величины $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ называются некоррелированными, если $\text{Cov} [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = 0$.

Определим дисперсию нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ равенством

$$D(\tilde{X}) = \text{Cov} [\tilde{X}, \tilde{X}] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(D(X^+(\omega, \alpha)) + D(X^-(\omega, \alpha)) \right) d\alpha.$$

Отметим следующие свойства дисперсии (ср. [9]):

- (a) $D(c\tilde{X}) = c^2 D(\tilde{X}) \quad \forall c \in \mathbb{R};$
- (b) $D(\tilde{X} + \tilde{Y}) = D(\tilde{X}) + D(\tilde{Y}) + 2 \text{Cov} [\tilde{X}, \tilde{Y}] \quad \forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X};$
- (c) $D(\tilde{z}) = 0 \quad \forall \tilde{z} \in J.$

Как обычно, среднееквадратичное отклонение $\sigma(\tilde{X})$ нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ определяется равенством

$$\sigma(\tilde{X}) = \sqrt{D(\tilde{X})}.$$

3. Линейная регрессия. Рассмотрим вопрос об оптимальной линейной аппроксимации (прогнозируемой) нечетко-случайной величины $\tilde{Y}$ по системе (прогнозирующих) нечетко-случайных величин $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$. Задачи такого рода рассматривались в ряде работ (см. [5–7, 10, 16] и др.). При этом специфика задачи определяется выбором расстояния, которое требуется минимизировать.

Обозначим через $Y^\pm(\omega, \alpha)$ и $X_i^\pm(\omega, \alpha)$ индексы нечетко-случайных величин $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}_i, i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим задачу об аппроксимации нечетко-случайной величины $\tilde{Y}$ линейными комбинациями $\sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{X}_i$ с вещественными коэффициентами $\beta_i, i = 1, \dots, n$, по критерию минимизации

следующего выражения:

$$F(\beta_1, \dots, \beta_n) = \int_0^1 D \left(Y^+(\omega, \alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^+(\omega, \alpha) \right) d\alpha + \\ + \int_0^1 D(Y^-(\omega, \alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^-(\omega, \alpha)) d\alpha \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, а D означает дисперсию соответствующей случайной величины.

Теорема 1. Пусть нечетко-случайные величины $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$ удовлетворяют условию 1. Пусть $\tilde{X}_i$ попарно некоррелированы и имеют дисперсии $D(\tilde{X}_i) = \sigma_i^2 \neq 0$, а β_i — произвольные вещественные числа. Тогда задача (3) имеет единственное решение, имеющее следующий вид:

$$\beta_i^* = \frac{\text{Cov}[\tilde{Y}, \tilde{X}_i]}{\sigma_i^2}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим через $\tilde{y}$ и $\tilde{x}_i$ нечеткие ожидания соответствующих нечетко-случайных величин. Заметим, что задачу (3) можно представить в виде

$$F(\beta_1, \dots, \beta_n) = \int_0^1 \int_{\Omega} \left(Y^+(\omega, \alpha) - y^+(\alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i (X_i^+(\omega, \alpha) - x_i^+(\alpha)) \right)^2 + \\ + \left(Y^-(\omega, \alpha) - y^-(\alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i (X_i^-(\omega, \alpha) - x_i^-(\alpha)) \right)^2 dP d\alpha \rightarrow \min, \quad (5)$$

где $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Действительно, обозначим через E математическое ожидание случайной величины. Тогда

$$D \left(Y^+(\omega, \alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^+(\omega, \alpha) \right) = \\ = E \left(Y^+(\omega, \alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^+(\omega, \alpha) - E \left(Y^+(\omega, \alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^+(\omega, \alpha) \right) \right)^2.$$

При этом

$$E \left(Y^+(\omega, \alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^+(\omega, \alpha) \right) = \\ = \int_{\Omega} \left(Y^+(\omega, \alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i (X_i^+(\omega, \alpha)) \right) dP = y^+(\alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i^+(\alpha).$$

Тогда

$$\int_0^1 D \left(Y^+(\omega, \alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^+(\omega, \alpha) \right) d\alpha = \\ = \int_0^1 \int_{\Omega} \left(Y^+(\omega, \alpha) - y^+(\alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i (X_i^+(\omega, \alpha) - x_i^+(\alpha)) \right)^2 dP d\alpha;$$

для индексов с минусом аналогично. Итак, справедливо представление (5).

Рассмотрим при каждом $j = 1, \dots, n$ производную F по β_j . Согласно (5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \beta_j} = & -2 \int_0^1 \int_{\Omega} \left[\left(Y^+(\omega, \alpha) - y^+(\alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i (X_i^+(\omega, \alpha) - x_i^+(\alpha)) \right) (X_j^+(\omega, \alpha) - x_j^+(\alpha)) + \right. \\ & \left. + \left(Y^-(\omega, \alpha) - y^-(\alpha) - \sum_{i=1}^n \beta_i (X_i^-(\omega, \alpha) - x_i^-(\alpha)) \right) (X_j^-(\omega, \alpha) - x_j^-(\alpha)) \right] dP d\alpha. \end{aligned}$$

Приравнявая это выражение к нулю, получим

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \text{Cov} [\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = \text{Cov} [\tilde{Y}, \tilde{X}_j], \quad j = 1, \dots, n.$$

В силу предположения ковариационная матрица $\text{Cov}[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]$ диагональна, причем на главной диагонали стоят $\sigma^2(\tilde{X}_i) \neq 0$. Отсюда вытекают формулы (4).

Достаточное условие минимума обеспечивается положительной определенностью матрицы Гессе с элементами

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \beta_j \partial \beta_s} = 4 \text{Cov} [\tilde{X}_j, \tilde{X}_s].$$

Отметим, что коэффициенты (4) напоминают известные для «обычных» случайных величин (см., например, [4, гл. II, § 11]). $\square$

Следствие 1. В условиях теоремы 1 те оптимальные коэффициенты β_i^* , которым соответствуют неотрицательные ковариации $\text{Cov}[\tilde{Y}, \tilde{X}_i] \geq 0$, неотрицательны, а те оптимальные коэффициенты β_i^* , которые соответствуют отрицательным ковариациям $\text{Cov}[\tilde{Y}, \tilde{X}_i] < 0$, отрицательны.

Следствие 1 вытекает из формул (4).

Замечание 1. В формуле (5) фактически используются центрированные случайные величины от индексов $\tilde{Y}^\mp(\omega, \alpha) = Y^\mp(\omega, \alpha) - y^\mp(\alpha)$ и $\tilde{X}^\mp(\omega, \alpha) = X^\mp(\omega, \alpha) - x^\mp(\alpha)$. Подчеркнем, что для случайной величины $\tilde{Y} - \tilde{y}$ ее индексы равны $Y^-(\omega, \alpha) - y^+(\alpha)$ и $Y^+(\omega, \alpha) - y^-(\alpha)$, соответственно, что не совпадает с выражениями $\tilde{Y}^\mp$.

Отметим отличие теоремы 1 от результата автора из [12]. В [12] введено понятие квазискалярного произведения между нечетко-случайными величинами и рассмотрена задача о линейной регрессии относительно минимизации некоторого расстояния, связанного с введенным квазискалярным произведением. При этом предполагается попарная квазиортогональность системы нечетко-случайных величин $\tilde{X}_i$, $i = 1, \dots, n$, по которой осуществляется регрессия.

Определим коэффициент корреляции между нечетко-случайными величинами $\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}$ формулой

$$k[\tilde{Y}, \tilde{Z}] = \frac{\text{Cov} [\tilde{Y}, \tilde{Z}]}{\sigma(\tilde{Y})\sigma(\tilde{Z})}, \quad (6)$$

где $\sigma(\tilde{Y})$ и $\sigma(\tilde{Z})$ — среднеквадратичные отклонения нечетко-случайных величин $\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}$. Это определение аналогично применяемому для случайных величин. Определение (6) и свойства коэффициента корреляции обсуждаются в [9]. Например, равенство $k[\tilde{Y}, \tilde{Z}] = 1$ означает, что $\tilde{Y} - \tilde{y} = \lambda(\tilde{Z} - \tilde{z})$, где $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$ — нечеткие ожидания нечетко-случайных величин $\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}$, а $\lambda = \sigma(\tilde{Y})/\sigma(\tilde{Z})$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, причем $D(\tilde{Y}) = \sigma^2 \neq 0$ и $\text{Cov} [\tilde{Y}, \tilde{X}_i] \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда оценка $\sum_{j=1}^n \beta_j^* \tilde{X}_i$ имеет максимальный коэффициент корреляции по сравнению с другими линейными оценками вида $\sum_{j=1}^n \beta_j \tilde{X}_i$ при $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим коэффициент корреляции $k\left[\tilde{Y}, \sum_{i=1}^n \beta_i^* \tilde{X}_i\right]$. По свойствам дисперсии имеем

$$D\left(\sum_{i=1}^n \beta_i^* \tilde{X}_i\right) = \sum_{i=1}^n (\beta_i^*)^2 D(\tilde{X}_i) = \sum_{i=1}^n (\beta_i^*)^2 \sigma_i^2.$$

Используя свойства ковариации и определение β_i^* , можно записать

$$\text{Cov}\left[\tilde{Y}, \sum_{i=1}^n \beta_i^* \tilde{X}_i\right] = \sum_{i=1}^n \beta_i^* \text{Cov}[\tilde{Y}, \tilde{X}_i] = \sum_{i=1}^n (\beta_i^*)^2 \sigma_i^2.$$

Тогда по определению (6)

$$k\left[\tilde{Y}, \sum_{i=1}^n \beta_i^* \tilde{X}_i\right] = \frac{1}{\sigma} \left(\sum_{i=1}^n (\beta_i^*)^2 \sigma_i^2\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим теперь коэффициент корреляции $k\left[\tilde{Y}, \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{X}_i\right]$. Аналогично предыдущему

$$D\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{X}_i\right) = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \sigma_i^2.$$

Рассмотрим ковариацию

$$\text{Cov}\left[\tilde{Y}, \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{X}_i\right] = \sum_{i=1}^n \beta_i \text{Cov}[\tilde{Y}, \tilde{X}_i] = \sum_{i=1}^n \beta_i \beta_i^* \sigma_i^2.$$

Здесь мы учли неотрицательность $\beta_i \geq 0$ и определение (4) величины β_i^* . Таким образом,

$$k\left[\tilde{Y}, \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{X}_i\right] = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i \beta_i^* \sigma_i^2}{\sigma \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \sigma_i^2\right)^{1/2}}.$$

Согласно неравенству Коши—Буняковского

$$\left|\text{Cov}\left[\tilde{Y}, \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{X}_i\right]\right| \leq \sum_{i=1}^n |\beta_i \sigma_i| \cdot |\beta_i^* \sigma_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \sigma_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (\beta_i^*)^2 \sigma_i^2\right)^{1/2}.$$

Тогда

$$\left|k\left[\tilde{Y}, \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{X}_i\right]\right| \leq \frac{1}{\sigma} \left(\sum_{i=1}^n (\beta_i^*)^2 \sigma_i^2\right)^{1/2} = k\left[\tilde{Y}, \sum_{i=1}^n \beta_i^* \tilde{X}_i\right],$$

что и требовалось доказать. $\square$

Отметим, что теорема 2 в случае «обычных» случайных величин соответствует результату о максимальной корреляции линейного предиктора с прогнозируемой случайной величиной (см., например, [1, гл. 5, § 5.6]). Для нечетко-случайных величин результаты подобного типа ранее не отмечались.

В заключение еще раз подчеркнем, что результаты настоящей работы обусловлены выбором минимизируемой формы (3) для нечетко-случайных величин в соответствии с задачами исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Математическая статистика. — М.: Либроком, 2019.
2. *Пегат А.* Нечеткое математическое моделирование и управление. — Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2015.
3. *Шведов А. С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин// Прикл. эконометрика. — 2016. — 42. — С. 121–138.
4. *Шуряев А. Н.* Вероятность. — М.: МЦНМО, 2007.
5. *Akbari M. G., Rezaei A. H., Waghei Y.* Statistical inference about the variance of fuzzy random variables// Indian J. Stat. — 2009. — 71-B, № 2. — P. 206–221.
6. *Colubi A.* Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applications to the analysis of fuzzy-and real-valued data// Fuzzy Sets Syst. — 2009. — 160. — P. 344–356.
7. *Colubi A., Coppi R., D'Urso P., Gil M. A.* Statistics with fuzzy random variables// Metron — Int. J. Stat. — 2007. — 65. — P. 277–303.
8. *de la Rosa de Saa S., Gil M. A., Gonzalez-Rodrigues G., Lopez M. T., Lubiano M. A.* Fuzzy rating scale-based questionnaires and their statistical analysis// IEEE Trans. Fuzzy Syst. — 2015. — 23. — P. 111–126.
9. *Feng Y., Hu L., Shu H.* The variance and covariance of fuzzy random variables// Fuzzy Sets Syst. — 2001. — 120. — P. 487–497.
10. *Gonzalez-Rodriguez G., Blanco A., Colubi A., Lubiano M. A.* Estimation of a simple linear regression model for fuzzy random variables// Fuzzy Sets Syst. — 2009. — 160. — P. 357–370.
11. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces// Fuzzy Sets Syst. — 1984. — 12. — P. 215–229.
12. *Khatskevich V. L.* On the law of large numbers and linear regression of fuzzy random variables// Proc. 5th Int. Conf. on Stochastic Methods (November 23–27, 2020, Russia, Moscow). — Moscow, 2020. — P. 73–77.
13. *Kwakernaak H.* Fuzzy random variables. I. Definitions and theorems// Inform. Sci. — 1978. — P. 1–29.
14. *Li S., Ogura Y., Kreinovich V.* Limit Theorems and Applications of Set Valued and Fuzzy Valued Random Variables. — Dordrecht: Kluwer, 2002.
15. *Nahmias S.* Fuzzy variables in a random environment// in: Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications (Gupta M. M., Ragade R. K., Yager R. R., eds.). — Amsterdam, 1979. — P. 165–180.
16. *Nather W.* Regression with fuzzy data// Comput. Stat. Data Anal. — 2006. — 51, № 1. — P. 235–252.
17. *Nguyen H. T., Wu B.* Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data. — Berlin: Springer, 2006.
18. *Puri M. L., Ralesku D. A.* Fuzzy random variables// J. Math. Anal. Appl. — 1986. — 114. — P. 409–422.
19. *Viertl R.* Statistical Methods for Fuzzy Data. — Chichester: Wiley, 2011.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хацкевич Владимир Львович

Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж

E-mail: vlkhats@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 228 (2023). С. 92–118
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-228-92-118

УДК 517.9; 531.01

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ,
ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ.
II. СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ
ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2023 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. В работе предьявлены тензорные инварианты (первые интегралы, дифференциальные формы) для динамических систем на касательных расслоениях к гладким n -мерным многообразиям отдельно при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, а также при любом конечном n . Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 227. — С. 100–128.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC,
POTENTIAL AND DISSIPATIVE SYSTEMS.
II. SYSTEMS ON TANGENTS BUNDLES
OF THREE-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2023 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we present tensor invariants (first integrals and differential forms) for dynamical systems on the tangent bundles of smooth n -dimensional manifolds separately for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, and for any finite n . We demonstrate the connection between the existence of these invariants and the presence of a full set of first integrals that are necessary for integrating geodesic, potential, and dissipative systems. The force fields acting in systems considered make them dissipative (with alternating dissipation).

The first part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **227** (2023), pp. 100–128.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

2. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия	93
2.1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к трехмерному многообразию	94
2.2. Инварианты систем на касательном расслоении к трехмерному многообразию в потенциальном силовом поле	100
2.3. Инварианты систем на касательном расслоении к трехмерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией	102
Список литературы	114

2. ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Введение. В данном разделе представлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Как было показано ранее, задача о движении четырехмерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, которое можно описать как поток набегающей среды, заполняющей объемлющее четырехмерное пространство, приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий (см. [52, 66, 68]). Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (т.е. имеющих существенно особые точки) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Такое же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по трехмерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего четырехмерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим трехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского (например, в модели Клейна) и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Важные частные случаи систем с тремя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора [70, 73]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данном разделе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [34, 35]). Показана связь наличия данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, трехмерного пространства Лобачевского, указаны достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений в классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. В заключение рассмотрено усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией, и указаны достаточные условия интегрируемости.

2.1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к трехмерному многообразию.

2.1.1. Координаты на касательном расслоении и коэффициенты связности. Рассмотрим гладкое трехмерное риманово многообразие $M^3\{\alpha, \beta\}$ с координатами (α, β) , $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha, \beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^3\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha), \quad \dot{\beta}_1 = z_2 f_1(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \quad (2.1.1)$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1 , z_2 , z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических, например, с семью ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на расслоении трехмерных поверхностей вращения, пространства Лобачевского и т. д.):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 = 0, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю.

Необходимые соотношения, дополняющие кинематические соотношения (2.1.1) на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, примут вид

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -f_3(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_3 - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 = -f_3(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\ \dot{z}_3 = -f_3(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

и уравнения геодезических (2.1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (2.1.1) почти всюду эквивалентны составной системе (2.1.1), (2.1.3) на многообразии $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ с новой частью координат z_1, z_2, z_3 на касательном пространстве.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (2.1.2) (к системе (2.1.1), (2.1.3)).

- (а) Системы на касательном расслоении к трехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего четырехмерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела (см. также [43, 44]).
- (б) Системы на касательных расслоениях более общих трехмерных поверхностей вращения.
- (с) Системы на касательном расслоении трехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Отметим также, что в [48] рассмотрены примеры систем геодезических на касательном расслоении трехмерной сферы с различными метриками, а в [7] — примеры систем геодезических на расслоении трехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского.

2.1.2. О количествах «неизвестных» функций и условий, на них накладываемых. Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении трехмерного гладкого многообразия, то число различных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет равно $n^2(n+1)/2$ при $n = 3$, т.е. 18 коэффициентов. Как видно, общая задача интегрирования

уравнений геодезических весьма сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ из (2.1.1)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся семью (т.е. $n(n-1)+1$ при $n=3$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (2.1.2). По такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их число будет равно четырем (т.е. $n(n-1)/2+1$ при $n=3$). Таким образом, мы имеем 11 функций, *характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.*

Каково же количество $B(3)$ накладываемых алгебраических и дифференциальных условий на имеющиеся $A(3) = 11$ функций (т.е. $A(n) = 3n(n-1)/2+2$ при $n=3$)? Данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 11, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(3)$, тем больше разность $A(3) - B(3)$ и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(3) = 8$ условий на имеющиеся $A(3) = 11$ функций. Число $B(3)$ складывается из трех слагаемых: $B(3) = B_1(3) + B_2(3) + B_3(3)$, где $B_1(3)$ — количество условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$:

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) =: f(\alpha), \quad (2.1.4)$$

т.е. $B_1(3) = 1$ (в общем случае $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$). Число $B_2(3)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{cases} \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \\ \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1), \end{cases} \quad (2.1.5)$$

т.е. $B_2(3) = 3$ (в общем случае $B_2(n) = n(n-1)/2$). Наконец, число $B_3(3)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{cases} f_3^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_3^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \end{cases} \quad (2.1.6)$$

т.е. $B_3(3) = 4$ (в общем случае $B_3(n) = n(n-1)/2+1$). Видно, что в общем случае

$$\begin{aligned} B(n) &= B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 1; \end{aligned}$$

при этом

$$A(n) - B(n) = \frac{3n(n-1)}{2} + 2 - (n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} - 1 = n,$$

что говорит об увеличении количества «произвольных» функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n — размерность рассматриваемого риманова многообразия. В нашем случае $A(3) - B(3) = 3$.

Замечание 2.1. Пусть выполнены условия (2.1.4), (2.1.5), при этом реализуется система дифференциальных равенств (2.1.6). Тогда справедливы следующие четыре (т.е. $n(n-1)/2+1$ при

$n = 3$) тождества:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{11}^\alpha(\alpha), & \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1), \\ \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{22}^1(\beta_1), & \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha),\end{aligned}\quad (2.1.7)$$

а также одно $((n-1)(n-2)/2$ при $n = 3$) тождество

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha) \equiv g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) =: \Gamma_3(\alpha). \quad (2.1.8)$$

Доказательство. В условиях замечания первая группа из первых двух равенств из (2.1.6) переписывается в виде

$$\begin{aligned}f_3^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_3^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0.\end{aligned}\quad (2.1.9)$$

Из (2.1.9) следуют первая строка тождеств из (2.1.7) и тождество (2.1.8).

Далее, в условиях замечания вторая группа из одного равенства из (2.1.6) переписывается в виде

$$\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0. \quad (2.1.10)$$

Из (2.1.10) и последней строки (2.1.6) следуют тождества второй строки из (2.1.7). $\square$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 2.1.

Замечание 2.2. Пусть выполнены условия (2.1.4), (2.1.5), при этом реализуются пять тождеств (2.1.7) и (2.1.8). Тогда справедлива система дифференциальных равенств (2.1.6), которая примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1)g^2(\beta_1) =: \Gamma_3(\alpha), \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_3^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv 0. \end{cases} \quad (2.1.11)$$

Таким образом, при выполнении четырех условий (2.1.4), (2.1.5) четыре условия (2.1.6) и четыре условия (2.1.11) в упомянутом смысле эквивалентны.

2.1.3. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы шестого порядка достаточно знать, вообще говоря, пять независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (2.1.1), (2.1.3) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из четырех, а не из пяти, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (2.1.2), записанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^3 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1.12)$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^3 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad (2.1.13)$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 2.1 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются восемь алгебраических и дифференциальных соотношений (2.1.4), (2.1.5), (2.1.11) на одиннадцать функций: на четыре функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ из (2.1.1) и на семь, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ из (2.1.2).

Теорема 2.1. *Если выполнены условия (2.1.4), (2.1.5), (2.1.11), то система (2.1.1), (2.1.3) обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \text{const}, \quad (2.1.14)$$

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (2.1.15)$$

$$\Phi_3(z_1; \alpha, \beta_1) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad (2.1.16)$$

$$\Phi_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Psi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}, \quad (2.1.17)$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \quad \Psi(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}. \quad (2.1.18)$$

Более того, после замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_3(\alpha) \frac{d}{d\tau} \quad (2.1.19)$$

и фазовых переменных

$$w_3 = z_3, \quad w_2^* = \ln |w_2|, \quad w_2 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad w_1^* = \ln \left| w_1 + \sqrt{1 + w_1^2} \right|, \quad w_1 = \frac{z_2}{z_1} \quad (2.1.20)$$

фазовый поток системы (2.1.1), (2.1.3) сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^3\{w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма

$$dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2. \quad (2.1.21)$$

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 2.1, а именно, сделаем замены независимой и фазовых переменных (2.1.19), (2.1.20). Тогда система (2.1.1), (2.1.3) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_3, \\ \dot{w}_3 = -\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) e^{2w_2^*}, \\ \dot{w}_2^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) w_3, \end{cases} \quad (2.1.22)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1^* = \pm e^{w_2^*} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{W_1(w_1^*) e^{w_2^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \end{cases} \quad (2.1.23)$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{e^{w_2^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} g(\beta_1), \quad (2.1.24)$$

где $w_1 = W_1(w_1^*)$ в силу замены (2.1.20); при этом в составной системе (2.1.22)–(2.1.24) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ . Видно, что дивергенция

правой части составной системы (2.1.22)–(2.1.24) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании четырех первых интегралов. Действительно, дифференцирование функции (2.1.14) в силу системы (2.1.1), (2.1.3) дает

$$\begin{aligned} & -2f_3(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^3 - \\ & - 2 \left[f_3^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_2^2 z_3}{f_3(\alpha)} - \\ & - 2 \left[f_3^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_3}{f_3(\alpha)} - \\ & - 2 \left[f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_2}{f_1(\alpha)} \equiv 0, \end{aligned}$$

если выполнена система дифференциальных равенств (2.1.6). Но, как указано выше, при выполнении четырех условий (2.1.4), (2.1.5) четыре условия (2.1.6) и четыре условия (2.1.11) в известном смысле эквивалентны.

Далее, дифференцирование функции (2.1.15) в силу системы (2.1.1), (2.1.3) в условиях теоремы дает

$$-f_3(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} \right\} z_3 \sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (2.1.15).

Дифференцирование функции (2.1.16) в силу системы (2.1.1), (2.1.3) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} & -f_3(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} \right\} z_1 z_3 \Psi(\beta_1) - \\ & - f(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi(\beta_1) - \frac{d\Psi(\beta_1)}{d\beta_1} \right\} z_1 z_2 \Phi_0(\alpha). \end{aligned}$$

Поскольку функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} &= \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha), \\ \frac{d\Psi(\beta_1)}{d\beta_1} &= \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi(\beta_1), \end{aligned}$$

это доказывает наличие первого интеграла (2.1.16).

Далее, рассмотрим два уровня C_2 и C_3 первых интегралов (2.1.15) и (2.1.16) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_3}{\sqrt{C_2^2 \Psi^2(\beta_1) - C_3^2}}. \quad (2.1.25)$$

Будем искать угол β_2 из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \frac{z_1}{z_2} g(\beta_1).$$

Используя в этом уравнении равенство (2.1.25), и получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (2.1.17). Теорема доказана. $\square$

Заметим также, что система равенств (2.1.6) (или (2.1.11)) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (2.1.14) (или (2.2.2) ниже) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [7, 38]). Поиск как первого интеграла (2.1.14), так и интегралов (2.1.15)–(2.1.17), опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий (см. [67, 69, 74]).

Пример 2.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, когда метрика на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего четырехмерного пространства (задача класса (а)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - [\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1] \sin \alpha \cos \alpha = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \dot{\beta}_2^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} = 0 \end{cases} \quad (2.1.26)$$

и имеющая первые интегралы (2.1.14)–(2.1.17), примет следующий вид:

$$\dot{\alpha} = -z_3, \quad (2.1.27a)$$

$$\dot{z}_3 = -(z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \quad (2.1.27b)$$

$$\dot{z}_2 = z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} + z_1^2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (2.1.27c)$$

$$\dot{z}_1 = z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_1 z_2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (2.1.27d)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_2 \frac{1}{\sin \alpha \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (2.1.27e)$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_1 \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, \quad (2.1.27f)$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (2.1.27) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 2.2. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, но когда метрика на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (задача класса (а)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - [\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1] \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \dot{\beta}_2^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} = 0 \end{cases} \quad (2.1.28)$$

и имеющая первые интегралы (2.1.14)–(2.1.17), примет следующий вид:

$$\dot{\alpha} = -z_3, \quad (2.1.29a)$$

$$\dot{z}_3 = -(z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \quad (2.1.29b)$$

$$\dot{z}_2 = z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} + z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (2.1.29c)$$

$$\dot{z}_1 = z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (2.1.29d)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (2.1.29e)$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, \quad (2.1.29f)$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (2.1.29) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 2.3. В случае трехмерного пространства Лобачевского (с координатами $x = \beta_1$, $y = \beta_2$, $z = \alpha$, задача класса (с)) трехпараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2 - \dot{\beta}_2^2) = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 = 0 \end{cases} \quad (2.1.30)$$

и имеющая первые интегралы (2.1.14)–(2.1.17), примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3 \nu_1 \alpha, & \dot{z}_1 = z_1 z_3 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_3}, \\ \dot{z}_3 = -z_2^2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_2} - z_1^2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_3}, & \dot{\beta}_1 = z_2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_2}}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_3 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_2}, & \dot{\beta}_2 = z_1 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_3}}, \end{cases} \quad \nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{R}, \quad (2.1.31)$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (2.1.31) рассматривать как новые кинематические соотношения.

2.2. Инварианты систем на касательном расслоении к трехмерному многообразию в потенциальном силовом поле.

2.2.1. Введение внешнего потенциального силового поля. Теперь несколько модифицируем составную динамическую систему (2.1.1), (2.1.3) и получим систему *консервативную*. Именно, внесем в систему гладкое (внешнее) консервативное силовое поле со следующими проекциями на оси $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$, $\dot{z}_3$:

$$\tilde{F}(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) \\ F_2(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_3(\alpha)f_3(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha), \quad (2.2.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f_3(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3^2 - \\ - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (2.2.1b)$$

$$\dot{z}_2 = F_2(\beta_1)f_1(\alpha) - f_3(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \quad (2.2.1c)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) - f_3(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_3 - \\ - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_2, \end{aligned} \quad (2.2.1d)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_2 f_1(\alpha), \quad (2.2.1e)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \quad (2.2.1f)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - F_3(\alpha) f_3^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - F_2(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - F_1(\beta_2) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 = 0 \end{cases}$$

на касательном расслоении $TM^3\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

2.2.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы шестого порядка (2.2.1) достаточно знать, вообще говоря, пять независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (2.2.1) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из четырех, а не из пяти, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 2.2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются восемь алгебраических и дифференциальных соотношений (2.1.4), (2.1.5), (2.1.11) на одиннадцать функций: на четыре функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ и на семь, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия (2.1.4), (2.1.5), (2.1.11), то система (2.2.1) обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов. Это*

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha, \beta) = C_1 = \text{const},$$

$$V(\alpha, \beta) = V_3(\alpha) + V_2(\beta_1) + V_1(\beta_2) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a) da - 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} F_2(b) db - 2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} F_1(b) db, \quad (2.2.2)$$

а также, для простоты, при $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$ — первые интегралы (2.1.15)–(2.1.17).

Более того, после замен независимой и фазовых переменных (2.1.19), (2.1.20) фазовый поток системы (2.2.1) сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^3\{w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма (2.1.21).

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 2.2, а именно, сделаем замены независимой и фазовых переменных (2.1.19), (2.1.20). Тогда система (2.2.1) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_3, \\ \dot{w}_3 = F_3(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) e^{2w_2^*}, \\ \dot{w}_2^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) w_3, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1^* = \pm e^{w_2^*} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{W_1(w_1^*) e^{w_2^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{e^{w_2^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} g(\beta_1), \quad (2.2.5)$$

где $w_1 = W_1(w_1^*)$ в силу замены (2.1.20), при этом в составной системе (2.2.3)–(2.2.5) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ . Видно, что дивергенция правой части составной системы (2.2.3)–(2.2.5) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании четырех первых интегралов, при этом доказательство существования интегралов (2.1.15)–(2.1.17) проводится как в теореме 2.1. Действительно, дифференцирование функции (2.2.2) в силу системы (2.2.1) дает

$$\begin{aligned} & 2z_3F_3(\alpha)f_3(\alpha) + 2z_2F_2(\beta_1)f_1(\alpha) + 2z_1F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) - 2f_3(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^3 - \\ & - 2 \left[f_3^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_2^2 z_3}{f_3(\alpha)} - \\ & - 2 \left[f_3^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_3}{f_3(\alpha)} - \\ & - 2 \left[f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_2}{f_1(\alpha)} - \\ & - 2z_3F_3(\alpha)f_3(\alpha) - 2z_2F_2(\beta_1)f_1(\alpha) - 2z_1F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) \equiv 0, \end{aligned}$$

если выполнена система дифференциальных равенств (2.1.6). Но, как указано выше, при выполнении четырех условий (2.1.4), (2.1.5) четыре условия (2.1.6) и четыре условия (2.1.11) в известном смысле эквивалентны. Теорема доказана. $\square$

2.3. Инварианты систем на касательном расслоении к трехмерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией.

2.3.1. Введение внешнего силового поля со знакопеременной диссипацией. Теперь несколько модифицируем систему (2.2.1). При этом получим систему с диссипацией. Именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (2.3.1) (в отличие от системы (2.2.1)), но и следующая линейная зависимость гладкого (внешнего) силового поля от z_1, z_2, z_3 в проекциях на оси $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$ соответственно:

$$\tilde{F}(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) \\ F_2(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_3(\alpha)f_3(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1F_1^1(\alpha) \\ z_2F_2^1(\alpha) \\ z_3F_3^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\alpha} &= z_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 &= F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f_3(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3^2 - \\ &\quad - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)z_1^2 + z_3F_3^1(\alpha), \\ \dot{z}_2 &= F_2(\beta_1)f_1(\alpha) - f_3(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2z_3 - \\ &\quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 &= F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) - f_3(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1z_3 - \\ &\quad - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 &= z_2f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_1f_2(\alpha)g(\beta_1), \end{aligned} \right. \quad (2.3.1)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\alpha} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\alpha} - \\ \quad - F_3(\beta_1) f_3^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_3^1(\alpha) + b^2 \delta^2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] + \\ \quad + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - \left\{ F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\beta}_1 - \\ \quad - F_2(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\beta}_2 - \\ \quad - F_1(\beta_2) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 = 0, \end{array} \right.$$

на касательном расслоении $TM^3\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Здесь, как и выше, $\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

2.3.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы шестого порядка (2.3.1) достаточно знать, вообще говоря, пять независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (2.3.1) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из четырех, а не из пяти, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 2.3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются восемь алгебраических и дифференциальных соотношений (2.1.4), (2.1.5), (2.1.11) на одиннадцать функций: на четыре функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ и на семь, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (2.3.1) при выполнении свойств (2.1.4), (2.1.5), (2.1.11), а также при отсутствии проекции внешней силы на оси $\dot{z}_1$ и $\dot{z}_2$ (т.е. отлична от нуля лишь проекция внешней силы на ось $\dot{z}_3$):

$$F_1(\beta_2) \equiv F_2(\beta_1) \equiv 0. \quad (2.3.2)$$

Тогда система (2.3.1) допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) (z_2^2 + z_1^2) + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot{z}_2 = -f_3(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_3 - f(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = -f_3(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_3 - f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 = z_2 f(\alpha), \end{array} \right. \quad (2.3.3)$$

при наличии также шестого уравнения

$$\dot{\beta}_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1). \quad (2.3.4)$$

Далее, наложим определенные ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому предположим, что выполнены следующие равенства:

$$F_1^1(\alpha) \equiv F_2^1(\alpha) =: F^1(\alpha). \quad (2.3.5)$$

Для полного интегрирования (по Якоби) рассматриваемой системы (2.3.3), (2.3.4) при условии (2.3.5) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_3 = z_3, \quad w_2 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad w_1 = \frac{z_2}{z_1} \quad (2.3.6)$$

система (2.3.3), (2.3.4) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) w_2^2 + w_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot{w}_2 = \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) w_2 w_3 + w_2 F^1(\alpha), \end{cases} \quad (2.3.7)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \pm w_2 \sqrt{1 + w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{w_1 w_2}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \quad (2.3.8)$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{w_2}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \quad (2.3.9)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (2.3.7)–(2.3.9) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (2.3.7), один — для системы (2.3.8) (после соответствующей замены независимого переменного в ней) и дополнительный тензорный инвариант, «привязывающий» уравнение (2.3.9) (т.е. всего *четыре*).

Наложим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \quad (2.3.10)$$

а для некоторых $\lambda_3^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} F_3(\alpha) &= \lambda_3^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_3^0 \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha), \\ F_k^1(\alpha) &= \lambda_k^1 f_3(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_3(\alpha), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Условие (2.3.10) назовем «геометрическим», а условия из группы (2.3.11) — «энергетическими». При этом $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 =: \lambda^1$, в силу (2.3.5). Условие (2.3.10) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_3(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условия группы (2.3.11) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (*знако*)переменную диссипацию (см. также [76]).

Теорема 2.3. Пусть выполняются условия (2.3.10) и (2.3.11). Тогда система (2.3.7)–(2.3.9) обладает четырьмя независимыми, вообще говоря, трансцендентными (см. [24]) (т.е. имеющими существенно особые точки) первыми интегралами.

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 2.3 для начала сопоставим системе третьего порядка (2.3.7) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)w_2^2/f_3(\alpha) + w_3F_3^1(\alpha)}{w_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_2}{d\alpha} = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)w_2w_3/f_3(\alpha) + w_2F^1(\alpha)}{w_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \quad (2.3.12)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_2 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \quad (2.3.13)$$

приводим систему (2.3.12) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \frac{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_3(\alpha) + \Delta(\alpha)F_3^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_3(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \quad (2.3.14)$$

что, учитывая (2.1.11), почти всюду эквивалентно

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)} \left(F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\frac{\Delta^2(\alpha)u_1^2}{f_3(\alpha)} - \right. \\ \left. - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + [\Delta(\alpha)F_3^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_2 \right), \\ \Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} = \frac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)} \left([f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\frac{\Delta^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1u_2 + \right. \\ \left. + [\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1 \right); \end{cases} \quad (2.3.15)$$

напомним, что здесь и далее $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$. Теперь для интегрирования системы (2.3.15) нам потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (2.3.10) и (2.3.11).

Действительно, при их выполнении система (2.3.15) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_3^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_3^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 + (\lambda^1 - b)u_1}. \quad (2.3.16)$$

Уравнение (2.3.16) имеет вид уравнения Абеля (см. [10]) и его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$ данное уравнение имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_3^0}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (2.3.17)$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_3, w_2; \alpha) = \frac{f_3^2(\alpha)(w_3^2 + w_2^2) + (b - \lambda^1)w_3\delta(\alpha)f_3(\alpha) - \lambda_3^0\delta^2(\alpha)}{w_2\delta(\alpha)f_3(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (2.3.18)$$

Замечание 2.3. Если α — периодическая координата периода 2π , то система (2.3.7) (как часть системы (2.3.7)–(2.3.9)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [4]). Если же α не является периодической координатой, то мы в данном случае говорим о системе со знакопеременной диссипацией. При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (2.1.11), геометрического и энергетических условий

(2.3.10), (2.3.11) (но при любой гладкой функции $F_3(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_3^1 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \kappa f_3(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2^2 - b w_3 f_3(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_2 = \kappa f_3(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 w_3 - b w_2 f_3(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (2.3.19)$$

Действительно, система (2.3.19) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_3, w_2; \alpha) = w_2^2 + w_3^2 + 2b w_3 \Delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad (2.3.20)$$

$$\Phi_2(w_2; \alpha) = w_2 \Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (2.3.21)$$

где

$$V(\alpha) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a) da,$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_2(w_2; \alpha) &= w_2 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} = \\ &= w_2 f(\alpha) \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\Gamma_3(b) \frac{f^2(b)}{f_3^2(b)} + \frac{d \ln |f(b)|}{db} \right] db \right\} \cong w_2 \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_3(b) \frac{f^2(b)}{f_3^2(b)} db \right\}, \end{aligned}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. Теперь, в силу (2.3.10), (2.3.11) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1 = -b$, переписется в виде

$$w_2 \exp \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db} \ln |\Delta(b)| db \right\} \cong w_2 \Delta(\alpha) \quad (2.3.22)$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (2.3.20), (2.3.21) также является первым интегралом системы (2.3.19). Но при $\lambda^1 = \lambda_3^1 \neq -b$ каждая из функций

$$w_3^2 + w_2^2 + (b - \lambda^1) w_3 \Delta(\alpha) - \lambda_3^0 \Delta^2(\alpha) \quad (2.3.23)$$

и (2.3.21) по отдельности не является первым интегралом системы (2.3.7). Однако отношение функций (2.3.23), (2.3.21) является первым интегралом системы (2.3.7) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_3^1$ и b .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (2.3.7) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$. Для этого преобразуем инвариантное соотношение (2.3.17) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2} \right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_3^0. \quad (2.3.24)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_3^0 \geq 0, \quad (2.3.25)$$

и фазовое пространство системы (2.3.7) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (2.3.24). Таким образом, в силу соотношения (2.3.17) первое уравнение системы (2.3.15) при условиях (2.3.10) и (2.3.11) и при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(-\lambda_3^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 U_1(C_1, u_2)}{u_2 + b},$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_3^0)} \right\};$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (2.3.25). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (2.3.7) примет вид

$$-\int \frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} = \int \frac{(b + u_2)du_2}{2(-\lambda_3^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 \{ -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_3^0)} \} / 2}. \quad (2.3.26)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln |\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 - \frac{\lambda^1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_3^0,$$

то правая часть равенства (2.3.26) примет вид

$$-\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \mp \frac{b}{2} I_1,$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \quad (2.3.27)$$

При вычислении интеграла (2.3.27) возможны три случая.

I: $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_3^0$. В этом случае

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0}} \right| + \text{const}.$$

II: $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_3^0$. В этом случае

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_3^0 - (\lambda^1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}.$$

III: $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_3^0$. В этом случае

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}.$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} - \frac{\lambda^1 - b}{2},$$

имеем окончательный вид для величины I_1 :

I. При $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_3^0$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_3^0}} \right| + \text{const}.$$

II. При $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_3^0$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_3^0 - (\lambda^1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}.$$

III. При $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_3^0$

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}.$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (2.3.7) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [24]).

Замечание 2.4. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (2.3.17). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_3, w_2; \alpha) = G\left(\Delta(\alpha), \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_2}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \quad (2.3.28)$$

Выражение первого интеграла (2.3.28) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (2.3.7)–(2.3.9) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (2.3.7). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти один первый интеграл — для системы (2.3.8) (меняя в ней независимую переменную), становящейся независимой подсистемой после соответствующей замены независимой переменной, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.3.9).

Первый интеграл для системы (2.3.8) будет иметь следующий вид:

$$\Theta_3(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\Psi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}; \quad (2.3.29)$$

о функции $\Psi(\beta_1)$ см. (2.1.18). В предыдущих переменных z первый интеграл (2.3.29) будут выглядеть так:

$$\Theta'_3(z_2, z_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \Psi(\beta_1)} = C'_3 = \text{const}. \quad (2.3.30)$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.3.9), находится по аналогии с (2.1.17):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Psi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}, \quad (2.3.31)$$

где после взятия интеграла (2.3.31) вместо постоянной C_3 можно формально подставить левую часть равенства (2.3.29) (или (2.3.30)).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (2.3.7)–(2.3.9) имеет четыре первых интеграла, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа, имеющих существенно особые точки). Теорема 2.3 доказана. $\square$

2.3.3. Инвариантные дифференциальные формы систем со знакопеременной диссипацией.

Теорема 2.4. Если для систем вида (2.3.7)–(2.3.9) выполняются геометрическое и энергетические свойства (2.3.10), (2.3.11), то у нее также существуют функционально независимые

между собой четыре инвариантные дифференциальные формы с, вообще говоря, трансцендентными (т.е. имеющими существенно особые точки) коэффициентами (ср. [24]). Эти дифференциальные формы при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_1(w_3, w_2; \alpha) dw_3 \wedge dw_2 \wedge d\alpha, & \quad \rho_2(w_3, w_2; \alpha) dw_3 \wedge dw_2 \wedge d\alpha, \\ \rho_3(w_1; \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1+w_1^2}} dw_1 \wedge d\beta_1; & \quad \rho_4(w_3, w_2; \alpha, \beta_1, \beta_2) dw_3 \wedge dw_2 \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1(w_3, w_2; \alpha) &= \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)} \right\} \cdot \frac{u_3^2 + u_2^2 + (b - \lambda^1)u_3 - \lambda_3^0}{u_2}, \quad u_k = \frac{w_k}{\Delta(\alpha)}, \quad k = 2, 3; \\ \rho_2(w_3, w_2; \alpha) &= \Delta(\alpha) \cdot \exp \left\{ \int \frac{(2b + \lambda^1 + u_3)du_3}{U_2(C_1, u_3)} \right\}, \\ \rho_4(w_3, w_2; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)} \right\} \cdot \Theta_4(\beta_1, \beta_2), \end{aligned}$$

и они, вообще говоря, зависят с первыми интегралами (2.3.18), (2.3.28), (2.3.29), (2.3.31).

Доказательство. I. Система (2.3.7) составной рассматриваемой системы (2.3.7)–(2.3.9) при выполнении свойств (2.3.10), (2.3.11) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_3 = \lambda_3^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) f_3(\alpha) - \kappa f_3(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2^2 + \lambda_3^1 w_3 f_3(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_2 = \kappa f_3(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 w_3 + \lambda^1 w_2 f_3(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (2.3.32)$$

После замен независимой и фазовой переменных

$$\frac{d}{dt} = f_3(\alpha) \frac{d}{d\tau}, \quad w_2^* = \ln |w_2| \quad (2.3.33)$$

система (2.3.32) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha) = w_3 + b\Delta(\alpha), \\ \dot{w}_3 = X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha) = \lambda_3^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_2^*} + \lambda_3^1 w_3 \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_2^* = X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha) = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 + \lambda^1 \tilde{\Delta}(\alpha); \end{cases} \quad (2.3.34)$$

при этом в системе (2.3.34) точкой обозначена производная по новой независимой переменной τ . В принципе замена фазовой переменной (2.3.33) носит технический характер, и при этом можно использовать как переменную w_2^* , так и переменную w_2 .

Для системы (2.3.34) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_3, w_2^*; \alpha)$, соответствующие дифференциальным формам объема $\rho(w_3, w_2^*; \alpha) dw_3 \wedge dw_2^* \wedge d\alpha$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} [\rho(w_3, w_2^*; \alpha) X(w_3, w_2^*; \alpha)] = 0, \quad (2.3.35)$$

где

$$X(w_3, w_2^*; \alpha) = \{X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha)\} \quad (2.3.36)$$

— векторное поле рассматриваемой системы (2.3.34) в координатах $(w_3, w_2^*; \alpha)$. Уравнение (2.3.35) переписывается в виде

$$X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha) \rho_\alpha + X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha) \rho_{w_3} + X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha) \rho_{w_2^*} = -\rho \operatorname{div} X(w_3, w_2^*; \alpha); \quad (2.3.37)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_3, w_2^*; \alpha) = (b + \lambda_3^1) \tilde{\Delta}(\alpha). \quad (2.3.38)$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (2.3.37) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_{\alpha}(w_3, w_2^*; \alpha), \\ \dot{w}_3 = X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), \\ \dot{w}_2^* = X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha), \\ \dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_3^1)\tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (2.3.39)$$

У системы, состоящей из первых трех уравнений системы (2.3.39), уже найдены два первых интеграла (2.3.18) и (2.3.28). Найдем третий независимый первый интеграл системы (2.3.39) уравнений характеристик.

Сопоставим системе (2.3.39) следующую неавтономную систему:

$$\begin{cases} \frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{\lambda_3^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \tilde{\Delta}(\alpha) w_2^2 / \Delta(\alpha) + \lambda_3^1 w_3 \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_3 + b \Delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_2}{d\alpha} = \frac{\kappa \tilde{\Delta}(\alpha) w_2 w_3 / \Delta(\alpha) + \lambda^1 w_2 \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_3 + b \Delta(\alpha)}, \\ \frac{d\rho}{d\alpha} = -\frac{(b + \lambda_3^1) \rho \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_3 + b \Delta(\alpha)} \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{dw_3}{d\Delta} = \frac{\lambda_3^0 \Delta - \kappa w_2^2 / \Delta + \lambda_3^1 w_3}{w_3 + b \Delta}, \\ \frac{dw_2}{d\Delta} = \frac{\kappa w_2 w_3 / \Delta + \lambda^1 w_2}{w_3 + b \Delta}, \\ \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_3^1) \rho}{w_3 + b \Delta}. \end{cases} \quad (2.3.40)$$

После введения однородных переменных

$$w_3 = u_2 \Delta, \quad w_2 = u_1 \Delta, \quad (2.3.41)$$

похожих на соответствующие переменные в замене (2.3.13), система (2.3.40) переписется в виде

$$\begin{cases} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} + u_2 = \frac{\lambda_3^0 - \kappa u_1^2 + \lambda_3^1 u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} + u_1 = \frac{\kappa u_1 u_2 + \lambda^1 u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_3^1) \rho}{u_2 + b} \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda_3^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 - (b - \lambda_3^1) u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} = \frac{(\kappa - 1) u_1 u_2 - (b - \lambda^1) u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_3^1) \rho}{u_2 + b}. \end{cases} \quad (2.3.42)$$

Из первых двух уравнений системы (2.3.42) получается первый интеграл (2.3.18). Из квадратуры

$$-\frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{(u_2 + b) du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad (2.3.43)$$

где

$$U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)} \right\}, \\ U_1(u_2) = u_2^2 + (b - \lambda^1) u_2 - \lambda_3^0, \quad C_1 \neq 0,$$

получается первый интеграл (2.3.28) (здесь учитывается, что $\kappa = -1$ и $\lambda^1 = \lambda_3^1$). Наконец, из квадратуры

$$\frac{d\rho}{(b + \lambda^1) \rho} = \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \quad (2.3.44)$$

получается первый интеграл, содержащий неизвестную функцию ρ .

Вычислим квадратуру (2.3.44). Справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp \left\{ -(b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} = C_{\rho} = \text{const}, \quad (2.3.45)$$

которое является третьим, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (2.3.39). Таким образом, общее решение линейного уравнения (2.3.37) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2], \quad (2.3.46)$$

где $\mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Θ_1, Θ_2 — два первых интеграла (2.3.18), (2.3.28) соответственно.

В частности, в качестве двух функционально независимых решений линейного уравнения (2.3.37) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_3, w_2; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_3, w_2; \alpha), \quad (2.3.47)$$

$$\rho_2(w_3, w_2; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_3, w_2; \alpha), \quad (2.3.48)$$

где $u_2 = w_3/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_2/\Delta(\alpha)$.

II. Рассмотрим далее систему (2.3.8). После замены независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = \pm w_2 f(\alpha) \frac{d}{d\tau} \quad (2.3.49)$$

система (2.3.8) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = X_{w_1}(w_1; \beta_1) = \sqrt{1 + w_1^2} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = X_{\beta_1}(w_1; \beta_1) = \frac{w_1}{\sqrt{1 + w_1^2}}; \end{cases} \quad (2.3.50)$$

при этом в системе (2.3.50) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ .

Для системы (2.3.50) будем искать интегральный инвариант с плотностью $\rho(w_1; \beta_1)$, соответствующей дифференциальной форме площади $\rho(w_1; \beta_1)dw_1 \wedge d\beta_1$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} [\rho(w_1; \beta_1)X(w_1; \beta_1)] = 0, \quad (2.3.51)$$

где

$$X(w_1; \beta_1) = \{X_{w_1}(w_1; \beta_1), X_{\beta_1}(w_1; \beta_1)\} \quad (2.3.52)$$

— векторное поле рассматриваемой системы (2.3.50) в координатах $(w_1; \beta_1)$. Уравнение (2.3.51) переписывается в виде

$$X_{w_1}(w_1; \beta_1)\rho_{w_1} + X_{\beta_1}(w_1; \beta_1)\rho_{\beta_1} = -\rho \operatorname{div} X(w_1; \beta_1); \quad (2.3.53)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_1; \beta_1) = \frac{w_1}{\sqrt{1 + w_1^2}} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right]. \quad (2.3.54)$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (2.3.53) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = X_{w_1}(w_1; \beta_1), \\ \dot{\beta}_1 = X_{\beta_1}(w_1; \beta_1), \\ \dot{\rho} = -\rho \frac{w_1}{\sqrt{1 + w_1^2}} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right]. \end{cases} \quad (2.3.55)$$

У системы, состоящей из первых двух уравнений системы (2.3.55), уже найден первый интеграл (2.3.29). Найдем дополнительный независимый первый интеграл для системы (2.3.55) уравнений

характеристик. Сопоставим двум последним уравнениям системы (2.3.55) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{d\rho}{d\beta_1} = -\rho \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right]. \quad (2.3.56)$$

Последнее уравнение дает инвариантное соотношение

$$\Theta_{\rho_3}(\beta_1; \rho) = \rho \cdot \Psi(\beta_1) = C_{\rho_3} = \text{const}, \quad (2.3.57)$$

которое является вторым, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (2.3.55). О функции $\Psi(\beta_1)$ см. (2.1.18).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (2.3.53) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \frac{\mathcal{G}[\Theta_3]}{\Psi_1(\beta_1)}, \quad (2.3.58)$$

где $\mathcal{G}[\Theta_3]$ — произвольная гладкая функция одного аргумента, Θ_3 — первый интеграл (2.3.29).

В частности, если положить

$$\mathcal{G}[\Theta_3] = \frac{1}{\Theta_3} = \frac{\Psi(\beta_1)}{\sqrt{1+w_1^2}}, \quad (2.3.59)$$

то в качестве решения линейного уравнения (2.3.53) можно взять функцию

$$\rho_3(w_1; \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1+w_1^2}}. \quad (2.3.60)$$

III. Итак, инвариантные дифференциальные формы с функциями $\rho_p(w_3, w_2; \alpha)$, $p = 1, 2$, а также $\rho_3(w_1; \beta_1)$ были получены выше через исследования отдельных систем (2.3.7) и (2.3.8), которые сами составляют общую рассматриваемую составную систему (2.3.7)–(2.3.9). Возникает естественный вопрос: как связано нахождение инвариантных форм для отдельных систем с нахождением инвариантных форм для общей составной системы? Ответ на этот вопрос позволит нам, в частности, ответить и на вопрос о нахождении инвариантной формы, «привязывающей» уравнение (2.3.9).

Составная рассматриваемая система (2.3.7)–(2.3.9) при выполнении свойств (2.3.10), (2.3.11) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_3 = \lambda_3^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) f_3(\alpha) - \kappa f_3(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2^2 + \lambda_3^1 w_3 f_3(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_2 = \kappa f_3(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 w_3 + \lambda^1 w_2 f_3(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \end{cases} \quad (2.3.61)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \pm w_2 \sqrt{1+w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{w_1 w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \quad (2.3.62)$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \quad (2.3.63)$$

После замен независимой и фазовых переменных

$$\frac{d}{dt} = f_3(\alpha) \frac{d}{d\tau}, \quad w_2^* = \ln |w_2|, \quad w_1^* = \ln \left| w_1 + \sqrt{1+w_1^2} \right| \quad (2.3.64)$$

составная система (2.3.61)–(2.3.63) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_{\alpha}(w_3, w_2^*; \alpha) = w_3 + b\Delta(\alpha), \\ \dot{w}_3 = X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha) = \lambda_3^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_2^*} + \lambda_3^1 w_3 \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_2^* = X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha) = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 + \lambda^1 \tilde{\Delta}(\alpha), \end{cases} \quad (2.3.65)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1^* = X_{w_1^*}(w_2^*, \alpha, \beta_1) = \pm e^{w_2^*} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha) = \pm \frac{W_1(w_1^*) e^{w_2^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \end{cases} \quad (2.3.66)$$

$$\dot{\beta}_2 = X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) = \pm \frac{e^{w_2^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} g(\beta_1); \quad (2.3.67)$$

при этом в составной системе (2.3.65)–(2.3.67) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ , а $w_1 = W_1(w_1^*)$ — функция в силу замен (2.3.64). В принципе замена фазовой переменной (2.3.64) носит технический характер, и при этом можно использовать как группу переменных w_2^*, w_1^* , так и группу переменных w_2, w_1 .

Для составной системы (2.3.65)–(2.3.67) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$, соответствующие дифференциальным формам объема

$$\rho(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2,$$

из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} [\rho(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) X(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)] = 0, \quad (2.3.68)$$

где

$$X(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \left\{ X_{\alpha}(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha), \right. \\ \left. X_{w_1^*}(w_2^*; \alpha, \beta_1), X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha), X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) \right\} \quad (2.3.69)$$

— векторное поле рассматриваемой составной системы (2.3.65)–(2.3.67) в координатах $(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$. Уравнение (2.3.68) переписывается в виде

$$X_{\alpha}(w_3, w_2^*; \alpha) \rho_{\alpha} + X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha) \rho_{w_3} + X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha) \rho_{w_2^*} + X_{w_1^*}(w_2^*; \alpha, \beta_1) \rho_{w_1^*} + \\ + X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha) \rho_{\beta_1} + X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) \rho_{\beta_2} = -\rho \operatorname{div} X(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2); \quad (2.3.70)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = (b + \lambda_3^1) \tilde{\Delta}(\alpha), \quad (2.3.71)$$

как и в случае (2.3.38) для «отдельной» системы (2.3.34)!

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (2.3.70) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_{\alpha}(w_3, w_2^*; \alpha), & \dot{\beta}_1 = X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha), \\ \dot{w}_3 = X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), & \dot{\beta}_2 = X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1), \\ \dot{w}_2^* = X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha), & \dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_3^1) \tilde{\Delta}(\alpha); \\ \dot{w}_1^* = X_{w_1^*}(w_2^*; \alpha, \beta_1), & \end{cases} \quad (2.3.72)$$

она включает систему уравнений характеристик (2.3.39) для уравнения в частных производных (2.3.37).

У системы, состоящей из первых шести уравнений системы (2.3.72), уже найдены четыре первых интеграла (2.3.18), (2.3.28), (2.3.29) и (2.3.31) (полный набор). Более того, найден и дополнительный первый интеграл (2.3.45), «привязывающий» уравнение (последнее уравнение системы

(2.3.72)) для функции ρ . Таким образом, общее решение линейного уравнения (2.3.70) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{H} [\Theta_1, \dots, \Theta_4], \quad (2.3.73)$$

где $\mathcal{H} [\Theta_1, \dots, \Theta_4]$ — произвольная гладкая функция четырех аргументов, при этом $\Theta_1, \dots, \Theta_4$ — четыре первых интеграла (2.3.18), (2.3.28), (2.3.29), (2.3.31) соответственно.

В частности, в качестве четырех функционально независимых решений линейного уравнения (2.3.70) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_3, w_2; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_3, w_2; \alpha), \quad (2.3.74)$$

$$\rho_2(w_3, w_2; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_3, w_2; \alpha), \quad (2.3.75)$$

$$\rho_3(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_3(w_1; \beta_1), \quad (2.3.76)$$

$$\rho_4(w_3, w_2; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_4(\beta_1, \beta_2), \quad (2.3.77)$$

где $u_2 = w_3/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_2/\Delta(\alpha)$.

Видно, что в разделе III данного доказательства рассмотрен наиболее общий случай поиска инвариантных форм для составной системы (2.3.65)–(2.3.67). Также ясно, что найденные дифференциальные формы $\rho_1(w_3, w_2; \alpha)dw_3 \wedge dw_2 \wedge d\alpha$ и $\rho_2(w_3, w_2; \alpha)dw_3 \wedge dw_2 \wedge d\alpha$ будут инвариантными формами не только для системы (2.3.7), но и для составной системы (2.3.7)–(2.3.9). При этом для интегрирования составной системы (2.3.7)–(2.3.9) можно использовать как более громоздкую формулу с функцией (2.3.76), так и формулу с функцией (2.3.60), имеющей более простой наглядный вид, поскольку составная система (2.3.7)–(2.3.9) распалась известным образом. Теорема 2.3 доказана. $\square$

Итак, для полной интегрируемости системы (2.3.7)–(2.3.9) можно использовать или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какие-либо комбинации (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством четыре.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [14, 17]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (т.е. наличие у них существенно особых точек) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения [7, 15, 18], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к трехмерной сфере, а также более общих систем на расслоении трехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского. При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим также работы [3, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.

7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
11. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
14. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
17. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
18. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. Трофимов В. В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
28. Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbf{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.

35. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
36. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
40. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
43. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
45. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
50. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
51. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
52. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
53. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
54. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
55. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
56. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
57. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
58. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.

59. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
60. Шамолин М. В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
61. Шамолин М. В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — 507, № 1. — С. 86–92.
62. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 22–54.
63. Шамолин М. В. Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 55–94.
64. Шамолин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 91–121.
65. Шамолин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 88–107.
66. Шамолин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 108–116.
67. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 77–95.
68. Шамолин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 96–105.
69. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 29–40.
70. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 41–74.
71. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 120–138.
72. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 139–148.
73. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n -мерных многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 213. — С. 96–109.
74. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n -мерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 214. — С. 82–106.
75. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 133–152.
76. Шамолин М. В. Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 509, № 1. — С. 69–76.

77. Шамолин М. В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем. I. Системы на касательных расслоениях двумерных многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 227. — С. 100–128.
78. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier–Villars, 1912.
79. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
80. *Shamolin M. V.* Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Proc. Int. Conf. “Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms” (DEMMCA 2021). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.
81. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — 13, № 1. — P. 49–52.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-07).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru

CONTENTS

Sufficient criterion for the exponential stability of a differential equation of neutral type (<i>A. S. Balandin</i>)	3
Dirichlet problem on the semiaxis for the abstract Euler–Poisson–Darboux equation containing powers of the group generator (<i>A. V. Glushak</i>)	10
The influence of competition on the dynamics of macroeconomic systems (<i>A. N. Kulikov, D. A. Kulikov, D. G. Frolov</i>)	20
On the type of delta-subharmonic functions of generalized refined order (<i>K. G. Malyutin, M. V. Kabanko</i>)	32
Recovery of the Laplace–Bessel operator of a function by the spectrum, which is specified not everywhere (<i>S. M. Sitnik, V. E. Fedorov, M. V. Polovinkina, I. P. Polovinkin</i>)	52
Spontaneous clustering in Markov chains. IV. Clustering in turbulent environments (<i>V. V. Uchaikin, V. A. Litvinov</i>)	58
On optimal linear regression for fuzzy random variables (<i>V. L. Khatskevich</i>)	85
Tensor invariants of geodesic, potential and dissipative systems. II. Systems on tangents bundles of three-dimensional manifolds (<i>M. V. Shamolin</i>)	92

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНИТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антониевич,
д.ф.-м.-н. (ВИНИТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович