

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 227



Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 227 (2023)

Дата публикации 4 сентября 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редактор-составитель выпуска
Научный редактор выпуска
Компьютерная вёрстка

А. С. Бондарев
Е. Е. Букжалёв
А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 227

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЗИМНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ»

ВОРОНЕЖ, 27 ЯНВАРЯ – 1 ФЕВРАЛЯ 2023 г.

Часть 1



Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

О порядках n -членных приближений функций многих переменных в пространстве Лоренца (<i>Г. Акишев</i>)	3
Реконструкция характеристических функций квадратичных функционалов от траекторий гауссовских случайных процессов (<i>Ю. П. Вирченко, А. С. Мазманишвили</i>)	20
Точное решение 3d уравнений Навье—Стокса для случая потенциального движения несжимаемой жидкости (<i>А. В. Коптев</i>)	41
Задача о равновесии двумерного упругого тела с двумя контактирующими тонкими жесткими включениями (<i>Н. П. Лазарев, В. А. Ковтуненко</i>)	51
О нескольких моделях динамики популяций с распределенным запаздыванием (<i>Т. Л. Сабатулина</i>)	61
Полнота экспоненциальных систем в пространствах функций в терминах периметра (<i>Б. Н. Хабибуллин, Е. Г. Кудашева, Р. Р. Мурысов</i>)	79
Задачи оптимизации в обыкновенных автономных системах первого порядка (<i>М. П. Эшов, Н. Н. Кодиров, Т. К. Юлдашев</i>)	92
Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем. I. Системы на касательных расслоениях двумерных многообразий (<i>М. В. Шамолин</i>)	100



О ПОРЯДКАХ n -ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

© 2023 г. Г. АКИШЕВ

Аннотация. В статье рассматриваются анизотропное пространство Лоренца 2π -периодических функций многих переменных и класс Никольского–Бесова в этом пространстве. Получены оценки наилучших приближений по гиперболическому кресту и наилучших M -членных приближений функций класса Никольского–Бесова по норме анизотропного пространства Лоренца при различных соотношениях между параметрами данного класса и этого пространства.

Ключевые слова: пространство Лоренца, тригонометрический полином, наилучшее M -членное приближение.

ON ORDERS OF n -TERM APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS OF MANY VARIABLES IN THE LORENTZ SPACE

© 2023 G. AKISHEV

ABSTRACT. In this paper, we consider the anisotropic Lorentz space of 2π -periodic functions of many variables and the Nikolsky–Besov class in this space. We obtain estimates for the best approximations along the hyperbolic cross and the best M -term approximations of functions of the Nikolsky–Besov class with respect to the norm of the anisotropic Lorentz space for various relations between the parameters of the class and the space.

Keywords and phrases: Lorentz space, trigonometric polynomial, best M -term approximation.

AMS Subject Classification: 41A10

1. Введение. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, где $\theta_j, p_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \dots, m$. Через $L_{\mathbf{p}, \boldsymbol{\tau}}^*(I^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\mathbf{x})$, имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{\mathbf{p}, \boldsymbol{\tau}}^* = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\tau_m/p_m - 1} \left[\dots \left[\int_0^{2\pi} \left(f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m) \right)^{\tau_1} t_1^{\tau_1/p_1 - 1} dt_1 \right]^{\tau_2/\tau_1} \dots \right]^{\tau_m/\tau_{m-1}} dt_m \right]^{1/\tau_m}$$

конечна, где $f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\mathbf{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [23, 35]).

В случае $p_1 = \dots = p_m = \tau_1 = \dots = \tau_m = p$ пространство $L_{\mathbf{p}, \boldsymbol{\tau}}^*(I^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(I^m)$ с нормой (см. [20, гл. 1, п. 1.1])

$$\|f\|_p = \left[\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_m)|^p dx_1 \dots dx_m \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Обозначим через $\mathring{L}_{\mathbf{p},\tau}^*(I^m)$ множество всех функций $f \in L_{\mathbf{p},\tau}^*(I^m)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi} f(\mathbf{x}) dx_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

через $a_{\mathbf{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in \mathring{L}_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$ и через $\mathbb{Z}^m$ — пространство точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами. Положим

$$\delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \rho(\mathbf{s})} a_{\mathbf{n}}(f) e^{i\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle},$$

где

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j, \quad s_j = 1, 2, \dots,$$

$$\rho(\mathbf{s}) = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = 1, \dots, m \right\}.$$

Будем говорить, что числовая последовательность $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m}$ принадлежит классу $l_{\mathbf{p}}$ если

$$\|\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m}\|_{l_{\mathbf{p}}} = \left\{ \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} \left[\dots \left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} |a_{\mathbf{n}}|^{p_1} \right]^{p_2/p_1} \dots \right]^{p_m/p_{m-1}} \right\}^{1/p_m} < +\infty$$

при $1 \leq p_j < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ и

$$\|\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m}\|_{l_{\infty}} = \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} |a_{\mathbf{n}}|$$

для $p_j = \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Через $C(p, q, y, \dots)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют такие положительные постоянные C_1, C_2 , что $C_1 \cdot A(y) \leq B(y) \leq C_2 \cdot A(y)$. Для краткости записи в случае выполнения неравенств $B \geq C_1 A$ или $B \leq C_2 A$ часто будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно. Через $S_{\mathbf{p}}^r H$, $S_{\mathbf{p},\theta}^r B$ обозначим пространства функций с доминирующей смешанной производной, введенные соответственно С. М. Никольским (см. [21]) и Т. И. Амановым (см. [6]).

П. И. Лизоркин и С. М. Никольский (см. [17, с. 157]) исследовали декомпозиционное разложение элементов пространства $S_{\mathbf{p},\theta}^r B$. Приведем его определение.

Пусть $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, $1 \leq p, \theta \leq +\infty$. Пространство $S_{\mathbf{p},\theta}^r B$ состоит из всех функций $f \in \mathring{L}_{\mathbf{p}}^*(I^m)$, для которых

$$\|f\|_{S_{\mathbf{p},\theta}^r B} = \left[\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \|\Delta_{\mathbf{t}}^{\mathbf{k}} f(\cdot)\|_p^{\theta} \prod_{j=1}^m \frac{dt_j}{t_j^{1+\theta r_j}} \right]^{1/\theta} < +\infty,$$

где $\Delta_{\mathbf{t}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}) = \Delta_{t_m}^{k_m} (\dots \Delta_{t_1}^{k_1} f(\mathbf{x}))$ — смешанная разность порядка $\mathbf{k}$ с шагом $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$ и $k_j > r_j$, $j = 1, \dots, m$.

В [17, с. 159], отмечено, что функция $f \in S_{\mathbf{p},\theta}^r B$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m, \prod_{j=1}^m n_j \neq 0} a_{\mathbf{n}}(f) e^{i\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Также известно (см. [17, с. 158]), что $\|f\|_{S_{\mathbf{p},\theta}^r B}$ является нормой и

$$\|f\|_{S_{\mathbf{p},\theta}^r B} \asymp \left\{ \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle \theta} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\theta} \right\}^{1/\theta}$$

при $1 < p < +\infty$, $1 \leq \theta \leq +\infty$. Поэтому в анизотропном пространстве Лоренца $\dot{L}_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau}}^*(I^m)$ рассмотрим аналогичный класс:

$$S_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta}}^r B = \left\{ f \in \dot{L}_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau}}^*(I^m) : \|f\|_{S_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta}}^r B} = \left\| \left\{ 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau}}^* \right\}_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \leq 1 \right\},$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $1 < p_j, \tau_j < +\infty$, $1 \leq \theta_j \leq +\infty$, $j = 1, \dots, m$. Пусть дан вектор $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. Положим

$$Y^m(\boldsymbol{\gamma}, n) = \left\{ \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \sum_{j=1}^m s_j \gamma_j \geq n \right\}.$$

Назовем ступенчатым гиперболическим крестом (см., например, [29, с. 7]) множество

$$Q_n^\gamma = \bigcup_{\langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma} \rangle < n} \rho(\mathbf{s})$$

и рассмотрим множество тригонометрических полиномов (см., например, [29, с. 8])

$$T(Q_n^\gamma) = \left\{ t(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q_n^\gamma} b_{\mathbf{k}} e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} \right\}.$$

Также введем обозначения $E_{Q_n^\gamma}(f)_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau}}$ для наилучшего приближения функции $f \in L_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau}}^*(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^\gamma)$ и

$$S_n^\gamma(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q_n^\gamma} a_{\mathbf{k}}(f) e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}$$

для частичной суммы ряда Фурье функции f .

Для данного вектора $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$ положим

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{r}}{r_1}, \quad r_j > 0, \quad \Gamma_n^\gamma = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : \prod_{j=1}^m (\max(1, |k_j|))^{\gamma_j} < n \right\}.$$

Множество Γ_n^γ называется гиперболическим крестом. Рассмотрим множество тригонометрических полиномов

$$T(\Gamma_n^\gamma) = \left\{ T_{n,\gamma}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_n^\gamma} b_{\mathbf{k}} e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} \right\}.$$

Величина

$$E_n^{(\gamma)}(f)_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau}} = \inf_{T_{n,\gamma} \in T(\Gamma_n^\gamma)} \|f - T_{n,\gamma}\|_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau}}$$

называется наилучшим приближением функции $f \in L_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m)$ тригонометрическими полиномами по гиперболическому кресту Γ_n^γ (см. например, [7, 29]).

Отметим, что при $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m) = r_1 \boldsymbol{\gamma}$ справедливы включения

$$T(Q_n^\gamma) \subset T(\Gamma_{2^n}^{(\gamma)}) \subset T(Q_{n+\gamma(m)}^\gamma),$$

поэтому для оценки $E_n^{(\gamma)}(f)_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau}}$ достаточно оценить $E_{Q_n^\gamma}(f)_{\mathbf{p},\boldsymbol{\tau}}$ (см. [29, с. 9]), где $\gamma(m) = \sum_{j=1}^m \gamma_j$.

Наилучшее приближение функций многих переменных $f \in L_2(I^m)$ тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов впервые определил К. И. Бабенко (см. [7]). Оценки наилучших приближений различных классов гладких функций в пространстве $f \in L_p(I^m)$, $1 \leq p < \infty$, этим методом исследовали С. А. Теляковский [28], Б. С. Митягин [19], Я. С. Бугров [14], Н. С. Никольская [22], Э. М. Галеев [15], В. Н. Темляков [29, 41], А. С. Романюк [24], Б. Базарханов [8], Д. Б. Базарханов [9], Х.-Ю. Шмайссер, У. Зикель [40] и др. (см. библиографию в обзорных статьях [31, 37] и в монографии [41]).

Известно, что для пространств Лоренца справедливы включения

$$\begin{aligned} L_{q,\tau}^*(I^m) &\subset L_{p,\tau}^*(I^m) && \text{в случае } p_j < q_j, j = 1, \dots, m, \\ L_{p,\tau^{(2)}}^*(I^m) &\subset L_{p,\tau^{(1)}}^*(I^m) && \text{в случае } 1 < \tau_j^{(2)} < \tau_j^{(1)} < \infty, j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где $\tau^{(1)} = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_m^{(1)})$ и $\tau^{(2)} = (\tau_1^{(2)}, \dots, \tau_m^{(2)})$. Точные оценки порядка приближения классов Никольского—Бесова в пространствах Лоренца с анизотропной метрикой для случая $p_j < q_j$, $j = 1, \dots, m$, установлены в [1, 2, 11].

Одной из задач, рассматриваемых в данной статье, является оценка величины

$$E_n^\gamma(S_{p,\tau^{(1)},\theta}^r B)_{p,\tau^{(2)}} = \sup_{f \in S_{p,\tau^{(1)},\theta}^r B} E_n^\gamma(f)_{p,\tau^{(2)}}$$

в случае $1 < \tau_j^{(2)} < \tau_j^{(1)} < \infty$, $1 < p_j < \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$. Вторая задача — оценка наилучшего M -членного приближения функции $f \in L_{p,\tau}^*(I^m)$. Величина

$$e_M(f)_{p,\tau} = \inf_{\mathbf{k}^{(j)}, b_j} \left\| f - \sum_{j=1}^M b_j e^{i\mathbf{k}^{(j)}, \mathbf{x}} \right\|_{p,\tau}^*$$

называется наилучшим M -членным тригонометрическим приближением функции $f \in L_{p,\tau}^*(I^m)$, $M \in \mathbb{N}$ (см. [41, с. 388]).

Пусть $F \subset L_{p,\tau}^*(I^m)$ — некоторый функциональный класс. Положим

$$e_M(F)_{p,\tau} = \sup_{f \in F} e_M(f)_{p,\tau}.$$

В случае $\tau_j = p_j = p$ вместо $e_M(F)_{p,\tau}$ будем писать $e_M(F)_p$.

Наилучшее M -членное приближение функции $f \in L_2[0, 1]$ полиномами по ортонормированной системе впервые определил С. Б. Стечкин (см. [27]) и установил критерий абсолютной сходимости ряда Фурье по этой системе. В дальнейшем важные результаты оценки n -членных приближений функций из различных классов Соболева, Никольского—Бесова, Лизоркина—Трибеля получили Р. С. Исмагилов [16], Ю. Маковоз [39], В. Е. Майоров [18], Э. С. Белинский [12, 13], Р. Де Воре [36], В. Н. Темляков [29, 30, 34, 41, 42], А. С. Романюк [25, 26], М. Хансен и У. Зикель [38], Д. Б. Базарханов и В. Н. Темляков [34] и др. (см. библиографию в обзорных статьях [31, 37]). Оценки n -членных приближений функций класса Никольского—Бесова в пространстве Лоренца исследованы в [3, 4, 32].

Вторая задача: оценить величину $e_M(S_{p,\tau^{(1)},\theta}^r B)_{p,\tau^{(2)}}$ в случае $1 < \tau_j^{(2)} < \tau_j^{(1)} < \infty$, $1 < p_j < \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Статья состоит из введения и трех разделов. В разделе 2 приведены вспомогательные утверждения, некоторые с доказательством, необходимые для доказательства основных результатов. В разделе 3 установлены оценки величины $E_n^\gamma(S_{p,\tau^{(1)},\theta}^r B)_{p,\tau^{(2)}}$. В разделе 4 получена оценка сверху $e_M(S_{p,\tau^{(1)},\theta}^r B)_{p,\tau^{(2)}}$.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 2.1. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_m$ и $\alpha \in (0, +\infty)$, $\theta_j \in [1, +\infty)$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, m$. Тогда справедливо соотношение

$$\left\| \left\{ 2^{-\alpha \langle \mathbf{s}, \gamma \rangle} \prod_{j=1}^m s_j^{\beta_j} \right\}_{\mathbf{s} \in Y^m(\gamma, n)} \right\|_{l_\theta} \asymp 2^{-n\alpha} n^{\sum_{j=2}^m 1/\theta_j + \sum_{j=1}^m \beta_j}.$$

Замечание 2.1. Отметим, что лемма 2.1 в случае $\beta_j = 0$, $j = 1, \dots, m$, ранее доказана в [1], а если, кроме этого, $\theta_1 = \dots = \theta_m$, — В. Н. Темляковым (см. [29]).

В дальнейшем будем пользоваться обозначением $\chi_{\mathcal{K}(n)}(\mathbf{s})$ для характеристической функции множества $\mathcal{K}(n) = \{\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \mathbf{s}, \gamma \rangle = n\}$.

Лемма 2.2 (см. [1, лемма 2]). Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $1 \leq \tau_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$. Тогда имеет место соотношение

$$\left\| \{ \chi_{\mathcal{K}(n)}(\mathbf{s}) \}_{\mathbf{s} \in \mathcal{K}(n)} \right\|_{l_\tau} \asymp n^{\sum_{j=1}^m 1/\tau_j}.$$

Теорема 2.1. Пусть $1 < \tau_2 < p \leq 2$ или $2 < \tau_2 < p < \infty$ или $1 < \tau_2 \leq 2 < p < \infty$, $1 < p < +\infty$. Если $f \in L_p(I^m)$ и

$$\sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{\tau_2(1/\beta-1/p)} \left(\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p \right)^{\tau_2} < +\infty,$$

то $f \in L_{p,\tau_2}^*(I^m)$ и имеет место неравенство

$$\|f\|_{p,\tau_2}^* \ll \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{\tau_2(1/\beta-1/p)} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\tau_2} \right\}^{1/\tau_2},$$

где $\beta = \min\{2, \tau_2\}$.

Доказательство. В случаях $1 < \tau_2 < p \leq 2$ и $1 < \tau_2 \leq 2 < p < \infty$ теорема ранее доказана в [2]. Докажем теорему в случае $2 < \tau_2 < p < \infty$. В [2] доказано, что (см. [2, теорема 1, формула (2.17)])

$$\|f\|_{p,\tau_2}^* \leq C \left(\sum_{k_m=0}^{\infty} \dots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m 2^{k_j \theta(1/\theta-1/p)} \left\| \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \dots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_p^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}. \quad (2.1)$$

Так как $2 < p < \infty$, известно, что (см., например, [29])

$$\left\| \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \dots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_p \leq C \left\{ \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \dots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.2)$$

Выберем число $\varepsilon > 0$. Так как $2 < \tau_2 < \infty$, то при $\eta = \tau_2/2$, $1/\eta + 1/\eta' = 1$, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \dots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^2 \right\}^{1/2} \leq \\ & \leq \left\{ \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \dots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \prod_{j=1}^m s_j^{-\varepsilon \tau_2} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\tau_2} \right\}^{1/\tau_2} \left\{ \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \dots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \prod_{j=1}^m s_j^{\varepsilon 2\eta'} \right\}^{1/(2\eta')} \leq \\ & \leq C \prod_{j=1}^m 2^{k_j(\varepsilon+1/2-1/\tau_2)} \left\{ \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \dots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \prod_{j=1}^m s_j^{-\varepsilon \tau_2} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\tau_2} \right\}^{1/\tau_2}. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Теперь из неравенств (2.2) и (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k_m=0}^{\infty} \dots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m 2^{k_j \theta(1/\theta-1/p)} \left\| \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \dots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_p^{\tau_2} \leq \\ & \leq C \sum_{k_m=0}^{\infty} \dots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m 2^{k_j \tau_2(1/\tau_2-1/p)} \prod_{j=1}^m 2^{k_j(\varepsilon+1/2-1/\tau_2)\tau_2} \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \dots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \prod_{j=1}^m s_j^{-\varepsilon \tau_2} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\tau_2} \leq \\ & \leq C \sum_{k_m=0}^{\infty} \dots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m 2^{k_j(\varepsilon+1/2-1/p)\tau_2} \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \dots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \prod_{j=1}^m s_j^{-\varepsilon \tau_2} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\tau_2} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m}+1} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1}+1} \prod_{j=1}^m s_j^{(\varepsilon+1/2-1/p)\tau_2} \prod_{j=1}^m s_j^{-\varepsilon\tau_2} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\tau_2} \leq \\
&= C \sum_{s_m=2}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=2}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{(1/2-1/p)\tau_2} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\tau_2}. \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Из неравенств (2.1) и (2.4) следует утверждение теоремы в случае $2 < \tau_2 < \infty$. $\square$

Следствие 2.1. Пусть $1 < \tau_2 < p \leq 2$, или $1 < \tau_2 \leq 2 < p < \infty$, или $2 < \tau_2 \leq p < \infty$, $p < \tau_j^{(1)} < \infty$, $j = 1, \dots, m$. Если $f \in L_{p, \tau^{(1)}}^*(I^m)$ и

$$\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{\tau_2(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \left(\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right)^{\tau_2} < \infty, \quad (2.5)$$

то $f \in L_{p, \tau_2}^*(I^m)$ и

$$\|f\|_{p, \tau_2}^* \ll \left(\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{\tau_2(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \left(\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right)^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}.$$

Доказательство. Пусть $2 < \tau_2 < p < \tau_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, m$. Тогда согласно неравенству разных метрик в анизотропном пространстве Лоренца (см. [23]) имеем

$$\sum_{s_m=2}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=2}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{(1/2-1/p)\tau_2} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\tau_2} \leq C \sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{\tau_2(1/2-1/\tau_j^{(1)})} \left(\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right)^{\tau_2}.$$

Поэтому следствие 2.1 вытекает из теоремы 2.1 при $2 < \tau_2 < p < \tau_j^{(1)} < \infty$, $j = 1, \dots, m$. Для случаев $1 < \tau_2 < p \leq 2$ и $1 < \tau_2 \leq 2 < p < \infty$ следствие было доказано в [2]. $\square$

Теорема 2.2. Пусть $1 < p < \tau_j^{(1)} < \infty$ для $j = 1, \dots, m$, $\beta = \min\{2, p\}$. Если $f \in L_{p, \tau^{(1)}}^*(I^m)$ и

$$\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{(1/p-1/\tau_j^{(1)})\beta} \left(\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right)^{\beta} < \infty, \quad (2.6)$$

то $f \in L_p(I^m)$ и

$$\|f\|_p \ll \left(\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{\beta(1/p-1/\tau_j^{(1)})} \left(\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right)^{\beta} \right)^{1/\beta}.$$

Доказательство. Согласно неравенству разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца [23] имеем

$$\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\beta} \ll \sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m s_j^{(1/p-1/\tau_j^{(1)})\beta} \left(\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right)^{\beta}, \quad (2.7)$$

для функции $f \in L_{p, \tau^{(1)}}^*(I^m)$. Теперь в силу условия (2.6) и известного неравенства (см., например, [24, с. 1401], [42])

$$\|f\|_p \ll \left(\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\beta} \right)^{1/\beta}$$

для функции $f \in L_p(I^m)$, $1 < p < \tau_j^{(1)} < \infty$, из (2.7) получим утверждения теоремы. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ и $0 < \gamma'_j \leq \gamma_j$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, и $\alpha \in (0, \infty)$. Тогда справедливо соотношение

$$\sup_{s \in Y^m(n, \gamma')} 2^{-\alpha \langle s, \gamma \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{\lambda_j} \asymp 2^{-n\alpha\delta} n^{\sum_{j \in A} \lambda_j},$$

где $\delta = \min\{\gamma_j \cdot \gamma'_j : j = 1, \dots, m\}$, $A = \{j : \gamma_j \cdot \gamma'_j = \delta, j = 1, \dots, m\}$.

Доказательство. Оценка сверху следует из [4, лемма 2.1]. Докажем оценку снизу. Пусть $m = 2$. Тогда по определению множества $Y^2(n, \gamma')$ имеем

$$\begin{aligned} I_n &:= \sup_{s \in Y^2(n, \gamma')} 2^{-\alpha \langle s, \gamma \rangle} \prod_{j=1}^2 (s_j + 1)^{\lambda_j} \geq \sup_{\substack{s_1 \geq (n-s_2\gamma'_2)/\gamma'_1, \\ 0 < s_2 < n/\gamma'_2}} 2^{-\alpha \langle s, \gamma \rangle} \prod_{j=1}^2 (s_j + 1)^{\lambda_j} = \\ &= \sup_{0 < s_2 < n/\gamma'_2} 2^{-(n-s_2\gamma'_2)\gamma_1\alpha/\gamma'_1} \left(\frac{n-s_2\gamma'_2}{\gamma'_1} \gamma_1 + 1 \right)^{\lambda_1} 2^{-s_2\gamma_2\alpha} (s_2 + 1)^{\lambda_2} = \\ &= 2^{-n(\gamma_1/\gamma'_1)\alpha} \sup_{0 < s_2 < n/\gamma'_2} 2^{s_2\gamma'_2(\gamma_1/\gamma'_1 - \gamma_2/\gamma'_2)\alpha} (s_2 + 1)^{\lambda_2} \left(\frac{n-s_2\gamma'_2}{\gamma'_1} \gamma_1 + 1 \right)^{\lambda_1} \gg \\ &\gg 2^{-n(\gamma_1/\gamma'_1)\alpha} 2^{n(\gamma_1/\gamma'_1 - \gamma_2/\gamma'_2)\alpha} \left(\frac{n}{\gamma'_1} + 1 \right)^{\lambda_2} \sup_{0 < s_2 < n/\gamma'_2} \left(\frac{n-s_2\gamma'_2}{\gamma'_1} \gamma_1 + 1 \right)^{\lambda_1} \gg \\ &\gg 2^{-n(\gamma_2/\gamma'_2)\alpha} (n+1)^{\lambda_2}, \quad (2.8) \end{aligned}$$

в случае $\gamma_1/\gamma'_1 - \gamma_2/\gamma'_2 > 0$. Если $\gamma_1/\gamma'_1 - \gamma_2/\gamma'_2 < 0$, то, рассуждая аналогично, получим

$$I_n \geq \sup_{\substack{s_2 \geq (n-s_1\gamma'_1)/\gamma'_2, \\ 0 < s_1 < n/\gamma'_1}} 2^{-\alpha \langle s, \gamma \rangle} \prod_{j=1}^2 (s_j + 1)^{\lambda_j} \gg 2^{-n(\gamma_1/\gamma'_1)\alpha} (n+1)^{\lambda_1}.$$

Пусть $\gamma_1/\gamma'_1 - \gamma_2/\gamma'_2 = 0$. Тогда (см. формулу (2.8))

$$I_n \geq 2^{-n(\gamma_1/\gamma'_1)\alpha} \sup_{0 < s_2 < n/\gamma'_2} (s_2 + 1)^{\lambda_2} \left(\frac{n-s_2\gamma'_2}{\gamma'_1} \gamma_1 + 1 \right)^{\lambda_1} \gg 2^{-n(\gamma_1/\gamma'_1)\alpha} (n+1)^{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Лемма доказана для $m = 2$. Далее методом математической индукции лемму можно доказать для $m \geq 3$. $\square$

3. Оценки наилучшего приближения функции в пространстве Лоренца.

3.1. Оценки сверху наилучшего приближения.

Теорема 3.1. Пусть $1 < p \leq \tau_j^{(1)} < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, $1 < \tau_2 < p \leq 2$ или $2 < \tau_2 < p < \infty$ или $1 < \tau_2 \leq 2 < p < \infty$, $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$ и $\gamma_j = r_j/r_1$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$.

1. Если $\tau_2 < \theta_j \leq \infty$, для $j = 1, 2, \dots, m$, то

$$E_M^{(\gamma')} (S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{p, \tau_2} \leq CM^{-r_1} (\log_2(M+1))^{(\nu-1)r_1 + \sum_{j=2}^\nu (1/\tau_2 - 1/\theta_j)} (\log_2(M+1))^{\sum_{j=1}^\nu (1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)})},$$

где $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$, $\gamma'_j = \gamma_j$, для $j = 1, \dots, \nu$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, для $j = \nu + 1, \dots, m$.

2. Если $1 \leq \theta_j \leq \tau_2 < \infty$, для $j = 1, 2, \dots, m$, то

$$E_M^{(\gamma')} (S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{p, \tau_2} \leq CM^{-r_1} (\log_2(M+1))^{(\nu-1)r_1} (\log_2(M+1))^{\sum_{j=1}^\nu (1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)})}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Сначала докажем вложение $S_{p,\tau^{(1)},\theta}^r B \subset L_{p,\tau_2}^*(I^m)$. Пусть $f \in S_{p,\tau^{(1)},\theta}^r B$. Если $1 < \tau_2 < \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$, то пользуясь следствием 2.1 и неравенством Гельдера, при $\eta_j = \theta_j/\tau_2$, $1/\eta_j + 1/\eta'_j = 1$, $j = 1, \dots, m$, получим

$$\|f\|_{p,\tau_2}^* \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_s(f)\|_{p,\tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_\theta} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_\epsilon}, \quad (3.2)$$

где $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$, $\epsilon_j = \tau_2 \eta'_j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Если $\theta_j = \infty$ для $j = 1, 2, \dots, m$, то по следствию 2.1 будем иметь

$$\|f\|_{p,\tau_2}^* \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\tau_2}} \sup_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_s(f)\|_{p,\tau^{(1)}}^*. \quad (3.3)$$

Пусть $1 \leq \theta_j \leq \tau_2 < \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$. Применяя неравенство Йенсена (см. [20, гл. 3, лемма 3.3]) получим

$$\|f\|_{p,\tau_2}^* \ll \left\| \left\{ 2^{\langle s, r \rangle} \|\delta_s(f)\|_{p,\tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\tau_2}}. \quad (3.4)$$

Из неравенств (3.2)–(3.4) следует, что $S_{p,\tau^{(1)},\theta}^r B \subset L_{p,\tau_2}^*(\mathbb{T}^m)$.

Пусть $f \in S_{p,\tau^{(1)},\theta}^r B$, $1 \leq \tau_2 < p \leq 2$. Для числа $M \in \mathbb{N}$ выберем такое натуральное число n , что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Рассмотрим частичную сумму

$$S_n^{\gamma'}(f, x) = \sum_{k \in Q_n^{\gamma'}} a_k(f) e^{i\langle k, x \rangle}$$

ряда Фурье функции f . Применяя (3.2) к функции $f - S_n^{\gamma'}(f) \in L_{p,\tau_2}^*(I^m)$, получим

$$\|f - S_n^{\gamma'}(f)\|_{p,\tau_2}^* \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \|\delta_s(f)\|_{p,\tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in Y^m(\gamma', n)} \right\|_{l_{\tau_2}}. \quad (3.5)$$

Пусть $1 < \tau_2 < \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$. Тогда применяя неравенство Гельдера, при $\eta_j = \theta_j/\tau_2$, $1/\eta_j + 1/\eta'_j = 1$, $j = 1, \dots, m$, и [33, лемма 3], при $\lambda_j = 1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, m$, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \|\delta_s(f)\|_{p,\tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in Y^m(\gamma', n)} \right\|_{l_{\tau_2}} \leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_s(f)\|_{p,\tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_\theta} \times \\ & \times \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \right\}_{s \in Y^m(\gamma', n)} \right\|_{l_\epsilon} \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_s(f)\|_{p,\tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_\theta} \times \\ & \times 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}) + \sum_{j=2}^{\nu} 1/\epsilon_j}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

где $\epsilon_j = \tau_2 \eta'_j$,

$$\frac{1}{\epsilon_j} = \frac{1}{\tau_2 \eta'_j} = \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\theta_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Если $\theta_j = \infty$, для $j = 1, 2, \dots, m$, то, пользуясь леммой 2.1,

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^m s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in Y^m(\gamma', n)} \right\|_{l_{\tau_2}} \leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \right\}_{s \in Y^m(\gamma', n)} \right\|_{l_{\tau_2}} \times$$

$$\times \sup_{s \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle s, r \rangle} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \ll 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}) + \nu - 1/\tau_2} \quad (3.7)$$

для функции $f \in S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B$.

Теперь из (3.5), (3.6) и (3.7) следует, что

$$\|f - S_n^{(\gamma')}(f)\|_{p, \tau_2}^* \ll 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}) + \sum_{j=2}^{\nu} (1/\tau_2 - 1/\theta_j)}$$

в случае $\tau_2 < \theta_j \leq \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$ для функции $f \in S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B$. Отсюда получается оценка

$$E_n^{(\gamma')}(S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{p, \tau_2} \ll 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}) + \sum_{j=2}^{\nu} (1/\tau_2 - 1/\theta_j)} \quad (3.8)$$

в случае $\tau_2 < \theta_j \leq \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Пусть $1 \leq \theta_j \leq \tau_2 < \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда, пользуясь неравенством Йенсена (см. например [20, гл. 3, лемма 3.3]) и леммой 3 из [33], получим

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^m s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in Y^m(\gamma', n)} \right\|_{l_{\tau_2}} \leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in Y^m(\gamma', n)} \right\|_{l_{\theta}} \leq$$

$$\leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\theta}} \sup_{s \in Y^m(\gamma', n)} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \ll$$

$$\ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\theta}} 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)})}.$$

Поэтому из неравенства (3.5) следует

$$E_n^{(\gamma')}(S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{p, \tau_2} \ll 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)})} \quad (3.9)$$

в случае $1 \leq \theta_j \leq \tau_2 < \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Далее, учитывая, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, из неравенств (3.8) и (3.9) получим утверждения теоремы в случае $1 \leq \tau_2 < p \leq 2$.

Пусть $2 < \tau_2 < p < \infty$ или $1 < \tau_2 \leq 2 < p < \infty$. Тогда $\beta = 2$ и, применяя следствие 2.1 к функции $f - S_n^{\gamma'}(f) \in L_{p, \tau_2}^*(\mathbb{T}^m)$ получим

$$\|f - S_n^{\gamma'}(f)\|_{p, \tau_2}^* \ll \left(\sum_{\langle s, \gamma' \rangle \geq n} \prod_{j=1}^m s_j^{(1/2 - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} \left(\|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right)^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}. \quad (3.10)$$

Если $\tau_2 < \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$, то, применяя неравенство Гельдера при

$$\eta_j = \frac{\theta_j}{\tau_2}, \quad \frac{1}{\eta_j} + \frac{1}{\eta_j'} = 1, \quad j = 1, \dots, m,$$

и лемму 2.1, при $\lambda_j = 1/\tau_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, m$, имеем

$$\begin{aligned}
\|f - S_n^{\gamma'}(f)\|_{p, \tau_2}^* &\ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_\theta} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/2-1/\tau_j^{(1)}} \right\}_{s \in Y^m(\gamma', n)} \right\|_{l_\epsilon} \ll \\
&\ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_\theta} \times 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=1}^\nu (1/2-1/\tau_j^{(1)}) + \sum_{j=2}^\nu (1/\tau_2-1/\theta_j)}, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

где $\epsilon_j = \tau_2 \eta'_j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Если $\theta_j = \infty$ для $j = 1, 2, \dots, m$, то, пользуясь [33, лемма 3], из (3.10) получим для функции $f \in S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B$

$$\|f - S_n^{\gamma'}(f)\|_{p, \tau_2}^* \ll \sup_{s \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle s, r \rangle} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=1}^\nu (1/2-1/\tau_j^{(1)}) + \nu - 1/\tau_2}. \quad (3.12)$$

Пусть $1 \leq \theta_j \leq \tau_2 < \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда, пользуясь неравенством Йенсена и [33, лемма 3], из (3.10) выводим

$$\|f - S_n^{\gamma'}(f)\|_{p, \tau_2}^* \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_\theta} 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=1}^\nu (1/2-1/\tau_j^{(1)})}. \quad (3.13)$$

Теперь учитывая, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, из неравенств (3.11)–(3.13) нетрудно получить утверждения теоремы в случае $2 < \tau_2 < p < \infty$ или $1 < \tau_2 \leq 2 < p < \infty$. $\square$

Замечание 3.1. В случае $\theta_1 = \dots = \theta_m = \theta$ и $\gamma' = \gamma$ теорема 3.1 доказана в [22].

3.2. Оценки снизу наилучшего приближения. Докажем оценку снизу во втором утверждении теоремы 3.1.

Теорема 3.2. Пусть $1 < p_j < \infty$, $1 < \tau_j^{(2)} < \tau_j^{(1)} < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$ и $\gamma_j = r_j/r_1$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$. Если $1 \leq \theta_j \leq \tau_j^{(2)} < \infty$ для $j = 1, 2, \dots, m$, то

$$E_M^{(\gamma')}(S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{p, \tau^{(2)}} \gg M^{-r_1} \left(\log_2(M+1) \right)^{(\nu-1)r_1} \left(\log_2(M+1) \right)^{\sum_{j=1}^\nu (1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)})}.$$

Доказательство. Выберем такое $n \in \mathbb{N}$, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Пусть $1 \leq \theta_j \leq \tau_2 < \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, и вектор $\tilde{s}$ удовлетворяет условию $\langle \tilde{s}, \gamma' \rangle \geq n$. Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \prod_{j=1}^m 2^{-\tilde{s}_j r_j} \tilde{s}_j^{-1/\tau_j^{(1)}} \sum_{k \in \rho(\tilde{s})} \prod_{j=1}^m (n_j - 2^{\tilde{s}_j-1} + 1)^{1/p_j-1} e^{i\langle k, x \rangle}.$$

Тогда в силу соотношения

$$\left\| \sum_{k \in \rho(\tilde{s})} \prod_{j=1}^m (k_j - 2^{\tilde{s}_j-1} + 1)^{1/p_j-1} e^{i\langle k, x \rangle} \right\|_{p, \tau^{(1)}}^* \asymp \prod_{j=1}^m s_j^{1/\tau_j^{(1)}} \quad (3.14)$$

при $1 < p_j < +\infty$, $1 < \tau_j^{(1)} < +\infty$, $j = 1, \dots, m$ (см. [2]), имеем

$$\|\delta_{\tilde{s}}(f_1)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \asymp \prod_{j=1}^m 2^{-\tilde{s}_j r_j}.$$

Если $\mathbf{s} \neq \tilde{\mathbf{s}}$, то $\|\delta_{\mathbf{s}}(f_1)\|_{\mathbf{p}, \tau^{(1)}}^* = 0$. Поэтому

$$\left\| \left\{ 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle} \|\delta_{\mathbf{s}}(f_1)\|_{\mathbf{p}, \tau^{(1)}}^* \right\}_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\theta}} \leq C_1.$$

Следовательно, функция $C_1^{-1} f_1 \in S_{\mathbf{p}, \tau^{(1)}, \theta}^r B$. Так как $\langle \tilde{\mathbf{s}}, \gamma' \rangle \geq n$, то, учитывая определение наилучшего приближения и соотношение (3.11), имеем

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(S_{\mathbf{p}, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{\mathbf{p}, \tau^{(2)}} \geq E_{Q_n^{\gamma'}}(f_1)_{\mathbf{p}, \tau^{(2)}} = C^{-1} \|f_1\|_{\mathbf{p}, \tau^{(2)}}^* \gg \prod_{j=1}^m 2^{-\tilde{s}_j r_j} \tilde{s}_j^{1/\tau_j^{(2)} - 1/\tau_j^{(1)}}.$$

Значит,

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(S_{\mathbf{p}, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{\mathbf{p}, \tau^{(2)}} \geq C \sup_{\mathbf{s} \in Y^m(\gamma', n)} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\tau_j^{(2)} - 1/\tau_j^{(1)}}.$$

Теперь, пользуясь леммой 2.3 и учитывая, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, отсюда получим

$$E_M^{(\gamma')}(S_{\mathbf{p}, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{\mathbf{p}, \tau^{(2)}} \gg M^{-r_1} (\log_2(M+1))^{(\nu-1)r_1} (\log_2(M+1))^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\tau_j^{(2)} - 1/\tau_j^{(1)})},$$

в случае $1 \leq \theta_j \leq \tau_2 < \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$. $\square$

Замечание 3.2. В случае $p_j = p$, $\tau_j^{(2)} = \tau_2$, $\theta_j = \theta$, $j = 1, 2, \dots, m$, из теоремы 3.2 следует точность оценки второго утверждения в теореме 3.1. Оценка снизу величины $E_M^{(\gamma')}(S_{\mathbf{p}, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{\mathbf{p}, \tau_2}$ при $1 < p < \tau_j^{(1)} < \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\max\{2, p\} < \tau_2 < \infty$ следует из [2, теорема 4].

Теорема 3.3. Пусть $1 < p < \tau_j^{(1)} < +\infty$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $\beta = \min\{2, p\}$, $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_{\nu} < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$. Тогда

$$\begin{aligned} M^{-r_1} (\log_2(M+1))^{(\nu-1)r_1 + \sum_{j=2}^{\nu} (1/\mu - 1/\theta_j)_+} (\log_2(M+1))^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/p - 1/\tau_j^{(1)})} &\ll E_M^{(\gamma')}(S_{\mathbf{p}, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_p \ll \\ &\ll M^{-r_1} (\log_2(M+1))^{(\nu-1)r_1 + \sum_{j=2}^{\nu} (1/\beta - 1/\theta_j)_+} (\log_2(M+1))^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/p - 1/\tau_j^{(1)})}, \end{aligned}$$

где $a_+ = \max\{0, a\}$.

Доказательство. Для доказательства правого неравенства в этой теореме, как и в теореме 3.1 рассматриваются случаи $1 \leq \theta_j \leq \beta < \infty$ и $1 < \beta < \theta_j \leq \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, и применяется теорема 2.2.

Для доказательства левого неравенства рассмотрим функцию

$$f_2(\mathbf{x}) = n^{-\sum_{j=2}^m 1\theta_j} \sum_{\langle \mathbf{s}, \gamma \rangle = n} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{-1/\tau_j^{(1)}} \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} \prod_{j=1}^m (k_j - 2^{s_j-1} + 1)^{1/p-1} e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}.$$

В силу непрерывности $f_2 \in L_{\mathbf{p}, \tau^{(1)}}^*(I^m)$. Далее, в силу соотношения (3.14) и леммы 2.2 получим

$$\left\| \left\{ 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle} \|\delta_{\mathbf{s}}(f_2)\|_{\mathbf{p}, \tau^{(1)}}^* \right\}_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\theta}} \ll n^{-\sum_{j=2}^m 1/\theta_j} \|\{1\}_{\langle \mathbf{s}, \gamma \rangle = n}\|_{l_{\theta}} \ll C_2.$$

Таким образом, функция $F_2 = C_2^{-1} f_2 \in S_{\mathbf{p}, \tau^{(1)}, \theta}^r B$. Известно, что

$$\left(\sum_{s_m=1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=1}^{\infty} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{\mu} \right)^{1/\mu} \ll \|f\|_p$$

для функции $f \in L_p(I^m)$, $1 < p < \infty$, $\mu = \max\{2, p\}$. Пользуясь этим неравенством, определением наилучшего приближения функции, леммой 2.2 и соотношением (3.11) при $\tau_j^{(1)} = p_j = p$, $j = 1, \dots, m$, получим

$$\begin{aligned} E_{Q_n}^\gamma(S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_p &\geq E_{Q_n}^\gamma(F_2)_p = \|F_2\|_p \gg n^{-\sum_{j=2}^m 1/\theta_j} \left(\sum_{\langle s, \gamma \rangle = n} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{(1/p-1/\tau_j^{(1)})\mu} \right)^{1/\mu} \\ &\gg n^{-\sum_{j=2}^m 1/\theta_j} 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=1}^m (1/p-1/\tau_j^{(1)})+m-1/\mu}. \end{aligned}$$

Выбирая натуральное число n так, чтобы $M \asymp 2^n n^{m-1}$ и учитывая, что $1 \leq \nu \leq m$, отсюда получим справедливость левого неравенства в утверждении теоремы. $\square$

Замечание 3.3. В случае $p = 2 < \tau_j^{(1)} < \infty$, $\theta_j = \theta$, для $j = 1, 2, \dots, m$, из теоремы 3.3 следует точность оценки в первом утверждении теоремы 3.1.

4. Оценки наилучших M -членных приближений в пространстве Лоренца.

Теорема 4.1. Пусть $1 < p \leq \tau_j^{(1)} < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, $1 < \tau_2 < p \leq 2$, или $2 < \tau_2 < p < \infty$, или $1 < \tau_2 \leq 2 < p < \infty$, $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\beta = \min\{2, \tau_2\}$.

1. Если $1 < \tau_2 \leq \theta \leq \infty$ и $r_1 > 0$ или $1 \leq \theta \leq \tau_2 < \infty$ и $r_1 > 1/\theta - 1/\tau_2$, то

$$e_M(S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{p, \tau_2} \ll M^{-r_1} (\log_2(M+1))^{(\nu-1)(r_1+1/\beta-1/\theta)} (\log_2(M+1))^{\sum_{j=1}^\nu (1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)})}.$$

2. Если $1 \leq \theta \leq \tau_2 < \infty$ и $0 < r_1 < 1/\theta - 1/\tau_2$, то

$$e_M(S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{p, \tau_2} \leq C M^{-r_1} (\log_2(M+1))^{(\nu-1)r_1} (\log_2(M+1))^{\sum_{j=1}^\nu (1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)})}.$$

Доказательство. Для числа $M \in \mathbb{N}$ существует такое натуральное число n , что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Рассмотрим частичную сумму

$$S_n^{\gamma'}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q_n^\gamma} a_{\mathbf{k}}(f) e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}$$

ряда Фурье функции f . Положим $n_0 = n + (\nu - 1) \log n$.

Для функции $f \in S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B$, $1 < \tau_2 < p \leq 2$, приближающий полином $P(\Omega_M, \mathbf{x})$ будем строить в виде

$$P(\Omega_M, \mathbf{x}) = R_n(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}),$$

где $R_n(\mathbf{x}) = S_n^{\gamma'}(f, \mathbf{x})$, а полином $Q(\mathbf{x})$ построим в процессе доказательства.

Для натурального числа l положим

$$S_l = \left(\sum_{l \leq \langle s, \gamma' \rangle < l+1} 2^{\langle s, r \rangle \theta} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^\theta \right)^{1/\theta}, \quad m_l^* = \left[2^n n^{\nu-1} 2^{-l} S_l^\theta \right] + 1,$$

где $[a]$ — целая часть числа a . Рассмотрим полином

$$R^*(\mathbf{x}) = \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{l \leq \langle s, \gamma' \rangle < l+1} \delta_s(f, \mathbf{x}) \quad (4.1)$$

и каждому натуральному числу $l \in [n, [n_0] + 1]$ сопоставим m_l^* «блоков» из внутренней суммы в (4.1) с наибольшими значениями

$$\|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \prod_{j=1}^m s_j^{1/\beta-1/\tau_j^{(1)}} \quad (4.2)$$

(см. [29]). Множество таких $\mathbf{s}$ обозначим символом G_l .

Пусть $\alpha_i(f, l)$, $i = 1, 2, \dots, m_l^*$, — числа (4.2), переставленные в убывающем порядке, для которых блоки $\delta_s(f, \mathbf{x})$ входят в сумму (4.1). Сумму полученных таким образом «блоков» $\delta_s(f, \mathbf{x})$ по всем $l \in [n, n_0]$ обозначим $Q(\mathbf{x})$.

Докажем, что количество гармоник $\mathbb{K}$, которые образуют полином $P(\Omega_M, \mathbf{x})$, не превышает по порядку M . Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\ll 2^n n^{\nu-1} + \sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^l m_l^* \ll 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{l \leq \langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle < l+1} 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle \theta} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^\theta \ll \\ &\ll 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+} 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle \theta} \|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^\theta \ll 2^n n^{\nu-1} \ll M. \end{aligned}$$

По свойству нормы

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{p, \tau_2}^* \leq \left\| f - \sum_{\langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle < n_0} \delta_s(f) \right\|_{p, \tau_2}^* + \|R^* - Q\|_{p, \tau^{(2)}} = J_1 + J_2. \quad (4.3)$$

Пользуясь следствием из теоремы 2.1, получим

$$J_1 = \|f - S_n^{\boldsymbol{\gamma}'}(f)\|_{p, \tau_2}^* \ll \left(\sum_{\langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle \geq n_0} \prod_{j=1}^m s_j^{(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} \left(\|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right)^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}. \quad (4.4)$$

Если $1 \leq \theta \leq \tau_2 < \infty$, то согласно неравенству Йенсена из (4.4) получим

$$\begin{aligned} J_1 &\ll \left(\sum_{\langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle \geq n_0} 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle \tau_2} \left(\|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right)^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} \sup_{\langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle \geq n_0} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\beta - 1/\tau_j^{(1)}} \times \\ &\times \left(\sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle \theta} \left(\|\delta_s(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right)^\theta \right)^{1/\theta} \sup_{\langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle \geq n_0} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\beta - 1/\tau_j^{(1)}}. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Согласно [4, лемма 2.1] имеет место неравенство

$$\sup_{\langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle \geq n_0} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\beta - 1/\tau_j^{(1)}} \ll 2^{-n_0 r_1} n_0^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})}. \quad (4.6)$$

Из неравенств (4.5) и (4.6) получим

$$J_1 \ll 2^{-n_0 r_1} n_0^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})}.$$

Учитывая, что $n_0 = n + (\nu - 1) \log n$ и $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, откуда получим

$$J_1 \ll (2^n n^{\nu-1})^{-r_1} (n+1)^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} \ll M^{-r_1} (\log(M+1))^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} \quad (4.7)$$

для функции $f \in S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B$ при $1 \leq \theta \leq \tau_2 < \infty$.

Оценим J_2 . Снова пользуясь следствием теоремы 2.1 и определением чисел $\alpha_i(f, l)$ будем иметь

$$\begin{aligned}
J_2 = \|R^* - Q\|_{p, \tau_2} &= \left\| \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{\substack{l \leq \langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle < l+1, \\ \mathbf{s} \notin G_l}} 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle \theta} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_{p, \tau_2}^{\theta} \leq \\
&\leq C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{\substack{l \leq \langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle < l+1, \\ \mathbf{s} \notin G_l}} \prod_{j=1}^m s_j^{(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} \left(\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^* \right)^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} = C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{i > m_l^*} \alpha_{i_l}^{\tau_2}(f, l) \right)^{1/\tau_2}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

В силу неравенства

$$\alpha_i(f, l) \leq C i^{-1/\theta} 2^{-lr_1} l^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} S_l,$$

справедливого для $i = 1, \dots, \tilde{m}_l$, где $\tilde{m}_l$ — количество элементов множества $\sigma_l = \{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^m : l \leq \langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle < l+1\}$ (см. доказательство в [25, с. 92]), и учитывая, что $\theta < \tau_2$, находим

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{i > m_l^*} \left(i^{-1/\theta} 2^{-lr_1} l^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} S_l \right)^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} = \\
&= C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-lr_1 \tau_2} l^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} S_l^{\tau_2} \sum_{i > m_l^*} i^{-\tau_2/\theta} \right)^{1/\tau_2} \leq \\
&\leq C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-lr_1 \tau_2} l^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} S_l^{\tau_2} (m_l^*)^{1-\tau_2/\theta} \right)^{1/\tau_2}. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Теперь, подставляя значения чисел m_l^* из (4.9), получим

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-lr_1 \tau_2} l^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} S_l^{\tau_2} (2^n n^{\nu-1} 2^{-l} S_l^{\theta})^{1-\tau_2/\theta} \right)^{1/\tau_2} \leq \\
&\leq C (2^n n^{\nu-1})^{1/\tau_2 - 1/\theta} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-l(r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta)\tau_2} l^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} S_l^{\theta} \right)^{1/\tau_2}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Если $\theta < \tau_2$, то $1/\tau_2 - 1/\theta < 0$. Поэтому, если $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta > 0$, то получим

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq C (2^n n^{\nu-1})^{1/\tau_2 - 1/\theta} 2^{-n(r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta)} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} S_l^{\theta} \right)^{1/\tau_2} = \\
&= C (2^n n^{\nu-1})^{1/\tau_2 - 1/\theta} 2^{-n(r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta)} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{l \leq \langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle < l+1} 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle \theta} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^{\theta} \right)^{1/\tau_2} \leq \\
&\leq C \cdot 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/\tau_2 - 1/\theta)} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle \theta} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^{\theta} \right)^{1/\tau_2} \tag{4.11}
\end{aligned}$$

для функции $f \in S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^{\mathbf{r}} B$, $1 \leq \theta < \tau_2 < \infty$ и $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta > 0$.

Если $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta < 0$, то из оценки (4.10) получим

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq C(2^n n^{\nu-1})^{1/\tau_2-1/\theta} 2^{-n_0(r_1+1/\tau_2-1/\theta)} n_0^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} S_l^\theta \right)^{1/\tau_2} \leq \\
&\leq C(2^n n^{\nu-1})^{1/\tau_2-1/\theta} 2^{-n_0(r_1+1/\tau_2-1/\theta)} n_0^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle \theta} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^\theta \right)^{1/\tau_2}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Так как согласно выбору числа n_0 верно равенство

$$2^{-n_0(r_1+1/\tau_2-1/\theta)} = (2^n n^{\nu-1})^{-(r_1+1/\tau_2-1/\theta)},$$

то из (4.12) следует, что

$$J_2 \leq C(2^n n^{\nu-1})^{-r_1} (n + (\nu-1) \log n)^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle \theta} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{p, \tau^{(1)}}^\theta \right)^{1/\tau_2}.$$

Таким образом,

$$J_2 \leq C(2^n n^{\nu-1})^{-r_1} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \quad (4.13)$$

для функции $f \in S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B$, $1 \leq \theta < \tau_2 < \infty$ и $0 < r_1 < 1/\theta - 1/\tau_2$.

Теперь из неравенств (4.3), (4.7) и (4.11) получим

$$\begin{aligned}
\|f - P(\Omega_M)\|_{p, \tau_2}^* &\leq \\
&\leq C \left\{ M^{-r_1} (\log(M+1))^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} + 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/\tau_2-1/\theta)} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \right\} \leq \\
&\leq CM^{-r_1} (\log(M+1))^{(\nu-1)(r_1+1/\tau_2-1/\theta)} (\log(M+1))^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}
\end{aligned}$$

для функции $f \in S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B$ в случае $1 \leq \tau_2 \leq p \leq 2$, $1 \leq \theta < \tau_2 < \infty$ и $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta > 0$. Следовательно,

$$e_M(S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{p, \tau_2} \leq CM^{-r_1} (\log(M+1))^{(\nu-1)(r_1+1/\tau_2-1/\theta)} (\log(M+1))^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}$$

в случае $1 \leq \theta < \tau_2 < \infty$ и $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta > 0$.

Далее из неравенств (4.3), (4.7) и (4.13) находим

$$\begin{aligned}
\|f - P(\Omega_M)\|_{p, \tau_2}^* &\leq C \left\{ M^{-r_1} (\log(M+1))^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} + (2^n n^{\nu-1})^{-r_1} n^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \right\} \leq \\
&\leq CM^{-r_1} (\log(M+1))^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}
\end{aligned}$$

для функции $f \in S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B$, $1 \leq \theta < \tau_2 < \infty$ и $0 < r_1 < 1/\theta - 1/\tau_2$. Следовательно,

$$e_M(S_{p, \tau^{(1)}, \theta}^r B)_{p, \tau_2} \leq CM^{-r_1} (\log(M+1))^{\sum_{j=1}^{\nu} (1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}$$

в случае $1 \leq \theta < \tau_2 < \infty$ и $0 < r_1 < 1/\theta - 1/\tau_2$. □

Замечание 4.1. Так как в случае $1 \leq \theta < \tau_2 < \infty$, имеем $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta < r_1$, то оценка в первом пункте теоремы 4.1 лучше, чем оценка (3.1) в теореме 3.1 при $\theta_1 = \dots = \theta_m = \theta$.

Основные результаты статьи были представлены в докладе на Международной Воронежской зимней математической школе (27 января — 1 февраля 2023 г.; см. [5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акишев Г. Приближение функциональных классов в пространствах смешанной нормой// Мат. сб. — 2006. — 197, № 8. — С. 17–40.
2. Акишев Г. О порядках приближения функций многих переменных в пространстве Лоренца// Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — 22, № 4. — С. 1–17.
3. Акишев Г. О точности оценок наилучшего M -членного приближения класса Бесова// Сиб. электрон. мат. изв. — 2010. — 7. — С. 255–274.
4. Акишев Г. Об оценках порядка наилучших M -членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца—Караматы// Уфим. мат. ж. — 2023. — 15, № 1.
5. Акишев Г. Об оценках наилучших n -членных приближений классов функций в анизотропном пространстве Лоренца// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронежская зимняя математическая школа) (Воронеж, 27 января — 1 февраля 2023 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023. — С. 24–25.
6. Аманов Т. И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B(R_n)$ и $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ ($0 \leq x_j \leq 2\pi$, $j = 1, \dots, n$)// Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1965. — 77. — С. 5–34.
7. Бабенко К. И. О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами// Докл. АН СССР. — 1960. — № 5. — С. 982–985.
8. Базарханов Б. Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной тригонометрическими полиномами// в кн.: Современные проблемы теории функций. Мат. Всесоюз. школы по теории функций. — Баку: АзГУ, 1977. — С. 70–75.
9. Базарханов Д. Б. Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I// Тр. мат. ин-та им. В. А Стеклова РАН. — 2010. — 269. — С. 8–30.
10. Базарханов Д. Б. Нелинейные тригонометрические приближения классов функций многих переменных// Тр. мат. ин-та им. В. А Стеклова РАН. — 2016. — 293. — С. 8–42.
11. Бекмаганбетов К. А. О порядках приближения класса Бесова в метрике метрике анизотропных пространств Лоренца// Уфим. мат. ж. — 2009. — 1, № 2. — С. 9–16.
12. Белинский Э. С. Приближение «плавающей» системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной// в кн.: Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль, 1988. — С. 16–33.
13. Белинский Э. С. Приближение «плавающей» системой экспонент на классах гладких периодических функций// Мат. сб. — 1987. — 132, № 1. — С. 20–27.
14. Бугров Я. С. Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной// Мат. сб. — 1964. — 64, № 3. — С. 410–418.
15. Галеев Э. М. Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными// Мат. сб. — 1978. — 23, № 2. — С. 197–212.
16. Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами// Усп. мат. наук. — 1974. — 29, № 3. — С. 161–178.
17. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной с декомпозиционной точки зрения// Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1989. — 187. — С. 143–161.
18. Майоров В. Е. Тригонометрические поперечники соболевских классов W_p^r в пространстве L_q // Мат. заметки. — 1986. — 40, № 2. — С. 161–173.
19. Митягин Б. С. Приближение функций в пространствах L^p и C на торе// Мат. сб. — 1962. — 58, № 4. — С. 397–414.
20. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.
21. Никольский С. М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера// Сиб. мат. ж. — 1963. — 4, № 6. — С. 1342–1364.
22. Никольская Н. С. Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p // Сиб. мат. ж. — 1974. — 15, № 2. — С. 395–412.
23. Нурсултанов Е. Д. Неравенства разных метрик С. М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца// Тр. мат. ин-та АН СССР. — 2006. — 255. — С. 1–18.
24. Романюк А. С. Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. ж. — 1991. — 43, № 10. — С. 1398–1408.

25. Романюк А. С. Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных// Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — 67, № 2. — С. 61–100.
26. Романюк А. С. Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения классов функций многих переменных// Мат. заметки. — 2013. — 94, № 3. — С. 401–415.
27. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов// Докл. АН СССР. — 1955. — 102, № 1. — С. 37–40.
28. Теляковский С. А. Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами// Мат. сб. — 1964. — 63, № 3. — С. 426–444.
29. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной// Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1986. — 178. — С. 3–112.
30. Темляков В. Н. Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости// Мат. сб. — 2015. — 206, № 11. — С. 131–1160.
31. Тухомиров В. М. Теория приближений// Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — 1987. — 14. — С. 103–270.
32. Akishev G. Estimations of the best M -term approximations of functions in the Lorentz space with constructive methods// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2017. — 3. — P. 13–26.
33. Akishev G. On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz–Zygmund space/ [arXiv:2106.07188](https://arxiv.org/abs/2106.07188) [math.CA].
34. Bazarkhanov D. B., Temlyakov V. N. Nonlinear tensor product approximation of functions/// [arXiv:1409.1403](https://arxiv.org/abs/1409.1403) [stat.ML].
35. Blozinski A. P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms// Trans. Am. Math. Soc. — 1981. — 263. — P. 146–167.
36. De Vore R. A. Nonlinear approximation// Acta Numerica. — 1998. — 7. — P. 51–150.
37. Dinh Dũng, Temlyakov V. N., Ulrich T. Hyperbolic Cross Approximation. — Basel–Berlin: Birkhäuser, Springer, 2018.
38. Hansen M., Sickel W. Best m -term approximation and Sobolev–Besov spaces of dominating mixed smoothness the case of compact embeddings// Constr. Approx. — 2012. — 36, № 1. — P. 1–51.
39. Makovoz Y. On trigonometric n -widths and their generalization// J. Approx. Theory. — 1984. — 41, № 4. — P. 361–366.
40. Schmeisser H.-J., Sickel W. Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses// J. Approx. Theory. — 2004. — 128. — P. 115–150.
41. Temlyakov V. N. Multivariate Approximation// Cambridge Univ. Press — 2018.
42. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness// Constr. Approx. — 2017. — 45, № 3. — P. 467–495.
43. Van Kien Nguyen, Van Dung Nguyen Best n -term approximation of diagonal operators and application to function spaces with mixed smoothness// Anal. Math. — 2022. — 48. — P. 1127–1152.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Акишев Габдолла

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,

Казахстанский филиал, Астана, Республика Казахстан

E-mail: akishev_g@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 20–40
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-20-40

УДК 519.218.7

РЕКОНСТРУКЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ТРАЕКТОРИЙ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

© 2023 г. Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. С. МАЗМАНИШВИЛИ

*Посвящается светлой памяти нашего наставника
академика Национальной академии наук Украины А. И. Ахизера (1911–2000)*

Аннотация. Изучаются характеристические функции $Q_J(-i\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, случайных величин, определяемых значениями квадратичных функционалов $J[\tilde{x}(t)]$ на пространстве $\mathbb{L}_2[0, T]$ траекторий однородных гауссовских случайных процессов. В работе обоснован метод вычисления таких характеристических функций, названный в работе реконструкцией, применение которой не связано с использованием известного метода Карунена—Лоэва—Пугачева.

Ключевые слова: гауссовский случайный процесс, интегральный квадратичный функционал, корреляционная функция, самосопряженный оператор, характеристическая функция.

RECONSTRUCTION OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF QUADRATIC FUNCTIONALS ON TRAJECTORIES OF GAUSSIAN STOCHASTIC PROCESSES

© 2023 Yu. P. VIRCHENKO, A. S. MAZMANISHVILI

ABSTRACT. In this paper, we examine the characteristic functions $Q_J(-i\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, of stochastic variables determined by the values of the quadratic functionals $J[\tilde{x}(t)]$ on the space $\mathbb{L}_2[0, T]$ of trajectories of homogeneous Gaussian stochastic processes. We justify a method for calculating such characteristic functions, called reconstruction in the work, the application of which is not related to the use of the well-known Karhunen–Loeve–Pugachev method.

Keywords and phrases: Gaussian stochastic process, integral quadratic functional, correlation function, self-adjoint operator, characteristic function.

AMS Subject Classification: 60G15

1. Введение. В задачах статистической радиофизики (см. [9]) и квантовой оптики (см. [17]), связанных с приемом сигналов на фоне естественных случайных помех, возникает необходимость вычисления распределения вероятностей случайных величин, которые представляются значениями функционалов $J[\tilde{x}(t) + \varphi(t)]$ на функциях, представляющих собой сумму реализаций случайного процесса $\{\tilde{x}(t); t \in \mathbb{R}\}$ и «неслучайной» функции $\varphi(t)$. (Здесь и далее мы помечаем знаком «тильда» случайные математические объекты, т.е. элементы некоторого вероятностного пространства.) Для этого процесса математическое ожидание $E \tilde{x}(t)$ равно нулю. Первое слагаемое мы в дальнейшем называем «шумом», а второе — «сигнальной функцией». Для математической определенности, будем считать, что оба слагаемых являются измеримыми, локально квадратично интегрируемыми функциями, т.е. элементами пространства $\mathbb{L}_{2,loc}(\mathbb{R})$.

Функционалы $J[\cdot]$, которые представляют интерес для задач статистической радиофизики и квантовой оптики, как правило, являются квадратичными. Это связано с тем, что регистрация электромагнитного излучения происходит посредством поглощения его энергии, которая зависит квадратичным образом от амплитуды самого электромагнитного поля. Случайные же процессы $\{\tilde{x}(t); t \in \mathbb{R}\}$, в терминах которых ставятся задачи в указанных областях математической физики, считаются, как правило, гауссовскими (см., например, [14]); более того, они мыслятся как элементарные гауссовские процессы (см. [13]). Моделирование шумовой составляющей посредством гауссовских процессов обусловлено ее малостью в физическом смысле.

Впервые описанный подход к решению некоторых вопросов статистической радиофизики был осуществлен в [15, 23]. Впоследствии он получил развитие в большом числе работ. Целью в этих работах являлось вычисление распределения вероятностей для соответствующего функционала $J[\cdot]$. Решение такой задачи состоит из двух частей: вычисления соответствующей характеристической функции $Q_J(-i\lambda)$, что сводится к вычислению интеграла от $\exp(i\lambda J[\tilde{x}(t)])$ в функциональном пространстве $\mathbb{L}_2([0, T])$ при некотором фиксированном значении $T > 0$, и последующего вычисления плотности распределения вероятностей. Вторая задача представляет собой вычисление интеграла в комплексной плоскости параметра λ от аналитической функции. Такое вычисление осуществимо, как правило, лишь приближенно и представляет собой самостоятельную математическую задачу. В случае, если интегральное ядро принадлежит $\mathbb{L}_2([0, T]) \times \mathbb{L}_2([0, T])$, то для вычисления интеграла в функциональном пространстве применяются методы анализа в гильбертовом пространстве. Такой подход был развит рядом авторов [12, 16, 18, 22]. В процессе анализа вычисляется детерминант Фредгольма интегрального оператора с ядром $(KV)(t, t')$, где $K(t, t')$ — корреляционная функция случайного процесса $\{\tilde{x}(t); t \in \mathbb{R}\}$. Этот оператор определяет характеристическую функцию случайной величины $J[\tilde{x}(t)]$. Для определения же характеристической функции суммарного случайного процесса $\langle \tilde{x}(t) + \varphi(t); t \in [0, T] \rangle$ на конечном интервале $[0, T]$ необходимо решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $(VK)(t, t')$.

В настоящей работе мы даем математическое обоснование метода вычисления характеристических функций $Q_J(-i\lambda)$ квадратичных функционалов, который не связан с методом Карунена—Лозва—Пугачева (см. [12, 16, 18]), основанным на вычислении интеграла в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2([0, T])$ посредством разложения траекторий $\tilde{x}(t)$ случайного процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ по собственным векторам в пространстве $\mathbb{L}_2([0, T])$ над вещественным полем. В настоящей работе анализируется метод, который использует прямые алгебраические методы и свойства аналитической зависимости от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ изучаемых характеристических функций как функций комплексного переменного. При этом мы ограничиваемся только случаем, когда сигнальная составляющая $\varphi(t)$ отсутствует. Кроме того, используем довольно сильное предположение о непрерывной зависимости интегрального ядра $V(t, t')$.

2. Гауссовские случайные процессы. Пусть $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ — случайный процесс на $[0, T]$, для которого $E\tilde{x}(t) = 0$. Такие процессы мы называем однородными. Здесь и далее функционал E от траекторий рассматриваемого случайного процесса представляет математическое ожидание по его вероятностной мере.

Каждый случайный процесс $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$, обладающий измеримыми с вероятностью 1 траекториями, полностью характеризуется своим характеристическим функционалом

$$\Phi[u(t)] \equiv E \exp \left(i \int_0^T u(t) \tilde{x}(t) dt \right), \quad (2.1)$$

где $u(t)$ — произвольная непрерывная (пробная) функция на $[0, T]$. Имея в виду цель настоящей работы, дадим следующее определение гауссовского процесса.

Определение 2.1. Случайный процесс $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$, имеющий с вероятностью 1 измеримые по t траектории и нулевое математическое ожидание $E\tilde{x}(t) = 0$ и обладающий ограниченной измеримой корреляционной функцией $K(t_1, t_2) = E\tilde{x}(t_1)\tilde{x}(t_2)$, которая, согласно своему определению, симметрична, будем называть гауссовским, если его характеристический функционал

определяется формулой

$$\Phi[u(t)] = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{[0,T]^2} K(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right). \quad (2.2)$$

Относительно свойств рассматриваемых далее гауссовских процессов сделаем следующие предположения, пожертвовав общностью построений. Мы предположим, что они обладают непрерывными с вероятностью 1 траекториями. Более того, предположим, что корреляционная функция процесса $K(t_1, t_2)$ непрерывна по $\langle t_1, t_2 \rangle \in [0, T]^2$. Тогда наверняка все траектории непрерывны с вероятностью 1 и, следовательно, принадлежат $\mathbb{L}_2([0, T])$, т.е.

$$\int_0^T \tilde{x}^2(t) dt < \infty,$$

а симметричная функция $K(t_1, t_2)$ принадлежит $\mathbb{L}_2([0, T]) \times \mathbb{L}_2([0, T])$, ввиду того, что

$$\int_{[0,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty.$$

В этом случае интегральный оператор K , ядром которого является функция $K(t_1, t_2)$,

$$(K\varphi)(t) = \int_0^T K(t, t') \varphi(t') dt',$$

является оператором Гильберта—Шмидта (см. [20]) из операторного пространства с конечной нормой, определяемой формулой

$$N^2[K] = \text{Sp } KK^T = \int_{[0,T]^2} K(t_1, t_2) K(t_2, t_1) dt_2 dt_1.$$

Согласно определению (2.1), функция $K(t_1, t_2)$ положительно определена, так как для любой функции $u(t) \in \mathbb{L}_2([0, T])$ имеет место равенство

$$\int_{[0,T]^2} K(t_1, t_2) u(t_1) u(t_2) dt_1 dt_2 = \int_{[0,T]^2} \left(\mathbb{E} [\tilde{x}(t_1) \tilde{x}(t_2)] \right) u(t_1) u(t_2) dt_1 dt_2 = \mathbb{E} \left| \int_0^T \tilde{x}(t) u(t) dt \right|^2 \geq 0,$$

что составляет предмет теоремы Бохнера—Хинчина.

Из определения 2.1 следует, что функционал $\Phi[u(t)]$ обладает вариационными производными любого порядка относительно *пробной* функции $u(t)$ в точке $u(t) \equiv 0$ функционального пространства $C[0, T]$ непрерывных на $[0, T]$ функций. Вычисляя эти производные, последовательных порядков $n \in \mathbb{N}$, находим, что для выполнимости (2.2), необходимо выполнение равенств

$$\mathbb{E} \tilde{x}(t_1) \dots \tilde{x}(t_{2n-1}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (2.3)$$

$$\mathbb{E} \tilde{x}(t_1) \dots \tilde{x}(t_{2n}) = \sum_{s \in \mathfrak{D}_n} \prod_{\{j,k\} \in s} K(t_j, t_k), \quad (2.4)$$

где суммирование производится по классу $\mathfrak{D}_n$ всех парных разбиений s множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Равенства (2.3), (2.4) является также достаточным условием для выполнимости формулы (2.2), что следует из ограниченности функции $K(t_1, t_2)$ и комбинаторной формулы

$$|\mathfrak{D}_n| = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Таким образом, эти равенства является эквивалентным определением гауссовского процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ при сделанных предположениях относительно его свойств.

Введем обозначения

$$\Psi(A) = \mathbb{E} \left(\prod_{j \in A} \tilde{x}(t_j) \right), \quad A \subset I_m = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Тогда из (2.3), (2.4) следует рекуррентное соотношение

$$\Psi(I_{m+2}) = K(t_{m+1}, t_{m+2})\Psi(I_m) + \sum_{\substack{\langle j, k \rangle \in I_m^2, \\ j \neq k}} K(t_j, t_{m+1})K(t_l, t_{m+2})\Psi(I_m \setminus \{j, k\})|.$$

Оно эквивалентно равенствам (2.3) и (2.4), что устанавливается индукцией по m на основе условий $\Psi(\{1\}) = \mathbb{E} \tilde{x}(t_1) = 0$, $\Psi(\{1, 2\}) = \mathbb{E} \tilde{x}(t_1)\tilde{x}(t_2) = K(t_1, t_2)$. Из равенств (2.3), (2.4) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть $P(x_1, \dots, x_n)$ — полином от $x_1, \dots, x_n$. Тогда имеет место равенство

$$\mathbb{E} \tilde{x}(t_{n+1})P(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_n)) = \sum_{j=1}^n K(t_j, t_{n+1}) \mathbb{E} \left(\frac{\partial P}{\partial x_j} \right)_{x_k = \tilde{x}(t_k)}. \quad (2.5)$$

Доказательство следует из линейности функционала $\mathbb{E}(\cdot)$ и формул (2.3) и (2.4).

Следствие 2.1. Имеет место формула

$$\Psi(I_{n+1}) = \sum_{j=1}^n K(t_j, t_{n+1})\Psi(I_n \setminus \{j\}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Доказательство. Формула (2.6) получается из (2.5) при $P(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$. $\square$

Следствие 2.2. Имеет место формула

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \tilde{x}(t_{m+2})\tilde{x}(t_{m+1})P(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m)) = \\ & = K(t_{m+2}, t_{m+1})P(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m)) + \sum_{\substack{\langle j, k \rangle \in I_m^2, \\ j \neq k}} K(t_{m+2}, t_j)K(t_{m+1}, t_k) \mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{x_l = \tilde{x}(t_l)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Доказательство. Подставим $n = m + 1$ в (2.5) и заменим функцию $P(x_1, \dots, x_n)$ на $x_{m+1}P(x_1, \dots, x_m)$; после отделения слагаемого с $j = m + 1$ в правой части получившегося равенства повторно применим формулу (2.5) к каждому слагаемому с $j = 1, \dots, m$. $\square$

Следствие 2.3. Из формулы (2.6) следует равенство (2.4).

Доказательство. Заменим $n = m + 1$ в формуле (2.6),

$$\Psi(I_{m+2}) = \sum_{j=1}^{m+1} K(t_j, t_{m+2})\Psi(I_{m+1} \setminus \{j\}).$$

Затем применим формулу (2.6) к каждому из слагаемых, стоящих в правой части, с $j \neq m + 1$:

$$\Psi(I_{m+1} \setminus \{j\}) = \sum_{\substack{k=1: \\ k \neq j}}^m K(t_k, t_{m+1})\Psi(I_m \setminus \{j, k\}).$$

Отделив слагаемое с $j = m + 1$ в правой части, находим

$$\Psi(I_{m+2}) = K(t_{m+1}, t_{m+2})\Psi(I_m) + \sum_{j=1}^m K(t_j, t_{m+2}) \sum_{\substack{k=1: \\ k \neq j}}^m K(t_k, t_{m+1})\Psi(I_m \setminus \{j, k\}). \quad \square$$

Следствие 2.4. Для того чтобы выполнялись равенства (2.3) и (2.4) при условии $E\tilde{x}(t) = 0$, $E\tilde{x}(t_1)\tilde{x}(t_2) = K(t_1, t_2)$, необходимо и достаточно чтобы при тех же условиях имело место равенство (2.6).

Доказательство. Необходимость справедливости утверждения дает следствие 2.1. Достаточность получается рассуждением индукцией по m на основании следствия 2.3: применяем формулу (2.6), переходя от значения m к значению $m + 2$, стартовав на начальном шаге от условий $E\tilde{x}(t) = 0$ при нечетном m , либо $E\tilde{x}(t_1)\tilde{x}(t_2) = K(t_1, t_2)$ при m четном. $\square$

3. Комплексификация гауссовского процесса. Этот и следующий разделы посвящены обоснованию предлагаемого в работе метода расчета характеристических функций случайных величин, которые определяются значениями функционалов $J[\tilde{x}(t)]$ от траекторий $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, T]$. Здесь мы переформулируем определение гауссовского процесса, данное в предыдущем разделе, таким образом, чтобы можно было оперировать его траекториями как элементами гильбертова пространства $\mathbb{L}_2[0, T]$ над полем комплексных чисел. Такая переформулировка основана на комплексификации процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$, т.е. на переходе от этого процесса к эквивалентному ему комплекснозначному гауссовскому случайному процессу $\{\tilde{z}(t); t \in [0, T]\}$.

Введем, на основе процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ комплекснозначный случайный процесс $\{\tilde{z}(t); t \in [0, T]\}$ с траекториями $\tilde{z}(t) = \tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t)$, где случайный процесс $\{\tilde{y}(t); t \in [0, T]\}$ статистически эквивалентен процессу $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$, то есть является гауссовским с нулевым средним значением $E\tilde{y}(t) = 0$ и с той же самой корреляционной функцией $K(t_1, t_2)$. Кроме того, потребуем чтобы процесс $\{\tilde{y}(t); t \in [0, T]\}$ был статистически независим от процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$.

На основе свойств процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$, выражаемых равенствами (2.3), (2.4), доказываются следующие свойства процесса $\{\tilde{z}(t); t \in [0, T]\}$ (см. [21]), которые определяют его однозначным образом. С точки зрения квантовой теории поля и/или квантовой статистической механики эти равенства имеют смысл так называемых *правил Вика* в применении к гауссовскому случайному процессу (см. [21]).

Теорема 3.1. Для математических ожиданий случайного процесса $\{\tilde{z}(t); t \in [0, T]\}$ справедливы формулы

$$E\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m)\tilde{z}^*(t'_1) \dots \tilde{z}^*(t'_n) = 0, \quad m \neq n, \quad m, n \in \mathbb{N}; \quad (3.1)$$

$$E\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_n)\tilde{z}^*(t'_1) \dots \tilde{z}^*(t'_n) = \sum_{P \in \mathbb{P}_n} \prod_{j=1}^n E\tilde{z}(t_j)\tilde{z}^*(t'_{P_j}), \quad (3.2)$$

где суммирование производится по всем подстановкам P группы подстановок $\mathbb{P}_n$.

Доказательство. Доказательство состоит из трех частей.

I. Сначала установим равенство

$$E\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m) = 0.$$

Воспользовавшись тем, что $E\tilde{z}(t) = E(\tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t)) = 0$, запишем

$$E\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m)\tilde{z}(t_{m+1}) = E\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m)\tilde{x}(t_{m+1}) + iE\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m)\tilde{y}(t_{m+1}). \quad (3.3)$$

Ввиду статистической независимости процессов $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ и $\{\tilde{y}(t); t \in [0, T]\}$ математические ожидания по ним допустимо производить независимо: $E(\cdot) = E_x(\cdot)E_y(\cdot)$. Применим формулу (2.5) поочередно к каждому из слагаемых. Первое математическое ожидание дает

$$E\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m)\tilde{x}(t_{m+1}) = E_x P_x(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m))\tilde{x}(t_{m+1}) = \sum_{j=1}^m K(t_j, t_m) E_x \left(\frac{\partial P_x}{\partial x_j} \right)_{x_k = \tilde{x}(t_k)},$$

где $P_x(x(t_1), \dots, x(t_m)) = E_y \tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m)$, и поэтому

$$E\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m)\tilde{x}(t_{m+1}) = \sum_{j=1}^m K(t_j, t_m) E_x E_y \prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^m \tilde{z}(t_k) = \sum_{j=1}^m K(t_j, t_m) E \prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^m \tilde{z}(t_k).$$

Точно так же, второе математическое ожидание дается формулой

$$\mathbb{E} \tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m) \tilde{y}(t_{m+1}) = \mathbb{E}_y P_y(\tilde{y}(t_1), \dots, \tilde{y}(t_m)) \tilde{y}(t_{m+1}) = \sum_{j=1}^m K(t_j, t_m) \mathbb{E}_y \left(\frac{\partial P_y}{\partial y_j} \right)_{y_k = \tilde{y}(t_k)},$$

где $P_y(y(t_1), \dots, y(t_m)) = \mathbb{E}_x \tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m)$, и поэтому

$$\mathbb{E} \tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m) \tilde{y}(t_{m+1}) = i \sum_{j=1}^m K(t_j, t_m) \mathbb{E}_y \mathbb{E}_x \prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^m \tilde{z}(t_k) = i \sum_{j=1}^m K(t_j, t_m) \mathbb{E} \prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^m \tilde{z}(t_k).$$

Подстановка при $m \geq 1$ полученных выражений в (3.3) дает

$$\mathbb{E} \tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m) \tilde{z}(t_{m+1}) = \sum_{j=1}^m (K(t_j, t_m) - K(t_j, t_m)) \mathbb{E} \prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^m \tilde{z}(t_k) = 0.$$

II. Положим, теперь, для определенности, что $m > n$ в формуле (3.1) и докажем ее справедливость методом спуска по n от значения $n = m - 1$ к значению $n = 0$. Преобразуем математическое ожидание таким же образом, как это было сделано выше:

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= \mathbb{E} \tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m) \tilde{z}^*(t'_1) \dots \tilde{z}^*(t'_{n-1}) \tilde{z}^*(t'_n) = \\ &= \mathbb{E} [\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m) \tilde{z}^*(t'_1) \dots \tilde{z}^*(t'_{n-1}) \tilde{x}(t'_n)] - i \mathbb{E} [\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m) \tilde{z}^*(t'_1) \dots \tilde{z}^*(t'_{n-1}) \tilde{y}(t'_n)] = \\ &= \mathbb{E}_x P_x(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m), \tilde{x}(t'_1), \dots, \tilde{x}(t'_{n-1})) \tilde{x}(t'_n) - \\ &\quad - i \mathbb{E}_y P_y(\tilde{y}(t_1), \dots, \tilde{y}(t_m), \tilde{y}(t'_1), \dots, \tilde{y}(t'_{n-1})) \tilde{y}(t'_n), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где полиномы P_x и P_y определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_x(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m), \tilde{x}(t'_1), \dots, \tilde{x}(t'_{n-1})) &= \mathbb{E}_y [\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m), \tilde{z}^*(t'_1) \dots \tilde{z}^*(t'_{n-1})], \\ P_y(\tilde{y}(t_1), \dots, \tilde{y}(t_m), \tilde{y}(t'_1), \dots, \tilde{y}(t'_{n-1})) &= \mathbb{E}_x [\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m), \tilde{z}^*(t'_1) \dots \tilde{z}^*(t'_{n-1})]. \end{aligned}$$

Согласно (2.5) первое слагаемое равно

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x P_x(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m), \tilde{x}(t'_1), \dots, \tilde{x}(t'_{n-1})) \tilde{x}(t'_n) &= \\ &= \sum_{j=1}^m K(t_j, t'_n) \mathbb{E}_x \left[\left(\frac{\partial P_x}{\partial x_j} \right)_{\substack{x_k = \tilde{x}(t_k), \\ x'_k = \tilde{x}(t'_k)}} \right] + \sum_{j=1}^{n-1} K(t'_j, t'_n) \mathbb{E}_x \left[\left(\frac{\partial P_x}{\partial x'_j} \right)_{\substack{x_k = \tilde{x}(t_k), \\ x'_k = \tilde{x}(t'_k)}} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^m K(t_j, t'_n) \mathbb{E} \left[\prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^m \tilde{z}(t_k) \right] \left[\prod_{k=1}^{n-1} \tilde{z}^*(t'_k) \right] + \sum_{j=1}^{n-1} K(t'_j, t'_n) \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^m \tilde{z}(t_k) \right] \left[\prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^{n-1} \tilde{z}^*(t'_k) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Точно так же получается выражение для математического ожидания

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_y P_y(\tilde{y}(t_1), \dots, \tilde{y}(t_m), \tilde{y}(t'_1), \dots, \tilde{y}(t'_{n-1})) \tilde{y}(t'_n) &= \\ &= \sum_{j=1}^m K(t_j, t'_n) \mathbb{E} \left[\prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^m \tilde{z}(t_k) \right] \left[\prod_{k=1}^{n-1} \tilde{z}^*(t'_k) \right] - i \sum_{j=1}^{n-1} K(t'_j, t'_n) \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^m \tilde{z}(t_k) \right] \left[\prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^{n-1} \tilde{z}^*(t'_k) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Правые части формул (3.5) и (3.6) определяются математическими ожиданиями вида $E_{n-1,m}$. Последовательно повторяя описанные построения, для выражений $E_{n-1,m}$, $E_{n-2,m}$, ..., на j -м шаге получим

$$\begin{aligned}
E_{n-j,m} &= \mathbb{E} \tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m) \tilde{z}^*(t'_1) \dots \tilde{z}^*(t'_{n-j}) = \\
&= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^m \tilde{z}(t_j) \right] \left[\prod_{j=1}^{n-j-1} \tilde{z}^*(t'_j) \right] \tilde{x}(t'_{n-j}) - i \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^m \tilde{z}(t_j) \right] \left[\prod_{j=1}^{n-j-1} \tilde{z}^*(t'_j) \right] \tilde{y}(t'_{n-j}) = \\
&= \mathbb{E}_x P_x(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m), \tilde{x}(t'_1), \dots, \tilde{x}(t'_{n-j-1})) \tilde{x}(t'_{n-j}) - \\
&\quad - i \mathbb{E}_y P_y(\tilde{y}(t_1), \dots, \tilde{y}(t_m), \tilde{y}(t'_1), \dots, \tilde{y}(t'_{n-j-1})) \tilde{y}(t'_{n-j}), \quad (3.7)
\end{aligned}$$

где полиномы P_x и P_y определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
P_x(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m), \tilde{x}(t'_1), \dots, \tilde{x}(t'_{n-j-1})) &= \mathbb{E}_y [\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m), \tilde{z}^*(t'_1) \dots \tilde{z}^*(t'_{n-j-1})], \\
P_y(\tilde{y}(t_1), \dots, \tilde{y}(t_m), \tilde{y}(t'_1), \dots, \tilde{y}(t'_{n-j-1})) &= \mathbb{E}_x [\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m), \tilde{z}^*(t'_1) \dots \tilde{z}^*(t'_{n-j-1})].
\end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое равно

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x P_x(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m), \tilde{x}(t'_1), \dots, \tilde{x}(t'_{n-j-1})) \tilde{x}(t'_{n-j}) = \\
&= \sum_{j=1}^m K(t_j, t'_{n-j}) \mathbb{E}_x \left[\left(\frac{\partial P_x}{\partial x_j} \right)_{x_k=\tilde{x}(t_k), x'_k=\tilde{x}(t'_k)} \right] + \sum_{j=1}^{n-j-1} K(t'_j, t'_{n-j}) \mathbb{E}_x \left[\left(\frac{\partial P_x}{\partial x'_j} \right)_{x_k=\tilde{x}(t_k), x'_k=\tilde{x}(t'_k)} \right] = \\
&= \sum_{j=1}^m K(t_j, t'_{n-j}) \mathbb{E} \left[\prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^m \tilde{z}(t_k) \right] \left[\prod_{k=1}^{n-j-1} \tilde{z}^*(t'_k) \right] + \sum_{j=1}^{n-j-1} K(t'_j, t'_{n-j}) \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^m \tilde{z}(t_k) \right] \left[\prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^{n-j-1} \tilde{z}^*(t'_k) \right]. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_y P_y(\tilde{y}(t_1), \dots, \tilde{y}(t_m), \tilde{y}(t'_1), \dots, \tilde{y}(t'_{n-j-1})) \tilde{y}(t'_{n-j}) = \\
&= \sum_{j=1}^m K(t_j, t'_{n-j}) \mathbb{E} \left[\prod_{k=1: j \neq k}^m \tilde{z}(t_k) \right] \left[\prod_{k=1}^{n-j-1} \tilde{z}^*(t'_k) \right] - i \sum_{j=1}^{n-j-1} K(t'_j, t'_{n-j}) \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^m \tilde{z}(t_k) \right] \left[\prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^{n-j-1} \tilde{z}^*(t'_k) \right]. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Таким образом, математическое ожидание $E_{n-j,m}$ выражается через математические ожидания типа $E_{n-j-1,m}$. Тогда при $j = n - 1$ математическое ожидание принимает вид

$$\begin{aligned}
E_{1,m} &= \mathbb{E} \tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m) \tilde{z}^*(t'_1) = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^m \tilde{z}(t_j) \right] \tilde{x}(t'_1) - i \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^m \tilde{z}(t_j) \right] \tilde{y}(t'_1) = \\
&= \mathbb{E}_x P_x(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m)) \tilde{x}(t'_1) - i \mathbb{E}_y P_y(\tilde{y}(t_1), \dots, \tilde{y}(t_m)) \tilde{y}(t'_1), \quad (3.10)
\end{aligned}$$

с полиномами

$$P_x(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m)) = \mathbb{E}_y [\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m)], \quad P_y(\tilde{y}(t_1), \dots, \tilde{y}(t_m)) = \mathbb{E}_x [\tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_m)].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x P_x(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m)) \tilde{x}(t'_1) = \\
&= \sum_{j=1}^m K(t_j, t'_1) \mathbb{E}_x \left[\left(\frac{\partial P_x}{\partial x_j} \right)_{x_k=\tilde{x}(t_k), x'_k=\tilde{x}(t'_k)} \right] = \sum_{j=1}^m K(t_j, t'_1) \mathbb{E} \left[\prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^m \tilde{z}(t_k) \right]; \quad (3.11)
\end{aligned}$$

аналогично,

$$\mathbb{E}_y P_y(\tilde{y}(t_1), \dots, \tilde{y}(t_m)) = \sum_{j=1}^m K(t_j, t'_1) \mathbb{E} \left[\prod_{\substack{k=1: \\ j \neq k}}^m \tilde{z}(t_k) \right]. \quad (3.12)$$

Математические ожидания в (3.11) и (3.12) равны нулю, согласно доказанному в п. I. Тогда, согласно (3.10), равно нулю математическое ожидание $E_{1,m}$. На основе этого равенства получаем, что $E_{2,m} = 0$, $E_{3,m} = 0$, ..., последовательно шаг за шагом находим, что равны нулю математические ожидания, которые являются множителями в слагаемых, входящих в суммы (3.8), (3.9). Поэтому согласно (3.7) имеем $E_{n-j,m} = 0$, что на шаге с $j = 1$ приводит к равенству математических ожиданий, которые являются множителями в суммах (3.5), (3.6) и, следовательно, согласно (3.4), имеем $E_{n,m} = 0$.

III. Рассмотрим, наконец, математические ожидания в формуле (3.2). Докажем эту формулу индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ эта формула представляет собой тождество. При этом, ввиду статистических независимости и эквивалентности процессов $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ и $\{\tilde{y}(t); t \in [0, T]\}$, составляющих процесс $\{\tilde{z}(t); t \in [0, T]\}$, с учетом условия $\mathbb{E} \tilde{x}(t) = \mathbb{E} \tilde{y}(t) = 0$, находим

$$\mathbb{E} \tilde{z}(t) \tilde{z}^*(t') = \mathbb{E} \left(\tilde{x}(t) \tilde{x}(t') + \tilde{y}(t) \tilde{y}(t') + i [\tilde{x}(t) \tilde{y}(t') - \tilde{y}(t) \tilde{x}(t')] \right) = 2K(t, t'). \quad (3.13)$$

Построим индукционный шаг от значения n в (3.2) к значению $n + 1$. Введем полиномы

$$\begin{aligned} P_x(\tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_n), \tilde{x}(t_{n+1}), \tilde{x}(t'_1), \dots, \tilde{x}(t'_n)) &= \mathbb{E}_y \left[\prod_{l=1}^{n+1} \tilde{z}(t_l) \right] \left[\prod_{l'=1}^n \tilde{z}^*(t'_{l'}) \right] \tilde{x}(t'_{n+1}), \\ P_y(\tilde{y}(t_1), \dots, \tilde{y}(t_n), \tilde{y}(t_{n+1}), \tilde{y}(t'_1), \dots, \tilde{y}(t'_n)) &= \mathbb{E}_x \left[\prod_{l=1}^{n+1} \tilde{z}(t_l) \right] \left[\prod_{l'=1}^n \tilde{z}^*(t'_{l'}) \right] \tilde{y}(t'_{n+1}). \end{aligned}$$

Выполним следующие преобразования, используя формулу (2.5):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \tilde{z}(t_1) \dots \tilde{z}(t_n) \tilde{z}(t_{n+1}) \tilde{z}^*(t'_1) \dots \tilde{z}^*(t'_n) \tilde{z}^*(t'_{n+1}) &= \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{l=1}^{n+1} \tilde{z}(t_l) \right] \left[\prod_{l'=1}^n \tilde{z}^*(t'_{l'}) \right] \tilde{x}(t'_{n+1}) - i \mathbb{E} \left[\prod_{l=1}^{n+1} \tilde{z}(t_l) \right] \left[\prod_{l'=1}^n \tilde{z}^*(t'_{l'}) \right] \tilde{y}(t'_{n+1}) = \\ &= \mathbb{E}_x \left[K(t_{n+1}, t'_{n+1}) \frac{\partial P_x}{\partial x_{n+1}} + \sum_{j=1}^n \left(K(t_j, t'_{n+1}) \frac{\partial P_x}{\partial x_j} + K(t'_j, t'_{n+1}) \frac{\partial P_x}{\partial x'_j} \right) \right]_{\substack{x_k = \tilde{x}(t_k), \\ x'_k = \tilde{x}(t'_k)}} - \\ &- i \mathbb{E}_y \left[K(t_{n+1}, t'_{n+1}) \frac{\partial P_y}{\partial y_{n+1}} + \sum_{j=1}^n \left(K(t_j, t'_{n+1}) \frac{\partial P_y}{\partial y_j} + K(t'_j, t'_{n+1}) \frac{\partial P_y}{\partial y'_j} \right) \right]_{\substack{x_k = \tilde{x}(t_k), \\ x'_k = \tilde{x}(t'_k)}} = \\ &= 2K(t_{n+1}, t'_{n+1}) \mathbb{E} \left[\prod_{l=1}^n \tilde{z}(t_l) \right] \left[\prod_{l'=1}^n \tilde{z}^*(t'_{l'}) \right] + 2 \sum_{j=1}^n K(t_j, t'_{n+1}) \mathbb{E} \left[\prod_{\substack{l=1: \\ l \neq j}}^{n+1} \tilde{z}(t_l) \right] \left[\prod_{l'=1}^n \tilde{z}^*(t'_{l'}) \right], \end{aligned}$$

где слагаемые с производными $\mathbb{E}_x (\partial P_x / \partial x'_j)$ и $\mathbb{E}_y (\partial P_y / \partial y'_j)$, $j = 1, \dots, n$, взаимно скомпенсировали друг друга. Приняв во внимание формулу (3.13), получим окончательно следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathbb{E} \left[\prod_{l=1}^{n+1} \tilde{z}(t_l) \right] \left[\prod_{l'=1}^{n+1} \tilde{z}^*(t'_{l'}) \right] = \sum_{j=1}^{n+1} [\mathbb{E} \tilde{z}(t_j) \tilde{z}^*(t'_{n+1})] \mathbb{E} \left[\prod_{l=1: l \neq j}^{n+1} \tilde{z}(t_l) \right] \left[\prod_{l'=1}^n \tilde{z}^*(t'_{l'}) \right], \quad (3.14)$$

в правой части которого находятся математические ожидания с n сомножителями $\tilde{z}(t_l)$ и с таким числом сомножителей $\tilde{z}^*(t_{l'})$. Тогда, исходя из предположения, что формула (3.2) выполняется для такого числа сомножителей, запишем

$$\mathbb{E} \left[\prod_{l=1: l \neq j}^{n+1} \tilde{z}(t_l) \right] \left[\prod_{l'=1}^n \tilde{z}^*(t_{l'}) \right] = \sum_{\langle l_1, \dots, l_n \rangle \in \mathbb{P}_n^{(j)}} \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \tilde{z}(t_{l_k}) \tilde{z}^*(t'_{l_k}), \quad (3.15)$$

где наборы $\langle l_k; k = 1, \dots, n+1, k \neq j \rangle$ — элементы группы $\mathbb{P}_n^{(j)}$ подстановок из номеров $I_{n+1} \setminus \{j\}$. Так как группа $\mathbb{P}_{n+1}$ подстановок из номеров I_{n+1} представляется в виде объединения непересекающихся классов подстановок $\mathbb{P}_n^{(j)}$, т.е. $\mathbb{P}_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}_n^{(j)}$, справедлива формула суммирования

$$\sum_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}_{n+1}} \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{E} \tilde{z}(t_k) \tilde{z}^*(t'_{\mathbf{P}_k}) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{E} \tilde{z}(t_j) \tilde{z}^*(t'_{n+1}) \sum_{\langle l_1, \dots, l_n \rangle \in \mathbb{P}_n^{(j)}} \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \tilde{z}(t_{l_k}) \tilde{z}^*(t'_{l_k}).$$

Вместе с (3.14), (3.15), она завершает доказательство формулы (3.2). $\square$

Справедливо обратное утверждение.

Теорема 3.2. Равенства (2.3) и (2.4), выражающие свойства случайного процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$, эквивалентны равенствам (3.1) и (3.2), которые выражают свойства случайного процесса $\{\tilde{z}(t); t \in [0, T]\}$ с траекториями $\tilde{z}(t) = \tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t)$, состоящими из траекторий статистически независимых процессов $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ и $\{\tilde{y}(t); t \in [0, T]\}$ с нулевым математическим ожиданием. При этом вещественная корреляционная функция для обоих процессов одинакова и равна $K(t, t')$.

Доказательство. Согласно теореме 3.1 достаточно доказать, что из равенств (3.1) и (3.2) следуют равенства (2.3) и (2.4). Пусть $\tilde{z}(t) = \tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t)$ — траектории случайного процесса $\{\tilde{z}(t); t \in [0, T]\}$ на $[0, T]$, для математических ожиданий которого справедливы формулы (3.1) и (3.2). Введем характеристический функционал пары случайных процессов $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ и $\{\tilde{y}(t); t \in [0, T]\}$:

$$\Phi[u, v] = \mathbb{E} \exp \left[i \int_0^T (u(t)\tilde{x}(t) + v(t)\tilde{y}(t)) dt \right] = \mathbb{E} \exp \left[\frac{i}{2} \int_0^T (w(t)\tilde{z}(t) + w^*(t)\tilde{z}^*(t)) dt \right],$$

определенный для пар непрерывных на $[0, T]$ пробных функций $u(t)$ и $v(t)$. Здесь мы ввели комплекснозначную функцию $w(t) = u(t) - iv(t)$. Справедливы следующие преобразования, использующие (3.1) и (3.2):

$$\begin{aligned} \Phi[u, v] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n n!} \int_{[0, T]^n} \mathbb{E} \prod_{j=1}^n (w(t_j)\tilde{z}(t_j) + w^*(t_j)\tilde{z}^*(t_j)) dt_1 \dots dt_n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n n!} \sum_{A \subset I_n[0, T]^n} \int \left[\prod_{j \in A} w(t_j) \right] \left[\prod_{j' \in I_n \setminus A} w^*(t_{j'}) \right] \mathbb{E} \left[\prod_{j \in A} \tilde{z}(t_j) \right] \left[\prod_{j' \in I_n \setminus A} \tilde{z}^*(t_{j'}) \right] dt_1 \dots dt_n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n n!} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \int_{[0, T]^n} \left[\prod_{j=1}^l w(t_j) \right] \left[\prod_{j'=l+1}^n w^*(t_{j'}) \right] \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^l \tilde{z}(t_j) \right] \left[\prod_{j'=l+1}^n \tilde{z}^*(t_{j'}) \right] dt_1 \dots dt_n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} \int_{[0,T]^{2m}} \left[\prod_{j=1}^m w(t_j) w^*(t'_j) \right] \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^m \tilde{z}(t_j) \tilde{z}^*(t'_j) \right] dt_1 \dots dt_m dt'_1 \dots dt'_m = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} \sum_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}_m} \int_{[0,T]^{2m}} \left[\prod_{j=1}^m w(t_j) w^*(t'_j) \right] \prod_{j=1}^m \mathbb{E} [\tilde{z}(t_j) \tilde{z}^*(t'_{\mathbf{P}j})] dt_1 \dots dt_m dt'_1 \dots dt'_m. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Сходимость ряда, определяющего функцию $\Phi[u, v]$, при условии достаточной малости $\max\{|w(t)|; t \in [0, T]\}$, обеспечивается условиями непрерывности корреляционной функции $K(t, t')$ и ее ограниченности, благодаря которой

$$\begin{aligned}
\left| \mathbb{E} \left[\prod_{j \in A} \tilde{z}(t_j) \right] \left[\prod_{j \in I_n \setminus A} \tilde{z}^*(t_j) \right] \right| &\leq \sum_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}_m} \left| \prod_{j=1}^m \mathbb{E} [\tilde{z}(t_j) \tilde{z}^*(t'_{\mathbf{P}j})] \right| \leq \\
&\leq m! 2^m \max \{ |K(t, t')|; \langle t, t' \rangle \in [0, T]^2 \},
\end{aligned}$$

что обосновывает перестановочность операции $\mathbb{E}(\cdot)$ с операциями суммирования $\sum_{n=0}^{\infty} (\cdot)$ и интегрирования $\int_{[0,T]^n} (\cdot) dt_1 \dots dt_n$ при получении выражения (3.16).

В каждом слагаемом суммы по $\mathbf{P} \in \mathbb{P}_n$ произведем замену переменных интегрирования $t'_{\mathbf{P}j} \Rightarrow t'_j$, и заметим, что

$$\prod_{j=1}^m w^*(t'_{\mathbf{P}^{-1}j}) = \prod_{j=1}^m w^*(t'_j),$$

так как каждая подстановка $\mathbf{P}$ является автоморфизмом I_n ,

$$\begin{aligned}
\Phi[u, v] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}m!} \int_{[0,T]^{2m}} \prod_{j=1}^m \mathbb{E} [w(t_j) \tilde{z}(t_j) w^*(t'_j) \tilde{z}^*(t'_j)] dt_1 \dots dt_m dt'_1 \dots dt'_m = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}m!} \left[\int_{[0,T]^2} \mathbb{E} [w(t) \tilde{z}(t) w^*(t') \tilde{z}^*(t')] dt dt' \right]^m = \\
&= \exp \left(-\frac{1}{4} \int_{[0,T]^2} w(t) w^*(t') \mathbb{E} [\tilde{z}(t) \tilde{z}^*(t')] dt dt' \right) = \\
&= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{[0,T]^2} K(t, t') [u(t)u(t') + v(t)v(t')] dt dt' \right), \quad (3.17)
\end{aligned}$$

где $\mathbb{E} [\tilde{z}(t) \tilde{z}^*(t')] = 2K(t, t')$ — симметричная корреляционная функция, общая для процессов $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ и $\{\tilde{y}(t); t \in [0, T]\}$. Полученное выражение продолжается аналитически по параметру $\max\{|u(t)|, |v(t)|; t \in [0, T]\}$ на все возможные его значения. В результате согласно (2.2) получаем, что $\Phi[u, v] = \Phi[u]\Phi[v]$, что означает, что процессы $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ и $\{\tilde{y}(t); t \in [0, T]\}$ гауссовские, статистически независимые и эквивалентные. $\square$

4. Алгебра $\mathfrak{A}([0, T])$. Введем в рассмотрение бесконечномерную коммутативную алгебру над полем комплексных чисел, элементами которой являются последовательности

$$\mathbf{f} = \langle f_n(t_1, \dots, t_n); n \in \mathbb{N}_+ \rangle, \quad \mathbb{N}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$$

симметричных комплекснозначных функций от наборов $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in [0, T]^n$, где каждая из этих функций непрерывна на $[0, T]^n$, $n \in \mathbb{N}$, и $f_0 \in \mathbb{C}$. Обстоятельное изложение свойств алгебр такого типа дано нами в [3].

Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{L}([0, T])$, состоящее из последовательностей $\mathbf{f}$, указанного типа, к которым применяются естественные операции покомпонентного сложения последовательностей и умножения их компонент на какое-либо комплексное число $\alpha \in \mathbb{C}$. Дополнительно, потребуем, чтобы для компонент каждого из элементов $\mathbf{f} \in \mathfrak{L}([0, T])$ выполнялась такая оценка $|f_n(t_1, \dots, t_n)| \leq M_n$, $n \in \mathbb{N}$, что для последовательности $\langle M_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ положительных чисел суммируем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{\zeta^n}{n!}$$

при достаточно малых $\zeta > 0$. Введем в этом пространстве бинарную операцию, применяемую к парам последовательностей из $\mathfrak{L}([0, T])$, которую будем обозначать знаком $*$ и называть умножением. Результатом применения этой операции к паре $\langle \mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)} \rangle$ последовательностей $\mathbf{f}^{(k)} = \langle f_n^{(k)}(t_1, \dots, t_n); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$, которым соответствуют такие последовательности $\langle M_n^{(k)}; n \in \mathbb{N} \rangle$, что

$$|f_n^{(k)}(t_1, \dots, t_n)| < M_n^{(k)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(k)} \frac{\zeta^n}{n!} < \infty, \quad k \in \{1, 2\},$$

является последовательность $\mathbf{g} = \langle g_n(t_1, \dots, t_n); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ с компонентами

$$g_n(t(I_n)) = (\mathbf{f}^{(1)} * \mathbf{f}^{(2)})_n(t(I_n)) = \sum_{A \subset I_n} f_{|A|}^{(1)}(t(A)) f_{|I_n \setminus A|}^{(2)}(t(I_n \setminus A)), \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

где введено обозначение $t(A) = \langle t_{j_1}, \dots, t_{j_m} \rangle$ для любого подмножества $A = \{j_1, \dots, j_m\} \subset I_n = \{1, \dots, n\}$, $|A| = m$. В частности, при $n = 0$ выполняется $f_0^{(1)} f_0^{(2)}$. При этом последовательность $\mathbf{g}$, очевидным образом, состоит из симметричных функций, и для ее компонент имеет место оценка

$$|g_n(t(I_n))| \leq \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n}{l} M_l^{(1)} M_{n-l}^{(2)}, \quad M_0^{(k)} = |f_0^{(k)}|,$$

и поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \max\{|g_n(t(I_n))|\} < \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\zeta^l}{l!} M_l^{(1)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{m!} M_m^{(2)}.$$

Следовательно, последовательность $\mathbf{g} = \mathbf{f}^{(1)} * \mathbf{f}^{(2)}$ является элементом из $\mathfrak{L}([0, T])$.

Очевидно, операция $*$ коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна по отношению к сложению последовательностей. Таким образом, линейное пространство $\mathfrak{L}([0, T])$, снабженное операцией $*$, превращается в коммутативную алгебру, которую мы будем обозначать посредством $\mathfrak{A}([0, T])$. Единицей в этой алгебре является последовательность $\mathbf{e} = \langle \delta_{n,0}; n \in \mathbb{N}_+ \rangle$. Степень элемента $\mathbf{f}$ порядка n будем обозначать $\mathbf{f}_*^n$.

Обратный элемент $\mathbf{g} \equiv \mathbf{f}_*^{-1}$ для последовательности $\mathbf{f}$ определяется уравнением $\mathbf{g} * \mathbf{f} = \mathbf{e}$. Из этого определения следует система уравнений для компонент последовательности $\mathbf{g} = \langle g_m(t(I_m)); m \in \mathbb{N} \rangle$:

$$\begin{aligned} g_0 f_0 &= 1, \quad g_1(t_1) f_0 + g_0 f_1(t_1) = 0, \quad \dots, \\ g_{n+1}(t(I_{n+1})) f_0 + \sum_{A \subset I_n} g_{|A|}(t(A)) f_{n+1-|A|}(t(I_{n+1} \setminus A)) &= 0, \dots \end{aligned}$$

Система уравнений однозначно разрешима и, следовательно, существование обратного элемента $\mathbf{f}_*^{-1}$ в алгебре $\mathfrak{A}([0, T])$ возможно тогда и только тогда, когда $f_0 \neq 0$.

Предположив, что $|g_m(t(I_m))| < N_m$ при $m \leq n$, находим, что

$$|g_{n+1}(t(I_{n+1}))| < N_{n+1} \equiv N_0 \sum_{m=0}^n \binom{n+1}{m} N_m M_{n+1-m}, \quad N_0 = |f_0|^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эта оценка дает

$$\begin{aligned} G(\zeta) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n+1}}{(n+1)!} N_{n+1} < N_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{m!} N_m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\zeta^{n+1-m}}{(n+1-m)!} M_{n+1-m} = \\ &= N_0(N_0 + G(\zeta)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$G(\zeta) < N_0 \left[N_0^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} \right]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

Следовательно, на основании этого неравенства, $G(\zeta)$ сходится при достаточно малых ζ , и поэтому элемент $\mathbf{g}$ принадлежит $\mathfrak{A}([0, T])$.

В алгебре $\mathfrak{A}([0, T])$ допустимо введение экспоненциального отображения $\exp_* \mathbf{f}$, определяемого рядом

$$\exp_* \mathbf{f} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \mathbf{f}_*^m. \quad (4.1)$$

Так как для m -й степени всякого элемента $f \in \mathfrak{L}_0([0, T]) \equiv \{f \in \mathfrak{L}([0, T]) : f_0 = 0\} \subset \mathfrak{L}([0, T])$ имеет место равенство $(\mathbf{f}_*^m)_l(t(I_l)) = 0$ при $l > m$, то индукцией по $m \in \mathbb{N}$ можно доказать, что для компонент всякого элемента $\mathbf{f} \in \mathfrak{L}([0, T]) : f_0 = 0\}$ справедливо представление

$$(\exp_* \mathbf{f})(t(I_n)) = \sum_{\mathfrak{R}_n} \prod_{A \in \mathfrak{R}_n} f_{|A|}(t(A)), \quad (4.2)$$

в котором суммирование производится по всем дизъюнктным разложениям

$$\mathfrak{R}_n = \left\{ \emptyset \neq A_j \subset I_n : j = 1, \dots, s \right\} \bigcup_{j=1}^s A_j = I_n, \quad A_j \cap A_k = \emptyset, \quad j \neq k, \quad s = 1, \dots, n,$$

множества I_n . Если для компонент элемента $\mathbf{f}$ имеет место оценка

$$|f_n(t(I_n))| < M^n, \quad M > 0,$$

то

$$|(\mathbf{f}_*^m)_n(t(I_n))| < (mM)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и поэтому

$$\begin{aligned} N_n^* &\equiv |(\exp_* \mathbf{f})_n(t(I_n))| < \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |(\mathbf{f}_*^m)_n(t(I_n))| < \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(mM)^n}{m!}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} N_n^* &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(mM)^n}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp(mM)^n}{m!} = \exp(\zeta e^M). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Следовательно, образ экспоненциального отображения принадлежит $\mathfrak{A}([0, T])$.

На основе представления (4.2) индукцией по n можно доказать, что экспоненциальное отображение осуществляет биекцию между линейными пространствами $\mathfrak{L}_0([0, T])$ и $\mathfrak{L}([0, T])$ в алгебре $\mathfrak{A}([0, T])$. Обратное отображение из $\mathfrak{L}([0, T])$ в $\mathfrak{L}_0([0, T])$, обозначаемое $\ln_*(1 + \mathbf{g})$, определяется рядом

$$\ln_*(1 + \mathbf{g}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} g_*^m.$$

Введем линейный функционал $F(u; \mathbf{f})$ от $\mathbf{f} = \langle f_n(t_1, \dots, t_n); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ на линейном пространстве $\mathfrak{L}_0([0, T])$, порождаемый непрерывной функцией $u(t)$ на $[0, T]$:

$$F(u; \mathbf{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{[0, T]^n} \left(\prod_{j=1}^n u(t_j) \right) f_n(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n. \quad (4.4)$$

Теорема 4.1. Пусть $f \in \mathfrak{L}_0([0, T])$. Справедлива формула

$$F(u; \exp_* f) = \exp(F(u; f)). \quad (4.5)$$

Доказательство. Из определения произведения элементов $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ следует, что

$$\begin{aligned} F(u; f^{(1)} * f^{(2)}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{[0, T]^n} \left(\prod_{j=1}^n u(t_j) \right) \sum_{A \subset I_n} f_{|A|}^{(1)}(t(A)) f_{|I_n \setminus A|}^{(2)}(t(I_n \setminus A)) dt_1 \dots dt_n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{[0, T]^n} \left(\prod_{j=1}^n u(t_j) \right) \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} f_l^{(1)}(t(I_l)) f_{n-l}^{(2)}(t(I_n \setminus I_l)) dt_1 \dots dt_n = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_{[0, T]^l} \left(\prod_{j=1}^l u(t_j) \right) f_l^{(1)}(t(I_l)) dt_1 \dots dt_l \times \\ &\quad \times \sum_{n=l}^{\infty} \frac{1}{(n-l)!} \int_{[0, T]^{n-l}} \left(\prod_{j=l+1}^n u(t_j) \right) f_{n-l}^{(2)}(t(I_n \setminus I_l)) dt_{l+1} \dots dt_n = F(u; f^{(1)}) F(u; f^{(2)}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где выполнена замена переменных интегрирования $t(A)$ на $t(I_l)$ и $t(I_n \setminus A)$ на $t(I_n \setminus I_l)$. Сходимость рядов и перестановочность суммирований обеспечивается тем, что компоненты элементов f алгебры $\mathfrak{L}_0([0, T])$ ограничены $|f_n(t(I_n))| < M_n$, так что

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{\zeta^n}{n!} < \infty.$$

Воспользовавшись линейностью функционала F и применив формулу (4.6) к каждому слагаемому определяющего его ряда (4.1),

$$F(u; \exp_* f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F(u; f_*^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^n(u; f) = \exp(F(u; f)),$$

получаем формулу (4.5). Перестановочность суммы по n с суммированием в определении (4.4) функционала F обеспечивается оценкой (4.3). $\square$

Замечание 4.1. Доказанная теорема аналогична теореме о приведении к связанным диаграммам в рамках правил Вика в формализмах квантовой теории поля и статистической механики.

Теперь докажем ключевые утверждения, которые позволяют применить алгебру $\mathfrak{A}([0, T])$ для вычисления характеристической функции $Q_J(-i\lambda)$. Рассмотрим группы $\mathbb{P}_n$ подстановок множеств I_n , $n \in \mathbb{N}$. Подмножество $A \subset I_n$ назовем инвариантным относительно подстановки $P \in \mathbb{P}_n$, если $P A = A$.

Определение 4.1. Подстановку $P \in \mathbb{P}_n$ назовем эргодической, если для нее не существует собственного инвариантного подмножества $A \subset I_n$.

Теорема 4.2. Для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ в группе $\mathbb{P}_n$ имеется а точности $(n-1)!$ эргодических подстановок.

Доказательство. Пусть $P \in \mathbb{P}_n$ — эргодическая подстановка и пусть образом ее действия на $I_n = \langle 1, 2, \dots, n \rangle$ является последовательность $\langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle$. Поставим в соответствие последовательности $\langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle$ последовательность $\langle 1, k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \rangle$, в которой $P 1 = k_1 \equiv j_1$, $P k_l = k_{l+1}$, $l = 1, \dots, n-1$. Так как подстановка P эргодическая, то в этой последовательности нет совпадающих номеров. Таким образом, каждой эргодической подстановке соответствует такая подстановка P' номеров $\langle 2, 3, \dots, n \rangle$ из $\mathbb{P}_{n-1}$, что $P' \langle 2, 3, \dots, n \rangle = \langle k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \rangle$. Обратно, каждой такой подстановке соответствует эргодическая подстановка P группы $\mathbb{P}_n$, построенная по описанной схеме, откуда следует утверждение теоремы, так как $|\mathbb{P}_{n-1}| = (n-1)!$. $\square$

Теорема 4.3. Для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ любой подстановке $P \in \mathbb{P}_n$ соответствует такое дизъюнктивное разложение $\mathfrak{R}_n$ множества I_n , что эта подстановка представляется в виде

$$P = \bigotimes_{A \in \mathfrak{R}_n} P^{(A)},$$

где каждая из подстановок $P^{(A)}$, $A \in \mathfrak{R}_n$ является сужением P на множество $A \in \mathfrak{R}_n$ и является эргодической подстановкой из группы $\mathbb{P}_{|A|}^{(A)}$ подстановок множества номеров из A .

Доказательство. Зафиксируем подстановку $P \in \mathbb{P}_n$. Докажем, что имеется подмножество $A_1 \subset I_n$, которое содержит 1, инвариантно относительно P , и которое не содержит в себе инвариантного собственного подмножества. Рассмотрим образ $P1$. Если $P1 = 1$, то искомым множеством является $\{1\}$. Если $P1 = j_1^{(1)} \neq 1$ и при $Pj_1^{(1)} = 1$ получаем искомое множество $A_1 = \{1, j_1^{(1)}\}$. Если $Pj_1^{(1)} = j_2^{(1)} \neq 1$, то найдем номер $Pj_2^{(1)}$ и будем поступать каждый раз так, пока на каком-либо шаге s_1 получим, что $Pj_{s_1-1}^{(1)} \in \{1, j_1^{(1)}, \dots, j_{s_1-1}^{(1)}\}$. В результате, получим, что $Pj_{s_1-1}^{(1)} = 1$ и искомым инвариантным множеством является набор $A_1 = \{1, j_1^{(1)}, \dots, j_{s_1-1}^{(1)}\}$. Сужение подстановки P на множество A_1 обозначим как $P^{(A_1)}$. По построению эта подстановка является эргодической на A_1 .

Заметив, что $I_n \setminus A_1$ также является инвариантным подмножеством по отношению к подстановке P , найдем в нем минимальный номер $j_0^{(2)}$ и применим к нему описанный выше алгоритм, результатом которого будет инвариантное по отношению к подстановке P множество $A_2 = \{j_0^{(2)}, j_1^{(2)}, \dots, j_{s_2-1}^{(2)}\}$, причем сужение $P^{(A_2)}$ этой подстановки на A_2 является эргодической подстановкой. Продолжая описанный процесс построения множеств A_k , каждое очередное из которых является подмножеством в $I_n \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} A_l$, в конце концов на некотором шаге m исчерпаем все множество номеров I_n . Таким образом, построим дизъюнктивное разложение $\mathfrak{R}_n = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, каждый элемент которого инвариантен относительно подстановки P и при этом сужение $P^{(A_l)}$ подстановки P на соответствующее множество A_l , $l = 1, \dots, m$ является эргодической подстановкой. Прямое произведение всех таких подстановок дает подстановку P . $\square$

Докажем утверждение, позволяющее вычислить характеристическую функцию $Q_J(-i\lambda)$.

Теорема 4.4. Последовательность симметричных функций $\mathbf{g} = \langle g_n(t_1, \dots, t_n); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$, которые определяются формулой

$$g_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{P \in \mathbb{P}_n} \prod_{j=1}^n D(t_j, t_{Pj}), \quad f_0 = 0. \quad (4.7)$$

где $D(t, t')$ — непрерывная функция на $[0, T]^2$, принадлежит алгебре $\mathfrak{A}([0, T])$, причем имеет место соотношение

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{P \in \mathbb{P}_n}^* \prod_{j=1}^n D(t_j, t_{Pj}), \quad (4.8)$$

где $f = \ln_*(1 + g)$ и суммирование производится по всем эргодическим подстановкам из $\mathbb{P}_n$.

Доказательство. Для доказательства нужно проверить наличие связи $g_n(t(I_n)) = (\exp_* f)_n(t(I_n))$. Ввиду теоремы 4.3, для каждой подстановки $P \in \mathbb{P}_n$ существует единственное дизъюнктивное разбиение $\mathfrak{R}_n$ множества I_n , используя которое, согласно (4.8), запишем

$$\prod_{j=1}^n D(t_j, t_{Pj}) = \prod_{A \in \mathfrak{R}_n} \prod_{j \in A} D(t_j, t_{P^{(A)}j}). \quad (4.9)$$

Так как все подстановки распределяются по классам эквивалентности, каждый из которых содержит подстановки, соответствующие одному и тому же разложению $\mathfrak{R}_n$, и эти подстановки являются эргодическими, то сумма по всем подстановкам представляется в следующем виде. Сначала производится суммирование по подстановкам в каждом из таких классов, а затем суммирование

по всем возможным классам, т.е. по $\mathfrak{R}_n$. Суммирование же по подстановкам, принадлежащих фиксированному классу, который связан с разложением $\mathfrak{R}_n$, представляется суммированием по эргодическим подстановкам в каждой из подгрупп подстановок $\mathbb{P}(A)$ подмножества $A \in \mathfrak{R}_n$ последовательно, согласно какому-либо упорядочению множеств A из $\mathfrak{R}_n$. Таким образом, имеет место формула

$$\sum_{P \in \mathbb{P}_n} \cdots = \sum_{\mathfrak{R}_n} \left(\prod_{A \in \mathfrak{R}_n} \sum_{P^{(A)} \in \mathbb{P}(A)}^* \right) \cdots \quad (4.10)$$

Из (4.9), (5.1) следует, что

$$\begin{aligned} g_n(t(I_n)) &= \sum_{P \in \mathbb{P}_n} \prod_{j=1}^n D(t_j, t_{Pj}) = \sum_{\mathfrak{R}_n} \left(\prod_{A \in \mathfrak{R}_n} \sum_{P^{(A)} \in \mathbb{P}(A)}^* \right) \prod_{A \in \mathfrak{R}_n} \prod_{j \in A} D(t_j, t_{P^{(A)}j}) = \\ &= \sum_{\mathfrak{R}_n} \prod_{A \in \mathfrak{R}_n} \sum_{P^{(A)} \in \mathbb{P}(A)}^* \prod_{j \in A} D(t_j, t_{P^{(A)}j}). \end{aligned}$$

Согласно (4.2) получаем, что

$$g_n(t(I_n)) = (\exp_* f)_n(t(I_n)),$$

где $f_n(t(I_n))$ определяется (4.8). $\square$

5. Характеристическая функция случайной величины $J[\tilde{x}(t)]$. Пусть

$$J[x(t)] = \int_0^T V(t_1, t_2) x(t_1) x(t_2) dt_1 dt_2 \quad (5.1)$$

— квадратичный функционал на $\mathbb{L}_2([0, T])$, где $V(t_1, t_2)$ — непрерывная симметричная функция из $\mathbb{L}_2([0, T]) \times \mathbb{L}_2([0, T])$. В этом случае существует случайная величина, определяемая значениями этого функционала на траекториях процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ и, следовательно, определена ее характеристическая функция

$$Q_J(-i\lambda) = \mathbb{E} \exp \left(i\lambda J[\tilde{x}(t)] \right). \quad (5.2)$$

Применение развиваемого в этой работе метода к вычислению характеристических функций таких квадратичных функционалов становится возможным, если функция $V(t, t')$ определяет непрерывный линейный функционал на пространстве $C[0, T]$, применяемый к непрерывной функции $K(t', t)$.

В этом разделе мы докажем утверждение, которое является основой для вычисления характеристической функции $Q_J(-i\lambda)$. Причем предлагаемый метод вычисления, который мы называем *реконструкцией*, позволяет избежать привлечения метода Карунена—Лоэва—Пугачева. Такая реконструкция характеристической функции применялась ранее в различных работах, посвященных приложениям в статистической радиофизике (см., например, [4, 5, 9]). В нашей интерпретации ее обоснование существенно основано на комплексификации случайных гауссовских процессов, описанной в предыдущем разделе.

Функция $V(t, t')$ порождает ограниченный интегральный оператор V ,

$$(V\varphi)(t) = \int_0^T V(t, t') \varphi(t') dt', \quad \varphi(t) \in \mathbb{L}_2[0, T].$$

Далее будем полагать, что нулевое пространство этого оператора тривиально, т.е. у него не существует ни одной собственной функции $e(t)$ с нулевым собственным числом. В противном случае функции из нулевого пространства можно исключить из теории, так как

$$J[\tilde{z}(t)] = J[\tilde{z}(t) - \tilde{z}_0 e(t)],$$

где $\tilde{z}(t) - \tilde{z}_0 e(t)$ — проекция случайной реализации на нулевое пространство оператора V .

Согласно условию непрерывности, наложенному на корреляционную функцию $K(t, t')$ в разделе 2, эта функция является ограниченной на $[0, T]$, и поэтому симметричный интегральный оператор K не только является самосопряженным неотрицательным оператором Гильберта—Шмидта, но, более того, он является *ядерным*, так как его собственные числа κ_n , $n \in \mathbb{N}$, неотрицательны и совпадают с его *сингулярными числами* (см. [1]). В то же время, используя суммируемость ряда, составленного из собственных чисел и условие полноты соответствующего ортонормированного базиса $\{\varphi_n(t); n \in \mathbb{N}\}$ собственных функций оператора K в пространстве $L_2[0, T]$, находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n(t), (K\varphi_n)(t)) \equiv \text{Sp } K = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \varphi_n(t) dt \int_0^T K(t, t') \varphi_n(t') dt' = \\ &= \int_0^T dt \int_0^T K(t, t') \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_n(t') dt' = \int_0^T dt \int_0^T K(t, t') \delta(t - t') dt' = \int_0^T K(t, t) dt < \infty, \end{aligned}$$

где полнота базиса $\{\varphi_n(t); n \in \mathbb{N}\}$ выражена посредством δ -функции Дирака

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_n(t') dt' = \delta(t - t')$$

с использованием непрерывности функции $K(t, t')$. Ввиду того, что произведение ядерного оператора на ограниченный оператор снова является ядерным оператором (см. [1]), в принятых нами ограничениях на функцию $V(t, t')$ интегральный оператор VK является ядерным.

Неотрицательный самосопряженный оператор K имеет положительный корень $K^{1/2}$. Рассмотрим ограниченный самосопряженный оператор $D = K^{1/2}VK^{1/2}$. Тогда сумма диагональных элементов оператора $K^{1/2}VK^{1/2}$ в базисе $\{\varphi_n(t); n \in \mathbb{N}\}$ конечна:

$$\begin{aligned} \text{Sp } D &= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n(t), (K^{1/2}VK^{1/2}\varphi_n)(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} (K^{1/2}\varphi_n(t), (VK^{1/2}\varphi_n)(t)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n (\varphi_n(t), (V\varphi_n)(t)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n |(\varphi_n(t), (V\varphi_n)(t))| \leq \|V\| \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор D ядерный (см. [1]). Рассмотрим матрицу этого оператора в ортонормированном базисе $\{\psi_n(t); n \in \mathbb{N}\}$ его собственных функций с собственными числами μ_n , $n \in \mathbb{N}$. При этом $\mu_n \neq 0$, так как для собственной функции $e(t)$ с таким собственным числом выполняется $K^{1/2}VK^{1/2}e(t) = 0$, $VK^{1/2}e(t) = 0$ и, следовательно, функция $K^{1/2}e(t)$ является собственной с нулевым собственным числом для оператора V , что мы исключили из рассмотрения.

В силу независимости суммы $\text{Sp } D$ от выбора ортонормированного базиса (см. [1]) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ абсолютно сходится. Отсюда следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ сходится бесконечное произведение

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + \lambda \mu_m) = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \ln(1 + \lambda \mu_m) \right), \quad (5.3)$$

где значения функции $\ln(\cdot)$ берутся на главном листе бесконечнолистной функции комплексного аргумента $\lambda \in \mathbb{C}$, исключая точки ветвления $\lambda = -\mu_n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, вводя матрицы $\mathcal{D}^{(n)}$ порядка $n \in \mathbb{N}$ с матричными элементами $(\mathcal{D}^{(n)})_{l,m} = \mu_m \delta_{lm}$, $\langle l, m \rangle = 1, \dots, n$, и применив известную формулу для детерминанта

$$\det(1 + \lambda \mathcal{D}^{(n)}) = \exp \text{Sp } \ln(1 + \lambda \mathcal{D}^{(n)})$$

(см. [6]), определим детерминант оператора $1 + \lambda D$:

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + \lambda \mu_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\text{Sp } \ln(1 + \lambda \mathcal{D}^{(n)}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \det(1 + \mathcal{D}^{(n)}) \equiv \det(1 + \lambda D). \quad (5.4)$$

Таким образом, из этой формулы следует, что введенный детерминант оператора $1 + \lambda D$ является целой функцией от $\lambda \in \mathbb{C}$. Возможность представления ее в виде бесконечного произведения (5.4) указывает на то, что для нее имеет место разложение Адамара (см. [11]). Такое разложение возможно в том и только в том случае, если порядок роста целой функции $\det(1 + \lambda D)$ меньше 1.

Ввиду возможности циклической перестановки операторов под знаком Sp и того факта, что произведение ядерных операторов является ядерным оператором, имеем

$$\text{Sp } D^m = \text{Sp}(VK)^m < \infty, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Благодаря сходимости ряда в показателе экспоненты в формуле (5.4), при $|\lambda| < |\mu_1|^{-1}$ сходится ряд

$$\text{Sp } \ln(1 + \lambda D) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \lambda^m \text{Sp } D^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \lambda^m \text{Sp}(VK)^m = \det(1 + \lambda VK).$$

Таким образом, получаем следующую формулу для детерминанта (5.4):

$$\det(1 + \lambda VK) = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \lambda^m \int_0^T (VK)^m(t, t) dt \right). \quad (5.5)$$

Точно такая же формула справедлива для оператора KV .

Суммируем проведенный анализ в виде следующего утверждения.

Теорема 5.1. *Если функции $K(t, t')$ и $V(t, t')$ непрерывны на $[0, T]^2$ и нулевое пространство оператора V тривиально, то операторы VK и KV ядерные и для них существуют детерминанты $\det(1 + \lambda VK)$ и $\det(1 + \lambda KV)$, определяемые разложением Адамара (5.3), которые являются целыми аналитическими функциями с порядком роста, меньшим 1, не равные нулю внутри круга с радиусом $\|VK\|$.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только заключительная часть утверждения. Его справедливость следует из того, что собственные числа операторов VK и KV являются одновременно собственными числами оператора $K^{1/2}VK^{1/2}$ и вследствие того, что для любой собственной функции $\psi_n(t)$ последнего оператора имеет место соотношение

$$\mu_n = (VK\psi_n(t), \psi_n(t)) \leq \|VK\|,$$

а нули $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ аналитических функций $\det(1 + \lambda VK)$ и $\det(1 + \lambda KV)$ определяются равенством $\lambda_n = -\mu_n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Для того чтобы обосновать метод вычисления характеристической функции $Q_J(-i\lambda)$, докажем формулу связи функции $Q_J(-i\lambda)$ с $\det(1 + \lambda D)$. Это доказательство основано на применении комплекснозначного случайного процесса $\{\tilde{z}(t); t \in [0, T]\}$ и, как следствие, на свойствах алгебры $\mathfrak{A}([0, T])$. Рассмотрим квадратичный функционал $J_c[\tilde{z}(t)]$, порождаемый интегральным ядром $V(t, t')$, от траекторий комплекснозначного гауссовского процесса $\{\tilde{z}(t); t \in [0, T]\}$, введенного в разделе 2,

$$J_c[\tilde{z}(t)] = \int_0^T \int_0^T V(t, t') \tilde{z}(t) \tilde{z}^*(t') dt dt'. \quad (5.6)$$

Его значения вещественны ввиду свойства симметрии $V(t, t') = V(t', t)$. Рассмотрим характеристическую функцию $Q(-i\lambda) = E \exp(i\lambda J_c[\tilde{z}(t)])$ этой случайной величины.

Лемма 5.1. *Имеет место формула*

$$Q(-i\lambda) = Q_J^2(-i\lambda). \quad (5.7)$$

Доказательство. Из определения (5.6), используя симметрию функции $V(t, t')$, получаем, что

$$J_c[\tilde{z}(t)] = J[\tilde{x}(t)] + J[\tilde{y}(t)],$$

где $\tilde{z}(t) = \tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t)$, $t \in [0, T]$. Тогда

$$\exp(i\lambda J[\tilde{x}(t)]) \cdot \exp(i\lambda J[\tilde{y}(t)]) = \exp(i\lambda J_c[\tilde{z}(t)]).$$

Формула (5.7) является следствием того факта, что случайные процессы $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ и $\{\tilde{y}(t); t \in [0, T]\}$ стохастически независимы и эквивалентны. $\square$

Вид характеристической функции $Q(-i\lambda)$ определяется следующим утверждением.

Теорема 5.2. Пусть $Q(-i\lambda)$ — характеристическая функция случайной величины $J_c[\tilde{z}(t)]$. Тогда функция $Q^{-1}(-i\lambda)$ является целой аналитической с $Q^{-1}(0) = 1$ с порядком роста, меньшим 1, и для нее имеет место формула

$$Q(-i\lambda) = [\det(1 - 2i\lambda \mathbf{VK})]^{-1}. \quad (5.8)$$

При этом $Q(-i\lambda)$ является мероморфной аналитической характеристической функцией. Она полностью определяется расположением множества своих полюсов, равных $(2i\mu_n)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, и таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n| < \infty.$$

Доказательство. Согласно определению характеристической функции $Q(-i\lambda)$ имеем

$$\mathbb{E} \exp(i\lambda J_c[\tilde{z}(t)]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \mathbb{E} J_c^n[\tilde{z}(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \int_{[0, T]^{2n}} \mathbb{E} \prod_{j=1}^n \tilde{z}(t) \tilde{z}^*(t'_j) \prod_{j=1}^n V(t_j, t'_j) dt_j dt'_j.$$

Используя (3.2), а затем (3.13), находим

$$\begin{aligned} Q(-i\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \int_{[0, T]^{2n}} \left[\prod_{j=1}^n V(t'_j, t_j) \right] \sum_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}_n} \left[\prod_{j=1}^n \mathbb{E} \tilde{z}(t'_j) \tilde{z}^*(t_{\mathbf{P}j}) \right] \prod_{j=1}^n dt_j dt'_j = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \int_{[0, T]^{2n}} \sum_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}_n} \left[\prod_{j=1}^n K(t'_j, t_{\mathbf{P}j}) \right] \prod_{j=1}^n V(t'_j, t_j) dt_j dt'_j = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \int_{[0, T]^n} \sum_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}_n} \left[\prod_{j=1}^n (\mathbf{VK})(t_j, t_{\mathbf{P}j}) \right] \prod_{j=1}^n dt_j = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \int_{[0, T]^n} \sum_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}_n} \left[\prod_{j=1}^n D(t_j, t_{\mathbf{P}j}) \right] \prod_{j=1}^n dt_j = F(u(t); \mathbf{g}), \end{aligned}$$

где $u(t) = 1$ и $\mathbf{g}$ определяется формулой (4.7) с $D(t, t') = (\mathbf{VK})(t, t')$. Тогда, согласно (4.5),

$$\begin{aligned} Q(-i\lambda) &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \int_{[0, T]^n} \sum_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}_n}^* \left[\prod_{j=1}^n D(t_j, t_{\mathbf{P}j}) \right] \prod_{j=1}^n dt_j \right) = \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \sum_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}_n}^* \int_{[0, T]^n} \left[\prod_{j=1}^n D(t_j, t_{\mathbf{P}j}) \right] \prod_{j=1}^n dt_j \right), \end{aligned}$$

где учтено, что $D_0 = 0$. Положив $t = t_1$, производя замену переменных интегрирования t_{p_j} на t_j , $j = 1, \dots, n$, и учитывая, что число всех эргодических подстановок равно $(n-1)!$, находим

$$Q(-i\lambda) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \sum_{P \in \mathbb{P}_n[0,T]}^* \int (D^n)(t, t) dt \right) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n} \int_{[0,T]} (VK)^n(t, t) dt \right).$$

Сравнивая полученное выражение с (5.5), в котором λ заменим на $-2i\lambda$, находим, что при достаточно малых $|\lambda|$, определяемых условием сходимости степенного ряда в показателе экспоненты, выполняется (5.8). Так как в этом случае, согласно теореме 4.4, $Q^{-1}(-2i\lambda)$ — такая целая аналитическая функция от $\lambda \in \mathbb{C}$, что $Q^{-1}(0) = 1$, то характеристическая функция $Q(-i\lambda)$ является аналитической (см., например, [19]) мероморфной функцией. Она голоморфна в круге с радиусом, не меньшим, чем $(2\|VK\|)^{-1}$. Поэтому формула (5.8) допускает аналитическое продолжение на всю плоскость $\lambda \in \mathbb{C}$, за исключением точек $\lambda = -i/2\mu_m$, $m \in \mathbb{N}$, в которых $\det(1 - 2i\lambda D) = 0$. $\square$

Следствие 5.1. *Характеристическая функция $Q_J(-i\lambda)$ определяется формулой*

$$Q_J(-i\lambda) = \left[\det(1 - 2i\lambda VK) \right]^{-1/2}, \quad (5.9)$$

где $\det(1 - 2i\lambda VK)$ — целая функция от $\lambda \in \mathbb{C}$ с порядком роста, меньшим 1.

Формула (5.9) выявляет смысл применения комплексификации случайного процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$. Такой подход позволяет избежать появления точек ветвления в процессе вычисления характеристической функции и, в конце концов, свести ее построение к использованию разложения Адамара.

6. Заключение. Главный результат проведенного в настоящей работе исследования сформулирован в теоремах 5.1 и 5.2 и следствии 5.1. Из него вытекает, что функция $Q_J^{-1}(-i\lambda)$ однозначно, с точностью до постоянного множителя, определяется своими нулями $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$. В сочетании с условием нормировки $Q(0) = 1$ это позволяет однозначно найти вид характеристической функции, если построена какая-либо целая аналитическая функция с порядком роста, меньшим единицы, которая обращается в нуль в том и только в том случае, когда $\lambda_n = -i/2\mu_n$, где $\{\mu_n; n \in \mathbb{N}\}$ — собственные числа интегрального оператора с ядром $(VK)(t, t')$. Тогда эта функция может отличаться от $Q_J^{-1}(-i\lambda)$ только лишь постоянным множителем, который находится из условия $Q(0) = 1$. Указанный метод установления характеристической функции случайной величины $J[\tilde{x}(t)]$ посредством установления уравнения для нулей функции $Q^{-1}(-i\lambda)$ мы называем *методом реконструкции*. Он применялся при решении различных прикладных задач (см., например, [4, 5, 9]).

Несмотря на то, что исследование, проведенное в настоящей работе, основано на предположении о непрерывности функции $V(t, t')$, в прикладных задачах приходится использовать функции $V(t, t')$, которые являются обобщенными функциями над пространством $C[0, T]$ непрерывных на $[0, T]$ основных функций. Таковы, например, функционалы, возникающие в задачах статистической радиофизики:

$$J[\tilde{x}(t)] = \alpha \int_0^T \tilde{x}^2(t) dt$$

(см. [15, 23]) при $V(t, t') = \alpha \delta(t - t')$,

$$J[\tilde{x}(t)] = \alpha \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{x}(T - t) dt$$

(см. [4, 5]) при $V(t, t') = \alpha \delta(t + t' - T)$,

$$J[\tilde{x}(t)] = \alpha \int_0^T (\tilde{x}(t)\tilde{x}(t + \Delta) + \tilde{x}(t)\tilde{x}(t - \Delta))dt, \quad \Delta > 0$$

при $V(t, t') = \alpha(\delta(t' - t - \Delta) + \delta(t' - t + \Delta))$ и $t \in [-\Delta, T + \Delta]$ с положительной постоянной $\alpha > 0$. В дальнейшем важно дать обоснование методу реконструкции, применяемому при вычислении характеристических функций для такого рода функционалов от гауссовских случайных процессов. Кроме того, заметим, что метод реконструкции, которому было дано обоснование в настоящей работе, переносится на многомерный случай, т.е. для вычисления характеристических функций квадратичных функционалов от гауссовских полей на $\mathbb{R}^n$. При обосновании такого подхода, следуя плану настоящей работы, почти все доказательства, по-видимому, могут быть повторены почти дословно при комплексификации случайного поля. Такая математическая работа, по нашему мнению, важна с прикладной точки зрения (см. по этому поводу, например, [10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
2. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин С. А. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
3. Вирченко Ю. П., Данилова Л. П. Графы и симметрические функции // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 174. — С. 20–36.
4. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Статистические свойства функционала-свертки от нормального марковского процесса // Докл. АН УССР. — 1988. — № 1. — С. 14–16.
5. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Распределение вероятностей случайного функционала-свертки от нормального марковского процесса // Пробл. передачи информ. — 1990. — 26, № 3. — С. 96–101.
6. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ в задачах. — М.: Наука, 1969.
7. Клячко А. А., Солодяников Ю. В. Вычисление распределения свертки винеровского процесса // Пробл. передачи информ. — 1985. — 21, № 4. — С. 41–48.
8. Клячко А. А., Солодяников Ю. В. Вычисление характеристических функций некоторых функционалов от винеровского процесса и броуновского моста // Теор. вер. примен. — 1986. — 31, № 3. — С. 569–573.
9. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Радио и связь, 1989.
10. Мазманишвили А. С. Интегральные квадратичные функционалы, основанные на марковском нормальном двумерном поле, и их статистика // Изв. вузов. Радиофизику — 2000. — 43, № 6. — С. 564–572.
11. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
12. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М.: Физматлит, 1960.
13. Arato M. Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach. — Berlin: Springer-Verlag, 1982.
14. Ibragimov I. A., Rozanov Yu. A. Gaussian Random Processes. — New York: Springer-Verlag, 1978.
15. Kac M., Ziegert A. J. F. On the theory of noise in radio receivers with square law detector // J. Appl. Phys. — 1947. — 18, № 4. — P. 383–397.
16. Karhunen K. Über linearen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. — 1947. — № 37.
17. Lax M. Fluctuation and Coherence Phenomena in Classical and Quantum Physics. — New York: Gordon and Breach, 1968.
18. Loève M. Probability Theory. — Princeton, New Jersey: Van Nostrand, 1955.
19. Lukacs E. Characteristic Functions. — New York: Hafner, 1970.
20. Ruelle D. Statistical Mechanics. Rigorous Results. — New York–Amsterdam: W.A. Benjamin, 1969.
21. Simon B. The $P(\varphi)_2$ Euclidian (Quantum) Field Theory. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1974.
22. Simon B. Functional Integration and Quantum Physics. — New York: Academic Press, 1979.

23. *Slepian D.* Fluctuation of random noise power// Bell Syst. Techn. J. — 1958. — 37, № 1. — P. 163–184.
24. *Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S.* On the theory of Brownian motion// Phys. Rev. — 1930. — 36. — P. 823–841.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Вирченко Юрий Петрович

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Мазманишвили Александр Сергеевич

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»

E-mail: mazmanishvili@gmail.ru



ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ 3D УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© 2023 г. А. В. КОПТЕВ

Аннотация. В работе предложена процедура построения точного решения 3D уравнений Навье—Стокса для случая потенциального движения несжимаемой жидкости в глубоком резервуаре большого объема. Рассматривается решение при асимптотических граничных условиях, которые соответствуют заданному значению вектора скорости на большой глубине. Процедура построения решения основывается на интеграле 3D уравнений Навье—Стокса. В результате введения функций комплексного переменного задача сводится к системе уравнений Риккати, допускающей аналитическое решение. Для полученного решения исследованы качественные особенности.

Ключевые слова: уравнения Навье—Стокса, вязкая жидкость, потенциальное движение, интеграл, функция комплексного переменного, уравнение Риккати.

EXACT SOLUTION OF 3D NAVIER—STOKES EQUATIONS FOR POTENTIAL MOTIONS OF AN INCOMPRESSIBLE FLUID

© 2023 А. V. KOPTEV

ABSTRACT. A procedure for constructing an exact solution of the 3D Navier–Stokes equations for the case of potential motion of an incompressible fluid in a deep, large-volume reservoir is proposed. The solution is considered under asymptotic boundary conditions that correspond to a given value of the velocity vector at great depth. The procedure for constructing a solution is based on the integral of the 3D Navier–Stokes equations. By introducing functions of a complex variable, the problem is reduced to a system of Riccati equations, which can be solved analytically. The qualitative features of the solution are examined.

Keywords and phrases: Navier–Stokes equations, viscous fluid, potential motion, integral, function of a complex variable, Riccati equation.

AMS Subject Classification: 76D05, 34A34

1. Уравнения Навье—Стокса. Уравнения Навье—Стокса описывают движение жидких и газообразных сред при наличии вязкости. Они представляют интерес как с чисто математической точки зрения, так и с точки зрения приложения к практическим задачам. Для случая 3D движения несжимаемой среды уравнения Навье—Стокса вместе с уравнением неразрывности в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial(p + \Phi)}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial(p + \Phi)}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial(p + \Phi)}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Основными неизвестными являются компоненты вектора скорости u , v , w и давление p ; каждая из них есть функция четырех независимых переменных x , y , z и t . Величина Φ представляет заданную функцию потенциала внешних сил, Re — неотрицательный параметр, называемый числом Рейнольдса.

На сегодняшний день многие вопросы, связанные с уравнениями (1)–(4) проработаны недостаточно и требуют дополнительного исследования. Нет окончательного решения проблемы существования гладкого решения при достаточно гладких краевых и начальных условиях (см. [2, 4]). Нет четкого представления об асимптотике решения при больших временах и при больших значениях числа Рейнольдса. Не ясна структура решений и нет общего подхода к решению как самих уравнений, так и краевых и начальных задач для них. В этой связи представляет интерес построение точных решений 3D уравнений Навье—Стокса, причем особый интерес представляют достаточно широкие классы решений и исследование их особенностей.

2. Постановка задачи. Будем рассматривать движение несжимаемой жидкости в большом резервуаре, когда влиянием ограничивающих поверхностей можно пренебречь. Пусть ось OZ направлена вертикально вверх, а координатная плоскость XOY совпадает со свободной поверхностью в начальный момент времени. Считаем, что движение жидкости происходит в поле силы тяжести, направленной вертикально вниз. Потенциал внешних сил определен как $\Phi = gz$, где g — ускорение свободного падения. Ограничимся рассмотрением потенциальных движений жидкости, т.е. таких, для которых существует потенциал скорости φ . Для этого случая движение безвихревое, и выполнены равенства

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (5)$$

При этом потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Построим решения уравнений (1)–(4), удовлетворяющих асимптотическим условиям на большой глубине при $z \rightarrow -\infty$ и гладким начальным условиями. Асимптотические условия зададим следующим образом. Полагаем

$$u \rightarrow u_0, \quad v \rightarrow v_0, \quad w \rightarrow w_0, \quad (7)$$

если

$$x = \frac{c_x}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad y = \frac{c_y}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad z = \frac{c_z}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0,$$

где u_0 , v_0 , w_0 представляют заданные предельные значения компонентов вектора скорости на бесконечности, а символом $o(1/\varepsilon)$ обозначены величины, имеющие на бесконечности порядок меньший, чем $1/\varepsilon$.

Асимптотические условия (7) соответствуют наличию постоянно действующего источника на глубине, который генерирует струю со скоростью $\bar{U}(u_0, v_0, w_0)$. При этом предполагается, что $w_0 > 0$. Также предполагаются заданными величины c_x , c_y , c_z , которые определяют коэффициенты при старших слагаемых, когда аргументы x , y , z приближаются к бесконечности. Для нашего случая полагаем $c_x \neq 0$, $c_y \neq 0$, $c_z < 0$.

3. Метод решения. Традиционный подход к построению решений для случая потенциальных движений жидкости основан на решении уравнения (6) для потенциала. Если следовать этому подходу, то уравнения (1)–4 значительно упрощаются. Уравнение (4) выполняется автоматически, а в уравнениях (1)–3 выпадают члены со старшими производными ввиду равенств

$\Delta u = \Delta v = \Delta w = 0$. В результате эти три уравнения приводят к интегралу Лагранжа—Коши

$$p + gz + \frac{U^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t), \quad (8)$$

где U — модуль вектора скорости, $U = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, а $f(t)$ — произвольная функция времени. Однако при таком подходе из дальнейшего рассмотрения выпадает число Рейнольдса Re , поскольку оно не будет фигурировать ни в уравнении (6), ни в интеграле Лагранжа—Коши (8). В этом случае фактически будем получать решение более простых уравнений Эйлера.

Построим решение уравнений Навье—Стокса, в котором присутствовало бы в качестве параметра число Рейнольдса Re , и тем самым попытаемся выявить зависимость решения от этой важнейшей характеристики движения. Предлагается использовать не интеграл Лагранжа—Коши, а более общие интегралы уравнений Навье—Стокса, описание и вывод которых дано в [1, 5, 6].

3.1. Интеграл 3D уравнений Навье—Стокса для общего случая движения вязкой несжимаемой жидкости сводится к девяти соотношениям

$$p + \Phi + \frac{U^2}{2} + d + d_t = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \quad (9)$$

$$u^2 - v^2 + \frac{2}{Re} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial z^2} + \\ + \frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial(\Psi_5 + \Psi_6)}{\partial z} \right) + 3(\alpha_1 - \beta_1), \quad (10)$$

$$v^2 - w^2 + \frac{2}{Re} \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial z^2} + \\ - \frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(\Psi_1 + \Psi_2)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_6}{\partial z} \right) + 3(\beta_1 - \gamma_1), \quad (11)$$

$$uv - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \Psi_{15}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{14}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_{13}}{\partial z} \right) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial(\Psi_8 + \Psi_9)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_4}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} + \frac{\partial \beta_4}{\partial z} - \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right), \quad (12)$$

$$uw - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi_{15}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{14}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_{13}}{\partial z} \right) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi_9 - \Psi_7)}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_4}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_4}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial t} \right), \quad (13)$$

$$vw - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi_{14}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_{15}}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_{13}}{\partial z} \right) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(\Psi_7 + \Psi_8)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_4}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_4}{\partial x} + \frac{\partial \beta_3}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} \right), \quad (14)$$

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_7}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_8}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial z} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} + \frac{\partial \delta_1}{\partial y} + \frac{\partial \delta_2}{\partial z} \right), \quad (15)$$

$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_7}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi_9}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} \right) \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x} + \frac{\partial \beta_3}{\partial z} - \frac{\partial \delta_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta_3}{\partial z} \right), \quad (16)$$

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_8}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Psi_9}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial x} - \frac{\partial \delta_2}{\partial x} - \frac{\partial \delta_3}{\partial y} \right), \quad (17)$$

где Ψ_j представляют новые ассоциированные неизвестные, возникающие при интегрировании, $j = 1, 2, \dots, 15$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ при $i = 1, 2, 3, 4$ — произвольные функции трех переменных, для которых выполнено условие

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = \frac{\partial \beta_i}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_i}{\partial z} = \frac{\partial \delta_i}{\partial t} = 0.$$

Величины d и d_t , входящие в (9), определены формулами

$$d_t = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(\Psi_2 - \Psi_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi_4 - \Psi_3)}{\partial y} + \frac{\partial(\Psi_6 - \Psi_5)}{\partial z} \right), \quad (18)$$

$$d = -\frac{U^2}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_6}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_5}{\partial x \partial y} - \Delta_{xy} \Psi_1 + \Delta_{xz} \Psi_2 - \Delta_{yz} \Psi_3 \right), \quad (19)$$

где

$$\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Соотношения (9)–17, рассмотренные в совокупности, представляют интеграл 3D движения вязкой несжимаемой жидкости.

Отметим некоторые свойства этих соотношений. Во-первых, порядок производных для основных неизвестных u, v, w, p на единицу меньше их порядка в исходных уравнениях (см. [1–4]). Во-вторых, число неизвестных больше числа уравнений. Имеем девятнадцать неизвестных, среди которых четыре основных (u, v, w, p) и пятнадцать ассоциированных (функции $\Psi_i, i = 1, 2, \dots, 15$). Поскольку связывающих их соотношений девять, появляются возможности удовлетворить дополнительным условиям, например, краевым или начальным. В-третьих, замечаем, что в пяти соотношениях явно присутствует число Рейнольдса Re в качестве параметра. При этом можно показать, что интеграл Лагранжа–Коши для движения несжимаемой среды получается из соотношений (9)–(17) как частный случай (см. [7]). Обратим внимание также на то, что линейные уравнения (15)–(17) заведомо обеспечивают выполнимость уравнения неразрывности (4). Обращает на себя внимание также тот факт, что неизвестное p присутствует лишь в соотношении (9), причем аддитивно. Следовательно, при решении конкретной задачи вначале можно сосредоточиться на разрешении уравнений (10)–(14) и лишь на последнем этапе обратиться к (9) для определения неизвестного p . В рассматриваемой работе именно в такой последовательности и предлагается действовать.

В целом справедливо полагать, что соотношения (9)–(17) открывают новые возможности для построения точных решений уравнений Навье–Стокса (1)–(4) (см. [8–10]).

3.2. Функции комплексного переменного. Рассмотрим нелинейные уравнения (10)–(14). Эти уравнения обладают симметрией относительно u, v, w . Чтобы учесть симметрию в полной мере, добавим к этим пяти уравнениям еще одно, которое получается как взятая с обратным знаком сумма (10) и (11). Это новое уравнение имеет вид

$$w^2 - u^2 + \frac{2}{Re} \left(-\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_5}{\partial z} \right) + 3(\gamma_1 - \alpha_1). \quad (20)$$

Рассмотрим шесть уравнений (10)–(14) и (20) попарно в зависимости от того, какие из основных неизвестных они связывают. Первую пару образуют уравнения (10) и (12). Эти уравнения связывают основные неизвестные u и v . Вторая пара — это уравнения (11) и (14), которые связывают неизвестные v и w . Третья пара образована уравнениями (13) и (20), которые связывают

неизвестные w и u . Для каждой из указанных пар уравнений введем функции комплексного переменного.

Рассмотрим первую пару уравнений, т.е. уравнения (10) и (12). В целях удобства последующих вычислений умножим (12) на $-2i$ и введем функцию комплексного переменного

$$F_1(z_1) = u - iv, \quad z_1 = x + iy. \quad (21)$$

Тогда левые части указанных уравнений представляют действительную и мнимую части величины

$$F_1^2(z_1) - \frac{4}{Re} \cdot \frac{dF_1}{dz_1}.$$

Обоснованием последнего утверждения являются равенства

$$F_1^2(z_1) = u^2 - v^2 - 2iuv, \quad \frac{dF_1}{dz_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

В результате пара уравнений (10) и (12) равносильна одному комплексному дифференциальному уравнению

$$-\frac{4}{Re} \cdot \frac{dF_1}{dz_1} + F_1^2(z_1) = r_1(z_1),$$

где правая часть $r_1(z_1)$ есть сумма всех членов, не зависящих от u , v и F_1 .

Для двух других пар действуем аналогичным образом. Каждое из уравнений (13) и (14) умножаем на $-2i$ и вводим функции комплексного переменного, сохраняя циклический порядок. Для второй пары вводим функцию $F_2(z_2) = v - iw$, где $z_2 = y + iz$, и для третьей пары — функцию $F_3(z_3) = w - iu$, где $z_3 = z + ix$. В результате каждая из рассмотренных пар уравнений равносильна одному дифференциальному уравнению относительно функции комплексного переменного

$$-\frac{4}{Re} \cdot \frac{dR}{dz_k} + R^2 = r_k(z_k), \quad (22)$$

где в качестве R фигурируют функции $F_k(z_k)$ при $k = 1, 2, 3$.

Уравнение (22) есть нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение известного вида. Оно характеризуется как специальное уравнение Риккати (см. [3]). Уравнения этого вида хорошо изучены и разрешимы в квадратурах при некоторых вариантах правой части. Имея целью получить аналитическое решение задачи, выберем один из таких вариантов. Положим каждую из правых частей уравнения (22) квадратом некоторой комплекснозначной функции t :

$$r_k(z_k) = C_k^2(t), \quad (23)$$

где $C_k(t) = A_k(t) + iB_k(t)$, тогда как $A_k(t)$ и $B_k(t)$ суть некоторые действительные функции t . Ввиду того, что уравнение (15) для третьей пары получалось как взятая с обратным знаком сумма (10) и (11), то необходимо ограничение

$$A_1^2(t) + A_2^2(t) + A_3^2(t) = B_1^2(t) + B_2^2(t) + B_3^2(t). \quad (24)$$

3.3. Нахождение основных неизвестных. Рассмотрим более подробно дифференциальное уравнение (22), когда правые части заданы в виде (23). Сосредоточимся на рассмотрении лишь ограниченных по модулю решений. Для уравнения (22) такие решения имеют вид

$$R = -C_k(t) \operatorname{th} \left(\frac{Re}{4} C_k(t) (z_k - z_k^{(0)}) \right) \quad (25)$$

или

$$R = \pm C_k(t), \quad (26)$$

где $z_k^{(0)}$, $k = 1, 2, 3$, — произвольные комплексные постоянные.

Решение (26) — это особое решение, не зависящее от координат и не представляющее интереса. Поэтому сосредоточимся на рассмотрении решения (25). Для этого решения можно удовлетворить краевым и начальным условиям.

На данном этапе удобно от комплексных величин вновь перейти к действительным. Отделяем действительные и мнимые части в (25) и получаем выражения для u , v , w . При этом обнаруживается следующая закономерность. Каждая из неизвестных u , v , w встречается в полученных выражениях дважды. Так, u одновременно представляет $\operatorname{Re} F_1(z_1)$ и $-\operatorname{Im} F_3(z_3)$. Точно так же v представляет $-\operatorname{Im} F_1(z_1)$ и $\operatorname{Re} F_2(z_2)$, а w представляет $\operatorname{Re} F_3(z_3)$ и $-\operatorname{Im} F_2(z_2)$, где Re и Im обозначают соответственно действительную и мнимую части комплексной величины. Предлагается искомое выражение для каждого из неизвестных u , v , w строить в виде суммы обоих представляющих выражений. В результате получаем

$$u = \operatorname{Re} F_1(z_1) - \operatorname{Im} F_3(z_3), \quad v = -\operatorname{Im} F_1(z_1) + \operatorname{Re} F_2(z_2), \quad w = -\operatorname{Im} F_2(z_2) + \operatorname{Re} F_3(z_3). \quad (27)$$

Действуя подобным образом, мы заведомо обеспечиваем выполнимость уравнения неразрывности (4) поскольку введение функций комплексного переменного $F_1(z_1)$, $F_2(z_2)$, $F_3(z_3)$ вносит условия Коши—Римана на их действительные и мнимые части. Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} u_1 &= \operatorname{Re} F_1(z_1), & u_2 &= -\operatorname{Im} F_3(z_3), \\ v_1 &= -\operatorname{Im} F_1(z_1), & v_2 &= \operatorname{Re} F_2(z_2), \\ w_1 &= -\operatorname{Im} F_2(z_2), & w_2 &= \operatorname{Re} F_3(z_3), \end{aligned}$$

то будут выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{\partial v_1}{\partial y}, & \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{\partial v_1}{\partial x}, & \frac{\partial v_2}{\partial y} &= -\frac{\partial w_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial z} &= \frac{\partial w_1}{\partial y}, & \frac{\partial w_2}{\partial z} &= -\frac{\partial u_2}{\partial x}, & \frac{\partial w_2}{\partial x} &= \frac{\partial u_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (28)$$

Левая часть уравнения неразрывности (4) с учетом (28) преобразуется к виду

$$\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(w_1 + w_2)}{\partial z} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right).$$

Последнее тождественно равно нулю, ввиду первого, третьего и пятого равенств (28). Уравнение (4) выполнено. Таким образом, выражения (27) обеспечивают выполнимость всех соотношений (10)–(17); при этом не пришлось определять выражения для ассоциированных неизвестных Ψ_j .

В результате отделения действительных и мнимых частей в (25) с учетом (27) приходим к выражениям для неизвестных u , v , w в виде

$$\begin{aligned} u &= -\frac{A_1(t) \operatorname{sh} \frac{\operatorname{Re} \theta_1}{2} - B_1(t) \sin \frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{2}}{2 \left(\cos^2 \frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{4} + \operatorname{sh}^2 \frac{\operatorname{Re} \theta_1}{4} \right)} + \frac{B_3(t) \operatorname{sh} \frac{\operatorname{Re} \theta_3}{2} + A_3(t) \sin \frac{\operatorname{Re} \lambda_3}{2}}{2 \left(\cos^2 \frac{\operatorname{Re} \lambda_3}{4} + \operatorname{sh}^2 \frac{\operatorname{Re} \theta_3}{4} \right)}, \\ v &= -\frac{A_2(t) \operatorname{sh} \frac{\operatorname{Re} \theta_2}{2} - B_2(t) \sin \frac{\operatorname{Re} \lambda_2}{2}}{2 \left(\cos^2 \frac{\operatorname{Re} \lambda_2}{4} + \operatorname{sh}^2 \frac{\operatorname{Re} \theta_2}{4} \right)} + \frac{B_1(t) \operatorname{sh} \frac{\operatorname{Re} \theta_1}{2} + A_1(t) \sin \frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{2}}{2 \left(\cos^2 \frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{4} + \operatorname{sh}^2 \frac{\operatorname{Re} \theta_1}{4} \right)}, \\ w &= -\frac{A_3(t) \operatorname{sh} \frac{\operatorname{Re} \theta_3}{2} - B_3(t) \sin \frac{\operatorname{Re} \lambda_3}{2}}{2 \left(\cos^2 \frac{\operatorname{Re} \lambda_3}{4} + \operatorname{sh}^2 \frac{\operatorname{Re} \theta_3}{4} \right)} + \frac{B_2(t) \operatorname{sh} \frac{\operatorname{Re} \theta_2}{2} + A_2(t) \sin \frac{\operatorname{Re} \lambda_2}{2}}{2 \left(\cos^2 \frac{\operatorname{Re} \lambda_2}{4} + \operatorname{sh}^2 \frac{\operatorname{Re} \theta_2}{4} \right)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражение для неизвестного p получается с помощью (9) с учетом (19), (18). В данном случае получается выражение, аналогичное тому, которое получилось бы из интеграла Лагранжа—Коши (8). Вычисления приводят к следующему результату:

$$p - p_0 = -gz - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad (30)$$

потенциал скорости φ представляется суммой трех слагаемых

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

где

$$\varphi_k = \frac{2}{Re} \ln \left(\cos^2 \frac{Re \lambda_k}{4} + \operatorname{sh}^2 \frac{Re \theta_k}{4} \right), \quad k = 1, 2, 3,$$

причем

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A_1(t)(x - x_0) - B_1(t)(y - y_0), & \lambda_1 &= B_1(t)(x - x_0) + A_1(t)(y - y_0), \\ \theta_2 &= A_2(t)(y - y_0) - B_2(t)(z - z_0), & \lambda_2 &= B_2(t)(y - y_0) + A_2(t)(z - z_0), \\ \theta_3 &= A_3(t)(z - z_0) - B_3(t)(x - x_0), & \lambda_3 &= B_3(t)(z - z_0) + A_3(t)(x - x_0). \end{aligned} \quad (31)$$

Выражения (29)–31 представляют множество точных решений 3D уравнений Навье—Стокса (1)–4. При этом x_0, y_0, z_0 суть произвольные постоянные, а $u_0, v_0, w_0, c_x, c_y, c_z$ — заданные параметры. Величины $A_k(t), B_k(t)$ при $k = 1, 2, 3$, — пока не определенные функции времени.

4. Выполнимость краевых и начальных условий.

4.1. Краевые условия. Обратимся к краевым условиям, которые заданы асимптотическими соотношениями (7), и исследуем возможности, как им удовлетворить. Пусть, для простоты $x_0 = y_0 = w_0 = 0$, а величины $u_0, v_0, w_0, c_x, c_y, c_z$ считаем заданными. Но при этом полагаем выполненными ограничения $c_z < 0$ и $w_0 > 0$. Нужно выбрать функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$ так, чтобы удовлетворить условиям (7). Эта частная задача решается следующим образом. Согласно условиям (7) необходимо, чтобы правые части выражений (29) на бесконечности асимптотически приближались бы соответственно к u_0, v_0, w_0 . Ясно также, что асимптотическое поведение u, v, w во многом определяется знаком аргументов гиперболических функций при больших по модулю значениях аргументов.

Пусть $1/\varepsilon \rightarrow +\infty$ и каждый из аргументов x, y, z приближается к бесконечности. Рассмотрим, например, первое слагаемое правой части первого из выражений (29) для u . Если $\theta_1 > 0$, то эта величина приближается к $-A_1(t)$. Если же $\theta_1 < 0$, то эта величина приближается к $A_1(t)$. Первая возможность имеет место, если $A_1(t)c_x - B_1(t)c_y > 0$, а вторая — при $A_1(t)c_x - B_1(t)c_y < 0$. Нужно рассматривать различные возможности в зависимости от знаков величин θ_k при больших значениях x, y, z . Всего имеем восемь основных возможностей, которые отличаются друг от друга хотя бы одним знаком в выражениях для θ_k . Рассмотрим некоторые из них более подробно.

1. Пусть $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \theta_3 > 0$. Эта возможность имеет место при предположениях

$$A_1(t)c_x - B_1(t)c_y > 0, \quad A_2(t)c_y - B_2(t)c_z > 0, \quad A_3(t)c_z - B_3(t)c_x > 0. \quad (32)$$

В этом случае для выполнимости условий (7) необходимо

$$-A_1(t) + B_3(t) = u_0, \quad -A_2(t) + B_1(t) = v_0, \quad -A_3(t) + B_2(t) = w_0.$$

К этим равенствам нужно добавить уравнение (24) и разрешить систему относительно шести неизвестных $A_k(t)$ и $B_k(t)$. Вычисления приводят к следующим результатам. Величины $A_1(t), B_1(t)$ можно выбрать произвольно, а остальные четыре выражаются через них по формулам

$$\begin{aligned} A_2(t) &= B_1(t) - v_0, & B_2(t) &= \frac{v_0^2 - u_0^2 + w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \\ A_3(t) &= \frac{v_0^2 - u_0^2 - w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0}, & B_3(t) &= u_0 + A_1(t). \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, для рассмотренной возможности когда, согласно предположению, выполнены неравенства (32), решение, удовлетворяющее условиям (7), построено. Основные неизвестные задаются выражениями (29) и (30). При этом функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$, задаются формулами (33), где $A_1(t)$ и $B_1(t)$ — произвольные функции времени. Если же хотя бы одно из неравенств (32) не выполнено, то приведенные выражения не имеют места.

2. Рассмотрим вторую возможность, которая соответствует случаю $\theta_1 > 0$, $\theta_2 < 0$, $\theta_3 > 0$. Эта возможность имеет место при предположениях

$$A_1(t)c_x - B_1(t)c_y > 0, \quad A_2(t)c_y - B_2(t)c_z < 0, \quad A_3(t)c_z - B_3(t)c_x > 0. \quad (34)$$

Для выполнимости условий (7) необходимо

$$-A_1(t) + B_3(t) = u_0, \quad A_2(t) + B_1(t) = v_0, \quad -A_3(t) - B_2(t) = w_0.$$

Дальнейшие вычисления приводят к следующим результатам:

$$\begin{aligned} A_2(t) &= v_0 - B_1(t), \quad B_2(t) = \frac{u_0^2 - v_0^2 + w_0^2 + 2u_0A_1(t) + 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \\ A_3(t) &= \frac{v_0^2 - u_0^2 - w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \quad B_3(t) = u_0 + A_1(t). \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, при выполнимости неравенств (34) решение, удовлетворяющее условиям (7), построено. Основные неизвестные задаются выражениями (29) и (30). При этом функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$, задаются формулами (35), где $A_1(t)$ и $B_1(t)$ — произвольные функции времени.

3. Рассмотрим вариант $\theta_1 < 0$, $\theta_2 < 0$, $\theta_3 < 0$. Эта возможность имеет место, если

$$A_1(t)c_x - B_1(t)c_y < 0, \quad A_2(t)c_y - B_2(t)c_z < 0, \quad A_3(t)c_z - B_3(t)c_x < 0. \quad (36)$$

Для выполнимости условий (7) необходимо

$$A_1(t) - B_3(t) = u_0, \quad A_2(t) - B_1(t) = v_0, \quad A_3(t) - B_2(t) = w_0.$$

В результате приходим к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} A_2(t) &= v_0 + B_1(t), \quad B_2(t) = \frac{u_0^2 - v_0^2 - w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \\ A_3(t) &= \frac{u_0^2 - v_0^2 + w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \quad B_3(t) = u_0 + A_1(t). \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, если выполнены неравенства (36), то решение, удовлетворяющее условиям (7), также построено. Основные неизвестные задаются выражениями (29) и (30). При этом функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$, задаются формулами (37), где $A_1(t)$ и $B_1(t)$ — произвольные функции времени.

Для каждой из возможностей, как рассмотренных, так и для других пяти, имеют место следующие закономерности. Общие выражения (29) и (30) для основных неизвестных остаются в силе, но при этом функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$, определяются разными выражениями. Отсюда следует, что окончательные выражения для неизвестных u , v , w , p также получаются различными. При этом во всех выражениях присутствуют произвольные функции времени $A_1(t)$ и $B_1(t)$.

Решения указанного вида существуют только когда значения $A_1(t)$ и $B_1(t)$ находятся внутри некоторой области, конфигурация которой определяется параметрами u_0 , v_0 , w_0 , c_x , c_y , c_z . В частности, если положить

$$c_x = 1, \quad c_y = 2, \quad c_z = -3, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 4,$$

то эта область представляет прямоугольник на декартовой плоскости, когда значения $A_1(t)$ откладываются вдоль оси абсцисс, а $B_1(t)$ — вдоль оси ординат. Вершины этого прямоугольника расположены в точках $(\pm 6, \pm 3)$. Диагональ, соединяющая точки $(-6, -3)$ и $(6, 3)$, разбивает указанный прямоугольник на две треугольные области. Если точка $(A_1(t), B_1(t))$ располагается в нижней треугольной области, то имеет место одна из четырех возможностей, для которых выполнено неравенство $A_1(t)c_x - B_1(t)c_y > 0$. Если точка $(A_1(t), B_1(t))$ располагается в верхней треугольной области, то имеет место одна из четырех возможностей, для которых выполнено $A_1(t)c_x - B_1(t)c_y < 0$. Если точка $(A_1(t), B_1(t))$ располагается вне указанного прямоугольника, то решений, удовлетворяющих условию (7), не существует.

Таким образом, чтобы при некоторых функциях $A_1(t)$ и $B_1(t)$ и при заданных величинах u_0 , v_0 , w_0 , c_x , c_y , c_z удовлетворить условию (7), нужно определить знаки величин θ_k и тем самым

определить одну из возможностей для нахождения $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$. При этом искомое решение существует только в случае, когда $A_1(t)$ и $B_1(t)$ располагается внутри строго определенной области в зависимости от значений параметров $u_0, v_0, w_0, c_x, c_y, c_z$.

4.2. Начальные условия. Задание начальных условий во многом определяется функциями $A_1(t)$ и $B_1(t)$. Зададим их, а также значения параметров следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= 0, & B_1(t) &= t \\ c_x &= 1, & c_y &= 2, & c_z &= -3, & u_0 &= v_0 = 0, & w_0 &= 4. \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда при $0 < t < 3$ точка $(A_1(t), B_1(t))$ находится внутри треугольника с вершинами $(-6, -3)$, $(-6, 3)$, $(6, 3)$ и выполнены неравенства $\theta_1 < 0$, $\theta_2 < 0$, $\theta_3 < 0$. Имеет место третья возможность, и вспомогательные величины $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$, определяются согласно формулам (37). Начальные условия для рассматриваемого случая зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{\sin(\operatorname{Re} x)}{\cos^2 \frac{\operatorname{Re} x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\operatorname{Re} z}{2}}, & v(0) &= -\frac{\sin(\operatorname{Re} y)}{\cos^2 \frac{\operatorname{Re} y}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\operatorname{Re} z}{2}}, \\ w(0) &= -\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{Re} z)}{\cos^2 \frac{\operatorname{Re} x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\operatorname{Re} z}{2}} + \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{Re} z)}{\cos^2 \frac{\operatorname{Re} y}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\operatorname{Re} z}{2}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Ясно, что выражения (39) определяют гладкие начальные условия. Таким образом, формулы (29)–(30) с учетом (37) представляют решение уравнений (1)–(4) с краевыми асимптотическими условиями (7) и гладкими начальными условиями (39).

5. Качественные особенности. Имеем точное решение уравнений Навье—Стокса (1)–(4) с асимптотическими условиями (7) и начальными условиями (39). Кратко проанализируем качественные особенности.

Рассмотрим формулы (29), определяющие выражения для скоростей. В этих выражениях присутствуют тригонометрические функции, причем, их аргументы пропорциональны числу Рейнольдса Re . Данные формулы определяют некоторое колебательное движение с частотой колебаний, пропорциональной числу Re . При больших значениях Re период колебаний стремится к нулю; в реальной несжимаемой жидкости такие колебания не могут быть реализованы. Таким образом, полученное решение имеет место лишь при сравнительно небольших значениях Re , тогда как при больших Re построенное решение будет разрушаться.

Еще одна особенность состоит в том, что построенное решение имеет конечное время жизни. Действительно, как уже отмечалось выше, решение, удовлетворяющее всем условиям, существует лишь до тех пор, пока точка $(A_1(t), B_1(t))$ находится внутри треугольника с вершинами $(-6, -3)$, $(-6, 3)$, $(6, 3)$. При выборе функций $A_1(t)$ и $B_1(t)$ согласно (38) указанное условие выполнено лишь при $0 < t < t_*$, где $t_* = 3$. Значит, при $t > 3$ построенное решение не существует и в безразмерных единицах время жизни данного решения равно 3.

Следует также отметить, что свойства решения, включая свойства гладкости, во многом определяется функциями $A_1(t)$ и $B_1(t)$, которые не фигурируют ни в краевых, ни в начальных условиях. Значит, для того чтобы гарантировать достаточную гладкость получаемого решения, нужно накладывать некоторые дополнительные условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коптев А. В. Интегралы уравнений Навье—Стокса // Тр. Средневолж. мат. о-ва. — 2004. — 6, № 1. — С. 215–225.
2. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
3. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Физматлит, 2001.
4. Fefferman C. L. Existence and Smoothness of the Navier–Stokes Equation. — Princeton Univ., 2000.

5. *Koptev A. V.* Integrals of motion of an incompressible medium flow. From classic to modern// in: Handbook on Navier–Stokes Equations. Theory and Applied Analysis. — New York: Nova Science Publishers, 2017. — P. 443–460.
6. *Koptev A. V.* Method for solving the Navier–Stokes and Euler equations of motion for incompressible media// J. Math. Sci. — 2020. — 250, № 1. — P. 254–382.
7. *Koptev A. V.* Systematization and analysis of integrals of motion for an incompressible fluid flow// Ж. СФУ. Сер. Мат. физ. — 2018. — 11, № 3. — С. 370–382.
8. *Koptev A. V.* Constructive method to solving 3D Navier–Stokes equations// 8 Eur. Congr. Math. Book of Abstracts. — Portorozh: Univ. of Primorska Press, 2021. — P. 638–639.
9. *Koptev A. V.* Exact solutions of 3D Navier–Stokes equations// Ж. СФУ. Сер. Мат. физ. — 2020. — 13, № 3. — С. 306–313.
10. *Koptev A. V.* Deep water movement// in: Navier–Stokes Equations and Their Applications. — New York: Nova Science Publishers, 2021. — P. 83–103.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Коптев Александр Владимирович
Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова, Санкт-Петербург
E-mail: Alex.Koptev@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 51–60
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-51-60

УДК 51-72, 517.97

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ДВУМЕРНОГО УПРУТОГО ТЕЛА С ДВУМЯ КОНТАКТИРУЮЩИМИ ТОНКИМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2023 г. Н. П. ЛАЗАРЕВ, В. А. КОВТУНЕНКО

Аннотация. Предлагается новая нелинейная математическая модель, описывающая равновесие двумерного упругого тела с двумя тонкими жесткими включениями. Задача формулируется в виде минимизации функционала энергии над невыпуклым множеством возможных перемещений, определенным в подходящем пространстве Соболева. Доказано существование вариационного решения задачи. Получены условия оптимальности и дифференциальные соотношения, характеризующие свойства решения в области и на включении, выполняющиеся при условии достаточной гладкости решения.

Ключевые слова: трещина, жесткое включение, условие непроникания, вариационная задача.

PROBLEM OF THE EQUILIBRIUM OF A TWO-DIMENSIONAL ELASTIC BODY WITH TWO CONTACTING THIN RIGID INCLUSIONS

© 2023 N. P. LAZAREV, V. A. KOVTUNENKO

ABSTRACT. A new nonlinear mathematical model is proposed that describes the equilibrium of a two-dimensional elastic body with two thin rigid inclusions. The problem is formulated as a minimizing problem for the energy functional over a nonconvex set of possible displacements defined in a suitable Sobolev space. The existence of a variational solution to the problem is proved. Optimality conditions and differential relations are obtained that characterize the properties of the solution in the domain and on the inclusion; these conditions are satisfied for sufficiently smooth solutions.

Keywords and phrases: crack, rigid inclusion, nonpenetration condition, variational problem.

AMS Subject Classification: 35A15, 74B99

Введение. Моделирование неоднородных тел с включениями представляет собой важное направление исследований в теории композитов. Наличие включений в нагруженных телах может обуславливать значительные концентрации напряжений ввиду разных физических свойств, в частности, из-за разности коэффициентов упругости. Это обстоятельство может приводить к отслоению включений и тем самым возникновению трещин на границе разных материалов. Трещины на стыке разных материалов в деталях инженерных конструкций могут возникать также по причине особенностей эксплуатационных режимов (например, из-за значительного перепада температур).

Разделы 1-2 выполнены при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2022-881). Раздел 3 выполнен Н. П. Лазаревым при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания (проект № FSRG-2023-0025).

Математические модели упругих тел с трещинами, учитывающие нелинейные эффекты механического взаимодействия противоположных берегов трещины активно изучаются с 1990-х гг. (см. [18]). Условия непроникания в виде неравенств на кривых или поверхностях трещин не допускают рассмотрение таких перемещений, которые соответствуют с физической точки зрения невозможному явлению — взаимному прониканию берегов трещины (см. [6, 11, 17, 22, 24]). Примеры решения некоторых линейных моделей с перемещениями вблизи трещины, которые противоречат физическому смыслу твердых тел, приведены, например, в [2]. Задачи для моделей упругих тел с трещинами вдоль части границ исследованы в ряде работ (см. [3, 13, 19, 27] и др.). Для таких моделей зависимость от изменения формы объектов исследовалась в [23, 28, 31, 32], зависимость от физических параметров изучена в [15, 16, 21, 26], численные методы решений представлены в [7, 29, 30].

Широкое применение условия непроникания нашли для класса задач о составных телах и композитах, содержащих жесткие включения. Так, обратная задача для пластины при наличии тонкого жесткого включения с шарнирным соединением и трещиной, проходящей вдоль включения, исследована в [25]. В том случае, когда в исходном состоянии тело содержит сломанное в одной точке тонкое включение, а именно, когда трещина пересекает включение, вариационная и дифференциальная задачи исследованы в [4, 19]. В [5] исследованы задачи для двумерных упругих тел содержащих тонкие упругие включения согласно моделей Бернулли—Эйлера и Тимошенко, исследованы предельные переходы по параметрам жесткости, а также проведена систематизация математических моделей в задачах равновесия упругих тел с тонкими включениями при наличии отслоения. Отслоение с двух сторон тонкого упругого включения исследовано для двумерной нелинейной модели в [20]. Асимптотическое разложение перемещений в окрестности вершины жесткого включения в случаях как с отслоением, т.е. при наличии трещины, так и без отслоения получено в [9]. В [10] на основе асимптотических представлений в виде степенного ряда исследована нелинейная задача для пороупругого тела с трещиной гидроразрыва, получены интегральные формулы, выражающие коэффициенты интенсивности напряжений. В [12] анализируется влияние взаимного расположения двух встроенных в упругую матрицу жестких линейных включений. Именно, с помощью метода граничных элементов получены численные решения для трех вариантов взаимного расположения прямолинейных включений: параллельная, коллинеарная и радиальная конфигурация. Более того, в этой работе проведено сравнение с экспериментальными данными в соответствии с методами фотоупругости. Метод исследования взаимодействия системы трещин и включений на основе интегральных уравнений предложен в [8].

Рассматриваемые модели упругих тел, пластин и балок сформулированы в рамках теории инфинитезимальных перемещений. Условие непроникания Синьорини, широко применяемое для описания контакта упругого тела, также является линеаризованным соотношением, полученным при малых деформациях. С другой стороны, жесткое перемещение включения может вызвать проникание в основание или другое жесткое включение даже при бесконечно малом перемещении. Например, в точке соприкосновения или разлома. Данное противоречие обуславливает необходимость для композитов и составных тел ставить не только условие контакта Синьорини на внешней границе и границе с упругой матрицей, но и геометрические условия, которые будут предотвращать взаимное проникание между жесткими включениями.

Новизна настоящей работы обусловлена тем, что в рамках задач с односторонними ограничениями предложена математическая модель, описывающая равновесие тела с двумя жесткими включениями, которые могут контактировать вблизи точки разрыва. Именно, в исходном состоянии включения прикасаются друг друга в одной точке разрыва, а в результате деформации могут приходить в контакт разными точками. Вариационная задача формулируется в виде минимизации над невыпуклым множеством. Как следствие, не удастся вывести условия оптимальности в общем виде. Доказано существование решения с помощью трех вспомогательных задач, для которых получены необходимые и достаточные условия оптимальности решения и установлены дифференциальные соотношения, характеризующие свойства гладкого решения.

1. Постановка задачи равновесия. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ , которая состоит из двух кривых $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\text{meas}(\Gamma_0) \geq 0$. Предположим, что прямолинейная кривая $\gamma = (a, 1) \times \{0\}$, $a < 0$, расположена внутри области Ω ; разобьем ее на части следующим

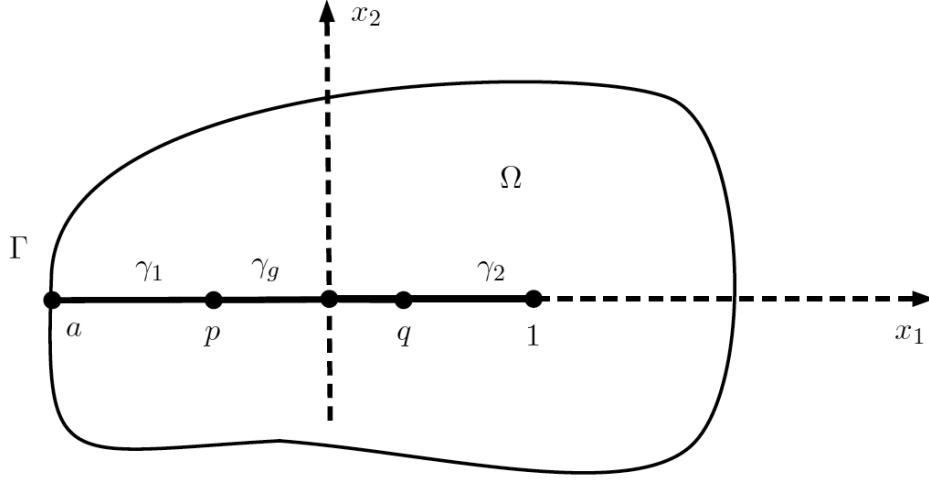


Рис. 1. Геометрия упругого тела с двумя жесткими включениями

образом: $\gamma_1 = (a, 0) \times \{0\}$, $\gamma_2 = [0, 1] \times \{0\}$, $(a, 0) \in \Gamma$, $\gamma_g = (p, q) \times \{0\}$, где $a < p < 0 < q < 1$ — фиксированные числа (см. рис. 1). Введем область с разрезом $\Omega_g = \Omega \setminus \bar{\gamma}_g$. Предположим, что область Ω можно разбить продолжением γ на две области Ω_1 , Ω_2 с липщицевыми границами $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$.

Будем считать, что тонкие жесткие включения задаются с помощью кривых γ_1 , γ_2 . Включения в исходном состоянии соприкасаются друг с другом в точке разрыва с координатами $(0, 0)$. Упругая часть тела в исходном состоянии занимает область $\Omega \setminus \bar{\gamma}$. Кроме того, полагаем, что вблизи точки разрыва (слома) оба включения отслаиваются с обеих сторон от упругой матрицы, образуя тем самым трещины отслоения. Геометрия трещин описывается одной и той же кривой γ_g . В рамках настоящей модели это означает, что перемещения на кривой γ_g , вообще говоря, не совпадают (не клеятся). Условия, задаваемые на γ_g опишем далее. Через $W = (w_1, w_2)$ обозначим вектор перемещений. Предположим, что тело, занимающее область Ω , закреплено на части внешней границы Γ_0 , и на части $\gamma_1 \setminus \gamma_g$ тонкого неподвижного включения γ_1 , т.е.

$$W = (0, 0) \quad \text{на } \Gamma_0 \cup (\gamma_1 \setminus \gamma_g). \quad (1)$$

Данное условие позволяет применять неравенство Корна. Введем следующее пространство Соболева в соответствии с условием закрепления:

$$H^{1,0}(\Omega_g) = \left\{ v \in H^1(\Omega_g) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0 \cup (\gamma_1 \setminus \gamma_g) \right\}, \quad H(\Omega_g) = H^{1,0}(\Omega_g)^2.$$

Определим компоненты описывающие деформацию и напряжение упругой части неоднородного тела

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(W) &= \frac{\partial w_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{12}(W) = \varepsilon_{21}(W) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{22}(W) = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}, \\ \sigma_{ij}(W) &= c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(W), \quad i, j = 1, 2, \end{aligned}$$

где c_{ijkl} — заданный тензор упругости, предполагаемый симметричным и положительно определенным:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{klij} = c_{jikl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad c_{ijkl} = \text{const}, \\ c_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} &\geq c_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi : \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \quad c_0 = \text{const}, \quad c_0 > 0. \end{aligned}$$

В соответствии с предположением о возможности разбиения области Ω_g на липщицевы подобласти, ввиду неравенства Корна (см. [18]) выполняется равномерная оценка снизу

$$\int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) d\Omega_g \geq c \|W\|_{H(\Omega_g)}^2 \quad \forall W \in H(\Omega_g), \quad (2)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от W . Функционал энергии для тела, нагруженного внешними объемными силами $F = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$, имеет вид

$$\Pi(W) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) - \int_{\Omega_g} FW$$

(см. [18]), где $FW = f_i w_i$, и по повторяющимся индексам производится суммирование.

Заметим, что неравенство (2) обеспечивает эквивалентность стандартной нормы в $H(\Omega_g)$ и полунормы, определяемой левой частью (2); кроме того, оно доставляет коэрцитивность $\Pi(W)$.

Тонкое жесткое включение, описываемое кривой γ_1 , считаем неподвижным и недеформируемым. Для того, чтобы задать подвижное (как единое целое) тонкое жесткое включение, соответствующее γ_2 , следуя подходу [13] потребуем специальную структуру перемещений на γ_2 так, чтобы $W|_{\gamma_2} = \rho$, $\rho \in R(\gamma_2)$, где

$$R(\gamma_2) = \left\{ \rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x_1, x_2) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2); b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) \in \gamma_2 \right\},$$

— пространство инфинитезимальных жестких перемещений (см. [13]). Это означает, что точки, лежащие на кривой γ_2 , имеют перемещения

$$W(x_1, 0)|_{\gamma_2} = b(0, -x_1) + (c_1, c_2),$$

поскольку на γ_2 имеет место равенство $x_2 = 0$. При этом слагаемое (c_1, c_2) задает параллельный перенос всех точек γ_2 ; в то же время слагаемое $b(0, -x_1)$ описывает линейаризованный поворот относительно начала координат и зависит в данном случае только от первой координаты x_1 , $(x_1, 0) \in \gamma_2$.

Для того, чтобы описать отслоение трещины, заметим сначала, что следы функций, определенных в пространстве $H^{1,0}(\Omega_g)$, отличаются на берегах кривой γ_g . Именно, если обозначим следы функции v на γ_g со стороны полуплоскости $x_2 > 0$ через v^+ , аналогично, следы той же функции со стороны полуплоскости $x_2 < 0$ через v^- , то, вообще говоря, выполняется соотношение $v^+ \neq v^-$.

Условие непроникания для трещин отслоения будем описывать с помощью условий

$$w_2^+(x_1, x_2) \geq 0 \quad \text{на } \gamma_g \cap \gamma_1, \quad w_2^+(x_1, x_2) \geq c_2 - bx_1 \quad \text{на } \gamma_g \cap \gamma_2, \quad (3)$$

$$w_2^-(x_1, x_2) \leq 0 \quad \text{на } \gamma_g \cap \gamma_1, \quad w_2^-(x_1, x_2) \leq c_2 - bx_1 \quad \text{на } \gamma_g \cap \gamma_2, \quad (4)$$

где числа b, c_2 таковы, что

$$b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2) = W(x_1, x_2) \quad \text{на } \gamma_2 \setminus \gamma_g. \quad (5)$$

Для включения γ_2 соотношения (3)–(5) означают, что ее перемещения по оси Ox_2 в части $\gamma_g \cap \gamma_2$ (где есть трещина), определяются перемещениями части $\gamma_2 \setminus \gamma_g$, где включение сцеплено с упругой матрицей.

Перейдем к описанию условий, обеспечивающих взаимное непроникание точек включения. Они соответствуют трем возможным случаям конфигураций в состоянии равновесия. Первый случай, когда имеет место неравенство $c_1 \geq 0$, т.е. когда точки включения γ_2 не перемещаются левее точки разрыва. Во втором случае предположим, что крайняя левая точка включения γ_2 может перемещаться выше и левее точки разрыва

$$c_1 \leq 0, \quad c_2 \geq 0, \quad c_2 + bc_1 \geq 0. \quad (6)$$

Условие (6) получается ввиду того, что точка с координатой $(-c_1, 0) \in \gamma_2$ в исходном состоянии переходит в точку с координатами $(0, c_2 + bc_1)$, которая должна лежать не ниже (относительно выбранной системы координат) крайней правой точки $(0, 0)$ неподвижного тонкого жесткого включения γ_1 . Третье условие соответствует тому, что крайняя левая точка включения γ_2 в результате деформации оказывается левее и ниже точки разрыва $(0, 0)$:

$$c_1 \leq 0, \quad c_2 \leq 0, \quad c_2 + bc_1 \leq 0. \quad (7)$$

В соответствии с тремя случаями возможных перемещений точек жесткого включения γ_2 , определим следующие множества допустимых перемещений:

$$K_1 = \left\{ W \in H(\Omega_g) \mid W \text{ удовлетворяет (3), (4), } W|_{\gamma_2} = \rho, \rho \in R(\gamma_2), c_1 \geq 0 \right\},$$

$$K_2 = \left\{ W \in H(\Omega_g) \mid W \text{ удовлетворяет (3), (4), } W|_{\gamma_2} = \rho, \rho \in R(\gamma_2), c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, c_2 + bc_1 \geq 0 \right\},$$

$$K_3 = \left\{ W \in H(\Omega_g) \mid W \text{ удовлетворяет (3), (4), } W|_{\gamma_2} = \rho, \rho \in R(\gamma_2), c_1 \leq 0, c_2 \leq 0, c_2 + bc_1 \leq 0 \right\}.$$

Множество всех допустимых перемещений представляет собой объединение $K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Отметим, что множества K_2, K_3 не являются выпуклыми в силу наличия слагаемого bc_1 . Задачу о равновесии упругого тела с двумя тонкими жесткими включениями сформулируем в виде минимизации функционала энергии:

$$\text{найти такое } U \in K_1 \cup K_2 \cup K_3, \text{ что } \Pi(U) = \inf_{W \in K_1 \cup K_2 \cup K_3} \Pi(W). \quad (8)$$

Наряду с основной задачей (8) рассмотрим следующие три вспомогательные задачи:

$$\text{найти такое } U_l \in K_l, \text{ что } \Pi(U_l) = \inf_{W \in K_l} \Pi(W), \quad l = 1, 2, 3. \quad (9)$$

2. Существование вариационного решения. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Вариационная задача минимизации (8) имеет решение; оно может быть единственным.*

Доказательство. Для доказательства разрешимости задачи (8) сначала установим, что каждая из трех задач (9) имеет решение. Рассмотрим сначала задачу

$$\text{найти такое } U_1 \in K_1, \text{ что } \Pi(U_1) = \inf_{W \in K_1} \Pi(W). \quad (10)$$

Очевидно, что множество K_1 выпукло и замкнуто в рефлексивном пространстве $H(\Omega_g)$. Как следствие, K_1 — слабо замкнутое множество (см. [1]). Как известно, квадратичный функционал Π является слабо полунепрерывным снизу и коэрцитивным на $H(\Omega_g)$ (см. [18]). Указанные свойства множества K_1 и функционала Π гарантируют существование единственного решения задачи $U_1 \in K_1$.

Ввиду третьего неравенства в (6), содержащего произведение bc_1 , множество K_2 не является выпуклым, поэтому доказательство существования решения задачи

$$\text{найти такое } U_2 \in K_2, \text{ что } \Pi(U_2) = \inf_{W \in K_2} \Pi(W), \quad (11)$$

проводится несколько иначе. Для начала докажем, что множество K_2 является слабо замкнутым. Пусть произвольная последовательность $\{W_n\} \subset K_2$ слабо сходится к W в пространстве $H(\Omega_g)$. В силу теорем вложения отсюда следует, что найдется подпоследовательность $\{W_n\}$ (с прежним обозначением), сходящаяся почти всюду на $\Gamma \cup \gamma$ к W . Докажем, что предельная функция W также имеет структуру жесткого перемещения на γ_2 , т.е. существуют такие числа c_1, c_2, b , для которых выполняется

$$W(x_1, x_2)|_{\gamma_2} = \rho(x_1, x_2) = (c_1 + bx_2, c_2 - bx_1), \quad \rho(x_1, x_2) \in R(\gamma_2).$$

В силу включения $W_n \in K_2, n = 1, 2, \dots$, имеем следующие равенства:

$$W_n(x_1, x_2) = (c_{1n} + b_n x_2, c_{2n} - b_n x_1) \quad \text{на } \gamma_2.$$

Поскольку последовательность $\{W_n\}$ сходится почти всюду на γ_2 , отсюда следует, что найдутся такие вещественные числа c_1, c_2, b , что $c_{1n} \rightarrow c_1, c_{2n} \rightarrow c_2, b_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, на γ_2 имеет место равенство $W|_{\gamma_2} = \rho = (c_1 + bx_2, c_2 - bx_1), \rho(x) \in R(\gamma_2)$.

Покажем далее, что для предельной функции выполняются условия непроникания включений (6). Для элементов последовательности $\{W_n\} \subset K_2$ имеют место неравенства

$$c_{1n} \leq 0, \quad c_{2n} \geq 0, \quad c_{2n} + b_n c_{1n} \geq 0, \quad (12)$$

где $W_n = (c_{1n} + b_n x_2, c_{2n} - b_n x_1)$ на γ_2 . Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (12), с учетом того, что $c_{1n} \rightarrow c_1, c_{2n} \rightarrow c_2, b_n \rightarrow b$, находим

$$c_1 \leq 0, \quad c_2 \geq 0, \quad c_2 + bc_1 \geq 0.$$

Выполнение условий непроникания (3), (4) для предельной функции W можно проверить аналогично, с учетом сходимости почти всюду $W_n \rightarrow W$ на γ . Итак, множество K_2 слабо замкнуто

в $H(\Omega_g)$. Вспоминая свойства коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу функционала энергии Π , получаем существование решения $U_2 \in K_2$ задачи (11).

Очевидно, что аналогично можно доказать, что множество K_3 также слабо замкнуто в $H(\Omega_g)$. Значит, третья задача (9), соответствующая $l = 3$, также разрешима. Наконец, решение U задачи (8) находится как функция, доставляющая минимум по трем оптимальным значениям, т.е.

$$\Pi(U) = \min\{\Pi(U_1), \Pi(U_2), \Pi(U_3)\}, \quad (13)$$

где U_l , $l = 1, 2, 3$, являются решениями соответствующих задач (9). Эта функция не единственна, например $\Pi(U_n) = \Pi(U_m)$ возможно при $U_n \neq U_m$, $n \neq m$. Теорема доказана. $\square$

3. Условия оптимальности решения. Далее получим соотношения, характеризующие свойства решения рассматриваемой задачи в области и на включении при условии дополнительной регулярности решения. Есть три возможных случая в зависимости от того, какому из множеств K_l , $l = 1, 2, 3$, принадлежит решение U задачи (8). Начнем с самого простого случая, а именно, предположим, что решение принадлежит множеству K_1 . Поскольку множество K_1 представляет собой выпуклый конус, соответствующая задача (9) эквивалентна вариационному неравенству

$$U_1 \in K_1, \quad \int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(U_1) \varepsilon_{ij}(W - U_1) \geq \int_{\Omega_g} F(W - U_1) \quad \forall W \in K_1. \quad (14)$$

Подставляя в (14) пробные функции вида $W = U_1 + \phi$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \bar{\gamma})^2$, получаем

$$\int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(U_1) \varepsilon_{ij}(\phi) \geq \int_{\Omega_g} F\phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \bar{\gamma})^2.$$

Это означает, что имеют место уравнения равновесия

$$-\sigma_{ij,j}(U_1) = F_i \quad \text{п.в. в } \Omega \setminus \bar{\gamma}, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

В дальнейшем нам понадобится следующая формула Грина, которая справедлива для достаточно гладких функций V и $\bar{V} \in H(\Omega_g)$ в подобласти $O \subset \Omega_g$ (см. [18]):

$$\int_O \sigma_{ij}(V) \varepsilon_{ij}(\bar{V}) = - \int_O \sigma_{ij,j}(V) \bar{v}_i + \int_{\partial O} (\sigma_\nu(V) \bar{V} \nu + \sigma_\tau(V) \bar{V}_\tau), \quad (16)$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂O ,

$$\begin{aligned} \sigma_\nu(V) &= \sigma_{ij}(V) \nu_i \nu_j, \quad \sigma_\tau(V) = (\sigma_\tau^1(V), \sigma_\tau^2(V)) = (\sigma_{1j}(V) \nu_j, \sigma_{2j}(V) \nu_j) - \sigma_\nu(V) \nu, \\ \bar{V} \nu &= \bar{v}_i \nu_i, \quad \bar{V}_\tau = (\bar{V}_\tau^1, \bar{V}_\tau^2), \quad \bar{v}_i = (\bar{V} \nu) \nu_i + \bar{V}_\tau^i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина (16) для обеих областей Ω_1 , Ω_2 , с учетом уравнений равновесия и $\nu = (0, 1)$, $\tau = (1, 0)$ на γ , находим

$$U_1 = (u_{11}, u_{12}), \quad \int_\gamma \left[\sigma_{22}(U_1)(w_2 - u_{12}) + \sigma_{12}(U_1)(w_1 - u_{11}) \right] \leq 0 \quad \forall W = (w_1, w_2) \in K_1. \quad (17)$$

Примем далее во внимание, что на $\gamma_1 \setminus \gamma_g$ выполняется $W = U_1 = 0$, а также то, что на $\gamma_2 \setminus \gamma_g$ скачки перемещений равны нулю, т.е. $[W] = [U_1] = 0$. Данные равенства позволяют переписать (17) в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)](w_2 - u_{12}) + [\sigma_{12}(U_1)](w_1 - u_{11}) \right) + \\ & + \int_{\gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)(w_2 - u_{12}) + \sigma_{12}(U_1)(w_1 - u_{11}) \right] \leq 0 \quad \forall W = (w_1, w_2) \in K_1. \quad (18) \end{aligned}$$

Подставляя в неравенство (18) $W = 0$ и $W = 2U_1 = 2(u_{11}, u_{12})$, получим равенство

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]u_{12} + [\sigma_{12}(U_1)]u_{11} \right) + \int_{\gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)u_{12} + \sigma_{12}(U_1)u_{11} \right] = 0. \quad (19)$$

Заметим, что W и U_1 на $\gamma_2 \setminus \gamma_g$ имеют структуру жестких перемещений:

$$W|_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} = \rho, \quad U_1|_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} = \rho^1, \quad \rho, \rho^1(x) \in R(\gamma_2).$$

В силу (19) неравенство (18) можно привести к следующему виду:

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]w_2 + [\sigma_{12}(U_1)]w_1 \right) + \int_{\gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)w_2 + \sigma_{12}(U_1)w_1 \right] \leq 0 \quad \forall W \in K_1. \quad (20)$$

Проводя последующий анализ неравенства (20) с пробными функциями, удовлетворяющими равенству $W = (0, 0)$ на γ_2 , по аналогии с [19] получим

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^+(U_1) &\leq 0, \quad \sigma_{12}^+(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_1 \cap \gamma_g, \\ \sigma_{22}^-(U_1) &\leq 0, \quad \sigma_{12}^-(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_1 \cap \gamma_g. \end{aligned}$$

Для пробных функций, удовлетворяющих условию $W = (0, 0)$ на γ_1 , имеем

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]w_2 + [\sigma_{12}(U_1)]w_2 \right) + \int_{\gamma_2 \cap \gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)w_2 + \sigma_{12}(U_1)w_1 \right] \leq 0, \quad W = (w_1, w_2) \in K_1. \quad (21)$$

Выбирая в (21) функции со свойством $W = \rho = (0, 0)$ на $\gamma_2 \setminus \gamma_g$, представим соотношения, выполненные на $\gamma_2 \cap \gamma_g$, в следующем виде:

$$w_2^+ \geq 0, \quad w_2^- \leq 0 \quad \text{на } \gamma_2 \cap \gamma_g$$

при этом неравенство примет вид

$$\int_{\gamma_2 \cap \gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)w_2 + \sigma_{12}(U_1)w_1 \right] \leq 0, \quad W = (w_1, w_2) \in K_1. \quad (22)$$

Отсюда с учетом произвольности функций $W \in K_1$ получаем соотношения

$$\sigma_{22}^+(U_1) \leq 0, \quad \sigma_{12}^+(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_2 \cap \gamma_g, \quad (23)$$

$$\sigma_{22}^-(U_1) \leq 0, \quad \sigma_{12}^-(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_2 \cap \gamma_g. \quad (24)$$

Предположив теперь, что в (21) пробные функции удовлетворяют условию $W^+ = W^- = \rho = (\rho_1, \rho_2)$ на γ_2 , получим

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]\rho_2 + [\sigma_{12}(U_1)]\rho_1 \right) + \int_{\gamma_2 \cap \gamma_g} [\sigma_{22}(U_1)]\rho_2 \leq 0$$

для всех $\rho \in R(\gamma_2)$ таких, что $c_1 \geq 0$.

Подытоживая, выпишем полученные из (14) соотношения:

$$-\sigma_{ij,j}(U_1) = F_i \quad \text{п.в. в } \Omega \setminus \overline{\gamma}, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

$$\sigma_{22}^+(U_1) \leq 0, \quad \sigma_{12}^+(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_g, \quad (26)$$

$$\sigma_{22}^-(U_1) \leq 0, \quad \sigma_{12}^-(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_g, \quad (27)$$

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]u_{12} + [\sigma_{12}(U_1)]u_{11} \right) + \int_{\gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)u_{12} \right] = 0, \quad (28)$$

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]\rho_2 + [\sigma_{12}(U_1)]\rho_1 \right) + \int_{\gamma_2 \cap \gamma_g} [\sigma_{22}(U_1)]\rho_2 \leq 0 \quad (29)$$

для всех $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in R(\gamma_2)$ таких, что $c_1 \geq 0$. Отметим, что, подставляя в (29) пробные числа $c_1 = b = 0$, $c_2 = b = 0$ ($c_1 \geq 0$), $c_1 = c_2 = 0$, получим эквивалентные два равенства, выполненные на всем включении γ_2 , и неравенство на $\gamma_2 \setminus \gamma_g$ вне трещины:

$$\int_{\gamma_2} [\sigma_{22}(U_1)] = 0, \quad \int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} [\sigma_{12}(U_1)] \leq 0, \quad \int_{\gamma_2} [\sigma_{22}(U_1)] x_1 = 0.$$

Интегральные соотношения (28), (29) соответствуют принципу виртуальных перемещений (см. [14]). Можно показать, что функция $U_1 = (u_{11}, u_{12}) \in K_1$ удовлетворяющая уравнениям равновесия (25) и условиям (26)–(29), будет также решением вариационного неравенства (14). Таким образом, задача, в которой требуется найти $U_1 \in K_1$, удовлетворяющую соотношениям (25)–(29), является эквивалентной дифференциальной формулировкой задачи минимизации (10).

В случае, когда решение задачи минимизации принадлежит множествам K_2 или K_3 , не удастся получить полную дифференциальную постановку стандартными рассуждениями. Тем не менее, можно получить уравнение равновесия и интегральное неравенство, характеризующее решение. Рассмотрим случай, когда решение принадлежит K_2 , при этом случай, соответствующий множеству K_3 , рассматривается аналогично. Чтобы выписать условия оптимальности, понадобится рассмотреть вспомогательную задачу минимизации, которая допускает эквивалентную постановку в виде вариационного неравенства ввиду того, что она формулируется на выпуклом подмножестве K_2 . Будем опираться на тот факт, что задача (9) при $l = 2$ имеет хотя бы одно решение U_2 . Зафиксируем значение b^2 , которое задает структуру решения на γ_2 , т.е.

$$U_2(x_1, x_2) = \rho^2(x_1, x_2) = b^2(x_2, -x_1) + (c_1^2, c_2^2) \in R(\gamma_2).$$

Отметим, что в выражениях b^2 , c_1^2 , c_2^2 число 2 сверху — это индекс, а не степень. Функция U_2 доставляет минимум также для следующей вспомогательной задачи:

$$\text{найти такое } U_2 \in \hat{K}_2(b^2), \text{ что } \Pi(U_2) = \inf_{W \in \hat{K}_2(b^2)} \Pi(W), \quad (30)$$

где

$$\hat{K}_2(b^2) = \left\{ W \in H(\Omega_g) \mid W \text{ удовлетворяет (3), (4),} \right.$$

$$\left. W|_{\gamma_2} = \rho, \rho(x) \in R(\gamma_2), b = b^2, c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, c_2 + bc_1 \geq 0 \right\},$$

т.е. на множестве, в котором дополнительно к условиям заложенным в определении K_2 , включено равенство $b = b^2$. Геометрически это значит, что мы фиксируем оптимальный угол поворота жесткого включения. Очевидно, что $\hat{K}_2(b^2) \subset K_2$; кроме того, множество будет выпуклым. Благодаря этому преимуществу, следующее вариационное неравенство имеет единственное решение, которое доставляет минимум (30):

$$U_2 \in \hat{K}_2(b^2), \quad \int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(U_2) \varepsilon_{ij}(W - U_2) \geq \int_{\Omega_g} F(W - U_2) \quad \forall W \in \hat{K}_2(b^2). \quad (31)$$

Подставляя в (31) пробные функции вида $W = U_2 + \phi$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \bar{\gamma})^2$, получаем

$$\int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(U_2) \varepsilon_{ij}(\phi) \geq \int_{\Omega_g} F\phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \bar{\gamma})^2.$$

Это означает, что имеют место уравнения равновесия

$$-\sigma_{ij,j}(U_2) = F_i \quad \text{п.в. в } \Omega \setminus \bar{\gamma}, \quad i = 1, 2.$$

Кроме того, с помощью формулы Грина (16) из (31) можно получить вариационное неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_2)](w_2 - u_{22}) + [\sigma_{12}(U_2)](w_1 - u_{21}) \right) + \\ & + \int_{\gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_2)(w_2 - u_{22}) + \sigma_{12}(U_2)(w_1 - u_{21}) \right] \leq 0 \quad \forall W = (w_1, w_2) \in \hat{K}_2(b^2), \end{aligned} \quad (32)$$

где $U_2 = (u_{21}, u_{22})$.

Заметим, что из (32) не удастся вывести равенство вида (19), поскольку множество $\hat{K}_2(b^2)$ не является конусом.

Заключение. Отметим, что в рамках предложенного подхода могут быть рассмотрены следующие обобщения задачи. Возможен случай, когда отслоение имеет место по всей длине γ_1 , (т.е. случай $p = a < 0 < q < 1$), при этом тело должно быть закреплено на Γ_0 с положительной мерой $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$ так, чтобы неравенство Корна выполнялось в каждой из областей Ω_1, Ω_2 . Также следует отметить, что аналогичные результаты могут быть получены в том случае, когда отслоения сверху и снизу имеют место на разных участках вблизи точки разрыва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байocchi К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. — М.: Физматлит, 1988.
2. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. — М.: Наука, 1984.
3. Неустроева Н. В., Лазарев Н. П. Оптимальное управление углом наклона трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко с упругим включением// Мат. заметки СВФУ. — 2021. — 28, № 4. — С. 58–70.
4. Николаева Н. А. О равновесии упругих тел с трещинами, пересекающими тонкие включения// Сиб. ж. индустр. мат. — 2019. — 22, № 4. — С. 68–80.
5. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Об иерархии тонких включений в упругих телах// Мат. заметки СВФУ. — 2016. — 23, № 1. — С. 87–107.
6. Furtsev A. I. On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion// J. Math. Sci. — 2019. — 237, № 4. — P. 530–545.
7. Hintermüller M., Kovtunen V. A., Kunisch K. A. Papkovich–Neuber-based numerical approach to cracks with contact in 3D// IMA J. Appl. Math. — 2009. — 74, № 3. — P. 325–343.
8. Hu K. X., Chandra A. Interactions among general systems of cracks and anticracks: An integral equation approach// J. Appl. Mech. — 1993. — 60, № 4. — P. 920–928.
9. Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., Tani A. Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity// Z. Angew. Math. Mech. — 2012. — 92, № 9. — P. 716–730.
10. Itou H., Kovtunen V. A., Lazarev N. P. Asymptotic series solution for plane poroelastic model with non-penetrating crack driven by hydraulic fracture// Appl. Eng. Sci. — 2022. — 10. — P. 100089.
11. Itou H., Kovtunen V. A., Rudoy E. M. Three-field mixed formulation of elasticity model nonlinear in the mean normal stress for the problem of non-penetrating cracks in bodies// Appl. Eng. Sci. — 2021. — 7. — P. 100060.
12. Jobin T. M., Ramji M., Khaderi S. N. Numerical evaluation of the interaction of rigid line inclusions using strain intensity factors// Int. J. Mech. Sci. — 2019. — 153–154. — P. 10–20.
13. Khludnev A. M. Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions// Eur. J. Mech. A. Solids. — 2010. — 29, № 3. — P. 392–399.
14. Khludnev A. M. Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies// Arch. Appl. Mech. — 2013. — 83, № 10. — P. 1493–1509.
15. Khludnev A. M. Junction problem for thin elastic and volume rigid inclusions in elastic body// Phil. Trans. Roy. Soc. A. — 2022. — 380, № 2236. — P. 20210360.
16. Khludnev A., Esposito A. C., Faella L. Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions// J. Optim. Theory Appl. — 2020. — 184, № 1. — P. 293–314.
17. Khludnev A. M., Itou H. On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies// Math. Meth. Appl. Sci. — 2016. — 39, № 17. — P. 4980–4993.
18. Khludnev A. M., Kovtunen V. A. Analysis of Cracks in Solids. — Southampton, Boston: WIT-Press, 2000.
19. Khludnev A., Leugering G. On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks// Math. Meth. Appl. Sci. — 2010. — 3. — P. 1955–1967.
20. Khludnev A. M., Leugering G. Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies// Math. Mech. complex Syst. — 2014. — 2, № 1. — P. 1–21.
21. Khludnev A. M., Popova T. S. On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body// Z. Angew. Math. Mech. — 2020. — 100, № 8. — 202000063.

22. *Khudnev A. M., Shcherbakov V. V.* A note on crack propagation paths inside elastic bodies// *Appl. Math. Lett.* — 2018. — 79, № 1. — P. 80–84.
23. *Kovtunen V. A., Kunisch K.* Shape derivative for penalty-constrained nonsmooth-nonconvex optimization: cohesive crack problem// *J. Optim. Theory Appl.* — 2022. — 194. — P. 597–635.
24. *Kovtunen V. A., Leugering G.* A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model// *SIAM J. Control Optim.* — 2016. — 54, № 3. — P. 1329–1351.
25. *Lazarev N.* Inverse problem for cracked inhomogeneous Kirchhoff–Love plate with two hinged rigid inclusions// *Bound. Value Probl.* — 2021. — 2021, № 1. — P. 88.
26. *Lazarev N., Neustroeva N.* Optimal control of rigidity parameter of elastic inclusions in composite plate with a crack// in: *Mathematics and Computing (Ghosh D., Giri D., Mohapatra R., Sakurai K., Savas E., Som T., eds.)*. — Singapore: Springer, 2018. — 253. — P. 67–77.
27. *Lazarev N., Rudoy E.* Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies// *J. Comput. Appl. Math.* — 2022. — 403. — P. 113710.
28. *Lazarev N. P., Semenova G. M., Romanova N. A.* On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate with a crack// *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* — 2021. — 14, № 1. — P. 28–41.
29. *Popova T. S.* Numerical solution of the equilibrium problem for a two-dimensional elastic body with a thin semirigid inclusion// *Math. Notes NEFU.* — 2021. — 28, № 1. — P. 51–66.
30. *Rudoy E. M., Shcherbakov V. V.* Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion// *Sib. Electron. Math. Rep.* — 2016. — 13, № 1. — P. 395–410.
31. *Rudoy E. M., Shcherbakov V. V.* First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks// *Appl. Math. Optim.* — 2021. — 84. — P. 2775–2802.
32. *Shcherbakov V. V.* Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks// *Z. Angew. Math. Phys.* — 2016. — 67, № 3. — P. 71.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Разделы 1-2 выполнены при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2022-881). Раздел 3 выполнен Н. П. Лазаревым при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания (проект № FSRG-2023-0025).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Нюргун Петрович Лазарев

Северо-Восточный Федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск

E-mail: nyurgun@ngs.ru

Виктор Анатольевич Ковтуненко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева

Сибирского отделения РАН, Новосибирск;

Institute for Mathematics and Scientific Computing,

Karl-Franzens University of Graz, Austria

E-mail: kovtunen@hydro.nsc.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 61–78
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-61-78

УДК 517.929

О НЕСКОЛЬКИХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2023 г. Т. Л. САБАТУЛИНА

Аннотация. В работе рассматриваются несколько моделей динамики популяций: уравнения Хатчинсона, уравнение Мэкки—Гласса, уравнение Ласоты—Важевски и уравнение Николсона. Наибольшее внимание уделяется моделям, в которых последствие считается распределённым по некоторому промежутку. Изучается локальная устойчивость решений данных уравнений.

Ключевые слова: динамика популяций, функционально-дифференциальное уравнение, распределённое запаздывание, устойчивость.

ON SEVERAL MODELS OF POPULATION DYNAMICS WITH DISTRIBUTED DELAY

© 2023 Т. L. SABATULINA

ABSTRACT. In this paper, we examine several models of population dynamics: the Hutchinson equation, the Mackey–Glass equation, the Lasota–Warzewski equation, and the Nicholson equation. The greatest attention is paid to models in which the aftereffect is considered distributed over a certain interval. The local stability of solutions to these equations is studied.

Keywords and phrases: population dynamics, functional differential equation, distributed lag, stability.

AMS Subject Classification: 34K60

1. Введение. Биология, в особенности исследования динамики популяций, была и остаётся источником математических задач. При этом особое внимание всегда уделялось задачам, требующим прогнозировать развитие популяции на достаточном большом временном промежутке.

Если биологическая система существует в неизменном виде достаточно долгое время, то она обладает способностью противостоять возмущениям со стороны окружающей среды. Эту способность системы естественно назвать устойчивостью. Описать границы области устойчивости — значит указать те условия существования системы, выход за которые может привести к её разрушению. Чтобы их описание было содержательным, оно должно быть количественным, т.е. математическим.

Кроме того, изучение многих биологических процессов в принципе невозможно иными методами, кроме построения адекватной математической модели: в живой природе опасны эксперименты с необратимыми (или непредсказуемыми) последствиями, а наблюдение за развитием живых организмов на небольшом промежутке времени не всегда даёт основания для надёжной экстраполяции.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0005).

Для математического моделирования динамически развивающихся систем используется производная (имеющая значение скорости изменения изучаемого объекта), а значит, дифференциальные уравнения и системы. Довольно долго исследователи динамики популяций ограничивались моделями, представляющими собой обыкновенные дифференциальные уравнения (например, модель Мальтуса, логистическое уравнение, модель Лотки—Вольтерры). Такие модели характеризуются предположением, что скорость изменения изучаемого объекта (численности популяции) в любой момент времени зависит только от состояния объекта в тот же момент времени. Однако желание описать процесс точнее привело к тому, что эта гипотеза стала заменяться более гибкой: скорость изменения объекта зависит не только от его состояния в данный момент времени, но и от «предыстории», т.е. от состояний в некоторые предыдущие моменты времени. Такое предположение привело к новым классам моделей: наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями стали использоваться уравнения с отклоняющимся аргументом, интегро-дифференциальные уравнения и другие виды функционально-дифференциальных уравнений (см., например, [6, 17, 18, 23]).

Учёт запаздывания позволил описывать динамику популяций более глубоко и полно: вслед за известной моделью Хатчинсона (1948 г.) появились модели Ласоты—Важевски (1976 г.), Мэкки—Гласса (1977 г.), Николсона (1980–1983 гг.). Модель Хатчинсона описывает динамику популяции в условиях ограниченности ресурсов, модель Николсона—популяцию лабораторных мух, модели Ласоты—Важевски и Мэкки—Гласса — процессы кроветворения.

Устойчивость численности популяции, т.е. способность популяции возвращаться к равносному состоянию, математически описывается как устойчивость решений выбранного в качестве модели уравнения. Математические определения устойчивости даются в рамках теории дифференциальных уравнений соответствующего класса. Все перечисленные модели динамики популяций являются нелинейными функционально-дифференциальными уравнениями. Исследование асимптотических свойств их решений в большинстве случаев проводится по следующей схеме: изучаются свойства линейного приближения (как можно точнее) и на их основе делаются выводы о поведении решения нелинейного уравнения. Если исходная модель учитывала эффект последействия, то его линейное приближение попадает в класс линейных функционально-дифференциальных уравнений. Поэтому с прикладной точки зрения наиболее интересными являются результаты, дающие эффективное (и возможно более точное) описание области устойчивости конкретных классов таких уравнений.

Развитие идеи запаздывания привело к возникновению моделей, в которых последействие учитывается более тонко: вместо одного запаздывания появилось несколько, запаздывание и коэффициенты начали зависеть от времени, наконец, наряду с сосредоточенным стали рассматривать распределённое запаздывание.

Интересно отметить, что первая модель динамики популяции, в которой учитывался эффект последействия, была как раз уравнением с распределённым запаздыванием: В. Вольтерра в работах 1926–28 гг. (см. [24]) рассматривал интегро-дифференциальное уравнение

$$\dot{N}(t) = r(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} - \frac{1}{Q} \int_0^t f(t-s)N(s) ds \right) N(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

моделирующее влияние на смертность ухудшения условий окружающей среды, вызванного накоплением отходов и умерших организмов. Вводя в логистическое уравнение интегральное слагаемое, Вольтерра стремился учесть всю историю процесса от начального момента до текущего. К сожалению, эти работы не были замечены и оценены другими исследователями и потому не оказали существенного влияния на развитие теории таких уравнений. Однако на фоне успешного использования моделей с запаздыванием (поначалу только сосредоточенным и даже постоянным) идея распределённого запаздывания не могла не возникнуть снова. Очевидно, что есть ситуации, где введение сосредоточенного запаздывания не имеет смысла (как в приведённой выше модели Вольтерра — загрязнение окружающей среды, носит, очевидно, кумулятивный характер). Однако даже когда сосредоточенное запаздывание достаточно хорошо описывает моделируемый процесс, на самом деле имеет место некоторое «размытие» запаздывания вблизи некоторого среднего

значения. В этом случае использование распределённого запаздывания позволяет учитывать вероятностные эффекты в моделях, которые в противном случае были бы детерминированными. Единственное (но существенное) отличие современных моделей с распределённым запаздыванием от модели Вольтерра состоит в том, что длина промежутка интегрирования, как правило, предполагается ограниченной — учитывать всю историю процесса «от начала времён» вряд ли необходимо.

На сегодня количество работ, в которых исследуется устойчивость биологических моделей, использующих уравнения с сосредоточенным запаздыванием, стало настолько большим, что требуются обзорные статьи, в которых результаты систематизируются и упорядочиваются (см. например, обзор [14] об уравнении Николсона). С другой стороны, модели с распределённым запаздыванием признаются столь же содержательными, но оказывается, что для них признаков устойчивости мало, а те, что получаются как следствие из теорем общего вида, далеки от точных. В данной работе рассматривается несколько примеров биологических моделей, при составлении которых оказывается существенным эффект последействия.

2. Предварительные сведения. Введём обозначения

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty), \quad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \quad \Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}_+^2 : t \geq s\}.$$

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с распределённым запаздыванием

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) + \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s)x(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2)$$

Здесь $k: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, функции $k(t, \cdot)$, a и f локально суммируемы, функции $k(\cdot, s)$, τ , h измеримы по Лебегу. Вариация $\rho(t)$ для уравнения (2) находится по формуле

$$\rho(t) = |a(t)| + \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} |k(t, s)| ds$$

и предполагается локально суммируемой. Здесь и далее будем считать, что при отрицательных значениях аргумента функция x равна нулю.

Под *решением* уравнения (2) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению (2) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Как известно (см. [1, с. 84, теорема 1.1]), уравнение (2) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = C(t, 0)x(0) + \int_a^t C(t, s)f(s) ds, \quad (3)$$

где функция $C(t, s)$ называется *функцией Коши* уравнения (2). В силу (3) исследование устойчивости уравнения (2) сводится к изучению асимптотических свойств функции Коши.

Теорема 2.1 (см. [9]). *Если $a(t) \equiv 0$, $\rho(t) > 0$,*

$$\text{vraisup}_t \int_{t-\tau(t)-h(t)}^t \rho(s) ds \leq \frac{1}{e}, \quad (4)$$

то функция Коши уравнения (2) положительна.

Теорема 2.2 (см. [9]). *Пусть $\rho(t) > 0$ и справедливо неравенство (4). Тогда для любого фиксированного s функция $C(t, s)$ имеет при $t \rightarrow \infty$ конечный предел, причём*

- (a) *если $\rho \in L_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t, s) > 0$;*
- (b) *если $\rho \notin L_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t, s) = 0$.*

Теорема 2.3 (см. [11]). Пусть $a(t) \equiv 0$, $k(t, s) \geq 0$. Если

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau(t)-h(t)}^t \rho(s) ds < \frac{3}{2}, \quad (5)$$

то найдутся такие $M, \gamma > 0$, что функция Коши уравнения (2) при всех $(t, s) \in \Delta$ имеет оценку

$$|C(t, s)| \leq M \exp \left\{ -\gamma \int_s^t \rho(\xi) d\xi \right\}.$$

Введём функцию η следующим образом:

$$\xi = \eta(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0, 1], \\ s \ln \frac{s(s+1)}{s^2+1}, & s \in (1, \infty). \end{cases} \quad (6)$$

Теорема 2.4 (см. [11]). Пусть $a(t) \equiv a > 0$, $k(t, s) \geq 0$,

$$\int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) ds \equiv k > 0,$$

$\tau(t) + h(t) \leq \omega$, $e^{-a\omega} > \eta(k/a)$. Тогда для функции Коши уравнения (2) справедлива оценка

$$|C(t, s)| \leq M e^{-\gamma(t-s)}, \quad M, \gamma > 0, \quad (t, s) \in \Delta. \quad (7)$$

При $a(t) \equiv a$, $k(t, s) \equiv k$, $h(t) \equiv h$, $\tau(t) \equiv \tau$ получаем линейное автономное дифференциальное уравнение с распределённым запаздыванием

$$\dot{x}(t) + ax(t) + k \int_{t-\tau-h}^{t-\tau} x(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (8)$$

где $a, k \in \mathbb{R}$, $\tau, h \in \mathbb{R}_+$.

Обозначим через x_0 фундаментальное решение уравнения (8), т.е. решение однородного уравнения (8), дополненное начальным условием $x_0(0) = 1$. Функция Коши C и фундаментальное решение x_0 автономных уравнений связаны соотношением

$$x_0(t-s) = C(t, s). \quad (9)$$

Поэтому для автономных уравнений фундаментальное решение x_0 естественно сделать основным объектом изучения.

Зададим параметрически функцию $\alpha = \psi(\beta)$:

$$\alpha = \frac{2}{\xi} - \frac{1}{1-e^{-\xi}}, \quad \beta = \frac{\xi^2 \exp\left(-2 + \frac{\xi}{1-e^{-\xi}}\right)}{e^\xi - 1}, \quad \xi \in \mathbb{R}_+. \quad (10)$$

Теорема 2.5 (см. [7]). Если $a = 0$, то функция Коши уравнения (8) положительна тогда и только тогда, когда $\tau/h \leq \psi(kh^2)$.

Зададим функцию $u = \omega(v)$ параметрически равенствами

$$\left\{ u = \xi + \frac{\xi(1-e^\xi)}{e^\xi(\xi-1)+1}, \quad v = \frac{\xi^2}{e^\xi(\xi-1)+1} \right\}, \quad \xi \geq \xi_0, \quad (11)$$

где ξ_0 — положительный корень уравнения $e^{-\xi} = 1 - \xi/2$.

Теорема 2.6 (см. [10]). Фундаментальное решение уравнения (8) имеет оценку

$$|x_0(t)| \leq M e^{-\gamma t}, \quad M, \gamma > 0, \quad (12)$$

тогда и только тогда, когда параметры ah , kh^2 , τ/h таковы, что

$$-ah < kh^2 < \frac{2\theta^2}{\sin \theta \sin(\theta(2\tau/h + 1))},$$

где θ — наименьший положительный корень уравнения

$$ah = -2\theta \operatorname{ctg} \left(\theta \left(\frac{2\tau}{h} + 1 \right) \right), \quad ah > -\frac{2}{2\tau/h + 1}.$$

Следствие 2.1 (см. [4, 5]). Пусть $a = 0$. Фундаментальное решение уравнения (8) имеет оценку (12) тогда и только тогда, когда

$$0 < kh^2 < \frac{\pi^2}{2(2\tau/h + 1)^2} \left(\sin \frac{\pi}{2(2\tau/h + 1)} \right)^{-1}.$$

Приведём важные утверждения об асимптотических свойствах решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. Первое утверждение является переформулировкой в удобных для нас терминах теоремы 3 из [13].

Лемма 2.1. Пусть $a \geq 0$, $k > 0$, функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, причем $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = 1$. Если при некотором $\varepsilon > 0$ фундаментальное решение уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + (1 - \varepsilon)k \int_{t-\tau-h}^{t-\tau} x(s) ds = 0$$

меняет знак, то все решения уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + k \int_{t-\tau-h}^{t-\tau} f(x(s)) ds = 0$$

являются осциллирующими.

Второе утверждение является следствием теоремы 1 из [2]. Пусть C_ω — пространство непрерывных на $[t - \omega, t]$ функций с нормой $\|y\| = \max_{s \in [t-\omega, t]} |y(s)|$. На декартовом произведении $\mathbb{R}_+ \times C_\omega$ определим функционал F , удовлетворяющий условиям Каратеодори, и рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s)x(s) ds = F(t, x(\cdot)), \quad (13)$$

где

$$\int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} |k(t, s)| ds \leq \text{const}, \quad \sup_t (\tau(t) + h(t)) = \omega.$$

При $t \leq 0$ решение доопределено начальной функцией φ .

Лемма 2.2. Пусть $a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$, функция Коши уравнения (2) удовлетворяет условию (7) при всех $(t, s) \in \Delta$. Если

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \frac{|F(t, y(\cdot))|}{\|y\|} = 0, \quad (14)$$

то при достаточно малых $\|\varphi\|_C$ найдутся такие M , $\beta > 0$, что для решения уравнения (13) справедлива оценка

$$|x(t)| \leq M e^{-\beta t}.$$

3. Обобщённая модель Хатчинсона. Первая широко известная математическая модель в биологии, учитывающая запаздывание по времени, по-видимому, была предложена Хатчинсоном в 1948 г. (см. [17]). Им изучалось так называемое *обобщенное логистическое уравнение*

$$\dot{N}(t) = r \left(1 - \frac{N(t-h)}{K} \right) N(t), \quad t \geq 0, \quad (15)$$

где t — время, отсчитываемое от некоторого значения, которое мы принимаем за нулевой момент, $N(t)$ — величина биологической популяции (или ее плотность) в момент времени t , K — максимальное число особей, способных прокормиться при заданном количестве пищи, r — коэффициент прироста популяции, h — запаздывание по времени, т.е. $r, K, h > 0$. При $t \leq 0$ решение доопределено начальной функцией φ . Уравнение (15) имеет два положения равновесия: неустойчивое $N = 0$ и устойчивое $N = K$. Заменой переменных $x(t) = N(th)/K - 1$ уравнение (15) сводится к уравнению

$$\dot{x}(t) = -px(t-1)(1+x(t)), \quad t \geq 0, \quad (16)$$

где $p > 0$. При этом устойчивому положению равновесия $N = K$ уравнения (15) соответствует положение равновесия $x = 0$ уравнения (16). Спустя несколько лет уравнение (16) появилось в работе Райта [23], посвященной вопросам распределения простых чисел. С тех пор за уравнением (16) закрепилось название *уравнения Хатчинсона–Райта*.

Для исследования асимптотического поведения решений вблизи положения равновесия $x = 0$ можно применить лемму 2.2. Для уравнения (16) линейное приближение имеет вид

$$\dot{x}(t) = -px(t-1), \quad t \geq 0. \quad (17)$$

Отметим, что поведение решения уравнения (17) становится более разнообразным, чем аналогичное уравнение без запаздывания: решение утрачивает свойство обязательной монотонности при стремлении к положению равновесия. Более того, можно точно указать границы монотонных решений. Если $0 < p \leq 1/e$, решение (17) сохраняет знак, и монотонно стремится к нулю, не пересекая ось Ot (см. [8]). Если же $1/e < p < \pi/2$, то решение стремится к нулю осциллируя (см. [3]), т.е. пересекая ось Ot бесконечное множество раз. Понятно, что аналогичные свойства проявятся и у уравнения (16), и — если вернуться к положению равновесия $N = K$ — у уравнения (15). Таким образом, поведение решения уравнения (15) вблизи положения равновесия явно даёт более реалистичную картину: можно указать условия, при которой численность популяции будет стабилизироваться с течением времени, но её стремление к пределу может происходить разными способами. Особенно интересные эффекты наблюдаются у решения уравнения (16), если $p = \pi/2$: здесь появляются периодические решения, ветвления, бифуркации и т. п.

Предложенная Хатчинсоном модель принадлежит к классу функционально-дифференциальных уравнений с сосредоточенным последствием. Такое запаздывание учитывает размер популяции в момент времени, отстоящий от данного на некоторое определённое число временных единиц, причём предполагается, что значение $\dot{N}$ в точке t определяется значением N только в точке $t - h$, а влиянием значения N в других точках (сколь угодно близких к $t - h$) мы пренебрегаем. Однако даже когда сосредоточенное запаздывание достаточно хорошо описывает динамику реальной популяции, вполне очевидно, что на самом деле имеет место некоторое «размытие» запаздывания вблизи какого-то среднего значения (особенно важно это в моделях, где стремятся учесть вероятностные эффекты). В этом случае естественно обобщить уравнение (15), заменив слагаемое $N(t-h)$ на

$$\frac{1}{h} \int_{t-\tau-h}^{t-\tau} N(s) ds.$$

Получим уравнение

$$\dot{N}(t) = r \left(1 - \frac{1}{hK} \int_{t-\tau-h}^{t-\tau} N(s) ds \right) N(t), \quad t \geq 0, \quad (18)$$

которое тоже имеет два положения равновесия $N = 0$ — неустойчивое и $N = K$ — устойчивое. Уравнение (18) назовём *уравнением Хатчинсона с распределённым запаздыванием* (или, по терминологии ряда работ, уравнением с запаздывающим усреднением). Параметры модели не обязательно постоянны. Поэтому наряду с уравнением (18) целесообразно рассматривать уравнение

$$\dot{N}(t) = r(t) \left(1 - \frac{1}{K} \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) N(s) ds \right) N(t), \quad t \geq 0, \quad (19)$$

где $K > 0$, $k: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $r: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, +\infty)$, функция $k(t, \cdot)$ локально суммируема, функции $k(\cdot, s)$, r , h измеримы по Лебегу на $\mathbb{R}_+$.

Определим стационарные точки и дополнительные условия на параметры уравнения, при которых эти точки существуют. Отбросим тривиальный случай $N = 0$: нулевое положение равновесия малоинтересно (популяция вымирает), а в данном случае оно ещё и неустойчиво. Чтобы уравнение (19) имело устойчивую точку равновесия $N(t) \equiv N^*$, необходимо, чтобы для параметров уравнения выполнялось требование

$$\int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) ds = c = \text{const}.$$

Легко видеть, что для уравнения (19) точкой равновесия является $N^* = K/c$. С помощью замены переменных $N(t) = N^* e^{-x(t)}$ уравнение (19) сводится к уравнению

$$\dot{x}(t) = -\frac{r(t)}{c} \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) f(x(s)) ds, \quad (20)$$

где $f(x) = 1 - e^{-x}$. Для уравнения (20) точкой равновесия является $x = 0$. Так как $f(x) = x + O(x^2)$, то линейным приближением уравнения (20) будет уравнение

$$\dot{x}(t) + \frac{r(t)}{c} \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) x(s) ds = 0. \quad (21)$$

Введём функцию $g(x) = x - f(x) = x + e^{-x} - 1$. Очевидно, что $g(x) > 0$ при $x \neq 0$, а $g(0) = 0$. Перепишем уравнение (20) в виде

$$\dot{x}(t) + \frac{r(t)}{c} \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) x(s) ds = \frac{r(t)}{c} \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) g(x(s)) ds. \quad (22)$$

Покажем, что уравнение Хатчинсона может иметь решения, не являющиеся осциллирующими относительно положительной точки равновесия N^* . Рассмотрим ситуацию, когда начальная функция уравнения (19) выбрана следующим образом: при $t < 0$ $\varphi(t) = N^*$, а $\varphi(0) > N^*$, т.е. начальная функция $\varphi_0 = \ln(N^*/\varphi)$ уравнения (20) при $t < 0$ нулевая, а при $t = 0$ положительна. Теперь уравнению (22) в силу представления (3), можно придать эквивалентную интегральную форму

$$x(t) = C_0(t, 0)x(0) + \frac{1}{c} \int_0^t C_0(t, s)r(s) \int_{s-\tau(s)-h(s)}^{s-\tau(s)} k(s, \xi)g(x(\xi)) d\xi ds. \quad (23)$$

Здесь $C_0(t, s)$ — функция Коши уравнения (21).

Теорема 3.1. Пусть

$$\text{vrai sup}_t \int_{t-\tau(t)-h(t)}^t r(s) ds \leq \frac{1}{e}.$$

Тогда существует решение уравнения (19), которое монотонно возрастает, ограничено константой N^* и имеет предел, причём:

- (a) если $r \in L_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) < N^*$;
- (b) если $r \notin L_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N^*$.

Доказательство. Для уравнения (21)

$$\rho(t) = \frac{r(t)}{c} \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) ds = r(t).$$

В силу теоремы 2.1, $C_0(t, s) > 0$. Тогда из соотношения (23) вытекает, что

$$x(t) \geq C_0(t, 0)x(0). \quad (24)$$

Так как $x(0) > 0$, то $x(t) > 0$, а $f(x(t)) > 0$. Поэтому из уравнения (20) получаем, что $\dot{x}(t) < 0$, т.е. функция x монотонно убывает и, следовательно, имеет предел на бесконечности.

Пункт (a) следует из неравенства (24) и теоремы 2.2. Остаётся доказать пункт (b). Перепишем уравнение (20) в виде

$$x(t) - x(0) = -\frac{1}{c} \int_0^t r(s) \int_{s-\tau(s)-h(s)}^{s-\tau(s)} k(s, \theta) f(x(\theta)) d\theta ds.$$

Допустим, что $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) < N^*$, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \alpha > 0$ и $f(x) \geq 1 - e^{-\alpha} > 0$. Тогда

$$x(0) - x(t) > (1 - e^{-\alpha}) \int_0^t r(s) ds,$$

но функция в левой части ограничена, а в правой — неограничена. Следовательно, допущение неверно и $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N^*$. $\square$

Для автономного уравнения Хатчинсона асимптотическое поведение решения можно охарактеризовать более точно, указав границу между монотонными и осциллирующими решениями. Тогда лучший результат даёт применение теоремы 2.5.

Теорема 3.2. Пусть $k(t) \equiv k$, $h(t) \equiv h$, $\tau(t) \equiv \tau$, $r(t) \equiv r$, а функция ψ определена равенствами (10). Тогда справедливы следующие утверждения:

- (a) если $\tau/h \leq \psi(rh)$, то найдётся решение уравнения (19), которое монотонно возрастает к пределу $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N^*$;
- (b) если $\tau/h > \psi(rh)$, то все решения уравнения (19) являются осциллирующими.

Доказательство первого утверждения теоремы 3.2 повторяет доказательство пункта (b) теоремы 3.1, только вместо теоремы 2.2 применяется теорема 2.5. Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно применить лемму 2.1.

Теперь получим признаки устойчивости решений уравнения Хатчинсона, исходя из того, что уравнение (21) экспоненциально устойчиво. В этом случае при достаточно малых начальных функциях (любого вида и знака) решение уравнения (19) будет вести себя так же, как решение линейного приближения (21).

Теорема 3.3.

- (а) Пусть $r \in L_1$. Тогда при достаточно малых $\|\varphi - N^*\|_C$ решение уравнения (19) имеет предел при $t \rightarrow +\infty$.
- (б) Пусть $r \notin L_1$ и выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau(t)-h(t)}^t r(s) ds < \frac{3}{2}. \quad (25)$$

Тогда решение уравнения (19) имеет предел, причём

$$|N(t) - N^*| \leq M \exp \left\{ -\beta \int_0^t r(\xi) d\xi \right\}.$$

Доказательство. Произведём в уравнении (22) замену переменных

$$u = \psi(t) = \int_0^t r(\xi) d\xi, \quad y(u) = x(\psi^{-1}(u)).$$

Тогда оно превращается в уравнение

$$\frac{dy(u)}{du} + \int_{u-H(u)}^u K(u, v) y(v) dv = \int_{u-H(u)}^u K(u, v) g(y(v)) dv, \quad (26)$$

где

$$T(u) = \int_{\psi^{-1}(u)-\tau(\psi^{-1}(u))}^{\psi^{-1}(u)} r(v) dv, \quad H(u) = \int_{\psi^{-1}(u)-\tau(\psi^{-1}(u))-h(\psi^{-1}(u))}^{\psi^{-1}(u)-\tau(\psi^{-1}(u))} r(v) dv,$$

$$K(u, v) = \frac{k(\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v))}{(r(\psi^{-1}(u))r(\psi^{-1}(v)))},$$

а поскольку выполнено неравенство (25), то $T(u) + H(u)$ ограничено. Введем обозначения

$$h_0 = \sup_u (T(u) + H(u)), \quad \varphi(u) = \varphi_0(\psi^{-1}(u)).$$

Если $r \in L_1$, то уравнение (26) задано на полуинтервале

$$\left[0, \int_0^\infty r(\xi) d\xi \right).$$

Так как решение уравнения (26) непрерывно продолжаемо, то оно существует и в точке

$$u = \int_0^\infty r(\zeta) d\zeta.$$

Следовательно, решение уравнения (19) имеет предел при $t \rightarrow +\infty$. Далее будем считать, что $r \notin L_1$.

Уравнение (26) является частным случаем уравнения (13). Так как выполнено неравенство (25), то в силу теоремы 2.3 для функции Коши C_0 уравнения

$$\frac{dy(u)}{du} + \int_{u-T(u)-H(u)}^{u-T(u)} K(u, v) y(v) dv = 0$$

при всех $(u, v) \in \Delta$ справедлива оценка

$$|C_0(u, v)| \leq Ae^{-\gamma(u-v)}. \quad (27)$$

Так как $g(y) = O(y^2)$, то к уравнению (26) применима лемма 2.2. Следовательно, при достаточно малых $\|\varphi_0\|_C$ решение уравнения (26) имеет экспоненциальную оценку. Возвращаясь к исходным переменным, получаем, что при достаточно малых $\|\varphi_0\|_C$

$$|x(t)| \leq M \exp \left\{ -\beta \int_0^t r(\xi) d\xi \right\}.$$

Отсюда следует, что если $r \notin L_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Поскольку $N(t) = N^* e^{-x(t)}$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N^*$. Так как $1 - e^{-x}$ при малых x эквивалентно x , то и функция $N(t) - N^*$ имеет оценку

$$|N(t) - N^*| \leq M \exp \left\{ -\beta \int_0^t r(\xi) d\xi \right\}.$$

□

Для автономного случая $k(t) \equiv k$, $h(t) \equiv h$, $\tau(t) \equiv \tau$, $r(t) \equiv r$ применяем следствие 2.1 и приходим к следующей теореме.

Теорема 3.4. *Если*

$$0 < r < \frac{\pi^2 h}{2(2\tau + h)^2 \sin \frac{\pi h}{2(2\tau + h)}},$$

то при достаточно малых $\|\varphi - N^\|_C$ решение уравнения (19) имеет предел, причём*

$$|N(t) - N^*| \leq M e^{-\beta t}.$$

Поясним, что означают полученные результаты в терминах динамики популяций, описываемой уравнением Хатчинсона. Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что при небольших запаздываниях у уравнения Хатчинсона есть решения, поведение которых мало отличается от решений уравнения без запаздываний: численность популяции стремится достигнуть равновесного состояния N^* либо монотонно убывая, либо возрастая. С увеличением запаздывания поведение популяций становится более разнообразным: популяция стремится стабилизироваться, но не монотонно, а осциллируя около положения равновесия. Эта ситуация описывается теоремами 3.3 и 3.4.

Наиболее интересна ситуация, когда параметры уравнения Хатчинсона попадают на криволинейную границу области устойчивости, описываемой теоремой 3.4. Она соответствует случаю, когда корни характеристического квазиполинома линейного приближения впервые попадают на мнимую ось. Здесь следует ожидать появления цикла.

Дальнейшее увеличение запаздывания приводит к появлению неустойчивых решений; вне области устойчивости стационарный режим остается теоретически возможным (при очень специальном выборе начальных условий), но становится неустойчивым и потому фактически не наблюдается.

Любопытно поведение популяции в случае $r \in L_1$: если с течением времени коэффициент r становится интегрально малым, то популяция может стабилизироваться, не достигнув точки равновесия N^* . Этот случай соответствует ситуации, когда новых особей с течением времени появляется все меньше, но продолжительность жизни каждой может быть довольно большой.

4. Модели кроветворения.

4.1. Обобщённая модель Мэжки—Гласса. Другой интересной биологической моделью, в которой тоже оказывается существенным эффект запаздывания, является уравнение, появившееся в 1977 г. в [18]. Предложенная модель первоначально имела следующий вид:

$$\dot{N}(t) = -aN(t) + \frac{\beta \theta^n N(t - \tau)}{\theta^n + N^n(t - \tau)}, \quad t \geq 0. \quad (28)$$

Здесь $N(t)$ — число клеток (эритроцитов) в момент времени t , $a > 0$ — постоянная смертности клеток, $\beta > 0$, $\theta > 0$, $n > 1$, $\tau > 0$ — константы, подбираемые так, чтобы удовлетворить экспериментальным данным. Таким образом, производство эритроцитов описывается функцией $\beta\theta^n x/(\theta^n + x^n)$, которая обращается в нуль при $x = 0$ и при $x \rightarrow +\infty$, а в точке $x_0 = \theta(n-1)^{-1/n}$ имеет единственный максимум. При построении модели (28) предполагается, что скорость производства клеток определяется числом этих клеток в момент времени $t - \tau$, причем эта скорость максимальна в тот момент времени t , когда число клеток в момент времени $t - \tau$ равно x_0 .

Уравнение (28) имеет два равновесных положения: устойчивое $N = \theta(\beta/a - 1)^{1/n}$ и неустойчивое $N = 0$. Заменой переменных

$$x(t) = N(t) - \theta \left(\frac{\beta}{a} - 1 \right)^{1/n}$$

уравнение (28) приводится к виду

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + f(x(t - \tau)), \quad t \geq 0, \quad (29)$$

в котором функция f обладает следующими свойствами: $f(0) = 0$, $f'(0) = -b = -a(n(1 - a/\beta) - 1)$. Следовательно, линейное приближение уравнения (29) имеет вид

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t - \tau), \quad t \geq 0. \quad (30)$$

Если последнее уравнение асимптотически устойчиво, то, в силу теоремы об устойчивости линейного приближения, уравнение (29) имеет асимптотически устойчивое тривиальное решение, а уравнение (28) — асимптотически устойчивое решение $N = \theta(\beta/a - 1)^{1/n}$. В [3] для уравнения (30) получен критерий асимптотической устойчивости, на основе которого можно делать обоснованные выводы об асимптотическом поведении решения уравнения (28).

Модель Мэкки—Гласса быстро распространилась, появились различные её обобщения и уточнения: второе слагаемое в формуле (28) можно выбирать в виде дробно-рациональных функций с большим количеством параметров, учитывая экспериментальные данные всё более точно; можно заменить постоянное запаздывание переменным; можно перейти от сосредоточенного запаздывания к распределённому. Последний вариант представляется нам наиболее интересным и перспективным: сигнал о недостатке кислорода и необходимости производства эритроцитов не может быть принят всеми зародышевыми клетками одновременно — естественно, что даже в автономном случае будет иметь место «размытие» запаздывания вокруг среднего значения. Заменяя в уравнении (28) сосредоточенное запаздывание распределённым, мы придём к следующим обобщениям уравнения Мэкки—Гласса.

Автономное уравнение с запаздывающим усреднением:

$$\dot{N}(t) = -aN(t) + \frac{\frac{\beta\theta^n}{h} \int_{t-\tau-h}^{t-\tau} N(s) ds}{\theta^n + \left(\frac{1}{h} \int_{t-\tau-h}^{t-\tau} N(s) ds \right)^n}, \quad t \geq 0, \quad (31)$$

или уравнение с распределённым запаздыванием общего вида:

$$\dot{N}(t) = -aN(t) + \frac{b\theta^n \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s)N(s) ds}{\theta^n + \left(\int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s)N(s) ds \right)^n}, \quad t \geq 0, \quad (32)$$

где постоянные $a, b, \theta, n > 0$, $k: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow (0, +\infty)$, функция $k(t, \cdot)$ локально суммируема, функции $k(\cdot, s)$, h измеримы по Лебегу на $\mathbb{R}_+$,

$$\int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) ds = c.$$

При $t \leq 0$ решение доопределено начальной функцией φ .

Легко видеть, что для уравнения (32) $N(t) \equiv (\theta/c)((b/a)c - 1)^{1/n}$ является точкой равновесия. С помощью замены

$$N(t) = x(t) + \frac{\theta}{c} \left(\frac{bc}{a} - 1 \right)^{1/n}$$

уравнение (32) сводится к уравнению

$$\dot{x}(t) = -ax + f \left(\int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) x(s) ds \right), \quad (33)$$

где

$$f(y) = -\frac{a\theta}{c} \left(\frac{bc}{a} - 1 \right)^{1/n} + \frac{b\theta^n y + b\theta^{n+1} (bc/a - 1)^{1/n}}{\theta^n + (y + \theta (bc/a - 1)^{1/n})^n}.$$

Для уравнения (33) точкой равновесия является $x = 0$. Так как

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -\frac{a}{c} \left(n \left(1 - \frac{a}{bc} \right) - 1 \right),$$

то

$$f(y) = -\frac{a}{c} \left(n \left(1 - \frac{a}{bc} \right) - 1 \right) y + O(y^2).$$

Значит, линейным приближением уравнения (33) является уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \frac{a}{c} \left(n \left(1 - \frac{a}{bc} \right) - 1 \right) \int_{t-\tau(t)-h(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) x(s) ds = 0. \quad (34)$$

Введём функцию

$$g(y) = \frac{a}{c} \left(n \left(1 - \frac{a}{bc} \right) - 1 \right) y + f(y);$$

очевидно, $g(y) = O(y^2)$ при $y \rightarrow 0$.

Получим два признака экспоненциальной устойчивости уравнения Мэкки—Гласса на основе соответствующих признаков для его линейного приближения (34).

Теорема 4.1. Пусть $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} (\tau(t) + h(t)) = h_0$ и выполнено неравенство

$$e^{-ah_0} > \rho \left(n \left(1 - \frac{a}{bc} \right) - 1 \right),$$

где ρ определяется равенством (6). Тогда при достаточно малых $\|\varphi - N^*\|_C$ решение уравнения (32) имеет предел, причём

$$|N(t) - N^*| \leq Me^{-\beta t}.$$

Доказательство. В силу теоремы 2.4, из условия теоремы следует, что функция Коши уравнения (34) имеет экспоненциальную оценку. Так как $g(y) = O(y^2)$, то для уравнения (33) выполнены условия леммы 2.2. Следовательно, решение уравнения (33) имеет экспоненциальную оценку. $\square$

Теорема 4.2. Пусть $k(t, s) \equiv k$, $h(t) \equiv h$, $\tau(t) \equiv \tau$, $a > 0$ и

$$\frac{ah}{k} \left(n \left(1 - \frac{a}{bk} \right) - 1 \right) < \frac{2\theta^2}{\sin \theta \sin(\theta(2\tau/h + 1))},$$

где θ — наименьший положительный корень уравнения

$$ah = -2\theta \operatorname{ctg} \left(\theta \left(\frac{2\tau}{h} + 1 \right) \right).$$

Тогда при достаточно малых $\|\varphi - N^*\|_C$ решение уравнения (32) имеет предел, причём

$$|N(t) - N^*| \leq Me^{-\beta t}.$$

Доказательство. Проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.1, только вместо теоремы 2.4 используется теорема 2.6. $\square$

4.2. Обобщённая модель Ласоты—Важевски. Ещё одно уравнение, описывающее процесс производства красных кровяных телец, было предложено в [25]. Пусть $N(t)$ — количество красных кровяных телец в момент времени t . Допустим, что коэффициент разрушения красных кровяных телец в единицу времени не зависит от времени и возрастной структуры. Вообще говоря, последнее неверно, так как известно, что красные кровяные тельца существуют около 120 дней, но если популяция многочисленна, то предположение о независимости от возраста справедливо. Поскольку у обычного человека примерно $3,5 \cdot 10^{11}$ красных кровяных телец на килограмм веса, то эту гипотезу можно принять, считая что скорость разрушения эритроцитов пропорциональна их количеству. Коэффициент разрушения обозначим через μ .

Чтобы поддержать количество эритроцитов в крови на оптимальном уровне, организм должен реагировать на их недостаток и начать выработку новых. Реакция наступает не мгновенно, а спустя некоторое время. Обозначим через h запаздывание гемопоэтической (кроветворной) системы, т.е. время между стимуляцией к производству и вхождению красных кровяных телец в систему кровообращения. В первоначальной модели оно считалось постоянным. Функция «прироста» выбиралась в виде $pe^{-\gamma N(t-h)}$, т.е. предполагалось, что скорость рождения новых эритроцитов в момент времени t тем больше, чем меньше было их наличное количество в момент времени $t - h$. Если эритроцитов становится больше, то прирост уменьшается, асимптотически стремясь к нулю. Коэффициенты p и γ постоянны и определяются экспериментально. Показатель γ характеризует возбудимость гемопоэтической системы, то есть это относительное приращение производства на одну клетку, коэффициент p учитывает потребность в кислороде. Возрастающая потребность увеличивает коэффициент.

Объединяя производство красных кровяных телец и их разрушение, получаем уравнение Ласоты—Важевски с постоянным запаздыванием:

$$\dot{N}(t) = -\mu N(t) + pe^{-\gamma N(t-h)}, \quad t \geq 0. \quad (35)$$

Если мы заменим в уравнении (35) сосредоточенное запаздывание распределённым, то придём к следующему обобщению уравнения Ласоты—Важевски:

$$\dot{N}(t) = -\mu N(t) + p \int_{t-h(t)}^t k(t, s) e^{-\alpha N(s)} ds, \quad t \geq 0. \quad (36)$$

Здесь постоянные μ, p, α положительны, $k: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, +\infty)$, функция $k(t, \cdot)$ локально суммируема, функции $k(\cdot, s)$, h измеримы по Лебегу на $\mathbb{R}_+$,

$$\int_{t-h(t)}^t k(t, s) ds = c.$$

При $t \leq 0$ решение доопределено начальной функцией φ .

Легко видеть, что N^* — точка равновесия, определяемая как решение уравнения

$$N^* = \frac{cp}{\mu} e^{-\alpha N^*}.$$

С помощью замены $N = x + N^*$ уравнение (36) сводится к уравнению

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) - \frac{\mu N^*}{c} \int_{t-h(t)}^t k(t, s) f(x(s)) ds, \quad (37)$$

где $f(x) = 1 - e^{-\alpha x}$. Для уравнения (37) точкой равновесия является $x = 0$. Так как $f(x) = x + O(x^2)$, то линейным приближением уравнения (37) является уравнение

$$\dot{x}(t) + \mu x(t) + \frac{\mu \alpha N^*}{c} \int_{t-h(t)}^t k(t, s) x(s) ds = 0. \quad (38)$$

Следующие две теоремы дают признаки локальной экспоненциальной устойчивости решения уравнения (36). Их доказательства проходят по одной схеме: применение леммы 2.2 с использованием теорем об экспоненциальной устойчивости линейного приближения (теорема 2.4 и теорема 2.6 при $\tau = 0$).

Теорема 4.3. Пусть $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} h(t) = h_0$ и выполнено неравенство

$$e^{-\mu h_0} > \eta(\alpha N^*),$$

где η определено равенствами (6). Тогда при достаточно малых $\|\varphi - N^*\|_C$ решение уравнения (36) имеет предел, причём

$$|N(t) - N^*| \leq M e^{-\beta t}.$$

Теорема 4.4. Пусть $k(t, s) \equiv k$, $h(t) \equiv h$, $\mu > 0$ и

$$-\mu h < \mu \alpha N^* h < 2 \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^2,$$

где θ — наименьший положительный корень уравнения $\mu h = -2\theta \operatorname{ctg} \theta$. Тогда при достаточно малых $\|\varphi - N^*\|_C$ решение уравнения (36) имеет предел, причём

$$|N(t) - N^*| \leq M e^{-\beta t}.$$

Для случая автономного уравнения Ласоты—Важевски на основе леммы 2.1 можно указать границу, отделяющую монотонные решения от осциллирующих.

Теорема 4.5. Пусть $k(t, s) \equiv k$, $h(t) \equiv h$, а функция ω определяется равенствами (11). Тогда справедливы следующие утверждения:

- (а) если $\mu h \leq \omega(\mu \alpha h N^*)$, то найдется решение уравнения (36), которое монотонно возрастает к пределу $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N^*$;
- (б) если $\mu h > \omega(\mu \alpha h N^*)$, то все решения уравнения (36) являются осциллирующими.

Модели Ласоты—Важевски и Мэкки—Гласса описывают процесс кроветворения, т.е. производство эритроцитов. Здесь оказывается важным следующее: как постоянный недостаток, так и постоянный избыток эритроцитов в крови классифицируется медициной как болезнь. Очевидно, что «заставить» организм поддерживать количество эритроцитов постоянным невозможно, и нормальным считается состав крови, при котором происходит колеблемость количества эритроцитов вокруг ненулевого положения равновесия. В этом смысле интересными представляются результаты теорем 4.4 и 4.2, в которых доказываются существование устойчивых решений, имеющих все более отчетливый периодический характер — по мере приближения к границе области устойчивости.

5. Обобщённая модель мясных мух Николсона. В 1954 г. А. Николсон опубликовал данные о конкуренции за пищу (овечью печень) в лабораторной популяции мясных мух *Lucilia cuprina*, которую он наблюдал на протяжении около двух лет (см. [20, 21]). В его эксперименте посаженным в садок мухам ежедневно скармливали ограниченное количество белков (500 мг) в виде печени. Белки были необходимы мухам для производства яиц. Остальная часть рациона (сахар и вода) были в свободном доступе. Все отложенные яйца ежедневно переносились в свежую печень и выращивались отдельно от взрослых мух. Как только личинки становились взрослыми мухами, их пересаживали в садок. В условиях своих экспериментов Николсон обнаружил, что продолжительность развития от яйца до взрослой мухи составляет примерно 15 дней. Существенной особенностью экспериментов было то, что популяции разрешалось свободно развиваться при заданных условиях окружающей среды в течение длительного времени. Количество мясных мух подсчитывалось каждые 2-3 дня. Эксперимент продолжался около двух лет; оказалось, что во время экспериментов имели место характерные периодические колебания, или циклы, продолжительностью около 35–40 дней.

Николсон предположил, что основная причина колебаний — запаздывание во времени, связанное с 15-дневным периодом «взросления» мух. Р. М. Мэй предложил применить для описания эксперимента Николсона модель Хатчинсона (15) (см. [19]). Однако подстановка экспериментальных данных в это уравнение привела к выводу, что продолжительность развития от яйца до взрослой особи должна быть равна 9 дням. Этот результат существенно отличался от фактически наблюдаемого временного периода (около 15 дней), зафиксированного Николсоном [20].

Чтобы устранить несоответствие в оценке величины запаздывания, W. S. C. Gurney, S. P. Blythe и R. M. Nisbet [15] предложили следующее уравнение с запаздыванием:

$$\dot{N}(t) = -\delta N(t) + pN(t - \tau)e^{-\alpha N(t - \tau)}, \quad t \geq 0, \quad (39)$$

чтобы смоделировать популяцию австралийских мясных мух *Lucilia cuprina*. В данном уравнении $N(t)$ — численность популяции в момент времени t , p — максимальная скорость суточного производства яиц на особь, $1/\alpha$ — размер популяции, при котором популяция воспроизводится с максимальной скоростью, δ — скорость гибели взрослых особей в сутки на особь, τ — время жизни поколения. Видно, что скорость роста популяции положительна, когда величина популяции мала. Затем функция скорости рождения (второе слагаемое в правой стороне уравнения (39)) возрастает, пока не достигнет максимума при $N = p/(\alpha e)$, в результате саморегуляции данное состояние может длительно сохраняться. После этого функция скорости рождения убывает вследствие эффекта перенаселения.

Уравнение (39) было использовано в [15, 20, 22], чтобы смоделировать динамику лабораторных мух, и теперь его называют Nicholson's blowflies equation. В данной работе будем называть его уравнением Николсона.

Если сделать вполне оправданное предположение, что величина запаздывания не была постоянной во время всего эксперимента, и заменить её интегральным средним, то мы придём к следующему обобщению уравнения Николсона:

$$\dot{N}(t) = -\delta N(t) + p \int_{t-h(t)-\tau(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) N(s) e^{-\alpha N(s)} ds, \quad t > 0. \quad (40)$$

Предполагаем, что $\alpha > 0$, $k: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, +\infty)$, функция $k(t, \cdot)$ локально суммируема, функции $k(\cdot, s)$, h измеримы по Лебегу на $\mathbb{R}_+$,

$$\int_{t-h(t)-\tau(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s) ds = c.$$

При $t \leq 0$ решение доопределяем начальной функцией φ .

Уравнение, определяющее точки равновесия, имеет вид

$$\delta N = pcN e^{-\alpha N}.$$

Это уравнение всегда имеет нулевое решение, но из физического смысла задачи ясно, что нас интересует случай положительных решений (популяция не вымирает).

Легко видеть, что

$$N^* = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{pc}{\delta}$$

— вторая точка равновесия уравнения (40). Предположим, что $pc > \delta$; тогда $N^* > 0$. С помощью замены переменных $N = x/\alpha + N^*$ уравнение (40) сводится к уравнению

$$\dot{x}(t) = -\frac{\delta}{c}x(t) - \delta \int_{t-h(t)-\tau(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s)f(x(s)) ds, \quad (41)$$

где

$$f(x) = \ln \left(\frac{pc}{\delta} \right) (1 - e^{-x}) - xe^{-x}.$$

Для уравнения (41) точкой равновесия является $x = 0$. Так как $f(x) = x + O(x^2)$, то линейным приближением уравнения (41) является уравнение

$$\dot{x}(t) + \delta x(t) + \frac{\delta}{c} \left(\ln \frac{pc}{\delta} - 1 \right) \int_{t-h(t)-\tau(t)}^{t-\tau(t)} k(t, s)x(s) ds = 0. \quad (42)$$

В силу леммы 2.2, теоремы 2.4 и теоремы 2.6, приходим к следующим результатам.

Теорема 5.1. Пусть $cp > \delta > 0$, $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} (h(t) + \tau(t)) = h_0$, $e^{-\delta h_0} > \eta (\ln(pc/\delta) - 1)$, где функция η определена равенствами (6). Тогда при достаточно малых $\|\varphi - N^*\|_C$ решение уравнения (40) имеет предел, причём

$$|N(t) - N^*| \leq Me^{-\beta t}.$$

Теорема 5.2. Пусть $k(t, s) \equiv k$, $h(t) \equiv h$, $\tau(t) \equiv \tau$, $cp > \delta > 0$ и

$$\delta \left(\ln \frac{cp}{\delta} - 1 \right) h < \frac{2\theta^2}{\sin \theta \sin (\theta (2\tau/h + 1))},$$

где θ — наименьший положительный корень уравнения

$$\delta h = -2\theta \operatorname{ctg} \left(\theta \left(\frac{2\tau}{h} + 1 \right) \right).$$

Тогда при достаточно малых $\|\varphi - N^*\|_C$ решение уравнения (40) имеет предел, причём

$$|N(t) - N^*| \leq Me^{-\beta t}.$$

Интересно сопоставить полученные результаты с другими исследованиями этой задачи. Как уже отмечалось, для моделирования на основе экспериментальных данных, собранных Николсоном, предлагались различные модели. Модель Хатчинсона была отклонена: она давала слишком большое расхождение с экспериментом. Её заменили уравнением (39) с сосредоточенным запаздыванием, для которого область устойчивости линейного приближения известна. Если параметры уравнения выбирать принадлежащими границе, то, как установлено в [3], [16], [12] в этом случае запаздывание τ находится по формуле $\tau = (b^2 - a^2)^{-1/2} \arccos(a/b)$, где $a = \delta$, $b = \delta (\ln(pc/\delta) - 1)$, т.е. оно полностью определяется остальными (заданными) параметрами уравнения и не допускает варьирования. Но величина запаздывания (15 дней) задавалась изначально, и остаётся только рассчитывать, что теория и эксперимент дадут один и тот же результат; возможности как-либо «подправить» модель, выбрав параметры иначе, у нас нет. Модель Николсона с распределённым запаздыванием даёт в этом отношении больше возможностей: область устойчивости определяется тремя независимыми параметрами, что позволяет учесть все данные эксперимента, за счет выбора оставшегося параметра добиться того, чтобы точка попала на границу области устойчивости, где появляются периодические решения, также обнаруженные экспериментально.

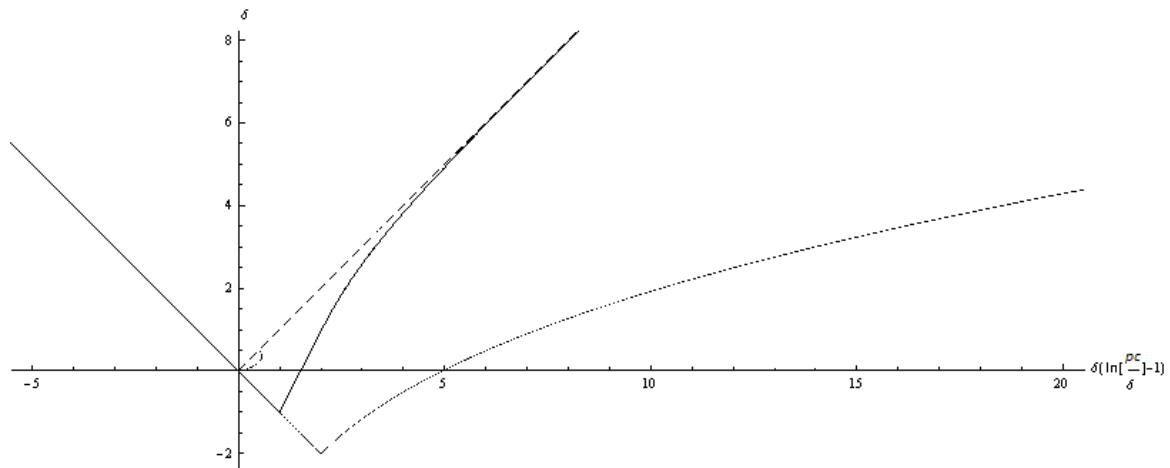


Рис. 1

В заключение сделаем несколько замечаний о работах, посвящённых уравнению Николсона. Эта биологическая модель, предложенная в начале 1980-х гг. в [15, 20, 22], сразу обратила на себя внимание математиков и в последующие годы интерес к ней только возрастал. Например, статья [14] целиком посвящена уравнению Николсона. В ней систематизированы результаты, полученные для этой модели с начала 1990-х гг. В статье явно указываются две основных разновидности модели: с сосредоточенным запаздыванием и распределённым запаздыванием. Но что касается результатов, то подавляющее большинство их относится к моделям с сосредоточенным запаздыванием — для них изучались вопросы локальной и глобальной устойчивости, осцилляции, знакоопределённости и т. д. Чтобы упорядочить и сравнить эти результаты, авторам статьи понадобилась сводная таблица. Что же касается моделей с распределённым запаздыванием, то для них авторы приводят только самые общие результаты, которые далеки от точных. Сравним их с результатами, полученными в разделе 5 настоящей работы, для наглядности положив $\tau = 0$. На рис. 1 изображены три области. Самая большая область определяет устойчивость автономных уравнений Николсона с распределённым запаздыванием (теорема 5.2 настоящей работы); вторая — область устойчивости для полуавтономного случая (теорема 5.1 настоящей работы); третья получается, если объединить области, описываемые теоремами 3.4 и 3.5 из статьи [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. Азбелев Н. В., Малыгина В. В. Об устойчивости тривиального решения нелинейных уравнений с последействием // Изв. вузов. Мат. — 1994. — № 6. — С. 20–27.
3. Андронов А. А., Майер А. Т. Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автомат. телемех. — 1946. — 7, № 2-3. — С. 95–106.
4. Вагина М. Ю. Логистическая модель с запаздывающим усреднением // Автомат. телемех. — 2003. — № 4. — С. 167–173.
5. Кипнис М. М., Вагина М. Ю. Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // Мат. заметки. — 2003. — 74, № 5. — С. 786–789.
6. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.
7. Малыгина В. В., Сабатулина Т. Л. Знакоопределенность решений и устойчивость линейных дифференциальных уравнений с переменным распределённым запаздыванием // Изв. вузов. Мат. — 2008. — № 8. — С. 73–77.
8. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.

9. *Сабатулина Т. Л.* Признаки положительности функции Коши дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием// Изв. вузов. Мат. — 2010. — № 11. — С. 50–62.
10. *Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.* Некоторые признаки устойчивости линейного автономного дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием// Изв. вузов. Мат. — 2007. — № 6. — С. 55–63.
11. *Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.* Об устойчивости линейного дифференциального уравнения с ограниченным последствием// Изв. вузов. Мат. — 2014. — № 4. — С. 25–41.
12. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985.
13. *Berezansky L., Braverman E.* Linearized oscillation theory for nonlinear equation with a distributed delay// Appl. Math. Comp. Model. — 2008. — 48. — P. 287–304.
14. *Berezansky L., Braverman E., Idels L.* Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems// Appl. Math. Model. — 2010. — 34, № 6. — P. 1405–1417.
15. *Gurney W. S. C., Blythe S. P., Nisbet R. M.* Nicholson's blowflies revisited// Nature. — 1980. — № 287. — P. 17–21.
16. *Hayes N. D.* Roots of the transcendental equation associated with acertial differential-difference equation// J. London Math. Soc. — 1950. — 25. — P. 221–246.
17. *Hutchinson G. E.* Circular causal in ecology// Ann. N.Y. Acad. Sci. — 1948. — 50. — P. 221–246.
18. *Mackey M., Glass L.* Oscillations and chaos in physiological control systems// Science. — 1977. — 197. — P. 287–289.
19. *May R. M.* Models for single populations// in: Theoretical Ecology: Principles and Applications (*May R. M.*, eds.). — Oxford: Blackwell Scientific, 1976. — P. 4–25.
20. *Nicholson A.* An outline of the dynamics of animal populations// Austral. J. Zool. — 1954. — № 2. — P. 9–65.
21. *Nicholson A. J.* Compensatory reactions of populations to stresses, and their evolutionary significance// Austral. J. Zool. — 1954. — № 2. — P. 1–8.
22. *Nisbet R., Gurney W.* Modelling Fluctuating Populations. — New York: Wiley, 1982.
23. *Wright E. M.* A nonlinear difference-differential equation// J. Reine Angew. Math. — 1955. — 194. — P. 66–87.
24. *Volterra V.* Sur la theorie Mathematique des phenomenes hereditaires// J. Math. Pures Appl. — 1928. — № 7. — P. 249–298.
25. *Ważewska-Czyżewska M., Lasota A.* Mathematical problems of dynamics of red blood cells production// Mat. Stos. — 1976. — 3, № 6. — P. 23–40.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0005).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Сабатулина Татьяна Леонидовна

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

E-mail: tlsabatulina@list.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 79–91
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-79-91

УДК 517.5, 514.17

ПОЛНОТА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ В ТЕРМИНАХ ПЕРИМЕТРА

© 2023 г. Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, Е. Г. КУДАШЕВА, Р. Р. МУРЯСОВ

Аннотация. Установлена новая шкала условий полноты экспоненциальных систем в двух видах функциональных пространств на подмножествах комплексной плоскости. Первый — банаховы пространства функций, непрерывных на компакте и одновременно голоморфных во внутренности этого компакта, если она непуста, с равномерной нормой. Второй — пространства голоморфных функций на ограниченном открытом множестве с топологией равномерной сходимости на компактах. Эти условия сформулированы в терминах мажорирования периметра выпуклой оболочки области определения функций из пространства новыми характеристиками распределения показателей экспоненциальной системы.

Ключевые слова: полнота систем функций, экспоненциальная система, целая функция экспоненциального типа, распределение корней, периметр, выпуклая оболочка, опорная функция.

COMPLETENESS OF EXPONENTIAL SYSTEMS IN FUNCTIONAL SPACES IN TERMS OF PERIMETER

© 2023 B. N. KHABIBULLIN, E. G. KUDASHEVA, R. R. MURYASOV

ABSTRACT. A new scale of completeness conditions for exponential systems is established for two types of functional spaces on subsets of the complex plane. The first type of spaces are Banach spaces of functions that are continuous on a compact set and holomorphic in the interior of this compact set (if it is nonempty) with the uniform norm. The second type consists of spaces of holomorphic functions on a bounded open set with the topology of uniform convergence on compact sets. These conditions are formulated in terms of majorizing the perimeter of the convex hull of the domain of functions from the space by new characteristics of the distribution of exponents of the exponential system.

Keywords and phrases: completeness of systems of functions, exponential system, entire function of exponential type, distribution of roots, perimeter, convex hull, support function.

AMS Subject Classification: 30B60, 30D15, 52A38, 31A05

1. Введение.

1.1. Некоторые обозначения, определения и соглашения. Одноточечные множества $\{a\}$ часто записываем без фигурных скобок, т.е. просто как a . Так, для множества $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ всех натуральных чисел $\mathbb{N}_0 := 0 \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ с таким же отношением порядка $\leq$ рассматриваем и как вещественную ось в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с евклидовой нормой-модулем $|\cdot|$. Порядковое пополнение множества $\mathbb{R}$ верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{R} \notin \mathbb{R}$ и нижней гранью $-\infty := \inf \mathbb{R} \notin \mathbb{R}$ даёт расширенное множество действительных чисел $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ с порядковой топологией. Интервалы с концами $a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $b \in \overline{\mathbb{R}}$ — это

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

множества $[a, b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\}$ — отрезок в $\overline{\mathbb{R}}$, $(a, b] := [a, b] \setminus a$, $[a, b) := [a, b] \setminus b$, а также $(a, b) := [a, b] \setminus a$ — открытый интервал в $\overline{\mathbb{R}}$. Используем также обозначения $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ для *положительной полуоси* и $\overline{\mathbb{R}}^+ := [0, +\infty]$ для её расширения. При $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ через $D(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z'| < r\}$ и $\overline{D}(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z'| \leq r\}$, а также $\partial \overline{D}(r) := \overline{D}(r) \setminus D(r)$ обозначаем соответственно *открытый и замкнутый круги*, а также *окружность с центром в нуле радиуса r* . Для подмножества $S \subset \mathbb{C}$ через $\text{clos } S$, $\text{int } S$, ∂S и $\text{conv } S$ обозначаем соответственно *замыкание, внутренность, границу и выпуклую оболочку* множества S в $\mathbb{C}$. Если граница ∂S подмножества $S \subset \mathbb{C}$ — спрямляемая замкнутая кривая, то евклидову длину этой границы ∂S обозначаем через $\text{prm}(\partial S)$ — *периметр границы ∂S* .

Всюду далее через Z обозначаем *распределение точек* на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, среди которых могут быть повторяющиеся. Распределение точек Z однозначно определяется функцией, действующей из $\mathbb{C}$ в $\overline{\mathbb{N}}_0$ и равной в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ количеству повторений этой точки z в распределении точек Z . Для такой функции, которую часто называют *функцией кратности*, или *дивизором*, распределения точек Z (см. [11, пп. 0.1.2–0.1.3], сохраняем то же обозначение Z . Другими словами, $Z(z)$ — это количество вхождений точки $z \in \mathbb{C}$ в Z ; пишем $z \in Z$, если $Z(z) > 0$. Распределение точек Z можно трактовать и как меру со значениями в $\overline{\mathbb{N}}_0$ с тем же обозначением

$$Z(S) := \sum_{z \in S} Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0 \quad \text{для любого } S \subset \mathbb{C}. \quad (1)$$

Распределение точек Z на $\mathbb{C}$ называется *локально конечным*, если её считающая *радиальная функция* $Z^{\text{rad}}(r) := Z(\overline{D}(r))$ конечна, т.е. $Z^{\text{rad}}(r) < +\infty$ для любого $r \in \mathbb{R}^+$.

Для компакта K в $\mathbb{C}$ через $C(K)$ обозначаем *банахово пространство непрерывных функций* $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ с *sup-нормой* $\|f\|_{C(K)} := \sup\{|f(z)| \mid z \in K\}$. Для открытого подмножества $O \subset \mathbb{C}$ через $\text{Hol}(O)$ обозначаем *пространство голоморфных функций* $f: O \rightarrow \mathbb{C}$ с *топологией равномерной сходимости на всех компактах* $K \subset O$, определяемой *sup-полунормами* $\|f\|_{C(K)}$. Для компакта $K \subset \mathbb{C}$ с *внутренностью* $\text{int } K$ через $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ обозначаем *банахово пространство непрерывных на K и голоморфных на внутренней $\text{int } K$ функций* $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ с *sup-нормой* $\|f\|_{C(K)}$. Очевидно, если $\text{int } K = \emptyset$ — *пустое множество*, то $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K) = C(K)$.

Система векторов из топологического векторного пространства *полна* в нём, если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с этим пространством. Для распределения точек Z на $\mathbb{C}$ далее рассматривается полнота лишь *экспоненциальных систем*

$$\text{Exp}^Z := \left\{ w \xrightarrow[w \in \mathbb{C}]{} w^p \exp(zw) \mid z \in Z, Z(z) - 1 \geq p \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (2)$$

с *распределением показателей Z* . Всюду далее рассматриваются только системы (2) с *локально конечным распределением показателей Z* , поскольку в противном случае система Exp^Z заведомо полна в любом из рассматриваемых в этой статье функциональных пространств.

1.2. Предшествующие результаты. Детальный обзор по полноте экспоненциальных систем по состоянию до 2012 г. изложен в монографии-обзоре [11] первого из авторов. Следующий давно известный результат (см. [5, гл. IV, § 1], [11, комментарий после теоремы 3.3.5]) даёт, по-видимому, самое первое условие полноты экспоненциальной системы (2) в терминах *периметра*.

Теорема А. Если $S \neq \emptyset$ — *ограниченная выпуклая область* в $\mathbb{C}$ и

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \int_1^r \frac{Z^{\text{rad}}(t)}{t} dt \geq \frac{1}{2\pi} \text{prm}(\partial S), \quad (3)$$

то *экспоненциальная система Exp^Z из (2) полна в пространстве $\text{Hol}(S)$* .

Как отмечено в [11, п. 3.4.1], если $S \neq \emptyset$ — *выпуклый компакт* в $\mathbb{C}$ и нестрогое неравенство $\geq$ в (3) заменить на строгое неравенство $>$, то система Exp^Z полна в пространстве $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$.

Частным проявлением [8, § 7, п. 4, теорема единственности], [9, теорема 4.1], [10, теорема А], [11, теорема 3.3.5 и п. 3.4.1] является следующее утверждение.

Теорема В. Пусть $S \neq \emptyset$ — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ и выполнено хотя бы одно из следующих трёх утверждений:

(i) для некоторого $p \in [0, 1)$ выполнено неравенство

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2r} \int_1^r \left(\left(\frac{r}{t} \right)^p + \left(\frac{t}{r} \right)^p \right) \frac{Z^{\text{rad}}(t)}{t} dt \geq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-p^2} \text{prm}(\partial S); \quad (4)$$

(ii) выполнено неравенство

$$\limsup_{1 < a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \int_r^{ar} \frac{Z^{\text{rad}}(t)}{t^2} dt \geq \frac{1}{2\pi} \text{prm}(\partial S); \quad (5)$$

(iii) для некоторого числа $p > 1$ выполнено неравенство

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2r} \left(\int_1^r \left(2 - \left(\frac{t}{r} \right)^p \right) Z^{\text{rad}}(t) \frac{dt}{t} + \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t} \right)^p Z^{\text{rad}}(t) \frac{dt}{t} \right) \geq \frac{1}{2\pi} \frac{p^2}{p^2-1} \text{prm}(\partial S). \quad (6)$$

Тогда экспоненциальная система Exp^Z из (2) полна в пространстве $\text{Hol}(S)$.

Если $S \neq \emptyset$ — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ и хотя бы в одном из трёх утверждений (i), (ii) или (iii) соответствующее неравенство (4), (5) или (6) выполнено со строгим знаком $>$ вместо нестрогого $\geq$, то система Exp^Z полна в пространстве $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$.

Замечание 1. При выборе $p = 0$ в условии полноты (4) из части (i), а также при $p \rightarrow +\infty$ в условии (6) части (iii) теоремы В получаем в точности условие полноты (3) из теоремы А.

Замечание 2. Внешний верхний предел $\limsup_{a \rightarrow +\infty}$ можно заменить как на точную нижнюю грань $\inf_{a > 1}$, так и на предел $\lim_{a \rightarrow +\infty}$, который существует, и все эти три величины совпадают (см. [4, теорема 1], [7, предложение 6]), когда конечна верхняя плотность распределение точек Z

$$\overline{\text{dens}}(Z) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{Z^{\text{rad}}(r)}{r} \in \overline{\mathbb{R}}^+. \quad (7)$$

1.3. Основной результат о полноте экспоненциальной системы. Мы развиваем условие полноты системы Exp^Z , выраженное неравенством (5) из утверждения ii) теоремы В.

Функция $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *положительной* (обозначение $f \geq 0$) на X , если $f(X) \subset \overline{\mathbb{R}}^+$, и *отрицательной* ($f \leq 0$) на X , если противоположная ей функция $-f$ положительна. Та же функция f называется *строго положительной*, если $f(X) \subset \overline{\mathbb{R}}^+ \setminus 0$, и *строго отрицательной*, если противоположная функция $-f$ строго положительна. Функция f называется *возрастающей* (соответственно *строго возрастающей*) на интервале $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$). Функция $f: I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *убывающей* (соответственно *строго убывающей*) на I , если противоположная функция $-f$ является возрастающей (соответственно строго возрастающей) на I .

Теорема 1. Пусть $r_0 \in \mathbb{R}^+$, $f: [r_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая положительная убывающая функция, Z — распределение точек на $\mathbb{C}$ и $P > 0$ — строго положительное число. Тогда имеют место следующие условия полноты:

I. Если выполнено соотношение

$$\sup_{r_0 \leq r < R < +\infty} \left(\int_{r < t \leq R} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\text{rad}}(t) - \frac{P}{2\pi} \int_r^R \frac{f(t^2)}{t} dt \right) = +\infty, \quad (8)$$

то для любого компакта $S \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus K$ и с периметром границы выпуклой оболочки, удовлетворяющим неравенству

$$\text{prm}(\partial \text{conv } S) \leq P, \quad (9)$$

экспоненциальная система Exp^Z полна в пространстве $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$.

II. Если выполнено одно из следующих двух условий:

(1) расходится интеграл

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{f(t^2)}{t} dt = +\infty \quad (10)$$

и выполнено соотношение

$$\limsup_{1 < a \rightarrow +\infty} \limsup_{r_0 \leq r \rightarrow +\infty} \left(\int_{r < t \leq ar} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\text{rad}}(t) / \int_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) \geq \frac{P}{2\pi}, \quad (11)$$

(2) бесконечен двойной нижний предел

$$\liminf_{1 < a \rightarrow +\infty} \liminf_{r_0 \leq r \rightarrow +\infty} \int_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt = +\infty \quad (12)$$

и выполнено соотношение

$$\limsup_{1 < a \rightarrow +\infty} \limsup_{r_0 \leq r \rightarrow +\infty} \left(\int_{r < t \leq ar} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\text{rad}}(t) / \int_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) \geq \frac{P}{2\pi}, \quad (13)$$

то для любой односвязной ограниченной области $S \subset \mathbb{C}$, для которой периметр границы выпуклой оболочки удовлетворяет неравенству (9), система Exp^Z полна в пространстве $\text{Hol}(S)$.

Доказательство теоремы 1 будет дано в конце статьи в разделе 3 после формулировки и доказательства теоремы 2 об интегральных оценках распределений масс Рисса субгармонических функций с ограничениями на их рост через опорную функцию множества. Доказательство теоремы 2 использует построенные во вспомогательном разделе 2 специальные радиальные субгармонические функции на $\mathbb{C} \setminus 0$, которые конструируются на основе выпуклых убывающих положительных функций f на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$.

Замечание 3. Если $\overline{\text{dens}}(Z) \stackrel{(7)}{=} +\infty$, то система Exp^Z полна в $\text{Hol}(S)$ для любого открытого множества $S \subset \mathbb{C}$ и в $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$ при любом компакте $S \subset \mathbb{C}$. Таким образом, представляет интерес только случай конечной верхней плотности $\overline{\text{dens}}(Z) < +\infty$. Тогда, учитывая существование правой производной f'_+ для выпуклой на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ функции f , при $r > 0$ имеем равенства

$$\int_{r < t \leq R} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\text{rad}}(t) = \frac{f(R^2)}{R} Z^{\text{rad}}(R) - \frac{f(r^2)}{r} Z^{\text{rad}}(r) - \int_{r < t \leq R} \left(\frac{f(t^2)}{t} \right)'_+ Z^{\text{rad}}(t) dt.$$

Отсюда в случае ещё и убывающей функции $f \geq 0$ при $\overline{\text{dens}}(Z) < +\infty$ получаем

$$\int_{r < t \leq R} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\text{rad}}(t) = \int_r^R \frac{Z^{\text{rad}}(t)}{t^2} (f(t^2) - 2tf'_+(t^2)) dt + O(1) \quad \text{при } r_0 \leq r < R < +\infty. \quad (14)$$

Таким образом, каждый интеграл из левой части (14), входящий в (8), (11) и (13), можно заменить на интеграл из правой части (14), поскольку добавление постоянных к этим интегралам не влияет на условия (8), (11) и (13).

Пример 1. Для выпуклой убывающей функции $f(x) \equiv 1$ при $x > 0$ интеграл из (12) при любом $r > 0$ равен $\ln a$ и выполнено (12), а соотношение (13) при учёте замечания 3 с соотношением (14) — это в точности (5) для $P = \operatorname{rgm}(\partial \operatorname{conv} S)$. Таким образом, условие полноты II(2) из теоремы 1 действительно обобщает условие полноты (ii) из теоремы В.

Пример 2. Функция $f: x \mapsto 1/\ln x$ является выпуклой, убывающей и положительной на $[e, +\infty)$, а также удовлетворяет условию (10), но не условию (12). Следовательно, такая функция даёт новые условия полноты в форме I и II(1). То же самое справедливо при любом $n \in \mathbb{N}$ для функции

$$f: x \mapsto \frac{1}{\underbrace{\ln \ln \dots \ln x}_{n \text{ раз}}}, \quad r_0 := \underbrace{e^{e^{\dots^e}}}_{n \text{ раз}}.$$

2. Одна конструкция субгармонических функций. Назовем последовательность функций $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, *возрастающей*, если при каждом $n \in \mathbb{N}$ разность $f_{n+1} - f_n \geq 0$ — положительная функция на X , и *убывающей*, если последовательность $(-f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ противоположных функций $-f_n$ является возрастающей.

2.1. *Выпуклые убывающие функции на открытой положительной полуоси.*

Предложение 1. Если функция $f \geq 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ является выпуклой и убывающей, то справедливы следующие утверждения:

- (i) функция f является непрерывной, причем левая f'_- и правая f'_+ производные на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ конечны и возрастают;
- (ii) существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_\pm(x) = 0$ и выполнены неравенства $f'_- \leq f'_+ \leq 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$, а также неравенства

$$0 \geq f'_\pm(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'_\pm(x_1) \quad \text{при всех } x_2 > x_1 > 0; \quad (15)$$

- (iii) существует убывающая последовательность $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дважды непрерывно дифференцируемых выпуклых убывающих функций f_n , которая равномерно стремится к f , а также выполнены неравенства

$$0 \geq f'_\pm(x) \geq f'_n(x - 1/n) \quad \text{при всех } x > 1/n. \quad (16)$$

Доказательство. Свойства из (i) относятся к элементарным свойствам выпуклых функций (см. [3, гл. 1, § 4], [14, гл. I]). Свойства (ii) легко следуют из убывания выпуклой функции $f \geq 0$, где для (15) используем, к примеру, геометрический смысл левой/правой производной как соответственно левой/правой полукасательной и секущей для графика выпуклой убывающей функции.

Некоторого обсуждения требует, по-видимому, свойство (iii), которое может быть получено из методов сглаживания выпуклых функций из [2, ч. 2, гл. 3]. Но здесь проще схематически описать возможную конструкцию требуемой убывающей последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Функция $f \geq 0$ является убывающей и непрерывной на $(0, +\infty)$, поэтому при $n = 1$ можно выбрать двустороннюю последовательность $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ точек $x_k \in (0, +\infty)$, строго возрастающую в том смысле, что $x_k < x_{k+1}$ при любом $k \in \mathbb{Z}$, для которой $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ и $x_k \xrightarrow[k \rightarrow -\infty]{} 0$, а также одновременно

$$0 < x_{k+1} - x_k \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq f(x_k) - f(x_{k+1}) \leq \frac{1}{2} \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим кусочно-аффинную функцию l_1 , график которой образован отрезками, соединяющими пару точек с координатами $(x_k, f(x_k))$ и $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. По построению из выпуклости и убывания f следует, что функция l_1 является выпуклой, убывающей, удовлетворяет неравенству $0 \leq l_1(x) - f(x) \leq 1/2$ при всех $x \in (0, +\infty)$, а также согласно (15) неравенствам $0 \geq f'_\pm(x) \geq (l_1)'_\pm(x - 1/2)$ при всех $x > 1/2$. В достаточно малых окрестностях точек излома

графика функции l_1 можно сгладить её выпуклыми сплайнами до дважды непрерывно дифференцируемой выпуклой убывающей функции $f_1 \geq l_1$ так, что

$$0 \leq f_1(x) - f(x) \leq 1 \quad \text{при всех } x \in (0, +\infty), \quad 0 \geq f'_\pm(x) \geq f'_1(x-1) \quad \text{при всех } x > 1.$$

Для построения функции f_2 сначала добавим в каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ конечное число попарно различных точек, начиная с x_k и заканчивая x_{k+1} , так, что как расстояние между соседними точками, так и между значениями функции f в этих точках было $\leq 1/4$. За полученной таким образом новой двусторонней строго возрастающей последовательностью сохраним то же обозначение $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Снова рассмотрим кусочно-аффинную функцию l_1 , график которой образован отрезками, соединяющими пару точек с координатами $(x_k, f(x_k))$ и $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. По построению из выпуклости и убывания f следует, что функция l_2 является выпуклой, убывающей, удовлетворяет неравенствам $f \leq l_2 \leq f_1$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ и $0 \leq l_2(x) - f(x) \leq 1/4$ при всех $x \in (0, +\infty)$, а также согласно (15) неравенствам $0 \geq f'_\pm(x) \geq (l_2)'_\pm(x-1/4)$ при всех $x > 1/4$. В очень малых окрестностях точек излома графика функции l_1 можем сгладить её выпуклыми сплайнами до дважды непрерывно дифференцируемой выпуклой убывающей функции $f_2 \geq l_2$ так, что $f_2 \leq f_1$ и

$$0 \leq f_2(x) - f(x) \leq 1/2 \quad \text{при всех } x \in (0, +\infty), \quad 0 \geq f'_\pm(x) \geq f'_2(x-1/2) \quad \text{при всех } x > 1/2.$$

Продолжая эту процедуру, на каждом n -м шаге получаем требуемую выпуклую убывающую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $f_n \leq f_{n-1}$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ при $n > 1$, для которой

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq 1/n \quad \text{при всех } x \in (0, +\infty), \quad 0 \geq f'_\pm(x) \geq f'_n(x-1/n) \quad \text{при всех } x > 1/n.$$

Это завершает доказательство свойства (iii) с неравенством (16). $\square$

Замечание 4. Условие убывания функции f на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ в предложении 1 можно заменить на формально более слабое условие

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

поскольку оно при выпуклости функции $f \geq 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ влечёт за собой убывание функции f на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$.

Для $a \in \overline{\mathbb{R}}$ или функции a со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ полагаем $a^+ := \sup\{a, 0\}$.

Предложение 2. Пусть функция $f \geq 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ является выпуклой и убывающей. Тогда для любого числа $R > 0$ положительная функция F_R , определённая равенствами

$$F_R(x) := \left(\frac{1}{x} f(x^2) - \frac{1}{R} f(R^2) \right)^+ \quad \text{при каждом } x \in \mathbb{R}^+ \setminus 0, \quad (17)$$

непрерывна, убывает и обладает левой $(F_R)'_-$ и правой $(F_R)'_+$ конечными производными всюду на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$, а также для неё выполнены соотношения

$$F_R(x) \geq 0 = F_R(R) \quad \text{при } x \in (0, R], \quad (18+)$$

$$F_R(x) \equiv F'_R(x) \equiv 0 \quad \text{при } x \in (R, +\infty), \quad (18_0)$$

$$F_R(x) = \frac{1}{x} f(x^2) - \frac{1}{R} f(R^2) \geq 0 \quad \text{при } x \in (0, R), \quad (18_R)$$

$$(F_R)'_\pm(x) = -\frac{1}{x^2} f(x^2) + 2f'_\pm(x^2) \quad \text{при } x \in (0, R), \quad (18')$$

$$(F_R)'_-(R) = -\frac{1}{R^2} f(R^2) + 2f'_-(R^2), \quad (F_R)'_+(R) = 0, \quad (18R)$$

$$|(F_R)'_\pm(x)| \leq \frac{f(x^2)}{x^2} + \frac{2f(x)}{x(x-1)} \leq \frac{3f(x)}{x(x-1)} \quad \text{при } x > 1. \quad (18\leq)$$

Доказательство. Все свойства функции F_R до группы соотношений (18) автоматически следуют из свойств функции f , отражённых в п. (i) предложения 1, если учесть что функция-множитель $x \mapsto 1/x$ при f в (17) является убывающей и бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$.

Соотношения (18+) очевидно по построению (17) функции F_R .

В силу убывания функции $x \mapsto f(x^2)/x$, во-первых, имеем

$$\frac{1}{x}f(x^2) \leq \frac{1}{R}f(R^2) \quad \text{при } x \in [R, +\infty),$$

откуда по построению функции F_R в (17) получаем тождества (18₀), а во-вторых,

$$\frac{1}{x}f(x^2) \geq \frac{1}{R}f(R^2) \quad \text{при } x \in (0, R],$$

что по построению функции F_R в (17) влечёт за собой (18_R).

Вычисление левой и правой производных для (18_R) даёт (18'), а вместе с (18+)-(18₀) и (18_R).

Наконец, из (18'), (18_R) и (18₀) имеем

$$|(F_R)'_{\pm}(x)| \leq \frac{f(x^2)}{x^2} + 2|f'_{\pm}(x^2)|,$$

а применение неравенства (15) при $x_2 := x^2 > x =: x_1 > 1$ влечёт за собой неравенства

$$|f'_{\pm}(x^2)| \leq \frac{f(x) - f(x^2)}{x^2 - x} \leq \frac{f(x)}{x(x-1)}.$$

Таким образом, установлено первое неравенство в (18_≤). Второе неравенство в (18_≤) при $x > 1$ для убывающей функции $f \geq 0$ очевидно. $\square$

2.2. Построение субгармонических функций с помощью выпуклых.

Предложение 3. Для любой функции F_R вида (17) из предложения 2 с выпуклой и убывающей функцией $f \geq 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ радиальная функция

$$V(re^{i\theta}) := F_R(r) \stackrel{(17)}{=} \left(\frac{1}{r}f(r^2) - \frac{1}{R}f(R^2) \right)^+, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \quad (19)$$

является положительной непрерывной субгармонической функцией на $\mathbb{C} \setminus 0$ и существует последовательность функций $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ со всеми свойствами из утверждения (iii) предложения 1, для которых последовательность субгармонических радиальных на $\mathbb{C} \setminus 0$ функций V_n вида

$$V_n(re^{i\theta}) := \left(\frac{1}{r}f_n(r^2) - \frac{1}{R}f_n(R^2) \right)^+, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (20)$$

сходится к функции V равномерно на компактах из $\mathbb{C} \setminus 0$, а каждая из функций V_n — это сужение на проколотый круг $\overline{D}(R) \setminus 0$ дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{C} \setminus 0$ функции

$$v_n: re^{i\theta} \mapsto \frac{1}{r}f_n(r^2) - \frac{1}{R}f_n(R^2), \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus 0. \quad (21)$$

При этом модуль производной по внешней нормали $\vec{n}_{\text{out}}$ к границе кольца $D(R) \setminus \overline{D}(r)$ в точках на окружности $\partial \overline{D}(r) \subset \partial(D(R) \setminus \overline{D}(r))$ для каждой из функций V_n и V оценивается следующим образом:

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \max \left\{ \left| \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta}) \right|, \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{\partial V_n}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta}) \right| \right\} \leq \frac{3f_1(r)}{r(r-1)}, \quad 1 < r < R. \quad (22)$$

Доказательство. По построению (20) и по свойствам функций f_n каждая из функций V_n — это сужение дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{C} \setminus 0$ функции (21). Из равномерной сходимости последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ к функции f и вида радиальных функций V и V_n в (19)–(20) следует, что для любого $r \in (0, R)$ последовательность функций V_n равномерно сходится к V на кольце $\overline{D}(R) \setminus D(r)$, а значит, сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C} \setminus 0$.

Сначала установим субгармоничность на $\mathbb{C} \setminus 0$ функций v_n из (21), для которых

$$\frac{\partial v_n}{\partial r}(re^{i\theta}) \stackrel{(18')}{=} -\frac{1}{r^2}f_n(r^2) + 2f'_n(r^2), \quad \frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2}(re^{i\theta}) = \frac{2}{r^3}f_n(r^2) - \frac{2}{r}f'_n(r^2) + 4rf''_n(r^2), \quad r > 0. \quad (23)$$

Прямое вычисление оператора Лапласа в полярных координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

от функции v_n из (21) на $\mathbb{C} \setminus 0$ даёт согласно (23) равенство

$$\Delta v_n(re^{i\theta}) \stackrel{(23)}{=} \left(\frac{2}{r^3} f_n(r^2) - \frac{2}{r} f'_n(r^2) + 4r f''_n(r^2) \right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r^2} f_n(r^2) + 2f'_n(r^2) \right),$$

из которого после раскрытия скобок и приведения подобных получаем

$$\Delta v_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{r^3} f_n(r^2) + 4r f''_n(r^2) \geq 0 \quad \text{при } re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus 0 \quad (24)$$

в силу положительности $f_n \geq 0$ и выпуклости f_n , дающей положительность $f''_n \geq 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$. Таким образом, каждая функция v_n из (23) является субгармонической. Следовательно, и каждая функция $V_n = v_n^+ := \sup\{v_n, 0\}$ по построению (20) является субгармонической на $\mathbb{C} \setminus 0$. Равномерная сходимости на компактах из $\mathbb{C} \setminus 0$ последовательности субгармонических непрерывных функций V_n к функции V обеспечивает и её субгармоничность на $\mathbb{C} \setminus 0$.

По неравенству (18 $\leq$) предложения 2 модули левой производной по радиусу для первых сомножителей в определениях (19) для V и (20) для V_n не превышают соответственно дробей

$$\frac{3f(r)}{r(r-1)}, \quad \frac{3f_n(r)}{r(r-1)}, \quad 1 < r < R,$$

каждая из которых не больше

$$\frac{3f_1(r)}{r(r-1)}, \quad 1 < r < R.$$

Отсюда для модуля производной $\partial/\partial \vec{n}_{\text{out}}$ к кольцу $D(R) \setminus \overline{D}(r)$ на $\partial \overline{D}(r)$ от функций V и V_n , равного модулю левой производной по радиусу в точках на $\partial \overline{D}(r)$, получаем (22). $\square$

3. Оценки распределений масс Рисса субгармонических функций. Для $z \in \mathbb{C}$, как обычно, $\bar{z}$ — комплексное число, сопряжённое с z . *Опорной функцией* множества $S \subset \mathbb{C}$ называется функция

$$\text{Spf}_S: z \longmapsto \sup_{s \in S} \text{Re } s \bar{z} \in \overline{\mathbb{R}} \quad (25)$$

(см. [1]). Опорная функция Spf_S принимает только конечные значения из $\mathbb{R}$, если и только если $S \neq \emptyset$ — ограниченное в $\mathbb{C}$. Для такого $S \subset \mathbb{C}$ его опорная функция по построению (25) *положительно однородна и выпукла*, а следовательно, *непрерывна и субгармонична* на $\mathbb{C}$ (см. [13, 15]).

Каждой субгармонической на $\mathbb{C}$ функции $u \not\equiv -\infty$ соответствует положительная мера Радона $\Delta_u := \frac{1}{2\pi} \Delta u$, где Δ — оператор Лапласа, действующий в смысле теории обобщённых функций (см. [13–15]). Мету Δ_u называем *распределением масс Рисса* субгармонической функции u .

Для меры Радона μ на $\mathbb{C}$ её *читающая радиальная функция* обозначается и определяется следующим образом:

$$\mu^{\text{rad}}: r \longmapsto \mu(\overline{D}(r)).$$

Теорема 2. Пусть $S \subset \mathbb{C}$ — ограниченный компакт в $\mathbb{C}$ с опорной функцией Spf_S и периметром $\text{prm}(\partial \text{conv } S) > 0$ границы $\partial \text{conv } S$ выпуклой оболочки $\text{conv } S$ множества S . Если $u \not\equiv -\infty$ — субгармоническая функция с распределением масс Рисса Δ_u , удовлетворяющая неравенствам

$$u(z) \leq \text{Spf}_S(z) + c \quad \text{для некоторого } c \in \mathbb{R} \text{ при всех } z \in \mathbb{C}, \quad (26)$$

то для любой положительной выпуклой убывающей на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ функции f существует число $C \in \mathbb{R}$, для которого выполнено неравенство

$$\int_r^R \frac{f(t^2)}{t} d\Delta_u^{\text{rad}}(t) \leq \frac{1}{2\pi} \text{prm}(\partial \text{conv } S) \int_r^R \frac{f(t^2)}{t} dt + C \quad \text{при всех } 1 < r < R < +\infty. \quad (27)$$

Доказательство. Не умаляя общности, в (26) можно положить $c = 0$, поскольку распределение масс Рисса для субгармонической функции $u - c$ то же самое, что и для u .

Основную роль при доказательстве будет играть следующая лемма.

Лемма 1 ([9, леммы 2.2–2.3]). Пусть $0 < r < R < +\infty$ и функция V положительна на замкнутом кольце $\overline{D}(R) \setminus D(r)$, субгармонична в его внутренности $D(R) \setminus \overline{D}(r)$, тождественно равна нулю на окружности $\partial \overline{D}(R)$ и совпадает с сужением на $\overline{D}(R) \setminus D(r)$ некоторой дважды непрерывно дифференцируемой в окрестности кольца $\overline{D}(R) \setminus D(r)$ функции. Используя инверсию функции V относительно окружности $\partial \overline{D}(r)$, построим положительную на $\mathbb{C}$ функцию

$$V^*(z) := \begin{cases} V(z) & \text{при } r < |z| \leq R, \\ V\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right) & \text{при } \frac{r^2}{R} < |z| \leq r, \\ 0 & \text{при } |z| \leq \frac{r^2}{R} \text{ и } |z| > R, \end{cases} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (28)$$

Тогда для любой пары субгармонических на окрестности круга $\overline{D}(R)$ функций $u \not\equiv -\infty$ и $M \not\equiv -\infty$ с распределениями масс Рисса соответственно Δ_u и Δ_M из неравенства $u \leq M$ на этой окрестности следует неравенство

$$\int_{\mathbb{C}} V^* d\Delta_u \leq \int_{\mathbb{C}} V^* d\Delta_M + \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} (u(re^{i\theta}) - M(re^{i\theta})) \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta}) d\theta, \quad (29)$$

где по-прежнему, как и в конце формулировки предложения 3, $\partial/\partial \vec{n}_{\text{out}}$ — оператор дифференцирования по внешней нормали к кольцу $D(R) \setminus \overline{D}(r)$ в точках на окружности $\overline{D}(r)$.

В качестве функции M выберем опорную функцию Spf_S . Её распределение масс Рисса в полярных координатах определяется как произведение мер [11, п. 3.3.1]

$$d\Delta_M = d\Delta_{\text{Spf}_S} = \frac{1}{2\pi} dr \otimes dl_{\text{conv } S}(\theta), \quad (30)$$

где $l_{\text{conv } S}(\theta)$ — длина дуги границы $\partial \text{conv } S$, отсчитываемой при движении по границе «против часовой стрелки» от последней точки опоры опорной к $\text{clos conv } S$ прямой, ортогональной положительной полуоси $\mathbb{R}^+$, до последней точки опоры опорной к $\text{clos conv } S$ прямой, ортогональной направлению радиус-вектора точки $e^{i\theta}$ (см. [1], [11, п. 3.3.1]). В частности,

$$\int_0^{2\pi} dl_{\text{conv } S}(\theta) = l_{\text{conv } S}(2\pi) - l_{\text{conv } S}(0) = \text{prm}(\partial \text{conv } S). \quad (31)$$

В качестве функции V выбираем функции V_n , определённые как в (20)–(21) из предложения 3 для функции из (19) по функции f из условия доказываемой теоремы 2, $n \in \mathbb{N}$. Для функций $V := V_n$ по предложению 3 выполнены все условия леммы 1, а положительные по построению функции V_n^* , построенные как (28), будут иметь явный радиальный вид

$$0 \leq V_n^*(z) := \begin{cases} \frac{1}{|z|} f_n(|z|^2) - \frac{1}{R} f_n(R^2) & \text{при } r < |z| \leq R, \\ \frac{|z|}{r^2} f_n\left(\frac{r^4}{|z|^2}\right) - \frac{1}{R} f_n(R^2) & \text{при } \frac{r^2}{R} < |z| \leq r, \\ 0 & \text{при } |z| \leq \frac{r^2}{R} \text{ и } |z| > R, \end{cases} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (32)$$

По лемме 1 из заключения (29) с учётом (26) для $c = 0$, (30) и (22) при $1 < r < R < +\infty$ следует

$$\int_{\mathbb{C}} V_n^* d\Delta_u \leq \frac{1}{2\pi} \int_{r^2/R}^R \int_0^{2\pi} V_n^*(te^{i\theta}) dt dl_{\text{conv } S}(\theta) + \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} (|u(re^{i\theta})| + |\text{Spf}(re^{i\theta})|) \left| \frac{\partial V_n}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta}) \right| d\theta \stackrel{(32), (22)}{\leq}$$

$$\leq \left(\int_{r^2/R}^r \frac{t}{r^2} f_n(r^4/t^2) dt + \int_r^R \frac{f_n(t^2)}{t} dt \right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dl_{\text{conv } S}(\theta) + \\ + \frac{r}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta + \int_0^{2\pi} |\text{Spf}(re^{i\theta})| d\theta \right) \frac{3f_1(r)}{r(r-1)}.$$

Отсюда согласно (31) и (32) при $2 \leq r < R < +\infty$ получаем

$$\int_{\overline{D}(R) \setminus \overline{D}(r)} \frac{f_n(|z|^2)}{|z|} d\Delta_u(z) \leq \\ \leq \int_{\overline{D}(R) \setminus \overline{D}(r)} \frac{1}{R} f_1(R^2) d\Delta_u + \left(\frac{1}{2} f_1(r^2) + \int_r^R \frac{f_n(t^2)}{t} dt \right) \frac{1}{2\pi} \text{prm}(\partial \text{conv } S) + \\ + \frac{3f_1(r)}{r} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta + 2f_1(r) \max_{\theta \in [0, 2\pi)} |\text{Spf}(e^{i\theta})|. \quad (33)$$

Опорная функция Spf_S удовлетворяет ограничению $\text{Spf}(z) = O(|z|)$ при $z \rightarrow \infty$ в силу её положительной однородности. Отсюда функция u согласно (26) удовлетворяет условию

$$\limsup_{z \rightarrow +\infty} \frac{u(z)}{|z|} < +\infty,$$

т.е. функция u *конечного типа при порядке 1*. Следовательно, для распределения масс Рисса Δ_u такой функции имеем $\Delta_u^{\text{rad}}(t) = O(t)$, а также [12, лемма 6.2]

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta = O(r) \quad \text{при } r \rightarrow +\infty.$$

Отсюда ввиду убывания функции f_1 из (33) следует существование числа $C \in \mathbb{R}^+$, для которого

$$\int_r^R \frac{f_n(t^2)}{t} d\Delta_u^{\text{rad}}(t) \leq \frac{1}{2\pi} \text{prm}(\partial \text{conv } S) \int_r^R \frac{f_n(t^2)}{t} dt + C \quad \text{при всех } 2 \leq r < R < +\infty.$$

Следовательно, для убывающей и равномерно сходящейся к f последовательности функций f_n из предложения 1 имеем неравенства

$$\int_r^R \frac{f(t^2)}{t} d\Delta_u^{\text{rad}}(t) \leq \frac{1}{2\pi} \text{prm}(\partial \text{conv } S) \int_r^R \frac{f(t^2)}{t} dt + C \quad \text{при всех } 2 \leq r < R < +\infty,$$

где нижнее ограничение $2 \leq r$ ввиду конечности интегралов по отрезкам $[1, 2]$ можно заменить на $1 \leq r$, увеличивая, если необходимо, число $C \in \mathbb{R}^+$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Отметим сначала, что функцию f можно продолжить на весь луч $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ как выпуклую, положительную и убывающую, возможно, изменив r_0 на чуть большее.

Допустим, что экспоненциальная система Exp^Z не полна в пространстве $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$ для некоторого компакта $S \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus S$, удовлетворяющего (9). По теореме Хана—Банаха (см. [11, п. 1.1.1]) и теореме Рисса о представлении линейных функционалов это означает, что найдётся комплекснозначная мера Радона $\mu \neq 0$ с носителем $\text{supp } \mu \subset S$, для

которой ненулевая целая функция

$$g(z) = \int_{z \in \mathbb{C}} e^{zs} d\mu(s) \neq 0, \quad (34)$$

обращается в нуль на Z с учётом кратности в том смысле, что для каждой точки $z \in \mathbb{C}$ кратность корня целой функции f в точке z не меньше $Z(z)$. При этом функция $u := \ln |g| \neq -\infty$ — субгармоническая с распределением масс Рисса $\Delta_u \geq Z$, где Z рассматривается как мера, определённая в (1). Из представления (34) и определения (25) опорной функции следует

$$u(z) = \ln |g(z)| \leq \ln \left(\exp \left(\sup_{s \in S} \operatorname{Re} zs \right) |\mu|(S) \right) \leq \operatorname{Spf}_{\bar{S}}(z) + \ln |\mu|(S) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}, \quad (35)$$

где $|\mu|$ — полная вариация меры μ , а $\bar{S} := \{\bar{z} \mid z \in S\}$ — компакт, зеркально симметричный компакт S относительно вещественной оси. Неравенство в (35) означает, что выполнено условие (26) теоремы 2 с $\bar{S}$ вместо S . По теореме 2 для любой положительной выпуклой убывающей на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ функции f существует число $C \in \mathbb{R}$, для которого выполнено неравенство (27) с $\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} \bar{S})$, очевидно, равным $\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S)$. Таким образом, ввиду неравенства для мер $Z \leq \Delta_u$ получаем

$$\int_r^R \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\operatorname{rad}}(t) \leq \int_r^R \frac{f(t^2)}{t} d\Delta_u^{\operatorname{rad}}(t) \leq \frac{1}{2\pi} \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S) \int_r^R \frac{f(t^2)}{t} dt + C \quad (36)$$

для некоторого числа $C \in \mathbb{R}$ при всех $1 < r < R < +\infty$. Нижнее ограничение $1 < r$ здесь можно поменять на $r_0 \leq r$, поскольку возможно и добавляющиеся при это интегралы по интервалам с концами r_0 и 1 конечны. Неравенство между крайними частями (36) означает, что

$$\sup_{r_0 \leq r < R < +\infty} \left(\int_{r < t \leq R} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\operatorname{rad}}(t) - \frac{\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S)}{2\pi} \int_r^R \frac{f(t^2)}{t} dt \right) < +\infty,$$

откуда ввиду неравенства $\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S) \stackrel{(9)}{\leq} P$ конечна точная верхняя грань в левой части равенства (8), что противоречит условию (8). Это противоречие доказывает, что на самом деле система Exp^Z полна в $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$. Таким образом, часть I теоремы 1 доказана.

Перейдём к доказательству части II теоремы 1 в условиях сначала из III. Пусть теперь $S \neq \emptyset$ — односвязная ограниченная область в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая (9), а $K \subset S$ — непустой компакт со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus K$. Тогда $\operatorname{conv} K$ — выпуклый компакт в выпуклой открытой области $\operatorname{conv} S$, очевидно, со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus \operatorname{conv} K$, а $\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} K) < \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S)$ (см. [6]). Выберем промежуточные числа $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^+$ так, что

$$\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} K) \leq P_3 < P_2 < P_1 < \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S) \stackrel{(9)}{\leq} P. \quad (37)$$

Соотношение (11) означает, что найдётся достаточно большое $r \geq r_0$, для которого

$$\limsup_{1 < a \rightarrow +\infty} \left(\int_{r < t \leq ar} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\operatorname{rad}}(t) / \int_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) \geq \frac{P_1}{2\pi}.$$

Последнее согласно (37) означает, что найдётся возрастающая последовательность $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ чисел $1 < a_k \rightarrow \infty$, для которой

$$\int_{r < t \leq a_k r} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\operatorname{rad}}(t) / \int_{r_n}^{a_k r} \frac{f(t^2)}{t} dt \geq \frac{P_2}{2\pi} \stackrel{(37)}{=} \frac{P_3}{2\pi} + \frac{P_2 - P_3}{2\pi} \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N},$$

где последнее слагаемое строго положительно. Отсюда следует

$$\int_{r < t \leq a_k r} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\operatorname{rad}}(t) - \frac{P_3}{2\pi} \int_r^{a_k r} \frac{f(t^2)}{t} dt \geq \frac{P_2 - P_3}{2\pi} \int_{r_n}^{a_k r} \frac{f(t^2)}{t} dt \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

В силу расходимости интеграла (10) и строгой положительности $P_2 - P_3 > 0$ правая часть здесь неограниченно возрастает и поэтому получаем

$$\sup_k \left(\int_{r < t \leq a_k r} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\text{rad}}(t) - \frac{P_3}{2\pi} \int_r^{a_k r} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) = +\infty.$$

Тем более, выполнено соотношение (8) с числом $P_3 \stackrel{(37)}{\geq} \text{prm}(\partial \text{conv } K)$ вместо P . Отсюда согласно доказанной части I теоремы 1 экспоненциальная система Exp^Z полна в пространстве $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$. В силу произвола в выборе компакта K со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus K$ в односвязной ограниченной области $S \subset \mathbb{C}$ такие компакты исчерпывают односвязную ограниченную область $S \subset \mathbb{C}$. Это доказывает полноту экспоненциальной системы Exp^Z в пространстве $\text{Hol}(S)$. Тем самым в условиях II1 часть II теоремы 1 доказана.

Перейдем к доказательству части II теоремы 1 в условиях II2. Пусть, по-прежнему, $S \neq \emptyset$ — открытое ограниченное множество в $\mathbb{C}$, удовлетворяющее (9), и пусть выполнены условия (12)–(13). Предположим, что экспоненциальная система Exp^Z не полна в пространстве $\text{Hol}(S)$. Это означает, что существует такой компакт $K \subset S$ со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus K$, что эта система Exp^Z не полна в $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$. Тогда согласно доказанной части I теоремы 1 имеем

$$\sup_{r_0 \leq r < R < +\infty} \left(\int_{r < t \leq R} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\text{rad}}(t) - \frac{\text{prm}(\partial \text{conv } K)}{2\pi} \int_r^R \frac{f(t^2)}{t} dt \right) < +\infty,$$

откуда следует существование числа $C \in \mathbb{R}$, для которого, выбирая $R := ar$, получаем

$$\int_{r < t \leq ar} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\text{rad}}(t) \leq \frac{\text{prm}(\partial \text{conv } K)}{2\pi} \int_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt + C \quad \text{при любых } r \geq r_0 \text{ и } a > 1.$$

Поделив обе части этого неравенства на последний интеграл и переходя к пределу при $r \rightarrow +\infty$ в обеих частях неравенства, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \limsup_{r_0 \leq r \rightarrow +\infty} \left(\int_{r < t \leq ar} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\text{rad}}(t) / \int_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) &\leq \\ &\leq \limsup_{r_0 \leq r \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \text{prm}(\partial \text{conv } K) + C / \int_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{prm}(\partial \text{conv } K) + C / \liminf_{r_0 \leq r \rightarrow +\infty} \int_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt. \end{aligned}$$

Применяя второй верхний предел по $1 < a \rightarrow +\infty$ к крайним частям этого соотношения, получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{1 < a \rightarrow +\infty} \limsup_{r_0 \leq r \rightarrow +\infty} \left(\int_{r < t \leq ar} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\text{rad}}(t) / \int_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \text{prm}(\partial \text{conv } K) + C / \liminf_{1 < a \rightarrow +\infty} \liminf_{r_0 \leq r \rightarrow +\infty} \int_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt, \end{aligned}$$

где по условию (12) знаменатель последней дроби даёт $+\infty$, вследствие чего

$$\limsup_{1 < a \rightarrow +\infty} \limsup_{r_0 \leq r \rightarrow +\infty} \left(\int_{r < t \leq ar} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\text{rad}}(t) / \int_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) \leq \frac{\text{prm}(\partial \text{conv } K)}{2\pi} < \frac{\text{prm}(\partial \text{conv } S)}{2\pi} \stackrel{(9)}{\leq} \frac{P}{2\pi}.$$

Здесь строгое промежуточное неравенство $<$ порождает противоречие с условием (13). Следовательно, система Exp^Z полна в пространстве $\text{Hol}(S)$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел. — М.: Фазис, 2002.
2. Брайчев Г. Г. Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. — М.: Прометей, 2005.
3. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. Элементарная теория. — М.: Наука, 1965.
4. Каримов М. Р., Хабибуллин Б. Н. Совпадение некоторых плотностей распределения множеств и полнота систем целых функций// Тр. Междунар. конф. «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы». III. Анализ и дифференциальные уравнения. — Уфа: Ин-т мат. с ВЦ УНЦ РАН, 2000. — С. 29–34.
5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Физматгиз, 1956.
6. Лейтвейс К. Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985.
7. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса// Уфим. мат. ж. — 2020. — 12, № 2. — С. 35–48.
8. Хабибуллин Б. Н. Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1991. — 55, № 5. — С. 1101–1123.
9. Хабибуллин Б. Н. Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка// Мат. сб. — 1991. — 182, № 6. — С. 811–827.
10. Хабибуллин Б. Н. Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций// Мат. заметки. — 1999. — 66, № 4. — С. 603–616.
11. Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.
12. Хабибуллин Б. Н., Шмелёва А. В. Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. I. Классический случай// Алгебра и анализ. — 2019. — 31, № 1. — С. 156–210.
13. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.
14. Hörmander L. Notions of Convexity. — Boston, MA: Birkhäuser, 1994.
15. Ransford T. Potential Theory in the Complex Plane. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хабибуллин Булат Нурмиевич

Институт математики с вычислительным центром

Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Кудашева Елена Геннадьевна

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа

E-mail: lena_kudashева@mail.ru

Мурясов Роман Русланович

Уфимский университет науки и технологий

E-mail: romrumur@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 92–99
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-92-99

УДК 517.977.1

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ОБЫКНОВЕННЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. М. П. ЭШОВ, Н. Н. КОДИРОВ, Т. К. ЮЛДАШЕВ

Аннотация. В работе рассматриваются математические задачи управления автономными системами первого порядка. При помощи принципа максимума Понтрягина проанализирована математическая задача оптимизации получения доходов на рынке образовательных услуг с учетом отсрочки инвестирования.

Ключевые слова: задача управления, автономная система, принцип максимума, минимизация функционала, дифференциальное уравнение первого порядка, существование решения, единственность решения.

OPTIMIZATION PROBLEMS IN ORDINARY FIRST-ORDER AUTONOMOUS SYSTEMS

© 2023 M. P. ESHOV, N. N. KODIROV, T. K. YULDASHEV

ABSTRACT. In this paper, we examine mathematical control problems for first-order autonomous systems. Using Pontryagin's maximum principle, we analyze the mathematical problem of optimizing the generation of income in the market for educational services, taking into account the deferment of investment.

Keywords and phrases: control problem, autonomous system, maximum principle, minimization of a functional, first-order differential equation, existence of a solution, uniqueness of a solution.

AMS Subject Classification: 49J15, 49K15, 49N10

1. Введение. Теория оптимального управления динамическими системами широко используется при решении различных задач науки, техники и экономики. В теории оптимального управления разрабатываются и эффективно используются различные аналитические и приближенные методы (см., например, [1–7, 9–15, 18]). В [8] в аналитической форме решается задача оптимального управления одноотраслевой экономикой при случайных изменениях основных фондов и трудовых ресурсов. В качестве критерия оптимальности выбрано максимальное среднее значение экономии на данном периоде производства. Решение этой задачи оптимального управления основано на методе динамического программирования.

Изучаются вопросы оптимизации процессов в высших учебных заведениях, связанных с поступлением от подготовки, переподготовки и повышения квалификации кадров на договорной основе. Присутствие двух компонентов в этой автономной системе позволяет самостоятельно вести траекторию ее движения в определенном порядке. Первая составляющая — это обучение студентов на платной основе. Вторая составляющая — это плата за обучение студентов. Пусть вход

$u(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \in C[0; 1]$ — непрерывная функция, показывающая количество студентов, оплативших контракт на обучение к моменту t . Выходная функция $y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)$ является функцией дохода от договорных поступлений в данный момент времени t :

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^m p_{ij}(t) u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $p_{ij}(t)$ — непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция, показывающая денежную сумму, уплаченную студентами за обучение в момент времени t , m — число студентов, обучающихся по i -й специальности. Из уравнения (1) видно, что если количество студентов, обучающихся по контракту, увеличивается, то увеличивается и доход вуза. Точно так же, если стоимость контракта на обучение увеличивается, то увеличивается и доход данного университета. В частности, наличие «суперконтрактов» в значительной степени способствует устойчивому развитию высших учебных заведений в условиях рыночной экономики. Поэтому высшие профессиональные учебные заведения заинтересованы в росте количества суперконтрактов на обучение. Но количество сверхконтрактов не может нарушать определенный баланс в разрезе студентов, обучающихся на основе государственного гранта или обычного (льготного) контракта. Нарушение этого баланса в вузе может привести к ухудшению качества подготовки специалистов в целом. Дифференцируя формулу (1) по времени t , находим функцию, означающую скорость поступления договорных сумм:

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^m \dot{p}_{ij}(t) u_i(t) + \sum_{j=1}^m p_{ij}(t) \dot{u}_i(t), \quad (2)$$

где $\dot{p}_{ij}(t)$ — функция, показывающая тенденции формирования стоимости обучения. Нас интересует случай, когда $\dot{y}_i(t) > 0$, т.е. рост доходов от договорных поступлений за каждый определенный период времени t . Из уравнения (2) видно, что это зависит от тенденции формирования стоимости договорных сумм $\dot{p}_{ij}(t)$ и ставки увеличения количества студентов $\dot{u}_i(t)$, уплативших определенную сумму в момент времени t . Но динамика формирования стоимости контрактных сумм $\dot{p}_{ij}(t)$ в целом определяется из баланса спроса и предложения на образовательном рынке к моменту t . Под спросом мы понимаем степень платежеспособности родителей, обучающихся своих детей на платной основе. Темп роста числа студентов $\dot{u}_i(t)$, заплативших определенную сумму в момент времени t , определяется из следующего соотношения:

$$\dot{u}_i(t) = \alpha_i(t) z_i(t - \tau_i(t)), \quad (3)$$

где $z_i(t) \in C[0; 1]$ — функция инвестиций, направленных на повышение качества образования, в частности, на расширение материально-технической базы вуза, $\alpha_i(t) \in C[0; 1]$ — коэффициент-функция эффективности использования инвестиций, $\tau_i(t)$ — временная задержка (запаздывание), $0 < \alpha_i(t) < 1$, $0 < \tau_i(t) < t$. Величина инвестиций $z_i(t)$ является частью дохода $z_i(t) = q_i(t) y_i(t)$, где $q_i(t) \in C[0, 1]$ — доля прибыли в доходе, $0 < q_i(t) < 1$. В нашей работе функция инвестиций $z(t)$ монотонно возрастает. Если функция задержки $\tau(t)$ уменьшится, то вложений будет больше; это способствует тому, что скорость прироста числа учащихся $\dot{u}_i(t)$, кто заплатил определенную сумму к этому времени t , становится больше. Если $\tau_i(t) = t$, то процесс инвестирования останавливается: $z_i(0) = 0$. Очевидно, что задержка $\tau_i(t)$ зависит от количества студентов, оплативших обучение по контракту к моменту t :

$$\tau_i(t) = \varepsilon(t) u_i^2(t), \quad 0 < \varepsilon(t) \in C[0, 1].$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\dot{u}_i(t) = \alpha_i(t) z_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)). \quad (4)$$

Как сказано выше, сумма инвестиций $z_i(t)$ является частью дохода

$$z_i(t) = q_i(t) y_i(t), \quad (5)$$

где $q_i(t)$ — доля прибыли в доходе, $0 < q_i(t) < 1$. Величина $q_i(t)$ характеризует рентабельность экономического процесса. Подставляя представление (5) в уравнение (4), получаем

$$\dot{u}_i(t) = \alpha_i(t) q_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)). \quad (6)$$

Из формулы (6) следует, что значение коэффициента прироста числа студентов $\dot{u}_i(t)$, уплативших определенную сумму в момент времени t , взаимосвязано со значением рентабельности образовательного процесса. Задержка τ характеризуется количеством студентов, которые не в состоянии уплатить контрактную сумму к заданному времени t . Подставляя уравнение (6) в уравнение (2), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{y}_i(t) = \beta_i(t) q_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) + \sum_{j=1}^m \dot{p}_{ij}(t) u_i(t), \quad (7)$$

где $\beta_i(t) = \sum_{j=1}^m p_{ij}(t) \alpha_i(t)$. В уравнении (7) мы учитываем фактор внешнего воздействия. Этот фактор в первую очередь связан с государственным регулированием образовательного процесса. Если не учитывать малые и случайные внешние факторы, то дифференциальное уравнение (7) принимает вид

$$\dot{y}_i(t) = f_i(t) + \gamma_i(t) u_i(t) + \beta_i(t) q_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где $\gamma_i(t) = \sum_{j=1}^m \dot{p}_{ij}(t)$. Функция $f_i(t) \in C[0; 1]$ может сильно изменить свойства решений дифференциального уравнения (8). Другими словами, свойства решений дифференциального уравнения с внешним воздействием (8) могут сильно отличаться от свойств решений однородного дифференциального уравнения (8). Это означает, что возмущающее воздействие (влияние государства и рынка) на образовательный процесс очень велико. Итак, мы получили задачу оптимального управления для дифференциального уравнения (8).

2. Функция задержки равна нулю: $\tau_i = 0$. В этом случае имеет место уравнение (8)

$$\dot{y}_i(t) = f_i(t) + \gamma_i(t) u_i(t) + \eta_i(t) y_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где $\eta_i(t) = \sum_{j=1}^m p_{ij}(t) \alpha_i(t) q_i(t)$.

2.1. Класс $C[0, 1]$ непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение (9) с начальным условием $y_i(0) = y_i^0$. Тогда решение начальной задачи можно записать в виде

$$y_i(t) = y_i^0 \exp \left\{ \int_0^t \eta_i(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ \int_s^t \eta_i(\theta) d\theta \right\} [\gamma_i(s) u_i(s) + f_i(s)] ds. \quad (10)$$

Чтобы найти управляющую функцию $u_i(t)$, из представления (10) при $t = 1$ получаем

$$y_i(1) = y_i^0 \exp \left\{ \int_0^1 \eta_i(s) ds \right\} + \int_0^1 \exp \left\{ \int_s^1 \eta_i(\theta) d\theta \right\} [\gamma_i(s) u_i(s) + f_i(s)] ds. \quad (11)$$

Введем обозначение

$$\mu_i = y_i^0 \exp \left\{ \int_0^1 \eta_i(s) ds \right\} + \int_0^1 \exp \left\{ \int_s^1 \eta_i(\theta) d\theta \right\} f_i(s) ds.$$

Заметим, что число μ_i — это состояние уравнения (9) в момент времени $t = 1$, в которое оно переводится с помощью нулевого управления $u_i(t) \equiv 0$. Тогда (11) принимает вид

$$y_i(1) = \mu_i + \int_0^1 \exp \left\{ \int_s^1 \eta_i(\theta) d\theta \right\} \gamma_i(s) u_i(s) ds.$$

Пусть заданы некоторые величины $y_i(1) = y_i^1$. Вопрос о существовании функции управления, переводящей объект (9) в состояние y_i^1 , сводится к существованию решения следующего интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_0^1 \exp \left\{ \int_s^1 \eta_i(\theta) d\theta \right\} \gamma_i(s) u_i(s) ds = \nu_i, \quad (12)$$

где $\nu_i = y_i^1 - \mu_i = \text{const}$ — известные числа. Рассмотрим управляющую функцию $u_i(t)$ в классе непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$. В силу непрерывности функции $\gamma_{ij}(t)$ уравнение (12) имеет решение $u_i(t) = g_i(t)$ на отрезке $[0, 1]$. Подставляя решения уравнения (12) в (10), находим искомую функцию $y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)$, где

$$y_i(t) = w_i(t) + \int_0^t \exp \left\{ \int_s^t \eta_i(\theta) d\theta \right\} \gamma_i(s) g_i(s) ds,$$

$$w_i(t) = y_i^0 \exp \left\{ \int_0^t \eta_i(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ \int_s^t \eta_i(\theta) d\theta \right\} f_i(s) ds.$$

2.2. Класс $PC[0, 1]$ кусочно-непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$. Класс $PC[0, 1]$ кусочно-непрерывных функций есть линейное векторное пространство (см. [16, 17, 19, 20])

$$PC[0, 1] = \left\{ y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; y(t) \in C(t_j, t_{j+1}], j = 1, \dots, m \right\},$$

где $y(t_j^+)$ и $y(t_j^-)$ существуют и ограничены;

$$y(t_j^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t_j + h), \quad y(t_j^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} y(t_j - h)$$

— право- и левосторонний пределы функции $x(t)$ в точках $t = t_j$; $y(t_j^-) = y(t_j)$.

Заметим, что линейное векторное пространство $PC[0, 1]$ является банаховым пространством с нормой

$$\|y_i(t)\|_{PC} = \max \left\{ \|y_i(t)\|_{C((t_j, t_{j+1}])}, j = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

Найдем функцию $y(t) \in PC[0, 1]$, которая для всех $t \in [0, 1]$, $t \neq t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (9), начальному условию $y_i(0) = y_i^0$ и при $t = t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$, удовлетворяет нелинейному предельному условию:

$$y_i(t_j^+) - y_i(t_j^-) = a_j + b_j y_i(t_j), \quad a_j, b_j = \text{const}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (13)$$

Пусть функция $y(t) \in PC[0, 1]$ является решением задачи (9), (13). Тогда интегрированием уравнения (9) на интервалах $(0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\dots$, $(t_m, t_{m+1}]$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[f_i(s) + \gamma_i(s) u_i(s) + \eta_i(s) y_i(s) \right] ds &= \int_0^t \dot{y}_i(s) ds = \\ &= [y_i(t_1) - y_i(0^+)] + [y_i(t_2) - y_i(t_1^+)] + \dots + [y_i(t) - y_i(t_m^+)] = \\ &= -y_i(0) - [y_i(t_1^+) - y_i(t_1)] - [y_i(t_2^+) - y_i(t_2)] - \dots - [y_i(t_m^+) - y_i(t_m)] + y_i(t), \end{aligned}$$

где $t_{m+1} = 1$.

Учитывая начальное условие и условие (13), последнее равенство перепишем в виде

$$y_i(t) = h_i(t) + \int_0^t [\gamma_i(s) u_i(s) + \eta_i(s) y_i(s)] ds + \sum_{0 < t_j < t} [a_j + b_j y_i(t_j)], \quad (14)$$

где

$$h_i(t) = y_i^0 + \int_0^t f_i(s) ds.$$

В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим норму

$$\|y_i(t)\|_C = \max_{t \in [0, 1]} |y_i(t)|.$$

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} y_i^0(t) = h_i(t), \\ y_i^{k+1}(t) = y_i^0(t) + \int_0^t [\gamma_i(s) u_i(s) + \eta_i(s) y_i^k(s)] ds + \sum_{0 < t_j < t} [a_j + b_j y_i^k(t_j)]. \end{cases}$$

Тогда существование и единственность решения уравнения (14) следует из следующих оценок при фиксированных значениях функции управления $u_i(t)$ и величины $\|\eta_i(t)\|_C + \sum_{j=1}^m |b_j| < 1$:

$$\begin{aligned} \|y_i^0(t)\|_{PC} &\leq |y_i^0| + \|f_i(t)\|_C < \infty, \\ \|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)\|_{PC} &\leq \left[\|\eta_i(t)\|_C + \sum_{j=1}^m |b_j| \right] \cdot \|y_i^k(t) - y_i^{k-1}(t)\|_{PC}. \end{aligned}$$

Если задано $y_i(1) = y_i^1$, то возникает вопрос о существовании выходной функции, переводящей объект (14) в состояние y_i^1 :

$$\int_0^1 [\gamma_i(s) u_i(s) + \eta_i(s) y_i(s)] ds + \sum_{0 < t_j < 1} [a_j + b_j y_i(t_j)] = \omega_i, \quad (15)$$

где $\omega_i = y_i^1 - h_i(1)$.

Решение уравнения (14) ограничено; обозначим его $y_i(t) = r_i(t, u_i(t))$. Подставляя это решение в представление (15), получаем нелинейное уравнение относительно входной функции $u_i(t)$:

$$\int_0^1 \gamma_i(s) u_i(s) ds = \omega_i - \int_0^1 \eta_i(s) r_i(s, u_i(s)) ds - \sum_{0 < t_j < 1} [a_j + b_j r_i(t_j, u_i(t_j))]. \quad (16)$$

Пусть выполняются следующие условия:

- (i) $\|r_i(t, u_i(t))\|_C \leq M_i$, $0 < M_i = \text{const}$;
- (ii) $|r_i(t, u_i^k(t)) - r_i(t, u_i^{k-1}(t))| \leq L_i |u_i^k(t) - u_i^{k-1}(t)|$, $0 < L_i = \text{const}$;
- (iii) $\rho_i = \frac{1}{\|\gamma_i(t)\|_C} \left[|\omega_i| + L_i \|\eta_i(t)\|_C + \sum_{j=1}^m |b_j| L_i \right] < 1$.

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} u_i^0(t) &= 0, \\ \int_0^1 \gamma_i(s) u_i^{k+1}(s) ds &= \omega_i - \int_0^1 \eta_i(s) r_i(s, u_i^k(s)) ds - \sum_{0 < t_j < 1} [a_j + b_j r_i(t_j, u_i^k(t_j))]. \end{aligned}$$

Тогда существование и единственность решения уравнения (16) следует из следующих оценок:

$$\begin{aligned}\|u_i^1(t)\|_{PC} &\leq \frac{1}{\|\gamma_i(t)\|_C} \left[|\omega_i| + M_i \|\eta_i(t)\|_C + \sum_{j=1}^m \left[|a_j| + |b_j| M_i \right] \right] < \infty, \\ \|u_i^{k+1}(t) - u_i^k(t)\|_{PC} &\leq \frac{1}{\|\gamma_i(t)\|_C} \left[|\omega_i| + L_i \|\eta_i(t)\|_C + \sum_{j=1}^m |b_j| L_i \right] \cdot \|u_i^k(t) - u_i^{k-1}(t)\|_{PC}.\end{aligned}$$

3. Функция задержки не равна нулю: $\tau_i > 0$. Интегрируя дифференциальное уравнение (8) с начальным условием $y_i(0) = y_i^0 = \text{const}$, получаем

$$y_i(t) = y_i^0 + \int_0^t \left[f_i(s) + \gamma_i(s) u_i(s) + \beta_i(s) q_i(t - \varepsilon(s) u_i^2(s)) y_i(t - \varepsilon(s) u_i^2(s)) \right] ds. \quad (17)$$

Рассмотрим задачу о нахождении управляющей функции

$$u_i^*(t) \in \left\{ u_i^* : |u_i^*(t)| \leq M_{i0}, t \in [0, 1] \right\}$$

и соответствующего состояния $y_i^*(t)$, доставляющих минимум функционалу

$$J[u_i] = \int_0^1 \varepsilon(t) u_i^2(t) dt. \quad (18)$$

Построим функцию Понтрягина

$$H(u_i(t), y_i(t)) = \psi_i(t) \left[f_i(t) + \gamma_i(t) u_i(t) + \beta_i(t) q_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) \right] - \varepsilon(t) u_i^2(t),$$

где функция $\psi(t)$ будет определяться из уравнения

$$\dot{\psi}_i(t) = -\psi_i(t) \beta_i(t) q_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)). \quad (19)$$

Решая дифференциальное уравнение (19) с условием $\psi_i(0) = y_i^0 = \text{const}$, находим

$$\psi_i(t) = y_i^0 \exp \left\{ - \int_0^t \beta_i(s) q_i(s - \varepsilon(s) u_i^2(s)) ds \right\}. \quad (20)$$

Условия оптимальности имеют вид

$$\begin{aligned}\psi(t) \left\{ \gamma_i(t) - 2\varepsilon(t) u_i(t) \beta_i(t) \left[q_{iu}(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) + \right. \right. \\ \left. \left. + q_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_{iu}(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) \right] \right\} - 2\varepsilon(t) u_i(t) = 0, \quad (21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(t) \left\{ \gamma_i(t) - 2\varepsilon(t) \beta_i(t) \left[q_{iu}(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) + q_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_{iu}(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) \right] + \right. \\ \left. + 4[\varepsilon(t) u_i(t)]^2 \beta_i(t) \left[q_{iuu}(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) + 2q_{iu}(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_{iu}(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) + \right. \right. \\ \left. \left. + q_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_{iuu}(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) \right] \right\} - 2\varepsilon(t) \leq 0. \quad (22)\end{aligned}$$

Подставляя представление (20) в уравнение (21), получим уравнение относительно функции управления $u_i(t)$:

$$\begin{aligned}u_i(t) = \frac{y_i^0}{2\varepsilon(t)} \exp \left\{ - \int_0^t \beta_i(s) q_i(s - \varepsilon(s) u_i^2(s)) ds \right\} \left\{ \gamma_i(t) - 2\varepsilon(t) u_i(t) \beta_i(t) \times \right. \\ \left. \times \left[q_{iu}(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) y_i(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) + q_i y_{iu}(t - \varepsilon(t) u_i^2(t)) \right] \right\}. \quad (23)\end{aligned}$$

Дифференцируя (17) по управляющей функции $u_i(t)$, получаем

$$y_{iu}(t) = \int_0^t \left[\gamma_i(s) - 2\varepsilon(s) u_i(s) \beta_i(s) \left(q_{iu}(t - \varepsilon(s) u_i^2(s)) y_i(t - \varepsilon(s) u_i^2(s)) + \right. \right. \\ \left. \left. + q_i(t - \varepsilon(s) u_i^2(s)) y_{iu}(t - \varepsilon(s) u_i^2(s)) \right) \right] ds. \quad (24)$$

Решая систему уравнений (17), (23) и (24), определяем функцию управления и функцию состояния.

4. Заключение. В работе рассмотрена задача оптимизации получения доходов от договорных поступлений на учебу с учетом задержки инвестирования. Построены математические модели финансирования с задержкой (8) и без задержки (9), определены входная и выходная функции. В качестве функционала качества был взят функционал от функции задержки (18). При помощи принципа максимума Понтрягина получен критерий оптимальности. Входная и выходная функции определялись путем решения системы трех функционально-интегральных уравнений (17), (23) и (24).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Искендеров А. Д., Гамидов Р. А. Задачи оптимизации с градиентом управления в коэффициентах эллиптических уравнений // Автомат. телемех. — 2020. — 81, № 9. — С. 1627–1636.
2. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982.
3. Егоров А. И. Оптимальное управление термическими и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
4. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975.
5. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
6. Квитко А. Н. Об одном методе решения локальной краевой задачи для нелинейной управляемой системы // Автомат. телемех. — 2020. — 81, № 2. — С. 236–246.
7. Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований // Автомат. телемех. — 2013. — 74, № 12. — С. 56–103.
8. Параев Ю. И., Полуэктова К. О. Оптимальное управление односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов // Автомат. телемех. — 2020. — № 4. — С. 162–172.
9. Рапопорт Е. Я. Оптимальное управление системами с распределенным параметром. — М.: Высшая школа, 2009.
10. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
11. Юлдашев Т. К. Оптимальное управление обратными тепловыми процессами в параболическом уравнении с нелинейными отклонениями по времени // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 117–135.
12. Girsanov I. V. Lectures on the Mathematical Theory of Extremum Problems. — New York: Springer-Verlag, 1972.
13. Lions J. L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1971.
14. Kerimbekov A. K. On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semilinear parabolic equations // Proc. World Congr. Eng. — 2011. — 1. — P. 270–275.
15. Yuldashev T. K. Nonlinear optimal control of thermal processes in a nonlinear inverse problem // Lobachevskii J. Math. — 2020. — 41, № 1. — P. 124–136.
16. Yuldashev T. K. Periodic solutions for an impulsive system of nonlinear differential equations with maxima // Наносистемы: Физ. Хим. Мат. — 2022. — 13, № 2. — С. 135–141.
17. Yuldashev T. K. Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. — 2022. — 26, № 2. — С. 368–379.
18. Yuldashev T. K., Ashirbaev B. Y. Optimal feedback control problem for a singularly perturbed discrete system // Lobachevskii J. Math. — 2023. — 44, № 2. — P. 661–668.

19. *Yuldashev T. K., Fayziev A. K.* On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima// Наносистемы: Физ. Хим. Мат. — 2022. — 13, № 1. — С. 36–44.
20. *Yuldashev T. K., Fayziev A. K.* Integral condition with nonlinear kernel for an impulsive system of differential equations with maxima and redefinition vector// Lobachevskii J. Math. — 2022. — 43, № 8. — P. 2332–2340.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Эшов Мансур Пулатович

Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Республика Узбекистан

E-mail: m.eshov@tsue.uz

Кодиров Нажмиддин Нематович

Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Республика Узбекистан

E-mail: n.qodirov@tsue.uz

Юлдашев Турсун Камалдинович

Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Республика Узбекистан

E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 100–128
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-100-128

УДК 517.9; 531.01

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ,
ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ.
I. СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ
ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2023 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. В работе предъявлены тензорные инварианты (первые интегралы, дифференциальные формы) для динамических систем на касательных расслоениях к гладким n -мерным многообразиям отдельно при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, а также при любом конечном n . Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC,
POTENTIAL AND DISSIPATIVE SYSTEMS.
I. SYSTEMS ON TANGENTS BUNDLES
OF TWO-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2023 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we present tensor invariants (first integrals and differential forms) for dynamical systems on the tangent bundles of smooth n -dimensional manifolds separately for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, and for any finite n . We demonstrate the connection between the existence of these invariants and the presence of a full set of first integrals that are necessary for integrating geodesic, potential, and dissipative systems. The force fields acting in systems considered make them dissipative (with alternating dissipation).

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

0. Примеры из маломерной динамики	101
1. Пример: плоский маятник в потоке набегающей среды	101
2. Пример более общей системы с одной степенью свободы	103
1. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия	104
1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к двумерному многообразию	105
2. Инварианты систем на касательном расслоении к двумерному многообразию в потенциальном силовом поле	110
3. Инварианты систем на касательном расслоении к двумерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией	112
4. Пример: пространственный маятник в потоке набегающей среды	122
Список литературы	124

0. ПРИМЕРЫ ИЗ МАЛОМЕРНОЙ ДИНАМИКИ

Введение. Как известно (см. [14,15,77]), обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Как известно, для консервативных систем этот факт естествен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (т.е. имеющие существенно особые точки, в смысле комплексного анализа) функции (см. также [2,17,24,25]).

Как показано ранее, задача о движении плоского (двумерного) маятника на цилиндрическом шарнире в неконсервативном поле сил, приводит к динамической системе на касательном расслоении к одномерной сфере (окружности). Динамические системы второго порядка, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, первый интеграл является трансцендентной (т.е. имеющих существенно особые точки) функцией, выражающейся через конечную комбинацию элементарных функций.

1. Пример: плоский маятник в потоке набегающей среды. Кратко охарактеризуем задачу о физическом маятнике на цилиндрическом шарнире в потоке набегающей среды, начатую в [8,19]. Пространство положений такого маятника — одномерная окружность $\mathbb{S}^1\{\theta \bmod 2\pi\}$, фазовое пространство — касательное расслоение $T\mathbb{S}^1\{\dot{\theta}; \theta \bmod 2\pi\}$ к ней, т.е. двумерный цилиндр.

При рассматриваемых модельных предположениях выписано уравнение движения такого маятника. В [23] доказано утверждение о том, что динамическая система, описывающая поведение такого маятника, траекторно топологически эквивалентна следующему дифференциальному уравнению на двумерном цилиндре (угол θ измеряется «по потоку»):

$$\ddot{\theta} + h\dot{\theta} \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = 0, \quad h > 0. \quad (0.1.1)$$

Уравнение (0.1.1) можно переписать в виде системы на фазовом цилиндре $\mathbb{R}^1\{\omega\} \times \mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$ ($\alpha = \theta + \pi$):

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\omega + h \sin \alpha, \\ \dot{\omega} = \sin \alpha \cos \alpha, \end{cases} \quad (0.1.2)$$

фазовый портрет которой представлен на рис. 1 при $0 < h < 2$.

Вообще же говоря, при $h < 2$ точки покоя $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, являются фокусами, при $h = 2$ — вырожденными узлами, а при $h > 2$ — (грубыми) узлами.

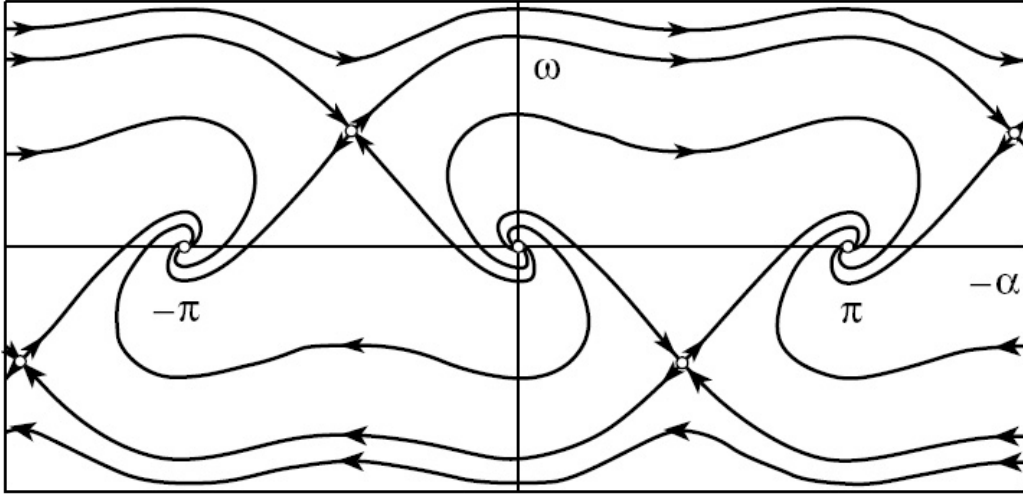


Рис. 1. Портрет системы (0.1.2) на фазовом цилиндре

При $h = 0$ консервативная система (0.1.2) обладает аналитическим первым интегралом энергии:

$$\frac{\omega^2}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{2} = C_0 = \text{const}; \quad (0.1.3)$$

при этом ее фазовый поток сохраняет площадь на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$, т.е. сохраняется дифференциальная 2-форма

$$d\alpha \wedge d\omega \quad (0.1.4)$$

площади с единичной плотностью. При интегрировании системы можно использовать или первый интеграл энергии (0.1.3), или факт сохранения фазовой площади (0.1.4).

В случае $h \neq 0$ ситуация сложнее. Поскольку у системы (0.1.2) имеются притягивающие или отталкивающие (асимптотические) предельные множества, первый интеграл системы — трансцендентная (т.е. имеющая существенно особые точки) функция, которая имеет вид

$$\Phi_0(\alpha, \omega) = \sin \alpha \exp \Psi_0(\zeta) = C_1 = \text{const}, \quad \Psi_0(\zeta) = \int \frac{(\zeta - h)d\zeta}{\zeta^2 - h\zeta + 1}, \quad \zeta = \frac{\omega}{\sin \alpha}; \quad (0.1.5)$$

при этом асимптотические предельные множества находятся из системы алгебраических равенств

$$\sin \alpha = 0, \quad \omega = 0 \quad (0.1.6)$$

(см. также [13]).

Заметим также, что в точках, задаваемых последними равенствами, приведенная функция как первый интеграл не просто не определена, а имеет особенности в виде существенно особых точек (как указано выше — в смысле комплексного анализа). В остальных точках фазового пространства первый интеграл рассматриваемой системы можно считать гладкой функцией (см. также [24, 25, 30]). Данное замечание распространяется и на другие трансцендентные первые интегралы данной работы (в каждом конкретном случае координаты существенно особых точек уточняются).

Поскольку у системы (0.1.2) имеются асимптотические предельные множества (рис. 1), не существует никакой даже абсолютно непрерывной функции, являющейся плотностью меры фазовой плоскости (ср. [1, 12, 16]). Но можно (наряду с первым интегралом) предъявить инвариантную дифференциальную 2-форму с коэффициентами, являющимися трансцендентными функциями, которая имеет вид

$$T_1(\alpha, \omega) = \exp \{-h\Psi_1(\zeta)\} d\alpha \wedge d\omega, \quad \Psi_1(\zeta) = \int \frac{d\zeta}{\zeta^2 - h\zeta + 1}, \quad \zeta = \frac{\omega}{\sin \alpha}. \quad (0.1.7)$$

2. Пример более общей системы с одной степенью свободы. Рассмотрим гладкую динамическую систему на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ (или на касательном расслоении $M^1\{\alpha\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\} = TM^1\{\omega; \alpha\}$) с одной степенью свободы α следующего вида:

$$\dot{\alpha} = -\omega + b\delta(\alpha), \quad \dot{\omega} = F(\alpha), \quad (0.2.1)$$

которая переписывается в виде уравнения

$$\ddot{\alpha} - b\tilde{\delta}(\alpha)\dot{\alpha} + F(\alpha) = 0, \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}. \quad (0.2.2)$$

Пара гладких функций $(F(\alpha), \delta(\alpha))$ определяет силовое поле в системе: функция $F(\alpha)$ описывает консервативную составляющую поля, а функция $\delta(\alpha)$ — возможные рассеяние или подкачку энергии в системе (в зависимости от знака функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ в уравнении (0.2.2)).

При $b = 0$ консервативная система (0.2.1) обладает гладким интегралом энергии:

$$\frac{\omega^2}{2} + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi) d\xi = C_0 = \text{const}; \quad (0.2.3)$$

при этом ее фазовый поток сохраняет площадь на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$, т.е. сохраняется дифференциальная 2-форма (0.1.4) площади с единичной плотностью. При интегрировании системы (0.2.1) при $b = 0$ можно использовать или первый интеграл энергии (0.2.3), или факт сохранения фазовой площади (форма (0.1.4)).

Иначе обстоит дело в случае $b \neq 0$. Поскольку у системы (0.2.1) появляются, вообще говоря, притягивающие или отталкивающие предельные множества (назовем их *асимптотическими*), первый интеграл системы — трансцендентная (т.е. имеющая существенно особые точки) [24] функция. Приведем ее для следующего важного случая:

$$F(\alpha) = \lambda\delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (0.2.4)$$

Действительно, при использовании условия (0.2.4) системе (0.2.1) можно сопоставить уравнение

$$\frac{d\omega}{d\delta} = \frac{\lambda\delta}{-\omega + b\delta}. \quad (0.2.5)$$

Переходя к однородным координатам $\omega = \zeta\delta$, для поиска искомого первого интеграла получаем следующую квадратуру:

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{b - \zeta}{\zeta^2 - b\zeta + \lambda} d\zeta. \quad (0.2.6)$$

Тогда искомым первым интеграл примет окончательный вид

$$\Phi(\alpha, \omega) = \delta(\alpha) \exp \Psi(\zeta) = C_1 = \text{const}, \quad \Psi(\zeta) = \int \frac{(\zeta - b)d\zeta}{\zeta^2 - b\zeta + \lambda}, \quad \zeta = \frac{\omega}{\delta(\alpha)}; \quad (0.2.7)$$

при этом асимптотические предельные множества находятся из системы алгебраических равенств

$$\delta(\alpha) = 0, \quad \omega = 0 \quad (0.2.8)$$

(см. также [13]).

Поскольку у рассматриваемой системы при $b \neq 0$ появляются асимптотические предельные множества, не существует никакой *даже* абсолютно непрерывной функции, являющейся плотностью меры во всей фазовой плоскости (ср. [18, 29]). Но можно (наряду с полученным первым интегралом (0.2.7)) предъявить инвариантную дифференциальную 2-форму с коэффициентами, являющимися трансцендентными (имеющими существенно особые точки) функциями.

На рис. 1 для примера показан фазовый портрет системы (0.2.1) для случая $\delta(\alpha) = \sin \alpha$ (соответственно, $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$).

Действительно, искомая 2-форма имеет вид

$$T(\alpha, \omega) = \exp \{-b\Theta(\zeta)\} d\alpha \wedge d\omega, \quad \Theta(\zeta) = \int \frac{d\zeta}{\zeta^2 - b\zeta + \lambda}, \quad \zeta = \frac{\omega}{\delta(\alpha)}. \quad (0.2.9)$$

Видно, что дифференциальная форма (0.2.9) площади имеет все же более простой вид, чем первый интеграл (0.2.7).

1. ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Введение. Примерами часто встречающихся тензорных инвариантов являются скалярные инварианты — первые интегралы рассматриваемой системы, — и инвариантные векторные поля — поля симметрий для данной системы (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы порождают интегральные инварианты рассматриваемой системы (этот вопрос в основном и рассматривается в данной работе). При этом само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов рассматриваемой системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из n дифференциальных уравнений, помимо упомянутого тривиального инварианта, надо знать еще $n - 1$ независимых тензорных инвариантов.

В данном разделе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Как показано ранее, задача о движении трехмерного (пространственного) маятника на сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, которое можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее трехмерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7, 11, 32, 33]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (т.е. имеющих существенно особые точки) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Такое же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по двумерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего трехмерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим двумерным поверхностям вращения, на плоскости Лобачевского (например, в модели Клейна) и т. д. Полученные результаты особенно важны в случае присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (см. [36, 37]).

Важные частные случаи систем с двумя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора [46, 56]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные (см. также [79]).

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, плоскости Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. В заключение рассмотрено

усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией, и указаны достаточные условия интегрируемости.

1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к двумерному многообразию.

1.1. Координаты на касательном расслоении и коэффициенты связности. Рассмотрим гладкое двумерное риманово многообразие $M^2\{\alpha, \beta\}$ с координатами (α, β) , римановой метрикой $g_{ij}(\alpha, \beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$ (ср. [7, 9]) при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha), \quad \dot{\beta} = z_1 f_1(\alpha), \quad (1.1.1)$$

где $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, z_2 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических (см. [39, 40]), например, с тремя ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на расслоении (двумерных) поверхностей вращения, плоскости Лобачевского и т. д.):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0; \end{cases} \quad (1.1.2)$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае кинематических соотношений (1.1.1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$, примут вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 &= -f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

и уравнения геодезических (1.1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.1.1) почти всюду эквивалентны составной системе (1.1.1), (1.1.3) на многообразии $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ с новой частью координат z_1, z_2 на касательном пространстве.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (1.1.2) (к системе (1.1.1), (1.1.3)).

- (a) Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства; такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного (трехмерного) твердого тела (см. [28, 31]).
- (b) Системы на касательных расслоениях двумерных поверхностей вращения.
- (c) Системы на касательном расслоении плоскости Лобачевского в модели Клейна.

Отметим также, что в [7] рассмотрены примеры систем геодезических на касательном расслоении двумерной сферы с различными метриками, а в [3] — примеры систем геодезических на расслоении двумерных поверхностей вращения и плоскости Лобачевского.

1.2. О количествах «неизвестных» функций и условий, на них накладываемых. Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении двумерного гладкого многообразия, то количество различных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет равно $n^2(n+1)/2$, т.е. шесть коэффициентов при $n=2$. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических весьма сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ из (1.1.1)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся лишь тремя (т.е. $n(n-1)+1$ при $n=2$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (1.1.2). При

этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их число равно двум (т.е. $n(n-1)/2 + 1$ при $n = 2$). Таким образом, имеем пять функций, *характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем*.

Каково же количество $B(2)$ накладываемых алгебраических и дифференциальных условий на имеющиеся $A(2) = 5$ функций ($A(n) = 3n(n-1)/2 + 2$ при $n = 2$)? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 5, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(2)$, тем больше разность $A(2) - B(2)$, и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(2) = 3$ условия на имеющиеся $A(2) = 5$ функций. Число $B(2)$ складывается из трех слагаемых: $B(2) = B_1(2) + B_2(2) + B_3(2)$.

Число $B_1(2)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$. При $n = 2$ мы не намерены накладывать явные алгебраические условия на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, т.е. $B_1(2) = 0$ (в общем случае $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$). Введем лишь новое обозначение для универсальности, а именно, $f_1(\alpha) =: f(\alpha)$.

Число $B_2(2)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \quad (1.1.4)$$

т.е. $B_2(2) = 1$ (в общем случае $B_2(n) = n(n-1)/2$).

Число $B_3(3)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{cases} f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \end{cases} \quad (1.1.5)$$

т.е. $B_3(2) = 2$ (в общем случае $B_3(n) = n(n-1)/2 + 1$). Видно, что в общем случае

$$\begin{aligned} B(n) &= B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 1; \end{aligned}$$

при этом

$$A(n) - B(n) = \frac{3n(n-1)}{2} + 2 - (n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} - 1 = n,$$

что говорит об увеличении количества «произвольных» функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n — размерность рассматриваемого риманова многообразия. В нашем случае $A(2) - B(2) = 2$.

Замечание 1.1. Пусть выполнено условие (1.1.4), при этом реализуется система дифференциальных равенств (1.1.5). Тогда справедливы следующие два (т.е. $n(n-1)/2 + 1$ при $n = 2$) тождества:

$$\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha), \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha). \quad (1.1.6)$$

Доказательство. В условиях замечания первое равенство из (1.1.5) переписывается в виде

$$f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv 0. \quad (1.1.7)$$

Из (1.1.7) следуют первая строка тождеств из (1.1.6). Наконец, из последней строки (1.1.5) также следует последняя строка тождеств из (1.1.6). $\square$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 1.1. В нашем случае, при $n = 2$, оно носит некоторый формальный (даже тавтологичный) смысл, который будет ясен при увеличении размерности $n \geq 3$ многообразия M^n .

Замечание 1.2. Пусть выполнено условие (1.1.4), при этом реализуются два тождества (1.1.6). Тогда справедлива система дифференциальных равенств (1.1.5), которая примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha) =: \Gamma_2(\alpha), \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha) \equiv 0. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Фактически уравнения (1.1.8) и (1.1.5) совпадают с точностью до обозначений. Как указано выше, это произошло по причине низкой размерности $n = 2$ многообразия M^n .

Таким образом, при выполнении одного условия (1.1.4) 2 условия (1.1.5) и два условия (1.1.8) эквивалентны в упомянутом смысле.

1.3. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы четвертого порядка достаточно знать, вообще говоря, три независимых инварианта. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (1.1.1), (1.1.3) достаточно знать три независимых тензорных инварианта: или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством три. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. [71, 72]).

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (1.1.2), переписанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.1.9)$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad (1.1.10)$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 1.1 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются три алгебраических и дифференциальных соотношения (1.1.4), (1.1.8) на пять функций: на две функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ из (1.1.1) и на три, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ из (1.1.2).

Теорема 1.1. Если выполнены условия (1.1.4), (1.1.8), то система (1.1.1), (1.1.3) обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = C_1^2 = \text{const}; \quad (1.1.11)$$

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1 \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad \text{где} \quad \Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}; \quad (1.1.12)$$

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = \beta \pm \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f(b)}{f_2(b) \sqrt{C_1^2 \Phi_0^2(b) - C_2^2}} db = C_3 = \text{const}. \quad (1.1.13)$$

Более того, после замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_2(\alpha) \frac{d}{d\tau} \quad (1.1.14)$$

и фазовых

$$w_2 = z_2, \quad w_1 = z_1, \quad w_1^* = \ln |w_1|, \quad (1.1.15)$$

— фазовый поток системы (1.1.1), (1.1.3) сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^2\{w_2, w_1^*; \alpha, \beta\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма

$$dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta. \quad (1.1.16)$$

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 1.1, а именно, сделаем замены (1.1.14) независимой переменной и (1.1.15) фазовых переменных (переобозначение $z \rightarrow w$ в данном случае вводится для универсальности обозначений; см. далее случаи высших размерностей $n \geq 3$). Тогда система (1.1.1), (1.1.3) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_2, \\ \dot{w}_2 = -\frac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} \Gamma_2(\alpha) e^{2w_1^*}, \\ \dot{w}_1^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} \Gamma_2(\alpha) w_2, \end{cases} \quad (1.1.17)$$

$$\dot{\beta} = e^{w_1^*} \frac{f(\alpha)}{f_2(\alpha)}; \quad (1.1.18)$$

при этом в составной системе (1.1.17), (1.1.18), и только в ней, точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ . Видно, что дивергенция правой части составной системы (1.1.17), (1.1.18) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании трех первых интегралов. Действительно, дифференцирование функции (1.1.11) в силу системы (1.1.1), (1.1.3) дает

$$\begin{aligned} & -2f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^3 - \\ & -2 \left[f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_2}{f_2(\alpha)} \equiv 0, \end{aligned}$$

если выполнена система дифференциальных равенств (1.1.5). Но, как указано выше, при выполнении одного условия (1.1.4) два условия (1.1.5) и два условия (1.1.8) в известном смысле эквивалентны.

Дифференцирование функции (1.1.12) в силу системы (1.1.1), (1.1.3) в условиях теоремы дает

$$-f_2(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} \right\} z_1 z_2.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (1.1.12).

Далее, рассмотрим два уровня C_1^2 и C_2 первых интегралов (1.1.11) и (1.1.12) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 \Phi_0^2(\alpha) - C_2^2}}. \quad (1.1.19)$$

Будем искать угол β из следующего уравнения, полученного из уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{z_1}{z_2} \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}.$$

Используя в этом уравнении равенство (1.1.19), и получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (1.1.13). Теорема доказана. $\square$

Заметим также, что система равенств (1.1.5) (или (1.1.8)) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.1.11) (или (1.2.2) ниже) в зависимости от рассматриваемой задачи. История

и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [1, 5, 21]). Поиск как первого интеграла (1.1.11), так и интегралов (1.1.12), (1.1.13) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий (см. [47, 49, 50]).

Пример 1.1. В случае сферических координат (α, β) , когда метрика на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства (задача класса (а)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} - \dot{\beta}^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 0 \quad (1.1.20)$$

и имеющая первые интегралы (1.1.11)–(1.1.13), примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_2, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \\ \dot{\beta} = z_1 \frac{1}{\sin \alpha \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \end{cases} \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, \quad (1.1.21)$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.1.21) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 1.2. В случае сферических координат (α, β) , но когда метрика на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. также [6], задача класса (а)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} - \dot{\beta}^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0, \quad \ddot{\beta} + \dot{\alpha}\dot{\beta} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 0 \quad (1.1.22)$$

и имеющая первые интегралы (1.1.11)–(1.1.13), примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_2, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \\ \dot{\beta} = z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \end{cases} \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, \quad (1.1.23)$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.1.23) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 1.3. В случае плоскости Лобачевского (с координатами $x = \beta$, $y = \alpha$, задача класса (с)) двухпараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) = 0, \quad \ddot{\beta} - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0 \quad (1.1.24)$$

и имеющая первые интегралы (1.1.11)–(1.1.13), примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 \nu_1 \alpha, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_2}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_2}, \\ \dot{\beta} = z_1 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_2}}, \end{cases} \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}, \quad (1.1.25)$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.1.25) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 1.4. В случае цилиндрических координат объемлющего трехмерного пространства $(\rho, \varphi = \beta, z = \alpha)$, задача класса (b)) двухпараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} + G_1(\alpha)\dot{\alpha}^2 + G_2(\alpha)\dot{\beta}^2 = 0, \quad \ddot{\beta} + G_3(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0, \quad (1.1.26)$$

где

$$G_1(\alpha) = \frac{\rho'(\alpha)\rho''(\alpha)}{1 + \rho^2(\alpha)}, \quad G_2(\alpha) = \frac{\rho(\alpha)\rho'(\alpha)}{1 + \rho^2(\alpha)}, \quad G_3(\alpha) = 2\frac{\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)},$$

и имеющая первые интегралы (1.1.11)–(1.1.13), примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 \frac{\nu_1}{\sqrt{1 + \rho'^2(\alpha)}}, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2 G(\alpha), \\ \dot{z}_1 = z_1 z_2 G(\alpha), \\ \dot{\beta} = z_1 \frac{\nu_1}{\rho(\alpha)\sqrt{\nu_2 \nu_1^2 \rho^2(\alpha) - 1}}, \end{cases} \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}, \quad (1.1.27)$$

где

$$G(\alpha) = \frac{\nu_1 \rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)\sqrt{1 + \rho'^2(\alpha)}(\nu_2 \nu_1^2 \rho^2(\alpha) - 1)},$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.1.27) рассматривать как новые кинематические соотношения.

2. Инварианты систем на касательном расслоении к двумерному многообразию в потенциальном силовом поле.

2.1. Введение внешнего потенциального силового поля. Теперь несколько модифицируем составную динамическую систему (1.1.1), (1.1.3) и получим систему *консервативную*. Именно, внесем с систему гладкое (внешнее) консервативное силовое поле в проекциях на оси $\dot{z}_1, \dot{z}_2$ соответственно:

$$\tilde{F}(z_2, z_1; \alpha) = \begin{pmatrix} F_1(\beta)f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha)f_2(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F_2(\alpha)f_2(\alpha) - f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \\ \dot{z}_1 = F_1(\beta)f_1(\alpha) - f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2, \\ \dot{\beta} = z_1 f_1(\alpha), \end{cases} \quad (1.2.1)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - F_2(\alpha)f_2^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} - F_1(\beta)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0 \end{cases}$$

на касательном расслоении $TM^2\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$.

2.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы четвертого порядка (1.2.1) достаточно знать, вообще говоря, три независимых инварианта. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (1.2.1) достаточно знать три независимых тензорных инварианта: или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством три. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. [75, 79, 80]).

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 1.2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются три алгебраических и дифференциальных соотношения (1.1.4), (1.1.8) на пять функций: две функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ и три, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Теорема 1.2. *Если выполнены условия (1.1.4), (1.1.8), то система (1.2.1) обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов. Это*

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_2, z_1; \alpha, \beta) &= z_1^2 + z_2^2 + V(\alpha, \beta) = C_1 = \text{const}, \\ V(\alpha, \beta) &= V_2(\alpha) + V_1(\beta) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_2(a) da - 2 \int_{\beta_0}^{\beta} F_1(b) db, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

а также, для простоты, при $F_1(\beta) \equiv 0$ — первый интеграл (1.1.12) и

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = \beta \pm \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f_1(b)}{f_2(b) \sqrt{\Phi_0^2(b) [C_1 - V(b, \beta_0)] - C_2^2}} db = C_3 = \text{const}. \quad (1.2.3)$$

Более того, после замен независимой переменной (1.1.14) и фазовых (1.1.15) — фазовый поток системы (1.2.1) сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^2\{w_2, w_1^*; \alpha, \beta\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма (1.1.16).

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 1.2, а именно, сделаем замены (1.1.14) независимой переменной и (1.1.15) фазовых переменных (напомним, что переобозначение $z \rightarrow w$ в данном случае вводится для универсальности обозначений — см. далее случаи высших размерностей ($n \geq 3$)). Тогда система (1.2.1) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_2, \\ \dot{w}_2 = F_2(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} \Gamma_2(\alpha) e^{2w_1^*}, \\ \dot{w}_1^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} \Gamma_2(\alpha) w_2, \end{cases} \quad (1.2.4)$$

$$\dot{\beta} = e^{w_1^*} \frac{f(\alpha)}{f_2(\alpha)}; \quad (1.2.5)$$

при этом в составной системе (1.2.4), (1.2.5), и только в ней, точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ . Видно, что дивергенция правой части составной системы (1.2.4), (1.2.5) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании трех первых интегралов, при этом доказательство существования интеграла (1.1.12) проводится так же, как в теореме 1.1. Действительно, дифференцирование функции (1.2.2) в силу системы (1.2.1) дает

$$\begin{aligned} & 2z_2 F_2(\alpha) f_2(\alpha) + 2z_1 F_1(\beta) f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^3 - \\ & - 2 \left[f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_2}{f_2(\alpha)} - \\ & - 2z_2 F_2(\alpha) f_2(\alpha) - 2z_1 F_1(\beta) f_1(\alpha) \equiv 0, \end{aligned}$$

если выполнена система дифференциальных равенств (1.1.5). Но, как указано выше, при выполнении одного условия (1.1.4) два условия (1.1.5) и два условия (1.1.8) в известном смысле эквивалентны.

Далее, в условиях теоремы первый интеграл (1.2.2) примет вид

$$z_1^2 + z_2^2 + V(\alpha, \beta_0) = C_1 = \text{const}.$$

Рассмотрим два уровня C_1 и C_2 первых интегралов (1.2.2) и (1.1.12) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_2}{\sqrt{(C_1 - V(\alpha, \beta_0))\Phi_0^2(\alpha) - C_2^2}}. \quad (1.2.6)$$

Будем искать угол β из следующего уравнения, полученного из уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{z_1 f_1(\alpha)}{z_2 f_2(\alpha)}.$$

Используя в этом уравнении равенство (1.2.6), и получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (1.2.3). Теорема доказана. $\square$

3. Инварианты систем на касательном расслоении к двумерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией.

3.1. Введение внешнего силового поля со знакопеременной диссипацией. Теперь несколько модифицируем систему (1.2.1). При этом получим систему с диссипацией. Именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (1.3.1) (в отличие от системы (1.2.1)), но и следующая линейная зависимость гладкого (внешнего) силового поля от z_1, z_2 в проекциях на оси $\dot{z}_1, \dot{z}_2$ соответственно:

$$\tilde{F}(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} F_1(\beta)f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha)f_2(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F_2(\alpha)f_2(\alpha) - f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = F_1(\beta)f_1(\alpha) - f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta} = z_1 f_1(\alpha), \end{cases} \quad (1.3.1)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\alpha} - F_2(\alpha)f_2^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F_2^1(\alpha) + \\ \quad + b^2\delta^2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} - \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\beta} - F_1(\beta)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0, \end{cases}$$

на касательном расслоении $TM^2\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$. Здесь, как и выше, $\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.2. *Достаточные условия интегрируемости.* Для полного интегрирования системы (1.3.1) достаточно знать три независимых тензорных инварианта: или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством три. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 1.3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются три алгебраических и дифференциальных соотношения (1.1.4), (1.1.8) на пять функций: на две функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ и на три, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Перейдем к интегрированию искомой системы четвертого порядка (1.3.1) при выполнении свойств (1.1.4), (1.1.8), а также при отсутствии проекции внешней силы на ось $\dot{z}_1$ (т.е. отлична от нуля лишь проекция внешней силы на ось $\dot{z}_2$):

$$F_1(\beta) \equiv 0. \quad (1.3.2)$$

Тогда система (1.3.1) допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_2(\alpha) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = \frac{f^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_2(\alpha) z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \end{cases} \quad (1.3.3)$$

при наличии также четвертого уравнения

$$\dot{\beta} = z_1 f(\alpha). \quad (1.3.4)$$

В целях дальнейшей универсальности ведем обозначение

$$F_1^1(\alpha) =: F^1(\alpha) \quad (1.3.5)$$

(это станет более понятно в случаях высших размерностей) и формально переобозначим $w_k = z_k$, $k = 1, 2$. В результате система (1.3.3), (1.3.4) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_2 = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_2(\alpha) w_1^2 + w_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{w}_1 = \frac{f^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_2(\alpha) w_1 w_2 + w_1 F^1(\alpha), \end{cases} \quad (1.3.6)$$

$$\dot{\beta} = w_1 f(\alpha). \quad (1.3.7)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (1.3.6), (1.3.7) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (1.3.6) и дополнительный тензорный инвариант, «привязывающий» уравнение (1.3.7) (т.е. всего *три* инварианта).

Наложим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \quad (1.3.8)$$

а для некоторых $\lambda_2^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} F_2(\alpha) &= \lambda_2^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_2^0 \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha), \\ F_k^1(\alpha) &= \lambda_k^1 f_2(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_2(\alpha), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Условие (1.3.8) назовем «геометрическим», а условия из группы (1.3.9) — «энергетическими». При этом $\lambda_1^1 =: \lambda^1$ в силу (1.3.5).

Условие (1.3.8) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_2(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения.

Условия группы (1.3.9) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков, или так называемую (знако)переменную диссипацию (см. также [60, 62, 64, 65]).

Теорема 1.3. Пусть выполняются условия (1.3.8) и (1.3.9). Тогда система (1.3.6), (1.3.7) обладает тремя независимыми, вообще говоря, трансцендентными (см. [24]) (т.е. имеющими существенно особые точки) первыми интегралами.

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 1.3 для начала сопоставим системе третьего порядка (1.3.6) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dw_2}{d\alpha} = \frac{F_2(\alpha)f_2(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)w_1^2/f_2(\alpha) + w_2F_2^1(\alpha)}{w_2f_2(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_1}{d\alpha} = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)w_1w_2/f_2(\alpha) + w_1F^1(\alpha)}{w_2f_2(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \quad (1.3.10)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_2 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_1 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \quad (1.3.11)$$

приводим систему (1.3.10) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \frac{F_2(\alpha)f_2(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_2(\alpha) + \Delta(\alpha)F_2^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_2(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \quad (1.3.12)$$

что с учетом (1.1.8), почти всюду эквивалентно

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)} \left(F_2(\alpha)f_2(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)\frac{\Delta^2(\alpha)u_1^2}{f_2(\alpha)} - \right. \\ \left. - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + [\Delta(\alpha)F_2^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_2 \right), \\ \Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} = \frac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)} \left([f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)\frac{\Delta^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1u_2 + \right. \\ \left. + [\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1 \right), \end{cases} \quad (1.3.13)$$

где $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$. Теперь для интегрирования системы (1.3.13) нам потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (1.3.8) и (1.3.9). Действительно, после их выполнения система (1.3.13) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_2^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_2^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 + (\lambda_1^1 - b)u_1}. \quad (1.3.14)$$

Уравнение (1.3.14) имеет вид уравнения Абеля (см. [10]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_2^1$ данное уравнение имеет первый интеграл

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_2^0}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (1.3.15)$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_2, w_1; \alpha) = \frac{f_2^2(\alpha)(w_2^2 + w_1^2) + (b - \lambda^1)w_2\delta(\alpha)f_2(\alpha) - \lambda_2^0\delta^2(\alpha)}{w_1\delta(\alpha)f_2(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (1.3.16)$$

Замечание 1.3. Если α — периодическая координата периода 2π , то система (1.3.6) (как часть системы (1.3.6), (1.3.7)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [51, 53, 57]). Если же α не является периодической координатой, то мы в данном случае говорим о системе со знакопеременной диссипацией. При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (1.1.8), геометрического и энергетических условий (1.3.8), (1.3.9) (но при любой гладкой функции $F_2(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_2^1 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_2 = F_2(\alpha)f_2(\alpha) - \kappa f_2(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_1^2 - b w_2 f_2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_1 = \kappa f_2(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_1 w_2 - b w_1 f_2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (1.3.17)$$

Действительно, система (1.3.17) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_2, w_1; \alpha) = w_1^2 + w_2^2 + 2b w_2 \Delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad V(\alpha) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_2(a) da, \quad (1.3.18)$$

$$\Phi_2(w_1; \alpha) = w_1 \Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}. \quad (1.3.19)$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_2(w_1; \alpha) &= w_1 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} = \\ &= w_1 f(\alpha) \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\Gamma_2(b) \frac{f^2(b)}{f_2^2(b)} + \frac{d \ln |f(b)|}{db} \right] db \right\} \cong w_1 \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_2(b) \frac{f^2(b)}{f_2^2(b)} db \right\}, \end{aligned}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. Теперь в силу (1.3.8), (1.3.9) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_2^1 = -b$, перепишется в виде

$$w_1 \exp \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db} \ln |\Delta(b)| db \right\} \cong w_1 \Delta(\alpha) \quad (1.3.20)$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.3.18), (1.3.19) также является первым интегралом системы (1.3.17). Но при $\lambda^1 = \lambda_2^1 \neq -b$ каждая из функций

$$w_2^2 + w_1^2 + (b - \lambda^1)w_2\Delta(\alpha) - \lambda_2^0\Delta^2(\alpha) \quad (1.3.21)$$

и (1.3.19) по отдельности не является первым интегралом системы (1.3.6). Однако отношение функций (1.3.21), (1.3.19) является первым интегралом системы (1.3.6) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_2^1$ и b .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.3.6) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_2^1$. Преобразуем инвариантное соотношение (1.3.15) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2} \right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_2^0. \quad (1.3.22)$$

Ясно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_2^0 \geq 0, \quad (1.3.23)$$

и фазовое пространство системы (1.3.6) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.3.22).

Таким образом, в силу соотношения (1.3.15) первое уравнение системы (1.3.13) при условиях (1.3.8) и (1.3.9) и при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_2^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(-\lambda_2^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 U_1(C_1, u_2)}{u_2 + b},$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_2^0)} \right\};$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.3.23). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (1.3.6) примет вид

$$-\int \frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} = \int \frac{(b + u_2)du_2}{2(-\lambda_2^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 \{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_2^0)}\}/2}. \quad (1.3.24)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln |\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 - \frac{\lambda^1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_2^0,$$

то правая часть равенства (1.3.24) примет вид

$$-\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \mp \frac{b}{2} I_1,$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \quad (1.3.25)$$

При вычислении интеграла (1.3.25) возможны три случая.

I: $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_2^0$. В этом случае

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0}} \right| + \text{const}.$$

II: $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_2^0$. В этом случае

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_2^0 - (\lambda^1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}.$$

III: $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_2^0$. В этом случае

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}.$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_2}{\Delta(\alpha)} - \frac{\lambda^1 - b}{2},$$

находим окончательный вид для величины I_1 :

I. При $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_2^0$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_2^0}} \right| + \text{const}.$$

II. При $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_2^0$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_2^0 - (\lambda^1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}.$$

III. При $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_2^0$

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}.$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (1.3.6) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_2^1$): предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [24]).

Замечание 1.4. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.3.15).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_2, w_1; \alpha) = G\left(\Delta(\alpha), \frac{w_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_1}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \quad (1.3.26)$$

Выражение первого интеграла (1.3.26) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (1.3.6), (1.3.7) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (1.3.6). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.3.7).

Для получения искомого интеграла общий подход заключается в следующем. Получим из рассматриваемой системы (1.3.6), (1.3.7) следующее уравнение:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{w_1 f(\alpha)}{w_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \quad (1.3.27)$$

Поскольку выше были найдены два функционально независимых первых интеграла (1.3.16), (1.3.26), не зависящих от фазовой переменной β , то, по теореме о неявной функции, поскольку

$$\frac{\partial(\Theta_1(w_2, w_1; \alpha), \Theta_2(w_2, w_1; \alpha))}{\partial(w_2, w_1)} \neq 0 \quad (1.3.28)$$

почти всюду, то в фазовом пространстве существуют достаточно гладкие функции

$$w_2 = W_2(\alpha; C_1, C_2), \quad w_1 = W_1(\alpha; C_1, C_2), \quad (1.3.29)$$

при подстановке в первые интегралы (1.3.16), (1.3.26) дающие тождества, а значит, сотканные из решений рассматриваемой системы.

Таким образом, при подстановке функций (1.3.29) в уравнение (1.3.27) имеем следующее дифференциальное соотношение:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{W_1(\alpha; C_1, C_2)f(\alpha)}{W_2(\alpha; C_1, C_2)f_2(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \quad (1.3.30)$$

позволяющее найти искомое инвариантное соотношение в квадратурах:

$$\beta - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{W_1(a; C_1, C_2)f(a)}{W_2(a; C_1, C_2)f_2(a) + b\delta(a)} da = C_3 = \text{const}. \quad (1.3.31)$$

Последнее соотношение имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_3(\alpha, \beta) = G_3(\alpha, \beta, C_1, C_2) = C_3 = \text{const}. \quad (1.3.32)$$

Предъявленный только что достаточно общий подход поиска дополнительного первого интеграла, «привязывающего» уравнение на β , имеет ряд своих недостатков. Например, остается под вопросом область фазового пространства, в которой может быть применено неравенство (1.3.28). Но данный недостаток носит в принципе технический характер.

Как показывают приложения, дословно данный общий подход применять не требуется, поскольку уравнение (1.3.27), как правило, упрощается. Поясним последние рассуждения. Сопоставим рассматриваемой системе (1.3.6), (1.3.7) следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{[(\kappa - 1)u_1u_2 + (\lambda^1 - b)u_1]\tilde{\Delta}(\alpha)}{u_2 + b}, \\ \frac{d\beta}{d\alpha} &= \frac{u_1f(\alpha)/f_2(\alpha)}{u_2 + b},\end{aligned}\tag{1.3.33}$$

которые получаются переходом к однородным переменным (1.3.11). Из уравнений (1.3.33) вытекает дифференциальное соотношение

$$\frac{du_1}{d\beta} = [(\kappa - 1)u_2 + (\lambda^1 - b)] \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)f_2(\alpha)}{\Delta(\alpha)f(\alpha)},\tag{1.3.34}$$

в котором функция $\tilde{\Delta}(\alpha)f_2(\alpha)/\Delta(\alpha)f(\alpha)$ очень часто является постоянной величиной. Далее применяется дифференциальное соотношение (1.3.15), и искомый первый интеграл находится через квадратуры.

После перехода к однородным переменным (1.3.11) уравнение (1.3.27) переписывается в виде

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{u_1f(\alpha)/f_2(\alpha)}{u_2 + b}\tag{1.3.35}$$

и для получения искомого первого интеграла достаточно выразить комбинацию $u_1/(u_2 + b)$ через соотношения, соответствующие первым интегралам (1.3.16), (1.3.26).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.3.6), (1.3.7) имеет три первых интеграла, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа, имеющих существенно особые точки). Теорема 1.3 доказана. $\square$

3.3. Инвариантные дифференциальные формы систем со знакопеременной диссипацией.

Теорема 1.4. Если для систем вида (1.3.6), (1.3.7) выполняются геометрическое и энергетические свойства (1.3.8), (1.3.9), то у нее также существуют функционально независимые между собой три инвариантных дифференциальных формы с, вообще говоря, трансцендентными (т.е. имеющими существенно особые точки) коэффициентами. Эти дифференциальные формы, для простоты, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_2^1$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\rho_1(w_2, w_1; \alpha)dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\alpha, \quad \rho_2(w_2, w_1; \alpha)dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\alpha, \\ \rho_3(w_2, w_1; \alpha, \beta)dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\alpha \wedge d\beta,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\rho_1(w_2, w_1; \alpha) &= \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \frac{u_2^2 + u_1^2 + (b - \lambda^1)u_2 - \lambda_2^0}{u_1}, \quad u_k = \frac{w_k}{\Delta(\alpha)}, \quad k = 1, 2; \\ \rho_2(w_2, w_1; \alpha) &= \Delta(\alpha) \exp \left\{ \int \frac{(2b + \lambda^1 + u_2)du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\}, \\ \rho_3(w_2, w_1; \alpha, \beta) &= \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\};\end{aligned}$$

они, вообще говоря, зависят с первыми интегралами (1.3.16), (1.3.26), (1.3.32).

Доказательство. I. Система (1.3.6) составной рассматриваемой системы (1.3.6), (1.3.7) при выполнении свойств (1.3.8), (1.3.9) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_2 = \lambda_2^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) f_2(\alpha) - \kappa f_2(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_1^2 + \lambda_2^1 w_2 f_2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_1 = \kappa f_2(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_1 w_2 + \lambda^1 w_1 f_2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (1.3.36)$$

После замен независимой и фазовой переменных

$$\frac{d}{dt} = f_2(\alpha) \frac{d}{d\tau}, \quad w_1^* = \ln |w_1| \quad (1.3.37)$$

система (1.3.36) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha) = w_2 + b\Delta(\alpha), \\ \dot{w}_2 = X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha) = \lambda_2^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_1^*} + \lambda_2^1 w_2 \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_1^* = X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha) = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 + \lambda^1 \tilde{\Delta}(\alpha); \end{cases} \quad (1.3.38)$$

при этом в системе (1.3.38) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ . В принципе, замена фазовой переменной (1.3.37) носит технический характер, и при этом можно использовать как переменную w_1^* , так и переменную w_1 .

Для системы (1.3.38) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_2, w_1^*; \alpha)$, соответствующие дифференциальным формам объема $\rho(w_2, w_1^*; \alpha) dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} [\rho(w_2, w_1^*; \alpha) X(w_2, w_1^*; \alpha)] = 0, \quad (1.3.39)$$

где

$$X(w_2, w_1^*; \alpha) = \{X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha), X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha), X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha)\} \quad (1.3.40)$$

— векторное поле рассматриваемой системы (1.3.38) в координатах $(w_2, w_1^*; \alpha)$. Уравнение (1.3.39) перепишется в виде

$$X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha) \rho_\alpha + X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha) \rho_{w_2} + X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha) \rho_{w_1^*} = -\rho \operatorname{div} X(w_2, w_1^*; \alpha); \quad (1.3.41)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_2, w_1^*; \alpha) = (b + \lambda_2^1) \tilde{\Delta}(\alpha). \quad (1.3.42)$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (1.3.41) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot{w}_2 = X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot{w}_1^* = X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_2^1) \tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (1.3.43)$$

У системы, состоящей из первых трех уравнений системы (1.3.43), уже найдены два первых интеграла (1.3.16) и (1.3.26). Найдем третий независимый первый интеграл системы (1.3.43) уравнений характеристик. Сопоставим системе (1.3.43) следующую неавтономную систему:

$$\begin{cases} \frac{dw_2}{d\alpha} = \frac{\lambda_2^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \tilde{\Delta}(\alpha) w_1^2 / \Delta(\alpha) + \lambda_2^1 w_2 \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_2 + b \Delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_1}{d\alpha} = \frac{\kappa \tilde{\Delta}(\alpha) w_1 w_2 / \Delta(\alpha) + \lambda^1 w_1 \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_2 + b \Delta(\alpha)}, \\ \frac{d\rho}{d\alpha} = -\frac{(b + \lambda_2^1) \rho \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_2 + b \Delta(\alpha)} \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{dw_2}{d\Delta} = \frac{\lambda_2^0 \Delta - \kappa w_1^2 / \Delta + \lambda_2^1 w_2}{w_2 + b \Delta}, \\ \frac{dw_1}{d\Delta} = \frac{\kappa w_1 w_2 / \Delta + \lambda^1 w_1}{w_2 + b \Delta}, \\ \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_2^1) \rho}{w_2 + b \Delta}. \end{cases} \quad (1.3.44)$$

После введения однородных переменных

$$w_2 = u_2 \Delta, \quad w_1 = u_1 \Delta, \quad (1.3.45)$$

похожих на соответствующие переменные в замене (1.3.11), система (1.3.44) перепишется в виде

$$\begin{cases} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} + u_2 = \frac{\lambda_2^0 - \kappa u_1^2 + \lambda_2^1 u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} + u_1 = \frac{\kappa u_1 u_2 + \lambda^1 u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_2^1) \rho}{u_2 + b} \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda_2^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 - (b - \lambda_2^1) u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} = \frac{(\kappa - 1) u_1 u_2 - (b - \lambda^1) u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_2^1) \rho}{u_2 + b}. \end{cases} \quad (1.3.46)$$

Из первых двух уравнений системы (1.3.46) получается первый интеграл (1.3.16). Из квадратуры

$$-\frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{(u_2 + b) du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad (1.3.47)$$

где

$$U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)} \right\}, \quad U_1(u_2) = u_2^2 + (b - \lambda^1) u_2 - \lambda_2^0, \quad C_1 \neq 0,$$

получается первый интеграл (1.3.26) (здесь учитывается, что $\kappa = -1$ и $\lambda^1 = \lambda_2^1$). Наконец, из квадратуры

$$\frac{d\rho}{(b + \lambda^1) \rho} = \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \quad (1.3.48)$$

получается первый интеграл, содержащий неизвестную функцию ρ .

Вычислим квадратуру (1.3.48). Справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp \left\{ -(b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} = C_\rho = \text{const}, \quad (1.3.49)$$

которое является третьим, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (1.3.43). Таким образом, общее решение линейного уравнения (1.3.41) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2], \quad (1.3.50)$$

где $\mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Θ_1, Θ_2 — два первых интеграла (1.3.16), (1.3.26) соответственно.

В частности, за два функционально независимых решения линейного уравнения (1.3.41) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_2, w_1; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_2, w_1; \alpha), \quad (1.3.51)$$

$$\rho_2(w_2, w_1; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_2, w_1; \alpha), \quad (1.3.52)$$

где $u_2 = w_2/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_1/\Delta(\alpha)$.

II. Итак, инвариантные дифференциальные формы с функциями $\rho_p(w_2, w_1; \alpha)$, $p = 1, 2$, были получены выше через исследование отдельной системы (1.3.6), которая сама составляет общую рассматриваемую составную систему (1.3.6), (1.3.7). Возникает естественный вопрос: как связано нахождение инвариантных форм для отдельных систем с нахождением инвариантных форм для общей составной системы? Ответ на этот вопрос позволит нам, в частности, ответить и на вопрос о нахождении инвариантной формы, «привязывающей» уравнение (1.3.7).

Составная рассматриваемая система (1.3.6), (1.3.7) при выполнении свойств (1.3.8), (1.3.9) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_2 = \lambda_2^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) f_2(\alpha) - \kappa f_2(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_1^2 + \lambda_2^1 w_2 f_2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_1 = \kappa f_2(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_1 w_2 + \lambda^1 w_1 f_2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \end{cases} \quad (1.3.53)$$

$$\dot{\beta} = w_1 f(\alpha). \quad (1.3.54)$$

После замен независимой и фазовой переменных

$$\frac{d}{dt} = f_2(\alpha) \frac{d}{d\tau}, \quad w_1^* = \ln |w_1| \quad (1.3.55)$$

— составная система (1.3.53), (1.3.54) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha) = w_2 + b\Delta(\alpha), \\ \dot{w}_2 = X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha) = \lambda_2^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_1^*} + \lambda_2^1 w_2 \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_1^* = X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha) = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 + \lambda^1 \tilde{\Delta}(\alpha), \end{cases} \quad (1.3.56)$$

$$\dot{\beta} = X_\beta(w_1^*; \alpha) = e^{w_1^*} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \quad (1.3.57)$$

при этом в составной системе (1.3.56), (1.3.57), и только в ней, точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ . В принципе, замена фазовой переменной (1.3.55) носит технический характер, и при этом можно использовать как переменную w_1^* , так и переменную w_1 .

Для составной системы (1.3.56), (1.3.57) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_2, w_1^*; \alpha, \beta)$, соответствующие дифференциальным формам объема

$$\rho(w_2, w_1^*; \alpha, \beta) dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta,$$

из линейного дифференциального уравнения

$$\operatorname{div} [\rho(w_2, w_1^*; \alpha, \beta) X(w_2, w_1^*; \alpha, \beta)] = 0, \quad (1.3.58)$$

где

$$X(w_2, w_1^*; \alpha, \beta) = \left\{ X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha), X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha), X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha), X_\beta(w_1^*; \alpha) \right\} \quad (1.3.59)$$

— векторное поле рассматриваемой составной системы (1.3.56), (1.3.57) в координатах $(w_2, w_1^*; \alpha, \beta)$. Уравнение (1.3.58) перепишется в виде

$$\begin{aligned} X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha) \rho_\alpha + X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha) \rho_{w_2} + X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha) \rho_{w_1^*} + X_\beta(w_1^*; \alpha) \rho_\beta = \\ = -\rho \operatorname{div} X(w_2, w_1^*; \alpha, \beta); \end{aligned} \quad (1.3.60)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_2, w_1^*; \alpha, \beta) = (b + \lambda_2^1) \tilde{\Delta}(\alpha), \quad (1.3.61)$$

как и в случае (1.3.42) для «отдельной» системы (1.3.38)!

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (1.3.60) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_{\alpha}(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot{w}_2 = X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot{w}_1^* = X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot{\beta} = X_{\beta}(w_1^*; \alpha), \\ \dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_2^1) \tilde{\Delta}(\alpha); \end{cases} \quad (1.3.62)$$

она включает систему уравнений характеристик (1.3.43) для уравнения в частных производных (1.3.41).

У системы, состоящей из первых четырех уравнений системы (1.3.62), уже найдены три первых интеграла (1.3.16), (1.3.26) и (1.3.32) (полный набор). Более того, найден и дополнительный первый интеграл (1.3.49), «привязывающий» уравнение (последнее уравнение системы (1.3.62)) на функцию ρ .

Таким образом, общее решение линейного уравнения (1.3.60) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{H}[\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3], \quad (1.3.63)$$

где $\mathcal{H}[\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3]$ — произвольная гладкая функция трех аргументов, при этом $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ — три первых интеграла (1.3.16), (1.3.26), (1.3.32) соответственно.

В частности, за три функционально независимых решения линейного уравнения (1.3.60) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_2, w_1; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_2, w_1; \alpha), \quad (1.3.64)$$

$$\rho_2(w_2, w_1; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_2, w_1; \alpha), \quad (1.3.65)$$

$$\rho_3(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_3(\alpha, \beta), \quad (1.3.66)$$

где $u_2 = w_2/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_1/\Delta(\alpha)$.

Видно, что в разделе II данного доказательства рассмотрен наиболее общий случай поиска инвариантных форм для составной системы (1.3.56), (1.3.57). Также ясно, что найденные дифференциальные формы $\rho_1(w_2, w_1; \alpha)dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\alpha$ и $\rho_2(w_2, w_1; \alpha)dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\alpha$ будут инвариантными формами не только для системы (1.3.6), но и для составной системы (1.3.6), (1.3.7). Теорема 1.3 доказана. $\square$

Итак, для полной интегрируемости системы (1.3.6), (1.3.7) можно использовать или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какие-либо комбинации (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством три (ср. [54, 55, 59]).

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [58, 61]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (т.е. наличие у них существенно особых точек) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [63]).

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения (см. [26, 27]), касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к двумерной сфере, а также более общих систем на расслоении двумерных поверхностей вращения и плоскости Лобачевского. При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим также работы [20, 22].

4. Пример: пространственный маятник в потоке набегающей среды. Кратко охарактеризуем задачу о физическом маятнике на сферическом шарнире в потоке набегающей среды, начатую в [26]. Пространство положений такого маятника — двумерная сфера $\mathbb{S}^2\{0 \leq \xi \leq \pi,$

$\eta \bmod 2\pi\}$, фазовое пространство — касательное расслоение $T\mathbb{S}^2\{\dot{\xi}, \dot{\eta}; 0 \leq \xi \leq \pi, \eta \bmod 2\pi\}$ к ней.

При рассматриваемых модельных предположениях выписаны уравнения движения такого маятника, где, в том числе, доказано утверждение о том, что динамическая система, описывающая поведение такого маятника, траекторно топологически эквивалентна следующей динамической системе на касательном расслоении двумерной сферы (угол ξ измеряется «по потоку»):

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + b\dot{\xi} \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - \dot{\eta}^2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = 0, \\ \ddot{\eta} + b\dot{\eta} \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta} \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} = 0, \quad b > 0. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Система (1.4.1) почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -w_2 - b \sin \xi, \\ \dot{w}_2 = \sin \xi \cos \xi - w_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ \dot{w}_1 = w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \end{cases} \quad (1.4.2)$$

$$\dot{\eta} = w_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} \quad (1.4.3)$$

на касательном расслоении двумерной сферы.

Видно, что в системе четвертого порядка (1.4.2), (1.4.3) по причине цикличности переменной η выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.4.2), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии.

Ключевой первый интеграл системы (1.4.2), (1.4.3) (который может быть найден методом, аналогичным поиску первого интеграла (1.3.16) (см. выше)) имеет следующий вид:

$$\Theta_1(w_2, w_1; \xi) = \frac{w_2^2 + w_1^2 + bw_2 \sin \xi + \sin^2 \xi}{w_1 \sin \xi} = C_1 = \text{const}. \quad (1.4.4)$$

Все вышеизложенные замечания о гладкости первых интегралов применимы и к ключевому первому интегралу (1.4.4).

Замечание 1.5. Рассмотрим систему (1.4.2) с переменной диссипацией с нулевым средним [45, 78], становящейся консервативной при $b = 0$:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -w_2, \\ \dot{w}_2 = \sin \xi \cos \xi - w_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ \dot{w}_1 = w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_2^2 + w_1^2 + \sin^2 \xi = C_1^* = \text{const}, \quad (1.4.6)$$

$$w_1 \sin \xi = C_2^* = \text{const}. \quad (1.4.7)$$

Очевидно, что отношение двух интегралов (1.4.6), (1.4.7) также является первым интегралом системы (1.4.5). Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_2^2 + w_1^2 + bw_2 \sin \xi + \sin^2 \xi \quad (1.4.8)$$

и (1.4.7) по отдельности не является первым интегралом системы (1.4.2). Однако отношение функций (1.4.8), (1.4.7) является первым интегралом системы (1.4.2) при любом b .

Дополнительный первый интеграл системы (1.4.2) может быть найден методом, аналогичным поиску первого интеграла (1.3.26) (см. выше), выражается через элементарные функции и имеет следующий вид (ввиду громоздкости выпишем его структурный вид):

$$\Theta_2(w_2, w_1; \xi) = G\left(\sin \xi, \frac{w_2}{\sin \xi}, \frac{w_1}{\sin \xi}\right) = C_2 = \text{const}. \quad (1.4.9)$$

Функция G является трансцендентной в смысле комплексного анализа, т.е. имеет существенно особые точки, задаваемые системой

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad \sin \xi = 0. \quad (1.4.10)$$

Вне точек (1.4.10) фазового пространства рассматриваемый первый интеграл можно рассматривать как гладкую функцию.

Еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.4.3), можно представить в виде

$$\Theta_3(w_2, w_1; \xi, \eta) = -\eta \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{w_1^2 - w_2^2 - bw_2 \sin \xi - \sin^2 \xi}{w_1(2w_2 + b \sin \xi)} = C_3 = \text{const}. \quad (1.4.11)$$

Он обладает теми же свойствами, что и функция G . Данный первый интеграл может быть найден методом, аналогичным поиску первого интеграла (1.3.32) (см. выше).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.4.2), (1.4.3) имеет три первых интеграла, выражающихся соотношениями (1.4.4), (1.4.9), (1.4.11), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (т.е. имеющих существенно особые точки) и выражающихся через элементарные функции.

Можно также предъявить инвариантные дифференциальные формы для рассматриваемой системы динамических уравнений:

$$\rho_1(w_2, w_1; \xi) dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\xi, \quad \rho_2(w_2, w_1; \xi) dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\xi, \quad \rho_3(w_2, w_1; \xi, \eta) dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\xi \wedge d\eta,$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1(w_2, w_1; \xi) &= \exp \left\{ b \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \frac{u_2^2 + u_1^2 + bu_2 + 1}{u_1}, \\ \rho_2(w_2, w_1; \xi) &= \sin \xi \exp \left\{ \int \frac{(2b + u_2) du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\}, \\ \rho_3(w_2, w_1; \xi, \eta) &= \exp \left\{ b \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_3(w_2, w_1; \xi, \eta), \quad u_2 = \frac{w_2}{\sin \xi}, \quad u_1 = \frac{w_1}{\sin \xi}, \\ U_1(u_2) &= u_2^2 + bu_2 + 1, \quad U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)} \right\}, \quad C_1 \neq 0. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.

9. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
11. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
14. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
17. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
18. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. *Трофимов В. В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундамент. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
28. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbf{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
35. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.

36. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
40. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
43. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
45. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
50. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
51. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
52. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
53. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
54. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
55. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
56. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
57. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
58. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
59. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.

60. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
61. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — 507, № 1. — С. 86–92.
62. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 22–54.
63. *Шамолин М. В.* Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 55–94.
64. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 91–121.
65. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 88–107.
66. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 108–116.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 77–95.
68. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 96–105.
69. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 29–40.
70. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 41–74.
71. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 120–138.
72. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 139–148.
73. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n -мерных многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 213. — С. 96–109.
74. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n -мерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 214. — С. 82–106.
75. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 133–152.
76. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 509, № 1. — С. 69–76.
77. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
78. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.

79. *Shamolin M. V.* Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Proc. Int. Conf. “Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms” (DEMMCA 2021). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.
80. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — 13, № 1. — P. 49–52.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-07).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru

CONTENTS

On orders of n -term approximations of functions of many variables in the Lorentz space (<i>G. Akishev</i>)	3
Reconstruction of characteristic functions of quadratic functionals on trajectories of Gaussian stochastic processes (<i>Yu. P. Virchenko, A. S. Mazmanishvili</i>)	20
Exact solution of 3d Navier–Stokes equations for potential motions of an incompressible fluid (<i>A. V. Koptev</i>)	41
Problem of the equilibrium of a two-dimensional elastic body with two contacting thin rigid inclusions (<i>N. P. Lazarev, V. A. Kovtunencko</i>)	51
On several models of population dynamics with distributed delay (<i>T. L. Sabatulina</i>)	61
Completeness of exponential systems in functional spaces in terms of perimeter (<i>B. N. Khabibullin, E. G. Kudasheva, R. R. Muryasov</i>)	79
Optimization problems in ordinary first-order autonomous systems (<i>M. P. Eshov, N. N. Kodirov, T. K. Yuldashev</i>)	92
Tensor invariants of geodesic, potential and dissipative systems. I. Systems on tangents bundles of two-dimensional manifolds (<i>M. V. Shamolin</i>)	100

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНИТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антониевич,
д.ф.-м.-н. (ВИНИТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович