

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 225



Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 225 (2023)

Дата публикации 10 июля 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Научные редакторы выпуска

А. С. Бондарев

Е. Е. Букжалёв

Н. И. Гусева

М. В. Шамолин

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

**СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 225

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**



Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Начальная задача для интегро-дифференциального уравнения с разностными ядрами и неоднородностью в линейной части (<i>С. Н. Асхабов</i>)	3
Применение метода подобных операторов к некоторым классам разностных операторов (<i>А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова</i>)	14
Критерии устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений (<i>С. Г. Буланов</i>)	28
Формула Каца—Зигерта для осцилляторного случайного процесса (<i>Ю. П. Вирченко, А. С. Мазманишвили</i>)	38
Квазибезмонодромные системы дифференциальных уравнений первого порядка с параметром (<i>А. А. Голубков</i>)	59
Экстремальные пути на графах с одновременно меняющимися длительностями прохождения дуг (<i>Я. М. Ерусалимский, М. И. Осипов, В. А. Скороходов</i>)	69
Об основном уравнении для обратного оператора Штурма—Лиувилля с разрывным коэффициентом (<i>Д. Карахан, Х. Р. Мамедов, И. Ф. Хашимоглу</i>)	73
К вопросу о локальном расширении группы параллельных переносов четырехмерного пространства (<i>В. А. Кыров</i>)	87
О поиске оптимального по быстродействию граничного управления с помощью метода моментов для систем, описываемых диффузионно-волновым уравнением (<i>С. С. Постнов</i>)	108
О скорости убывания решений стационарного уравнения Шрёдингера с потенциалом, зависящим от одной переменной (<i>С. М. Ситник</i>)	115
О точной оценке количества действительных инвариантных прямых полиномиальных векторных полей степени n (<i>А. Д. Ушхо, В. Б. Тлячев, Д. С. Ушхо</i>)	123
Ступенчатые масштабирующие функции и система Крестенсона (<i>Ю. А. Фарков</i>)	134
Критерии полноты экспоненциальной системы в геометрических терминах ширины в направлении (<i>Б. Н. Хабибуллин, Е. Г. Кудашева, А. Е. Салимова</i>)	150



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 3–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-3-13

УДК 517.968

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

© 2023 г. С. Н. АСХАБОВ

Аннотация. Методом весовых метрик в конусе пространства непрерывных функций доказана глобальная теорема о существовании и единственности неотрицательного решения начальной задачи для интегро-дифференциального уравнения с разностными ядрами, степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части. Показано, что решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа и получена оценка скорости их сходимости.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, разностное ядро, степенная нелинейность.

INITIAL-VALUE PROBLEM FOR AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH DIFFERENCE KERNELS AND AN INHOMOGENEITY IN THE LINEAR PART

© 2023 S. N. ASKHABOV

ABSTRACT. A global theorem on the existence and uniqueness of a nonnegative solution of the initial-value problem for an integro-differential equation with difference kernels, power nonlinearity, and inhomogeneity in the linear part is proved by the method of weight metrics in the cone of the space of continuous functions. It is shown that the solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type. An estimate of the rate of their convergence is obtained.

Keywords and phrases: integro-differential equation, difference kernel, power nonlinearity.

AMS Subject Classification: 47G20, 47J05, 45D05

1. Введение. Решение многих задач гидроаэродинамики, теории упругости, популяционной генетики и других приводит к нелинейным интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям вольтерровского типа с разностными ядрами. При этом с теоретической и прикладной точек зрения особый интерес представляют неотрицательные решения таких уравнений (см., например, [1, 4]). В отличие от соответствующих линейных однородных уравнений нелинейные уравнения кроме тривиального решения могут иметь и нетривиальные решения, и в этом состоит принципиальное отличие нелинейных однородных уравнений от соответствующих линейных уравнений.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FECS-2020-0001).

В данной работе рассматривается начальная задача вида

$$u^\alpha(x) = \int_0^x h(x-t)u(t) dt + \int_0^x k(x-t)u'(t) dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad (2)$$

где ядра $h(x)$, $k(x)$ и неоднородность $f(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$h \in C[0, \infty), \quad h(x) \text{ не убывает на } [0, \infty), \quad h(0) = 0, \quad (3)$$

$$k \in C^1[0, \infty), \quad k'(x) \text{ не убывает на } [0, \infty), \quad k(0) = 0, \quad k'(0) > 0, \quad (4)$$

$$f \in C^1[0, \infty), \quad f(x) \text{ не убывает на } [0, \infty), \quad f(0) = 0. \quad (5)$$

Решения начальной задачи (1)–(2) разыскиваются в классе

$$Q_0^1 = \left\{ u(x) : u \in C[0, \infty) \cap C^1(0, \infty), u(0) = 0, u(x) > 0 \text{ при } x > 0 \right\}.$$

Наряду с задачей (1)–(2) рассматривается тесно связанное с ней интегральное уравнение типа свертки

$$u^\alpha(x) = \int_0^x H(x-t)u(t) dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad (6)$$

где $H(x) = h(x) + k'(x)$.

Из условий (3) и (4) вытекает, что ядро $H(x)$ уравнения (6) удовлетворяет условию

$$H \in C[0, \infty), \quad H(x) \text{ не убывает на } [0, \infty), \quad H(0) > 0. \quad (7)$$

Решения уравнения (6) разыскиваются в классе

$$Q_0 = \left\{ u(x) : u \in C[0, \infty), u(0) = 0, u(x) > 0 \text{ при } x > 0 \right\}.$$

Уравнения вида (6) возникают в теории инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду (см. [9]), при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом (см. [7, 11]), при решении задачи о нагревании полубесконечного тела при нелинейном теплопередающем процессе, в моделях популяционной генетики и других (подробнее см. в [1, 6, 10]). В частности, к уравнению вида (6) при $\alpha = 2$ сводится известное уравнение Буссинеска. Важно отметить, что в связи с указанными и другими приложениями особый интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения интегрального уравнения (6), т.е. решения принадлежащие классу Q_0 .

На основе полученных точных нижней и верхней априорных оценок решения уравнения (6) мы строим весовое полное метрическое пространство P_b и, применяя аналог метода Белицкого (см., например, [5, гл. 3, п. 3.1.3], доказываем глобальную теорему о существовании и единственности решения уравнения (6) как в пространстве P_b , так и во всем классе непрерывных положительных при $x > 0$ функций. Показано, что решение уравнения (6) может быть найдено в P_b методом последовательных приближений пикаровского типа. Для последовательных приближений получены оценки скорости их сходимости к точному решению в терминах весовой метрики пространства P_b . Установлено, что любое решение интегрального уравнения (6) из конуса Q_0 является решением задачи (1)–(2) в конусе Q_0^1 и обратно, любое решение задачи (1)–(2) является решением интегрального уравнения (6). Тем самым доказана глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения решения задачи (1)–(2) как в пространстве P_b , так и во всем классе непрерывных положительных при $x > 0$ функций. Приведены также простые примеры, иллюстрирующие основные результаты.

2. Свойства неотрицательных решений.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (5) и (7). Если $u \in Q_0$ является решением интегрального уравнения (6), то функция $u(x)$ не убывает и непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$, т.е. $u \in C^1(0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $u \in Q_0$ является решением уравнения (6) и $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ — любые числа, $x_1 < x_2$. Так как $H(x)$ и $f(x)$ не убывают на $[0, \infty)$, то

$$u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) = \int_0^{x_1} [H(x_2 - t) - H(x_1 - t)]u(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} H(x_2 - t)u(t)dt + f(x_2) - f(x_1) \geq 0.$$

Значит, $u(x_2) \geq u(x_1)$ при $x_2 > x_1$, т.е. $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$.

Докажем теперь, что решение $u(x)$ есть непрерывно дифференцируемая на $(0, \infty)$ функция. Так как по условию $H(x)$ не убывает на $[0, \infty)$, то по теореме Лебега (см., например, [1, теорема 17.7]) почти всюду на $[0, \infty)$ существует производная $H'(x)$, которая, по теореме об интегрировании производной (см. [1, теорема 17.8]), локально суммируема. Следовательно, правая часть тождества (6) дифференцируема, причем в силу свойства коммутативности свертки (см. [1, §17])

$$\begin{aligned} \left(\int_0^x H(x-t)u(t)dt + f(x) \right)' &= \int_0^x H'(x-t)u(t)dt + H(0)u(x) + f'(x) = \\ &= \int_0^x H'(t)u(x-t)dt + H(0)u(x) + f'(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку функция $u(x)$ не убывает, функция $f'(x)$ непрерывна, а функция $H'(x)$ локально суммируема на $[0, \infty)$ то, в силу леммы о непрерывности свертки (см. [3, лемма 1], [8, лемма 1]), производная (8) правой части тождества (6) непрерывна на $[0, \infty)$. Но тогда существует и непрерывна производная левой части тождества (6), что влечет за собой существование и непрерывность первой производной $u'(x)$ при $x > 0$, так как

$$u'(x) = \alpha^{-1}u^{1-\alpha}(x) \left[\int_0^x H'(t)u(x-t)dt + H(0)u(x) + f'(x) \right]. \quad \square$$

Следующая лемма устанавливает связь между задачей (1)–(2) и интегральным уравнением (6).

Лемма 2. Пусть выполнены условия (3), (4) и (5). Если функция $u \in Q_0^1$ является решением задачи (1)–(2), то $u \in Q_0$ и u является решением интегрального уравнения (6). Обратно, если уравнение (6) имеет решение $u \in Q_0$, то $u \in Q_0^1$ и u является решением задачи (1)–(2).

Доказательство. Пусть $u \in Q_0^1$ — решение задачи (1)–(2). Тогда $u \in Q_0$. Так как $k(0) = 0$ и $u(0) = 0$, интегрируя по частям тождество (1) и учитывая, что $H(x) = h(x) + k'(x)$, имеем

$$\begin{aligned} u^\alpha(x) &= \int_0^x h(x-t)u(t)dt + \int_0^x k(x-t)du(t) + f(x) = \\ &= \int_0^x h(x-t)u(t)dt + \int_0^x u(t)k'(x-t)dt + f(x) = \int_0^x H(x-t)u(t)dt + f(x), \end{aligned} \quad (9)$$

т.е. $u(x)$ является решением уравнения (6) в конусе Q_0 .

Обратно, пусть $u \in Q_0$ является решением уравнения (6). Тогда, согласно лемме 1, $u \in C^1(0, \infty)$ и, следовательно, $u \in Q_0^1$. Поэтому, используя свойство коммутативности свертки, формулу интегрирования по частям и равенства $k(0) = u(0) = 0$, $H(x) = h(x) + k'(x)$, из тождества (6)

имеем

$$\begin{aligned} u^\alpha(x) &= \int_0^x H(t)u(x-t) dt + f(x) = \int_0^x h(t)u(x-t) dt + \int_0^x k(t)u'(x-t) dt + f(x) = \\ &= \int_0^x h(x-t)u(t) dt + \int_0^x k(x-t)u'(t) dt + f(x), \end{aligned}$$

т.е. $u(x)$ является решением задачи (1)–(2) в конусе Q_0^1 . \square

Из леммы 2 вытекает, что для доказательства существования и единственности в классе Q_0^1 решения задачи (1)–(2) достаточно доказать существование и единственность в классе Q_0 решения интегрального уравнения (6).

Доказательства основных результатов данной статьи основаны на априорных оценках снизу и сверху решений уравнения (6). При доказательстве верхней априорной оценки решения уравнения (6) нам понадобится следующее интегральное неравенство Чебышева (см., например, [1, лемма 17.1]):

$$\int_0^x v(x-t)w(t) dt \leq \int_0^x v(t)w(t) dt, \quad x > 0, \quad (10)$$

справедливое для любых неубывающих на $[0, \infty)$ функций $v(x)$ и $w(x)$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (5) и (7). Если $u \in Q_0$ является решением интегрального уравнения (6), то $u(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left[\frac{\alpha-1}{\alpha} H(0) \cdot x \right]^{1/(\alpha-1)} \leq u(x) \leq \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x H(t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right]^{1/(\alpha-1)}. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $u \in Q_0$ — решение уравнения (6). Так как при $x = 0$ неравенства (11) обращаются в очевидные равенства, то будем считать далее, что $x > 0$.

Докажем сначала первое неравенство из (11). Так как $f(x) \geq 0$ и $H(x)$ не убывает на $[0, \infty)$, то из тождества (6), имеем

$$u^\alpha(x) \geq \int_0^x H(x-t)u(t) dt \geq H(0) \cdot \int_0^x u(t) dt \quad \forall x > 0,$$

или

$$u(x) \geq \left[H(0) \int_0^x u(t) dt \right]^{1/\alpha} \quad \forall x > 0, \quad (12)$$

или, что то же самое,

$$\left[H(0) \int_0^t u(s) ds \right]^{-1/\alpha} H(0)u(t) \geq H(0) \quad \forall t > 0.$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x , получим

$$\left[H(0) \int_0^x u(t) dt \right]^{(\alpha-1)/\alpha} \geq \frac{\alpha-1}{\alpha} H(0) \cdot x \quad \forall x > 0,$$

откуда

$$\left[H(0) \int_0^x u(t) dt \right]^{1/\alpha} \geq \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} H(0) \cdot x \right]^{1/(\alpha-1)}, \quad \forall x > 0. \quad (13)$$

Таким образом, первое неравенство из (11) непосредственно вытекает из неравенств (12) и (13).

Докажем теперь второе неравенство из (11). Так как, в силу условия (7) и леммы 1, функции $H(x)$ и $u(x)$ не убывают на $[0, \infty)$, то, используя неравенство Чебышева (10), из тождества (6) получаем

$$u^\alpha(x) = \int_0^x H(x-t)u(t) dt + f(x) \leq \int_0^x H(t)u(t) dt + f(x) \quad \forall x > 0,$$

или

$$u(x) \leq \left[\int_0^x H(t)u(t) dt + f(x) \right]^{1/\alpha} \quad \forall x > 0, \quad (14)$$

или

$$H(t)u(t) + f'(t) \leq H(t) \left[\int_0^t H(s)u(s) ds + f(t) \right]^{1/\alpha} + f'(t), \quad \forall t > 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \left[\int_0^t H(s)u(s) ds + f(t) \right]^{-1/\alpha} [H(t)u(t) + f'(t)] &\leq \\ &\leq H(t) + f'(t) \left[\int_0^t H(s)u(s) ds + f(t) \right]^{-1/\alpha} = H(t) + I(t), \quad \forall t > 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$I(t) \equiv f'(t) \left[\int_0^t H(s)u(s) ds + f(t) \right]^{-1/\alpha}.$$

Докажем, что

$$\int_0^x I(t) dt \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \quad \text{для любого } x > 0. \quad (16)$$

В силу условия (5) возможны только три случая: либо $f(x) \equiv 0$ при $x \in [0, \infty)$, либо существует такое число $x_0 > 0$, что $f(x) \equiv 0$ при $x \in [0, x_0]$ и $f(x) > 0$ при $x > x_0$, либо $f(x) > 0$ при всех $x > 0$.

Если $f(x) \equiv 0$ при $x \in [0, \infty)$, то неравенство (16) очевидно и обращается в тождество, так как при $x > 0$ выполняются соотношения $H(x) > 0$, $u(x) > 0$ и $f'(x) \equiv 0$.

Если же существует такое $x_0 > 0$, что $f(x) \equiv 0$ при $x \in [0, x_0]$ и $f(x) > 0$ при $x > x_0$, то

$$\int_0^x I(t) dt = 0 \quad \text{при любом } x \in [0, x_0]$$

и, значит, неравенство (16) выполняется при $x \in [0, x_0]$, обращаясь в тождество, а при $x > x_0$, с учетом того, что $f(x_0) = f(0) = 0$ и что функция $f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)$ не убывает, имеем

$$\int_0^x I(t) dt = \int_{x_0}^x I(t) dt \leq \int_{x_0}^x f'(t) f^{-1/\alpha}(t) dt = \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_{x_0}^x [f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)]' dt \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)$$

в силу [1, теорема 17.8], т.е. неравенство (16) выполняется и при любом $x > x_0$.

Если, наконец, $f(x) > 0$ при всех $x > 0$, то аналогично получаем

$$\int_0^x I(t) dt \leq \int_0^x f'(t) f^{-1/\alpha}(t) dt = \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_0^x [f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)]' dt \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x).$$

Итак, неравенство (16) доказано во всех трёх случаях.

Интегрируя неравенство (15) в пределах от 0 до x , с учётом неравенства (16) имеем

$$\left[\int_0^x H(s)u(s) ds + f(x) \right]^{(\alpha-1)/\alpha} \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \left[\int_0^x H(t) dt + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right] \quad \forall x > 0,$$

откуда

$$\left[\int_0^x H(t)u(t) dt + f(x) \right]^{1/\alpha} \leq \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x H(t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right]^{1/(\alpha-1)} \quad \forall x > 0. \quad (17)$$

Итак, второе неравенство из (11) непосредственно вытекает из неравенств (14) и (17). \square

Из леммы 3 следует, что решения интегрального уравнения (6) естественно разыскивать в классе

$$P = \left\{ u(x) : u \in C[0, \infty), F(x) \leq u(x) \leq G(x) \right\},$$

где

$$F(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} H(0) \cdot x \right]^{1/(\alpha-1)}, \quad G(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \int_0^x H(t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right]^{1/(\alpha-1)}, \quad (18)$$

а функции $H(x)$, $f(x)$ удовлетворяют условиям (7) и (5), соответственно.

В силу леммы 2, утверждения леммы 3 справедливы и для задачи (1)–(6).

Пример 1. При $\alpha = 2$, $h(x) = 0$, $k(x) = 3x$, $f(x) = x^2$ задача (1)–(6) и уравнение (6) имеют одно и то же решение $u(x) = 2x$, при этом априорные оценки (11) принимают вид: $1,5x \leq 2x \leq 2,5x$.

3. Теоремы существования и единственности. Рассмотрим нелинейный интегральный оператор свертки T :

$$(Tu)(x) = \left(\int_0^x H(x-t)u(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha > 1.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5) и (7). Тогда класс P инвариантен относительно нелинейного оператора T , т.е. $T : P \rightarrow P$.

Доказательство. Пусть $u \in P$. Нужно доказать, что тогда и $Tu \in P$, т.е. $Tu \in C[0, \infty)$ и $F(x) \leq (Tu)(x) \leq G(x)$.

1. Так как $H, u, f \in C[0, \infty)$ и $\alpha > 1$, то очевидно, что $Tu \in C[0, \infty)$.
2. Покажем, что $(Tu)(x) \geq F(x)$. Так как $u(x) \geq F(x)$, то

$$[(Tu)(x)]^\alpha \geq \int_0^x H(x-t)u(t) dt \geq \int_0^x H(x-t)F(t) dt \geq H(0) \int_0^x F(t) dt = [F(x)]^\alpha,$$

т.е. $(Tu)(x) \geq F(x)$.

3. Покажем, наконец, что $(Tu)(x) \leq G(x)$. Так как $u(x) \leq G(x)$ и функции $H(x)$, $G(x)$ не убывают на $[0, \infty)$, то в силу неравенства Чебышева (10) получаем

$$\begin{aligned} [(Tu)(x)]^\alpha &= \int_0^x H(x-t) u(t) dt + f(x) \leq \int_0^x H(x-t) G(t) dt + f(x) \leq \\ &\leq \int_0^x H(t) G(t) dt + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x G(t) \left[H(t) + \frac{f'(t)}{G(t)} \right] dt \leq \\ &\leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x \left[\int_0^t H(s) ds + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(t) \right]^{1/(\alpha-1)} \left[H(t) + f^{-1/\alpha}(t) f'(t) \right] dt = \\ &= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha-1}{\alpha} \left[\int_0^x H(t) dt + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right]^{\alpha/(\alpha-1)} = [G(x)]^\alpha, \end{aligned}$$

т.е. $(Tu)(x) \leq G(x)$, что и требовалось доказать. \square

Исследование интегрального уравнения (6) будет основано на методе весовых метрик, и для его применения нам нужно будет построить полное метрическое пространство. Введем в связи с этим следующий класс функций:

$$P_b = \left\{ u(x) : u \in C[0, b], F(x) \leq u(x) \leq G(x) \right\},$$

где функции $F(x)$ и $G(x)$ определены в (18), а $b > 0$ — произвольное число.

В силу вольтерровости оператора T из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Если выполнены условия (5) и (7), то класс P_b инвариантен относительно интегрального оператора T .*

Далее будем предполагать, что неоднородность $f(x)$ наряду с условием (5) удовлетворяет дополнительному условию:

$$C = \sup_{0 < x \leq b} \frac{f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)}{x} < \infty. \quad (19)$$

Заметим, что функция $f(x) = x^2$, рассмотренная в примере 1, в котором $\alpha = 2$, удовлетворяет условию (19) и при этом $C = 1$.

Введем во множестве функций P_b расстояние по формуле

$$\rho_b(u_1, u_2) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u_1(x) - u_2(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}}, \quad \beta > 0. \quad (20)$$

Поскольку $e^{\beta x} \geq 1$ и $|u_1(x) - u_2(x)| \leq G(x) - F(x)$ для любых $u_1, u_2 \in P_b$, то с учетом неравенства

$$k(x) = \int_0^x H(t) dt \leq H(x) \cdot x \quad \forall x \in (0, b]$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{|u_1(x) - u_2(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}} &\leq \frac{G(x) - F(x)}{x^{1/(\alpha-1)}} \leq \\ &\leq \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot H(b) + \frac{f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)}{x} \right]^{1/(\alpha-1)} - \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot H(0) \right]^{1/(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу условия (19), для всех $u_1, u_2 \in P_b$

$$\rho_b(u_1, u_2) \leq \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot H(b) + C \right]^{1/(\alpha-1)} - \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot H(0) \right]^{1/(\alpha-1)} < \infty,$$

т.е. расстояние $\rho_b(u_1, u_2)$ определено корректно.

Лемма 4. *Множество P_b с метрикой ρ_b образует полное метрическое пространство.*

Доказательство. Выполнимость аксиом метрики очевидна. Докажем полноту метрического пространства P_b . Пусть $\{u_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность из P_b . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon) > 0$, что при всех $m, n \geq N$ выполняется неравенство $\rho_b(u_m, u_n) < \varepsilon$, т.е.

$$\frac{|u_m(x) - u_n(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}} < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N, q \quad \forall x \in (0, b]. \quad (21)$$

Так как $x^{1/(\alpha-1)} \cdot e^{\beta x} \leq b^{1/(\alpha-1)} \cdot e^{\beta b} \equiv M$, то

$$\frac{|u_m(x) - u_n(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \geq \frac{1}{M} \cdot |u_m(x) - u_n(x)|.$$

Поэтому из (21), имеем

$$|u_m(x) - u_n(x)| \leq M \cdot \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N, \quad \forall x \in [0, b]$$

(здесь учли, что $u_m(0) = u_n(0) = 0$, поскольку $F(0) = G(0) = 0$), т.е. $\{u_n\}$ является фундаментальной последовательностью в $C[0, b]$. В силу полноты метрического пространства $C[0, b]$ существует такая функция $u \in C[0, b]$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x). \quad (22)$$

Покажем, что $u \in P_b$. Так как $\{u_n\} \in P_b$, то для любых n и $x \in [0, b]$ имеем

$$F(x) \equiv \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} H(0) x \right]^{1/(\alpha-1)} \leq u_n(x) \leq \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x H(t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right]^{1/(\alpha-1)} \equiv G(x).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, с учетом равенства (22) получаем $F(x) \leq u(x) \leq G(x)$, т.е. $u \in P_b$.

Осталось доказать сходимость последовательности $\{u_n(x)\}$ к $u(x)$ по метрике ρ_b . Переходя в неравенстве (21) к пределу при $m \rightarrow \infty$, имеем

$$\frac{|u(x) - u_n(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \quad x \in (0, b],$$

т.е. $\rho_b(u_n, u) < \varepsilon$ для любого $n \geq N$, что и требовалось. \square

Итак, выше мы доказали, что если во множестве функций P_b ввести метрику (20), то класс P_b превращается в полное метрическое пространство. Кроме того, мы показали (см. следствие 1), что нелинейный оператор свертки T действует из P_b в P_b .

Выберем теперь достаточно малое число $c \in (0, b)$ такое, что выполняется неравенство

$$H(c) < \alpha \cdot H(0). \quad (23)$$

Очевидно, что такое число c всегда существует, так как $H(0) > 0$, $H(x)$ непрерывна и $\alpha > 1$. Положим

$$\beta = \frac{1}{H(0)} \sup_{c \leq x \leq b} \frac{H(x) - H(0)}{x}. \quad (24)$$

Справедлива следующая лемма (ср. [8]).

Лемма 5. *Пусть ядро $H(x)$ удовлетворяет условию (7). Тогда для любого $x \in [0, b]$ справедливо неравенство*

$$H(x) \cdot e^{-\beta x} \leq H(c), \quad (25)$$

где числа c и β определяются из условия (23) и формулы (24) соответственно.

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая.

1. Пусть $0 \leq x \leq c$. Учитывая, что $H(x)$ не убывает и $\beta > 0$, имеем $H(x)e^{-\beta x} \leq H(x) \leq H(c)$, что и требовалось.

2. В случае $c \leq x \leq b$ имеем

$$H(x) = H(0) + H(0) \cdot x \cdot \frac{1}{H(0)} \cdot \frac{H(x) - H(0)}{x} \leq H(0) \cdot [1 + x \cdot \beta] \leq H(0) \cdot e^{\beta x}.$$

Следовательно, $H(x) \leq H(0)e^{\beta x} \leq H(c)e^{\beta x}$, откуда получаем, что $H(x)e^{-\beta x} \leq H(c)$ и для любого $x \in [c, b]$. \square

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5), (7) и (19). Тогда оператор $T : P_b \rightarrow P_b$ является сжимающим, при этом неравенство

$$\rho_b(Tu_2, Tu_1) \leq \frac{H(c)}{\alpha \cdot H(0)} \rho_b(u_2, u_1), \quad (26)$$

выполняется для всех $u_1, u_2 \in P_b$, где число c определяется из условия (23).

Доказательство. Тот факт, что оператор T действует из P_b в P_b , вытекает из следствия 1. Докажем неравенство (26), т.е. факт, что оператор T , в силу неравенства (23), является сжимающим. Пусть $u_1, u_2 \in P_b$ и $x \in (0, b]$. По теореме Лагранжа, для любых $z_1, z_2 > 0$ имеем

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha} \Theta^{1/\alpha-1} (z_1 - z_2),$$

где Θ лежит между z_1 и z_2 . Поэтому, если $z_1 \geq z_0$ и $z_2 \geq z_0$, где $z_0 \geq 0$, то $\Theta > z_0$ и, значит,

$$\left| z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} \right| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{|z_1 - z_2|}{\{\Theta\}^{(\alpha-1)/\alpha}}.$$

Используя это неравенство и неравенства

$$(Tu_1)(x) \geq F(x), \quad (Tu_2)(x) \geq F(x) \quad \forall x \in (0, b],$$

имеем

$$\begin{aligned} & \left| (Tu_2)(x) - (Tu_1)(x) \right| = \\ & = \left| \left(\int_0^x H(x-t)u_2(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha} - \left(\int_0^x H(x-t)u_1(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha} \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\{F^\alpha(x)\}^{(\alpha-1)/\alpha}} \left| \int_0^x H(x-t)u_2(t) dt - \int_0^x H(x-t)u_1(t) dt \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot H(0) \cdot x} \int_0^x H(x-t) \cdot |u_2(t) - u_1(t)| dt. \end{aligned}$$

Итак,

$$\left| (Tu_2)(x) - (Tu_1)(x) \right| \leq \frac{1}{(\alpha-1)H(0) \cdot x} \int_0^x H(x-t) \cdot |u_2(t) - u_1(t)| dt. \quad (27)$$

Так как

$$\left| u_2(x) - u_1(x) \right| = x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x} \frac{|u_2(x) - u_1(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \leq x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x} \cdot \rho_b(u_2, u_1),$$

то из (27), с учетом леммы 2, получим

$$\begin{aligned} |(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)| &\leq \frac{1}{(\alpha - 1)H(0) \cdot x} \cdot \rho_b(u_2, u_1) \int_0^x H(x-t)t^{1/(\alpha-1)}e^{\beta t} dt = \\ &= \frac{1}{(\alpha - 1)H(0) \cdot x} \cdot \rho_b(u_2, u_1)e^{\beta x} \int_0^x H(x-t)e^{-\beta(x-t)}t^{1/(\alpha-1)} dt \leq \\ &\leq \frac{H(c)}{(\alpha - 1) \cdot H(0) \cdot x} \cdot e^{\beta x} \cdot \rho_b(u_2, u_1) \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot x^{\alpha/(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} \cdot e^{\beta x}} \leq \frac{H(c)}{\alpha \cdot H(0)} \cdot \rho_b(u_2, u_1) \quad \forall x \in (0, b],$$

что равносильно неравенству (26). Поскольку, в силу неравенства (23), коэффициент в неравенстве (26) удовлетворяет условию $H(c)/[\alpha H(0)] < 1$, то оператор T является сжимающим. \square

Теорема 3. *Если выполнены условия (5), (7) и (19), то интегральное уравнение (6) имеет в Q_0 (и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (20) при любом $b < \infty$.*

Доказательство. Запишем уравнение (6) в операторном виде: $u = Tu$. Из леммы 1 и теоремы 2 следует, что выполнены все требования принципа сжимающих отображений, из которого непосредственно вытекает, что уравнение (6) имеет единственное решение в пространстве P_b при любом $b > 0$ и это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (20) при любом $b < \infty$.

Осталось показать, что уравнение (6) имеет единственное решение во всем классе Q_0 (ср. [2]). Положим $P_\infty = \bigcup_{b>0} P_b$, т.е. P_∞ есть множество функций, определенных на полуоси $[0, \infty)$, сужения которых на отрезок $[0, b]$ принадлежат P_b . Так как уравнение (6) имеет единственное решение в P_b при любом $b > 0$ и коэффициент сжатия в (26) не зависит от b , то уравнение (6) имеет единственное решение $u^*(x)$ в P_∞ . Поскольку всякое решение уравнения (6) из Q_0 удовлетворяет оценкам (11), то это решение $u^*(x)$ будет единственным решением уравнения (6) и в Q_0 . \square

Таким образом, на основании теоремы ??, используя связь между решениями уравнения (6) и задачи (1)–(6), установленную в лемме 2, мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 4. *Если выполнены условия (3), (4), (5) и (19), то начальная задача (1)–(2) имеет в Q_0^1 (и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение удовлетворяет неравенствам (11), и его можно найти в полном метрическом пространстве P_b методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике*

$$\rho_b(u_1, u_2) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u_1(x) - u_2(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} \cdot e^{\beta x}}, \quad \text{где } \beta = \frac{1}{H(0)} \cdot \sup_{c \leq x \leq b} \frac{H(x) - H(0)}{x},$$

а число c определяется из условия (23). При этом справедлива следующая оценка погрешности:

$$\rho_b(u_n, u^*) \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot \rho_b(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $q = H(c)/(\alpha \cdot H(0)) < 1$, а $u_0(x) \in P_b$ – начальное приближение (произвольная функция).

Пример 2. Начальная задача

$$u^\alpha(x) = p \int_0^x (x-t)u'(t) dt, \quad \alpha > 1, \quad p > 0, \quad x \in [0, \infty), \quad u(0) = 0,$$

имеет в классе Q_0^1 единственное решение

$$u(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot p \cdot x \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

В данном случае ядро $k(x) = p \cdot x$, $p > 0$, удовлетворяет всем требованиям условия (4).

Пример 2 показывает, что нелинейные однородные уравнения вольтерровского типа, в отличие от линейных уравнений, кроме тривиального решения могут иметь и не тривиальные решения.

В тех случаях, когда условия теоремы 4 не выполняются, интегро-дифференциальное уравнение (1) при $f(x) \equiv 0$ может либо не иметь нетривиальных решений, либо иметь континуум нетривиальных решений. Например, если $\alpha = 1$, $h(x) = 0$ и $k(x) = x$, то уравнение (1) при $f(x) \equiv 0$ не имеет в классе Q_0^1 решений, а если $\alpha = 1$, $h(x) = 0$ и $k(x) = 1$, то уравнение (1) при $f(x) \equiv 0$ имеет в классе Q_0^1 континуум решений $u(x) = A \cdot x^q$, где A и q — любые положительные числа.

В заключение отметим, что, следуя работе [12], можно рассмотреть также вопрос о численном решении начальной задачи (1)–(2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки. — М.: Физматлит, 2009.
2. Асхабов С. Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Диффер. уравн. — 2020. — 56, № 6. — С. 786–795.
3. Асхабов С. Н. Система интегро-дифференциальных уравнений типа свёртки со степенной нелинейностью // Сиб. ж. индустр. мат. — 2021. — 24, № 3. — С. 5–18.
4. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962.
5. Эдвардс Р. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969.
6. Brunner H. Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.
7. Keller J. J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys. — 1981. — 32, № 2. — P. 170–181.
8. Okrasinski W. On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation // Ann. Polon. Math. — 1979. — 36, № 1. — P. 61–72.
9. Okrasinski W. On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation // Ann. Polon. Math. — 1980. — 37, № 3. — P. 223–229.
10. Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. — 1989. — 4, № 2. — P. 51–74.
11. Schneider W. R. The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type // Z. Angew. Math. Phys. — 1982. — 33, № 1. — P. 140–142.
12. Vabishchevich P. N. Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integro-differential equations with difference kernels // Appl. Numer. Math. — 2022. — 174, № 4. — P. 177–190.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FECS-2020-0001).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Асхабов Султан Нажмуудинович

Чеченский государственный педагогический университет, Грозный;

Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова, Грозный

E-mail: askhabov@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 14–27
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-14-27

УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ К НЕКОТОРЫМ КЛАССАМ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2023 г. А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО, Н. Б. УСКОВА

Аннотация. Рассмотрены два разностных оператора второго порядка, заданных своими бесконечными матрицами: оператор с обычным потенциалом и оператор с потенциалом с инволюцией. Исследование спектральных свойств этих операторов при различных условиях проводилось методом подобных операторов. Получены результаты, касающиеся асимптотики собственных значений в случае потенциала с инволюцией.

Ключевые слова: метод подобных операторов, собственное значение, спектральный проектор, бинвариантное подпространство.

APPLICATION OF THE METHOD OF SIMILAR OPERATORS TO SOME CLASSES OF DIFFERENCE OPERATORS

© 2023 A. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO, N. B. USKOVA

ABSTRACT. Two second-order difference operators defined by their infinite matrices are considered: an operator with an ordinary potential and an operator with an involutive potential. The spectral properties of these operators under various conditions were performed by the method of similar operators. Results concerning the asymptotics of the eigenvalues in the case of a potential with involution are obtained.

Keywords and phrases: method of similar operators, eigenvalue, spectral projector, bi-invariant subspace.

AMS Subject Classification: 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. В работе рассматриваются разностные операторы второго порядка, соответствующие оператору Штурма–Лиувилля при дискретизации. Данная статья носит полубзорный характер. В ней рассматривается как случай обычного потенциала, так и случай потенциала с инволюцией. Методом исследования служит метод подобных операторов. При этом акцент делается именно на отличиях в применении метода в зависимости от типа растущего потенциала. Заметим, что трехдиагональные матрицы n -го порядка, соответствующие разностным уравнениям Штурма–Лиувилля, рассматривались в работе [23]; там же с использованием вариационного принципа получены двусторонние оценки наименьшего собственного значения матриц указанного типа. Полученные в [23] результаты и методы исследования получили свое дальнейшее развитие в [24, 30]. В работе [24], являющейся в некотором роде продолжением [23], упор делается на коэрцитивных оценках решений разностных уравнений, а в [30] произведено обобщение и развитие метода из [23] и его применение к разностным теоремам вложения. В настоящей работе рассматриваются бесконечные аналоги разностных матриц из [23] и соответствующих операторов с точки зрения их спектральных свойств.

Трехдиагональные бесконечные матрицы с различными условиями на матричные элементы как числовые, так и блочные (операторные) широко используются в прикладных задачах. При

этом элементы, стоящие на диагоналях, параллельных главной, не обязаны быть одинаковыми. Обычно рассматриваются несколько иные классы трехдиагональных бесконечных матриц таких, как в [5, 40]. Отметим отдельно работу [5], в которой содержится качественный обзор результатов и библиографии по спектральным свойствам этих матриц. Существуют различные способы оценки собственных значений рассматриваемых в [5] матриц. Одним из которых является их приближение собственными значениями некоторых конечных усеченных матриц (см. [38, 43]). В работе [5] оценки собственных значений производились с использованием метода подобных операторов с предварительным преобразованием подобия. Мы также будем использовать метод подобных операторов, но другую, отличную от [5] его модификацию, потому что в нашем случае элементы матрицы не удовлетворяют условиям из [5]. Отметим также работу [10] и имеющийся в ней обзор. В [10] рассматривались трехдиагональные бесконечные матрицы, у которых по диагоналям, параллельным главной, стоят последовательности, суммируемые с квадратом, а элементы главной диагонали «не разбегаются». Спектральные свойства таких матриц также исследовались с помощью метода подобных операторов, но при этом использовалась модификация метода подобных операторов обычно применяемая для дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и Дирака. Трехдиагональные матрицы из [10] дают хороший модельный пример указанной модификации, так как для него можно выписать и просчитать в явном виде весовую последовательность, используемую в методе.

В настоящей работе сначала проведен обзор результатов, касающихся спектральных свойств бесконечных трехдиагональных матриц, таких, как матрицы из [23] в случае четного потенциала и потенциала общего вида из [8, 9, 11, 39]. Затем приводятся новые результаты, касающиеся асимптотики собственных значений в случае потенциала с инволюцией. Упор делается на отличиях в применении метода исследования в зависимости от потенциала. Также приведены результаты, касающиеся биинварантных подпространств.

2. Постановка задачи. Перейдем к постановке задачи. Как обычно, через \mathbb{Z} обозначено множество целых чисел, \mathbb{C} — поле комплексных чисел, а через $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$ — гильбертово пространство последовательностей $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ с нормой, индуцированной стандартным скалярным произведением:

$$(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \bar{y}_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2.$$

В пространстве l_2 стандартный базис состоит из таких векторов $\{l_i, i \in \mathbb{Z}\}$, что $l_i(n) = \delta_{in}, i, n \in \mathbb{Z}$. Согласно [23] в пространстве l_2 рассматривается разностный оператор $\mathcal{E}_0 : l_2 \rightarrow l_2$, заданный своей (бесконечной) трехдиагональной матрицей в базисе $\{e_i, i \in \mathbb{Z}\}$:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & a(-2) + 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a(-1) + 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a(0) + 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a(1) + 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a(2) + 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Отметим, что рассматриваемый класс матриц соответствует разностным уравнениям Штурма—Лиувилля. Условия на последовательность $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ будут приведены ниже. Кроме матрицы \mathcal{A}_1 также введем в рассмотрение матрицу \mathcal{A}_2 вида

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & a(-2) & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & a(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a(0) + 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(1) & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & a(2) & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Матрицы типа матрицы \mathcal{A}_2 соответствуют разностным уравнением Штурма—Лиувилля с потенциалом с инволюцией.

Отметим, что в настоящее время дифференциальные операторы первого и второго порядка с инволюцией активно изучаются (см., например, [6, 7, 17, 33, 34, 36, 42]). Дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией также исследовались методом подобных операторов (см. [33, 34, 36]), но применялась другая схема метода подобных операторов из [35], в основе которой лежит возможность с помощью предварительного преобразования подобия перевести исследуемый оператор к оператору с возмущением из весового пространства операторов Гильберта—Шмидта. В рассматриваемом случае такая схема не работает.

Пусть матрица \mathcal{A}_1 определяет в l_2 оператор $A_1 : D(A_1) \subset l_2 \rightarrow l_2$ с областью определения

$$D(A_1) = \left\{ x \in l_2 : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(n)x(n)|^2 < \infty \right\}$$

а матрица \mathcal{A}_2 естественным образом определяет оператор $A_2 : D(A_2) \subset l_2 \rightarrow l_2$, где

$$D(A_2) = \left\{ x \in l_2 : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(-n)x(n)|^2 < \infty \right\}.$$

Для оператора A_1 введем две группы условий на последовательность $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$(I) \ a(i) \neq a(j) \text{ при } i \neq j, \ i, j \in \mathbb{Z}; \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} |a(n)| \rightarrow \infty;$$

$$0 < d_i = \inf_{i \neq j} |a(i) - a(j)| \rightarrow \infty, \quad |i| \rightarrow \infty, \quad j \in \mathbb{Z};$$

$$(II) \ a(i) = a(-i), \ i \in \mathbb{Z}_+, \ a(j) \neq a(i), \ i \neq -j, \ i, j \in \mathbb{Z};$$

$$0 < d_i = \inf_{i \neq j} |a(i) - a(j)| \rightarrow \infty,$$

Первая группа условий соответствует растущему потенциалу общего вида, вторая группа условий — четному растущему потенциалу. Для оператора A_2 условия на растущую последовательность $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ следующие:

$$(III) \ a(i) = a(-i), \ i \in \mathbb{N}, \ a(i) \neq a(j), \ i \neq j, \ i, j \in \mathbb{Z}_+,$$

$$d_i = \inf_{i \neq j} |a(i) - a(j)| \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Через $\text{End } l_2$ обозначим банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в l_2 . Представим оператор A_1 в виде

$$A_1 = A_0 - B,$$

где

$$(A_0x)(n) = (a(n) + 2)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad D(A_0) = D(A_1),$$

$$B \in \text{End } l_2, \quad (Bx)(n) = x(n-1) + x(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оператор A_0 — нормальный оператор (см. определение 1), в случае выполнения группы условий (I) он имеет простые изолированные собственные значения

$$\lambda_n = a(n) + 2, \quad \sigma(A_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\lambda_n\},$$

а векторы $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ являются его собственными векторами. Пусть $P_n = P(\{\lambda_n\}, A_0)$ — спектральный проектор, построенный по спектральному множеству $\{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $P_n x = (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. В случае выполнения условий (II) собственные значения $\lambda_n = a(n) + 2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, оператора A_0 являются двукратными, $\lambda_0 = a(0) + 2$ — простое, векторы e_n , $n \in \mathbb{Z}$, также являются собственными векторами. Пусть

$$P_0 x = (x, e_0)e_0, \quad P_n x = (x, e_n)e_n + (x, e_{-n})e_{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Важно отметить, что из-за кратности собственных значений оператора A_0 в дальнейшем, при применении метода подобных операторов, приходится рассматривать именно блочные матрицы,

состоящие из блоков 2×2 . Иначе метод подобных операторов применять нельзя. Также блочные матрицы приходится рассматривать при применении других модификаций метода подобных операторов, например, в [3, 4, 25, 35, 37, 44].

Перейдем к оператору A_2 . Его также можно представить в виде $A_2 = \tilde{A}_0 - B$, где оператор B останется таким же, как и в предыдущем случае, и

$$(\tilde{A}_0 x)(n) = a(-n)x(n) + 2x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad D(\tilde{A}_0) = D(A_2).$$

Отметим, что при применении метода подобных операторов обычно невозмущенный оператор не изменяется, а возмущения бывают различными или рассматриваемыми в разных операторных пространствах. В данной же статье наоборот, меняется вид невозмущенного оператора в зависимости от того, является ли рассматриваемый оператор оператором с инволюцией.

3. Предварительные сведения. Пусть \mathcal{H} — абстрактное гильбертово пространство.

Определение 1 ([26]). Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, называется *нормальным*, если для сопряженного оператора выполнены условия $D(A) = D(A^*)$, $\|A^*x\| = \|Ax\|$, $x \in D(A)$, и *самосопряженным*, если $A^*x = Ax$.

Отметим, что оператор A_1 является самосопряженным в случае вещественной последовательности $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, а в общем случае он нормальный. Оператор A_2 является самосопряженным, так как последовательность $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ вещественная и четная.

Определение 2. Два линейных оператора $\mathcal{E}_i : D(\mathcal{E}_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует такой непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } \mathcal{H}$, что

$$UD(\mathcal{E}_2) = D(\mathcal{E}_1), \quad \mathcal{E}_1 Ux = U\mathcal{E}_2 x, \quad x \in D(\mathcal{E}_2).$$

Оператор U называется оператором преобразования оператора \mathcal{E}_1 в оператор \mathcal{E}_2 или сплетающим оператором.

Широкое использование преобразования подобия обусловлено тем, что спектральные свойства одного из операторов можно найти, зная спектральные свойства ему подобного. Соответствующее утверждение удобно оформить в виде следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{E}_i : D(\mathcal{E}_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — подобные операторы и U — оператор преобразования. Тогда имеют место следующие утверждения.

- (a) $\text{Im } \mathcal{E}_1 = U(\text{Im } \mathcal{E}_2)$.
- (b) если $\sigma(\mathcal{E}_i)$, $\sigma_d(\mathcal{E}_i)$, $\sigma_c(\mathcal{E}_i)$, $\sigma_r(\mathcal{E}_i)$ — спектр, дискретный, непрерывный и остаточные спектры оператора \mathcal{E}_i , $i = 1, 2$, то

$$\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2), \quad \sigma_d(\mathcal{E}_1) = \sigma_d(\mathcal{E}_2), \quad \sigma_c(\mathcal{E}_1) = \sigma_c(\mathcal{E}_2), \quad \sigma_r(\mathcal{E}_1) = \sigma_r(\mathcal{E}_2).$$

- (c) Пусть e — собственный вектор оператора \mathcal{E}_2 , отвечающий собственному значению λ , $\mathcal{E}_2 e = \lambda e$. Тогда $\mathcal{E}_1 Ue = \lambda Ue$.
- (d) Если оператор \mathcal{E}_2 допускает разложение

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{21} \oplus \mathcal{E}_{22}, \quad \mathcal{E}_{2k} = \mathcal{E}_2|_{\mathcal{H}_k},$$

и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ — прямая сумма инвариантных относительно \mathcal{E}_2 подпространств \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 , то подпространства $\tilde{\mathcal{H}}_k = U(\mathcal{H}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора \mathcal{E}_1 и

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{11} \oplus \mathcal{E}_{12}, \quad \mathcal{E}_{1k} = \mathcal{E}_1|_{\tilde{\mathcal{H}}_k}, \quad k = 1, 2.$$

Более того, пусть P — проектор, осуществляющий разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_1 = \text{Im } P, \quad \mathcal{H}_2 = \text{Im}(I - P),$$

то проектор $\tilde{P} \in \text{End } \mathcal{H}$, осуществляющий разложение

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2,$$

определяется формулой

$$\tilde{P} = UPU^{-1}.$$

- (е) Если \mathcal{E}_2 — генератор сильно непрерывной полугруппы операторов $T_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, то оператор \mathcal{E}_1 также является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $T_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, $T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}$, $t \geq 0$.

Пусть пространство \mathcal{H} представимо в виде прямой суммы взаимно ортогональных ненулевых замкнутых подпространств \mathcal{H}_n , $n \in \mathbb{Z}$, т.е.

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_n, \quad (1)$$

где \mathcal{H}_i ортогонально \mathcal{H}_j при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n, \quad x_n \in \mathcal{H}_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^2.$$

В этом случае последовательность $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ обычно называют *ортогональным базисом из подпространств* пространства \mathcal{H} (см. [12, 18]). Такое представление пространства \mathcal{H} ведет к существованию разложения единицы системы ортопроекторов $\mathcal{P} = \{P_n, n \in \mathbb{Z}\}$. При этом проекторы P_n , $n \in \mathbb{Z}$, обладают следующими свойствами:

$$P_n^* = P_n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad P_i P_j = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z};$$

ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n x$ безусловно сходится к $x \in \mathcal{H}$ и $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|P_n x\|^2$; из равенств $P_k x = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, следует, что вектор x нулевой; $\mathcal{H}_k = \text{Im } P_k$, $x_k = P_k x$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 3 (см. [25, 36]). Линейный оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ называется ортогональной прямой суммой ограниченных операторов $\mathcal{E}_n \in \text{End } \mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, относительно разложения (1), если выполнены следующие условия:

- (i) $\mathcal{H}_n \subset D(\mathcal{E}) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\mathcal{E}_k x_k\|^2 < \infty, \quad x_k = P_k x, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$;
- (ii) каждое подпространство \mathcal{H}_n , $n \in \mathbb{Z}$, инвариантно относительно оператора \mathcal{E} и \mathcal{E}_n , $n \in \mathbb{Z}$, есть сужение оператора \mathcal{E} на \mathcal{H}_n , $n \in \mathbb{Z}$;
- (iii) $\mathcal{E}x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_k x_k$, $x \in D(\mathcal{E})$, где $x_k = P_k x$, $k \in \mathbb{Z}$.

При этом используется обозначение

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_n, \quad (2)$$

Если для последовательности подпространств $(\tilde{\mathcal{H}}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ существует такой линейный ограниченный непрерывно обратимый оператор U и такой ортогональный базис из подпространств $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, что $\tilde{\mathcal{H}}_n = U\mathcal{H}_n$, то $(\tilde{\mathcal{H}}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, очевидно, тоже является базисом. Его принято называть *базисом Рисса из подпространств* (см. [12, 18]). Кроме того, если оператор U представим в виде $U = I + W$, где $W \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то базис Рисса будем называть *базисом Барри*. Для базисов Рисса будем использовать запись

$$\mathcal{H} = \biguplus_{k \in \mathbb{Z}} U\mathcal{H}_k = \biguplus_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{H}}_k. \quad (3)$$

Такой базис также называется базисом из подпространств, эквивалентным ортогональному, или спрямляемым базисом (см. [12, 31]).

Разложение (3) будем называть *квазиортогональным* или *U-ортогональным*.

Определение 4 (см. [36]). Линейный замкнутый оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ назовем квази-ортогональной (*U-ортогональной*) прямой суммой ограниченных операторов $\tilde{\mathcal{E}}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, относительно квазиортогонального разложения пространства \mathcal{H} вида (3), если для некоторого обратимого оператора $U \in \text{End } \mathcal{H}$ имеет место разложение

$$U^{-1}\mathcal{E}U = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U^{-1}\mathcal{E}_n U$$

вида (2). При этом используется запись

$$\mathcal{E} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{E}}_k.$$

Предположим, что операторы \mathcal{E} и $\tilde{\mathcal{E}}$ подобны, а оператор U является оператором преобразования \mathcal{E} в $\tilde{\mathcal{E}}$. Пусть также оператор $\tilde{\mathcal{E}}$ является ортогональной прямой суммой

$$\tilde{\mathcal{E}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{E}}_k.$$

Из определений 1 – 3 немедленно вытекает, что в этом случае оператор \mathcal{E} является U -ортогональной прямой суммой

$$\mathcal{E} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_k,$$

где $\mathcal{E}_k = U\tilde{\mathcal{E}}_kU^{-1}$.

Далее мы также затронем проблему построения бинвариантных подпространств для оператора A_1 , что не было рассмотрено в [8, 9, 11, 39]. Введем ниже соответствующую терминологию. При этом в вопросах бинвариантных подпространств мы будем придерживаться терминологии из [2].

Определение 5 ((см. [2]). Нетривиальное замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}_0 \neq \mathcal{H}$) называется бинвариантным для линейного оператора $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, если \mathcal{H}_0 и его ортогональное дополнение \mathcal{H}_0^\perp инвариантны относительно \mathcal{E} .

Лемма 2. Пусть линейный оператор \mathcal{E} перестановочен с некоторым ортопроектором Q , т.е. $\mathcal{E}Q = Q\mathcal{E}$. Тогда подпространства $\text{Im } Q$ и $\text{Ran } Q$ являются бинвариантными для оператора \mathcal{E} .

Отметим, что очевидная лемма 2 и применяется для построения бинвариантных подпространств.

Определение 6. Пусть подпространство \mathcal{H}_0 бинвариантно для некоторого оператора \mathcal{E} . Тогда подпространство $(I + U)\mathcal{H}_0$, где $U, (I + U)^{-1} \in \text{End } \mathcal{H}$ назовем бинвариантным подпространством Рисса. Если же $U \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $(I + U)\mathcal{H}_0$ назовем бинвариантным подпространством Бари.

4. Метод подобных операторов. Обычно изучение спектральных свойств некоторых операторов в гильбертовом пространстве, представимых в виде $A - B : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, где A — хорошо изученный оператор с известными спектральными свойствами и B — его возмущение, подчиненное оператору A , укладывается в рамки теории возмущений линейных операторов. Эта теория восходит к книге [14] и развивается в работах различных авторов (см. [1, 13, 16, 19–21, 41]). Обзор имеющихся на 1967 год результатов в теории возмущений линейных операторов можно найти в диссертации [15]. Свое дальнейшее развитие и использование теория возмущений получила, например, в [22, 27, 28, 32], а также работах других авторов.

Одним из самых распространенных методов исследования в теории возмущений линейных операторов является резольвентный метод (см. [14]), связанный с использованием интегрального представления для проектора Рисса $P(\sigma, A)$, построенного по спектральной компоненте σ из спектра $\sigma(A)$ оператора A . С помощью резольвентного метода исследования проводились, например, в [22, 32, 42]. Не всегда бывает удобно оценивать соответствующие интегралы на контурах, поэтому существуют и другие методы исследования. Один из которых, метод операторов преобразования или transmutation method, связан с построением подходящего преобразования подобия исходного оператора в оператор более простой структуры. Историю и современное состояние метода операторов преобразования можно найти в [29]. Используемый нами метод подобных операторов также относится к методам операторов преобразования. В изложении метода подобных операторов будем придерживаться работы [35].

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — некоторый абстрактный невозмущенный оператор. Одним из основных понятий метода подобных операторов является определение допустимой для невозмущенного оператора A тройки, которая для применимости метода должна удовлетворять ряду условий.

Определение 7 (см. [35]). Пусть \mathfrak{U} — банахово пространство операторов из $\text{End } \mathcal{H}$ с нормой $\|X\|_*$, $X \in \mathfrak{U}$, и $J : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$, $\Gamma : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ — трансформаторы, т.е. линейные операторы в пространстве линейных операторов. Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ будем называть допустимой тройкой для оператора A , а \mathfrak{U} — пространством допустимых возмущений, если выполнены следующие условия:

- (i) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;
- (ii) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$,

$$A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX \quad (4)$$

для любого $X \in \mathfrak{U}$ и $Y = \Gamma X$ — единственное решение уравнения

$$AY - YA = X - JX, \quad (5)$$

удовлетворяющее условию $JY = O$, где O — нулевой оператор в \mathcal{H} ;

- (iii) $X(\Gamma Y)$, $(\Gamma Y)X \in \mathfrak{U}$ для всех $X, Y \in \mathfrak{U}$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| \leq \gamma$ и

$$\max\{\|X(\Gamma Y)\|_*, \|(\Gamma Y)X\|_*\} \leq \gamma\|X\|_*\|Y\|_*;$$

- (iv) для любого $X \in \mathfrak{U}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon;$$

- (v) $J((\Gamma X)JX) = O$ для всех $X, Y \in \mathfrak{U}$.

Отметим, что для одного невозмущенного оператора A иногда можно построить несколько разных допустимых троек.

Трансформатор J — обычно это оператор диагонализации (блочной диагонализации) матрицы оператора $X \in \mathfrak{U}$. Трансформатор Γ связан с построением оператора U из определения 2. Свойства (ii)–(v) допустимой тройки необходимы для разрешения нелинейного операторного уравнения (7) метода подобных операторов, приведенного ниже.

Зафиксируем теперь некоторую допустимую тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ для невозмущенного оператора A .

Теорема 1 (см. [33, 35]). Пусть $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка и B — некоторый оператор из пространства возмущений \mathfrak{U} . Если

$$4\gamma\|J\|\|B\|_* < 1, \quad (6)$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathfrak{U}$ — решение уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X); \quad (7)$$

оно может быть найдено методом простых итераций, если положить $X_0 = 0$, $X_1 = B$, \dots . Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in \text{End } \mathcal{H}$. Отображение $\Phi : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ является сжимающим в шаре

$$\mathfrak{B} = \left\{ X \in \mathfrak{U} : \|X - B\|_* \leq 3\|B\|_* \right\}.$$

5. Применение метода подобных операторов к оператору A_1 . В этом разделе построим допустимую тройку для оператора A_1 в двух случаях: в случае потенциала общего вида и в случае четного потенциала; приведем полученные в [2, 8, 9, 11, 39] результаты, касающиеся основной теоремы о подобии, оценках собственных значений и спектральных проекторов, а также новые теоремы, касающиеся бинвариантных подпространств.

Вернемся к невозмущенному оператору A_0 . Обозначим через \mathbb{J} множество $\mathbb{J} = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+\}$. Тогда оператор A_0 есть ортогональная прямая сумма операторов $A_{0i} = A_0|_{\mathcal{H}_i} = (a(i) + 2)I_i$, $i \in \mathbb{J}$, где I_i , $i \in \mathbb{J}$, есть тождественный оператор в $\mathcal{H}_i = \text{Im } P_i$, $i \in \mathbb{J}$. Иными словами,

$$A_0 = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (a(i) + 2)I_i$$

в случае выполнения первой группы условий и

$$A_0 = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} (a(i) + 2)I_i$$

в случае выполнения второй группы условий (четного потенциала). Это представление оператора A_0 связано с представлением пространства l_2 в виде

$$l_2 = \bigoplus_{i \in \mathbb{J}} \mathcal{H}_i = \bigoplus_{i \in \mathbb{J}} \text{Im } P_i.$$

Напомним, что $\dim \text{Im } P_0 = 1$, $\dim \text{Im } P_i = 2$, $i \in \mathbb{N}$, в случае четного потенциала и $\dim \text{Im } P_i = 1$, $i \in \mathbb{Z}$, в случае потенциала общего вида. При этом использовалось разложение единицы системой спектральных проекторов $\{P_i, i \in \mathbb{J}\}$ оператора A_0 . Отметим, что подпространства \mathcal{H}_i , $i \in \mathbb{J}$, образуют базис из подпространств в l_2 , а также систему биинвариантных подпространств.

Рассмотрим также другое представление единицы. Пусть

$$P_{(m)} = \sum_{|j| < m, j \in \mathbb{J}} P_j, \quad \mathcal{P}^{(m)} = \{P_{(m)}\} \cup \{P_i, |i| > m, i \in \mathbb{J}\}.$$

Тогда пространство l_2 представимо в виде ортогональной прямой суммы подпространств

$$l_2 = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \left(\bigoplus_{|i| > m, i \in \mathbb{J}} \mathcal{H}_i \right),$$

где $\mathcal{H}_{(m)} = \text{Im } P_{(m)}$. При этом подпространства $\mathcal{H}_{(m)}$, \mathcal{H}_i , $|i| > m$, $i \in \mathbb{J}$, также образуют базис из подпространств в l_2 . Оператор A_0 можно представить в виде

$$A_0 = A_{0(m)} \oplus \left(\bigoplus_{|i| > m, i \in \mathbb{J}} A_{0i} \right) = A_{0(m)} \oplus \left(\bigoplus_{|i| > m, i \in \mathbb{J}} (a(i) + 2)I_i \right),$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$ и $A_{0(m)} = A_0|_{\mathcal{H}_{(m)}}$.

Важно отметить, что системы подпространств $\{\mathcal{H}_i, i \in \mathbb{J}\}$ и $\{\mathcal{H}_{(m)}, \mathcal{H}_i, |i| > m, i \in \mathbb{J}\}$ являются системами биинвариантных подпространств для оператора A_0 .

Каждому ограниченному оператору $X \in \text{End } l_2$ поставим в соответствие его (операторную) матрицу относительно некоторой дизъюнктивной системы проекторов $\{Q_n, n \in \mathbb{J}\}$, $X \sim (Q_i X Q_j)$, $i, j \in \mathbb{J}$. Оператор X из $\text{End } l_2$ отнесем к $\text{End}_1 l_2$, если конечна величина

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}, i-j=p} \|Q_i X Q_j\|_\infty,$$

принимаемая за норму в $\text{End}_1 l_2$. В рассматриваемом случае в качестве дизъюнктивной системы проекторов будет выступать система спектральных проекторов $\{P_i, i \in \mathbb{J}\}$ невозмущенного оператора A_0 . Отметим, что, очевидно, $B_1, B_2 \in \text{End}_1 l_2$ и имеют трехдиагональные матрицы относительно введенной системы проекторов. Поэтому в методе подобных операторов удобно в качестве пространства допустимых возмущений использовать $\text{End}_1 l_2$.

Перейдем к построению операторов $J, \Gamma \in \text{End}(\text{End}_1 l_2)$. Положим

$$JX = J_0 X = \sum_{i \in \mathbb{J}} P_i X P_i, \quad J_k X = P_{(k)} X P_{(k)} + \sum_{i \in \mathbb{J}, |i| > k} P_i X P_i, \quad k \geq 0.$$

Отметим, что

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (J_k X)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i = j, \\ X_{ij}, & \max\{|i|, |j|\} \leq k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, оператор J оставляет в матрице оператора X главную диагональ, а остальные элементы обнуляет. Оператор $J_{(k)}$ оставляет главную диагональную и центральный блок размера $2k + 1$, а остальные элементы обнуляет.

Оператор $\Gamma_k \in \text{End}(\text{End}_1 l_2)$ зададим матричными элементами

$$(\Gamma X)_{ij} = (\Gamma_0 X)_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ \frac{X_{ij}}{a(i) - a(j)}, & i \neq j, \end{cases} \quad (\Gamma_k X)_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 0, & \max\{|i|, |j|\} \leq k, \\ \frac{X_{ij}}{a(i) - a(j)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что знаменатель не обращается в нуль в случае группы условий (II) на потенциал, так как в этом случае в качестве матричных элементов выступают матрицы 2×2 и совпадающие члены четной последовательности $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ попадают в один матричный элемент, который обнуляет оператор $\Gamma_k \in \text{End}(\text{End}_1 l_2)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Теперь оператор Γ_k определен. Отметим также, что

$$\Gamma_k X = \Gamma_0 X - \Gamma_0(P_{(k)} X P_{(k)}) = \Gamma_0 X - P_{(k)}(\Gamma_0 X)P_{(k)}.$$

Из результатов [8, 9, 11, 39] вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого $k \geq 0$ тройка $(\text{End}_1 l_2, J_k, \Gamma_k)$ есть допустимая тройка для оператора A_0 . При этом константа γ из определения 7 допускает оценку*

$$\gamma_k \leq \text{const } d_k^{-1},$$

где

$$d_k = \text{dist}(\sigma_{(k)}, \sigma(A) \setminus \sigma_{(k)}), \quad \sigma_{(k)} = \bigcup_{i \in \mathbb{J}, |i| \leq k} \{a(i) + 2\}.$$

Теорема 3. *Существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор A , подобен оператору $A_0 - J_k X_0 = A_0 - V_0$, где $X_0, V_0 \in \text{End}_1 l_2$,*

$$(A_0 - B)(I + \Gamma_k X_0) = (I + \Gamma_k X_0)(A_0 - J_k X_0).$$

Оператор $A_0 - V_0$ есть ортогональная прямая сумма

$$A_0 - V_0 = A_0 - \left(V_{0(k)} \oplus \left(\bigoplus_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} V_{0i} \right) \right)$$

относительно ортогонального разложения пространства

$$l_2 = \mathcal{H}_{(k)} \oplus \left(\bigoplus_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} \mathcal{H}_i \right)$$

и размерность подпространства $\mathcal{H}_{(k)}$ есть $2k + 1$. Оператор X_0 есть решение нелинейного операторного уравнения (7). Более того, оператор A_1 есть U -ортогональная ($U = I + \Gamma_k X_0$) прямая сумма

$$A_1 = U \left(A_0 - \left(X_{0(k)} \oplus \left(\bigoplus_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} X_{0i} \right) \right) \right) U^{-1}$$

относительно U -ортогонального разложения

$$l_2 = U \mathcal{H}_{(k)} \oplus \left(\bigoplus_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} U \mathcal{H}_i \right).$$

Из теоремы 3 немедленно вытекает, что система подпространств $\{U \mathcal{H}_{(k)}, U \mathcal{H}_i, |i| > k, i \in \mathbb{J}\}$ образует в l_2 базис Рисса из подпространств (спрямляемый базис; базис, эквивалентный ортогональному, из подпространств).

Следствие 1. *Пусть последовательность $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет группе условий (I). Тогда существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что спектр $\sigma(A_1)$ оператора A_1 представим в виде*

$$\sigma(A_1) = \sigma_{(k)} \cup \left(\bigcup_{|i| > k} \sigma_i \right), \quad i \in \mathbb{J},$$

где множество $\sigma_{(k)}$ содержит не более чем $2k + 1$ собственных значений, множества $\sigma_i = \{\mu_i\}$ одноточечны и

$$\mu_i = a(i) + 2 + \mathcal{O}(d_i^{-1}), \quad |i| > k, \quad (8)$$

$$\mu_i = a(i) + 2 - \frac{a(i+1) - 2a(i) + a(i-1)}{(a(i+1) - a(i))(a(i-1) - a(i))} + \mathcal{O}(d_i^{-2}). \quad (9)$$

Соответствующие собственные векторы \tilde{e}_i такие, что

$$\|\tilde{e}_i - y_i\| = \mathcal{O}(d_i^{-2}), \quad |i| > k,$$

где

$$y_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ (a(i+1) - a(i))^{-1}, & j = i \pm 1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Собственные векторы $\{\tilde{e}_i\}$ образуют в l_2 базис Рисса со скобками.

Следствие 2. Пусть последовательность $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет группе условий (II). Тогда спектр $\sigma(A_1)$ оператора A_1 также представим в виде

$$\sigma(A_1) = \sigma_{(k)} \cup \left(\bigcup_{i > k, i \in \mathbb{J}} \sigma_i \right),$$

где множество $\sigma_{(k)}$, как и в следствии 1, содержит не более $2k + 1$ собственных значений. Множества σ_i , $i > k$, двухточечны, $\sigma_i = \{\mu_i, \mu_{-i}\}$ и для $\mu_{\pm i}$ имеют место асимптотические оценки (8), (9).

Обозначим через \tilde{P}_n , $|n| > k$, $n \in \mathbb{J}$, $\tilde{P}_{(k)}$, спектральные проекторы, построенные по спектральным множествам $\sigma_{(k)}$, σ_i , $i \in \mathbb{J}$, $|i| > k$, из следствий 1 и 2.

Из леммы 1 и теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. Для спектральных проекторов \tilde{P}_n , $|n| > k$, $n \in \mathbb{J}$, $\tilde{P}_{(k)}$, имеют место формулы

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n &= (I + \Gamma_k X_*) P_n (I + \Gamma_k X_*)^{-1}, \quad n \in \mathbb{J}, \quad |n| > k, \\ \tilde{P}_{(k)} &= (I + \Gamma_k X_*) P_{(k)} (I + \Gamma_k X_*)^{-1}, \\ \tilde{P}_n - P_n &= (\Gamma_k X_* P_n - P_n \Gamma_k X_*) (I + \Gamma_k X_*)^{-1}, \\ \tilde{P}_{(k)} - P_{(k)} &= (\Gamma_k X_* P_{(k)} - P_{(k)} \Gamma_k X_*) (I + \Gamma_k X_*)^{-1}. \end{aligned}$$

При этом имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}_n - P_n\| &= \mathcal{O}(d_n^{-1}), \quad n \in \mathbb{J}, \quad |n| > k, \\ \left\| \sum_{n=m}^N \tilde{P}_n - \sum_{n=m}^N P_n \right\| &= \mathcal{O}(d_m^{-1}), \quad m > k, \quad N > m, \quad N \in \mathbb{J}, \\ \left\| \tilde{P}_{(k)} + \sum_{|i| > k}^l \tilde{P}_i - \sum_{|i| < l} P_i \right\| &= \mathcal{O}(d_l^{-1}), \end{aligned}$$

если $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$, и

$$\left\| \tilde{P}_{(k)} + \sum_{i > k}^l \tilde{P}_i - \sum_{i=0}^l P_i \right\| = \mathcal{O}(d_l^{-1}),$$

если $\mathbb{J} = \mathbb{Z}_+$.

Из теоремы 3 и леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. Подпространства $\text{Im } \tilde{P}_{(k)}$, $\text{Ker } \tilde{P}_{(k)}$, $\text{Im } \tilde{P}_i$, $\text{Ker } \tilde{P}_i$, $|i| > k$, $i \in \mathbb{J}$, образуют счетный набор билинвариантных подпространств Рисса для оператора A_1 .

6. Применение метода подобных операторов к оператору A_2 . Перейдем к оператору A_2 . Отметим еще раз, что в отличие от обычно применяемой схемы метода подобных операторов, когда невозмущенный оператор остается тем же, а меняется оператор-возмущение, в рассматриваемом случае, напротив, оператор-возмущение B одинаков для A_1 и A_2 , а невозмущенные операторы различны. Поэтому в качестве пространства допустимых возмущений мы также будем использовать пространство $\text{End}_1 l_2$. Напомним, что невозмущенным оператором в рассматриваемом случае считаем оператор $\tilde{A}_0 : D(\tilde{A}_0) = D(A_2) \subset l_2 \rightarrow l_2$, где $(\tilde{A}_0 x)(n) = a(-n)x(n) + 2x(n)$. Введем в рассмотрение следующую систему ортопроекторов в l_2 :

$$P_0 x = (x, e_0)e_0, \quad P_n x = (x, e_n)e_n + (x, e_{-n})e_{-n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $e_n, n \in \mathbb{Z}$, — векторы стандартного базиса в l_2 . Очевидно, что пространство l_2 представимо в виде прямой суммы

$$l_2 = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}_n, \quad (10)$$

где $\mathcal{H}_n = \text{Im } P_n, n \in \mathbb{Z}_+$, при этом $\dim \mathcal{H}_0 = 1, \dim \mathcal{H}_n = 2, n \in \mathbb{N}$. Таким образом, как и в случае выполнения группы условий (II) для оператора A_1 , мы будем рассматривать пространство l_2 как прямую сумму взаимно ортогональных двумерных подпространств. Но в случае оператора A_1 такое рассмотрение связано с четностью потенциала и возможностью корректного определения оператора $\Gamma \in \text{End}(\text{End}_1 l_2)$.

В случае оператора A_2 отличием является то, что векторы стандартного базиса пространства l_2 не являются собственными векторами невозмущенного оператора \tilde{A}_0 , а введенные выше проекторы $P_i, i \in \mathbb{Z}_+$ его спектральными проекторами. Использование именно такого представления пространства l_2 связано с нахождением растущей последовательности на $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ побочной диагонали. Оператор \tilde{A}_0 является ортогональной прямой суммой ограниченных операторов \tilde{A}_{0n} относительно разложения (10). Оператор \tilde{A}_{00} имеет ранг 1, а операторы \tilde{A}_{0n} — ранг 2; в \mathcal{H}_n задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & a(-n) \\ a(n) & 2 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При этом

$$\sigma(\tilde{A}_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \sigma(\tilde{A}_{0n}), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где

$$\sigma(\tilde{A}_{0n}) = \{\lambda_n^\pm\} = \{2 \pm \sqrt{a(n)a(-n)}\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \sigma(\tilde{A}_{00}) = \{\lambda_0\} = \{2 + a(0)\}.$$

Очевидно, что вектор \tilde{e}_0 , отвечающий собственному значению λ_0 , совпадает с вектором стандартного базиса e_0 . Ортогональные собственные векторы $e_{\pm n}, n \in \mathbb{N}$, отвечающие собственному значению $\lambda_{\pm n}, n \in \mathbb{N}$, входят в $\text{Im } P_n, n \in \mathbb{N}$, и имеют в нем координаты $e_{n,0} = \{1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\}, e_{-n,0} = \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$. При этом преобразование, приводящее матрицу оператора $\tilde{A}_{0n}, n \in \mathbb{N}$, к диагональному виду унитарно. Таким образом, можно считать, что самосопряженный оператор \tilde{A}_0 имеет диагональную матрицу, его собственные векторы известны, соответствующие спектральные проекторы $\tilde{P}_n, n \in \mathbb{Z}$, также определены, причем $\text{Im } \tilde{P}_n = \text{Im } P_n, n \in \mathbb{Z}$. При этом относительно нового базиса (или новой системы ортопроекторов) матрица возмущения \tilde{B} также остается блочной трехдиагональной матрицей. Таким образом, оператор $\tilde{A}_0 - \tilde{B}$ удовлетворяет всем условиям применения стандартной схемы метода подобных операторов и все выкладки предыдущего раздела относительно построения допустимой тройки и приведения оператора к блочно-диагональному виду проходят без изменений.

Единственным отличием построения допустимой тройки является только то, что в формулах раздела 5, определяющих операторы $J_k, \Gamma_k \in \text{End}(\text{End}_1 l_2)$ вместо стандартной системы проекторов $\{P_n\}, n \in \mathbb{J}$, используются спектральные проекторы $\{\tilde{P}_n\}$, построенные по спектральным множествам $\sigma(\tilde{A}_{0n})$ оператора \tilde{A}_0 . Аналогично теоремам 2 и 3 доказываются следующие теоремы.

Теорема 4. Тройка $(\text{End}_1 l_2, J_k, \Gamma_k)$ для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ является допустимой тройкой для невозмущенного оператора \tilde{A}_0 .

Теорема 5. Существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $\tilde{A}_0 - \tilde{B}$ подобен оператору $\tilde{A}_0 - V_0$, $V_0 \in \text{End}_1 l_2$, который является ортогональной прямой суммой

$$\tilde{A}_0 - V_0 = \tilde{A}_0 - \left(V_{0(k)} \oplus \left(\bigoplus_{i>k} V_{0i} \right) \right)$$

относительно разложения пространства l_2 вида (10). Оператор $\tilde{A}_0 - \tilde{B}$ есть U -ортогональная прямая сумма

$$A_0 - \tilde{B} = U \left(A_0 - \left(V_{0(k)} \oplus \left(\bigoplus_{i>k} V_{0i} \right) \right) \right) U^{-1}$$

относительно U -ортогонального разложения пространства

$$l_2 = U\mathcal{H}_{(k)} \oplus \left(\bigoplus_{i>k} U\mathcal{H}_i \right).$$

Заметим, что в рассматриваемом случае константа γ_k из определения 7 допускает оценку

$$\gamma = \gamma_k \leq (|a(k+1) - a(k)|)^{-1},$$

и ее можно сделать малой в силу выполнения группы условий (III).

Следствие 5. Система подпространств $U\mathcal{H}_{(k)}, U\mathcal{H}_i, i > k$, образует в l_2 базис Рисса из подпространств (базис из подпространств, эквивалентный ортогональному, спрямляемый базис).

Теорема 6. В условиях теоремы 5 собственные значения $\tilde{\lambda}_i^\pm, i > k$, оператора A_2 допускают оценку

$$|\tilde{\lambda}_i^\pm - \lambda_i^\pm| \leq C\gamma_i, \quad i > k.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М. С. Спектральные свойства задач дифракции // в кн.: Обобщенные метод собственных колебаний в теории дифракции (Войтович Н. Н., Каценелебаум Б. З., Сивов А. Н., ред.). — М: Наука, 1977.
2. Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Криштал И. А., Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в проблеме биинвариантных подпространств // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 204. — С. 3–15.
3. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Шербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 3. — С. 3–28.
4. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб. — 2017. — 208, № 1. — С. 3–47.
5. Бройтигам И. Н., Поляков Д. М. Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц // Уфим. мат. ж. — 2019. — 11, № 3. — С. 10–29.
6. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями // Докл. РАН. — 2014. — 454, № 1. — С. 15–17.
7. Владыкина В. Е., Шкаликов А. А. Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией // Докл. РАН. — 2019. — 484, № 1. — С. 12–17.
8. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 4. — С. 395–402.
9. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом // Сиб. электрон. мат. изв. — 2017. — 14. — С. 673–689.
10. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. О спектральных свойствах одной трехдиагональной бесконечной матрицы // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 199. — С. 31–42.

11. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б., Зголич А. Р. Метод подобных операторов и спектральные свойства разностного оператора с четным потенциалом// Прикл. мат. физ. — 2016. — 44, № 20. — С. 42–49.
12. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. 3// — 1974.
14. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1967.
15. Кацнельсон В. Э. О сходимости и суммируемости рядов по корневым векторам некоторых классов несамосопряженных операторов. — Харьков: Дисс. канд. физ.-мат. наук, 1967.
16. Кацнельсон В. Э. Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов// Функци. анализ. прилож. — 1967. — 1, № 2. — С. 39–51.
17. Крицков Л. В., Сарсенби А. М. Базисность Рисса системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией// Диффер. уравн. — 2017. — 53, № 1. — С. 35–48.
18. Маркус А. С. О базисе из корневых векторов диссипативного оператора// Докл. АН СССР. — 1960. — 132, № 3. — С. 524–527.
19. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
20. Маркус А. С., Мацаев В. И. О сходимости разложений по собственным векторам оператора, близкого к самосопряженному// Мат. исслед. — 1981. — 61. — С. 104–129.
21. Маркус А. С., Мацаев В. И. Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики// Тр. Моск. мат. о-ва. — 45. — С. 133–181.
22. Мотовилов А. К., Шкаликос А. А. Сохранение свойства безусловной базисности при несамосопряженных возмущениях самосопряженных операторов// Функци. анализ. прилож. — 2019. — 53, № 3. — С. 45–60.
23. Мусилимов Б., Отелбаев М. Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма—Лиувилля// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1981. — 21, № 6. — С. 1430–1434.
24. Отелбаев М. О коэрцитивных оценках решений разностных уравнений// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1988. — 181. — С. 241–249.
25. Поляков Д. М. Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями// Алгебра и анализ. — 2015. — 27, № 5. — С. 117–152.
26. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
27. Садовничий В. А., Дубровский В. В. Об одной абстрактной теореме теории возмущений, о формулах регуляризованных следов и о дзета-функции операторов// Диффер. уравн. — 1977. — 13, № 7. — С. 1264–1271.
28. Садовничий В. А., Дубровский В. В. О некоторых свойствах операторов с дискретным спектром// Диффер. уравн. — 1979. — 15, № 7. — С. 1206–1211.
29. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для операторных уравнений с оператором Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
30. Смаилов Е. С. Разностные теоремы вложения для пространств Соболева с весом и их приложения// Докл. АН СССР. — 1983. — 270, № 1. — С. 52–55.
31. Фаге М. К. Спрямление базисов в гильбертовом пространстве// Докл. АН СССР. — 1950. — 74, № 6. — С. 1053–1056.
32. Шкаликос А. А. Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром// Усп. мат. наук. — 2016. — 71, № 5 (431). — С. 113–174.
33. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu. Spectral analysis of a differential operator with an involution// J. Evol. Equ. — 2017. — 17. — P. 669–684.
34. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group// Operators and Matrices. — 2018. — 12, № 3. — P. 723–756.
35. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — 477, № 2. — P. 930–960.
36. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions// Eurasian Math. J. — 2020. — 11, № 2. — P. 30–39.
37. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. General Dirac operators as generators of operator groups/ arXiv:1806.10831 [math.SP].

38. *Boutet de Monvel A., Zielinski L.* Approximation of eigenvalues for unbounded Jacobi matrices using finite submatrices// Cent. Eur. J. Math. — 2014. — 12, № 3. — P. 445–463.
39. *Garkavenko G. V., Uskova N. B., Zgolich A. R.* Spectral analysis of a difference operator with a growing potential// J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — 973, № 1. — 012053.
40. *Djakov P., Mityagin B.* Simple and double eigenvalues of the Hill operator with a two-term potential// J. Approx. Th. — 2005. — 135, № 1. — P. 70–104.
41. *Friedrichs K. O.* Lectures on Advanced Ordinary Differential Equations. — New York: Gordon and Breach, 1965.
42. *Kopzhassarova A. A., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M.* Spectral properties of non-self-adjoint perturbation for a spectral problem with involution// Abstr. Appl. Anal. — 2012. — 2012. — 590781.
43. *Malejki M.* Eigenvalues for some complex infinite matrices// J. Adv. Math. Comp. Sci. — 2018. — 26, № 5. — P. 1–9.
44. *Polyakov D. M.* Sharp eigenvalue asymptotics of fourth-order differential operators// Asympt. Anal. — 130, № 5–6. — P. 1–27.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баскаков Анатолий Григорьевич
Воронежский государственный университет
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валерьевна
Воронежский государственный педагогический университет
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Ускова Наталья Борисовна
Воронежский государственный технический университет
E-mail: nat-uskova@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 28–37
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-28-37

УДК 519.6

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. С. Г. БУЛАНОВ

Аннотация. Представлены критерии устойчивости в смысле Ляпунова систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на преобразованиях разностных схем. Целью преобразований является получение зависимости величины возмущения решения в произвольный момент времени от возмущения начальных данных.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, численное моделирование устойчивости.

STABILITY CRITERIA FOR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 S. G. BULANOV

ABSTRACT. In this paper, we present criteria of stability in the Lyapunov sense for systems of ordinary differential equations based on transformations of difference schemes. The purpose of the transformations is to obtain the dependence of the magnitude of the perturbation of the solution at an arbitrary point in time on the perturbation of the initial data.

Keywords and phrases: Lyapunov stability, computer analysis of stability, numerical simulation of stability.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение. Анализ устойчивости в смысле Ляпунова систем обыкновенных дифференциальных уравнений необходимо выполнять в различных областях современной науки и техники, в частности, при управлении летательными аппаратами, технологическими процессами, создании высотных строительных конструкций, в синергетике (см. [3]), при оценке динамики загрязнения экосистемы водного объекта (см. [4]). Необходимость выполнять анализ устойчивости в режиме реального времени требует разработки критериев, допускающих компьютерную реализацию.

В статье предлагается подход к анализу устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на преобразованиях разностных схем численного интегрирования. В результате преобразований требуется получить зависимость величины возмущения решения в произвольный момент времени от возмущения начальных данных с некоторым коэффициентом пропорциональности, который и определяет характер устойчивости. На этой основе формулируются критерии устойчивости и асимптотической устойчивости в виде необходимых и достаточных условий. Компьютерная реализация критериев должна позволить сделать однозначный вывод о характере устойчивости исследуемой системы в режиме реального времени.

2. Описание метода. Рассматривается задача Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (1)$$

Предполагается, что для (1) выполнены все условия существования и единственности решения в области

$$R_1 = \{t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta_1, \delta_1 > 0\}.$$

Элементы $(n \times n)$ -матрицы $A(t)$ — функции $a_{kj}(t)$, непрерывно дифференцируемые в R_1 . Ниже используются каноническая норма матрицы и согласованная с ней норма вектора:

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|, \quad \|Y\| = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k|.$$

Для произвольно фиксированного значения $t \in [t_0, \infty)$ всюду ниже предполагается, что величины t, i, h связаны соотношениями $t = t_{i+1}, h = (t_{i+1} - t_0)/(i + 1), i = 0, 1, \dots$

Для простоты изложения и наглядности преобразования разностных схем в качестве приближенного метода решения системы (1) используется метод Эйлера. Точное значение величины возмущения решения системы (1) методом Эйлера в форме с остаточным членом на произвольном промежутке $[t_0, t]$ определяется из соотношения

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = (E + hA(t_i))(\tilde{Y}_i - Y_i) + Q_{E,i}. \quad (2)$$

Таким образом, величина возмущения на текущем шаге выражается через величину возмущения на предыдущем шаге. Выражая по аналогии величину возмущения на i -м шаге через величину возмущения на $(i - 1)$ -м шаге и подставляя в соотношение (2), имеем

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = (E + hA(t_i))(E + hA(t_{i-1})) \times (\tilde{Y}_{i-1} - Y_{i-1}) + (E + hA(t_i))Q_{E,i-1} + Q_{E,i}. \quad (3)$$

Рекуррентно преобразуя правую часть (3), получим выражение для возмущения на текущем шаге через возмущение начальных данных:

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell}))(\tilde{Y}_0 - Y_0) + L_i, \quad (4)$$

где

$$L_i = \sum_{r=1}^i \prod_{\ell=0}^{i-r} (E + hA(t_{i-\ell}))Q_{E(r-1)} + Q_{E,i}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} L_i = \vec{0}$$

(см. [1]). Переходя в (4) к пределу при $h \rightarrow 0$, что равносильно $i \rightarrow \infty$, получим для всех $t \in [t_0, \infty)$ тождество

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell}))(\tilde{Y}_0 - Y_0),$$

смысл которого в том, что для произвольного t величина возмущения равна бесконечному матричному произведению, умноженному на возмущение начальных данных. Отсюда следует критерий устойчивости (5) и асимптотической устойчивости (6) системы (1) в форме необходимых и достаточных условий:

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| \leq \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| = 0. \quad (6)$$

Критерии (5), (6) позволяют определить характер устойчивости, асимптотической устойчивости либо неустойчивости систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений без представления решения в аналитической форме, преобразования правой части системы, построения функций Ляпунова. Мультипликативная форма выражений под знаком предела предоставляет

возможность запрограммировать вычисление этих выражений и тем самым компьютеризировать анализ устойчивости.

Математически обосновано (см. [8]), что необходимая в процессе программирования замена бесконечного матричного произведения на конечное произведение сохраняет достоверность анализа устойчивости по предложенным критериям. Проведено исследование зависимости достоверности компьютерного анализа устойчивости от погрешности разностного решения системы.

Аналогичные критерии устойчивости строятся на основе методов Эйлера—Коши, Рунге—Кутты и Адамса. Использование данных критериев обеспечивает более высокую достоверность анализа устойчивости в силу улучшения оценки погрешности от отбрасывания остаточных членов.

Если матрица A в (1) не зависит от времени, то критерии (5), (6), соответственно, примут вид

$$\left\| \lim_{m \rightarrow \infty} B^{2^m} \right\| \leq \tilde{c}_2, \quad \tilde{c}_2 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

где $B = E + hA$, $i + 1 = 2^m$, и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} B^{2^m} \right\| = 0.$$

В этом частном случае предложенные критерии устойчивости отличаются тем, что не требуют информации о характеристическом многочлене матрицы и о его корнях.

В случае устойчивости (асимптотической устойчивости) системы (1) нелинейная добавка в правую часть (1) влечет ниже описываемые видоизменения в преобразования разностной схемы. Система (1) преобразуется к виду

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (7)$$

Предполагается, что нелинейная функция $F(t, Y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_0, t]$ при любом выборе $t = \text{const}$, $t \in [t_0, \infty)$.

Величина возмущения определяется из соотношения

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = (E + hA(t_i))(\tilde{Y}_i - Y_i) + h(F(t_i, \tilde{Y}_i) - F(t_i, Y_i)) + \Theta_{E,i}, \quad (8)$$

где $\Theta_{E,i}$ — погрешность метода Эйлера на шаге разностной схемы.

Рекуррентное преобразование правой части (8) влечет

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell}))(\tilde{Y}_0 - Y_0) + D_{E,i} + S_{E,i}, \quad (9)$$

где

$$D_{E,i} = \sum_{r=1}^i \prod_{\ell=0}^{i-r} (E + hA(t_{i-\ell})) h(F(t_{r-1}, \tilde{Y}_{r-1}) - F(t_{r-1}, Y_{r-1})) + h(F(t_i, \tilde{Y}_i) - F(t_i, Y_i)),$$

$$S_{E,i} = \sum_{r=1}^i \prod_{\ell=0}^{i-r} (E + hA(t_{i-\ell})) \Theta_{E(r-1)} + \Theta_{E,i}.$$

По аналогии с линейным случаем доказывается, что $\lim_{i \rightarrow \infty} S_{E,i} = \vec{0}$ (см. [1]).

Выполняя предельный переход в (9) при $i \rightarrow \infty$ для всех $t \in [t_0, \infty)$ получим соотношение

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell}))(\tilde{Y}_0 - Y_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} D_{E,i}.$$

Отсюда следуют критерии устойчивости и асимптотической устойчивости системы (7):

$$\left\| \tilde{Y}(t) - Y(t) - \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) (\tilde{Y}_0 - Y_0) \right\| \leq \tilde{c}_3, \quad \tilde{c}_3 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{Y}(t) - Y(t) - \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) (\tilde{Y}_0 - Y_0) \right\| = 0.$$

Полученные критерии в отличие от линейного случая требуют нахождения приближенного решения системы. Критерии целесообразно применять для анализа устойчивости системы с фиксированной линейной частью и динамически изменяющейся нелинейной добавкой. В этом случае возможность компьютерной реализации критериев позволяет в режиме реального времени выполнять мониторинг характера устойчивости системы.

Далее рассмотрим задачу Коши для нелинейной системы

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (10)$$

где функция $F(t, Y)$ непрерывно дифференцируема по t в области

$$R_2 = \{t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta_2, \delta_2 > 0\}.$$

Предполагается, что для (10) в области R_2 выполнены все условия существования и единственности решения.

На произвольном промежутке $[t_0, t]$ точное значение величины возмущения определяется из соотношения

$$\tilde{y}_{k,(i+1)} - y_{k,(i+1)} = \left(1 + h \frac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{\tilde{y}_{k,i} - y_{k,i}} \right) (\tilde{y}_{k,i} - y_{k,i}) + w_{k,i} \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (11)$$

На основе рекуррентного преобразования (11) имеет место соотношение

$$\tilde{y}_{k,(i+1)} - y_{k,(i+1)} = \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{y}_{k,0} - y_{k,0}) + L_{0,i}^{(k)}, \quad (12)$$

где

$$L_{0,i}^{(k)} = \sum_{r=1}^i \prod_{\ell=0}^{i-r} (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) w_{k,(r-1)} + w_{k,i}, \quad D_i^{(k)} = \frac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{(\tilde{y}_{k,i} - y_{k,i})}.$$

В рассматриваемых условиях

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L_{0,i}^{(k)} = 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}$$

(см. [5]). Критерии устойчивости и асимптотической устойчивости имеют вид

$$\left| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \right| \leq \tilde{c}_4, \quad \tilde{c}_4 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}, \quad (13)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (14)$$

Так как

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{y}_{k,0} - y_{k,0})$$

для всех $t \in [t_0, \infty)$, то критерии (13), (14) можно представить в равносильной форме

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k,0} - y_{k,0}} \right| \leq \tilde{c}_4, \quad \tilde{c}_4 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}, \quad (15)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k,0} - y_{k,0}} \right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (16)$$

При компьютерной реализации критериев (15), (16) требуется находить решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с высокой степенью точности, что необходимо для получения достоверной оценки анализа устойчивости. Поэтому целесообразно использовать методы Рунге—Кутты 4-го, Батчера 6-го и Дормана—Принса 8-го порядка и кусочно-интерполяционный метод с итерационным уточнением [2].

С целью получения критериев устойчивости в логарифмической и аддитивной форме выполним следующее преобразование под знаком предела в (13):

$$\prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) = \exp \left\{ \ln \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \right\} \quad \text{или} \quad \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) = \exp \left\{ \sum_{\ell=0}^i \ln (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \right\}.$$

Соответственно величина возмущения определяется из соотношения

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \exp \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i \ln (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \right\} (\tilde{y}_{k,0} - y_{k,0}) \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

В результате критерии устойчивости и асимптотической устойчивости преобразуются к виду

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i \ln (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \leq \tilde{c}_5, \quad \tilde{c}_5 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i \ln b(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) = -\infty \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

С учетом того, что $hD_{i-\ell}^{(k)}$ — бесконечно малая и выполняется соотношение:

$$\frac{\ln (1 + hD_{i-\ell}^{(k)})}{hD_{i-\ell}^{(k)}} \rightarrow 1 \quad \forall \ell \leq i, \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

имеет место аддитивная форма критериев:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i hD_{i-\ell}^{(k)} \leq \tilde{c}_5, \quad \tilde{c}_5 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i hD_{i-\ell}^{(k)} = -\infty.$$

Далее приводится вывод критериев устойчивости системы (10) по характеру поведения правой части. Критерии должны быть равносильны (15), (16) и допускать программную реализацию.

На фиксированном промежутке $[t_0, t]$ значение правой части системы (10) для возмущенного и невозмущенного решения определяется из соотношений

$$f_k(t_i, \tilde{Y}_i) = \frac{\tilde{y}_{k,(i+1)} - \tilde{y}_{k,i} - \tilde{q}_{k,i}}{h}, \quad f_k(t_i, Y_i) = \frac{y_{k,(i+1)} - y_{k,i} - q_{k,i}}{h}, \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

где $\tilde{q}_{k,i}$, $q_{k,i}$ — остаточные члены формулы Тейлора для k -х компонентов решения.

Соответственно, начальное значение правой части системы (10) для возмущенного и невозмущенного решения имеет вид

$$f_k(t_0, \tilde{Y}_0) = \frac{\tilde{y}_{k,1} - \tilde{y}_{k,0} - \tilde{q}_{k,0}}{h}, \quad f_k(t_0, Y_0) = \frac{y_{k,1} - y_{k,0} - q_{k,0}}{h}, \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Отношение возмущения правой части (10) к начальному возмущению определяется из соотношения

$$\frac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)} = \frac{(\tilde{y}_{k,(i+1)} - \tilde{y}_{k,i}) - (y_{k,(i+1)} - y_{k,i}) - w_{k,i}}{(\tilde{y}_{k,1} - \tilde{y}_{k,0}) - (y_{k,1} - y_{k,0}) - w_{k,0}}, \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

где $w_{k,i} = \tilde{q}_{k,i} - q_{k,i}$.

Сгруппируем в правой части разности возмущенного и невозмущенного решения соответствующие одной точке разностной схемы:

$$\frac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)} = \frac{(\tilde{y}_{k,(i+1)} - y_{k,(i+1)}) - (\tilde{y}_{k,i} - y_{k,i}) - w_{k,i}}{b(\tilde{y}_{k,1} - y_{k,1}) - (\tilde{y}_{k,0} - y_{k,0}) - w_{k,0}}, \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (17)$$

Преобразуем выражения в скобках числителя согласно (12). В результате получим

$$\tilde{y}_{k,(i+1)} - y_{k,(i+1)} = \prod_{\ell=0}^{i-1} (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{y}_{k,1} - y_{k,1}) + L_{1,i}^{(k)},$$

где

$$L_{1,i}^{(k)} = \sum_{r=2}^i \prod_{\ell=0}^{i-r} (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) w_{k,(r-1)} + w_{k,i}.$$

В отличие от (12) в качестве начальных значений возмущенного и невозмущенного решения взяты $\tilde{y}_{k,1}$ и $y_{k,1}$. По аналогии имеем

$$\tilde{y}_{k,i} - y_{k,i} = \prod_{\ell=1}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{y}_{k,0} - y_{k,0}) + L_{2,i}^{(k)},$$

где

$$L_{2,i}^{(k)} = \sum_{r=1}^{i-1} \prod_{\ell=0}^{i-r-1} (1 + hD_{i-\ell-1}^{(k)}) w_{k,(r-1)} + w_{k,(i-1)}.$$

В результате соотношение (17) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)} &= \\ &= \frac{\prod_{\ell=0}^{i-1} (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{y}_{k,1} - y_{k,1}) - \prod_{\ell=1}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{y}_{k,0} - y_{k,0}) + L_{1,i}^{(k)} - L_{2,i}^{(k)} - w_{k,i}}{(\tilde{y}_{k,1} - y_{k,1}) - (\tilde{y}_{k,0} - y_{k,0}) - w_{k,0}}, \end{aligned}$$

для всех $k \in \overline{1, n}$. Выполняя предельный переход при $i \rightarrow \infty$ с учетом того, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L_{1,i}^{(k)} = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} L_{2,i}^{(k)} = 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

получим

$$\frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)} = \frac{\lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^{i-1} (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{y}_{k,1} - y_{k,1}) - \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=1}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{y}_{k,0} - y_{k,0})}{(\tilde{y}_{k,1} - y_{k,1}) - (\tilde{y}_{k,0} - y_{k,0})}$$

для всех $t \in [t_0, \infty)$ и всех $k \in \overline{1, n}$. Очевидно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^{i-1} (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=1}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}).$$

Следовательно,

$$\frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (18)$$

Таблица 1. Результаты анализа устойчивости системы (21)

t	10^3	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	10^4
norma ₁	$2,03 \cdot 10^{-434}$	$1,03 \cdot 10^{-868}$	$1,35 \cdot 10^{-2171}$	$6,84 \cdot 10^{-2606}$	$8,95 \cdot 10^{-3909}$	$4,54 \cdot 10^{-4343}$
norma ₂	$6,77 \cdot 10^{-435}$	$3,44 \cdot 10^{-869}$	$4,49 \cdot 10^{-2172}$	$2,28 \cdot 10^{-2606}$	$2,98 \cdot 10^{-3909}$	$1,51 \cdot 10^{-4343}$
norma ₃	$5,08 \cdot 10^{-435}$	$2,58 \cdot 10^{-869}$	$3,37 \cdot 10^{-2172}$	$1,71 \cdot 10^{-2606}$	$2,23 \cdot 10^{-3909}$	$1,13 \cdot 10^{-4343}$

Предположим, что решение системы (10) устойчиво. Но тогда с необходимостью должно выполняться условие (13), а значит, с учетом (18), и следующее условие:

$$\left| \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)} \right| \leq \tilde{c}_6, \quad \tilde{c}_6 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (19)$$

Условие (19) согласно (13) является также и достаточным условием устойчивости.

Аналогично для асимптотической устойчивости системы (10) необходимо и достаточно чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{f_k(t_0, \tilde{Y}_0) - f_k(t_0, Y_0)} \right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (20)$$

Получена еще одна разновидность критериев устойчивости и асимптотической устойчивости (19), (20) систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ориентированная на компьютерную реализацию.

Трактовки асимптотического поведения решения, полученные на основе представленных критериев, следует считать близкими к достоверным в содержательном смысле. Компьютерный анализ не может полностью формально заменить математическое исследование характера устойчивости, оставляя окончательное решение проблемы за качественной теорией. Вместе с тем на практике в рамках широкого программного и численного эксперимента разработанный подход компьютерного анализа устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений всегда приводил к исчерпывающе достоверной оценке характера устойчивости.

3. Программный и численный эксперимент. Эксперимент проводился с помощью ПК на базе процессора Intel(R) Core(TM) i5-4460 в среде программирования Delphi. Написаны программы, реализующие конструкцию критериев (5), (15), (19). При анализе устойчивости линейной системы в программе циклически вычисляется частичное матричное произведение из левой части критерия (5) и через заданное количество шагов определяется и выводится на печать норма. В ходе анализа устойчивости нелинейной систем для каждого уравнения вычисляется значение выражения из левой части критериев (15), (19) и находится векторная норма.

По поведению значений нормы делается вывод о характере устойчивости исследуемой системы. Неограниченный рост означает неустойчивость, ограниченные изменения свидетельствуют об устойчивости, стремление к нулю является признаком асимптотической устойчивости.

Приближенные значения возмущенного и невозмущенного решения, входящие в конструкцию критериев (15), (19) находятся с помощью метода Рунге—Кутта 4-го порядка.

Пример 1. Исследуется на устойчивость система

$$y_1' = -y_1 + \frac{y_2}{1+t^2}, \quad y_2' = -\frac{y_1}{1+t^2} - y_2. \quad (21)$$

Компьютерный анализ устойчивости выполняется на промежутке $[0, 10^4]$ при значении шага разностной схемы 10^{-3} . Результаты представлены в таблице 1. Во второй строке приводятся значения нормы, соответствующие критерию (5), в третьей строке — критерию (15), в четвертой строке — критерию (19).

Таблица 2. Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (22)

t	10^3	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	10^4
norma ₁	1,01	1,02	1,05	1,06	1,08	1,09
norma ₂	1,01	1,02	1,05	1,06	1,08	1,09

Таблица 3. Результаты анализа устойчивости ненулевого решения системы (22)

t	10^3	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	10^4
norma ₁	14,99	28,63	73,92	89,84	139,39	156,46
norma ₂	8,00	14,83	36,49	44,46	69,25	77,79

Представленные значения нормы по всем трем критериям монотонно стремятся к нулю, что является признаком асимптотической устойчивости. Время работы программы при анализе по критерию (5) составляет около 4 с., по критериям (15), (19) — около 1,5 с.

Пример 2. Исследуется на устойчивость решение системы (см. [7])

$$y_1' = -y_2 \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad y_2' = y_1 \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \quad (22)$$

Первоначально исследуется нулевое решение системы (22) при численных значениях шага и промежутка из предыдущего примера. Начальные значения компонент возмущенного решения $\tilde{y}_{10} = 10^{-5}$, $\tilde{y}_{20} = 2 \cdot 10^{-5}$. Результаты анализа устойчивости представлены в таблице 2. Во второй строке результаты анализа по критерию (15), в третьей строке — по критерию (19).

Значения нормы ограничены константой, что свидетельствует об устойчивости.

Далее выполняется анализ устойчивости ненулевого решения системы (22): $y_{10} = y_{20} = 0,01$, величина возмущения начальных данных $\delta = 10^{-5}$.

Наблюдается монотонный рост значений нормы по обоим критериям, что свидетельствует о неустойчивости. Время работы программы при анализе нулевого решения около 1,5 с, ненулевого — около 3 с. Полученные результаты анализа устойчивости системы (22) находятся в полном соответствии с представленными в [7].

Пример 3. Исследуется модель периодической реакции Белоусова–Жаботинского (см. [6])

$$y_1' = 77,27(y_2 + y_1(1 - 8,375 \cdot 10^{-6} y_1 - y_2)), \quad y_2' = 77,27^{-1}(y_3 - y_2(1 + y_1)), \quad y_3' = 0,161(y_1 - y_3). \quad (23)$$

Первоначально анализ устойчивости выполняется при начальных условиях $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 3$ на промежутке $[0, 10^3]$ с шагом 10^{-5} , величина возмущения для каждого решения соответственно равна $\delta_1 = 10^{-5}$, $\delta_2 = 2 \cdot 10^{-5}$, $\delta_3 = 3 \cdot 10^{-5}$.

Наблюдаются периодические резкие скачки значений нормы на коротких промежутках. Такое поведение нормы свидетельствует об устойчивости решения системы. Значения нормы, соответствующие первому скачку, представлены в таблице 4.

Далее выполняется анализ устойчивости системы (23) при начальных условиях $y_1(0) = 4$, $y_2(0) = 1,1$, $y_3(0) = 4$. В отличие от предыдущего случая резкий скачок значений нормы происходит в самом начале промежутка исследования системы (23) (таблица 5).

В целом наблюдаются ограниченные колебания значений нормы, что в соответствии с критериями (15), (19) свидетельствует об устойчивости решения системы (23). Время работы программы в обоих случаях около 7.5 мин. При анализе устойчивости жестких нелинейных систем нередко возникают трудности при вычислении возмущенного и невозмущенного решения, входящих в конструкцию критериев. Для их вычисления целесообразно использовать специализированные

Таблица 4. Результаты анализа устойчивости решения системы (23) при начальных условиях $y_1(0) = 1, y_2(0) = 2, y_3(0) = 3$

t	18	19	20	21	22	23
norma ₁	61,79	4175,04	$3,92 \cdot 10^3$	$8,59 \cdot 10^5$	$9,40 \cdot 10^5$	$3,83 \cdot 10^6$
norma ₂	26,13	85,55	$2,22 \cdot 10^3$	$7,53 \cdot 10^5$	$6,88 \cdot 10^5$	$2,03 \cdot 10^6$
t	24	25	26	27	28	29
norma ₁	$6,29 \cdot 10^4$	$5,36 \cdot 10^4$	$4,56 \cdot 10^4$	$3,88 \cdot 10^4$	$3,30 \cdot 10^4$	$2,80 \cdot 10^4$
norma ₂	$1,18 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^5$	$8,55 \cdot 10^4$	$7,27 \cdot 10^4$	$6,17 \cdot 10^4$	$5,24 \cdot 10^4$

Таблица 5. Результаты анализа устойчивости решения системы (23) при начальных условиях $y_1(0) = 4, y_2(0) = 1,1, y_3(0) = 4$

t	1	2	3	4	5	6
norma ₁	$3,21 \cdot 10^4$	$3,68 \cdot 10^5$	$4,31 \cdot 10^5$	$3,03 \cdot 10^4$	$2,57 \cdot 10^4$	$2,19 \cdot 10^4$
norma ₂	$1,62 \cdot 10^4$	$3,10 \cdot 10^5$	$2,97 \cdot 10^5$	$4,69 \cdot 10^4$	$3,99 \cdot 10^4$	$3,40 \cdot 10^4$
t	7	8	9	10	11	12
norma ₁	$1,86 \cdot 10^4$	$1,58 \cdot 10^4$	$1,35 \cdot 10^4$	$1,14 \cdot 10^4$	$9,78 \cdot 10^3$	$8,32 \cdot 10^3$
norma ₂	$2,89 \cdot 10^4$	$2,46 \cdot 10^4$	$2,09 \cdot 10^4$	$1,78 \cdot 10^4$	$1,51 \cdot 10^4$	$1,28 \cdot 10^4$

программы для решения жестких систем (см. [6]) или кусочно-интерполяционный метод, основанный на приближении решения и правой части системы полиномами Лагранжа с числовыми коэффициентами (см. [8]). Приближения решения и правой части системы находятся с высокой точностью, кроме того существенно сокращается время на вычисление требуемых приближений. На практике это дает возможность проводить анализ устойчивости на промежутках существенно большей длины и устанавливать асимптотические свойства исследуемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Заключение. Представлены критерии устойчивости и асимптотической устойчивости систем линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в виде необходимых и достаточных условий. В случае линейной системы для реализации критериев требуется только информация о матрице коэффициентов из правой части системы. Для нелинейной системы приводятся разновидности равносильных критериев, полученных на основе рекуррентных преобразований разностных схем. Критерии инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, длины промежутка и шага решения. Конструкция критериев допускает циклическую программную реализацию. На этой основе выполняется компьютерный анализ устойчивости систем в режиме реального времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буланов С. Г. Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2019. — 20, № 9. — С. 542–549.
2. Буланов С. Г., Джануци Г. А. Программный анализ устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе мультипликативных преобразований разностных схем и кусочно-полиномиальных приближений решения // Промышленные АСУ и контроллеры. — 2015. — № 2. — С. 10–20.
3. Колесников А. А. Прикладная синергетика: основы системного синтеза. — Таганрог, 2007.

4. *Ляпина А. А.* Математическое моделирование и оценка нелинейной динамики состояния загрязнения экосистемы водного объекта // Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. — Пензенский гос. ун-т: Пенза, 2014.
5. *Ромм Я. Е., Буланов С. Г.* Численное моделирование устойчивости по Ляпунову // Совр. наук. технол. — 2021. — № 7. — С. 42–60.
6. *Хайрер Э., Ваннер Г.* в кн.: Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999.
7. *Чезари Л.* в кн.: Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.
8. *Bulanov S. G.* Computer analysis of differential systems stability based on linearization and matrix multiplicative criteria // J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 012101.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Буланов Сергей Георгиевич

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО

«Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»

E-mail: bulanovtspi@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 38–58
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-38-58

УДК 519.218.7

ФОРМУЛА КАЦА—ЗИГЕРТА ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

© 2023 г. Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. С. МАЗМАНИШВИЛИ

*Посвящается светлой памяти нашего учителя
академика НАНУ С. В. Пелетминского (1931–2022)*

Аннотация. Описана общая схема вычисления характеристических функций случайных величин, представляемых квадратичными функционалами от траекторий элементарных гауссовских процессов, основанная на методе Фейнмана—Каца. Эта схема применена для осцилляторного случайного процесса $\langle \tilde{x}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$. Вычислена характеристическая функция $Q(-i\lambda, t)$ случайной величины $J_t[\tilde{x}(s)] = \int_0^t (d\tilde{x}(s)/ds)^2 ds$ от его случайных траекторий $\tilde{x}(t)$.

Ключевые слова: осцилляторный случайный процесс, матричное уравнение Риккати, белый шум, уравнение Колмогорова, характеристическая функция.

KAC—SIEGERT FORMULA FOR OSCILLATORY RANDOM PROCESSES

© 2023 Yu. P. VIRCHENKO, A. S. MAZMANISHVILI

ABSTRACT. A general scheme for calculating the characteristic functions of random variables represented by quadratic functionals of the trajectories of elementary Gaussian processes based on the Feynman—Kac method is described. This scheme is applied to the oscillatory random process $\langle \tilde{x}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$. The characteristic function $Q(-i\lambda, t)$ of the random variable $J_t[\tilde{x}(s)] = \int_0^t (d\tilde{x}(s)/ds)^2 ds$ of its random trajectories $\tilde{x}(t)$ is calculated.

Keywords and phrases: oscillatory random process, matrix Riccati equation, white noise, Kolmogorov equation, characteristic function.

AMS Subject Classification: 60H10, 60G15, 60G35

1. Введение. Системы стохастических линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами являются основой математического моделирования, когда возникает необходимость использования случайных функций при описании процессов изменения случайных величин со временем (см., например, [14, 25, 26]). Статистические характеристики случайных процессов, порождаемых совокупностями решений систем такого типа и связанными с ними распределениями вероятностей, используются также в математической статистике при анализе временных рядов (см., например, [12, 22]).

Обозначим посредством $\tilde{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, случайную вектор-функцию, которая принимает значения в \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. Здесь и далее знак тильда, поставленный над символом математического объекта, указывает на его случайный характер с точки зрения теории вероятностей. В общем виде стохастические системы указанного типа записываются следующим образом в терминах стохастического дифференциала $d\tilde{w}(t)$ по многомерному винеровскому процессу $\tilde{w}(t) = \langle \tilde{w}_j(t), j = 1, \dots, n \rangle$, $t \geq t_0$:

$$d\tilde{x}(t) = A\tilde{x}(t)dt + Sd\tilde{w}(t), \quad (1.1)$$

где A и S — вещественные $n \times n$ -матрицы, причем матрица S симметрична, $S^T = S$ и неотрицательно определена, а $\tilde{\mathbf{w}}(t) = \langle \tilde{w}_j(t), j = 1, \dots, n \rangle$ — случайная вектор-функция, компонентами которой являются n экземпляров таких статистически независимых стандартных винеровских процессов (см., например, [8]), что

$$\mathbb{E} w_j(s)w_k(t) = \delta_{jk} \min\{s, t\}, \quad (1.2)$$

где, здесь и далее, \mathbb{E} — функционал математического ожидания по мере рассматриваемого случайного процесса, без конкретизации того, какой процесс имеется в виду, что не должно вызвать недоразумений; δ_{jk} — символ Кронекера, $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Допустимы различные определения стохастического дифференциала $d\tilde{\mathbf{w}}(t) = \langle d\tilde{w}_j(t), j = 1, \dots, n \rangle$ (см., например, [26]). Использование того или иного определения тесно связано с той конкретной задачей, которая решается в рамках формализма стохастических дифференциальных уравнений. Наиболее употребительными в математике являются дифференциал в смысле Ито (см., например, [7]) и дифференциал в смысле Стратоновича [29]. В рандомизированных задачах математической физики, по-видимому, наиболее адекватным является дифференциал Стратоновича, в связи с известной теоремой Вонга-Закаи [30] (см. также [17]), согласно которой стохастическому уравнению с дифференциалом Стратоновича удовлетворяют траектории всякого случайного процесса с непрерывным временем, который является предельным в среднем квадратичном для последовательности случайных процессов $\langle \tilde{\mathbf{x}}_m(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$, $m \in \mathbb{N}$, траектории каждого из которых подчинены дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{x}}^{(m)}(t) = f(\mathbf{x}^{(m)}, t) + g(\mathbf{x}^{(m)}, t)\boldsymbol{\varphi}^{(m)}(t),$$

где каждый стационарный случайный процесс $\langle \varphi_n(t), t \in \mathbb{R} \rangle$ непрерывен с вероятностью 1, а вся последовательность этих процессов сходится в смысле сходимости соответствующих характеристических функционалов к предельному характеристическому функционалу, который для любой финитной непрерывной вектор-функции $\mathbf{u}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ со значениями в \mathbb{R}^n определяет обобщенный стационарный случайный процесс $\langle \boldsymbol{\varphi}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$ так, что при $m \rightarrow \infty$ имеет место

$$\mathbb{E} \exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{\varphi}^{(m)}(t), \mathbf{u}(t)) dt \right) \rightarrow \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^2(t) dt \right) \equiv \mathbb{E} \exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}(t), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)) dt \right). \quad (1.3)$$

Здесь и далее, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в \mathbb{R}^n . Этот предельный обобщенный случайный процесс $\langle \boldsymbol{\varphi}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$ называется «белым шумом» (стационарным с единичной интенсивностью). Заметим, что в задачах, связанных со стохастическими системами с постоянными коэффициентами, не возникает различия в получаемых результатах при использовании того или иного конкретного типа дифференциала. В этом случае различия проявляются только лишь при проведении доказательств математических утверждений и конкретных вычислений. В частности, такое положение имеет место при решении задачи, которому посвящена настоящая работа.

В связи с вышесказанным, на протяжении статьи, мы, при необходимости проведения явных вычислений, используем стохастический дифференциал Стратоновича. В этом случае уравнение (1.1) допустимо записать в форме обычного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}(t) = A \tilde{\mathbf{x}}(t) + S \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t), \quad (1.4)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) = d\tilde{\mathbf{w}}(t)/dt = \langle \tilde{\varphi}_j(t), j = 1, \dots, n \rangle$. Так как траектории $\tilde{\mathbf{w}}(t)$ стандартного винеровского процесса с единичной дисперсией, исходящие из точки $\mathbf{x} = 0$ с началом отсчета времени в момент $t = t_0$, с вероятностью 1 всюду непрерывны, но нигде не дифференцируемы (см. [15]), то производную $d\tilde{\mathbf{w}}(t)/dt = \boldsymbol{\varphi}(t)$ в уравнении (1.4) нужно понимать в обобщенном смысле.

Так как винеровский процесс гауссовский (см., например, [18]) и его корреляционная функция (1.2) зависит от разности $|s - t|$, то обобщенную случайную вектор-функцию $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$, нужно трактовать как обобщенный случайный стационарный гауссовский векторнозначный процесс с нулевым средним значением. Компонентами $\varphi_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ его векторных значений являются статистически независимые гауссовские случайные процессы, для которых выполняется $\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(s)\tilde{\varphi}_k(t) = 0$ при $j \neq k$ и каждый из которых имеет нулевое среднее значение $\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(t) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Корреляционная функция каждой фиксированной компоненты равна $\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(s)\tilde{\varphi}_j(t) = \delta(s - t)$, т.е. каждая из компонент $\varphi_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ является скалярным обобщенным процессом «белого шума». Здесь

$\delta(t)$ — т.н. обобщенная функция Дирака (см., например, [13]). Если дифференциальное уравнение (1.4) понимается по Стратоновичу, то его можно формально проинтегрировать в смысле Римана

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{(t-t_0)A}\tilde{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(A(t-s))S d\tilde{\mathbf{w}}(s), \quad (1.5)$$

где интеграл следует понимать как стохастический интеграл Стратоновича. Таким образом, отображение, описываемое формулой (1.5), *индуцирует* случайный процесс $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$, так как оно определяет класс траекторий этого процесса на основе класса траекторий векторнозначного винеровского процесса $\langle \tilde{\mathbf{w}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$ вместе со структурой измеримости на пространстве всех локально непрерывных вектор-функций на $[t_0, \infty)$. Формула (1.5) также полностью определяет распределение вероятностей случайного процесса $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$ на σ -алгебре измеримых множеств в пространстве непрерывных функций при учете распределения вероятностей $\Pr\{\tilde{\mathbf{x}}(t_0) < \mathbf{x}_0\}$ случайного вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ — т.н. *распределения вероятностей входа в процесс* [7] при учете статистической независимости случайного вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ от процесса $\langle \tilde{\mathbf{w}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$. Поэтому во всех формулах, в которых вычисляется математическое ожидание \mathbf{E} по распределению вероятностей случайного процесса $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$, можно считать, что оно вычисляется по произведению распределений вероятностей порождающего его случайного процесса $\langle \tilde{\mathbf{w}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$ и распределению вероятностей случайного вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$. Можно также считать, что вычисление этого математического ожидания по процессу $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$, эквивалентным образом, выполняется на основе распределения вероятностей случайного вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ и характеристического функционала обобщенного гауссовского случайного процесса $\langle \tilde{\varphi}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$, определяемого формулой (1.3), из которой следует

$$\mathbf{E} \tilde{\varphi}_j(t) = 0, \quad \mathbf{E} \tilde{\varphi}_j(s)\tilde{\varphi}_{jk}(t) = \delta_{jk}\delta(s-t), \quad j, k \in \{1, \dots, n\},$$

а также правило усреднения произведений $\varphi_{j_1}(t_1)\dots\varphi_{j_m}(t_m)$ при попарно неравных друг другу значениях t_1, \dots, t_m , $m \in \mathbb{N}$ (т.н. правило Вика [27]).

В настоящей работе мы рассматриваем т.н. *осцилляторный* случайный процесс $\langle \tilde{x}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$, который порождается двумерным $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \langle \tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t) \rangle$ гауссовским марковским в случайным процессом на любом полуинтервале $[t_0, \infty)$. Процесс $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ определяется формулой (1.5) при $n = 2$ с соответствующей ему 2×2 -матрицей A такой, что он обладает при $t_0 \rightarrow -\infty$ предельным по мере случайным процессом, который является стационарным, гауссовским процессом с нулевым средним значением и который мы далее будем обозначать тем же самым символом $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$. Целью работы является получение формулы для характеристической функции

$$Q(-i\lambda, t) = \mathbf{E} \exp\left(i\lambda J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]\right) \quad (1.6)$$

распределения вероятностей случайной величины, которая представляется значениями квадратичного зависящего от параметра $t > 0$ функционала

$$J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = \int_0^t \left(\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}\right)^2(s)ds, \quad (1.7)$$

определенного на пространстве непрерывно дифференцируемых с вероятностью 1 функций $x(t)$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Эта формула аналогична формуле Каца-Зигерта [20], которая имеет место при $n = 1$ для стационарного марковского гауссовского случайного процесса Орнштейна-Уленбека, траектории $\tilde{x}(t)$ которого подчинены стохастическому уравнению Ланжевена $\dot{\tilde{x}}(t) + 2\beta\tilde{x}(t) = \sigma^{1/2}\varphi(t)$ с $\beta > 0$. В этом случае характеристическая функция $Q(-i\lambda, t)$ случайной величины

$$J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = \int_0^t \tilde{x}^2(s)ds,$$

дается формулой

$$Q(\lambda, t) = \left(\frac{4\beta r e^{2\beta t}}{(\beta + r)^2 e^{2rt} - (\beta - r)^2 e^{-2rt}} \right)^{1/2}, \quad (1.8)$$

$r = (\beta^2 + \lambda\sigma/2)^{1/2}$, которая находит различные применения в задачах статистической радиотехники [20, 28], в задачах статистики фотоотсчетов в квантовой оптике [23] и других областях физики [5]. Для решения задач такого типа разработаны различные методы. Основопологающим в этом отношении является метод, которым впервые была решена задача для функционала $J_t[\tilde{w}(s)]$ от траекторий винеровского процесса [19]. Этот метод, который впоследствии получил название метода Фейнмана-Каца-Дынкина, существенно использует марковость случайного процесса, по мере которого производится усреднение. Более общий подход к решению таких задач основан на т.н. методе Карунена-Лоэва (см. [21, 24]), использующий только лишь гауссовость случайного процесса $\langle \tilde{x}(t), t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \rangle$. Он позволяет находить математические ожидания для более сложных квадратичных функционалов от траекторий процесса (см. [1–4]).

2. Осцилляторный случайный процесс. Траектории *осцилляторного случайного процесса* $\langle \tilde{x}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$ подчинены стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{x} + 2\beta \frac{d}{dt} \tilde{x} + \omega^2 \tilde{x} = \sigma^{1/2} \tilde{\varphi}(t), \quad (2.1)$$

где $\tilde{\varphi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — одномерный белый шум. Введя двухкомпонентный случайный процесс

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \langle \tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t) \rangle, \quad \tilde{x}_1(t) = \dot{\tilde{x}}(t)/\omega, \quad \tilde{x}_2(t) = \tilde{x}(t)$$

и, аналогично, двухкомпонентный обобщенный случайный процесс $\tilde{\varphi}(t) = \langle \tilde{\varphi}(t), 0 \rangle$, уравнение (2.1) представим в виде системы уравнений (1.4) первого порядка с $n = 2$ и матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -2\beta & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{\sigma^{1/2}}{\omega} V, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Стохастическое дифференциальное уравнение (1.4) определяет случайный процесс $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$ на каждом полуинтервале $[t_0, \infty)$, где двумерный «белый шум» $\tilde{\varphi}(t)$ обладает корреляционной функцией $\mathbf{E} \tilde{\varphi}_{j_1}(t_1) \tilde{\varphi}_{j_2}(t_2) = \delta_{j_1,1} \delta_{j_2,1} \delta(t_1 - t_2)$. Тогда для него справедлива формула (1.5). Следовательно, траектории этого случайного процесса определены при $t_0 \leq 0$ и, с вероятностью 1, всюду на $[t_0, \infty)$ непрерывны. В частности, с вероятностью 1, всюду непрерывна его первая компонента $\tilde{x}_1(t)$. Поэтому траектории $\tilde{x}_2(t)$ с вероятностью 1 всюду непрерывно дифференцируемы при $t \in [t_0, \infty)$. Пусть $t_0 < 0$ и при каждом значении $t > 0$ с вероятностью 1 определено значение функционала (1.7). Вся совокупность этих значений определяет случайную величину с распределением вероятностей, индуцированным распределением вероятностей случайного процесса $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$.

Определение 2.1. Случайный векторнозначный процесс $\langle \tilde{\mathbf{z}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$ со значениями из \mathbb{R}^2 называется гауссовским, если его характеристический функционал определяется формулой

$$\mathbf{E} \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{z}}(t)) dt \right) = \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{u}(t), \mathbf{z}_0(t)) dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^{\infty} C_{jk}(s, t) u_j(s) u_k(t) ds \right). \quad (2.3)$$

где $\mathbf{u}(t)$ — произвольная непрерывная финитная вектор-функция со значениями из \mathbb{R}^2 .

Гауссовский процесс полностью определяется математическим ожиданием $\mathbf{z}_0(t) = \mathbf{E} \tilde{\mathbf{z}}(t)$, вычисляемым по распределению вероятностей этого процесса, и его корреляционной функцией $C_{jk}(s, t) = \mathbf{E} (\tilde{z}_j(s) - (\mathbf{z}_0)_j(s)) (\tilde{z}_k(t) - (\mathbf{z}_0)_k(t))$.

Матричное ядро $C_{jk}(s, t)$ в (2.3) обладает свойством симметрии $C_{jk}(s, t) = C_{kj}(t, s)$ и положительной определенностью, т.е. для любой непрерывной финитной вектор-функции $\mathbf{u}(t)$ имеет место

$$\mathbf{E} \left[\int_{t_0}^{\infty} u_j(t) (\tilde{z}_j(t) - (\mathbf{z}_0)_j(t)) \right]^2 dt = \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^{\infty} C_{jk}(s, t) u_j(s) u_k(t) ds > 0.$$

Согласно данному определению, обобщенный процесс $\langle \tilde{\varphi}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$ гауссовский, с характеристическим функционалом (1.3). Он является пределом характеристических функционалов гауссовских процессов.

Ввиду формулы (1.5), которая справедлива для траекторий процесса $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$, он является линейным преобразованием гауссовского случайного процесса $\tilde{\varphi}(s)$, $s \in (t_0 - 0, \infty)$. Поэтому имеет место

Теорема 2.1. *Для любого t_0 и любого вектора $\mathbf{x}_0 = \langle x_1(t_0) = \dot{x}(t_0)/\omega, x_2(t_0) = x(t_0) \rangle$ случайный процесс $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$ гауссовский.*

Доказательство. Поставим в определении характеристического функционала выражение для траекторий (1.5). Так как $\mathbb{E} \tilde{\varphi}(s) = 0$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{u}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t)) dt \right) &= \\ &= \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} (e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t)) dt \right) \mathbb{E} \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^t (\mathbf{u}(t), e^{A(t-s)} S \tilde{\varphi}(s)) ds \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Далее, вводя функцию

$$\mathbf{v}(s) = \int_s^{\infty} S e^{A^T(t-s)} \mathbf{u}(t) dt,$$

вычислим математическое ожидание

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^t (\mathbf{u}(t), e^{A(t-s)} S \tilde{\varphi}(s)) ds \right) &= \mathbb{E} \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^t (S e^{A^T(t-s)} \mathbf{u}(t), \tilde{\varphi}(s)) ds \right) = \\ &= \mathbb{E} \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} ds \int_s^{\infty} (S e^{A^T(t-s)} \mathbf{u}(t), \tilde{\varphi}(s)) dt \right) = \mathbb{E} \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{v}(s), \tilde{\varphi}(s)) ds \right) = \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{v}^2(s) ds \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left(\int_s^{\infty} S e^{A^T(t-s)} \mathbf{u}(t) dt \right)^2 ds \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Интеграл в показателе экспоненты преобразуем, используя симметрию матрицы S , так, что получающееся в процессе преобразований подинтегральное выражение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left(\int_s^{\infty} S e^{A^T(t-s)} \mathbf{u}(t) dt \right)^2 ds &= \int_{t_0}^{\infty} ds \int_s^{\infty} [S e^{A^T(t_1-s)} \mathbf{u}(t_1)]_j dt_1 \int_{t_1}^{\infty} [S e^{A^T(t_2-s)} \mathbf{u}(t_2)]_j dt_2 = \\ &= \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} [S e^{A^T(t_1-s)} \mathbf{u}(t_1)]_j ds \int_{t_1}^{\infty} [S e^{A^T(t_2-s)} \mathbf{u}(t_2)]_j dt_2 = \\ &= \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \int_{t_0}^{t_1} [S e^{A^T(t_2-s)} \mathbf{u}(t_2)]_j [S e^{A^T(t_1-s)} \mathbf{u}(t_1)]_j ds = \\ &= \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \int_{t_0}^{t_1} (S e^{A^T(t_2-s)} \mathbf{u}(t_2), S e^{A^T(t_1-s)} \mathbf{u}(t_1)) ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} \left(\left[\int_{t_0}^{\min\{t_1, t_2\}} e^{A(t_1-s)} S^2 e^{A^T(t_2-s)} ds \right] \mathbf{u}(t_2), \mathbf{u}(t_1) \right) dt_2. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя это преобразованное выражение в (2.5), получаем

$$\mathbb{E} \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^t (S e^{A^T(t-s)} \mathbf{u}(t), \tilde{\varphi}(s)) ds \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} (C(t_1, t_2) \mathbf{u}(t_2), \mathbf{u}(t_1)) dt_2 \right),$$

где матрица-функция $C(t_1, t_2)$ определяется матричным интегральным ядром

$$C_{j_1, j_2}(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{\min\{t_1, t_2\}} \left[e^{A(t_1-s)} S^2 e^{A^T(t_2-s)} \right]_{j_1, j_2} ds. \quad (2.6)$$

Принимая во внимание (2.4) и затем сравнивая с формулой (2.3), определяющей вид характеристического функционала гауссовского процесса, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы, так как по построению ядро (2.6) является корреляционной функцией. \square

Следствие 2.1. *Осцилляторный случайный процесс $\langle \tilde{x}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$ является гауссовским.*

Доказательство. Процесс $\langle \tilde{x}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$ является проекцией гауссовского векторнозначного процесса $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [t_0, \infty) \rangle$. \square

Предположим, что носитель функций $\mathbf{u}(t)$ в формуле (2.3) совпадает с $[t_0, t]$. Перейдем в этой формуле к пределу на классе непрерывных на $[t_0, t]$ функций таким образом, что $\mathbf{u}(s) \rightarrow \delta(s-t)\mathbf{q}$ с фиксированным вектором $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$. В этом случае формула (2.3) принимает вид

$$\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{z}_0, t_0) \equiv \mathbb{E} \exp \left(i(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{z}}(t)) \right) = \exp \left(i(\mathbf{q}, e^{(t-t_0)A} \mathbf{z}_0) - \frac{1}{2} (C(t, t) \mathbf{q}, \mathbf{q}) \right), \quad (2.7)$$

где матрица-функция $C(t, t)$, согласно (2.6), определяется формулой

$$C(t, t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} S^2 e^{A^T(t-s)} ds = \int_0^{t-t_0} e^{sA} S^2 e^{sA^T} ds. \quad (2.8)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Функция $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяет условию*

$$\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \exp \left(i(\mathbf{q}, \mathbf{x}_0) \right)$$

и подчинена дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \left(\mathbf{q}, A \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \right) - \frac{1}{2} (S^2 \mathbf{q}, \mathbf{q}) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0). \quad (2.9)$$

Доказательство. Заметим, что $C(t, t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$ согласно (2.8) и, следовательно,

$$\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \exp \left(i(\mathbf{q}, \mathbf{x}_0) \right).$$

Из (2.7) следует, что производная по t функции $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \left[i(\mathbf{q}, A e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} C(t, t) \mathbf{q}, \mathbf{q} \right) \right] \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0). \quad (2.10)$$

С другой стороны, вычислим градиент в пространстве \mathbb{R}^2 векторов \mathbf{q} :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \left[i e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 - C(t, t) \mathbf{q} \right] \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0).$$

Тогда, симметризовав матрицу, определяющую квадратичную форму

$$(AC(t, t) \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left([AC(t, t) + C(t, t)A^T] \mathbf{q}, \mathbf{q} \right),$$

получаем

$$\left(\mathbf{q}, A \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \left[i(\mathbf{q}, A e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0) - \frac{1}{2} ([AC(t, t) + C(t, t)A^T] \mathbf{q}, \mathbf{q}) \right] \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0). \quad (2.11)$$

Так как, согласно (2.8),

$$AC(t, t) + C(t, t)A^T = \int_0^{t-t_0} \left(\frac{d}{ds} e^{sA} S^2 e^{sA^T} \right) ds = e^{A(t-t_0)} S^2 e^{A^T(t-t_0)} - S^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C(t, t) = e^{A(t-t_0)} S^2 e^{A^T(t-t_0)},$$

то, сравнивая (2.11) с (2.10), приходим к (2.7). \square

Введем плотность распределения условных вероятностей перехода $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbb{E} \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t))$ для случайного процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [t_0, \infty)\}$ из точки \mathbf{x}_0 в момент времени t_0 в точку \mathbf{x} в момент времени t . Здесь усредняется двумерная δ -функция на \mathbb{R}^2 . Записывая представление этой δ -функций в виде интеграла Фурье

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) d\mathbf{q},$$

находим, что образ Фурье по переменной \mathbf{x} для плотности $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ равен

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x} = \mathbb{E} \exp(i(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}}(t))) = \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0).$$

Следовательно, эта плотность, согласно (2.7), восстанавливается по образу следующим образом:

$$f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(i(\mathbf{q}, e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) - \frac{1}{2}(C(t, t)\mathbf{q}, \mathbf{q})\right) d\mathbf{q}. \quad (2.12)$$

Теорема 2.2. *Плотность условных вероятностей перехода $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ является решением параболического дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, A\mathbf{x} \right) f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (2.13)$$

с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Доказательство. Тот факт, что $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ удовлетворяет указанному начальному условию, непосредственно следует из (2.12) при учете того, что $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \rightarrow \exp(i(\mathbf{q}, \mathbf{x}_0))$ при $t \rightarrow t_0$, согласно утверждению леммы.

Продифференцируем по t плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ в (2.12) и учтем, что функция $f(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ удовлетворяет уравнению (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) \cdot \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) \left((\mathbf{q}, A \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)) - \frac{1}{2} (S^2 \mathbf{q}, \mathbf{q}) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \right) d\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Первое слагаемое в (2.14) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) \left(\mathbf{q}, A \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \right) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q} = \\ = \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{jk} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial q_k} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Преобразование последнего интеграла по частям, с учетом стремления к нулю интеграла по поверхности шара в \mathbf{q} -пространстве с неограниченно возрастающим радиусом, приводит его к выражению

$$-\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, A\mathbf{x}\right)f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0).$$

Интеграл же, соответствующий второму слагаемому в (2.14), преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) (S^2 \mathbf{q}, \mathbf{q}) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q} = \\ & = \frac{(-i)}{(2\pi)^2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{q} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q}\right) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение вместе с выражением (2.15) в (2.14), получаем уравнение (2.13). \square

Следствие 2.2. *Гауссовский процесс $\{\tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [t_0, \infty)\}$, является марковским процессом, обладающим непрерывными с вероятностью 1 траекториями.*

Доказательство. Случайный процесс $\{\tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [t_0, \infty)\}$ является марковским, так как плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ условных вероятностей перехода удовлетворяет параболическому уравнению (2.13), которое является так называемым *прямым уравнением Колмогорова* для марковских случайных процессов с непрерывными траекториями. \square

3. Стационарный осцилляторный случайный процесс. Вычислим плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$, определяемую (2.12).

Теорема 3.1. *Плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ условных вероятностей перехода случайного гауссовского марковского процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ определяется формулой*

$$f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = [(2\pi)^2 \det C(t, t)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(C^{-1}(t, t) [\mathbf{x} - e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0], [\mathbf{x} - e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0]\right)\right]. \quad (3.1)$$

Доказательство. Так как S^2 — симметричная неотрицательно определенная матрица, то квадратичная форма

$$(e^{sA} S^2 e^{sA^T} \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (S^2 [e^{sA^T} \mathbf{x}], [e^{sA^T} \mathbf{x}]) \geq 0$$

неотрицательна. Более того, эта форма положительно определена, так как, в противном случае, вектор $e^{sA^T} \mathbf{x}$ в \mathbb{R}^2 должен быть собственным для матрицы S^2 с нулевым собственным значением, т.е. $e^{sA^T} \mathbf{x} = c(1, 0)$. Так как этот вектор не является собственным для матрицы A^T при $\omega \neq 0$, это невозможно. Тогда симметричная матрица $e^{sA} S^2 e^{sA^T}$ положительно определена. Следовательно, согласно формуле (2.8) для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ выполняется равенство

$$(C(t, t)\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \left(\left[\int_0^{t-t_0} e^{sA} S^2 e^{sA^T} ds \right] \mathbf{x}, \mathbf{x} \right) = \int_0^{t-t_0} (e^{sA} S^2 e^{sA^T} \mathbf{x}, \mathbf{x}) ds > 0,$$

т.е. симметричная матрица $C(t, t)$ положительно определена и, следовательно, невырождена при любом $t \in [t_0, \infty)$. Ввиду невырожденности матрицы $C(t, t)$, существует обратная матрица $C^{-1}(t, t)$, и поэтому интеграл в (2.12) конечен. Он вычисляется явным образом, что дает формулу (3.1), так как

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} (C(t, t)\mathbf{q}, \mathbf{q})\right) d\mathbf{q} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{[\det C(t, t)]^{1/2}}. \quad \square$$

Введем в рассмотрение стандартные (2×2) -матрицы Паули

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

набор которых вместе в единичной матрицей E образует базис в пространстве (2×2) -матриц. Разложения матриц A и S по этому базису имеют вид

$$A = -\beta(E + T^{(3)}) - i\omega T^{(2)}, \quad S = \frac{\sigma^{1/2}}{2\omega} (E + T^{(3)}). \quad (3.2)$$

В дальнейшем для расчетов нам потребуется формула для разложения по базису $E, T^{(l)}, l = 1, 2, 3$, экспоненты от произвольной (2×2) -матрицы M :

$$\exp(Mt) = e^{M_0 t} \left(\operatorname{ch}(Mt) E + M^{-1} \sum_{l=1}^3 M_l T^{(l)} \operatorname{sh}(Mt) \right), \quad (3.3)$$

где $M_0, M_l, l = 1, 2, 3$, — коэффициенты разложения матрицы M по базису и

$$M \equiv \left(\sum_{l=1}^3 M_l^2 \right)^{1/2}$$

— ее характеристика. Справедливость формулы (3.3) проверяется дифференцированием по t . Так как экспонента $\exp(Mt)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d \exp(Mt)}{dt} = M \exp(Mt),$$

которое, вместе с ее значением E при $t = 0$, определяет однозначным образом эту матрицу-функцию, то, используя известные коммутационные соотношения матриц Паули

$$T^{(j)}T^{(k)} + T^{(k)}T^{(j)} = 2\delta_{jk}E, \quad T^{(j)}T^{(k)} = i \sum_l \varepsilon_{jkl} T^{(l)}, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (3.4)$$

где ε_{jkl} — символ Леви-Чивиты, получаем тождество. Заметим, что формула (3.3) верна также в случае, если $M = 0$, в смысле предельного перехода в ней $M \rightarrow 0$. Кроме того, заметим, что для любой (2×2) -матрицы M , определяемой коэффициентами разложения $\langle M_0, M_l, l = 1, 2, 3 \rangle$, ее детерминант вычисляется по формуле

$$\det M = \det \begin{pmatrix} M_0 + M_3 & M_1 - iM_2 \\ M_1 + iM_2 & M_0 - M_3 \end{pmatrix} = M_0^2 - M^2. \quad (3.5)$$

Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\det(\mu E - A) = \mu^2 + 2\beta\mu + \omega^2 = 0.$$

Следовательно, если $\beta^2 \neq \omega^2$, то матрица A диагонализуема, а при $\beta > 0$ вещественная часть каждого из ее собственных чисел $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ отрицательна. В дальнейшем будем анализировать осцилляторный случайный процесс именно при таких ограничениях на параметр β . При этом условии имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Если параметры β и ω , определяющие случайный гауссовский марковский процесс $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty) \rangle$ посредством стохастического дифференциального уравнения (1.4) с матрицей A , таковы, что $\beta > 0$ и $\omega^2 \neq \beta^2$, то существует предельный по мере случайный процесс $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \tilde{\mathbf{x}}(t)$, который не зависит от значения $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ и является стационарным случайным процессом, обладающим частным одномерным распределением вероятностей с плотностью*

$$f(\mathbf{x}) = [(2\pi)^2 \det C]^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (C^{-1} \mathbf{x}, \mathbf{x}) \right], \quad C = \varkappa E, \quad \varkappa \equiv \frac{\sigma}{4\beta\omega^2}. \quad (3.6)$$

Доказательство. Докажем, что существует предел матрицы $C(t, t)$ при $t_0 \rightarrow -\infty$, т.е. сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{sA} S^2 e^{sA^T} ds.$$

Для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ неотрицательный диагональный элемент положительно определенной симметричной матрицы удовлетворяет неравенству

$$(e^{sA} S^2 e^{sA^T} \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (S^2 e^{sA^T} \mathbf{x}, e^{sA^T} \mathbf{x}) \leq \|S\|^2 \|e^{sA^T} \mathbf{x}\|^2. \quad (3.7)$$

Пусть $\{\mathbf{e}^{(j)}; j \in \{1, 2\}\}$ — базис в \mathbb{R}^2 , состоящий из собственных векторов матрицы A^T с соответствующими собственными числами $\mu^{(j)}$, $j \in \{1, 2\}$, причем $\operatorname{Re} \mu^{(j)} < 0$. Тогда, подействовав матрицей e^{sA^T} на разложение вектора $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{e}^{(2)}$, находим

$$e^{sA^T} \mathbf{x} = \alpha_1 e^{s\mu^{(1)}} \mathbf{e}^{(1)} + \alpha_2 e^{s\mu^{(2)}} \mathbf{e}^{(2)}.$$

Следовательно,

$$\|e^{sA^T} \mathbf{x}\| \leq \left\| \alpha_1 e^{s\mu^{(1)}} \mathbf{e}^{(1)} + \alpha_2 e^{s\mu^{(2)}} \mathbf{e}^{(2)} \right\| \leq e^{\bar{\mu}s} (|\alpha_1| + |\alpha_2|) \equiv e^{\bar{\mu}s} \|\mathbf{x}\|_1,$$

где $\bar{\mu} = \max\{\operatorname{Re} \mu^{(j)}; j \in \{1, 2\}\}$. В сочетании с (3.7) получаем оценку

$$(e^{sA} S^2 e^{sA^T} \mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq e^{2\bar{\mu}s} \|S\|^2 \|\mathbf{x}\|_1^2.$$

Тогда для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ равен нулю следующий предел для матрицы-функции, значениями которой являются симметричные положительно определенные матрицы:

$$\left(\left[\int_t^{\infty} e^{sA} S^2 e^{sA^T} ds \right] \mathbf{x}, \mathbf{x} \right) \leq \frac{e^{-2|\bar{\mu}|t}}{2|\bar{\mu}|} \|\mathbf{x}\|_1^2 \|S\|^2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Отсюда следует сходимость указанного интеграла. Тогда существует предел

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} C(t, t) = \int_0^{\infty} e^{sA} S^2 e^{sA^T} ds \equiv C.$$

Кроме того, для любого вектора $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, согласно (3.7), имеем $e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 \xrightarrow[t_0 \rightarrow -\infty]{} 0$.

Перейдем к поточечному пределу $t_0 \rightarrow -\infty$ в формуле (3.1). Предельное значение функции $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$, которое мы обозначим как $f(\mathbf{x})$, существует и определяется формулой (3.6). Покажем, что матрица C положительно определена. Проинтегрируем тождество

$$\frac{d}{ds} (e^{sA} S^2 e^{sA^T}) = A e^{sA} S^2 e^{sA^T} + e^{sA} S^2 e^{sA^T} A^T$$

по s от 0 до ∞ . В результате получим матричное уравнение Ляпунова

$$AC + CA^T + S^2 = 0,$$

которому должна удовлетворять матрица C . Пусть

$$C = c_0 E + \sum_l c_l T^{(l)}$$

— разложение матрицы C по базису $\langle E, T^{(l)}, l = 1, 2, 3 \rangle$. Подстановка этого разложения в уравнение с использованием коммутационных соотношений (3.4) дает $c_2 = 0$; также получаем следующие уравнения для коэффициентов c_0, c_1, c_3 :

$$\omega c_3 = \beta c_1, \quad \beta(c_0 + c_3) = \frac{\sigma}{4\omega^2}, \quad \beta(c_0 + c_3) + \omega c_1 = \frac{\sigma}{4\omega^2},$$

из которых следует, что $c_1 = c_3 = 0$, $c_0 = \sigma/4\beta\omega^2$.

Таким образом, $C = (\sigma/4\beta\omega^2)E > 0$, и поэтому $f(\mathbf{x})$ является плотностью распределения вероятностей. Эта предельная плотность не зависит от \mathbf{x}_0 . Так как она не зависит от $t \in \mathbb{R}$ и плотность условных вероятностей перехода зависит только лишь от разности $t - t_0$, то предельный

случайный гауссовский марковский процесс, который теперь определен для всех $t \in \mathbb{R}$, является стационарным (см. [9]). \square

Следствие 3.1. *Осцилляторный случайный процесс $\langle \tilde{x}(t), t \in \mathbb{R} \rangle$ является стационарным.*

4. Характеристическая функция случайной величины $J_t[\tilde{x}(s)]$. Далее изучим распределение вероятностей случайной величины (1.7), которая представляется интегралом

$$J_t[\tilde{x}(s)] = \omega^2 \int_0^t (\tilde{\mathbf{x}}(s), V \tilde{\mathbf{x}}(s)) ds,$$

так как $\tilde{x}_1(s) = \dot{x}(s)/\omega$. Она с вероятностью 1 неотрицательна. Тогда ее распределение вероятностей удобно характеризовать производящей функцией

$$Q(\lambda, t) = \mathbb{E} \exp\left(-\lambda J_t[\tilde{x}(s)]\right), \quad \operatorname{Re} \lambda \in [0, \infty). \quad (4.1)$$

Характеристическая функция случайной величины $J_t[\tilde{x}(s)]$ равна $Q(-i\lambda, t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Произведем вычисление функции (4.1) методом Фейнмана—Каца—Дынкина, идея которого изложена в [19]. Этот метод сводит вычисление функции $Q(\lambda, t)$ к поиску специального решения вспомогательного параболического уравнения типа уравнения Шрёдингера, которое получим в этом разделе. В отличие от указанной работы, мы не используем явным образом интегрирование по мере винеровского процесса $\langle \tilde{\mathbf{w}}(t), t \in [0, \infty) \rangle$, а воспользуемся формулой усреднения Фуруцу—Новикова (см. [10, 16]), связанной с процессом белого шума.

Введем, следуя М. Кацу, совместную одновременную плотность $g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0)$ распределения вероятностей для составного случайного процесса, представляющего собой пару случайных процессов

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)] \rangle, \quad t \in [0, \infty), \quad g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0) = \mathbb{E} \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \delta(v - J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]),$$

которая является условной относительно фиксированных значений $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$, $J_0[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = 0$. Здесь первая δ -функция двумерная, а вторая — одномерная, хотя мы их обозначаем одной буквой; в дальнейшем это не вызовет недоразумений. Следующие интегралы с этой плотностью определяют плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$ и производящую функцию $Q(\lambda, t, \mathbf{x}_0)$ условного распределения вероятностей для величины $J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$:

$$f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) = \int_0^\infty g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0) dv, \quad h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = \int_0^\infty g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0) e^{-\lambda v} dv, \quad (4.2)$$

$$Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^2} h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = \int_0^\infty dv \int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0) e^{-\lambda v} d\mathbf{x}.$$

Пусть случайные траектории процесса $\langle \tilde{\mathbf{z}}(s), s \in \mathbb{R} \rangle$ представляются таким функционалом

$$\tilde{z}_j(s) = \int_\Lambda K_{jl}(s, s') \tilde{\varphi}_l(s') ds', \quad j \in \{1, 2\},$$

от реализаций белого шума, что они непрерывны с вероятностью 1. Пусть также $G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]$ — функционал от случайных траекторий $\tilde{\mathbf{z}}(s)$, обладающий вариационной производной (производной Гато) по этим функциям на пространстве непрерывных функций. Тогда для математического ожидания $\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(t) G[\tilde{\mathbf{z}}(s')]$, в рамках техники Фуруцу—Новикова, имеет место равенство

$$\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(t) G[\tilde{\mathbf{z}}(s')] = \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{E} \frac{\delta G[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta \tilde{z}_l(s)} \right) (\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(t) \tilde{z}_l(s)) ds. \quad (4.3)$$

Из формулы (4.3) вытекает, что математическое ожидание линейно относительно $G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]$. Пусть носитель Λ непрерывной относительно переменной s' функции $K_{jk}(s, s')$ содержит t в качестве внутренней точки. Тогда

$$\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(t) \tilde{z}_l(s) = K_{jl}(s, t).$$

Если внутренность носителя не содержит точки t , то

$$\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(t) \tilde{z}_l(s) = 0.$$

Наконец, если t является крайней точкой носителя, то

$$\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(t) \tilde{z}_l(s) = \frac{1}{2} K_{jl}(t, t).$$

Последнее равенство связано с толкованием белого шума в смысле Стратоновича, так как в этом случае, согласно теореме Вонга—Закаи, правильное использование корреляционной функции белого шума состоит в замене обобщенной функции $\delta(t-s)$ на некоторую непрерывную корреляционную функцию $\Delta(s-t)$, которая является по определению четной, с последующим переходом к пределу $\Delta(t) \rightarrow \delta(t)$.

На основе перечисленных свойств устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма 4.1. Пусть $\langle \tilde{\mathbf{x}}(t), t \in [0, \infty) \rangle$ — двухкомпонентный случайный процесс, определяемый стохастическим дифференциальным уравнением (1.4), и

$$G[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = \exp(-i(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}}(s)) - \lambda J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]).$$

Тогда имеет место формула

$$\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(t) G[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = -\frac{i}{2} (S\mathbf{q})_j \mathbb{E} G[\tilde{\mathbf{x}}(s)]. \quad (4.4)$$

Доказательство. Согласно (1.5), положим

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{z}}(t), \quad \tilde{z}_j(t) = \int_0^t K_{jl}(t, s) \tilde{\varphi}_l(s) ds, \quad K_{jl}(t, s) = (e^{(t-s)A} S)_{j,l} \theta(t-s).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\delta G[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta \tilde{z}_l(s)} &= \left(-i q_l \delta(t-s) - \lambda \frac{\delta J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta \tilde{z}_l(s)} \right) G[\tilde{\mathbf{x}}(s)], \\ \frac{\delta J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta \tilde{z}_l(s)} &= 2\omega^2 \int_0^t \delta(s-s') (V\tilde{\mathbf{x}})_l(s') ds' = 2\omega^2 \theta(t-s) \theta(s) (V\tilde{\mathbf{x}})_l(s), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\delta J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta \tilde{z}_l(s)} (\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(t) \tilde{z}_l(s)) ds &= 2\omega^2 \int_0^t (V\tilde{\mathbf{x}})_l(s) (\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(t) \tilde{z}_l(s)) ds = \\ &= 2\omega^2 \int_0^t (V\tilde{\mathbf{x}})_l(s) K_{l,j}(s, t) ds = 2\omega^2 \int_0^t (V\tilde{\mathbf{x}})_l(s) e^{(s-t)A} S_{lj} \theta(s-t) ds = 0, \end{aligned}$$

так как t является внешней точкой по отношению к интервалу интегрирования по s . Учитывая полученное равенство, получаем, согласно (4.3), формулу (4.4). Для слагаемого с ядром $K_{jl}(s, s')$, точка t является крайней в интервале интегрирования, и мы положим $\mathbb{E} \tilde{\varphi}_j(t) \tilde{z}_l(s) = S_{lj}/2$. Мы воспользовались также симметрией матрицы S . \square

Следующее утверждение является основой для вычисления производящей функции $Q(\lambda, t)$.

Теорема 4.1. Плотность $h(\mathbf{x}, \lambda; t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = \left[-\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, A\mathbf{x} \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) h - \lambda \omega^2 (V\mathbf{x}, \mathbf{x}) h \right] (\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0), \quad (4.5)$$

которым она, вместе с условиями

$$h(\mathbf{x}, \lambda; 0, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad h(\mathbf{x}, 0; t, \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$$

однозначно определяется.

Доказательство. Заметим, что

$$h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = \mathbb{E} \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \exp(-\lambda J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)]),$$

откуда, в частности следует необходимость последних условий в формулировке теоремы, так как $J_0[\tilde{\mathbf{z}}(s)] = 0$ и вектор $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ неслучаен, и поэтому

$$h(\mathbf{x}, \lambda; 0, \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}_0, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Кроме того,

$$h(\mathbf{x}, 0; t, \mathbf{x}_0) = \mathbb{E} \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) = f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0).$$

Представим функцию $h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0)$ в виде интеграла Фурье

$$h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} \mathbb{E} G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q}.$$

Запишем выражение для производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] &= -G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] \left[i \left(\mathbf{q}, \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}(t) \right) + \lambda \omega^2(\tilde{\mathbf{x}}(t), V \tilde{\mathbf{x}}(t)) \right] = \\ &= -G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] \left[i(\mathbf{q}, A \tilde{\mathbf{x}}(t)) + i(\mathbf{q}, S \tilde{\varphi}(t)) + \lambda \omega^2(\tilde{\mathbf{x}}(t), V \tilde{\mathbf{x}}(t)) \right]. \end{aligned}$$

Выполняя преобразование Фурье для математического ожидания от обеих частей этого равенства, воспользовавшись (4.4), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} (\mathbf{q}, A \mathbb{E} \tilde{\mathbf{x}}(t) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]) d\mathbf{q} - \\ &- \frac{\lambda \omega^2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t), V \tilde{\mathbf{x}}(t)) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} - \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} (\mathbf{q}, S \mathbb{E} \tilde{\varphi}(t)) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части формулы преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} (\mathbf{q}, A \mathbb{E} \tilde{\mathbf{x}}(t) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]) d\mathbf{q} &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, A \mathbb{E} \tilde{\mathbf{x}}(t) \right) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, A \mathbb{E} \tilde{\mathbf{x}}(t) \right) \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \exp(-\lambda J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)]) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, A \mathbf{x} \right) h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0). \quad (4.7) \end{aligned}$$

Преобразование же второго слагаемого в (4.6) дается равенствами

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t), V \tilde{\mathbf{x}}(t)) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} &= \omega^2 \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t), V \tilde{\mathbf{x}}(t)) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} = \\ &= \omega^2 \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t), V \tilde{\mathbf{x}}(t)) \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \exp(-\lambda J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)]) = \omega^2(\mathbf{x}, V \mathbf{x}) h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0). \quad (4.8) \end{aligned}$$

Наконец, для преобразования последнего слагаемого в (4.6) применим формулу (4.4):

$$\begin{aligned} \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} (\mathbf{q}, S \mathbb{E} \tilde{\varphi}(t)) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S \mathbb{E} \tilde{\varphi}(t) \right) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} \mathbb{E} \tilde{\varphi}(t) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} \right) = -\frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{q} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} \mathbb{E} G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение вместе с (4.7) и (4.8) в (4.6), получаем уравнение (4.5). \square

5. Формула Каца—Зигерта для осцилляторного процесса. По определению, функция $h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0)$ существует и единственна, так как существует и единственна плотность распределения $g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0)$ и функция $h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0)$ представляет собой условное математическое ожидание случайной величины $\exp(-\lambda J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)])$, распределенной согласно совместной плотности $g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0)$. При этом случайная величина ограничена при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, ввиду того, что $J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)] \geq 0$ с вероятностью 1.

С целью вычисления функции $h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0)$, прежде всего, найдем решение уравнения (4.5), удовлетворяющее начальному условию $h(\mathbf{x}, \lambda; 0, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Для этого понадобится какое-либо вещественное симметричное невырожденное решение следующего матричного уравнения Риккати [11] относительно матрицы B при $\Im \lambda = 0$:

$$BS^2B + (AB + BA^T) - 2\lambda\omega^2V = 0. \quad (5.1)$$

Положим $B = \rho E$. Ввиду определения матриц A и S , уравнение запишем в виде

$$\left[\frac{\sigma}{\omega^2} \rho^2 - 4\beta\rho - 2\lambda\omega^2 \right] V = 0;$$

решениями квадратного уравнения

$$\frac{\sigma}{\omega^2} \rho^2 - 4\beta\rho - 2\lambda\omega^2 = 0$$

являются

$$\rho_{\pm} = \frac{2\omega^2}{\sigma} (\beta \pm r), \quad r = \left(\beta^2 + \frac{\lambda\sigma}{2} \right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Положим, что функция $h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0)$ имеет вид

$$h = H \cdot \exp \left(at - \frac{1}{2} (\mathbf{x}, B\mathbf{x}) \right), \quad H = H(\mathbf{x}, \lambda; t),$$

с симметричной матрицей $B^T = B$. Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_j h &= \exp \left(at - \frac{1}{2} (\mathbf{x}, B\mathbf{x}) \right) \left[\nabla_k \nabla_j H - (B\mathbf{x})_j \nabla_k H - (B\mathbf{x})_k \nabla_j H + (-B_{jk} + (B\mathbf{x})_j (B\mathbf{x})_k) H \right], \\ \nabla_j (A\mathbf{x})_j h &= \exp \left(at - \frac{1}{2} (\mathbf{x}, B\mathbf{x}) \right) \left[(A)_{jj} H + (A\mathbf{x})_j (\nabla_j H - (B\mathbf{x})_j H) \right], \end{aligned}$$

где здесь и далее по повторяющимся индексам j и/или k производится суммирование, $j, k \in \{1, 2\}$. Подстановка полученных выражений в (4.5) дает следующее равенство:

$$\begin{aligned} aH + \dot{H} &= - \left[(A)_{jj} H + (A\mathbf{x})_j (\nabla_j H - (B\mathbf{x})_j H) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} (S^2)_{jk} \left[\nabla_k \nabla_j H - \nabla_k H \cdot (B\mathbf{x})_j - \nabla_j H \cdot (B\mathbf{x})_k + (-B_{jk} + (B\mathbf{x})_j (B\mathbf{x})_k) H \right] - \lambda\omega^2 (\mathbf{x}, V\mathbf{x}) H. \end{aligned}$$

Постоянную a и матрицу B выберем таким образом, чтобы уравнение для функции H не содержало членов, пропорциональных самой функции H . Отсюда следует, что

$$a = -\operatorname{Sp} \left(A + \frac{1}{2} S^2 B \right);$$

так как матрица S^2 симметрична и имеет место равенство $(BA\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (A^T B\mathbf{x}, \mathbf{x})$, то матрица B должна быть решением матричного уравнения (5.1). При указанном выборе матрицы B , используя (2.2), находим, что $a = \beta \mp r$, а функция H должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{H} = \frac{1}{2} (S^2)_{jk} \nabla_k \nabla_j H - (D\mathbf{x})_j \nabla_j H, \quad (5.3)$$

где

$$D = A + S^2 B, \quad (5.4)$$

и начальному условию

$$H(\mathbf{x}, \lambda; 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \exp \left[\frac{1}{2} (B\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) \right].$$

В уравнении (5.3) перейдем от векторов \mathbf{x} к зависящим от времени векторам $\mathbf{y} = e^{-tD}\mathbf{x}$. Введем такую функцию $F(\mathbf{y}, \lambda; t)$, что

$$F(e^{-Dt}\mathbf{x}, \lambda; t) = H(\mathbf{x}, \lambda; t).$$

В результате для этой функции получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\mathbf{y}, \lambda; t) = \frac{1}{2} (S_-^2(t))_{jk} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} F(\mathbf{y}, \lambda; t), \quad (5.5)$$

где введена матрица

$$S_-^2(t) = \exp(-tD) S^2 \exp(-tD^T).$$

Непосредственной подстановкой проверяем, что

$$F(\mathbf{y}, \lambda; t) = \frac{\exp[(\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0)/2]}{[(2\pi)^2 \det G_-(t)]^{1/2}} \exp[-((\mathbf{y} - \mathbf{x}_0), G_-^{-1}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0))/2], \quad (5.6)$$

является решением уравнения (5.5), удовлетворяющее начальному условию

$$F(\mathbf{y}, \lambda; 0) = H(\mathbf{x}, \lambda; 0)_{\mathbf{x}=\mathbf{y}},$$

где

$$G_-(t) = \int_0^t S_-^2(s) ds.$$

Матрица S^2 симметрична и неотрицательно определена; такова же и матрица $S_-^2(t)$. Более того, эта матрица положительно определена для почти всех $s > 0$. В самом деле, если вектор $e^{-sD^T} \mathbf{x}$ в \mathbb{R}^2 является собственным для матрицы S^2 с нулевым собственным значением, т.е. $e^{-sD^T} \mathbf{x} = c\langle 1, 0 \rangle$, то такое равенство возможно только для какого-либо одного значения s , так как матрица D не коммутирует с S^2 и знак реальной части ее собственных значений фиксирован. Ввиду положительной определенности матрицы $S_-^2(s)$ для почти всех s , матрица $G_-(t)$ положительно определена при $t \neq 0$ и, в частности, $\det G_-(t) \neq 0$. Ввиду симметричности матрицы $S_-^2(t)$, таким же свойством обладает матрица $G_-(t)$ при любом $t \neq 0$. Матрица $G_-^{-1}(t)$ обладает теми же свойствами, что и матрица $G_-(t)$. Это означает, что функция (5.6) существует, неотрицательна и суммируема по \mathbf{y} на \mathbb{R}^2 . Так как матрица $G_-(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow 0$, то функция (5.6) стремится к $\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \exp[(\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0)/2]$, т.е. удовлетворяет указанному выше начальному условию.

На основе (5.6) находим требуемое решение уравнения (5.3):

$$H(\mathbf{x}, \lambda; t) = \frac{\exp[(\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0)/2]}{[(2\pi)^2 \det G_-(t)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}((e^{-tD}\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), G_-^{-1}(t)(e^{-tD}\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))\right]$$

и, следовательно,

$$h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = \frac{e^{at}}{[(2\pi)^2 \det G_-(t)]^{1/2}} \exp\left\{\frac{1}{2}[(\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0) - (\mathbf{x}, B\mathbf{x})]\right\} \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}((\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0), [e^{tD}G_-(t)e^{tD^T}]^{-1}(\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0))\right]. \quad (5.7)$$

Произведем несложные преобразования входящих в эту формулу матриц:

$$e^{tD}G_-(t)e^{tD^T} = \int_0^t e^{sD}S^2e^{sD^T}ds \equiv G_+(t), \quad (5.8)$$

$$\det G_+(t) = (\det e^{tD})(\det G_-(t))(\det e^{tD^T}) = \exp(2t \operatorname{Sp} D) \cdot \det G_-(t)$$

и, следовательно,

$$e^{-t \operatorname{Sp} BS^2/2} [\det G_+(t)]^{1/2} = e^{t \operatorname{Sp} D - BS^2/2} [\det G_-(t)]^{1/2} = e^{-at} [\det G_-(t)]^{1/2}. \quad (5.9)$$

Так как матрица $G_-(t)$ положительно определена, то и матрица $G_+(t)$, согласно своему определению, положительно определена. Наконец, так как в формуле (3.1) отсутствует матрица S^2 , то для выполнимости условия $h(\mathbf{x}, 0; t, \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$, нужно положить, чтобы $B = 0$ при $\lambda = 0$, т.е. нужно выбрать $\rho = \rho_-$ (см. (5.2)) в определении матрицы B . Таким образом, принимая во внимание (5.8) и (5.9), заключаем, что формула (5.7) приобретает следующий вид:

$$h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = \frac{\exp(t \operatorname{Sp} BS^2/2)}{[(2\pi)^2 \det G_+(t)]^{1/2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} [(\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0) - (\mathbf{x}, B\mathbf{x})] \right\} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left((\mathbf{x} - e^{tD} \mathbf{x}_0), G_+^{-1}(t) (\mathbf{x} - e^{tD} \mathbf{x}_0) \right) \right]. \quad (5.10)$$

Вычислим матрицу $G_+(t)$. Прежде всего, заметим, что согласно определению и соотношениям (3.2) и (5.4) матрица D представляется разложением $D = -2rV - i\omega T^{(2)}$ и имеет *характеристику* $D = \sqrt{r^2 - \omega^2}$. Используя (3.3), находим

$$\exp(tD) = e^{-rt} \left(\operatorname{ch}(Dt) E - D^{-1} (rT^{(3)} + i\omega T^{(2)}) \operatorname{sh}(Dt) \right). \quad (5.11)$$

Ввиду того, что

$$T^{(3)}V = VT^{(3)} = V, \quad T^{(2)}VT^{(2)} = E - V, \quad VT^{(2)} - T^{(2)}V = -iT^{(1)}$$

и вследствие (3.4) справедливы следующие преобразования:

$$e^{tD} S^2 e^{tD^T} = \\ = \frac{\sigma e^{-2rt}}{\omega^2} \left(\operatorname{ch}(Dt) E - \frac{1}{D} (rT^{(3)} + i\omega T^{(2)}) \operatorname{sh}(Dt) \right) V \left(\operatorname{ch}(Dt) E - \frac{1}{D} (rT^{(3)} - i\omega T^{(2)}) \operatorname{sh}(Dt) \right) = \\ = \frac{\sigma e^{-2rt}}{\omega^2} \left[\left(\operatorname{ch}(Dt) - \frac{r}{D} \operatorname{sh}(Dt) \right)^2 V + \frac{\omega^2}{D^2} \operatorname{sh}^2(Dt) (E - V) + \frac{i\omega}{D} \operatorname{sh}(Dt) \left(\operatorname{ch}(Dt) - \frac{r}{D} \operatorname{sh}(Dt) \right) [V, T^{(2)}] \right] = \\ = \frac{\sigma e^{-2rt}}{\omega^2} \left[\frac{E}{2} \left\{ \left(\operatorname{ch}(Dt) - \frac{r}{D} \operatorname{sh}(Dt) \right)^2 + \frac{\omega^2}{D^2} \operatorname{sh}^2(Dt) \right\} + \frac{T^{(3)}}{2} \left\{ \left(\operatorname{ch}(Dt) - \frac{r}{D} \operatorname{sh}(Dt) \right)^2 - \frac{\omega^2}{D^2} \operatorname{sh}^2(Dt) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{D} \operatorname{sh}(Dt) \left(\operatorname{ch}(Dt) - \frac{r}{D} \operatorname{sh}(Dt) \right) T^{(1)} \right].$$

Интегрируя по t , согласно (5.8), получаем выражения для элементов $G_{jk}(t)$, $j, k \in \{1, 2\}$, матрицы $G_+(t) = G_+^T(t)$:

$$G_{jk}(t) = \int_0^t (e^{sD} S^2 e^{sD^T})_{jk} ds, \quad j, k \in \{1, 2\}.$$

Так как

$$\int_0^t e^{-2rs} \operatorname{sh}(Ds) \operatorname{ch}(Ds) ds = \frac{1}{2D} e^{-2rt} \operatorname{sh}^2(Dt) + \frac{r}{D} \int_0^t e^{-2rs} \operatorname{sh}^2(Ds) ds,$$

то

$$G_{12}(t) = \frac{2\beta\kappa\omega}{D^2} e^{-2rt} \operatorname{sh}^2(Dt) \equiv W(t). \quad (5.12)$$

Вводя обозначения

$$U(t) = \frac{\beta\kappa}{r} (1 - e^{-2rt}), \quad V(t) = \frac{\beta\kappa}{D} e^{-2rt} \operatorname{sh}(2Dt), \quad (5.13)$$

дифференцированием по t , с учетом определения характеристики $D^2 = r^2 - \omega^2$, проверяется равенство

$$G_{22}(t) = \frac{\sigma}{D^2} \int_0^t e^{-2rs} \operatorname{sh}^2(Ds) ds = U(t) - \frac{r}{\omega} G_{12}(t) - V(t). \quad (5.14)$$

Точно так же, разбивая интеграл на отдельные слагаемые, проверяется соотношение

$$G_{11}(t) = \frac{\sigma}{\omega^2} \int_0^t e^{-2rs} \left(\operatorname{ch}(Ds) - \frac{r}{D} \operatorname{sh}(Ds) \right)^2 ds = U(t) - \frac{r}{\omega} G_{12}(t) + V(t). \quad (5.15)$$

На основании (5.14), (5.15) запишем разложение для матрицы $G_+(t)$:

$$G_+(t) = \left(U(t) - \frac{r}{\omega} W(t) \right) E + W(t)T^{(1)} + V(t)T^{(3)} \quad (5.16)$$

и выражение для ее детерминанта:

$$G(t) \equiv \det G_+(t) = G_{11}(t)G_{22}(t) - G_{12}^2(t) = \left(U(t) - \frac{r}{\omega} W(t) \right)^2 - V^2(t) - W^2(t). \quad (5.17)$$

Заметим, наконец, что $\text{Sp } BS^2 = 2(\beta - r)$, а обратная матрица $G_+^{-1}(t)$ представляется формулой

$$G_+^{-1}(t) = G^{-1}(t) \begin{pmatrix} G_{22}(t) & -G_{12}(t) \\ -G_{12}(t) & G_{11}(t) \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

При этом если $B = 0$, то $G_+(t) = G_-(t) = C(t, t)$ и поэтому выполняется условие

$$h(\mathbf{x}, 0; t, \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0).$$

Окончательный вид формулы (5.10) для функции $h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0)$, полученный выше, приведен в следующем утверждении.

Теорема 5.1. *При $\beta > 0$, $\omega^2 \neq 0$, $\omega^2 \neq \beta^2$ плотность $h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0)$ производящей функции условного распределения вероятностей случайной величины $J_t[\tilde{\mathbf{z}}](s)$ имеет вид*

$$h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = \frac{\exp(t(\beta - r))}{[(2\pi)^2 G(t)]^{1/2}} \exp \left\{ \omega^2(\beta - r) \frac{1}{2} [(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) - (\mathbf{x}, \mathbf{x})] \sigma \right\} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2} ((\mathbf{x} - e^{tD} \mathbf{x}_0), G_+^{-1}(t)(\mathbf{x} - e^{tD} \mathbf{x}_0)) \right], \quad r = \left(\beta^2 + \frac{\lambda\sigma}{2} \right)^{1/2},$$

где функции $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$, $G(t)$ определяются, соответственно, формулами (5.12), (5.13), (5.17), (5.18), а матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} -2r & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

На основании формулы (4.2) производящая функция условного распределения вероятностей случайной величины $J_t[\tilde{\mathbf{z}}](s)$ определяется интегралом плотности $h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0)$ по \mathbf{x}

$$Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^2} h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = \frac{\exp \left[(t \text{Sp } BS^2 + (\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0)) / 2 \right]}{[(2\pi)^2 \det G_+(t)]^{1/2}} \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{x}, B\mathbf{x}) + ((\mathbf{x} - e^{tD} \mathbf{x}_0), G_+^{-1}(t)(\mathbf{x} - e^{tD} \mathbf{x}_0))] \right\} d\mathbf{x}.$$

Лемма 5.1. *Пусть $\beta > 0$, $\omega^2 \neq 0$, $\omega^2 \neq \beta^2$. Тогда квадратичная форма $((B + G_+^{-1}(t))\mathbf{x}, \mathbf{x})$ положительна.*

Доказательство. Собственные числа ν_{\pm} матрицы $D = A + S^2 B$ являются корнями уравнения $\nu^2 + 2r\nu + \omega^2 = 0$. Так как $\nu_{\pm} = -2r \pm (r^2 - \omega^2)^{1/2}$, то $\max \text{Re } \nu_{\pm} < 0$ при $\text{Re } \lambda \geq 0$ и $\omega^2 \neq 0$. При этих условиях $\text{Re } \nu_{+} < \beta - \text{Re } r < 0$ и поэтому $\|e^{Ds}\| < e^{s(\beta - \text{Re } r)}$, $s > 0$. Следовательно,

$$\|G_+(t)\| \leq \|S\|^2 \int_0^t \|e^{Ds}\|^2 ds < \frac{\sigma}{2\omega^2} (\text{Re } r - \beta)^{-1} = (|\text{Re } \rho|)^{-1}$$

ввиду отрицательности $\text{Re } \rho$, и поэтому для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ имеют место неравенства

$$(G_+(t)\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq \|G_+(t)\|(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(|\text{Re } \rho|)^{-1}. \quad (5.19)$$

Так как вещественные симметричные матрицы $G_+(t)$, $G_+^{-1}(t)$ положительно определены, то, выбрав их положительно определенные квадратные корни, получаем, используя неравенство Коши–Буняковского:

$$(G_+(t)\mathbf{x}, \mathbf{x})(G_+^{-1}(t)\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq (G_+(t)^{1/2}\mathbf{x}, G_+^{1/2}(t)\mathbf{x})(G_+^{-1/2}(t)\mathbf{x}, G_+^{-1/2}(t)\mathbf{x}) \geq |(G_+^{1/2}(t)\mathbf{x}, G_+^{-1/2}(t)\mathbf{x})|$$

и поэтому

$$(G_+^{-1}(t)\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(G_+(t)\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}.$$

Вместе с оценкой (5.19) это дает неравенство

$$(G_+^{-1}(t)\mathbf{x}, \mathbf{x}) > (\mathbf{x}, \mathbf{x})|\operatorname{Re} \rho|,$$

откуда следует

$$((B + G_+^{-1}(t))\mathbf{x}, \mathbf{x}) = ((G_+^{-1}(t) - |\operatorname{Re} \rho| E)\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0. \quad \square$$

Используя положительную определенность матрицы $B + G_+^{-1}(t)$, вычисление интеграла производится посредством выделения полного квадрата по вектору \mathbf{x} в показателе экспоненты подинтегрального выражения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, B\mathbf{x}) + ((\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0), G_+^{-1}(t)(\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0)) &= (e^{tD}\mathbf{x}_0, B[E + G_+(t)B]^{-1}e^{tD}\mathbf{x}_0) + \\ &+ \left((B + G_+^{-1}(t))(\mathbf{x} - (B + G_+^{-1}(t))^{-1}G_+^{-1}(t)e^{tD}\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - (B + G_+^{-1}(t))^{-1}G_+^{-1}(t)e^{tD}\mathbf{x}_0 \right). \end{aligned}$$

Вычислив двумерный интеграл Пуассона по \mathbf{x} , находим

$$Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0) = \left[\frac{\exp \left[t \operatorname{Sp} BS^2 + (\mathbf{x}_0, [B - e^{tD^T} B[E + G_+(t)B]^{-1} e^{tD}] \mathbf{x}_0) \right]}{\det (E + G_+(t)B)} \right]^{1/2}. \quad (5.20)$$

Подставляя явное выражение для матриц B и S , приходим к заключению, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. При $\beta > 0$, $\omega^2 \neq 0$, $\omega^2 \neq \beta^2$ производящая функция $Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0)$ распределения условных вероятностей при условии $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ определяется следующей формулой:

$$Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0) = \frac{\exp \left\{ (\beta - r) \left[t + \omega^2(\mathbf{x}_0, [E - e^{tD^T} [E + 2\omega^2(\beta - r)G_+(t)/\sigma]^{-1} e^{tD}] \mathbf{x}_0) / \sigma \right] \right\}}{\left[\det (E + 2\omega^2(\beta - r)G_+(t)/\sigma) \right]^{1/2}};$$

зависимость от λ определяется зависимостью от параметра $r = (\beta^2 + \lambda\sigma/2)^{1/2}$ и матрицы D .

Наконец, вычислим производящую функцию $Q(\lambda, t)$ безусловного распределения вероятностей значений функционала $J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$ от траекторий осцилляторного случайного процесса, которую мы называем обобщенной формулой Каца–Зигерта.

Согласно определению производящей функции $Q(\lambda, t)$ (см. (4.1)), она выражается посредством интеграла

$$Q(\lambda, t) = \mathbb{E} \exp(-\lambda J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]) = \int_{\mathbb{R}^2} Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0,$$

где плотность $f(\cdot)$ определяется формулой (3.6). Используя эти определения и (5.20), запишем интеграл в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 &= \left[\frac{\exp(t \operatorname{Sp} BS^2)}{(2\pi)^2 \det C \cdot \det (E + G_+(t)B)} \right]^{1/2} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x}_0, [C^{-1} - B + e^{tD^T} B[E + G_+(t)B]^{-1} e^{tD}] \mathbf{x}_0) \right) d\mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

где $C = \varkappa E$ (см. (3.6)). Воспользуемся тем, что $B < 0$ и $C > 0$. В этом случае матрица в показателе экспоненты положительно определена, так как $G_+^{-1}(t) > 0$. Вычислим двумерный интеграл Пуассона:

$$Q(\lambda, t) = \frac{\exp(t(\beta - r))}{\left[\det \left(E - CB + Ce^{tD^T} B [E + G_+(t)B]^{-1} e^{tD} \right) \cdot \det (E + G_+(t)B) \right]^{1/2}},$$

где использовано соотношение $\text{Sp } BS^2 = 2(\beta - r)$. Так как $D = A + BS^2$, $\text{Sp } A = -2\beta$, то

$$\begin{aligned} Q(\lambda, t) &= \frac{\exp((\beta + r)t)}{\left[\det \left(e^{-tD^T} e^{-tD} (1 - \varkappa\rho) + CB [E + G_+(t)B]^{-1} \right) \cdot \det (E + G_+(t)B) \right]^{1/2}} = \\ &= \frac{\exp((\beta + r)t)}{\left[\det \left((1 - \varkappa\rho)(e^{-tD} e^{-tD^T} + \rho G_-(t)) + \varkappa\rho E \right) \right]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

где произведена циклическая перестановка матрицы e^{-tD^T} под оператором \det и использована формула (5.8). Так как

$$D = -2rV - i\omega T^{(2)}, \quad D^T = -2rV + i\omega T^{(2)}, \quad V = \frac{1}{2}(E + T^{(3)}),$$

то, согласно (5.11),

$$\begin{aligned} e^{-Dt} &= e^{rt} \left(\text{ch}(Dt) E + \frac{rT^{(3)} + i\omega T^{(2)}}{D} \text{sh}(Dt) \right), \\ e^{-D^T t} &= e^{rt} \left(\text{ch}(Dt) E + \frac{rT^{(3)} - i\omega T^{(2)}}{D} \text{sh}(Dt) \right) \end{aligned}$$

и поэтому

$$e^{-2rt} e^{-Dt} e^{-D^T t} = \left(1 + \frac{2r^2}{D^2} \text{sh}^2(Dt) \right) E - \frac{2\omega r T^{(1)}}{D^2} \text{sh}^2(Dt) + \frac{rT^{(3)}}{D} \text{sh}(2Dt) \equiv L.$$

Заметим, что $G_-(t) = -G_+(-t)$, и поэтому, согласно (5.12), (5.13), (5.16), разложение матрицы $G_-(t)$ по базису $\langle E, T^{(l)}; l = 1, 2, 3 \rangle$ имеет вид

$$e^{-2rt} G_-(t) = \eta(L - e^{-2rt}), \quad \eta = \frac{\beta \varkappa \rho}{r}.$$

Вычислим коэффициенты разложения матрицы $R = (1 - \varkappa\rho)(e^{-tD} e^{-tD^T} + \rho G_-(t)) + \varkappa\rho E$. Так как

$$e^{-2rt} \left[e^{-Dt} e^{-D^T t} + \rho G_-(t) \right] = (1 + \eta)L - \eta e^{-2rt} E,$$

то

$$R = (1 - \varkappa\rho) \left((1 + \eta)L e^{2rt} - \eta E \right) + \varkappa\rho E.$$

Представим эту матрицу в виде $R = L_0 e^{2rt} + \gamma E$, где

$$\begin{aligned} L_0 &= (1 - \varkappa\rho)(1 + \eta) \frac{2r}{D^2} \text{sh}(Dt) \left[(rE - \omega T^{(1)}) \text{sh}(Dt) + T^{(3)} D \text{ch}(Dt) \right], \\ \gamma &= (1 + \eta) \left((1 - \varkappa\rho) e^{2rt} + \varkappa\rho \right) - \eta. \end{aligned}$$

При вычислении ее детерминанта на основе коэффициентов разложения по базису $\langle E, T^{(l)}; l = 1, 2, 3 \rangle$ воспользуемся тем, что она имеет порядок 2, т.е.

$$\det R = \gamma^2 + \gamma e^{2rt} \text{Sp } L_0 + e^{4rt} \det L_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (1 - \varkappa\rho)(1 + \eta) &= \frac{(\beta + r)^2}{4\beta r} \equiv \theta_+, \quad (1 + \eta)\varkappa\rho - \eta = -\frac{(\beta - r)^2}{4\beta r} \equiv -\theta_-, \\ \det L_0 &= \theta_+^2 \frac{(2r)^2}{D^4} \text{sh}^2(Dt) \left[(r^2 - \omega^2) \text{sh}^2(Dt) - D^2 \text{ch}^2(Dt) \right] = -\theta_+^2 \frac{(2r)^2}{D^2} \text{sh}^2(Dt). \end{aligned}$$

Так как матрицы $T^{(1)}$, $T^{(3)}$ имеют нулевой след, то

$$\text{Sp } L_0 = \theta_+ \frac{(2r)^2}{D^2} \text{sh}^2(Dt), \quad \gamma = \theta_+ e^{2rt} - \theta_-.$$

Следовательно,

$$\det R = e^{2rt} \left([\theta_+ e^{rt} - \theta_- e^{-rt}]^2 - \theta_- \theta_+ \frac{(2r)^2}{D^2} \text{sh}^2(Dt) \right).$$

Наконец, подставляя это выражение в знаменатель формулы (5.21), с учетом обозначений θ_{\pm} , получаем основной результат работы, который мы сформулируем в виде отдельного утверждения.

Теорема 5.3. При $\text{Re } \lambda > 0$ производящая функция $Q(\lambda, t)$ безусловного распределения вероятностей случайной величины, представленной значениями функционала $J_t[\tilde{x}(s)]$ от траекторий осцилляторного случайного процесса в случае, когда $\beta > 0$, $\omega^2 \neq 0$ и $\beta^2 \neq \omega^2$, определяется следующей формулой:

$$Q(\lambda, t) = \frac{4r\beta e^{\beta t}}{\left[\left((\beta + r)^2 e^{rt} - (\beta - r)^2 e^{-rt} \right)^2 - 4r^2 (\beta^2 - r^2)^2 \frac{\text{sh}^2(Dt)}{D^2} \right]^{1/2}}, \quad (5.22)$$

где $D = \sqrt{r^2 - \omega^2}$, $r = \sqrt{\beta^2 + \lambda\sigma/2}$.

6. Заключение. Полученная в работе формула (5.22), представляющая основной ее результат, выражает в явной форме, в терминах элементарных функций, характеристическую функцию (1.6) случайной величины

$$J_t[\tilde{x}(s)] = \int_0^t \left(\frac{d\tilde{x}(s)}{ds} \right)^2 ds$$

в случае, если $\tilde{x}(t)$; $t \in \mathbb{R}$ — случайные траектории осцилляторного случайного процесса.

Кроме определенного прогресса в области изучения распределений вероятностей квадратичных функционалов от траекторий гауссовских случайных процессов, этот результат может иметь важные приложения в статистической радиофизике и квантовой оптике. Заметим, что каждая характеристическая функция такого рода пропорциональна детерминанту Фредгольма интегрального оператора, ядро которого связано с корреляционным интегральным оператором. По этой причине полученный результат может оказаться полезным в теории интегральных уравнений. Отметим также, что в работе изучен так называемый вырожденный случай, когда детерминанты каждой из матриц S^2 и V равны нулю. С этой точки зрения в дальнейшем важно изучить общий невырожденный случай, для которого, по-видимому, также возможно явное вычисление соответствующего детерминанта Фредгольма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Статистические свойства функционала-свертки от нормального марковского процесса // Докл. АН Укр. ССР. Сер. А. — 1989. — 1. — С. 14–16.
2. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Распределение вероятностей случайного функционала-свертки от нормального марковского процесса // Пробл. передачи информ. — 1990. — 26, № 3. — С. 96–101.
3. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Статистические свойства кросс-корреляционного функционала на траекториях двух процессов Орнштейна–Уленбека // Радиофиз. квант. электрон. — 1996. — 39, № 7. — С. 916–924.
4. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Распределение кросс-корреляционного функционала от траекторий двух процессов Орнштейна–Уленбека // Докл. НАНУ. — 1996. — 4. — С. 27–30.
5. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Исследование статистики функционала контроля качества в теории обработки шероховатой поверхности // Функц. матер. — 2004. — 11, № 1. — С. 6–13.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1954.
7. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1. — М.: Наука, 1971.
8. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.
9. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Handbook on probability theory and mathematical statistics. — М.: Наука, 1985.

10. Новиков Е. А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности// ЖЭТФ. — 1964. — 47. — С. 1919–1927.
11. Палин В. В. О разрешимости квадратных матричных уравнений// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2008. — 6. — С. 36–41.
12. Anderson T. W. The Statistical Analysis of Time Series. — New York: Wiley, 1971.
13. Antosik P., Mikusinski J., Sikorski R. Theory of Distributions. The Sequential Approach. — Amsterdam: Elsevier, 1973.
14. Arato M. Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach. — Berlin: Springer-Verlag, 1982.
15. Doob J. L. Stochastic Processes. — New York: Wiley, 1953.
16. Furutsu K. On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium// J. Res. Natl. Bur. Standards. Sec. D. — 1963. — 67. — P. 303–311.
17. Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.
18. Ibragimov I. A., Rozanov Yu. A. Gaussian Random Processes. — New York: Springer-Verlag, 1978.
19. Кас М. Probability and Related Topics in Physical Sciences. — New York: Interscience, 1957.
20. Кас М., Ziegert A. J. F. On the theory of noise in radio receivers with square law detector// J. Appl. Phys. — 1947. — 18, № 4. — P. 383–397.
21. Karhunen K. Über Linearen Methoden in der Wahrscheinlichkeit Srechung// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. — 1947. — 1, № 2.
22. Kendall M. Time Series. — London: Griffin, 1975.
23. Lax M. Fluctuation and Coherence Phenomena in Classical and Quantum Physics. — New York: Gordon & Breach, 1968.
24. Loève M. Probability Theory. — Princeton, New Jersey: Van Nostrand, 1955.
25. Pugachev V. S. Theory of Random Functions And Its Application to Control Problems. — Amsterdam: Elsevier, 2013.
26. Pugachev V. S., Sinitzin I. N. Stochastic Differential Systems Analysis and Filtering. — Chichester–New York: World Scientific, 2002.
27. Simon B. The $P(\varphi)_2$ Euclidian Quantum Field Theory. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1974.
28. Slepian D. Fluctuation of random noise power// Bell Systems Tech. J. — 1958. — 37, № 1. — P. 163–184.
29. Stratonovich R. L. Selected Topics in the Theory of Random Noise. Vols. 1, 2. — New York: Gordon & Breach, 1963, 1967.
30. Wong E., Zakai M. On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals// Ann. Math. Stat. — 1965. — 36, № 5. — P. 1560–1564.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Вирченко Юрий Петрович

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова;

Белгородский государственный университет

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Мазманишвили Александр Сергеевич

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»

E-mail: не указан



КВАЗИБЕЗМОНОДРОМНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

© 2023 г. А. А. ГОЛУБКОВ

Аннотация. Введено понятие квазибезмонодромной особой точки системы дифференциальных уравнений первого порядка с параметром и аналитическими на комплексной плоскости коэффициентами, как такой особой точки, некоторая степень матрицы монодромии M которой при всех допустимых значениях параметра пропорциональна единичной матрице. При этом коэффициент пропорциональности может как зависеть, так и не зависеть от параметра. Для системы двух уравнений сформулированы условия на матрицу M , её след и определитель, необходимые и достаточные для того, чтобы особая точка системы была квазибезмонодромной. Приведены примеры систем двух уравнений с такими особыми точками, включая точки ветвления одного из коэффициентов системы.

Ключевые слова: безмонодромная особая точка, квазибезмонодромная особая точка.

QUASI-NONMONODROMIC SYSTEMS OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A PARAMETER

© 2023 А. А. GOLUBKOV

1. Введение. Матрица монодромии. Безмонодромные и квазибезмонодромные системы уравнений первого порядка. Рассмотрим систему L линейных дифференциальных уравнений с параметром λ

$$\frac{dy}{dz} = A(z, \lambda)y, \quad z \in K, \quad (1)$$

в кольцеобразной области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$. Здесь Ω_1 и Ω_2 — односвязные области в \mathbb{C} , $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек, причем область Ω_1 может состоять и из единственной точки. Будем считать, что матрица коэффициентов $A(z, \lambda)$ голоморфна всюду в области K при $\lambda \in \mathbb{C}$, однако это условие можно ослабить, ограничив область допустимых значений параметра λ .

Пусть существует такое минимальное целое число $N \geq 1$, что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ аналитическое продолжение матричной функции $A(z, \lambda)$ вдоль спрямляемой кривой $\gamma \subset K$, N раз обходящей область Ω_1 в положительном направлении и имеющей начало и конец в точке z_0 , совпадает с исходной матричной функцией в окрестности точки z_0 (процедура аналитического продолжения вдоль кривой описана, например, в [12, гл. 8, § 5]). В частности, $N = 1$, если все элементы матрицы A являются однозначными функциями $z \in K$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Обозначим через $Y_0(z, \lambda, z_0)$ фундаментальную матрицу пространства голоморфных решений системы (1) в окрестности точки $z_0 \in K$ при некотором значении параметра λ , а через $Y_1(z, \lambda, z_0)$ — аналитическое продолжение Y_0 вдоль кривой γ . По построению кривой γ матрицы Y_0 и Y_1 являются в окрестности точки z_0 фундаментальными матрицами для одной и той же системы уравнений (1). Поэтому для системы (1) существует такая постоянная невырожденная матрица монодромии M области Ω_1 , что

$$Y_1(z, \lambda, z_0) = Y_0(z, \lambda, z_0)M(\lambda, Y_0). \quad (2)$$

Пусть теперь $Y_n(z, \lambda, z_0)$ — аналитическое продолжение Y_0 вдоль некоторой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma_n \subset K$ с началом и концом в точке z_0 , которая nN раз обходит область Ω_1 . При этом $n > 0$, если обход происходит в положительном направлении, и $n < 0$, если в отрицательном. Нетрудно убедиться, что

$$Y_n(z, \lambda, z_0) = Y_0(z, \lambda, z_0)M^n(\lambda, Y_0).$$

Заметим, что матрица монодромии области Ω_1 в силу аналитичности матрицы коэффициентов A в области K не зависит от формы кривой $\gamma \subset K$, но зависит от выбора фундаментальной матрицы Y_0 . Действительно, рассмотрим аналитическое продолжение вдоль кривой γ фундаментальной матрицы $\tilde{Y}_0 := Y_0T$, где T — произвольная постоянная невырожденная матрица. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1(z, \lambda, z_0) &= Y_1(z, \lambda, z_0)T = Y_0(z, \lambda, z_0)M(\lambda, Y_0)T = \\ &= \tilde{Y}_0(z, \lambda, z_0)T^{-1}M(\lambda, Y_0)T = \tilde{Y}_0(z, \lambda, z_0)M(\lambda, \tilde{Y}_0), \end{aligned}$$

где $M(\lambda, \tilde{Y}_0) = T^{-1}M(\lambda, Y_0)T$. К аналогичному результату приводит также сдвиг начальной и конечной точки z_0 замкнутой кривой γ , а для многозначной матричной функции A — также и изменение выбора её начальной ветви. Таким образом, все матрицы монодромии области Ω_1 подобны друг другу, и, следовательно, имеют одинаковые след m и определитель d . Более того, из формулы Лиувилля (см. [10, ч. 1, § 9]) и соотношения (2) непосредственно следует, что определитель d любой матрицы монодромии системы (1), состоящей из L уравнений, однозначно определяется интегралом вдоль описанной выше кривой γ от следа матрицы коэффициентов A и может быть записан в виде

$$d(\lambda) = d_0^L(\lambda), \quad \text{где} \quad d_0(\lambda) := \exp \left\{ \int_{\gamma} \frac{1}{L} \operatorname{Tr} (A(z, \lambda)) dz \right\}; \quad (3)$$

он заведомо отличен от нуля при любом значении λ , при котором след матрицы $A(z, \lambda)$ голоморфен всюду в области \mathring{K} .

Из формулы (3) и подобия друг другу всех матриц монодромии области Ω_1 получаем следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Если для системы (1) хотя бы одна матрица монодромии области Ω_1 (её n -я степень) при некотором значении параметра λ пропорциональна единичной матрице I , то при этом значении параметра λ все матрицы монодромии этой области (их n -е степени) равны между собой и могут быть записаны в виде $\alpha d_0 I$ (или $\alpha d_0^n I$), где величина d_0 определена в (3), а коэффициент α может принимать одно из следующих L значений:*

$$\alpha \in \left\{ \exp \left(\frac{2\pi i k}{L} \right), \quad k = \overline{1, L} \right\} \quad (4)$$

(здесь i — мнимая единица).

Доказательство. Тот факт, что в условиях предложения все матрицы монодромии области Ω_1 совпадают между собой, следует из их подобия. Определитель матрицы $M^n = \alpha d_0^n I$ равен $\alpha^L d^n$ в силу (3) с одной стороны и d^n с другой. Поэтому $\alpha^L = 1$, откуда вытекает (4). \square

Если для системы (1), у которой все элементы матрицы A являются однозначными функциями $z \in K$ при $\lambda \in \mathbb{C}$, хотя бы одна матрица монодромии области Ω_1 равна единичной матрице при любых значениях параметра λ , то такую систему и соответствующую матрицу A называют безмонодромными в области K . Задача о нахождении безмонодромных матриц A является частным случаем существенно более общей задачи об изомодромных деформациях систем (1), которой посвящено большое число работ (см. например, работу [1] и ссылки в ней). При этом возникает следующий вопрос. Допустим, что A не является однозначной матричной функцией или (и) область K не является безмонодромной. Возможна ли в этом случае ситуация, когда при любых значениях λ матрица монодромии области Ω_1 или её некоторая ненулевая степень n пропорциональна единичной матрице I , т.е. представима в виде $\alpha d_0^n I$, где возможные значения

коэффициента α приведены в (4). Этот вопрос возникает, в частности, при исследовании асимптотик решений систем линейных дифференциальных уравнений вдоль кривых на комплексной плоскости, которые к настоящему времени изучены только при достаточно жестких ограничениях на форму кривой и (или) на матрицу коэффициентов A (см. например, работы [2, 19] и ссылки в них).

Определение 1.1. Пусть Ω_1 и Ω_2 — односвязные области в \mathbb{C} , $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек. Матрицу коэффициентов A и соответствующую систему уравнений (1) будем называть *квазибезмонодромными* в кольцеобразной области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ аналитичности матрицы A , если существует такое натуральное число $n \geq 1$, что $M^n(\lambda) \equiv \alpha d_0^n I$, где M — некоторая матрица монодромии области Ω_1 , величина d_0 определена в (3), а возможные значения коэффициента α приведены в (4). Пусть n_{\min} — минимальное значение степени n , при котором это тождество выполнено. Тогда будем называть $I_M := \alpha n_{\min}$ *показателем безмонодромности* матрицы коэффициентов A и системы уравнений (1) для области Ω_1 .

Если система уравнений (1) является квазибезмонодромной в области K и область Ω_1 состоит из единственной точки, то эту точку будем называть квазибезмонодромной особой точкой системы (1) и её матрицы коэффициентов A .

Подчеркнем, что в силу предложения 1.1 показатель безмонодромности область не зависит от выбора матрицы монодромии области Ω_1 . Заметим также, что $M^n(\lambda) \equiv \alpha d_0^n I$, если и только если $M^{-n}(\lambda) \equiv \alpha^{-1} d_0^{-n} I$, причем, как следует из (4), множества возможных значений α и α^{-1} совпадают. Поэтому ограничение $n \geq 1$ в определении 1.1 не является существенным, а использовано исключительно для удобства. Существенно только ограничение $n \neq 0$, поскольку $M^0 \equiv I$ для любой матрицы M . Определение 1.1 также легко обобщается на случай, когда в области K существуют безмонодромные особые точки матрицы коэффициентов. При этом достаточно говорить, что замкнутая кривая $\gamma \subset K$, вдоль которой происходит аналитическое продолжение матрицы A и которой соответствует некоторая матрица M монодромии области Ω_1 , не проходит через эти особые точки. Кроме того, в соответствии с определением 1.1 для безмонодромной матрицы коэффициентов имеем $I_M = 1$.

Предложение 1.2. Пусть матрицы монодромии области Ω_1 для системы уравнений имеют определитель d и след t . Замена в (1) неизвестных функций $y(z)$ на функции

$$y_s(z) = P(z)y(z), \quad \text{где} \quad P(z) := \exp \left\{ - \int_{z_0}^z \frac{1}{L} \operatorname{Tr} (A(v, \lambda)) dv \right\}, \quad z_0, z, v \in K, \quad (5)$$

сохраняет вид системы (1), но меняет матрицу коэффициентов $A(z, \lambda)$ на матрицу $A(z, \lambda) - \operatorname{Tr}(A(z, \lambda))/L$ со следом, равным нулю всюду в K (интегрирование в (5) ведется вдоль спрямляемой кривой, аналогичной кривой γ , описанной в начале статьи). При этом все матрицы монодромии области Ω_1 для преобразованной системы (1) имеют единичный определитель и след, равный t/d_0 , где величина d_0 определена в (3); для области Ω_1 новая и исходная системы уравнений являются или не являются квазибезмонодромными одновременно и их показатели безмонодромности совпадают.

Доказательство. Приведенное в утверждении преобразование матрицы коэффициентов системы (1) проверяется непосредственной подстановкой замены (5) в (1). Далее заметим, что для преобразованной системы (1) в силу (3), (5) фундаментальные матрицы решений Y_{0s}, Y_{1s} , соответствующие входящим в соотношение (2) фундаментальным матрицам решений Y_0, Y_1 исходной системы, следующим образом связаны с последними:

$$Y_{0s}(z_0, \lambda, z_0) = Y_0(z_0, \lambda, z_0), \quad Y_{1s}(z_0, \lambda, z_0) = Y_1(z_0, \lambda, z_0)/d_0.$$

Поэтому, как следует из (2), соответствующая фундаментальной матрице Y_{0s} матрица монодромии области Ω_1 новой системы есть $M_s = M/d_0$, что в силу (3) и определения 1.1 доказывает остальные утверждения предложения. \square

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса о существовании систем двух уравнений первого порядка с квазибезмонодромными особыми точками, имеющими различные значения показателя безмонодромности. В разделе 2 сформулированы три необходимых и достаточных условия квазибезмонодромности системы уравнений (1) при $L = 2$ в терминах матрицы монодромии M и отношения её следа к величине d_0 , определенной в (3). Для каждого из этих трех условий найдено значение I_M и доказано, что не существует квазибезмонодромных матриц A второго порядка с положительным четным показателем безмонодромности. В разделе 3 приведены примеры матриц A второго порядка с квазибезмонодромными особыми точками, включая точки ветвления, со всеми остальными значениями I_M . При этом рассмотрены примеры только таких матриц A с нулевым следом (см. предложение 1.2), для которых система $\ddot{E}(1)$ эквивалентна уравнению Штурма—Лиувилля вида

$$y''(z) + (q(z) - \lambda^2 r(z))y(z) = 0, \quad z \in K, \quad (6)$$

при постоянном или переменном весе $r(z)$. Особый интерес к указанному частному случаю систем (1), связан с тем, что изучение их квазибезмонодромных особых точек необходимо для дальнейшего исследования краевых и обратных спектральных задач для уравнений Штурма—Лиувилля на кривых в комплексной плоскости, которые к настоящему времени рассмотрены только при достаточно жестких ограничениях на форму кривой и (или) на коэффициенты уравнения (см. например, работы [3–5, 9, 17, 18] и ссылки в них).

2. Необходимые и достаточные условия квазибезмонодромности системы двух уравнений первого порядка в кольцеобразной области аналитичности её коэффициентов.

Лемма 2.1. Пусть $t = \text{Tr } M$ — след матрицы второго порядка M с единичным определителем, I — единичная матрица второго порядка. Тогда для любого целого n

$$M^n = a_n M + b_n I, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

где $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, а остальные коэффициенты a_n и b_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$a_n = t a_{n-1} + b_{n-1}, \quad b_n = -a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Доказательство. Справедливость представления (7) и выражения для коэффициентов a_n и b_n при $n \in \{0, 1\}$ следуют непосредственно из определения нулевой и первой степени матрицы, причем $b_0 = a_1 = 1$, $a_0 = b_1 = 0$, т.е. формулы (8) справедливы при $n = 1$. Учитывая, что $\det M = 1$, нетрудно также получить, что

$$M^2 = tM - I, \quad M^{-1} = -M + tI, \quad (9)$$

т.е. представление (7) справедливо также при $n \in \{-1, 2\}$, причем $a_2 = b_{-1} = t$, $a_{-1} = b_2 = -1$, и значит, формулы (8) выполнены при $n \in \{0, 2\}$. Далее воспользуемся индукцией по $N \in \mathbb{N}$. Предположим, что представление (7) справедливо при $n \in \{-N + 1, \dots, N\}$, $N \geq 2$, а формулы (8) — при $n \in \{-N + 2, \dots, N\}$ (выше это было доказано для $N = 2$). Тогда, пользуясь соотношениями (7) при $n = -N + 1$ и $n = N$, а также формулами (9), получим:

$$\begin{aligned} M^{N+1} &= a_N M^2 + b_N M = (t a_N + b_N) M - a_N I, \\ M^{-N} &= a_{-N+1} I + b_{-N+1} M^{-1} = -b_{-N+1} M + (t b_{-N+1} + a_{-N+1}) I, \end{aligned}$$

т.е. представление (7) справедливо также и при $n = N + 1$, $n = -N$, причем

$$\begin{aligned} a_{N+1} &= t a_N + b_N, & b_{N+1} &= -a_N, \\ a_{-N} &= -b_{-N+1}, & b_{-N} &= t b_{-N+1} + a_{-N+1} = -t a_{-N} + a_{-N+1}, \end{aligned}$$

что доказывает формулы (8) при $n = -N + 1$ и $n = N + 1$. □

Лемма 2.2. Пусть $\mu = 0,5(t + \sqrt{t^2 - 4})$. Тогда в условиях леммы 2.1

$$a_n = (\pm 1)^{n+1} n \quad \text{при } t = \pm 2, \quad (10)$$

$$a_n = \frac{\mu^n - \mu^{-n}}{\mu - \mu^{-1}} \quad \text{при } t \neq \pm 2, \mu \neq \pm 1. \quad (11)$$

Доказательство. Поскольку в силу леммы 2.1 коэффициенты a_n и b_n зависят только от номера n и следа M , то достаточно провести доказательство леммы для диагональной матрицы M с элементами μ и $1/\mu = 0,5(t - \sqrt{t^2 - 4})$ (напомним, что $\det M = 1$, $M = \text{Tr } M$). В этом случае M^n — диагональная матрица с элементами μ^n и μ^{-n} . Поэтому из соотношений (7) сразу имеем

$$\mu^n = a_n \mu + b_n, \quad \mu^{-n} = \frac{a_n}{\mu} + b_n. \quad (12)$$

Если $M = \pm 2$, т.е. $\mu = \pm 1$, то уравнения в (12) равносильны. Добавляя к ним вторую формулу из (8), получим новое рекуррентное соотношение

$$\mu a_n = \mu^n + a_{n-1}. \quad (13)$$

Обозначим $c_n := \mu^{n+1} a_n$. Тогда умножая (13) на μ^n и учитывая, что $\mu^2 = 1$, получим $c_n = 1 + c_{n-1}$. Поскольку $c_0 = a_0 = 0$, то, пользуясь формулой для n -го члена арифметической прогрессии, получаем (10). Пусть теперь $M \neq \pm 2$ (т.е. $\mu \neq \pm 1$). В этом случае формула (11) следует непосредственно из соотношений (12). \square

В силу леммы 2.2 при $M = \pm 2$ коэффициент $a_n \neq 0$ при любом целом $n \neq 0$. Пользуясь также леммой 2.1, получим следующие два утверждения.

Следствие 2.1. Если $M = 2$ и $M \neq I$, то $M^n \neq \pm I$ при любом целом $n \neq 0$.

Следствие 2.2. Если $M = -2$ и $M \neq -I$, то $M^n \neq \pm I$ при любом целом $n \neq 0$.

Лемма 2.3. При $t \neq \pm 2$ и $n \neq 0$ коэффициент a_n в формуле (7) равен нулю тогда и только тогда, когда $M = 2 \cos(\pi k/n)$, где $|n| \geq 2$, а $k \in \{1, \dots, |n| - 1\}$. При этом $b_n = (-1)^k$.

Доказательство. При $t \neq \pm 2$ (т.е. $\mu \neq \pm 1$) из формулы (11) следует, что $a_n = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu = \exp(i\pi k/n)$, т.е. $\mu^n = (-1)^k$, где i — мнимая единица, а целое число $k \neq pn$, $p \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, при таких значениях μ имеем:

$$M \equiv \mu + (\mu)^{-1} = 2 \cos \frac{\pi k}{n}, \quad b_n = -a_{n-1} = (-1)^k$$

в силу соотношений (8) и (11). Ограничения $|n| \neq 1$, $k \neq pn$ возникают из условия $t \neq \pm 2$. Приведенные в лемме ограничения на значения k , отличные от условия $k \neq pn$, $p \in \mathbb{Z}$, несущественны, т.к. в силу свойств косинуса они не меняют множество всех подходящих значений M . Они добавлены для удобства использования леммы в дальнейших доказательствах. \square

Лемма 2.4. Пусть $M = 2 \cos(\pi k/n)$, где числа $n \geq 2$ и $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ взаимно просты. Тогда $a_j \neq 0$, $j = \overline{1, n - 1}$, $a_n = 0$.

Доказательство. Очевидно, что в условиях леммы $M \neq \pm 2$, и $a_n = 0$ в силу леммы 2.3. Если $n = 2$, то лемма полностью доказана, поскольку $a_1 = 1$. Предположим, что $n \geq 3$, и $a_j = 0$ при некотором $j \in \{2, \dots, n - 1\}$. Тогда из леммы 2.3 получаем, что $M = 2 \cos(\pi s/j)$, где $s \in \{1, \dots, j - 1\}$. В силу условия леммы это означает, что $\cos(\pi k/n) = \cos(\pi s/j)$. Воспользовавшись формулой разности косинусов, находим, что $k/n + s/j = 2p$ или $k/n - s/j = 2p$, где $p \in \mathbb{Z}$. По условию $0 < k/n, s/j < 1$, поэтому возможен только второй случай при $p = 0$. Допустим, что $k/n = s/j$, т.е. $kj = ns$. Но n и k взаимно просты, поэтому последнее равенство возможно только, если $j = rn$, где целое число $r \geq 1$, а по условию $j < n$. Это противоречие доказывает лемму. \square

Теорема 2.1. Пусть Ω_1 и Ω_2 — односвязные области в \mathbb{C} , $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек. Тогда при $L = 2$ система уравнений (1) и матрица коэффициентов A являются квазибезмонодромными в кольцеобразной области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ аналитичности матрицы A тогда и только тогда, когда для системы уравнений (1) некоторая матрица монодромии M области Ω_1 или её след M удовлетворяют одному из следующих трех альтернативных условий:

- (i) $M = d_0 I$;
- (ii) $M = -d_0 I$;
- (iii) $M = 2d_0 \cos(\pi k/n)$, где числа $n \geq 2$ и $k \in \{1, \dots, n-1\}$ взаимно просты, а множитель d_0 определен в (3).

В первых двух случаях показатель безмонодромности равен $I_M = \pm 1$ соответственно, а в последнем случае $I_M = (-1)^k n$.

Доказательство. Рассмотрим прежде всего случай системы (1) с единичным определителем матрицы монодромии, т.е. случай $d = d_0 = 1$. В этом случае при $n \geq 1$ в силу формулы (7) $M^n \in \{\pm I\}$ тогда и только тогда, когда либо $M \in \{\pm I\}$, либо $M \notin \{\pm I\}$, но $a_n = 0$. Поэтому необходимость и достаточность выполнения одного из трех условий теоремы непосредственно вытекает из следствий 2.1, 2.2 и леммы 2.3. При этом условие взаимной простоты чисел k и n , очевидно, не является существенным, так как не меняет множество всех подходящих значений M . Значение I_M в первых двух случаях сразу следует из определения 1.1, а в третьем случае ($m \neq \pm 2$) — из определения 1.1, формулы (7) и леммы 2.4.

Пусть теперь $d_0 \neq 1$. Тогда, делая замену (5), получим новую систему вида (1), матрицы монодромии M_1 которой в силу предложения 1.2 будут иметь след $M_1 = m/d_0$ и единичный определитель. Применяя к новой системе теорему 2.1, только что доказанную для случая единичного определителя, получим, что утверждение теоремы справедливо и в общем случае. \square

Следствие 2.3. При $L = 2$ не существует матриц коэффициентов A с положительным четным показателем безмонодромности I_M .

Доказательство. В силу теоремы 2.1 показатель безмонодромности равен либо ± 1 , либо $(-1)^k n$, где k и n взаимно просты и, следовательно, не могут быть одновременно четными. \square

3. Примеры систем двух уравнений первого порядка с квазибезмонодромными особыми точками. Пользуясь предложением 1.2, ограничимся примерами систем (1), у которых матрицы A имеют след, тождественно равный нулю в области K ; значит, матрицы монодромии области Ω_1 в силу соотношения (3) имеют единичный определитель. К таким системам, в частности, относятся системы уравнений (1) с матрицей коэффициентов вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\lambda^2 r(z) - q(z)) & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

которые равносильны уравнению Штурма—Лиувилля (6). При этом элементы первой строки фундаментальных матриц Y_0, Y_1 образуют фундаментальную систему голоморфных решений (ФСР) уравнения (6), а элементы второй строки — первые производные по z элементов первой строки. Это позволяет естественным образом перенести определение 1.1 с системы (1) и её особых точек на уравнение (6) и его особые точки. Поэтому в дальнейшем будем говорить в том числе и о показателях безмонодромности особых точек коэффициентов уравнения (6). Кроме того, следуя терминологии, принятой в теории уравнений Штурма—Лиувилля, будем называть $q(z)$ потенциалом, а $r(z)$ — весом.

Для матриц A вида (14) с единичным весом случай $M = I$ в теории уравнений Штурма—Лиувилля хорошо изучен для однозначных потенциалов (см. [7, 8, 13, 15, 16]), но для многозначных потенциалов он ранее не исследовался; случай (ii) в теореме 2.1 для таких матриц A , скорее всего, не реализуем ни для каких однозначных потенциалов. По крайней мере, пользуясь известными асимптотическими представлениями решений уравнения (6) (см. [14, 19]) можно доказать, что это справедливо, если в области K существует хотя бы одна спрямляемая кривая, ограничивающая выпуклую область. Последнее, в частности, всегда имеет место в некоторой достаточно малой

выколотой окрестности изолированной особой точки. Вместе с тем, как показано в данном пункте, случай $M = -I$ реализуем при единичном весе для особых точек потенциала многозначного характера. Кроме того, ниже приведены примеры матриц A вида (14), имеющих любое заданное значение показателя безмонодромности, не запрещенное следствием 2.3.

Пусть в (14)

$$r(z) = 1, \quad q(z) = -\frac{p(p-1)}{z^2}, \quad \text{где } p \geq \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Ограничение на значения p учитывает тот факт, что замена p на $1-p$ не меняет вид потенциала в (15). Как известно (см. например, [10, ч. 3, гл. 2, пример 2.162(7)]), если $\lambda \neq 0$, то одну из ФСР уравнения (6) с коэффициентами (15) образуют функции $y^{(1)} = \sqrt{z} J_{p-1/2}(i\lambda z)$ и $y^{(2)} = \sqrt{z} N_{p-1/2}(i\lambda z)$, где J_k и N_k — функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Также хорошо известно (см. [11, формула (21.8-6)]), что

$$J_k(\exp\{2\pi i\}z) = \exp\{2\pi k i\} J_k(z), \quad N_k(\exp\{2\pi i\}z) = \exp\{-2\pi k i\} N_k(z) + 4i \cos^2(\pi k) J_k(z).$$

Следовательно, при $\lambda \neq 0$ и указанном выборе ФСР матрица монодромии особой точки $z = 0$ уравнения (6) с коэффициентами (15), и значит, системы (1) с матрицей коэффициентов (14), (15) будет равна

$$M = \begin{pmatrix} \exp\{2\pi p i\} & -4i \sin^2(\pi p) \\ 0 & \exp\{-2\pi p i\} \end{pmatrix}.$$

Поэтому для этой особой точки $M \equiv \text{Tr } M = 2\cos(2\pi p)$. Заметим также, что при $\lambda = 0$ в качестве ФСР уравнения (6) с коэффициентами (15) можно взять, например, функции z^p , z^{1-p} при $p \neq 1/2$ и $z^{1/2}$, $z^{1/2} \ln z$ при $p = 1/2$. При этом вид матрицы монодромии будет немного другим, но формула для следа сохраняется. Из нее и теоремы 2.1 следует, что возможны два интересных для нас случая квазибезмонодромных матриц коэффициентов A вида (14), (15):

- (1) случай $p \in \mathbb{N}$ соответствует частному случаю хорошо исследованного класса безмонодромных потенциалов ($M = I$) уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида (см. [7, 8]);
- (2) случай $p = (r+k/n)/2$, где $r \in \mathbb{N}$, а числа $n \geq 2$ и $k \in \{1, \dots, n-1\}$ взаимно просты, соответствует ранее не рассматривавшемуся случаю уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида с квазибезмонодромным потенциалом, при этом его показатель безмонодромности $I_M = (-1)^k n$, если r четное, и $I_M = (-1)^{n-k} n$, если r нечетное.

При остальных значениях p матрица A вида (14), (15) не будет квазибезмонодромной. Иными словами, матрицы коэффициентов вида (14), (15) являются квазибезмонодромными при любом рациональном p , отличном от полуцелого числа. При этом они охватывают все возможные значения показателя безмонодромности, не запрещенные следствием 2.3, кроме $I_M = -1$.

Поскольку, как уже говорилось, при единичном весе однозначные изолированные особые точки потенциала заведомо не могут иметь $I_M = -1$, то рассмотрим потенциалы, имеющие в нуле точку ветвления порядка $N-1 > 0$, и сделаем в уравнении (6) с $r(z) = 1$ следующие замены переменной и неизвестной функции:

$$w = z^{1/N}, \quad u(w) = y(z)w^{(1-N)/2}. \quad (16)$$

Тогда прямой подстановкой нетрудно убедиться, что $u(w)$ удовлетворяет уравнению Штурма—Лиувилля с комплексным весом, имеющим в точке $w = 0$ нуль кратности $2(N-1)$:

$$u''(w) + \left\{ \frac{1-N^2}{4w^2} + N^2 w^{2N-2} (q(w^N) - \lambda^2) \right\} u(w) = 0. \quad (17)$$

При этом существенно, что при N -кратном обходе по замкнутой траектории особой точки $z = 0$ на комплексной плоскости z , особая точка $w = 0$ на комплексной плоскости w будет обходиться один раз также по замкнутой траектории, и значит, потенциал в уравнении (17) будет однозначной функцией w . При этом для любых ФСР уравнений (6) и (17), связанных между собой соотношением (16), соответствующие матрицы монодромии M_z и M_w этих особых точек будут также связаны:

$$M_w = (-1)^{N-1} M_z. \quad (18)$$

Действительно, пусть функции $u^{(j)}(w)$, $j = 1, 2$, образуют ФСР уравнения (17). Тогда соответствующее ФСР уравнения (6) в силу (16) будет иметь вид

$$y^{(j)}(z) = u^{(j)}(w)w^{(N-1)/2}, \quad w = z^{1/N}.$$

Поэтому, если

$$u^{(j)}(w \exp\{2\pi i\}) = M_{w,jk} u^{(k)}(w), \quad j, k = 1, 2$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование), то

$$\begin{aligned} y^{(j)}(z \exp\{2\pi Ni\}) &= (-1)^{N-1} u^{(j)}(w \exp\{2\pi i\}) w^{(N-1)/2} = \\ &= (-1)^{N-1} M_{w,jk} u^{(k)}(w) w^{(N-1)/2} = (-1)^{N-1} M_{w,jk} y^{(k)}(z). \end{aligned}$$

Из соотношения (18) вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.1. Пусть точка $z = 0$ является точкой ветвления потенциала $q(z)$ порядка $N - 1$ ($N \geq 2$), а точка $w = 0$ — безмонодромная особая точка уравнения (17). Тогда точка $z = 0$ является квазибезмонодромной особой точкой уравнения (6) с $r(z) = 1$, причем $I_M = (-1)^{N-1}$.

Неограниченное количество уравнений вида (17) с безмонодромной особой точкой $w = 0$ можно построить, пользуясь следующей леммой, являющейся частным случаем (при $\lambda = 0$) леммы 1 из [6],

Лемма 3.1. Пусть функция $h(w)$ имеет вид

$$h(w) = -\frac{\nu(\nu-1)}{w^2} + h_{-1}w^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} h_k w^k,$$

где $\nu \in \mathbb{N}$, $h_{-1} = h_1 = \dots = h_{2\nu-3} = 0$, и ряд сходится в круге $U_R = \{|z| < R\}$. Тогда все голоморфные решения уравнения

$$u''(w) + h(w)u(w) = 0$$

однозначны в кольце $K_R = \{0 < |w| < R\}$.

Заметим, что различие в знаке перед первым слагаемым формулы для потенциала в [6, лемма 1] и в лемме 3.1 настоящей работы связано с соответствующими различиями в знаках перед потенциалами в уравнениях Штурма—Лиувилля.

Пусть потенциал $q(z)$ в уравнении (6) имеет вид

$$q(z) = \frac{1}{N^2 z^2} \left(-\frac{1-N^2}{4} - \nu(\nu-1) + \sum_{k=-1}^{\infty} h_k z^{(k+2)/N} \right).$$

Здесь $N \geq 2$, $\nu \in \mathbb{N}$, $h_{-1} = h_1 = \dots = h_{2\nu-3} = 0$, ряд сходится в круге U_R , и существует хотя бы одно $h_k \neq 0$ с номером $k = l - 2$, где $l \in \mathbb{N}$, l и N взаимно просты (т.е. точка $z = 0$ является точкой ветвления потенциала $q(z)$ порядка $N - 1$). Тогда в силу предложения 3.1 и леммы 3.1 показатель безмонодромности уравнения (6) с $r(z) = 1$ в кольце K_R будет равен $(-1)^{N-1}$. Таким образом, при любом четном (нечетном) $N \geq 2$ получаем семейство многозначных потенциалов, особая точка которых имеет показатель бемонодромности $I_M = -1$ ($I_M = 1$).

Предложение 3.1 может быть обращено и использовано для поиска уравнений Штурма—Лиувилля с переменным весом, безмонодромных в некоторой области. Пусть уравнение (6) является квазибезмонодромным в некоторой кольцеобразной области $K_z = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ комплексной плоскости z , причем модуль показателя безмонодромности $n \geq 1$, а голоморфный всюду в K потенциал $q(z)$ имеет конечный порядок ветвления $N - 1 \geq 0$ ($nN > 1$). Без ограничения общности можно считать, что точка $z = 0$ лежит в области Ω_1 . Тогда, делая в уравнении (6) замены переменной и неизвестной функции, аналогичные заменам (16):

$$w = z^{1/(nN)}, \quad u(w) = y(z)w^{(1-nN)/2}, \quad (19)$$

получим, что функция $u(w)$ удовлетворяет следующему уравнению Штурма—Лиувилля, аналогичному уравнению (17):

$$u''(w) + \left\{ \frac{1 - (nN)^2}{4w^2} + (nN)^2 w^{2nN-2} (q(w^{nN}) - \lambda^2) \right\} u(w) = 0, \quad w \in K_w. \quad (20)$$

Замена (19) отобразит любую замкнутую кривую, лежащую в области K_z и обходящую nN раз область Ω_1 , в замкнутую кривую, лежащую в некоторой кольцевой области $K_w = \Omega_{2w} \setminus \Omega_{1w}$ комплексной плоскости w и обходящую область Ω_{1w} один раз. Поэтому потенциал уравнения (20) будет однозначной функцией w в области K_w . При этом для любых ФСР уравнений (6) и (20), связанных между собой соотношением (19), соответствующие матрицы монодромии M_z и M_w областей Ω_1 и Ω_{1w} будут связаны соотношениями, аналогичными формуле (18):

$$M_w = (-1)^{nN-1} M_z.$$

Поэтому справедливо, в частности, следующее утверждение.

Предложение 3.2. Пусть точка $z = 0$ является точкой ветвления потенциала $q(z)$ порядка $N - 1$, $N \geq 1$, и имеет порядок безмонодромности $I_{M_z} = (-1)^L n$, где $n \geq 1$. Тогда порядок безмонодромности точки $w = 0$ уравнения (20) равен $I_M = (-1)^{L+nN-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болибрух А. А.* Дифференциальные уравнения с мероморфными коэффициентами // Совр. пробл. мат. — 2003. — № 1. — С. 29–82.
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
3. *Голубков А. А.* Обратная задача для операторов Штурма—Лиувилля в комплексной плоскости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2018. — 18, № 2. — С. 144–156.
4. *Голубков А. А.* Краевая задача для уравнения Штурма—Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой и условиями разрыва решений // Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — 16. — С. 1005–1027.
5. *Голубков А. А.* Спектр оператора Штурма—Лиувилля на кривой с параметром в краевых условиях и условиях разрывов решений // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 193. — С. 45–68.
6. *Ишкин Х. К.* О критерии однозначности решений уравнения Штурма—Лиувилля // Мат. заметки. — 2008. — 84, № 4. — С. 552–566.
7. *Ишкин Х. К.* О критерии безмонодромности уравнения Штурма—Лиувилля // Мат. заметки. — 2013. — 94, № 4. — С. 552–568.
8. *Ишкин Х. К., Ахметшина А. Д.* О классе потенциалов с тривиальной монодромией // Вестн. Казах. нац. ун-та. Сер. мат. мех. информ. — 2018. — 99, № 3. — С. 43–52.
9. *Ишкин Х. К., Давлетова Л. Г.* Регуляризованный след оператора Штурма—Лиувилля на кривой с регулярной особенностью на хорде // Диффер. уравн. — 2020. — 56, № 10. — С. 1291–1303.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1981.
12. *Маркушевич А. М.* Теория аналитических функций. Т. 2. — М.: Наука, 1968.
13. *Обломков А. А.* Безмонодромные операторы Шредингера с квадратично растущим потенциалом // Теор. мат. физ. — 1999. — 121, № 3. — С. 374–386.
14. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). — М.: Мир, 1965.
15. *Duistermaat J. J., Grünbaum F. A.* Differential equations in the spectral parameter // Commun. Math. Phys. — 1986. — 103, № 2. — P. 177–240.
16. *Gibbons J., Veselov A. P.* On the rational monodromy-free potentials with sextic growth // J. Math. Phys. — 2009. — 50, № 1. — 013513.
17. *Golubkov A. A., Kuryshova Yu. V.* Inverse problem for Sturm—Liouville operators on a curve // Tamkang J. Math. — 2019. — 50, № 3. — P. 349–359.
18. *Golubkov A. A.* Inverse problem for the Sturm—Liouville equation with piecewise entire potential and piecewise constant weight on a curve // Сиб. электрон. мат. изв. — 2021. — 18, № 2. — С. 951–974.

19. *Langer R. E.* The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain// Trans. Am. Math. Soc. — 1939. — 46. — P. 151—190.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Голубков Андрей Александрович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: andrej2501@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 69–72
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-69-72

УДК 519.1

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПУТИ НА ГРАФАХ С ОДНОВРЕМЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ ПРОХОЖДЕНИЯ ДУГ

© 2023 г. Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, М. И. ОСИПОВ, В. А. СКОРОХОДОВ

Аннотация. В работе предложен алгоритм нахождения кратчайшего по времени прохождения пути на графе, когда на каждой дуге задано два веса: время, требуемое для прохождения дуги до начала часа пик, и время, требуемое для прохождения дуги во время часов пик, а также указано время начала часа пик и время старта. Предложенный алгоритм можно считать модификацией классического алгоритма Э. Дейкстры.

Ключевые слова: взвешенный граф, вес дуги, кратчайший по времени путь, алгоритм Дейкстры, час пик.

EXTREME PATHS ON GRAPHS WITH SIMULTANEOUSLY VARYING ARC DURATIONS

© 2023 Ya. M. ERUSALIMSKIY, M. I. OSIPOV, V. A. SKOROKHODOV

ABSTRACT. In this paper, we propose an algorithm for finding the fastest path on a graph with two weights on each arc, namely, the times required to pass the arc before the beginning of rush hour and during rush hours, if the time of the beginning of rush hours is also indicated. The algorithm proposed can be considered a modification of the classical E. Dijkstra algorithm.

Keywords and phrases: weighted graph, arc weight, shortest time path, Dijkstra's algorithm, rush hour.

AMS Subject Classification: 05C38

1. Введение. Широко используемые мобильные приложения, называемые навигаторами, наряду с несомненными достоинствами, обладают рядом существенных недостатков. В частности, маршрут из вершины в вершину, который они находят, строится, фактически, по одному принципу: они прокладывают кратчайший маршрут, привязанный, как правило, к основным магистралям. Это при широком их использовании способствует образованию транспортных пробок. Они также не учитывают, что кратчайший путь может быть далеко не самым быстрым: скорость его прохождения может быть низкой в силу загруженности его потоком транспорта.

Ясно, что длина дуги — постоянная (физическая) величина, а вот время проезда по дуге в разное время суток может быть разным; например, это определяется разной степенью загруженности дуги потоком транспорта (под дугой здесь понимается участок автомобильной дороги) или степенью освещенности дороги в различное время суток.

Таким образом, если мы рассматриваем в качестве веса дуги не её длину, а время прохождения через эту дугу, то в реальной постановке веса дуг следует рассматривать не как их постоянные характеристики, а как функции времени. В такой постановке задача нахождения кратчайшего

по времени пути, ведущего из вершину в вершину становится динамической, но скорее всего не решаемой. В настоящей работе мы рассматриваем простую, но реальную постановку задачи когда, веса всех дуг меняются одновременно в одно и тоже время, которое мы назвали часом пик. Таким образом у каждой дуги нашего графа имеется два веса: время прохождения её до начала часа пик и время прохождения по ней в часы пик.

На самом деле и в такой постановке задача остается динамической. Действительно, каков вес дуги если начало движения по ней происходит до часа пик, а завершается, когда час пик наступил? Это означает, что часть дуги мы проходим со скоростью, соответствующей движению до часа пик, а оставшуюся часть дуги со скоростью в часы пик. Перейдем к строгой постановке задачи о кратчайшем по времени пути на графе с одновременно меняющимися длительностями прохождения по его дугам.

2. Постановка задачи и алгоритм её решения. Рассмотрен новый класс ориентированных графов с парами весов на дугах $\rho_1(u), \rho_2(u)$. Веса дуг положительны и означают время прохождения соответствующей дуги. Задано время T ; если $t_u + \rho_1(u) \leq T$ (t_u — время начала прохождения по дуге u), то «действует» вес $\rho_1(u)$, если $t_u \geq T$, то «действует» вес $\rho_2(u)$; в иных случаях действует «переходной вес дуги», который строится естественным образом по весам $\rho_1(u), \rho_2(u)$. Такие графы можно считать частным случаем динамических графов (см. [1, 3–5]).

Рассмотрена задача нахождения кратчайшего по времени пути на таком графе из заданной вершины при указанном времени старта в произвольную вершину графа. Ясно, что задача имеет четкое практическое истолкование, а именно, T — время начала «часа пик», а пары весов дуг — времена прохождения по дуге ($\rho_1(u)$ — до «часа пик», $\rho_2(u)$ — во время «часа пик»). «Пиковость» означает, что для для весовых функций дуг ρ_1 и ρ_2 выполнено условие

$$\rho_1(u) \leq \rho_2(u) \quad \forall u \in U. \quad (1)$$

Предложенный алгоритм можно считать модификацией известного алгоритма Э. Дейкстры, который в своей оригинальной версии не учитывает динамики графа. Аналогичная задача была рассмотрена ранее в [2]. В ней использован подход, применявшийся ранее авторами в задачах на графах с ограничениями на достижимость. Решение требует построение развертки графа. Задача полностью дискретизируется по времени, и значит не предполагает ситуации использования переходных весов. В этом смысле алгоритм, предлагаемый в настоящей работе, является более точным, близким к реальным ситуациям и просто реализуемым.

Ещё одной особенностью, отличающей предложенный алгоритм от алгоритма Э. Дейкстры, является изменение «смысла» используемых в нём меток вершин. В классическом алгоритме Э. Дейкстры метка вершины в случае нахождения кратчайшего по времени прохождения пути имеет следующий времени прохождения из начальной вершины в текущую; в нашем случае, когда мы ищем кратчайший по времени прохождения путь, при указанном времени начала движения (времени старта) метка вершины — это время прибытия в неё при указанном времени старта. Таким образом, исходная метка стартовой вершины полагается равной времени старта и не меняется в процессе применения алгоритма, а исходные метки остальных вершин полагаются равными $+\infty$ (в классическом алгоритме начальная метка стартовой вершины равна 0).

Как известно, алгоритм Э. Дейкстры — один из первых динамических алгоритмов, основанный на выполнении шагов пересчета меток вершин до тех пор, пока изменяется метка хотя бы одной из вершин графа. Пересчет метки вершины y осуществляется по дугам, которые заканчиваются в вершине y , по следующему правилу: сравниваются между собой M_y и величина $M_y(u)$, определенная равенством

$$M_y(u) = M_x + \rho(u), \quad f(u) = (x; y), \quad (2)$$

причем

$$\text{если } M_y(u) < M_y, \text{ то } M_y := M_y(u). \quad (3)$$

В этом случае говорят, что метка вершины y была пересчитана через метку вершины x по дуге, приходящей из вершины x в вершину y . Установившиеся метки вершин имеют известный смысл — наименьшее возможное время прибытия из начальной вершины в данную вершину. Массив меток позволяет восстановить сам экстремальный путь из начальной вершины в заданную вершину.

В нашем случае правило (3) пересчета меток остается прежним, а формула (2) для $M_y(u)$, заменяется на следующую:

$$M_y(u) = \begin{cases} M_x + \rho_1(u), & \text{если } M_x + \rho_1(u) \leq T; \\ M_x + \rho_2(u), & \text{если } M_x \geq T; \\ T + \frac{(\rho_1(u) - (T - M_x))}{(\rho_1(u))} \cdot \rho_2(u) & \text{в иных случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

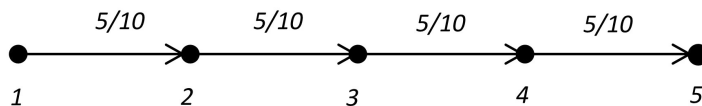
Что означают выражения, содержащиеся в правой части за фигурной скобкой в (4)? Первая строка — пересчет метки вершины, когда это происходит до достижения времени T . Вторая строка — пересчет метки, когда это происходит после достижения времени T , а нижняя строка означает, что пересчет метки происходит в переходной момент — часть дуги u мы проходим, используя её вес $\rho_1(u)$, а её оставшуюся часть, используя её вес $\rho_2(u)$.

Фактически это означает, что мы имеем дело как бы с тремя графами. На первом из них дуги имеют весовую функцию ρ_1 , на втором — дуги имеют весовую функцию ρ_2 , на третьем графе веса дуг определены третьей строкой формулы (3), т.е. динамически.

Восстановление экстремального пути непосредственно по массиву меток из-за формулы (3), которая применяется при пересчете меток, можно осуществить, но это, в отличие от классического случая, представляется делом достаточно трудоемким. Вместо этого вместе с динамическим массивом меток вершин создается ещё один динамический массив вершин, через которые осуществлен персчет метки. Это позволяет легко восстанавливать найденный экстремальный путь.

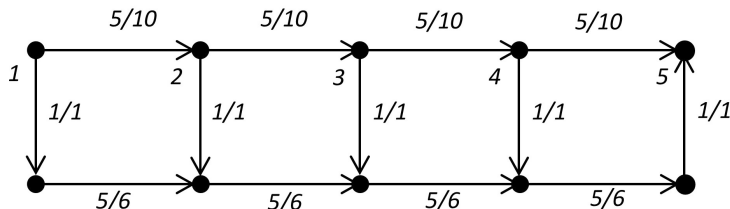
3. Примеры, иллюстрирующие алгоритм. Продемонстрируем работу алгоритма на нескольких примерах.

Пример 1. Рассмотрим следующий граф:



«Дробью» над дугой указаны веса дуги до часа пик и во время часа пик в минутах; $T = 8:00$. Ясно, что при времени старта $t \leq 7:40$ из вершины 1 время нахождения в пути в вершину 5 равно 20 минутам, при старте в 7:44 время прохождения пути равно 23 минутам, при старте в 7:45 время прохождения пути равно 25 минутам, а при старте в 8:00 в пути составит 40 минут.

Пример 2. Рассмотрим теперь следующий граф:



Применение описанного выше алгоритма для нахождения кратчайшего по времени пути из вершины 1 в вершину 5 при времени старта $t \leq 7:40$ время прохождения кратчайшего пути равно 20 минутам; этот путь проходит через вершины 2, 3, 4.

При времени старта 7:44 кратчайший по времени путь из вершины 1 в вершину 5 проходит через вершины 2, 3, 4, 9, 10, а время в пути составляет 23 минуты. При старте в 7:50 кратчайший по времени путь из вершины 1 в вершину 5 проходит через вершины 2, 3, 8, 9, 10 и время в пути составляет 24 минуты. При старте в 7:56 кратчайший по времени путь из вершины 1 в вершину 5 проходит через вершины 2, 3, 8, 9, 10, и время в пути составляет 28 минут.

Обращаем внимание читателей на значительное расхождение во времени прохождения кратчайшего пути при старте в 7:44 (23 минуты) и при старте в 7:56 (28 минут) и на то, что изменился сам кратчайший по времени путь.

Замечания. 1. Предложенный в работе алгоритм в отличие от классического алгоритма Э. Дейкстры уже не является чисто дискретным, поскольку у дуг графа при переходе от времени меньшего T ко времени большего чем T возникают динамические веса (вторая строка в правой части формулы (4)).

2. Ясно, что кратчайшее время, найденное по алгоритму, нужно считать в приложениях приближенным, поскольку исходные веса можно считать средним временем прохождения дуги графа до наступления часа пик и во время часа пик.

3. Если перестроить все навигаторы на использование предложенного нами алгоритма, то это приведет к изменению структуры существующих транспортных потоков, т.е. к изменению весов дуг (см. замечание 2). Поэтому предлагаемый в работе алгоритм целесообразно использовать в навигаторах специального применения на транспортных средствах специального назначения (медицинская помощь, пожарные автомобили и т. п.).

4. Ясно как модернизировать описанный алгоритм на случай, когда задано не только T — время начала часа пик, но и задано время окончания часа пик, и веса дуг после окончания часов пик равны $\rho_1(u)$ или равны $\rho_3(u)$.

5. Допущение (1) может быть опущено, мы им нигде и не пользовались. Оно было выписано лишь для «оправдания термина «часы пик»».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерусалимский Я. М., Кузьминова М. В. Динамические периодические графы// Тез. докл. III Всерос. шк.-семина. «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», 2007. — С. 39–40.
2. Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Кузьминова М. В., Петросян А. Г. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. — Ростов н/Д.: ЮФУ, 2009.
3. Кочкаров А. А., Кочкаров Р. А. Динамические графы и некоторые их свойства// 2016. — 3, № 1. — С. 50–53.
4. Кочкаров А. А., Кочкаров Р. А., Малинецкий Г. Г. Некоторые аспекты динамической теории графов// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2015. — 55, № 9. — С. 1623–1629.
5. Путьрев С. Н., Тихонов А. В. Визуализация динамических графов для анализа сложных сетей// Модел. анализ информ. сист. — 2010. — 17, № 1. — С. 117–135.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ерусалимский Яков Михайлович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: ymerusalimskiy@sfedu.ru

Осипов Максим Игоревич
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: makosipov@sfedu.ru

Скороходов Владимир Александрович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: vaskorohodov@sfedu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 73–86
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-73-86

УДК 517.9

ОБ ОСНОВНОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2023 г. Д. КАРАХАН, Х. Р. МАМЕДОВ, И. Ф. ХАШИМОГЛУ

Аннотация. В работе рассматривается краевая задача для оператора Штурма—Лиувилля с разрывным коэффициентом. Получено основное уравнение обратной задачи для краевой задачи и доказана единственность его решения.

Ключевые слова: основное уравнение, разрывный оператор Штурма—Лиувилля, обратная задача.

ON MAIN EQUATION FOR INVERSE STURM—LIOUVILLE OPERATOR WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT

© 2023 D. KARAHAN, Kh. R. MAMEDOV, I. F. HASIMOGLU

ABSTRACT. In this work, a boundary-value problem for the Sturm–Liouville operator with discontinuous coefficient is examined. The main equation for the inverse problem for the boundary-value problem is obtained and the uniqueness of its solution is proved.

Keywords and phrases: main equation, discontinuous Sturm–Liouville operator, inverse problem.

AMS Subject Classification: 34A55, 34K10

1. Введение. Рассмотрим краевую задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (1)$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $q(x) \in L_{2,\rho}(0, \pi)$ — вещественнозначная функция, λ — комплексный параметр и

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq a, \\ \alpha^2, & a < x \leq \pi, \end{cases} \quad (3)$$

— кусочно постоянная функция. Предположим, что $a(1 + \alpha) > \pi\alpha$.

Математические модели физических проблем, связанных с неоднородными средами, колебаниями, диффузией и т. д. представляют собой дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами (см. [1, 7–9, 12, 15, 20, 25]). Анализ таких проблем основан на спектральных свойствах задачи Штурма—Лиувилля с разрывными коэффициентами (см. [3, 16, 17, 19, 24]). Случай $\rho(x) \equiv 1$ был рассмотрен в [2, 4, 6, 18, 22]. Спектральные свойства оператора Штурма—Лиувилля с разрывными коэффициентами при различных граничных условиях были рассмотрены в [10, 11, 13, 14, 21, 23]. В [21] были рассмотрены спектральные свойства краевой задачи (1), (2), построен резольвентный оператор, получено разложение по собственным функциям и проведено обоснование решения Вейля и функции Вейля.

В данной работе получено основное уравнение для краевой задачи (1), (2) и доказана единственность её решения. Кроме того, получена теорема единственности для решения обратной задачи со спектральными данными и функцией Вейля (см. [21]). Аналогичные задачи для уравнения (1) с различными граничными условиями анализировались в [11].

В [10] доказано, что решение $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (1) с начальными данными $\varphi(0, \lambda) = 0$ и $\varphi'(0, \lambda) = 1$ можно представить следующим образом:

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^{\mu^+(x)} A(x, t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt, \quad (4)$$

где $A(x, t)$ лежит в классе $L_2(0, \pi)$ для каждого фиксированного $x \in (0, \pi]$. Эта функция выражается через коэффициент $q(x)$ уравнения (1) формулой

$$\frac{d}{dx} A(x, \mu^+(x)) = \frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) q(x), \quad (5)$$

где

$$\varphi_0(x, \lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) \frac{\sin \lambda \mu^+(x)}{\lambda} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) \frac{\sin \lambda \mu^-(x)}{\lambda} \quad (6)$$

— решение уравнения (1) при $q(x) \equiv 0$,

$$\mu^\pm(x) = \pm x \sqrt{\rho(x)} + a(1 \mp \sqrt{\rho(x)}). \quad (7)$$

Характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) имеет вид

$$\Delta(\lambda) := \langle \varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda) \rangle = \varphi(x, \lambda) \psi'(x, \lambda) - \varphi'(x, \lambda) \psi(x, \lambda),$$

где $\Delta(\lambda)$ не зависит от $x \in [0, \pi]$. Подставляя $x = 0$ и $x = \pi$ в уравнение, получим

$$\Delta(\lambda) = \psi(0, \lambda) = \varphi'(\pi, \lambda).$$

Квадраты нулей λ_n характеристической функции совпадают с собственными значениями краевой задачи (1), (2). Краевая задача (1), (2) имеет счетное множество простых собственных значений $\{\lambda_n^2\}$. Для каждого λ_n существует такая последовательность β_n , что

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n), \quad \beta_n \neq 0, \quad (8)$$

где $\psi(x, \lambda_n)$ и $\varphi(x, \lambda_n)$ — собственные функции краевой задачи (1), (2), соответствующие собственному значению λ_n^2 . Нормировочные коэффициенты равны

$$\alpha_n := \int_0^\pi \rho(x) \varphi^2(x, \lambda_n) dx.$$

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Собственные значения краевой задачи (1), (2) простые и

$$\dot{\Delta}(\lambda_n) = -2\lambda_n \alpha_n \beta_n, \quad (9)$$

где $\dot{\Delta}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda)$.

Теорема 1 (см. [21]). Нули λ_n характеристической функции $\Delta(\lambda)$ имеют следующее асимптотическое разложение:

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{d_n}{\lambda_n^0} + \frac{k_n}{n},$$

где λ_n^0 — нули функции

$$\Delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}(\alpha + 1) \cos \lambda \mu^+(\pi) - \frac{1}{2}(\alpha - 1) \cos \lambda \mu^-(\pi)$$

и

$$d_n = -\frac{h^+ \sin \lambda_n^0 \mu^+(\pi) + h^- \sin \lambda_n^0 \mu^-(\pi)}{-\frac{1}{2}(\alpha + 1)\mu^+(\pi) \sin \lambda_n^0 \mu^+(\pi) + \frac{1}{2}(\alpha - 1)\mu^-(\pi) \sin \lambda_n^0 \mu^-(\pi)}$$

— ограниченная последовательность, $\{k_n\} \in l_2$.

Теорема 2 (см. [21]).

1. Система собственных функций $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n \geq 1}$ краевой задачи (1), (2) полна в $L_{2,\rho}(0, \pi)$.
2. Если $f(x)$ — абсолютно непрерывная функция на отрезке $[0, \pi]$ и $f(0) = f'(\pi) = 0$, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(x, \lambda_n), \quad a_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} f(t) \varphi(t, \lambda_n) \rho(t) dt, \quad (10)$$

причем ряд сходится равномерно на $[0, \pi]$.

3. При $f(x) \in L_{2,\rho}(0, \pi)$ ряд в (10) сходится в $L_{2,\rho}(0, \pi)$ и, кроме того, выполняется равенство Парсевалля:

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 \rho(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |a_n|^2.$$

2. Основное уравнение.

Теорема 3. Для каждого фиксированного $x \in (0, \pi]$ ядро $A(x, t)$ из представления (4) удовлетворяет следующему линейному функционально-интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(x, \mu^+(t)) + \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(x, 2a-t) + \\ + F(x, t) + \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) F_0(\xi, t) d\xi = 0, \quad 0 < t < x, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$F_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_0(t, \lambda_n) \sin \lambda_n x}{\alpha_n \lambda_n} - \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 x}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} \right), \quad (12)$$

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) F_0(\mu^+(x), t) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \right) F_0(\mu^-(x), t), \quad (13)$$

λ_n^0 — собственные значения, α_n^0 — нормировочные константы краевой задачи (1), (2) с $q(x) \equiv 0$.

Доказательство. Согласно (4) имеем

$$\varphi_0(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) - \int_0^{\mu^+(x)} A(x, t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt. \quad (14)$$

Из (4) и (14) получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} = \\ = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} + \frac{\varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) \frac{\sin \lambda_n \xi}{\lambda_n} d\xi \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right) + \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_0(x, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} + \\
&+ \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) \sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi_0(t, \lambda_n) \sin \lambda_n \xi}{\alpha_n \lambda_n} - \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} \right) d\xi + \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} d\xi, \\
&\sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} = \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n) \varphi(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \int_0^{\mu^+(t)} A(t, \xi) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n) \sin \lambda_n \xi}{\alpha_n \lambda_n} d\xi.
\end{aligned}$$

Используя последние два соотношения, находим

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi(x, \lambda_n) \varphi(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right) = \\
&= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right) + \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} d\xi + \\
&+ \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) \sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi_0(t, \lambda_n) \sin \lambda_n \xi}{\alpha_n \lambda_n} - \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} \right) d\xi + \int_0^{\mu^+(t)} A(t, \xi) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n) \sin \lambda_n \xi}{\alpha_n \lambda_n} d\xi,
\end{aligned}$$

или

$$\Phi_N(x, t) = I_{N1}(x, t) + I_{N2}(x, t) + I_{N3}(x, t) + I_{N4}(x, t), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_N(x, t) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi(x, \lambda_n) \varphi(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right), \\
I_{N1}(x, t) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right), \\
I_{N2}(x, t) &= \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} d\xi, \\
I_{N3}(x, t) &= \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) \sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi_0(t, \lambda_n) \sin \lambda_n \xi}{\alpha_n \lambda_n} - \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} \right) d\xi, \\
I_{N4}(x, t) &= \int_0^{\mu^+(t)} A(t, \xi) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n) \sin \lambda_n \xi}{\alpha_n \lambda_n} d\xi.
\end{aligned}$$

Из (12) и (13) легко находим

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right).$$

Пусть $f(x) \in AC(0, \pi]$, $f(0) = f'(\pi) = 0$. Согласно формуле разложения (10) получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} f(t) \rho(t) \frac{\varphi(x, \lambda_n) \varphi(t, \lambda_n)}{\alpha_n} dt = f(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} f(t) \rho(t) \frac{\varphi_0(x, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} dt = f(x) \quad (16)$$

равномерно на $x \in (0, \pi]$. Согласно (16) имеем

$$\begin{aligned}
 & \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \int_0^\pi f(t) \rho(t) \Phi_N(x, t) dt \right| = \\
 & = \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \int_0^\pi f(t) \rho(t) \sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi(x, \lambda_n) \varphi(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right) dt \right| \leq \\
 & \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \int_0^\pi f(t) \rho(t) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n) \varphi(t, \lambda_n)}{\alpha_n} dt - f(x) \right| + \right. \\
 & \quad \left. + \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \int_0^\pi f(t) \rho(t) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_0(x, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} dt - f(x) \right| \right\} = 0. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}
 & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) I_{N1}(x, t) dt = \\
 & = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) \sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} \right) dt = \int_0^\pi f(t) \rho(t) F(x, t) dt \quad (18)
 \end{aligned}$$

равномерно на $x \in (0, \pi]$. Из (6) получаем, что

$$\frac{\sin \lambda \xi}{\lambda} = \begin{cases} \varphi_0(\xi, \lambda), & \xi < a, \\ \frac{2\alpha}{1+\alpha} \varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha} + a - \frac{a}{\alpha}, \lambda\right) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \varphi_0(2a - \xi, \lambda), & \xi > a. \end{cases} \quad (19)$$

Принимая во внимание (19) и (16), находим

$$\begin{aligned}
 & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) I_{N2}(x, t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} d\xi dt = \\
 & = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) \int_0^a A(x, \xi) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} d\xi dt + \\
 & \quad + \frac{2\alpha}{1+\alpha} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(x, \xi) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha} + a - \frac{a}{\alpha}, \lambda_n^0\right)}{\alpha_n^0} d\xi dt + \\
 & \quad + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(x, \xi) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \varphi_0(2a - \xi, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt = \\
 & = \int_0^a A(x, \xi) \int_0^\pi f(t) \rho(t) \sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \varphi_0(\xi, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} dt d\xi + \\
 & \quad + \frac{2\alpha}{1+\alpha} \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(x, \xi) \int_0^\pi f(t) \rho(t) \sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha} + a - \frac{a}{\alpha}, \lambda_n^0\right)}{\alpha_n^0} dt d\xi +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(x, \xi) \int_0^\pi f(t) \rho(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \varphi_0(2a - \xi, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} dt d\xi = \\
& = \int_0^a A(x, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{2\alpha}{1+\alpha} \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(x, \xi) f\left(\frac{\xi}{\alpha} + a - \frac{a}{\alpha}\right) d\xi + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(x, \xi) f(2a - \xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Выполнив подстановку

$$\frac{\xi}{\alpha} + a - \frac{a}{\alpha} \rightarrow \xi', \quad 2a - \xi \rightarrow \xi''$$

получим

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) I_{N2}(x, t) dt = \\
& = \int_0^a A(x, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{2\alpha^2}{1+\alpha} \int_a^x A(x, \alpha \xi' - \alpha a + a) f(\xi') d\xi' + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \int_{-\alpha x + \alpha a + a}^a A(x, 2a - \xi'') f(\xi'') d\xi''.
\end{aligned}$$

Поскольку $A(x, 2a - \xi'') \equiv 0$ при $2a - \xi > \alpha x - \alpha a + a$, имеем

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) I_{N2}(x, t) dt = \\
& = \int_0^a A(x, t) f(t) dt + \frac{2\alpha^2}{1+\alpha} \int_a^x A(x, \alpha t - \alpha a + a) f(t) dt + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \int_0^a A(x, 2a - t) f(t) dt.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) I_{N2}(x, t) dt = \\
& = \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(x, \mu^+(t)) f(t) dt + \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a - t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a - t)}} A(x, 2a - t) f(t) dt \quad (20)
\end{aligned}$$

равномерно на $x \in (0, \pi]$. Из (12) заключаем, что следующее предельное соотношение выполняется равномерно на $x \in (0, \pi]$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) I_{N3}(x, t) dt = \\
& = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) \sum_{n=1}^N \left(\frac{\varphi_0(t, \lambda_n) \sin \lambda_n \xi}{\alpha_n \lambda_n} - \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} \right) d\xi dt = \\
& = \int_0^\pi f(t) \rho(t) \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_0(t, \lambda_n) \sin \lambda_n \xi}{\alpha_n \lambda_n} - \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} \right) d\xi dt \\
& = \int_0^\pi f(t) \rho(t) \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) F_0(\xi, t) d\xi dt. \quad (21)
\end{aligned}$$

При помощи теоремы о вычетах и формул (8)–(9) находим:

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) I_{N4}(x, t) dt &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) \int_0^{\mu^+(t)} A(t, \xi) \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n) \sin \lambda_n \xi}{\alpha_n \lambda_n} d\xi dt = \\
 &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) \sum_{|\lambda_n| \leq N} \frac{\psi(x, \lambda_n)}{\Delta(\lambda_n)} \int_0^{\mu^+(t)} A(t, \xi) \sin \lambda_n \xi d\xi dt = \\
 &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) \sum_{|\lambda_n| \leq N} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n} \left[\frac{\psi(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^{\mu^+(t)} A(t, \xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] dt = \\
 &= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\psi(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^{\mu^+(t)} A(t, \xi) \sin \lambda \xi d\xi d\lambda dt = \\
 &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\psi(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \exp \{ |\operatorname{Im} \lambda| \mu^+(t) \} \exp \{ -|\operatorname{Im} \lambda| \mu^+(t) \} \times \\
 &\quad \times \int_0^{\mu^+(t)} A(t, \xi) \sin \lambda \xi d\xi d\lambda dt = \\
 &= - \int_0^\pi f(t) \rho(t) \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma_N} \frac{\psi(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \exp \{ |\operatorname{Im} \lambda| \mu^+(t) \} \exp \{ -|\operatorname{Im} \lambda| \mu^+(t) \} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \int_0^{\mu^+(t)} A(t, \xi) \sin \lambda \xi d\xi d\lambda \right) dt, \quad (22)
 \end{aligned}$$

где контур $\Gamma_N = \{ \lambda : |\lambda| = |\lambda_N^0| + \beta/2 \}$ ориентирован против часовой стрелки, а N — достаточно большое число. Принимая во внимание формулы

$$\psi(x, \lambda) = O \left(e^{|\operatorname{Im} \lambda|(\mu^+(\pi) - \mu^+(x))} \right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad |\Delta(\lambda)| \geq C_\delta e^{|\operatorname{Im} \lambda| \mu^+(\pi)}, \quad \lambda \in G_\delta,$$

где $G_\delta = \{ \lambda : |\lambda - \lambda_n^0| \geq \delta \}$, δ — достаточно малое положительное число (см. [21]), а также [22, Лемма 1.3.1], т.е. соотношение

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq \pi} \exp \{ -|\operatorname{Im} \lambda| \mu^+(t) \} \left| \int_0^{\mu^+(t)} A(t, \xi) \sin \lambda \xi d\xi d\lambda \right| = 0,$$

получаем из (22) предельное равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) \rho(t) I_{N4}(x, t) dt = 0. \quad (23)$$

Умножая обе части (15) на $\rho(x)f(x)$, интегрируя от 0 до π , переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ и применяя (17), (18), (20), (21) и (23), получим

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(x, \mu^+(t)) f(t) dt + \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(x, 2a-t) f(t) dt + \\ + \int_0^\pi f(t) \rho(t) F(x, t) dt + \int_0^\pi f(t) \rho(t) \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) F_0(\xi, t) d\xi dt = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $f(x)$ можно выбрать произвольно, получаем

$$\frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(x, \mu^+(t)) + \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(x, 2a-t) + F(x, t) + \int_0^{\mu^+(x)} A(x, \xi) F_0(\xi, t) d\xi = 0. \quad \square$$

3. Теоремы для решения обратной задачи.

Лемма 1. Для каждого фиксированного $x \in (0, \pi]$ уравнение (11) имеет единственное решение $A(x, \cdot) \in L_2(0, \mu^+(x))$.

Доказательство. При $x > a$ можем переписать уравнение (11) следующим образом:

$$L_x A(x, \cdot) + K_x A(x, \cdot) = -F(x, \cdot),$$

где

$$(L_x f)(t) = \begin{cases} f(t) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} f(2a-t), & t \leq a < x, \\ \frac{2}{1+\alpha} f(\alpha t - \alpha a + a), & a < t < x, \end{cases} \quad (24)$$

$$(K_x f)(t) = \int_0^{\alpha x - \alpha a + a} f(\xi) F_0(\xi, t) d\xi, \quad 0 < t < x. \quad (25)$$

Докажем, что оператор L_x обратим, т.е. имеет ограниченный обратный оператор в $L_2(0, \pi)$.

Рассмотрим уравнение

$$(L_x f)(t) = \phi(t), \quad \phi(t) \in L_2(0, \pi),$$

т.е.

$$\begin{cases} f(t) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} f(2a-t) = \phi(t), & t \leq a < x, \\ \frac{2}{1+\alpha} f(\alpha t - \alpha a + a) = \phi(t), & a < t < x. \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$f(t) = (L_x^{-1} \phi)(t) = \begin{cases} \phi(t) - \frac{1-\alpha}{2} \phi\left(\frac{-t + \alpha a + a}{\alpha}\right), & t < a, \\ \frac{1+\alpha}{2} \phi\left(\frac{t + \alpha a - a}{\alpha}\right), & t > a. \end{cases}$$

Покажем, что

$$\|f\|_{L_2} = \|L_x^{-1} \phi\|_{L_2} \leq C \|\phi\|_{L_2}.$$

Действительно,

$$\int_0^\pi |f(t)|^2 dt = \int_0^a \left| \phi(t) - \frac{1-\alpha}{2} \phi\left(\frac{-t + \alpha a + a}{\alpha}\right) \right|^2 dt + \int_a^\pi \left| \frac{1+\alpha}{2} \phi\left(\frac{t + \alpha a - a}{\alpha}\right) \right|^2 dt \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \int_0^a |\phi(t)|^2 dt + 2 \left(\frac{1-\alpha}{2} \right)^2 \int_0^a \left| \phi \left(\frac{-t+\alpha a+a}{\alpha} \right) \right|^2 dt + \left(\frac{1+\alpha}{2} \right)^2 \int_a^\pi \left| \phi \left(\frac{t+\alpha a-a}{\alpha} \right) \right|^2 dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^\pi |\phi(t)|^2 dt + \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{2} \int_a^{\frac{\alpha a+a}{\alpha}} |\phi(t)|^2 dt + \alpha \left(\frac{1+\alpha}{2} \right)^2 \int_a^{\frac{\pi+\alpha a-a}{\alpha}} |\phi(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Положим $\phi(t) = 0$ для $t > \pi$. Тогда

$$\int_0^\pi |f(t)|^2 dt \leq C \int_0^\pi |\phi(t)|^2 dt = C \|\phi(t)\|_{L_2(0,\pi)}.$$

Таким образом, оператор L_x обратим в $L_2(0, \pi)$. Согласно [5, Theorem 3] достаточно доказать, что уравнение

$$\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) + \int_0^{\mu^+(x)} A(\xi) F_0(\xi, t) d\xi = 0 \quad (26)$$

имеет лишь тривиальное решение $A(t) = 0$.

Пусть $A(t)$ – нетривиальное решение уравнения (26). Тогда

$$\begin{aligned} &\int_0^x \rho(t) \left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \right)^2 dt + \\ &+ \int_0^x \rho(t) \left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \right) \cdot \int_0^{\mu^+(x)} A(\xi) F_0(\xi, t) d\xi dt = 0. \end{aligned}$$

Из (12) следует, что

$$\begin{aligned} &\int_0^x \rho(t) \left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \right)^2 dt + \\ &+ \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_0^{\mu^+(x)} A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_0(t, \lambda_n) \sin \lambda_n \xi}{\alpha_n \lambda_n} - \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} \right) d\xi dt + \\ &+ \int_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \int_0^{\mu^+(x)} A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_0(t, \lambda_n) \sin \lambda_n \xi}{\alpha_n \lambda_n} - \frac{\varphi_0(t, \lambda_n^0) \sin \lambda_n^0 \xi}{\alpha_n^0 \lambda_n^0} \right) d\xi dt = 0. \end{aligned}$$

Из (7) и (19) получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^x \rho(t) \left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \right)^2 dt + \\ &+ \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_0^a A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \\ &+ \int_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \int_0^a A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha} + a - \frac{a}{\alpha}, \lambda_n\right) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \\
& + \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a - t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a - t)}} A(2a - t) \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha} + a - \frac{a}{\alpha}, \lambda_n\right) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \\
& + \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(2a - \xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \\
& + \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a - t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a - t)}} A(2a - t) \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(2a - \xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt - \\
& - \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_0^a A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
& - \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a - t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a - t)}} A(2a - t) \int_0^a A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
& - \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha} + a - \frac{a}{\alpha}, \lambda_n^0\right) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
& - \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a - t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a - t)}} A(2a - t) \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha} + a - \frac{a}{\alpha}, \lambda_n^0\right) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
& - \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(2a - \xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
& - \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a - t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a - t)}} A(2a - t) \int_a^{\alpha x - \alpha a + a} A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(2a - \xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt = 0.
\end{aligned}$$

После подстановки

$$\xi \rightarrow \frac{\xi}{\alpha} + a - \frac{a}{\alpha}$$

в третьем, четвертом, девятом и десятом интегралах и подстановки

$$\xi \rightarrow 2a - \xi$$

в пятом, шестом, одиннадцатом и двенадцатом двойных интегралах получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \rho(t) \left(\frac{2}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1 - \sqrt{\rho(2a - t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a - t)}} A(2a - t) \right)^2 dt + \\
& + \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_0^a A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \\
& + \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a - t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a - t)}} A(2a - t) \int_0^a A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_a^x A(\mu^+(\xi)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \\
 & + \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \int_a^x A(\mu^+(\xi)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \\
 & + \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_{-\alpha x + \alpha a + a}^a A(2a - \xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \\
 & + \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \int_{-\alpha x + \alpha a + a}^a A(2a - \xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt - \\
 & - \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_0^a A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
 & - \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \int_0^a A(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
 & - \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_a^x A(\mu^+(\xi)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
 & - \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \int_a^x A(\mu^+(\xi)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
 & - \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_{-\alpha x + \alpha a + a}^a A(2a - \xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
 & - \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \int_{-\alpha x + \alpha a + a}^a A(2a - \xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt = 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_0^x \rho(t) \left(\frac{2}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \right)^2 dt + \\
 & + \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_0^x \frac{2\rho(\xi)}{1 + \sqrt{\rho(\xi)}} A(\mu^+(\xi)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \\
 & + \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \int_0^x \frac{2\rho(\xi)}{1 + \sqrt{\rho(\xi)}} A(\mu^+(\xi)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \\
 & + \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-\xi)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-\xi)}} A(2a-\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt + \\
 & + \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-\xi)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-\xi)}} A(2a-\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n} d\xi dt -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_0^x \frac{2\rho(\xi)}{1 + \sqrt{\rho(\xi)}} A(\mu^+(\xi)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
& - \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \int_0^x \frac{2\rho(\xi)}{1 + \sqrt{\rho(\xi)}} A(\mu^+(\xi)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
& - \int_0^x \frac{2\rho(t)}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-\xi)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-\xi)}} A(2a-\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt - \\
& - \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \int_0^x \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-\xi)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-\xi)}} A(2a-\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_0(\xi, \lambda_n^0) \varphi_0(t, \lambda_n^0)}{\alpha_n^0} d\xi dt = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \rho(t) \left(\frac{2}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \right)^2 dt + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^x \rho(t) \left(\frac{2}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \right) \varphi_0(t, \lambda_n) dt \right)^2 - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^0} \left(\int_0^x \rho(t) \left(\frac{2}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \right) \varphi_0(t, \lambda_n^0) dt \right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Используя равенство Парсеваля

$$\int_0^x \rho(t) f^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^0} \left(\int_0^x \rho(t) f(t) \varphi_0(t, \lambda_n^0) dt \right)^2$$

для функции

$$f(t) = \frac{2}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \in L_2(0, x),$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^x \rho(t) \left(\frac{2}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \right) \varphi_0(t, \lambda_n) dt \right)^2 = 0$$

или

$$\int_0^x \rho(t) \left(\frac{2}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) \right) \varphi_0(t, \lambda_n) dt = 0, \quad n \geq 1.$$

Поскольку система $\{\varphi_0(t, \lambda_n)\}_{n \geq 1}$ полна в $L_{2,\rho}(0, \pi)$, имеем

$$\frac{2}{1 + \sqrt{\rho(t)}} A(\mu^+(t)) + \frac{1 - \sqrt{\rho(2a-t)}}{1 + \sqrt{\rho(2a-t)}} A(2a-t) = 0,$$

т.е. $(L_x A)(t) = 0$, где оператор L_x определен в (24). Обратимость оператора L_x в $L_2(0, \pi)$ влечет $A(x, \cdot) = 0$. \square

Теорема 4. Пусть L и \tilde{L} — две краевых задачи и

$$\lambda_n = \tilde{\lambda}_n, \quad \alpha_n = \tilde{\alpha}_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$q(x) = \tilde{q}(x) \quad \text{a.e. in } (0, \pi).$$

Доказательство. Согласно (12) и (13), $F_0(x, t) = \tilde{F}_0(x, t)$ и $F(x, t) = \tilde{F}(x, t)$. Из основного уравнения (11) получаем $A(x, t) = \tilde{A}(x, t)$. Из (5) следует, что $q(x) = \tilde{q}(x)$ почти всюду на $(0, \pi)$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. — М.: Физматлит, 2009.
2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. — М.: Наука, 1984.
3. Левитан Б. М., Гасымов М. Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // Усп. мат. наук. — 1964. — 19, № 2 (116). — С. 3–63.
4. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
6. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. — Киев: Наукова думка, 1972.
7. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. — М.: Наука, 1964.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
9. Юрко В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения. — Саратов: Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001.
10. Akhmedova E. N. On representation of solution of Sturm–Liouville equation with discontinuous coefficients // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerbaijan. — 2002. — 16, № 24. — P. 5–9.
11. Akhmedova E. N., Huseynov H. M. The main equation of the inverse Sturm–Liouville problem with discontinuous coefficients // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerbaijan. — 2007. — 26, № 34. — P. 17–32.
12. Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V. Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inv. Probl. Sci. Eng. — 2004. — 12, № 4. — P. 393–408.
13. Aliev B. A., Yakubov Ya. S. Solvability of boundary value problems for second-order elliptic differential-operator equations with a spectral parameter and with a discontinuous coefficient at the highest derivative // Differ. Equat. — 2014. — 50, № 4. — P. 464–475.
14. Altinisik N., Kadakal M., Mukhtarov O. Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm–Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // Acta Math. Hung. — 2004. — 102, № 1-2. — P. 159–175.
15. Anderssen R. S. The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of torsional eigenfrequencies of the Earth // Geophys. J. R. Astr. Soc. — 1977. — 50. — P. 303–309.
16. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. — 1946. — 78. — P. 1–96.
17. Carlson R. An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with discontinuous coefficients // Proc. Am. Math. Soc. — 1994. — 120, № 2. — P. 5–9.
18. Freiling G., Yurko V. Inverse Sturm–Liouville problems and Their Applications. — Nova Science Publ., 2008.
19. Hald O. H. Discontinuous inverse eigenvalue problems // Commun. Pure Appl. Math. — 1984. — 37. — P. 539–577.
20. Hao D. N. Methods for Inverse Heat Conduction Problems. — Frankfurt/Main etc.: Peter Lang Verlag, 1998.
21. Karahan D., Mamedov Kh. R. Uniqueness of the solution of the inverse problem for one class of Sturm–Liouville operator // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerbaijan. — 2014. — 40. — P. 233–244.
22. Marchenko V. A. Sturm–Liouville Operators and Their Applications. — Basel–Boston–Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1986.

23. *Nabiev A. A., Amirov R. K.* On the boundary value problem for the Sturm–Liouville equation with the discontinuous coefficient// *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2013. — 36, № 13. — P. 1685–1700.
24. *Poschel J., Trubowitz E.* *Inverse Spectral Theory.* — New York: Academic Press, 1987.
25. *Sedipkov A. A.* The inverse spectral problem for the Sturm–Liouville operator with discontinuous potential// *J. Inv. Ill-Posed Probl.* — 2012. — 20. — P. 139–167.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Karahan Döne

Harran University, Sanliurfa, Turkey

E-mail: dkarahan@harran.edu.tr

Мамедов Ханлар Рашид

Igdir University, Igdir, Turkey

E-mail: hanlar.residoglu@igdir.edu.tr

Hashimoglu Ilyas F.

Karabük University, Karabük, Turkey

E-mail: i.hasimoglu@karabuk.edu.tr



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 87–107
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-87-107

УДК 512.816.3

К ВОПРОСУ О ЛОКАЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ ГРУППЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

© 2023 г. В. А. КЫРОВ

АННОТАЦИЯ. Задача о нахождении всех локально ограниченно точно дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов четырёхмерного пространства сведена к вычислению алгебр Ли локально ограниченно точно дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов. Найдены некоторые локально ограниченно точно дважды транзитивные группы Ли преобразований с разложимой алгеброй Ли.

Ключевые слова: транзитивная группа преобразований, группа параллельных переносов, алгебра Ли, жорданова форма матрицы.

ON THE LOCAL EXTENSION OF THE GROUP OF PARALLEL TRANSLATIONS OF FOUR-DIMENSIONAL SPACE

© 2023 V. A. KYROV

ABSTRACT. The problem of the search for all locally boundedly exactly doubly transitive extensions of the group of parallel translations of a four-dimensional space is reduced to the calculation of the Lie algebras of locally boundedly exactly doubly transitive extensions of the group of parallel translations. Some locally boundedly exactly doubly transitive transformation Lie groups with decomposable Lie algebras are found.

Keywords and phrases: transitive transformation group, group of parallel translations, Lie algebra, Jordan form.

AMS Subject Classification: 22F05

1. Введение. В работе В. В. Горбацевича [3] приводится определение расширения транзитивной группы Ли G , действующей в многообразии M : *расширением транзитивной группы Ли G называется группа Ли G_1 , содержащая G в виде подгруппы Ли и также транзитивная на M , причем ограничение этого транзитивного действия на G дает исходное транзитивное действие группы Ли G .* Примером расширения группы параллельных переносов пространства R^3 является группа аффинных преобразований этого пространства.

Согласно [6, 10] можно говорить, что локально точно транзитивная группа Ли преобразований пространства R^4 задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга (2, 2), а локально ограниченно точно дважды транзитивная группа Ли преобразований пространства R^4 задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга (3, 2). Отметим, что первым множеством является пространство R^4 , а вторым множеством является транзитивно действующая группа Ли G .

В данной работе ставится задача о нахождении всех локальных ограниченно точно дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов пространства R^4 . Результаты исследований изложены в [7, 9] на примере классификации локальных ограниченно точно дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов плоскости R^2 , а также в [5, 8] на примере классификации локальных ограниченно точно дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов пространства R^3 .

2. Основные определения. Следуя [1, 6], определим локальное действие класса C^2 группы Ли G , $\dim G = n$, в пространстве R^4 .

Определение 1. Дифференцируемое отображение $\pi : R^4 \times G \rightarrow R^4$ класса C^2 называется *эффективным локальным действием*, если выполняются следующие свойства:

- (i) $\pi(a, e) = a$ для всех $a \in W$, где W — область в R^4 , $e \in G$ — единица;
- (ii) $\pi(\pi(a, h_1), h_2) = \pi(a, h_1 h_2)$ для всех $a \in W$, где $h_1, h_2 \in G$;
- (iii) $\pi(a, h) = a$ для всех $a \in W$, где $h \in G$, тогда и только тогда, когда $h = e$;
- (iv) $\pi_h : R^4 \rightarrow R^4$ — локальный диффеоморфизм для всякого $h \in G$.

Тройка (R^4, G, π) называется *локальной группой Ли преобразований* многообразия R^4 .

Обозначим через L алгебру Ли данной группы преобразований. Базис этой алгебры Ли состоит из операторов

$$Z_i = Z_i^1 \partial_x + Z_i^2 \partial_y + Z_i^3 \partial_z + Z_i^4 \partial_w, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

Определение 2. Эффективное локальное действие $\pi : R^4 \times G \rightarrow R^4$ называется *локально ограниченно точно дважды транзитивным*, если дополнительно выполняются следующие свойства:

- (v) $n = 8$;
- (vi) матрица

$$V = \begin{pmatrix} Z_1^1(a) & Z_1^2(a) & Z_1^3(a) & Z_1^4(a) & Z_1^1(b) & Z_1^2(b) & Z_1^3(b) & Z_1^4(b) \\ Z_2^1(a) & Z_2^2(a) & Z_2^3(a) & Z_2^4(a) & Z_2^1(b) & Z_2^2(b) & Z_2^3(b) & Z_2^4(b) \\ Z_3^1(a) & Z_3^2(a) & Z_3^3(a) & Z_3^4(a) & Z_3^1(b) & Z_3^2(b) & Z_3^3(b) & Z_3^4(b) \\ Z_4^1(a) & Z_4^2(a) & Z_4^3(a) & Z_4^4(a) & Z_4^1(b) & Z_4^2(b) & Z_4^3(b) & Z_4^4(b) \\ Z_5^1(a) & Z_5^2(a) & Z_5^3(a) & Z_5^4(a) & Z_5^1(b) & Z_5^2(b) & Z_5^3(b) & Z_5^4(b) \\ Z_6^1(a) & Z_6^2(a) & Z_6^3(a) & Z_6^4(a) & Z_6^1(b) & Z_6^2(b) & Z_6^3(b) & Z_6^4(b) \\ Z_7^1(a) & Z_7^2(a) & Z_7^3(a) & Z_7^4(a) & Z_7^1(b) & Z_7^2(b) & Z_7^3(b) & Z_7^4(b) \\ Z_8^1(a) & Z_8^2(a) & Z_8^3(a) & Z_8^4(a) & Z_8^1(b) & Z_8^2(b) & Z_8^3(b) & Z_8^4(b) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

составленная из коэффициентов операторов (2.1) невырождена для любых точек некоторых окрестностей $U(a'), U(b') \subset W$.

Свойства (v) и (vi) равносильны тому, что действие $\pi \times \pi$ в $R^4 \times R^4$ локально точно транзитивно.

Определение 3. Будем говорить, что локально ограниченно точно дважды транзитивное действие $\pi : R^4 \times G \rightarrow R^4$ является *локальным расширением группы параллельных переносов*, если базис его алгебры Ли L состоит из операторов

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \partial_w, \quad Y_i = A_i \partial_x + B_i \partial_y + C_i \partial_z + D_i \partial_w, \quad (2.3)$$

причём $A_i = A_i(x, y, z, w)$, $B_i = B_i(x, y, z, w)$, $C_i = C_i(x, y, z, w)$, $D_i = D_i(x, y, z, w)$, $i = 1, 2, 3, 4$, — дифференцируемые функции класса гладкости C^1 .

В таком случае в алгебре Ли L выделяется коммутативная трехмерная подалгебра J , образованная операторами X_1, X_2, X_3 и X_4 . Произвольный оператор Y является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами базисных операторов.

Теорема 1. Локальное действие $\pi : R^4 \times G \rightarrow R^4$ с операторами ее алгебры Ли (2.3) локально ограничено точно дважды транзитивно тогда и только тогда, когда матрица $K(b) - K(a)$ невырождена, где

$$K(a) = \begin{pmatrix} A_1(x_a, y_a, z_a, w_a) & B_1(x_a, y_a, z_a, w_a) & C_1(x_a, y_a, z_a, w_a) & D_1(x_a, y_a, z_a, w_a) \\ A_2(x_a, y_a, z_a, w_a) & B_2(x_a, y_a, z_a, w_a) & C_2(x_a, y_a, z_a, w_a) & D_2(x_a, y_a, z_a, w_a) \\ A_3(x_a, y_a, z_a, w_a) & B_3(x_a, y_a, z_a, w_a) & C_3(x_a, y_a, z_a, w_a) & D_3(x_a, y_a, z_a, w_a) \\ A_4(x_a, y_a, z_a, w_a) & B_4(x_a, y_a, z_a, w_a) & C_4(x_a, y_a, z_a, w_a) & D_4(x_a, y_a, z_a, w_a) \end{pmatrix},$$

причем $a = (x_a, y_a, z_a, w_a) \in U(a') \subset W \subset R^4$.

Доказательство. Матрица (2.2) для действия $\pi : R^4 \times G \rightarrow R^4$ с операторами ее алгебры Ли (2.3) принимает следующий вид:

$$V = \begin{pmatrix} E & E \\ K(a) & K(b) \end{pmatrix},$$

где E — единичная (4×4) -матрица. Согласно формуле Шура (см. [2, с. 59]) $|V| = |K(b) - K(a)|$. Если действие $\pi : R^4 \times G \rightarrow R^4$ локально ограничено точно дважды транзитивно, то $|V| \neq 0$ и поэтому $|K(b) - K(a)| \neq 0$. Справедливо и обратное. \square

Следствие. Локальное действие $\pi : R^4 \times G \rightarrow R^4$ с операторами алгебры Ли вида

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \partial_w, \\ Y_i = A_i(x, y, z, w)\partial_x + B_i(x, y, z, w)\partial_y + C_i(x, y, z, w)\partial_z, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

не является локально ограничено точно дважды транзитивным.

3. Системы линейных уравнений. Из свойства замкнутости относительно операции коммутирования, следует, что и коммутаторы $[X_j, Y_k]$, $j, k = 1, 2, 3, 4$, принадлежат этой же алгебре Ли (см. [12]). В координатной записи, с учетом (2.3), это свойство приводит к системе дифференциальных уравнений на коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i :

$$\begin{aligned} \vec{A}_x &= T_1 \vec{A} + \vec{G}^1, & \vec{A}_y &= T_2 \vec{A} + \vec{P}^1, & \vec{A}_z &= T_3 \vec{A} + \vec{Q}^1, & \vec{A}_w &= T_4 \vec{A} + \vec{R}^1, \\ \vec{B}_x &= T_1 \vec{B} + \vec{G}^2, & \vec{B}_y &= T_2 \vec{B} + \vec{P}^2, & \vec{B}_z &= T_3 \vec{B} + \vec{Q}^2, & \vec{B}_w &= T_4 \vec{B} + \vec{R}^2, \\ \vec{C}_x &= T_1 \vec{C} + \vec{G}^3, & \vec{C}_y &= T_2 \vec{C} + \vec{P}^3, & \vec{C}_z &= T_3 \vec{C} + \vec{Q}^3, & \vec{C}_w &= T_4 \vec{C} + \vec{R}^3, \\ \vec{D}_x &= T_1 \vec{D} + \vec{G}^4, & \vec{D}_y &= T_2 \vec{D} + \vec{P}^4, & \vec{D}_z &= T_3 \vec{D} + \vec{Q}^4, & \vec{D}_w &= T_4 \vec{D} + \vec{R}^4, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где введены матричные обозначения:

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 & b_1^4 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 & b_2^4 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 & b_3^4 \\ b_4^1 & b_4^2 & b_4^3 & b_4^4 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 & c_1^4 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 & c_2^4 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 & c_3^4 \\ c_4^1 & c_4^2 & c_4^3 & c_4^4 \end{pmatrix}, \\ T_4 = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & d_1^3 & d_1^4 \\ d_2^1 & d_2^2 & d_2^3 & d_2^4 \\ d_3^1 & d_3^2 & d_3^3 & d_3^4 \\ d_4^1 & d_4^2 & d_4^3 & d_4^4 \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}, \\ \vec{G}^j = \begin{pmatrix} g_1^j \\ g_2^j \\ g_3^j \\ g_4^j \end{pmatrix}, \quad \vec{Q}^j = \begin{pmatrix} q_1^j \\ q_2^j \\ q_3^j \\ q_4^j \end{pmatrix}, \quad \vec{P}^j = \begin{pmatrix} p_1^j \\ p_2^j \\ p_3^j \\ p_4^j \end{pmatrix}, \quad \vec{R}^j = \begin{pmatrix} r_1^j \\ r_2^j \\ r_3^j \\ r_4^j \end{pmatrix},$$

причем $a_i^j, b_i^j, c_i^j, d_i^j, g_i^j, q_i^j, p_i^j, r_i^j = \text{const}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Из свойства независимости частных производных относительно порядка дифференцирования вытекают соотношения:

$$\begin{aligned} (T_i T_j - T_j T_i) \vec{A} &= \overrightarrow{\text{const}}, & (T_i T_j - T_j T_i) \vec{B} &= \overrightarrow{\text{const}}, \\ (T_i T_j - T_j T_i) \vec{C} &= \overrightarrow{\text{const}}, & (T_i T_j - T_j T_i) \vec{D} &= \overrightarrow{\text{const}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $i < j = 1, 2, 3, 4$. Линейные системы (3.1), очевидно, совместны.

Теорема 2. *Подалгебра Ли J алгебры Ли L является идеалом тогда и только тогда, когда векторы $\vec{A}_x, \vec{B}_x, \vec{C}_x, \vec{D}_x, \vec{A}_y, \vec{B}_y, \vec{C}_y, \vec{D}_y, \vec{A}_z, \vec{B}_z, \vec{C}_z, \vec{D}_z, \vec{A}_w, \vec{B}_w, \vec{C}_w, \vec{D}_w$ постоянные.*

Доказательство. Пусть сначала J — идеал в L . Заметим, что J является идеалом тогда и только тогда, когда

$$[X_i, Y_k] = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 + \mu_4 X_4,$$

причем $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 = \text{const}$, $i, k = 1, 2, 3, 4$. Тогда векторы $\vec{A}_x, \vec{B}_x, \vec{C}_x, \vec{D}_x, \vec{A}_y, \vec{B}_y, \vec{C}_y, \vec{D}_y, \vec{A}_z, \vec{B}_z, \vec{C}_z, \vec{D}_z, \vec{A}_w, \vec{B}_w, \vec{C}_w, \vec{D}_w$ постоянные.

Обратно, пусть производные коэффициентов операторов Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 постоянны; тогда коммутаторы $[X_i, Y_k]$ будут линейно выражаться через операторы X_1, X_2, X_3 и X_4 , поэтому J — идеал в L . \square

Следствие. $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0$ тогда и только тогда, когда J — идеал в L .

Доказательство. Если $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0$, то из системы (3.1) получаем, что производные векторов $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ по переменным x, y, z, w постоянны, и поэтому J — идеал в L (теорема 2).

Пусть J — идеал в L . Предположим для определенности, что $T_1 \neq 0$. Тогда согласно системе (3.2) хотя бы одна из производных $\vec{A}_x, \vec{B}_x, \vec{C}_x, \vec{D}_x$ не постоянна. Поэтому согласно теореме 2 получаем, что J не является идеалом в L . Противоречие. \square

Теорема 3. *Матрицы коэффициентов системы (3.1) взаимно коммутативны, т.е.*

$$T_i T_j - T_j T_i = 0, \quad i < j = 1, 2, 3, 4.$$

Доказательство. Пусть одна из пар матриц коэффициентов системы (3.1) некоммутирует, т.е. $T_1 T_2 - T_2 T_1 \neq 0$. В таком случае ранг матрицы $T_1 T_2 - T_2 T_1$ равен либо 4, либо 3, либо 2, либо 1. Эквивалентными преобразованиями добьемся упрощения систем линейных уравнений

$$(T_1 T_2 - T_2 T_1) \vec{A} = \vec{R}_1, \quad (T_1 T_2 - T_2 T_1) \vec{B} = \vec{R}_2, \quad (T_1 T_2 - T_2 T_1) \vec{C} = \vec{R}_3, \quad (T_1 T_2 - T_2 T_1) \vec{D} = \vec{R}_4.$$

Тогда в эквивалентных системах матрица коэффициентов $T_1 T_2 - T_2 T_1$ принимает один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $A_1 = \text{const}, B_1 = \text{const}, C_1 = \text{const}, D_1 = \text{const}$, или $A_2 = \text{const}, B_2 = \text{const}, C_2 = \text{const}, D_2 = \text{const}$, или $A_3 = \text{const}, B_3 = \text{const}, C_3 = \text{const}, D_3 = \text{const}$, или $A_4 = \text{const}, B_4 = \text{const}, C_4 = \text{const}, D_4 = \text{const}$. Поэтому, соответственно, оператор Y_1 , или Y_2 , или Y_3 , или Y_4 из системы (2.3) линейно выражается через операторы X_1, X_2, X_3 и X_4 , что противоречит линейной независимости базисных операторов (2.3). Аналогичная проверка проводится и относительно систем из (3.2) с матрицами коэффициентов $T_i T_j - T_j T_i = 0, i < j = 1, 2, 3, 4$. \square

Теорема 4. Для алгебры Ли локально ограниченно точно дважды транзитивного действия $\pi : R^4 \times G \rightarrow R^4$ в подходящем базисе матрица T_1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} 1) & J_{1,\lambda_1} \dot{+} J_{1,\lambda_2} \dot{+} J_{1,\lambda_3} \dot{+} J_{1,\lambda_4}; \\ 2) & J_{2,\lambda_5} \dot{+} J_{1,\lambda_6} \dot{+} J_{1,\lambda_7}; \\ 3) & J_{2,\lambda_5} \dot{+} J_{2,\lambda_8}; \\ 4) & J_{3,\lambda_9} \dot{+} J_{1,\lambda_{10}}; \\ 5) & J_{4,\lambda}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $J_{m,\mu}$ — жорданова клетка порядка m , соответствующая собственному значению μ .

Доказательство. Базис алгебры Ли локально ограниченно точно дважды транзитивного действия $\pi : R^4 \times G \rightarrow R^4$ задается операторами (2.3). Перейдем к новому базису

$$X'_i = X_i, \quad Y'_i = \sum_{j=1}^4 \chi_i^j Y_j$$

при помощи невырожденной матрицы коэффициентов $\chi = (\chi_i^j)$. Тогда выражения (2.3) принимают следующий вид:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \partial_w, \quad Y'_i = A'_i \partial_x + B'_i \partial_y + C'_i \partial_z + D'_i \partial_w,$$

причем

$$\vec{A}' = \chi \vec{A}, \quad \vec{B}' = \chi \vec{B}, \quad \vec{C}' = \chi \vec{C}, \quad \vec{D}' = \chi \vec{D}. \tag{3.4}$$

Вычисляя коммутаторы $[X_i, Y'_j]$, учитывая их замкнутость и сравнивая коэффициенты при ∂_x , ∂_y , ∂_z и ∂_w , получаем векторные уравнения

$$\begin{cases} \vec{A}'_x = T'_1 \vec{A}' + \vec{G}'^1, & \vec{A}'_y = T'_2 \vec{A}' + \vec{P}'^1, & \vec{A}'_z = T'_3 \vec{A}' + \vec{Q}'^1, & \vec{A}'_w = T'_4 \vec{A}' + \vec{R}'^1, \\ \vec{B}'_x = T'_1 \vec{B}' + \vec{G}'^2, & \vec{B}'_y = T'_2 \vec{B}' + \vec{P}'^2, & \vec{B}'_z = T'_3 \vec{B}' + \vec{Q}'^2, & \vec{B}'_w = T'_4 \vec{B}' + \vec{R}'^2, \\ \vec{C}'_x = T'_1 \vec{C}' + \vec{G}'^3, & \vec{C}'_y = T'_2 \vec{C}' + \vec{P}'^3, & \vec{C}'_z = T'_3 \vec{C}' + \vec{Q}'^3, & \vec{C}'_w = T'_4 \vec{C}' + \vec{R}'^3, \\ \vec{D}'_x = T'_1 \vec{D}' + \vec{G}'^4, & \vec{D}'_y = T'_2 \vec{D}' + \vec{P}'^4, & \vec{D}'_z = T'_3 \vec{D}' + \vec{Q}'^4, & \vec{D}'_w = T'_4 \vec{D}' + \vec{R}'^4. \end{cases}$$

Подставляя в последнюю систему выражения (3.4) и сравнивая с (3.1), находим

$$T_1 = \chi^{-1} T'_1 \chi, \quad T_2 = \chi^{-1} T'_2 \chi, \quad T_3 = \chi^{-1} T'_3 \chi, \quad T_4 = \chi^{-1} T'_4 \chi.$$

Поскольку матрицу T_1 можно привести к жордановому виду при помощи надлежащего выбора невырожденной матрицы χ (см. [4, с. 482]), приходим к утверждению теоремы. \square

Отметим, что в теореме 4 собственные значения матриц могут быть как вещественными, так и комплексно сопряженными, поэтому в явном виде эти матрицы, с учетом вещественных форм, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} 1. & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, & 2. & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & -\beta_1 \\ 0 & 0 & \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, & 3. & \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & -\beta_3 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \\ 4. & \begin{pmatrix} \lambda_5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{pmatrix}, & 5. & \begin{pmatrix} \lambda_5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & -\beta_4 \\ 0 & 0 & \beta_4 & \alpha_4 \end{pmatrix}, & 6. & \begin{pmatrix} \lambda_5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_8 \end{pmatrix}, & (3.5) \\ 7. & \begin{pmatrix} \lambda_9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} \end{pmatrix}, & 8. & \begin{pmatrix} \lambda_4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

причём $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \beta_3 \neq 0, \beta_4 \neq 0$. Заметим, что в этих матрицах все элементы — вещественные числа.

Теорема 5. Пусть T_1 — вещественная форма (3.5) жордановой матрицы из (3.3). Справедливы следующие утверждения.

1. Для матрицы T , коммутирующей с матрицей T_1 вида **1** из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможны соответственно четыре различных случая:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4; & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_5 & a_6 & a_7 & 0 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4; \\ & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_5 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4, & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix} \text{ для попарно раз-} \\ & & & \text{личных } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4. \end{aligned} \quad (3.6)$$

2. Для матрицы T , коммутирующей с матрицей T_1 вида **2** из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможны соответственно два различных случая:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_5 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2; \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq \lambda_2. \quad (3.7)$$

3. Для матрицы T , коммутирующей с матрицей T_1 вида **3** из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможен случай

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

4. Для матрицы T , коммутирующей с матрицей T_1 вида **4** из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможны четыре различных случая:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}, \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7; & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{10} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix}, \lambda_5 = \lambda_6 \neq \lambda_7; \\ & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}, \lambda_5 \neq \lambda_6 = \lambda_7; & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix}, \lambda_5 \neq \lambda_6, \\ & & & \lambda_5 \neq \lambda_7, \\ & & & \lambda_6 \neq \lambda_7. \end{aligned} \quad (3.9)$$

5. Для матрицы T , коммутирующей с матрицей T_1 вида **5** из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможен случай

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

6. Для матрицы T , коммутирующей с матрицей T_1 вида **6** из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможны два различных случая:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_9 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}, \lambda_5 = \lambda_8; \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}, \lambda_5 \neq \lambda_8. \quad (3.11)$$

7. Для матрицы T , коммутирующей с матрицей T_1 вида **7** из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможны соответственно два различных случая:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}, \lambda_9 = \lambda_{10}; \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix}, \lambda_9 \neq \lambda_{10}. \quad (3.12)$$

8. Матрица T , коммутирующая с матрицей T_1 вида **8** из (3.5), имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Доказательство данной теоремы сводится к вычислению матричных коммутаторов и приравнению их к нулевой матрице: $T_1T - TT_1 = 0$. Проиллюстрируем это для последнего случая, когда матрица T_1 имеет вид **8**) из (3.5) и

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$T_1T - TT_1 = \begin{pmatrix} -a_5 & a_1 - a_6 & a_2 - a_7 & a_3 - a_8 \\ -a_9 & a_5 - a_{10} & a_6 - a_{11} & a_7 - a_{12} \\ -a_{13} & a_9 - a_{14} & a_{10} - a_{15} & a_{11} - a_{16} \\ 0 & a_{15} & a_{14} & a_{15} \end{pmatrix} = 0.$$

Видно, что

$$a_5 = a_9 = a_{10} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = 0, \quad a_1 = a_6 = a_{11} = a_{16}, \quad a_7 = a_2 = a_{12}, \quad a_3 = a_4.$$

В результате матрица T принимает вид (3.13). Аналогично получаем (3.6)–(3.12). \square

Теоремы 3–5 дают существенные ограничения на матрицы коэффициентов T_2 , T_3 и T_4 из системы (3.1). Несложно установить, что матрицы T_1 , T_2 , T_3 и T_4 могут принимать следующие неупорядоченные четвёрки значений:

$$\begin{aligned} 1. & \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{pmatrix}; \\ 2. & \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_4 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\mu_4 \\ 0 & 0 & \mu_4 & \mu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & -\nu_4 \\ 0 & 0 & \nu_4 & \nu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & -\rho_4 \\ 0 & 0 & \rho_4 & \rho_3 \end{pmatrix}, \\ & \quad \lambda_4 \neq 0; \end{aligned}$$

3.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_4 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & -\mu_2 & 0 & 0 \\ \mu_2 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\mu_4 \\ 0 & 0 & \mu_4 & \mu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & -\nu_2 & 0 & 0 \\ \nu_2 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & -\nu_4 \\ 0 & 0 & \nu_4 & \nu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & -\rho_2 & 0 & 0 \\ \rho_2 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & -\rho_4 \\ 0 & 0 & \rho_4 & \rho_3 \end{pmatrix},$$

 $\lambda_2 \neq 0, \lambda_4 \neq 0;$
4.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{pmatrix},$$

 $\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + \rho_2^2 \neq 0;$
5.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_4 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\mu_4 \\ 0 & 0 & \mu_4 & \mu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & -\nu_4 \\ 0 & 0 & \nu_4 & \nu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & -\rho_4 \\ 0 & 0 & \rho_4 & \rho_3 \end{pmatrix},$$

 $\lambda_4 \neq 0;$
6.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \mu_4 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & \nu_4 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & \rho_4 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix},$$

 $\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + \rho_2^2 \neq 0, \lambda_4^2 + \mu_4^2 + \nu_4^2 + \rho_4^2 \neq 0;$
7.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \\ 0 & \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & 0 \\ 0 & \rho_1 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{pmatrix},$$

 $\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + \rho_2^2 \neq 0;$
8.
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \\ 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ 0 & 0 & \nu_1 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 \\ 0 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ 0 & 0 & \rho_1 & \rho_2 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_1 \end{pmatrix},$$

 $\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + \rho_2^2 \neq 0.$

4. **Разложимая алгебра Ли.** Решение системы дифференциальных уравнений (3.1) с нулевыми матрицами T_1, T_2, T_3 и T_4 в подходящем базисе принимает следующий вид:

$$\vec{A} = U^1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + C^1, \quad \vec{B} = U^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + C^2, \quad \vec{C} = U^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + C^3, \quad \vec{D} = U^4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + C^4,$$

где

$$U^i = \begin{pmatrix} g_1^i & p_1^i & q_1^i & r_1^i \\ g_2^i & p_2^i & q_2^i & r_2^i \\ g_3^i & p_3^i & q_3^i & r_3^i \\ g_4^i & p_4^i & q_4^i & r_4^i \end{pmatrix}, \quad C^i = \begin{pmatrix} c_1^i \\ c_2^i \\ c_3^i \\ c_4^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

— постоянные матрицы. По найденным решениям запишем базисные операторы (2.3) *восьмимерных линейных пространств*, добиваясь при этом исключения свободных членов выбором линейных комбинаций с постоянными коэффициентами операторов Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 с операторами $X_1,$

X_2, X_3 и X_4 :

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \partial_w, \quad Y_i = \left\langle U_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (4.1)$$

где

$$U_i = \begin{pmatrix} g_i^1 & p_i^1 & q_i^1 & r_i^1 \\ g_i^2 & p_i^2 & q_i^2 & r_i^2 \\ g_i^3 & p_i^3 & q_i^3 & r_i^3 \\ g_i^4 & p_i^4 & q_i^4 & r_i^4 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов. Несложно вычислить коммутатор:

$$[Y_i, Y_j] = \left\langle (U_j U_i - U_i U_j) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle = - \left\langle [U_i, U_j] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (4.2)$$

где $[U_i, U_j] = U_i U_j - U_j U_i$ — коммутатор матриц U_i и U_j , $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Тождество Якоби в нашем случае это свойство выполняется автоматически, поскольку $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ — векторные поля (см. [12, с. 88]).

Далее выясним, при каких условиях на коэффициенты операторы (3.1) становятся базисными операторами восьмимерных алгебр Ли. Очевидно, алгебра Ли $L = J \ltimes I$ разложима, так как является полупрямой суммой коммутативного трехмерного идеала J , образованного операторами X_1, X_2, X_3, X_4 , и четырехмерной подалгебры Ли I , образованной операторами Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 . Следуя классификации абстрактных четырехмерных вещественных алгебр Ли (см. [11, с. 138]), приведем полный список (с точностью до изоморфизма) подалгебр Ли I :

$[Y_1, Y_2]$	$[Y_1, Y_3]$	$[Y_2, Y_3]$	$[Y_1, Y_4]$	$[Y_2, Y_4]$	$[Y_3, Y_4]$	№
0	0	0	εY_1	$k Y_2$	$l Y_3$	1.
0	0	0	$k Y_1 + Y_2$	$-Y_1 + k Y_2$	$l Y_3$	2.
0	0	0	$k Y_1 + Y_2$	$k Y_2$	εY_3	3.
0	0	0	$k Y_1 + Y_2$	$k Y_2 + Y_3$	εY_3	4.
0	0	Y_1	$c Y_1$	Y_2	$(c - 1) Y_3$	5.
0	0	Y_1	$2 Y_1$	Y_2	$Y_2 + Y_3$	6.
0	0	Y_1	$q Y_1$	Y_3	$-Y_2 + q Y_3$	7.
0	Y_1	0	0	Y_2	0	8.
0	Y_1	Y_2	Y_2	$-Y_1$	0	9.
Y_3	$-Y_2$	Y_1	0	0	0	10.
Y_3	$-Y_2$	$-Y_1$	0	0	0	11.

где $\varepsilon = 0, 1$; $k, l, c, q = \text{const}$ и $-2 < q < 2$.

Теорема 6. Для локальной ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований с разложимой алгеброй Ли $L = J \ltimes I$, базис которой задается операторами (3.1), матрица коэффициентов K операторов Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 невырождена.

Доказательство. Согласно теореме 1 матрица, составленная по коэффициентам операторов, невырождена; значит

$$\begin{vmatrix} E & E \\ K(u) & K(v) \end{vmatrix} = |K(v) - K(u)| \neq 0.$$

Тогда матрица

$$\begin{aligned}
K(v) - K(u) &= \\
&= \left(\begin{array}{cccc} \langle \vec{g}_1^1, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_1^2, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_1^3, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_1^4, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{g}_2^1, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_2^2, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_2^3, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_2^4, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{g}_3^1, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_3^2, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_3^3, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_3^4, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{g}_4^1, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_4^2, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_4^3, \vec{v} \rangle & \langle \vec{g}_4^4, \vec{v} \rangle \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cccc} \langle \vec{g}_1^1, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_1^2, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_1^3, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_1^4, \vec{u} \rangle \\ \langle \vec{g}_2^1, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_2^2, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_2^3, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_2^4, \vec{u} \rangle \\ \langle \vec{g}_3^1, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_3^2, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_3^3, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_3^4, \vec{u} \rangle \\ \langle \vec{g}_4^1, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_4^2, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_4^3, \vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_4^4, \vec{u} \rangle \end{array} \right) = \\
&= \left(\begin{array}{cccc} \langle \vec{g}_1^1, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_1^2, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_1^3, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_1^4, \vec{v}\vec{u} \rangle \\ \langle \vec{g}_2^1, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_2^2, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_2^3, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_2^4, \vec{v}\vec{u} \rangle \\ \langle \vec{g}_3^1, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_3^2, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_3^3, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_3^4, \vec{v}\vec{u} \rangle \\ \langle \vec{g}_4^1, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_4^2, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_4^3, \vec{v}\vec{u} \rangle & \langle \vec{g}_4^4, \vec{v}\vec{u} \rangle \end{array} \right)
\end{aligned}$$

невырождена; здесь

$$\vec{u} = (x_u, y_u, z_u, w_u), \quad \vec{v} = (x_v, y_v, z_v, w_v), \quad \vec{v}\vec{u} = (x_{vu}, y_{vu}, z_{vu}, w_{vu}), \quad \vec{g}_i^j = (g_i^j, p_i^j, q_i^j, r_i^j),$$

$i, j = 1, 2, 3, 4$. Точки $u = (x_u, y_u, z_u, w_u)$ и $v = (x_v, y_v, z_v, w_v)$ выбираются произвольно, поэтому матрица K невырождена. \square

5. Вычисление алгебр Ли. Здесь и ниже рассматривается случай, когда для матрицы U_1 из (4.1) характеристический многочлен и минимальный многочлен совпадают, а её собственные значения различны и вещественны. В данном разделе из линейных пространств с базисными операторами вида (4.1) необходимо выделить алгебры Ли. Для этого пользуемся возможностью перехода к новому базису, заменой координат, а также замкнутостью коммутаторов базисных операторов. Последнее означает, что сам коммутатор должен принадлежать этой же алгебре Ли (см. [12, § 13]). Также учитывается теорема 6.

Теорема 7. Из системы (4.1), для которой матрица U_1 оператора Y_1 имеет различные вещественные собственные значения, причём её характеристический многочлен совпадает с минимальным, с точностью до линейной замены координат, выделяются операторы $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$, $X_4 = \partial_w$, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , образующие базисы восьмимерных линейных пространств; при этом операторы Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 образуют подпространство, являющееся алгеброй Ли, из списка (4.3):

для алгебры Ли 1:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \lambda_1 x \partial_x + \lambda_2 y \partial_y + \lambda_3 z \partial_z + \lambda_4 w \partial_w, & Y_2 &= b_1 x \partial_x + b_2 y \partial_y + b_3 z \partial_z + b_4 w \partial_w, \\
Y_3 &= c_1 x \partial_x + c_2 y \partial_y + c_3 z \partial_z + c_4 w \partial_w, & Y_4 &= d_1 x \partial_x + d_2 y \partial_y + d_3 z \partial_z + d_4 w \partial_w, \\
\lambda_1 &\neq \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_3, \lambda_1 \neq \lambda_4, \lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_2 \neq \lambda_4, \lambda_3 \neq \lambda_4;
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= (\lambda_5 x + y) \partial_x + \lambda_5 y \partial_y + \lambda_6 z \partial_z + \lambda_7 w \partial_w, \\
Y_2 &= (b_1 x + b_2 y) \partial_x + b_1 y \partial_y + b_{11} z \partial_z + b_{16} w \partial_w, \\
Y_3 &= (c_1 x + c_2 y) \partial_x + c_1 y \partial_y + c_{11} z \partial_z + c_{16} w \partial_w, \\
Y_4 &= (d_1 x + d_2 y) \partial_x + d_1 y \partial_y + d_{11} z \partial_z + d_{16} w \partial_w, \\
\lambda_5 &\neq \lambda_6, \lambda_5 \neq \lambda_7, \lambda_6 \neq \lambda_7;
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= (\lambda_5 x + y) \partial_x + \lambda_5 y \partial_y + (\lambda_8 z + w) \partial_z + \lambda_8 w \partial_w, \\
Y_2 &= (b_1 x + b_2 y) \partial_x + b_1 y \partial_y + (b_{11} z + b_{12} w) \partial_z + b_{11} w \partial_w, \\
Y_3 &= (c_1 x + c_2 y) \partial_x + c_1 y \partial_y + (c_{11} z + c_{12} w) \partial_z + c_{11} w \partial_w, \\
Y_4 &= (d_1 x + d_2 y) \partial_x + d_1 y \partial_y + (d_{11} z + d_{12} w) \partial_z + d_{11} w \partial_w, \quad \lambda_5 \neq \lambda_8;
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + \lambda_9 z\partial_z + \lambda_{10} w\partial_w, \\
 Y_2 &= (b_1 x + b_2 y + b_3 z)\partial_x + (b_1 y + b_2 z)\partial_y + b_1 z\partial_z + b_{16} w\partial_w, \\
 Y_3 &= (c_1 x + c_2 y + c_3 z)\partial_x + (c_1 y + c_2 z)\partial_y + c_1 z\partial_z + c_{16} w\partial_w, \\
 Y_4 &= (d_1 x + d_2 y + d_3 z)\partial_x + (d_1 y + d_2 z)\partial_y + d_1 z\partial_z + d_{16} w\partial_w, \quad \lambda_9 \neq \lambda_{10};
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + (\lambda_9 z + w)\partial_z + \lambda_9 w\partial_w, \\
 Y_2 &= (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w)\partial_x + (b_1 y + b_2 z + b_3 w)\partial_y + (b_1 z + b_2 w)\partial_z + b_1 w\partial_w, \\
 Y_3 &= (c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 w)\partial_x + (c_1 y + c_2 z + c_3 w)\partial_y + (c_1 z + c_2 w)\partial_z + c_1 w\partial_w, \\
 Y_4 &= (d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 w)\partial_x + (d_1 y + d_2 z + d_3 w)\partial_y + (d_1 z + d_2 w)\partial_z + d_1 w\partial_w;
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \quad Y_2 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + w\partial_w, \quad Y_3 = z\partial_x + w\partial_y, \\
 Y_4 &= (d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 w)\partial_x + (d_1 y - y + d_2 z + d_3 w)\partial_y + \\
 &\quad + (d_1 z - 2z + d_2 w)\partial_z + (d_1 w - 3w)\partial_w;
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \quad Y_2 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + w\partial_w, \quad Y_3 = w\partial_x, \\
 Y_4 &= (d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 w)\partial_x + (d_1 y - y + d_2 z + d_3 w)\partial_y + \\
 &\quad + (d_1 z - 2z + d_2 w)\partial_z + (d_1 w - 3w)\partial_w;
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \quad Y_2 = z\partial_x + w\partial_y, \quad Y_3 = w\partial_x, \\
 Y_4 &= (d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 w)\partial_x + (d_1 y - y + d_2 z + d_3 w)\partial_y + \\
 &\quad + (d_1 z - 2z + d_2 w)\partial_z + (d_1 w - 3w)\partial_w;
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

для алгебры Ли **3**:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + \lambda_9 z\partial_z + \lambda_{10} w\partial_w, \quad Y_2 = (d_2 - d_7)z\partial_x, \\
 Y_3 &= (c_1 x + c_3 z)\partial_x + c_1 y\partial_y + c_1 z\partial_z + c_{16} w\partial_w, \\
 Y_4 &= (d_1 x + d_2 y + d_3 z)\partial_x + (d_1 y + d_7 z)\partial_y + d_1 z\partial_z + d_{16} w\partial_w, \quad \lambda_9 \neq \lambda_{10};
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + (\lambda_9 z + w)\partial_z + \lambda_9 w\partial_w, \\
 Y_2 &= b_4 w\partial_x, \quad Y_3 = (c_1 x + c_3 z + c_4 w)\partial_x + (c_1 y + c_3 w)\partial_y + c_1 z\partial_z + c_1 w\partial_w, \\
 Y_4 &= (d_1 x + d_7 y + d_3 z + d_4 w)\partial_x + (d_1 y + d_7 z + (d_3 - b_4)w)\partial_y + (d_1 z + d_7 w)\partial_z + d_1 w\partial_w;
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

для алгебры Ли **4**:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + (\lambda_9 z + w)\partial_z + \lambda_9 w\partial_w, \\
 Y_2 &= (b_3 z + b_4 w)\partial_x + b_3 w\partial_y, \quad Y_3 = 2b_3^2 w\partial_x, \\
 Y_4 &= (d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 w)\partial_x + (d_1 y + (d_2 - b_3)z + (d_3 - b_4)w)\partial_y + \\
 &\quad + (d_1 z + (d_2 - 2b_3)w)\partial_z + d_1 w\partial_w,
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

причем все коэффициенты перед переменными — постоянные.

Остальные алгебры не реализуются.

Операторы Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 , приведенные в формулировке теоремы 7, линейнонезависимы и ненулевые. При доказательстве этой теоремы допускается линейная замена координат, линейная комбинация операторов и применение условия замкнутости коммутаторов базисных операторов.

Доказательство. В операторах (4.1) произведем линейную замену координат

$$(x' \ y' \ z' \ w')^T = A(x \ y \ z \ w)^T,$$

где A — произвольная невырожденная матрица четвертого порядка с постоянными элементами, T — знак транспонирования. Тогда для операторов дифференцирования относительно старых и новых координат получим связь

$$(\partial_x \partial_y \partial_z \partial_w)^T = A^T (\partial_{x'} \partial_{y'} \partial_{z'} \partial_{w'})^T.$$

В новых координатах операторы $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3$ и Y_4 принимают следующий вид:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \\ X'_4 \end{pmatrix}, \quad Y_i = \left\langle AU_i A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \\ \partial_{z'} \\ \partial_{w'} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Линейной комбинацией переходим от операторов X_1, X_2, X_3, X_4 к операторам $X'_1 = \partial_{x'}, X'_2 = \partial_{y'}, X'_3 = \partial_{z'}, X'_4 = \partial_{w'}$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат и базисных операторов, получим:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \partial_w, \quad Y_i = \left\langle U'_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где введены обозначения

$$U'_i = AU_i A^{-1}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Известно, что матрица U'_1 приводится к канонической вещественной форме (см. [12]). Возможны следующие варианты:

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \text{II.} \quad \begin{pmatrix} \lambda_5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{pmatrix}, \quad \text{III.} \quad \begin{pmatrix} \lambda_5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_8 \end{pmatrix}, \\ \text{IV.} \quad \begin{pmatrix} \lambda_9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} \end{pmatrix}, \quad \text{V.} \quad \begin{pmatrix} \lambda_4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \end{array}$$

причем все элементы в данных матрицах вещественны,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_3, \quad \lambda_1 \neq \lambda_4, \quad \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad \lambda_2 \neq \lambda_4, \quad \lambda_3 \neq \lambda_4, \\ \lambda_5 \neq \lambda_6, \quad \lambda_5 \neq \lambda_7, \quad \lambda_6 \neq \lambda_7, \quad \lambda_7 \neq \lambda_8, \quad \lambda_9 \neq \lambda_{10}. \end{aligned}$$

В таком случае ненулевой оператор Y_1 приводится к одному из четырех видов:

$$\begin{aligned} Y_1 = \lambda_1 x \partial_x + \lambda_2 y \partial_y + \lambda_3 z \partial_z + \lambda_4 w \partial_w, \\ \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_3, \quad \lambda_1 \neq \lambda_4, \quad \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad \lambda_2 \neq \lambda_4, \quad \lambda_3 \neq \lambda_4; \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$Y_1 = (\lambda_5 x + y) \partial_x + \lambda_5 y \partial_y + \lambda_6 z \partial_z + \lambda_7 w \partial_w, \quad \lambda_5 \neq \lambda_6, \quad \lambda_5 \neq \lambda_7, \quad \lambda_6 \neq \lambda_7; \quad (5.13)$$

$$Y_1 = (\lambda_5 x + y) \partial_x + \lambda_5 y \partial_y + (\lambda_8 z + w) \partial_z + \lambda_8 w \partial_w, \quad \lambda_7 \neq \lambda_8; \quad (5.14)$$

$$Y_1 = (\lambda_9 x + y) \partial_x + (\lambda_9 y + z) \partial_y + \lambda_9 z \partial_z + \lambda_{10} w \partial_w, \quad \lambda_9 \neq \lambda_{10}; \quad (5.15)$$

$$Y_1 = (\lambda_9 x + y) \partial_x + (\lambda_9 y + z) \partial_y + (\lambda_9 z + w) \partial_z + \lambda_9 w \partial_w. \quad (5.16)$$

Докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть ненулевые операторы Y_1 , принимающий один из видов (5.12)–(5.16), и

$$\begin{aligned} Y_2 = (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w) \partial_x + (b_5 x + b_6 y + b_7 z + b_8 w) \partial_y + \\ + (b_9 x + b_{10} y + b_{11} z + b_{12} w) \partial_z + (b_{13} x + b_{14} y + b_{15} z + b_{16} w) \partial_w, \end{aligned}$$

удовлетворяют коммутационному соотношению $[Y_1, Y_2] = 0$. Тогда, с точностью до линейной замены координат, возможны следующие варианты для этих операторов:

$$Y_1 = \lambda_1 x \partial_x + \lambda_2 y \partial_y + \lambda_3 z \partial_z + \lambda_4 w \partial_w, \quad Y_2 = b_1 x \partial_x + b_2 y \partial_y + b_3 z \partial_z + b_4 w \partial_w, \quad (5.17)$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_3, \lambda_1 \neq \lambda_4, \lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_2 \neq \lambda_4, \lambda_3 \neq \lambda_4;$$

$$Y_1 = (\lambda_5 x + y) \partial_x + \lambda_5 y \partial_y + \lambda_6 z \partial_z + \lambda_7 w \partial_w, \quad (5.18)$$

$$Y_2 = (b_1 x + b_2 y) \partial_x + b_1 y \partial_y + b_{11} z \partial_z + b_{16} w \partial_w,$$

$$\lambda_5 \neq \lambda_6, \lambda_5 \neq \lambda_7, \lambda_6 \neq \lambda_7;$$

$$Y_1 = (\lambda_5 x + y) \partial_x + \lambda_5 y \partial_y + (\lambda_8 z + w) \partial_z + \lambda_8 w \partial_w, \quad (5.19)$$

$$Y_2 = (b_1 x + b_2 y) \partial_x + b_1 y \partial_y + (b_{11} z + b_{12} w) \partial_z + b_{11} w \partial_w, \quad \lambda_5 \neq \lambda_8;$$

$$Y_1 = (\lambda_9 x + y) \partial_x + (\lambda_9 y + z) \partial_y + \lambda_9 z \partial_z + \lambda_{10} w \partial_w, \quad (5.20)$$

$$Y_2 = (b_1 x + b_2 y + b_3 z) \partial_x + (b_1 y + b_2 z) \partial_y + b_1 z \partial_z + b_{16} w \partial_w, \quad \lambda_9 \neq \lambda_{10};$$

$$Y_1 = (\lambda_9 x + y) \partial_x + (\lambda_9 y + z) \partial_y + (\lambda_9 z + w) \partial_z + \lambda_9 w \partial_w, \quad (5.21)$$

$$Y_2 = (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w) \partial_x + (b_1 y + b_2 z + b_3 w) \partial_y + (b_1 z + b_2 w) \partial_z + b_1 w \partial_w.$$

Доказательство. Вычислим коммутатор $[Y_1, Y_2]$ при помощи формулы (4.2) и приравняем его к нулю. Подробно рассмотрим случай, когда оператор Y_1 принимает вид (5.12). Используем матричные обозначения:

$$Y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle, \quad Y_2 = \left\langle \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$[Y_1, Y_2] = - \left\langle \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)b_2 & (\lambda_1 - \lambda_3)b_3 & (\lambda_1 - \lambda_4)b_4 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)b_5 & 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)b_7 & (\lambda_2 - \lambda_4)b_8 \\ (\lambda_3 - \lambda_1)b_9 & (\lambda_3 - \lambda_2)b_{10} & 0 & (\lambda_3 - \lambda_4)b_{12} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)b_{13} & (\lambda_4 - \lambda_2)b_{14} & (\lambda_4 - \lambda_3)b_{15} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Поскольку элементы λ попарно различны, имеем систему (5.17). Доказательство для (5.18) – (5.21) аналогично. \square

Лемма 2. Пусть ненулевые операторы Y_1 , принимающий один из видов (5.12)–(5.16), и

$$Y_2 = (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w) \partial_x + (b_5 x + b_6 y + b_7 z + b_8 w) \partial_y +$$

$$+ (b_9 x + b_{10} y + b_{11} z + b_{12} w) \partial_z + (b_{13} x + b_{14} y + b_{15} z + b_{16} w) \partial_w,$$

удовлетворяют коммутационному соотношению $[Y_1, Y_2] = Y_1$. Тогда, с точностью до линейной замены координат, возможен единственный вариант для этих операторов:

$$Y_1 = y \partial_x + z \partial_y + w \partial_z, \quad (5.22)$$

$$Y_2 = (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w) \partial_x + (b_1 y - y + b_2 z + b_3 w) \partial_y +$$

$$+ (b_1 z - 2z + b_2 w) \partial_z + (b_1 w - 3w) \partial_w.$$

Доказательство. Вычислим коммутатор $[Y_1, Y_2]$ и приравняем его к нулю. При вычислении этого коммутатора используем формулу (4.2),

$$Y_2 = \left\langle \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Подробно рассмотрим случай, когда оператор Y_1 принимает вид (5.12). Используем матричные обозначения:

$$Y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$[Y_1, Y_2] = - \left\langle \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)b_2 & (\lambda_1 - \lambda_3)b_3 & (\lambda_1 - \lambda_4)b_4 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)b_5 & 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)b_7 & (\lambda_2 - \lambda_4)b_8 \\ (\lambda_3 - \lambda_1)b_9 & (\lambda_3 - \lambda_2)b_{10} & 0 & (\lambda_3 - \lambda_4)b_{12} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)b_{13} & (\lambda_4 - \lambda_2)b_{14} & (\lambda_4 - \lambda_3)b_{15} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle = Y_1.$$

Тогда $Y_1 = 0$, что недопустимо.

Пусть оператор Y_1 принимает вид (5.13); тогда

$$Y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle, \quad [Y_1, Y_2] = \left\langle V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle = Y_1.$$

где

$$V = \begin{pmatrix} -b_5 & b_1 - b_6 & (\lambda_3 - \lambda_1)b_3 - b_7 & (\lambda_4 - \lambda_1)b_4 - b_8 \\ 0 & b_5 & (\lambda_3 - \lambda_1)b_7 & (\lambda_4 - \lambda_1)b_8 \\ (\lambda_1 - \lambda_3)b_9 & (\lambda_1 - \lambda_3)b_{10} + b_9 & 0 & (\lambda_4 - \lambda_3)b_{12} \\ (\lambda_1 - \lambda_4)b_{13} & (\lambda_1 - \lambda_4)b_{14} + b_{13} & (\lambda_3 - \lambda_4)b_{15} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda_6 = \lambda_7 = 0$, что недопустимо.

Если оператор Y_1 имеет вид (5.14), то

$$Y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle, \quad [Y_1, Y_2] = - \left\langle V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle = Y_1,$$

где

$$V = \begin{pmatrix} b_5 & -b_1 + b_6 & (\lambda_5 - \lambda_8)b_3 + b_7 & -b_3 + (\lambda_5 - \lambda_8)b_4 + b_8 \\ 0 & -b_5 & (\lambda_5 - \lambda_8)b_7 & -b_7 + (\lambda_5 - \lambda_8)b_8 \\ b_{13} + (\lambda_8 - \lambda_5)b_9 & (\lambda_8 - \lambda_5)b_{10} + b_{14} - b_9 & b_{15} & -b_{11} + b_{16} \\ (\lambda_8 - \lambda_5)b_{13} & -b_{13} + (\lambda_8 - \lambda_5)b_{14} & 0 & -b_{15} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda_5 = \lambda_8 = 0$, что также недопустимо.

Если оператор Y_1 имеет вид (5.15), то

$$Y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle, \quad [Y_1, Y_2] = - \left\langle V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle = Y_1,$$

где

$$V = \begin{pmatrix} b_5 & -b_1 + b_6 & -b_2 + b_7 & -(\lambda_{10} - \lambda_9)b_4 + b_8 \\ b_9 & b_{10} - b_5 & b_{11} - b_6 & b_{12} - (\lambda_{10} - \lambda_9)b_8 \\ 0 & -b_9 & -b_{10} & -(\lambda_{10} - \lambda_9)b_{12} \\ (\lambda_{10} - \lambda_9)b_{13} & -b_{13} + (\lambda_{10} - \lambda_9)b_{14} & -b_{14} + (\lambda_{10} - \lambda_9)b_{15} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda_9 = \lambda_{10} = 0$, что недопустимо.

Если оператор Y_1 имеет вид (5.16), то

$$Y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$[Y_1, Y_2] = - \left\langle \begin{pmatrix} b_5 & -b_1 + b_6 & -b_2 + b_7 & -b_3 + b_8 \\ b_9 & b_{10} - b_5 & b_{11} - b_6 & b_{12} - b_7 \\ b_{13} & b_{14} - b_9 & -b_{10} + b_{15} & -b_{11} + b_{16} \\ 0 & -b_{13} & -b_{14} & -b_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle = Y_1.$$

Тогда допустимое решение получаем при $\lambda_9 = 0$. В итоге имеем операторы (5.22). \square

Лемма 3. Пусть ненулевые операторы: Y_1 , принимающий один из видов (5.12)–(5.16),

$$Y_2 = (b_1x + b_2y + b_3z + b_4w)\partial_x + (b_5x + b_6y + b_7z + b_8w)\partial_y +$$

$$+ (b_9x + b_{10}y + b_{11}z + b_{12}w)\partial_z + (b_{13}x + b_{14}y + b_{15}z + b_{16}w)\partial_w,$$

$$Y_3 = (c_1x + c_2y + c_3z + c_4w)\partial_x + (c_5x + c_6y + c_7z + c_8w)\partial_y +$$

$$+ (c_9x + c_{10}y + c_{11}z + c_{12}w)\partial_z + (c_{13}x + c_{14}y + c_{15}z + c_{16}w)\partial_w,$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = 0, \quad [Y_2, Y_3] = 0.$$

Тогда, с точностью до линейной замены координат в этих операторах, возможны следующие варианты:

$$Y_1 = \lambda_1x\partial_x + \lambda_2y\partial_y + \lambda_3z\partial_z + \lambda_4w\partial_w, \quad Y_2 = b_1x\partial_x + b_2y\partial_y + b_3z\partial_z + b_4w\partial_w,$$

$$Y_3 = c_1x\partial_x + c_2y\partial_y + c_3z\partial_z + c_4w\partial_w, \quad (5.23)$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_3, \lambda_1 \neq \lambda_4, \lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_2 \neq \lambda_4, \lambda_3 \neq \lambda_4;$$

$$Y_1 = (\lambda_5x + y)\partial_x + \lambda_5y\partial_y + \lambda_6z\partial_z + \lambda_7w\partial_w,$$

$$Y_2 = (b_1x + b_2y)\partial_x + b_1y\partial_y + b_{11}z\partial_z + b_{16}w\partial_w,$$

$$Y_3 = (c_1x + c_2y)\partial_x + c_1y\partial_y + c_{11}z\partial_z + c_{16}w\partial_w, \quad (5.24)$$

$$\lambda_5 \neq \lambda_6, \lambda_5 \neq \lambda_7, \lambda_6 \neq \lambda_7;$$

$$Y_1 = (\lambda_5x + y)\partial_x + \lambda_5y\partial_y + (\lambda_8z + w)\partial_z + \lambda_8w\partial_w,$$

$$Y_2 = (b_1x + b_2y)\partial_x + b_1y\partial_y + (b_{11}z + b_{12}w)\partial_z + b_{11}w\partial_w, \quad (5.25)$$

$$Y_3 = (c_1x + c_2y)\partial_x + c_1y\partial_y + (c_{11}z + c_{12}w)\partial_z + c_{11}w\partial_w, \quad \lambda_5 \neq \lambda_8;$$

$$Y_1 = (\lambda_9x + y)\partial_x + (\lambda_9y + z)\partial_y + \lambda_9z\partial_z + \lambda_{10}w\partial_w,$$

$$Y_2 = (b_1x + b_2y + b_3z)\partial_x + (b_1y + b_2z)\partial_y + b_1z\partial_z + b_{16}w\partial_w, \quad (5.26)$$

$$Y_3 = (c_1x + c_2y + c_3z)\partial_x + (c_1y + c_2z)\partial_y + c_1z\partial_z + c_{16}w\partial_w, \quad \lambda_9 \neq \lambda_{10};$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + (\lambda_9 z + w)\partial_z + \lambda_9 w\partial_w, \\
Y_2 &= (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w)\partial_x + (b_1 y + b_2 z + b_3 w)\partial_y + (b_1 z + b_2 w)\partial_z + b_1 w\partial_w, \\
Y_3 &= (c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 w)\partial_x + (c_1 y + c_2 z + c_3 w)\partial_y + (c_1 z + c_2 w)\partial_z + c_1 w\partial_w.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Доказательство леммы 3 состоит в вычислении коммутаторов $[Y_1, Y_2]$, $[Y_1, Y_3]$, $[Y_2, Y_3]$, приравнивания их к нулю и сравнения коэффициенты; при этом используются результаты леммы 1. Оператор Y_1 берётся из системы (5.12)–(5.16), а операторы Y_2 и Y_3 — произвольного вида. В результате получаем соотношения (5.23)–(5.27). \square

Лемма 4. *Рассмотрим ненулевые операторы Y_1 , принимающий один из видов (5.12)–(5.16),*

$$\begin{aligned}
Y_2 &= (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w)\partial_x + (b_5 x + b_6 y + b_7 z + b_8 w)\partial_y + \\
&\quad + (b_9 x + b_{10} y + b_{11} z + b_{12} w)\partial_z + (b_{13} x + b_{14} y + b_{15} z + b_{16} w)\partial_w, \\
Y_3 &= (c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 w)\partial_x + (c_5 x + c_6 y + c_7 z + c_8 w)\partial_y + \\
&\quad + (c_9 x + c_{10} y + c_{11} z + c_{12} w)\partial_z + (c_{13} x + c_{14} y + c_{15} z + c_{16} w)\partial_w.
\end{aligned}$$

Тогда для них коммутационные соотношения

$$[Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = 0, \quad [Y_2, Y_3] = Y_1$$

не выполняются.

Доказательство следует из леммы 1 и того факта, что операторы вида Y_2 в каждой системе коммутативны. \square

Лемма 5. *Пусть ненулевые операторы Y_1 , принимающий один из видов (5.12)–(5.16),*

$$\begin{aligned}
Y_2 &= (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w)\partial_x + (b_5 x + b_6 y + b_7 z + b_8 w)\partial_y + \\
&\quad + (b_9 x + b_{10} y + b_{11} z + b_{12} w)\partial_z + (b_{13} x + b_{14} y + b_{15} z + b_{16} w)\partial_w, \\
Y_3 &= (c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 w)\partial_x + (c_5 x + c_6 y + c_7 z + c_8 w)\partial_y + \\
&\quad + (c_9 x + c_{10} y + c_{11} z + c_{12} w)\partial_z + (c_{13} x + c_{14} y + c_{15} z + c_{16} w)\partial_w,
\end{aligned}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = Y_1, \quad [Y_2, Y_3] = 0.$$

Тогда, с точностью до линейной замены координат возможен единственный вариант для этих операторов:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \\
Y_2 &= (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w)\partial_x + (b_1 y - y + b_2 z + b_3 w)\partial_y + \\
&\quad + (b_1 z - 2z + b_2 w)\partial_z + (b_1 w - 3w)\partial_w, \\
Y_3 &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + w\partial_w.
\end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству лемм 1–3.

Лемма 6. *Рассмотрим ненулевые операторы Y_1 , принимающий один из пяти видов (5.12)–(5.16),*

$$\begin{aligned}
Y_2 &= (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w)\partial_x + (b_5 x + b_6 y + b_7 z + b_8 w)\partial_y + \\
&\quad + (b_9 x + b_{10} y + b_{11} z + b_{12} w)\partial_z + (b_{13} x + b_{14} y + b_{15} z + b_{16} w)\partial_w, \\
Y_3 &= (c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 w)\partial_x + (c_5 x + c_6 y + c_7 z + c_8 w)\partial_y + \\
&\quad + (c_9 x + c_{10} y + c_{11} z + c_{12} w)\partial_z + (c_{13} x + c_{14} y + c_{15} z + c_{16} w)\partial_w.
\end{aligned}$$

Тогда для них коммутационные соотношения

$$[Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = Y_1, \quad [Y_2, Y_3] = Y_2$$

не выполняются.

Доказательство. Оператор Y_1 берётся из системы (5.12)–(5.16), а операторы Y_2 — согласно лемме 1, поскольку $[Y_1, Y_2] = 0$. Далее, вычисляя коммутатор $[Y_1, Y_3] = Y_1$ (лемма 2), приходим в единственному варианту для этих трёх операторов:

$$\begin{aligned} Y_1 &= y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \\ Y_2 &= (b_1x + b_2y + b_3z + b_4w)\partial_x + (b_1y + b_2z + b_3w)\partial_y + (b_1z + b_2w)\partial_z + b_1w\partial_w, \\ Y_3 &= (c_1x + c_2y + c_3z + c_4w)\partial_x + (c_1y - y + c_2z + c_3w)\partial_y + (c_1z - 2z + c_2w)\partial_z + (c_1w - 3w)\partial_w. \end{aligned}$$

Наконец, вычисляя коммутатор $[Y_2, Y_3] = Y_2$, получаем $Y_2 = c_2Y_1$, что недопустимо для базисных операторов. \square

Теперь возвращаемся к доказательству теоремы 7.

Сначала рассмотрим алгебру **1** из (4.3). Операторы Y_1, Y_2, Y_3 берутся из леммы 1. Если $\varepsilon = 0$, то по лемме 1 вычисляется оператор Y_4 . В таком случае

$$[Y_1, Y_4] = [Y_2, Y_4] = [Y_3, Y_4] = 0,$$

значит алгебра **1** коммутативна; тогда получаем системы (5.1)–(5.5). Если же $\varepsilon = 1$, то согласно леммам 1 и 2 будем иметь

$$\begin{aligned} Y_1 &= y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \\ Y_2 &= (b_1x + b_2y + b_3z + b_4w)\partial_x + (b_1y + b_2z + b_3w)\partial_y + (b_1z + b_2w)\partial_z + b_1w\partial_w, \\ Y_3 &= (c_1x + c_2y + c_3z + c_4w)\partial_x + (c_1y + c_2z + c_3w)\partial_y + (c_1z + c_2w)\partial_z + c_1w\partial_w, \\ Y_4 &= (d_1x + d_2y + d_3z + d_4w)\partial_x + (d_1y - y + d_2z + d_3w)\partial_y + (d_1z - 2z + d_2w)\partial_z + (d_1w - 3w)\partial_w. \end{aligned}$$

Вычисляя остальные коммутаторы

$$[Y_2, Y_4] = kY_2, \quad [Y_3, Y_4] = lY_3,$$

получаем (5.6)–(5.8).

Исследуем теперь алгебру **2** из (4.3). Операторы Y_1, Y_2, Y_3 берутся из леммы 1, а Y_4 — произвольного линейного вида. Если Y_1 совпадает с (5.12), то из соотношения

$$[Y_1, Y_4] = kY_1 + Y_2$$

получаем $kY_1 + Y_2 = 0$, что недопустимо. Пусть теперь Y_1 совпадает с (5.13); тогда из

$$[Y_1, Y_4] = kY_1 + Y_2, \quad [Y_2, Y_4] = -Y_1 + kY_2 \tag{5.28}$$

следует $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$, что недопустимо. Если же Y_1 совпадает с (5.14), то из (5.28) следует $\lambda_5 = \lambda_8 = 0$, что недопустимо. Если Y_1 совпадает с (5.15), то из (5.28) следует $\lambda_9 = \lambda_{10} = 0$, что также недопустимо. Если Y_1 совпадает с (5.16), то получаем противоречие $b_2^2 + 1 = 0$.

Аналогично, из алгебры **3** получаем два положительных результата (5.9) и (5.10), а из **4** — (5.11).

Из леммы 4 вытекает, что алгебры **5–7** дают отрицательный результат, а из лемм 5 и 6 — отрицательный результат для алгебр **8** и **9**

Алгебры **10** и **11** также не реализуются. В этом легко убедиться, взяв Y_4 из системы (5.12)–(5.16); тогда по лемме 1 находим операторы Y_1, Y_2, Y_3 , которые между собой коммутативны.

Таким образом, теорема 7 доказана. \square

Далее из восьмимерных линейных пространств, найденных в теореме 7, выделим алгебры Ли локально ограничено точно дважды транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4 . Для этого применим теорему 6 и используем возможность перехода к новому базису (линейной комбинации базисных операторов).

Теорема 8. *Из восьмимерных линейных пространств (5.1)–(5.11) выделяются восьмимерные алгебры Ли локально ограничено точно дважды транзитивных групп Ли преобразований пространства $\mathring{E}R^4$, полученных расширением группы параллельных переносов. Базис этих алгебр Ли, с точностью до линейных комбинаций операторов и линейных замен координат, состоит*

из операторов дифференцирования $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$, $X_4 = \partial_w$, а также из операторов Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 :

$$Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y, \quad Y_3 = z\partial_z, \quad Y_4 = w\partial_w; \quad (5.29)$$

$$Y_1 = (ax + y)\partial_x, \quad Y_2 = bx\partial_x + y\partial_y, \quad Y_3 = cx\partial_x + z\partial_z, \quad Y_4 = dx\partial_x + w\partial_w; \quad (5.30)$$

$$Y_1 = w\partial_z, \quad Y_2 = z\partial_z + w\partial_w, \quad Y_3 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_4 = y\partial_x; \quad (5.31)$$

$$Y_1 = y\partial_x + z\partial_y, \quad Y_2 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad Y_3 = z\partial_x, \quad Y_4 = w\partial_w; \quad (5.32)$$

$$Y_1 = y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \quad Y_2 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + w\partial_w, \quad Y_3 = z\partial_x + w\partial_y, \quad Y_4 = w\partial_x; \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, & Y_2 &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + w\partial_w, \\ Y_3 &= z\partial_x + w\partial_y, & Y_4 &= aw\partial_x + y\partial_y + 2z\partial_z + 3w\partial_w; \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, & Y_2 &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + w\partial_w, \\ Y_3 &= w\partial_x, & Y_4 &= az\partial_x + (y + aw)\partial_y + 2z\partial_z + 3w\partial_w; \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, & Y_2 &= z\partial_x + w\partial_y, & Y_3 &= w\partial_x, \\ Y_4 &= ax\partial_x + (a - 1)y\partial_y + (a - 2)z\partial_z + (a - 3)w\partial_w; \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$Y_1 = ay\partial_x + z\partial_y, \quad Y_2 = z\partial_x, \quad Y_3 = w\partial_w, \quad Y_4 = (x + by)\partial_x + y\partial_y + z\partial_z; \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= y\partial_x + z\partial_y + aw\partial_w, & Y_2 &= z\partial_x, \\ Y_3 &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + bw\partial_w, & Y_4 &= cy\partial_x + dw\partial_w; \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= y\partial_x + (z + aw)\partial_y + w\partial_z, & Y_2 &= w\partial_x, \\ Y_3 &= z\partial_x + w\partial_y, & Y_4 &= x\partial_x + (y + aw)\partial_y + z\partial_z + w\partial_w; \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= (ax + y)\partial_x + (ay + z)\partial_y + (az + w)\partial_z + aw\partial_w, & Y_2 &= w\partial_x, \\ Y_3 &= (x + cz)\partial_x + (y + cw)\partial_y + z\partial_z + w\partial_w, & Y_4 &= dz\partial_x + bw\partial_y; \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= (ax + y)\partial_x + (ay + z)\partial_y + (az + w)\partial_z + aw\partial_w, & Y_2 &= z\partial_x + w\partial_y, \\ Y_3 &= w\partial_x, & Y_4 &= bx\partial_x + (by - cz - dw)\partial_y + (bz - 2cw)\partial_z + bw\partial_w, \end{aligned} \quad (5.41)$$

причем коэффициенты a, b, c, d постоянны.

Доказательство этой теоремы проводится в два этапа. На первом этапе применяем теорему 6. Для этого исследуем на невырожденность матрицу K , составленную из коэффициентов операторов Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 . Например, для линейного пространства (5.1) эта матрица имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} \lambda_1 x & \lambda_2 y & \lambda_3 z & \lambda_4 w \\ b_1 x & b_2 y & b_3 z & b_4 w \\ c_1 x & c_2 y & c_3 z & c_4 w \\ d_1 x & d_2 y & d_3 z & d_4 w \end{pmatrix}.$$

Требование невырожденности равносильно линейной независимости операторов Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 . На втором этапе линейно комбинируем операторы Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 , что приводит к упрощению базиса соответствующих алгебр Ли. Так, например, система (5.1) линейной комбинацией приводится к (5.29). Таким образом производится выделение алгебр Ли (5.29)–(5.41). \square

6. Вычисления локально ограничено точно дважды транзитивных действий. Экспоненциальное отображение оператора Y определяем формулой

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \text{Exp}(tY) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + tY \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + \frac{(tY)^2}{2!} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + \dots \quad (6.1)$$

Теорема 9. *Локальные группы Ли преобразований трехмерного пространства R^4 , задающие локально ограничено точно дважды транзитивные действия в R^4 , в подходящих обозначениях параметров и координат принимают следующий вид:*

$$x' = a_1x + a_5, \quad y' = a_2y + a_6, \quad z' = a_3z + a_7, \quad w' = a_4z + a_8; \quad (6.2)$$

$$x' = a_1^a a_2^b a_3^c a_4^d x + a_2 \left(\frac{a_1^a - 1}{a} \right) + a_5, \quad y' = a_2y + a_6, \quad z' = a_3z + a_7, \quad w' = a_4w + a_8; \quad (6.3)$$

$$x' = a_1x + a_2y + a_5, \quad y' = a_1y + a_6, \quad z' = a_3z + a_4w + a_7, \quad w' = a_3w + a_8; \quad (6.4)$$

$$x' = a_2x + a_3z + a_1y + a_5, \quad y' = a_2y + a_1z + a_6, \quad z' = a_2z + a_7, \quad w' = a_4w + a_8; \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} x' &= a_2x + a_3z + a_4w + a_1y + a_5, & y' &= a_2y + a_1z + a_3w + a_6, \\ z' &= a_2z + a_1w + a_7, & w' &= a_2w + a_8; \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} x' &= a_2x + \left(a_3 + \frac{1}{2}a_1^2 \right) a_2z + \left(a_1a_3 + \frac{1}{6}a_1^3 + \frac{a}{3}(1 + a_4^3) \right) a_2w + a_1a_2y + a_5, \\ y' &= a_2a_4y + a_1a_2a_4^2z + \left(a_3 + \frac{1}{2}a_1^2 \right) a_2a_4w + a_6, & z' &= a_2a_4^2z + a_7, & w' &= a_2a_4^3w + a_8; \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} x' &= a_2x + \left(\frac{a}{2}(a_4^2 - 1) + \frac{1}{2}a_1^2a_4^2 \right) a_2z + a_3w + a_1a_2a_4y + a_5, \\ y' &= a_2a_4y + a_1a_2a_4^2z + \left(A(a_4) + \frac{1}{2}a_1^2a_4^3 \right) a_2w + a_6, \\ z' &= a_2a_4^2z + a_1a_2a_4^3w + a_7, & w' &= a_2a_4^3w + a_8, \\ A(a) &= \ln a + 4 \ln^2 \frac{a}{2} + 13 \ln^3 \frac{a}{6} + 40 \ln^4 \frac{a}{24} + \dots; \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} x' &= a_4^4x + a_1a_4^4y + a_2a_4^4z + a_3a_4^4w + a_1y + a_5, \\ y' &= a_4^3y + a_1a_4^3z + a_2a_4^3w + a_6, & z' &= a_4^2z + a_1a_4^2w + a_7, & w' &= a_4w + a_8; \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} x' &= a_4x + a_3z + (aa_1 + ba_4 \ln a_4)y + a_5, & y' &= a_4y + a_1z + a_6, \\ z' &= a_4z + a_7, & w' &= a_3w + a_8; \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned}x' &= a_3x + (\ln a_1 + c \ln a_4)a_3y + a_2z + a_5, \\y' &= a_3y + a_1z + a_6, \quad z' = a_3z + a_7, \quad w' = a_1^a a_3^b a_4^d w + a_8;\end{aligned}\tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}x' &= a_4x + a_3z + a_2w + a_5, \quad y' = a_4y + a_1z + (a_3 + aa_1 + aa_4 \ln a_4)w + a_6, \\z' &= a_4z + a_7, \quad w' = a_4w + a_8;\end{aligned}\tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}x' &= a_1^a a_3x + a_1^a a_3 \ln a_1 y + a_1^a a_3 \left(c \ln a_3 + da_4 + \ln^2 \frac{a_1}{2} \right) z + a_1^a a_3 a_2 w + a_5, \\y' &= a_1^a a_3 y + a_1^a \ln a_1 a_3 z + a_1^a a_3 \left(ba_4 + c \ln a_3 + \ln^2 \frac{a_1}{2} \right) w + a_6, \\z' &= a_1^a a_3 z + a_1^a \ln a_1 a_3 w + a_7, \quad w' = a_a a_3 w + a_8;\end{aligned}\tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}x' &= a_1^a a_4^b x + a_1^a \ln a_1 a_4^b \ln a_1 y + a_1^a a_4^b a_2 z + a_1^a a_4^b a_3 w + a_5, \\y' &= a_1^a a_4^b y + a_1^a a_4^b (\ln a_1 - c \ln a_1 \ln a_4) z + a_1^a a_4^b a_2 w + a_6, \\z' &= a_1^a a_4^b z + a_1^a a_4^b (\ln a_1 - 2c \ln a_4) w + a_7, \quad w' = a_a a_4^b w + a_8.\end{aligned}\tag{6.14}$$

Доказательство сводится к применению экспоненциального отображения (6.1) к базисным операторам алгебр Ли (5.29)–(5.41) и дальнейшему вычислению композиций получаемых действий. \square

7. Заключение. В работе решена задача локального расширения группы параллельных переносов пространства R^4 до локально ограничено точно дважды транзитивной группы Ли преобразований этого же пространства при двух условиях: $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0$; матрица U_1 имеет совпадающие характеристический и минимальный многочлены и вещественные собственные числа. Эта задача может быть распространена на случай произвольной матрицы U_1 , а также на случай ненулевых матриц T_1, T_2, T_3, T_4 . Согласно одной из теорем Г. Г. Михайличенко (см. [10]) полученные локально ограничено точно дважды транзитивные группы Ли преобразований задают двуметрическую феноменологически симметричную геометрию двух множеств (физическую структуру) ранга (3, 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Физматлит, 2010.
3. Горбачевич В. В. О расширении транзитивных действий групп Ли// Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — 81, № 6. — С. 86–99.
4. Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.
5. Кыров В. А. К вопросу о локальном расширении группы параллельных переносов трехмерного пространства// Владикавказ. мат. ж. — 2021. — 23, № 1. — С. 32–42.
6. Кыров В. А. Кратно транзитивная группа Ли преобразований как физическая структура// Мат. тр. — 2021. — 24, № 2. — С. 81–84.
7. Кыров В. А. Локальное расширение группы параллельных переносов плоскости до локально дважды транзитивной группы Ли преобразований этой же плоскости// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 204. — С. 85–96.
8. Кыров В. А. О локальном расширении группы параллельных переносов в трехмерном пространстве// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2022. — 32, № 1. — С. 62–80.
9. Кыров В. А., Михайличенко Г. Г. Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга (2, 2) в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга (3, 2)// 2018. — 28, № 3. — С. 305–327.
10. Михайличенко Г. Г. Групповая симметрия физических структур. — Барнаул, 2003.

11. *Михайличенко Г. Г., Мурадов Р. М.* Физические структуры как геометрии двух множеств. — Горно-Алтайск, 2008.
12. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский государственный университет
E-mail: kyrovVA@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 108–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-108-114

УДК 517.977, 519.7

О ПОИСКЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МОМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФфуЗИОННО-ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

© 2023 г. С. С. ПОСТНОВ

Аннотация. Для системы, описываемой одномерным неоднородным диффузионно-волновым уравнением на отрезке, рассматривается два типа задач оптимального граничного управления: задача поиска управления с минимальной нормой при заданном времени управления и задача поиска управления, переводящего систему в заданное состояние за минимальное время при заданном ограничении на норму управления. Рассмотрены разные способы задания условий на конечное состояние. Проанализирована конечномерная l -проблема моментов, к которой может быть сведена поставленная задача оптимального управления на основе приближенного решения диффузионно-волнового уравнения. Показано, что при выполнении условий корректности и разрешимости данной проблемы задача поиска управления с минимальной нормой всегда имеет решение, а задача поиска управления с минимальным временем перехода может решения не иметь.

Ключевые слова: оптимальное управление, производная Капуто, диффузионно-волновое уравнение, l -проблема моментов.

ON THE SEARCH FOR A TIME-OPTIMAL BOUNDARY CONTROL USING THE METHOD OF MOMENTS FOR SYSTEMS GOVERNED BY THE DIFFUSION-WAVE EQUATION

© 2023 S. S. POSTNOV

ABSTRACT. For a system described by a one-dimensional, inhomogeneous diffusion-wave equation on a segment, two types of optimal boundary control problems are considered: the problem of finding a control with a minimum norm for a given control time and the problem of finding a control that brings the system to a given state in a minimum time under a given constraint on the norm of the control. Various ways of specifying conditions on the final state are considered. The finite-dimensional l -problem of moments is analyzed, to which the optimal control problem can be reduced. We show that under the conditions of well-posedness and solvability of this problem, the problem of finding a control with a minimum norm always has a solution, while the problem of finding a control with a minimum transition time may not have a solution.

Keywords and phrases: optimal control, Caputo derivative, diffusion-wave equation, l -moment problem.

AMS Subject Classification: 49N05, 49J21, 34K35, 34A08

1. Введение. Задачи оптимального управления системами с распределёнными параметрами в настоящее время представляют значительный исследовательский интерес и имеют важные приложения. Относительно новое направление развития исследований в этой области составляют

задачи для систем дробного порядка, в частности, для систем, поведение которых описывается уравнениями параболического или гиперболического типа с дробной производной по времени.

В настоящее время имеется ряд публикаций, посвящённых поиску оптимального управления для систем дробного порядка с распределёнными параметрами, которые описываются обобщённым уравнением диффузии или диффузионно-волновым уравнением (см., например, [4–6, 10–14] и ссылки в них). В данной работе исследована задача оптимального управления с ограничением на норму управления для линейного неоднородного диффузионно-волнового уравнения. Рассматривается граничное управление, определяемое существенно ограниченными функциями, на отрезке. Анализируется конечномерная l -проблема моментов, к которой ранее на основе приближённого решения диффузионно-волнового уравнения была сведена поставленная задача оптимального управления (см. [4, 5, 11, 12]). Показано, что при выполнении требований корректности и разрешимости полученной проблемы моментов и существовании решения данной проблемы, имеющего минимальную норму при заданной величине времени управления, задаваемое ограничение на норму управления для рассматриваемой задачи не всегда может быть выполнено, в отличие от аналогичной задачи для уравнения диффузии целого порядка.

2. Постановка задачи. Рассматриваются системы, состояние которых описывается диффузионно-волновым уравнением, имеющим вид

$${}_0^C D_t^\alpha Q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[w(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right] - q(x) Q(x, t), \quad \alpha \in (0, 2), \quad (1)$$

где $Q(x, t)$ — состояние системы, $w(x)$ и $q(x)$ — некоторые функции, ${}_0^C D_t^\alpha$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования по времени, $t \geq 0$, $x \in [0, L]$, $(x, t) \in \Omega = [0, L] \times [0, \infty)$. Оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения Капуто (см. [9, § 2.4]):

$${}_0^C D_t^\alpha Q(x, t) = {}_0^{RL} D_t^\alpha \left[Q(x, t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\partial^k Q(x, 0+)}{\partial t^k} \frac{t^k}{k!} \right], \quad (2)$$

где ${}_0^{RL} D_t^\alpha$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования Римана—Лиувилля,

$${}_0^{RL} D_t^\alpha Q(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \{\alpha\})} \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial \tau^{[\alpha]+1}} \int_0^t \frac{Q(x, \tau) d\tau}{(t - \tau)^{\{\alpha\}}}.$$

Следует отметить, что определение (2) для дифференцируемых функций эквивалентно определению дробной производной, основанному на свёртке первой производной функции с дробно-степенной функцией. Такое определение впервые было предложено А. Н. Герасимовым в [2], а впоследствии — в работах М. Капуто [7] и М. М. Джрбашяна [3].

Предполагается, что функция $Q(x, t)$ дифференцируема по времени (в случае $\alpha \in (0, 1)$ достаточно требовать суммируемости данной функции по времени) при $t \geq 0$ и дважды дифференцируема по пространственной переменной на отрезке $[0, L]$. Функции $w(x) > 0$ и $q(x)$ считаются непрерывными на отрезке $[0, L]$.

Начальные условия для уравнения (1) ставятся в следующем виде:

$$\frac{\partial^k Q(x, 0+)}{\partial t^k} = \varphi^k(x), \quad x \in [0, L], \quad k = 0, \dots, [\alpha]. \quad (3)$$

Граничные условия для уравнения (1):

$$\left[b_i \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + a_i Q(x, t) \right]_{x=x^i} = u^i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где a_i и b_i — коэффициенты, $b_1 \leq 0$, $b_2 \geq 0$; $x^1 = 0$, $x^2 = L$. Граничные управления $u^{1,2}(t)$ считаются элементами пространства $L_\infty[0, T]$ и могут быть объединены в вектор $U(t) = (u^1(t), u^2(t))$.

Будем считать целью оптимального управления достижение системой желаемого состояния в заданный момент времени $T > 0$. Это условие может быть формально выражено в виде ограничения как на состояние, так и на его производную:

$$Q(x, T) = Q^*(x), \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q(x, T)}{\partial t} = A(x), \quad (6)$$

$x \in [0, L]$, $A(x)$ — заданная функция. Возможно и одновременно задавать условия на состояние и его производную по времени (см. [11]).

Задачу оптимального управления поставим в двух разновидностях следующим образом (см. [1]). Найти такие управления $u^{1,2}(t)$, что система, описываемая уравнением (1) с начальными условиями (3) и граничными условиями (4), достигнет при $t = T$ желаемого состояния, определяемого условиями (5) и/или (6) и при этом будет выполнено одно из условий:

- (a) норма управления $U(t)$ будет минимальной при заданном T (задача А);
- (b) время перехода в желаемое состояние будет минимальным при заданном ограничении на норму управления $\|U(t)\| \leq l$ ($l > 0$ — заданное число) (задача Б).

3. l -Проблема моментов для диффузионно-волнового уравнения. Ранее было показано, что поставленная выше задача оптимального управления для уравнения типа уравнения (1) сводится к следующей проблеме моментов (см. [4, 5, 11, 12]). Пусть задана система функций $g_n(t) \in L_{p'}[0, T]$ и набор чисел c_n , хотя бы одно из которых отлично от нуля. Пусть также задано число $l > 0$. Необходимо найти такую функцию $W(t) \in L_p(0, T]$ ($1/p + 1/p' = 1$), что выполняются следующие соотношения:

$$\int_0^T g_n(\tau) W(\tau) d\tau = c_n, \quad \dots, \quad (7)$$

$$\|W(t)\| \leq l, \quad (8)$$

где $W(\tau)$ — функция, содержащая в общем случае линейную комбинацию граничных управлений. В рассматриваемом в данной работе случае существенно ограниченных управлений $p' = 1$, $p = \infty$ и проблема моментов (7)–(8) корректна и разрешима для $\alpha > 0$.

Следует отметить, что в [4, 5, 11, 12], вообще говоря, рассматривались более частные или, наоборот, более общие случаи уравнения (1) и граничных условий (4). Так, в [4] рассматривалось уравнение (1) при $\alpha \in (0, 1)$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$, а в граничных условиях вместо управлений $u^i(t)$ задавалась сумма этих управлений с некоторыми известными функциями. В [5, 11, 12] использовались такие же граничные условия, а уравнение (1) рассматривалось при $\alpha \in (1, 2)$; кроме того, в левой части вместо дробной производной состояния стояло произведение её на некоторую функцию $r(x)$. Также в [12] желаемое состояние задавалось условием вида (6) при $A(x) = 0$. Тем не менее, проводя рассуждения аналогично работам [4, 5, 11, 12], можно убедиться, что рассматриваемая в данной работе задача оптимального управления для уравнения (1) с начальными условиями (3), граничными условиями (4) и условиями, определяющими желаемое состояние (5)–(6), также сводится к l -проблеме моментов (7)–(8). Теми же остаются и условия корректности и разрешимости получаемой проблемы моментов (поскольку вышеописанные отклонения не влияют на вид функций $g_n(t, T)$, а сказываются только на формулах для моментов и функции $W(t)$).

Далее рассматриваем 4 случая, отличающиеся заданием параметров в уравнении (1) и способом задания желаемого состояния:

- (i) в уравнении (1) $\alpha \in (0, 1)$ и желаемое состояние задаётся условием (5);
- (ii) в уравнении (1) $\alpha \in (1, 2)$ и желаемое состояние задаётся условием (5);
- (iii) в уравнении (1) $\alpha \in (1, 2)$ и желаемое состояние задаётся условием (6);
- (iv) в уравнении (1) $\alpha \in (1, 2)$ и желаемое состояние задаётся условием (5) и (6).

Для вышеперечисленных случаев ранее была обоснована корректность и разрешимость проблемы моментов, а также были получены явные выражения для моментов и функции $g_n(t, T)$

(см. [4, 5, 11, 12]). Для случая (i) эти выражения имеют вид

$$g_n(t, T) = \frac{E_{\alpha, \alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (9)$$

$$c_n(T) = Q_n^* - \varphi_n^0 E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (10)$$

Здесь и далее λ_n — собственные числа соответствующей задачи Штурма—Лиувилля для уравнения (1), а выражение Φ_n означает коэффициент разложения функции $\Phi(x)$ по системе собственных функций соответствующей задачи Штурма—Лиувилля для уравнения (1) (см. [4, 5, 11, 12]).

В случае (ii) аналогичные выражения имеют вид

$$g_n(t, T) = \frac{E_{\alpha, \alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}, \quad \alpha \in (1, 2), \quad (11)$$

$$c_n(T) = Q_n^* - \varphi_n^0 E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) - \varphi_n^1 T E_{\alpha, 2}(-\lambda_n T^\alpha). \quad (12)$$

В случае (iii) имеем формулы

$$g_n(t, T) = \frac{E_{\alpha, \alpha-1}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{2-\alpha}}, \quad \alpha \in (1, 2), \quad (13)$$

$$c_n(T) = A_n + \lambda_n T^{\alpha-1} \varphi_n^0 E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha) - \varphi_n^1 T E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha). \quad (14)$$

Наконец, в случае (iv) будут справедливы выражения

$$g_{2n-1}(t, T) = \frac{E_{\alpha, \alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}, \quad (15)$$

$$g_{2n}(t, T) = \frac{E_{\alpha, \alpha-1}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{2-\alpha}}, \quad \alpha \in (1, 2),$$

$$c_{2n-1}(T) = Q_n^* - \varphi_n^0 E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) - \varphi_n^1 T E_{\alpha, 2}(-\lambda_n T^\alpha), \quad (16)$$

$$c_{2n}(T) = A_n + \lambda_n T^{\alpha-1} \varphi_n^0 E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n T^\alpha) - \varphi_n^1 T E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha).$$

4. Основные результаты. В [4, 5, 11, 12] была обоснована корректность и разрешимость конечномерной проблемы моментов, получаемой в случаях (i)–(iv). При выполнении соответствующих условий удаётся решить проблему моментов, получив тем самым решение задачи А, т.е. управление из класса допустимых, имеющее наименьшую норму. Для решения задачи Б в общем случае необходимо найти решение неравенства

$$\Lambda_N(T) \leq l, \quad (17)$$

где $\Lambda_N(T)$ — норма оптимального управления, найденного в результате решения задачи А, зависящая от параметра T . Решением задачи Б считается наименьшее действительное положительное число T^* , для которого справедливо неравенство (17) (см. [1, гл. 3]). Значение $\Lambda_N(T)$ при этом может быть вычислено по формуле

$$\Lambda_N(T) = \frac{1}{\min_{\xi_i, i=1, \dots, N} \rho_\xi(T)} = \frac{1}{\rho_{\xi^*}(T)}, \quad (18)$$

(см. [1, гл. 3]), где

$$\rho_\xi = \int_0^T \left| \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \left(g_i(t) - \frac{c_i(T)}{c_N(T)} g_N(t) \right) + \frac{1}{c_N(T)} g_N(t) \right| dt, \quad (19)$$

ξ_i — некоторые числа, ξ_i^* — числа, при которых достигается минимум функции $\rho_\xi(T)$ по ξ_i . Учитывая (18), можно переписать условие (17) в виде

$$\rho_{\xi^*}(T) \geq \frac{1}{l}. \quad (20)$$

Функция (19) неотрицательна и непрерывно зависит от аргумента T . Если подынтегральная функция в выражении (19) не зависит от T , то функция $\rho_{\xi^*}(T)$ монотонно возрастает с ростом T . Аналогичная тенденция проявляется и в случае, если функции $g_i(t)$ не зависят от параметра T ,

а моменты зависят достаточно слабо. Именно такая ситуация имеет место для систем целого порядка, описываемых обычным уравнением диффузии. Для них всегда можно подобрать такое значение T , что условие (20) окажется выполненным для любого заданного $l > 0$ (см. [1, гл. 4]).

В случае же, когда подынтегральная функция в выражении (19) также зависит от аргумента T , как это имеет место для рассматриваемых систем дробного порядка, функция $\rho_{\xi^*}(T)$ уже может не быть монотонно возрастающей по T . Более того, ниже будет показано, что данная функция ограничена.

Теорема 1. Пусть функции $g_n(t, T)$ и моменты $c_n(T)$ определяются либо формулами (9)–(10), либо формулами (11)–(12) (что соответствует рассмотрению вышеперечисленных случаев (i) и (ii)) и при этом $c_N(T) \neq 0$ для заданного N , $T > 0$. Тогда значение функции (19) при любом фиксированном N будет ограничено, а при $T \rightarrow \infty$ справедлива следующая оценка:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \rho_{\xi^*}(T) \leq \sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i| \left(\frac{1}{\lambda_i} + \left| \frac{Q_i^*}{Q_N^* \lambda_N} \right| \right) + \frac{1}{|Q_N^* \lambda_N|}. \quad (21)$$

Доказательство. Для функции (19) справедлива следующая оценка:

$$\rho_{\xi} \leq \sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i| \left(\int_0^T g_i(t) dt + \left| \frac{c_i(T)}{c_N(T)} \right| \int_0^T g_N(t) dt \right) + \frac{1}{|c_N(T)|} \int_0^T g_N(t) dt, \quad (22)$$

где учтено, что функции $g_i(t)$ неотрицательны на интервале $(0, T)$. Используя формулы (9) или (11) и представление функции Миттаг-Леффлера в виде равномерно и абсолютно сходящегося степенного ряда

$$E_{\alpha, \beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (23)$$

(см. [9, § 1.8]), можно вычислить интегралы в формуле (22) и получить следующую оценку:

$$\rho_{\xi} \leq \sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i| \left(\frac{1 - E_{\alpha}(-\lambda_i T^{\alpha})}{\lambda_i} + \left| \frac{c_i(T)}{c_N(T)} \right| \frac{1 - E_{\alpha}(-\lambda_N T^{\alpha})}{\lambda_N} \right) + \frac{1}{|c_N(T)|} \frac{1 - E_{\alpha}(-\lambda_N T^{\alpha})}{\lambda_N}. \quad (24)$$

Функции Миттаг-Леффлера в (24) монотонно убывают с ростом T , стремясь к нулю (см. [9, § 1.8]). Моменты, определяемые формулой (10), также содержат однопараметрические функции Миттаг-Леффлера, убывающие с ростом T . Моменты, определяемые формулой (12), содержат, кроме того, слагаемые вида $\varphi_n^1 T E_{\alpha, 2}(-\lambda_n T^{\alpha})$. Для оценки их поведения можно воспользоваться асимптотикой

$$E_{\alpha, \beta}(z) = - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-1-p}), \quad z \rightarrow -\infty, \quad (25)$$

где $p = [2/\alpha]$ (см. [8]). Учитывая, что $\alpha > 1$ в случае (ii), из формулы (25) можно получить следующее соотношение:

$$T E_{\alpha, 2}(-\lambda_n T^{\alpha}) \sim \sum_{k=1}^p T^{1-\alpha k} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \quad (26)$$

Тогда из формул (10) и (12) получим, что $c_i(T) \rightarrow Q_i^*$ при $T \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, N$. Подставляя полученные оценки в формулу (24), получим оценку (21).

Кроме того, из формулы (24) с учётом выражений (10) и (12) следует, что при фиксированном T , $0 < T < \infty$, выражение в правой части формулы (24) определено и ограничено сверху. Теорема доказана. \square

Теорема 2. Пусть функции $g_n(t, T)$ и моменты $c_n(T)$ определяются формулами (13)–(14) (что соответствует рассмотрению вышеописанного случая (iii)) и при этом $c_N(T) \neq 0$ для заданного N , $T > 0$. Тогда значение функции (19) при любом фиксированном N будет ограничено, а при $T \rightarrow \infty$ будет справедлива следующая оценка:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \rho_{\xi^*}(T) \leq r(T), \quad r(T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \quad (27)$$

Доказательство. Воспользуемся, как и выше, оценкой (22), обозначив правую часть этой формулы $r(T)$, и вычислим присутствующие в ней интегралы с учётом формулы (13). Для этого воспользуемся представлением (23) и, проведя необходимые вычисления, получим:

$$r(T) = T^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i| \left(E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i T^\alpha) + \left| \frac{c_i(T)}{c_N(T)} \right| E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_N T^\alpha) \right) + \frac{T^{\alpha-1}}{|c_N(T)|} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_N T^\alpha). \quad (28)$$

Каждое из слагаемых в полученном выражении (с учётом выражений (14)) определено и ограничено сверху при любом фиксированном положительном значении $T < \infty$. Воспользовавшись асимптотикой (25), можно показать, что при $T \rightarrow \infty$ каждое из слагаемых в формуле (28) стремится к нулю. Теорема доказана. \square

Теорема 3. Пусть функции $g_n(t, T)$ и моменты $c_n(T)$ определяются формулами (15)–(16) (что соответствует рассмотрению вышеописанного случая (iv)) и при этом $c_N(T) \neq 0$ для заданного $N, T > 0$. Тогда значение функции (19) при любом фиксированном N будет ограничено, а при $T \rightarrow \infty$ будет справедлива следующая оценка:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \rho_{\xi^*}(T) \leq \sum_{i=1}^{N/2} \frac{|\xi_{2i-1}|}{\lambda_{2i-1}}. \quad (29)$$

Доказательство. Аналогично доказательствам теорем 1 и 2 используем оценку (22). Примем во внимание, что в данном случае количество моментов и функций $g_i(t)$ и, соответственно, число N чётное (что обусловлено двумя условиями, определяющими желаемое состояние). Поэтому перепишем формулу (22) в виде

$$\begin{aligned} \rho_{\xi} \leq & \sum_{i=1}^{N/2} |\xi_{2i-1}| \left(\int_0^T g_{2i-1}(t) dt + \left| \frac{c_{2i-1}(T)}{c_N(T)} \right| \int_0^T g_N(t) dt \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{N/2-1} |\xi_{2i}| \left(\int_0^T g_{2i}(t) dt + \left| \frac{c_{2i}(T)}{c_N(T)} \right| \int_0^T g_N(t) dt \right) + \frac{1}{|c_N(T)|} \int_0^T g_N(t) dt. \quad (30) \end{aligned}$$

Пользуясь формулами (15) и представлением (23), проведём, как и выше, вычисления интегралов в формуле (30). В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} \rho_{\xi} \leq & \sum_{i=1}^{N/2} |\xi_{2i-1}| \left(\frac{1 - E_{\alpha}(-\lambda_{2i-1} T^\alpha)}{\lambda_{2i-1}} + \left| \frac{c_{2i-1}(T)}{c_N(T)} \right| T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_N T^\alpha) \right) + \\ & + T^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{N/2-1} |\xi_{2i}| \left(E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_{2i} T^\alpha) + \left| \frac{c_{2i}(T)}{c_N(T)} \right| E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_N T^\alpha) \right) + \frac{T^{\alpha-1}}{|c_N(T)|} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_N T^\alpha). \quad (31) \end{aligned}$$

Все слагаемые, входящие в правую часть неравенства (31) (с учётом формул (16)) при конечном положительном T и $\alpha \in (1, 2)$ определены и ограничены. При $T \rightarrow \infty$, пользуясь асимптотикой (25), можно, по аналогии с доказательствами теорем 1 и 2, убедиться, что последнее слагаемое и вторая сумма в формуле (31) сходятся к нулю, а первая сумма даст оценку (29). Теорема доказана. \square

Следствие. Из доказанных выше теорем 1–3 следует, что величина ρ_{ξ} не увеличивается монотонно с ростом T , а ограничена сверху на интервале $(0, T)$ при любом конечном $T > 0$ и при $T \rightarrow \infty$. Поэтому всегда можно указать такое число $l > 0$, что неравенство (20) не будет выполнено. Следовательно, в этом случае задача Б не будет иметь решения, в то время как задача А будет иметь решение.

5. Заключение. В работе рассмотрено использование метода моментов для исследования задач оптимального граничного управления системами дробного порядка с распределёнными параметрами, поведение которых описывается диффузионно-волновым уравнением. Проанализировано несколько способов задания желаемого состояния и получены оценки на величину функционала, обратного пропорционального норме оптимального управления. Показано, что ограниченность данного функционала может приводить к ситуациям, когда задача поиска управления с минимальной нормой разрешима, а задача построения управления с максимальным быстродействием при заданном ограничении на норму управления не разрешима в силу невозможности выполнить упомянутое ограничение. Это отличает рассмотренные системы дробного порядка от их аналогов, описываемых обычным уравнением диффузии или волновым уравнением (см. [1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределёнными параметрами. — М.: Наука, 1965.
2. *Герасимов А. Н.* Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения// Прикл. мат. мех. — 1948. — 12,, № 3. — С. 251–260.
3. *Джрбашян М. М., Нерсисян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка// Изв. АН АрмССР. Мат. — 1968. — 3, № 1. — С. 3–29.
4. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Оптимальное по быстродействию граничное управление для систем, описываемых уравнением диффузии дробного порядка// Автомат. телемех. — 2018. — № 5. — С. 137–152.
5. *Постнов С. С.* Оптимальное управление для систем, моделируемых диффузионно-волновым уравнением// Владикавказ. мат. ж. — 2022. — 24, № 3. — С. 108–119.
6. *Azamov A. A., Bakhramov J. A., Akhmedov O. S.* On the Chernous'ko time-optimal problem for the equation of heat conductivity in a rod// Ural Math. J. — 2019. — 5, № 1. — P. 13–23.
7. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, II// Geophys. J. Roy. Astron. Soc. — 1967. — 13. — P. 529–539.
8. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F. et al.* Mittag–Leffler Functions, Related Topics and Applications. — Berlin: Springer, 2014.
9. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
10. *Mophou G. M.* Optimal control of fractional diffusion equation// Comp. Math. Appl. — 2010. — 61, № 1. — P. 68–78.
11. *Postnov S.* Optimal damping problem with additional terminal state condition in diffusion-wave processes// Proc. 2 Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency. — IEEE, 2021. — P. 1–5.
12. *Postnov S.* Optimal damping problem for diffusion-wave equation// in: Stability and Control Processes (*Smirnov N., Golovkina A.*, eds.). — Cham: Springer, 2022. — P. 127–135.
13. *Tang Q., Ma Q.* Variational formulation and optimal control of fractional diffusion equations with Caputo derivatives// Adv. Differ. Equations. — 2015. — 2015. — 283.
14. *Zhou Z., Gong W.* Finite element approximation of optimal control problems governed by time fractional diffusion equation// Comp. Math. Appl. — 2016. — 71, № 1. — P. 301–318.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Постнов Сергей Сергеевич

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

E-mail: postnov.sergey@inbox.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 115–122
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-115-122

УДК 517.956.22, 517.956.8

О СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© 2023 г. С. М. СИТНИК

Аннотация. В 1982 г. Е. М. Ландисом была поставлена задача о точных оценках экспоненциальной скорости убывания решений стационарного уравнения Шрёдингера. Эта задача в первоначальной постановке через несколько лет была решена Воронежским математиком В. З. Мешковым. Он построил пример решения, которое на бесконечности убывает сверхлинейно, что даёт отрицательный ответ на первоначальный вопрос в задаче Е. М. Ландиса. В данной работе доказано, что для некоторых потенциалов специального вида тем не менее ответ на вопрос в задаче Е. М. Ландиса оказывается положительным. Рассмотрены также некоторые обобщения и современные результаты в этом направлении.

Ключевые слова: стационарное уравнение Шрёдингера, оператор Штурма–Лиувилля, оператор преобразования, задача Ландиса, априорная оценка, ряд Неймана, функция Бесселя.

ON THE DECAY RATE OF SOLUTIONS TO THE STATIONARY SCHRÖDINGER EQUATION WITH A POTENTIAL DEPENDING ON ONE VARIABLE

© 2023 S. M. SITNIK

ABSTRACT. In 1982, E. M. Landis posed the problem of exact estimates for the exponential decay rate of solutions to the stationary Schrödinger equation. A few years later, this problem in its original formulation was solved by the Voronezh mathematician V. Z. Meshkov. He constructed an example of a solution that decreases superlinearly at infinity, which gives a negative answer to the original question in Landis' problem. In this paper, we prove that for some potentials of a special form, nevertheless, the answer to the question in Landis' problem may be positive. Some generalizations and modern results in this direction are also presented.

Keywords and phrases: stationary Schrödinger equation, Sturm–Liouville operator, transformation operator, Landis problem, a priori estimate, Neumann series, Bessel function.

AMS Subject Classification: 35A22, 35B40

1. Введение. В заметке Е. М. Ландиса [10] поставлена следующая задача: доказать, что решение стационарного уравнения Шрёдингера с ограниченным потенциалом

$$\begin{aligned} \Delta u(x) - q(x)u(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |x| \geq R_0 > 0, \\ |q(x)| &\leq \lambda^2, \quad \lambda > 0, \quad u(x) \in C^2(|x| \geq R_0), \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяющее оценке вида

$$|u(x)| \leq \text{const} \cdot e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}, \quad \varepsilon > 0,$$

тождественно равно нулю.

В. З. Мешков в известных работах [6, 7] дал отрицательный ответ на данный вопрос. При этом было доказано существование контрпримеров с решениями, которые являются комплексными функциями. Более того, было показано, что если усилить оценку в гипотезе Е. М. Ландиса до следующей:

$$|u(x)| \leq \text{const} \cdot e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|^{4/3}}, \quad \varepsilon > 0,$$

то ответ будет положительным: таких ненулевых решений не существует. В последнее время интерес к этим результатам не пропал, тематика, связанная с гипотезой Е. М. Ландиса и результатами В. З. Мешкова, активно развивается, причём в том числе и ведущими математиками в области дифференциальных уравнений: Ж. Бургейном, К. Кёнигом и рядом других (см. [13, 15, 17, 18, 21]). Основным вопросом остаётся исследование гипотезы Е. М. Ландиса для действительных решений, причём ответ на этот вопрос до сих пор не удалось получить. В связи с вышеизложенным представляется обоснованным название *задача Ландиса—Мешкова* в следующей формулировке.

Задача Ландиса—Мешкова. *Верно ли, что для заданных области D и положительных функций $r(x)$, $s(x)$ только нулевое классическое решение стационарного уравнения Шрёдингера*

$$\Delta u(x) - q(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |q(x)| \leq r(x), \quad (2)$$

удовлетворяет оценке

$$|u(x)| \leq s(x)? \quad (3)$$

Из результатов В. З. Мешкова следует отрицательный ответ в случае комплексных решений, когда D — внешность некоторого круга, $q(x) = \lambda^2$, $s(x) = e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}$, $\varepsilon > 0$, и положительный ответ в случае комплексных решений, если D — внешность некоторого круга, $q(x) = \lambda^2$, $s(x) = e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|^{4/3}}$, $\varepsilon > 0$. Для действительных решений даже в этих частных случаях ответы неизвестны.

Далее будет показано, что несмотря на общее отрицательное решение В. З. Мешкова для первоначальной формулировки задачи Е. М. Ландиса, тем не менее для некоторых классов потенциалов проблема решается положительно, причём для действительных решений. При этом используется метод операторов преобразования специального вида (см. [3, 11, 12, 22]).

Далее эта задача решена для случая потенциала, зависящего только от одной переменной: $q(x) = q(x_i)$, где $1 \leq i \leq n$; далее для определённости считаем, что $i = 1$. Для этого случая в работе доказано обобщение утверждения (1) для уравнения

$$\Delta u - q(x_1)u = 0, \quad (4)$$

в котором потенциал $q(x_1)$ ограничен произвольной неубывающей функцией. Решение основано на использовании операторов преобразования, сводящих уравнение (4) к уравнению Лапласа.

2. Применение операторов преобразования.

2.1. Условия задачи (1) выполнены в полупространстве $x_1 \geq R_0$ и инвариантны относительно замены переменных $z = x_1 - R_0$. Поэтому будем рассматривать задачу (1) в полупространстве $z \geq 0$ или, сохраняя для переменной x_1 прежнее обозначение, $x_1 \geq 0$. Будет доказано, что решение задачи (1) равно нулю в полупространстве $x_1 \geq 0$, а тогда в силу теоремы Кальдерона о единственности продолжения (см. [9, гл. 6, с. 14]) такое решение тождественно равно нулю во всём пространстве \mathbb{R}^n .

Обозначим через $T(\delta)$ множество функций, удовлетворяющих следующим условиям (5)–(7) в полупространстве $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0\}$:

$$u(x) \in C^2(\mathbb{R}_+^n), \quad (5)$$

$$|u(x)| \leq c_1 e^{-\delta|x|}, \quad \delta > 0, \quad (6)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \leq c_2 e^{-\delta|x|}. \quad (7)$$

Построим для функций из $T(\lambda + \varepsilon)$ такой оператор преобразования

$$Su(x) = u(x) + \int_{x_1}^{\infty} K(x_1, t)u(t, x') dt \quad (8)$$

(см. [3, 11, 12, 22]), чтобы выполнялось равенство

$$S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - q(x_1)u \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} Su, \quad |q(x_1)| \leq \lambda^2, \quad (9)$$

где, как обычно, через (x_1, x') обозначено (x_1, x_2, \dots, x_n) . Подстановка выражения (8) в формулу (9) приводит к равенствам

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2} = q(t)K, \quad (10)$$

$$3 \frac{\partial K(x_1, x_1)}{\partial x_1} = q(x_1), \quad (11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(x_1, t) \frac{\partial u(t, x_1)}{\partial t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial K(x_1, t)}{\partial t} u(t, x_1) = 0. \quad (12)$$

Выполняя стандартную замену переменных

$$w = \frac{t + x_1}{2}, \quad v = \frac{t - x_1}{2},$$

сведем систему (10)-(11) к более простой (выполнение условия (12) на решениях задачи (1) будет показано позже):

$$\frac{\partial^2 K}{\partial w \partial v} = q(w + v)K, \quad (13)$$

$$K(w, 0) = \frac{1}{3} \int_0^w q(s) ds, \quad (14)$$

которая, в свою очередь, является следствием интегрального уравнения

$$K(w, v) = \frac{1}{3} \int_0^w q(s) ds + \int_0^w d\alpha \int_0^v q(\alpha + \beta) K(\alpha, \beta) d\beta, \quad |q| \leq \lambda^2, \quad w \geq v \geq 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) отличается от обычно используемого при рассмотрении операторов преобразования на бесконечном интервале интегрального уравнения изменением области интегрирования с полуоси (w, ∞) на отрезок $(0, w)$, что влечёт экспоненциальный рост ядра $K(x_1, t)$. Далее доказывается, что такое ядро существует и оператор преобразования с таким ядром (8) определён на множестве $T(\lambda + \varepsilon)$. Возможность сведения задачи (10)–(12) к неэквивалентным интегральным уравнениям вытекает из недоопределённости задачи Коши (13)–(14).

Следует отметить, что интегральное уравнение (15) должно быть решено в более широкой области без ограничений $w \geq v$, иначе не будет определено ядро под знаками интегралов. Доказательство существования решения в этой более широкой области проводится так же, как приведённое ниже доказательство. На этот нюанс при доказательстве существования решения интегрального уравнения (15) обычно не обращают внимания (замечание А. В. Боровских).

Лемма 1. *Существует единственное непрерывное решение уравнения (15), удовлетворяющее неравенству*

$$|K(w, v)| \leq \frac{\lambda}{3} \sqrt{\frac{w}{v}} I_1(2\lambda \sqrt{wv}), \quad (16)$$

где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя. При этом на допустимом потенциале $q(x_1) \equiv \lambda^2$ в (16) достигается знак равенства.

Замечание 1. В дальнейшем символом c обозначаются абсолютные положительные постоянные, величина которых не играет роли.

Доказательство. Введём обозначения

$$K_0(w, v) = \frac{1}{3} \int_0^w q(s) ds, \quad PK(w, v) = \int_0^w d\alpha \int_0^v q(\alpha + \beta) K(\alpha + \beta) d\beta.$$

Тогда уравнение (15) запишется в виде $K = K_0 + PK$. Будем искать его решение в виде ряда Неймана

$$K = K_0 + PK_0 + P^2K_0 + \dots \quad (17)$$

Для слагаемых ряда (17) с учётом условия $|q(x_1)| \leq \lambda^2$ получаем

$$|P^n K_0(w_0 v)| \leq \frac{1}{3} (\lambda^2)^{n+1} \frac{w^{n+1}}{(n+1)!} \frac{v^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Отсюда вытекает неравенство (16), если использовать представление функции $I_1(x)$ в виде ряда

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

Оценка (16) является точной, так как при $q(x_1) \equiv \lambda^2$, неравенства (18) превращаются в равенства для всех целых $n \geq 0$. Лемма доказана. \square

Лемма 2. В терминах переменных x_1, t справедлива оценка

$$|K(x_1, t)| \leq ct e^{\lambda t}.$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство

$$\left| \frac{1}{x} I_1(x) \right| \leq c e^x, \quad x \geq 0,$$

для проверки истинности которого надо разобрать случаи (i) $x \geq 1$, (ii) $0 \leq x \leq 1$ и использовать известную асимптотику функции $I_1(x)$ при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow +0$ (см. [2]). Отсюда с помощью очевидных неравенств

$$\frac{x_1 + t}{2} \leq t, \quad 2\sqrt{wv} = \sqrt{t^2 - x_1^2} \leq t$$

из оценки (16) следует утверждение леммы. \square

Из леммы 2 следует, что выражение (8) определено на функциях из $T(\lambda + \varepsilon)$. Покажем, что выражение (8) в действительности задаёт оператор преобразования на $T(\lambda + \varepsilon)$. Для этого осталось проверить соотношение (12). Из того, что $u(x) \in T(\lambda + \varepsilon)$ и из леммы вытекает равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(x_1, t) \frac{\partial u(t, x_1)}{\partial t} = 0.$$

Поэтому осталось доказать, что если $u(x) \in T(\lambda + \varepsilon)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial K(x_1, t)}{\partial t} u(x_1, t) = 0.$$

Последнее соотношение следует из оценки

$$\left| \frac{\partial K(x_1, t)}{\partial t} \right| \leq ct e^{\lambda t}. \quad (19)$$

Для доказательства неравенства (19) нужно перейти к переменным w, v и с использованием уже установленных оценок для ядра $K(x_1, t)$ оценить производные $\partial K / \partial w, \partial K / \partial v$, дифференцируя уравнение (15). Так как

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial K}{\partial w} + \frac{\partial K}{\partial v} \right),$$

то мы придём к (19).

2.2. Покажем, что любое решение задачи (1) принадлежит $T(\lambda + \varepsilon)$ и, следовательно, на таких решениях определён оператор (8). Для этого необходимо проверить выполнение условия (7).

Лемма 3. Пусть функция $u(x) \in C^2(|x| \geq R_0)$ является решением задачи (1). Тогда найдётся такая постоянная $c > 0$, что

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \leq c e^{-(\lambda + \varepsilon)|x|}.$$

Доказательство. В силу априорных оценок Шаудера в замкнутом шаре $B(x, 1)$ единичного радиуса с центром в точке x , $|x| \geq R_0 + 1$, имеем (см. [8, теорема 33, II])

$$u_1 \leq c \left(u_{1,\lambda}^{1/(1+\lambda)} \cdot u_0^{\lambda/(\lambda+1)} + u_0 \right),$$

где введены обозначения

$$u_0 = \|u(x)\|_{C^0(B(x,1))}, \quad u_1 = \|u(x)\|_{C^1(B(x,1))};$$

$u_{1,\lambda}$ есть сумма коэффициентов Гёльдера функции $u(x)$ и её производных первого порядка $\partial u / \partial x_i$, $1 \leq i \leq n$. Отсюда следует, что

$$\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right| \leq c \left(u_{1,\lambda}^{1/(1+\lambda)} \cdot u_0^{\lambda/(\lambda+1)} + u_0 \right). \quad (20)$$

Отметим, что поскольку выполнены все условия из [8, утверждение 33, V], то константа c в формуле (20) не зависит от x .

Из результатов Морри (см. [9, теорема 39, IV]) вытекает оценка для величины u_{1,λ_1} :

$$u_{1,\lambda} \leq c \left[\|u\|_{L_2(B(x,1))} + \|qu\|_{L_2(B(x,1))} \right], \quad (21)$$

причём постоянная в (21) по-прежнему не зависит от x . Из условий задачи $|q(x_1)| \leq \lambda^2$, следовательно, с помощью теоремы о среднем получаем из (21)

$$u_{1,\lambda_1} \leq c \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq c^1 e^{-(\lambda + \varepsilon)|x|}.$$

Подставляя последнее неравенство в (20), получаем

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \leq c \left[\left(e^{-(\lambda + \varepsilon)|x|} \right)^{\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda}} + e^{-(\lambda + \varepsilon)|x|} \right] \leq c e^{-(\lambda + \varepsilon)|x|}.$$

Таким образом, требуемое неравенство установлено для $|x_1| \geq R_0 + 1$. Так как множество $R_0 \leq |x| \leq R_0 + 1$ является компактом в \mathbb{R}^n , то это неравенство справедливо и при $|x| \geq R_0$. Лемма 3 доказана. \square

Выполняя опять замену координат $z = x_1 - R_0$, получаем, что лемма 3 справедлива в полупространстве $x_1 \geq 0$ (мы переобозначим z через x_1).

2.3. Применим к уравнению (4) оператор S . Из тождества (9) и перестановочности S с производными $\partial^2 u / \partial x_i^2$, $2 \leq i \leq n$, получаем, что в полупространстве \mathbb{R}_+^n

$$S(\Delta u - q(x_1)u) = \Delta S u = 0.$$

Обозначим функцию Su через v . Из (8), (15) следует, что если $u(x) \in C^2(\mathbb{R}_+^n)$, $q(x) \in C(\mathbb{R}_+^n)$, то $v(x) \in C^2(\mathbb{R}_+^n)$. Покажем, что $v(x)$ экспоненциально убывает в \mathbb{R}_+^n при $|x| \rightarrow \infty$ и, следовательно, равна нулю.

Лемма 4. Пусть $u(x) \in T(\lambda + \varepsilon)$. Тогда для $x \in \mathbb{R}_+^n$

$$|v| = |Su| \leq c |x| e^{-\varepsilon|x|}, \quad \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Из представления (8) и леммы 3 получаем

$$|Su| \leq |u(x)| + \int_{x_1}^{\infty} t e^{\lambda t} c e^{-(\lambda+\varepsilon)\sqrt{t^2+|x_1|^2}} dt \leq c \left(e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|} + \int_{x_1}^{\infty} t e^{-(\lambda+\varepsilon)\sqrt{t^2+|x_1|^2}} dt \right).$$

Вычисляя интеграл с помощью замены переменных по формуле $y = \sqrt{t^2 + |x_1|^2}$ с последующим интегрированием по частям, получаем требуемую оценку. Лемма доказана. \square

Итак, $v(x) = 0$ в \mathbb{R}_+^n . Определим на $T(\lambda + \varepsilon)$ обратный к S оператор P по формуле

$$Pu(x) = u(x) + \int_{x_1}^{\infty} N(x_1, t)u(t, x_1) dt.$$

Тогда для ядра $N(x_1, t)$ справедливы леммы 1–3. Кроме того, если $Su \in T(\lambda + \varepsilon)$, то

$$PSu(x) = u(x). \quad (22)$$

Так как, очевидно, $0 \in T(\lambda + \varepsilon)$, то, применяя (22) к обеим частям установленного в \mathbb{R}_+^n равенства $Su = 0$, получим $u = 0$ в \mathbb{R}_+^n . Выше было показано, что это влечёт $u \equiv 0$ во всём \mathbb{R}^n .

Замечание 2. Переход к полупространству \mathbb{R}_+^n использовался при доказательстве потому, что выражение (8) не определено в области, получаемой пересечением шара $|x| \leq R_0$ и бесконечного полуцилиндра $\{|x_1| \leq R_0, |x_1| \leq R_0\}$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Любое решение $u(x) \in C^2(|x| > R_0)$ стационарного уравнения Шрёдингера с ограниченным потенциалом

$$\begin{aligned} \Delta u(x) - q(x_1)u &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |x| \geq R_0 > 0, \\ q(x_1) \in C(|x| \geq R_0), \quad |q(x_1)| &\leq \lambda^2, \quad \lambda > 0, \end{aligned}$$

удовлетворяющее оценке

$$|u(x)| \leq \text{const } e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}, \quad \varepsilon > 0,$$

есть тождественный нуль.

3. Возможные обобщения. Использованная техника операторов преобразования позволяет усилить полученный результат. Будем обозначать через $L_{2,\text{loc}}(x_1 \geq R_0)$ множество функций, для которых при любом $x_1 \geq R_0$ конечен интеграл

$$\int_{R_0}^{x_1} \psi^2(s) ds.$$

Далее, пусть задана неотрицательная функция $g(x)$, для которой интеграл

$$\int_{x_1}^{\infty} t g(t, x_1) dt = p(x)$$

конечен при любом $x_1 \geq R_0$ и для некоторой постоянной $\alpha > 0$

$$|p(x)| \leq c \cdot \exp(-\alpha|x|^\delta), \quad \delta > 0.$$

Тогда по схеме доказательства предыдущей теоремы может быть установлен следующий факт.

Теорема 2. Пусть $\psi(x_1) \in L_{2,\text{loc}}(x_1 \geq R_0)$ — неубывающая функция, а функция $g(x)$ удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Тогда любое решение уравнения

$$\begin{aligned} \Delta u(x) - q(x_1)u &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |x| \geq R_0 > 0, \\ |q(x_1)| &\leq \psi^2(x_1), \end{aligned}$$

для которого выполнено неравенство

$$\psi(x_1)|u(x)| \leq \text{const } e^{-\psi(x_1)|x|}g(x), \quad g(x) \geq 0,$$

есть тождественный нуль.

В условиях теоремы 1 нужно положить $g(x) = e^{-\varepsilon|x|}$. Примером другой допустимой $g(x)$ является функция $g(x) = \exp(-\varepsilon|x|^\delta)$, $0 < \delta < 1$. Этот случай является также примером обобщённой задачи Ландиса—Мешкова (2)–(3).

По аналогичной схеме может быть также рассмотрен случай потенциала, зависящего только от радиальной переменной. Ответ в первоначальной формулировке задачи Е. М. Ландиса здесь тоже положительный, после перехода к сферическим координатам нужно использовать операторы преобразования для возмущённого оператора Бесселя, подобные тем, что были рассмотрены выше (см. [3, 11, 12, 22]).

Результаты данной работы переносятся также на класс многомерных специальных потенциалов, которые представляются в виде сумм одномерных потенциалов рассмотренных типов по каждой переменной.

Возможно рассмотрение обобщений задачи Е. М. Ландиса на случай более общих дифференциальных уравнений и соответствующих оценок роста решений. Например, представляет интерес исследование поставленных вопросов для нелинейного уравнения p -лапласиана (см. [16, 19]); эта задача возникла во время обсуждения доклада автора на семинаре кафедры дифференциальных уравнений МГУ с проф. А. А. Коньковым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1973.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. — М.: Наука, 1966.
3. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
4. Левин Б. Я. Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. — 187–190. — 106.
5. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля. — Киев: Наукова думка, 1972.
6. Мешков В. З. Весовые дифференциальные неравенства и их применение для оценок скорости убывания на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1989. — 190. — С. 139–158.
7. Мешков В. З. О возможной скорости убывания на бесконечности решений уравнений в частных производных второго порядка // Мат. сб. — 1991. — 182, № 3. — С. 364–383.
8. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977.
9. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
10. Олейник О. А., Шубин М. А. Дифференциальные уравнения и их приложения // Усп. мат. наук. — 1982. — 37, № 6 (228). — С. 278–281.
11. Ситник С. М. Об одном интегральном уравнении в теории операторов преобразования // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — 60, № 8. — С. 1428–1438.
12. Ситник С. М., Шижкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
13. Bourgain J., Kenig C. E. On localization in the continuous Anderson–Bernoulli model in higher dimension // Invent. Math. — 2005. — 161, № 2. — P. 389–426.
14. Calderon A. P. Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations // Am. J. Math. — 1958. — 80. — P. 16–36.
15. Davey B., Kenig C., Wang J. N. The Landis conjecture for variable coefficient second-order elliptic PDEs // Trans. Am. Math. Soc. — 2017. — 369, № 11. — P. 8209–8237.
16. Drabek P., Kufner A., Nicolosi F. Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities. — Berlin–New York: de Gruyter, 1997.
17. Kenig C. E. Some recent quantitative unique continuation theorems // in: Sémin. Équ. Dériv. Partielles. — Palaiseau: Ec. Polytech. Cent. Math., 2006. — P. 1–10.

18. *Kenig C. E., Silvestre L., Wang J. N.* On Landis' conjecture in the plane// Commun. Part. Differ. Equ. — 2015. — 40, № 4. — P. 766–789.
19. *Lindqvist P.* Notes on the p -Laplace equation. — Trondheim, Norway: Norwegian Univ. Sci. Techn., 2006.
20. *Morrey C. B.* Second order elliptic systems of differential equations// Proc. Natl. Acad. U.S.A. — 1953. — 39. — P. 201–206.
21. *Rossi L.* The Landis conjecture with sharp rate of decay/ [arXiv: 1807.00341](https://arxiv.org/abs/1807.00341) [math.AP].
22. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. — Amsterdam: Elsevier, 2020.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ситник Сергей Михайлович

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: sitnik@bsu.edu.ru



О ТОЧНОЙ ОЦЕНКЕ КОЛИЧЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПРЯМЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ СТЕПЕНИ n

© 2023 г. А. Д. УШХО, В. Б. ТЛЯЧЕВ, Д. С. УШХО

Аннотация. Показано, что полиномиальное векторное поле n -й степени, имеющее два инвариантных множества, каждое из которых состоит из $n - 1$ параллельных между собой действительных инвариантных прямых, имеет не более $2n + 4$ инвариантных прямых при нечетном $n \geq 3$.

Ключевые слова: полиномиальное векторное поле, инвариантная прямая, инвариантное множество, узловая точка, прямоугольник, золотое сечение.

ON AN EXACT ESTIMATE OF THE NUMBER OF REAL INVARIANT LINES OF POLYNOMIAL VECTOR FIELDS OF DEGREE n

© 2023 A. D. USHKHO, V. B. TLYACHEV, D. S. USHKHO

ABSTRACT. In this paper, we prove that a polynomial vector field of degree n that has two invariant sets, each of which consists of $n - 1$ pairwise real invariant straight lines, has at most $2n + 4$ invariant straight lines, where n is odd and $n \geq 3$.

Keywords and phrases: polynomial vector field, invariant straight line, invariant set, nodal point, rectangle, golden ratio.

AMS Subject Classification: 34C14, 34A26

1. Введение и предварительные сведения. В [3] дана оценка максимального числа $\alpha(n)$ инвариантных прямых системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^n P_i(x, y) \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^n Q_i(x, y) \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где

$$P_i(x, y) = \sum_{r+s=i} a_{rs} x^r y^s, \quad Q_i(x, y) = \sum_{r+s=i} b_{rs} x^r y^s, \quad a_{rs}, b_{rs} \in \mathbb{R}, \quad (P, Q) = 1, \quad \deg(P^2 + Q^2) = 2n.$$

Это число удовлетворяет двойному неравенству

$$2n + 1 + \frac{1 - (-1)^n}{2} \leq \alpha(n) \leq 3n - 1.$$

А. Д. Ушко благодарен Физическому обществу Республики Адыгея.

Данный результат был использован в [4] при анализе первых интегралов и фазовых портретов кубических дифференциальных систем на плоскости. Тем не менее вопрос о более точной оценке сверху числа действительных инвариантных прямых для систем вида (1) остается открытым и поэтому представляет определенный интерес.

Введение нового понятия — инвариантного множества позволяет улучшить оценку максимального количества инвариантных прямых системы (1).

В данной работе доказано, что векторное поле n -й степени (1), имеющее два инвариантных множества, каждое из которых состоит из $n - 1$ параллельных между собой действительных инвариантных прямых, имеет не более $2n + 4$ инвариантных прямых при нечетном $n \geq 3$. Под инвариантным множеством понимается множество, состоящее из s параллельных между собой действительных инвариантных прямых системы (1), имеющих угловой коэффициент k . Такие множества будем обозначать символом $M_s^k(k)$.

Замечание 1. Всюду в дальнейшем нами рассматриваются только действительные инвариантные прямые. Поэтому, говоря об инвариантных прямых, будем опускать слово «действительные».

Лемма 1. Если система (1) имеет два инвариантных множества $M_{n-1}^{k_1}(k_1)$ и $M_{n-1}^{k_2}(k_2)$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 \neq k_2$, то посредством аффинного преобразования переменных x и y система (1) может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{n-2})(Ax + By + C) \equiv \bar{P}(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = y(y - \beta_1) \cdots (y - \beta_{n-2})(Mx + Ny + L) \equiv \bar{Q}(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

где $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{n-2}$, $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_{n-2}$, $BM \neq 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что предположение $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ не уменьшает общности. Применим к системе (1) преобразование

$$x = \bar{x} + \bar{y}, \quad y = k_1 \bar{x} + k_2 \bar{y}. \quad (3)$$

В результате система (1) примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = (\bar{x} - a_1)(\bar{x} - a_2) \cdots (\bar{x} - a_{n-1})(\bar{a}_1 \bar{x} + \bar{b}_1 \bar{y} + \bar{C}_1), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} = (\bar{y} - b_1)(\bar{y} - b_2) \cdots (\bar{y} - b_{n-1})(\bar{a}_2 \bar{x} + \bar{b}_2 \bar{y} + \bar{C}_2), \end{cases} \quad (4)$$

где $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-1}$, $\bar{a}_2 \cdot \bar{b}_1 \neq 0$, $dt = (k_2 - k_1)d\tau$.

Заметим, что в результате преобразования (3) инвариантные прямые $M_{n-1}^{k_1}(k_1)$ и $M_{n-1}^{k_2}(k_2)$ системы (1) переходят соответственно в изоклины нуля $\bar{y} - b_i = 0$ и в изоклины бесконечности $\bar{x} - a_i = 0$ системы (4), где $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Совершим в системе (4) параллельный перенос

$$\tilde{x} = \bar{x} - a_1, \quad \tilde{y} = \bar{y} - b_1.$$

В результате получим

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \tilde{x}(\tilde{x} - \alpha_1) \cdots (\tilde{x} - \alpha_{n-2})(A\tilde{x} + B\tilde{y} + C), \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tau} = \tilde{y}(\tilde{y} - \beta_1) \cdots (\tilde{y} - \beta_{n-2})(M\tilde{x} + N\tilde{y} + L). \end{cases} \quad (5)$$

Лемма доказана. \square

В дальнейшем будем рассматривать систему (2), имеющую два инвариантных множества

$$\begin{aligned} M_{n-1}^0(0) &= \{y = 0, y - \beta_1 = 0, \dots, y - \beta_{n-2} = 0\}, \\ M_{n-1}^\infty(\infty) &= \{x = 0, x - \alpha_1 = 0, \dots, x - \alpha_{n-2} = 0\} \end{aligned}$$

при условии

$$AN - BM \neq 0, \quad BM \neq 0. \quad (6)$$

Определение. Состояние равновесия U системы (2) будем называть узловой точкой, если через U проходят две инвариантные прямые множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Состояние равновесия V системы (2), не являющееся узловой точкой, будем называть внеузловой точкой.

Условимся обозначать символом V^0 (V^∞) внеузловую точку, расположенную на инвариантной прямой, принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0)$ (соответственно, $M_{n-1}^\infty(\infty)$).

Лемма 2. *Инвариантная прямая $l \in M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ системы (2) может содержать не более одной внеузловой точки.*

Доказательство. Если бы инвариантная прямая l проходила через две внеузловые точки V_1^0 и V_2^0 (или V_3^∞ и V_4^∞), то она совпадала бы с изоклиной бесконечности $L^\infty : Ax + By + C = 0$ (соответственно, с изоклиной нуля $L^0 : Mx + Ny + L = 0$). Это противоречит условию $(\bar{P}, \bar{Q}) = 1$. \square

Лемма 3. *Пусть $l : y - kx - b = 0$ — инвариантная прямая системы (2), удовлетворяющей условию (6), и пусть $l \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Тогда прямая l пересекает главные изоклины $L^0 : Mx + Ny + L = 0$ и $L^\infty : Ax + By + C = 0$ системы (2).*

Доказательство. Пусть l — инвариантная прямая системы (2), удовлетворяющей условию (6). Согласно определению (см. [3]) имеет место равенство

$$\begin{aligned} y(y - \beta_1) \cdots (y - \beta_{n-2})(Mx + Ny + L) &\equiv \\ &\equiv kx(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{n-2})(Ax + By + C) + (y - kx - b)R_{n-1}(x, y), \end{aligned}$$

где $R_{n-1}(x, y)$ — многочлен степени не выше $n - 1$. Предположим, что $l \parallel L^0$. Тогда при $y = kx + b$ в левой части равенства (7) получим многочлен степени $n - 1$ относительно x , а в правой части — многочлен степени n , так как $l \cap L^\infty \neq \emptyset$. Если предположить, что $l \parallel L^\infty$, то при $y = kx + b$ в левой части равенства (7) имеем многочлен степени n , а в правой части — многочлен степени $n - 1$. В обоих случаях приходим к невыполнимому тождественному равенству. \square

Лемма 4. *Если $V = L^0 \cap L^\infty$ — внеузловая точка системы (2) и через V проходит инвариантная прямая $l \in M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, то система (2) не имеет инвариантной прямой \bar{l} , не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ и проходящей через V .*

Доказательство. Пусть l — инвариантная прямая системы (2), принадлежащая множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Для определенности полагаем, что $l \in M_{n-1}^0(0)$; если $l \in M_{n-1}^\infty(\infty)$, рассуждения аналогичны.

Предположим, что l проходит через внеузловую точку $V = L^0 \cap L^\infty$ и наряду с l система (2) имеет инвариантную прямую \bar{l} , не принадлежащую множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ и проходящую через V . Так как \bar{l} пересекает все $n - 1$ инвариантных прямых множества $M_{n-1}^\infty(\infty)$, то на \bar{l} расположены n состояний равновесия системы (2).

С другой стороны, состояние равновесия V является особой точкой кратности $r = 2$ изоклины нуля $\bar{Q}(x, y) = 0$. Согласно [2, теорема 21] прямая \bar{l} пересекает изоклину нуля $\bar{Q}(x, y) = 0$ не более чем в $n - 1$ точках. Следовательно, система (2) имеет на \bar{l} не более $n - 1$ состояний равновесия. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. \square

Лемма 5. *Если инвариантная прямая $l \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ системы (2) проходит через внеузловую точку V_1^0 (или V_1^∞), то l непременно проходит через вторую внеузловую точку V_2^∞ (соответственно, V_2^0).*

Доказательство. Пусть инвариантная прямая l системы (2) не принадлежит множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ и проходит через внеузловую точку V_1^0 . Согласно лемме 3 прямая l пересекает прямые изоклины L^0 и L^∞ , а также прямые из множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Следовательно, система (2) имеет n состояний равновесия на прямой l , причем через каждое из них проходит хотя бы одна инвариантная прямая множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Так как точка V_1^0

расположена на инвариантной прямой l , то среди $n - 1$ состояний равновесия системы (2), расположенных на l и отличных от V_1^0 , найдутся не более $n - 2$ состояний равновесия, через каждое из которых проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^0(0)$. Это означает, что на l найдется состояние равновесия системы (2), через которое проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^\infty(\infty)$.

Таким образом, на инвариантной прямой l система (2) имеет внеузловую точку V_2^∞ . Если предположить, что l проходит через внеузловую точку V_1^∞ , то придем к выводу, что l также проходит через внеузловую точку V_2^0 . Лемма доказана. \square

Лемма 6. *На инвариантной прямой $l \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ система (2) имеет не более двух внеузловых точек. Если их число равно 2, то одна из них является внеузловой точкой типа V^0 , а другая — типа V^∞ .*

Справедливость леммы следует из леммы 5 и того факта, что две прямые пересекаются в одной точке.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Предположим, что через внеузловую точку $V = L^0 \cap L^\infty$ системы (2) проходит инвариантная прямая $l \in M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, а L_0 — инвариантная прямая этой же системы, причем $L_0 \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Тогда на L_0 расположены n состояний равновесия системы (2), в том числе две внеузловые точки.*

Доказательство. Согласно лемме 3 инвариантная прямая L_0 пересекает главные изоклины L^0 и L^∞ системы (2). Это означает, что состояниями равновесия системы (2) являются точки $A = L_0 \cap L^0$ и $B = L_0 \cap L^\infty$. Очевидно, по лемме 4 точки A и B отличны от внеузловой точки V . Покажем, что хотя бы одна из точек A и B является внеузловой точкой. Предположим противное, т.е. пусть A и B — узловые точки системы (2). Тогда они являются особыми точками кратности $r = 2$ изоклины нуля $\bar{Q}(x, y) = 0$ и изоклины бесконечности $\bar{P}(x, y) = 0$ соответственно системы (2). Поэтому согласно [2, теорема 21] на каждой из прямых изоклин L^0 и L^∞ система (2) имеет не более $n - 1$ состояний равновесия.

С другой стороны, полагая, что через V проходит инвариантная прямая $l \in M_{n-1}^0(0)$, перенесем начало координат в точку V . При этом система (2) переходит в следующую систему (обозначения коэффициентов в уравнениях изоклин L^0 и L^∞ , а также фазовых переменных оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x - c_1) \cdots (x - c_{n-1})(Ax + By), \\ \frac{dy}{dt} = y(y - d_1) \cdots (y - d_{n-2})(Mx + Ny), \end{cases} \quad (7)$$

где $AN - BM \neq 0$, $c_i \neq 0$ ($i \in \{1, \dots, n - 1\}$), $c_i \neq c_s$, если $i \neq s$, $i, s \in \{1, \dots, n - 1\}$, $d_j \neq 0$ ($j \in \{1, \dots, n - 2\}$), $d_j \neq d_r$, если $j \neq r$, $j, r \in \{1, \dots, n - 2\}$.

На изоклине нуля $Mx + Ny = 0$ система (7) имеет в точности n состояний равновесия. Полноценное противоречие доказывает, что состояния равновесия A и B одновременно не могут быть узловыми точками. Определенности ради положим, что A — внеузловая точка. Тогда через A проходит инвариантная прямая $l^\infty \in M_{n-1}^\infty(\infty)$. Следовательно, инвариантная прямая L_0 пересекает $n - 2$ инвариантных прямых, принадлежащих множеству $M_{n-1}^\infty(\infty)$ и отличных от l^∞ .

Так как A — внеузловая точка типа V^∞ , то по лемме 5 инвариантная прямая L_0 проходит через внеузловую точку типа V^0 , и точка B является таковой точкой. Действительно, через внеузловую точку типа V^0 проходит изоклина бесконечности L^∞ , с которой инвариантная прямая L_0 пересекается в единственной точке. Через точку B проходит инвариантная прямая $l^0 \in M_{n-1}^0(0)$. Следовательно, инвариантная прямая L_0 пересекает $n - 2$ инвариантных прямых, принадлежащих множеству $M_{n-1}^0(0)$ и отличных от l^0 . Тем самым доказано, что на инвариантной прямой L_0 система (2) имеет n состояний равновесия.

Принимая во внимание лемму 6, можно утверждать, что на L_0 расположены две внеузловые точки и $n - 2$ узловых точки системы (2). Теорема доказана. \square

Пример 1. Главные изоклины $L^\infty : y + 2x + 2 = 0$, $L^0 : y - x - 4 = 0$ дифференциальной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(y+2x+2), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-2)(y-4)(y-x-4) \end{cases}$$

пересекаются во внеузловой точке $V(-2; 2)$, через которую проходит инвариантная прямая $y - 2 = 0$, принадлежащая множеству $M_3^0(0) = \{y = 0; y - 2 = 0; y - 4 = 0\}$. Кроме этого, система имеет инвариантную прямую $y - 2x - 2 = 0$, не принадлежащую множеству $M_3^0(0) \cup M_3^\infty(\infty)$. Здесь $M_3^\infty(\infty) = \{x = 0; x - 1 = 0; x - 2 = 0\}$.

Лемма 7. Если $V = L^0 \cap L^\infty$ — внеузловая точка системы (2) и через V проходит инвариантная прямая $L_0 \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, то L_0 пересекает инвариантные прямые множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ только в узловых точках.

Доказательство. Так как L_0 проходит через внеузловую точку V , то по лемме 4 через V не проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Следовательно, на L_0 расположены n состояний равновесия системы (2), в том числе одна и только одна внеузловая точка V и $n - 1$ состояний равновесия, являющихся узловыми точками. Лемма доказана. \square

Теорема 2. Если система (2) имеет внеузловую точку $V = L^0 \cap L^\infty$, через которую проходят инвариантные прямые L_1 и L_2 этой системы, то n нечетно.

Доказательство. Согласно лемме 4 и определению внеузловой точки ни одна из инвариантных прямых L_1 и L_2 не принадлежит множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Следовательно, по лемме 7 инвариантные прямые L_1 и L_2 пересекают инвариантные прямые множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ только в узловых точках. Поэтому V — точка пересечения диагоналей прямоугольника Π_1 , образованного инвариантными прямыми $x = 0$, $x - \alpha_{n-2} = 0$, $y = 0$, $y - \beta_{n-2} = 0$. Для вершин прямоугольника Π_1 введем следующие обозначения: $O_1(0; 0)$, $F_1(0; \beta_{n-2})$, $H_1(\alpha_{n-2}; 0)$, $G_1(\alpha_{n-2}; \beta_{n-2})$. Для определенности положим, что L_1 проходит через вершины O_1 и G_1 прямоугольника Π_1 .

Пусть U_1 — произвольная узловая точка системы (2), расположенная на L_1 и отличная от O_1 и G_1 . Тогда $U_1 = L_1 \cap l_1^\infty$, $l_1^\infty \in M_{n-1}^\infty(\infty)$. Прямая l_1^∞ пересекает L_2 в узловой точке U_2 . Поэтому через U_2 проходит инвариантная прямая $l_2^0 \in M_{n-1}^0(0)$, которая пересекает L_1 в узловой точке U_3 . Таким образом, на инвариантной прямой L_1 , равно как и на L_2 , узловые точки встречаются парами. Следовательно, число инвариантных прямых во множестве M_{n-1}^0 или, что то же, самое в множестве $M_{n-1}^\infty(\infty)$, четно, т.е. $n - 1 = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Это означает, что $n = 2m + 1$ нечетно. Теорема доказана. \square

Теорема 3. Пусть $V = L^0 \cap L^\infty$ — внеузловая точка системы (2), причем L^0 проходит через противоположные вершины O_1 и G_1 (или F_1 и H_1), а L^∞ — через противоположные вершины F_1 и H_1 (или O_1 и G_1) прямоугольника Π_1 . Тогда система (2) не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$.

Доказательство. Согласно определению внеузловой точки возможны два предположения:

- (а) через V проходит одна инвариантная прямая множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$;
- (б) через V не проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$.

Если имеет место (а), то по лемме 4 система (2) не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ и проходящей через V . По лемме 7 система (2) также не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ и проходящей через V , если выполняется (б).

Таким образом, если система (2) имеет инвариантную прямую $L_0 \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, то $V \notin L_0$. Поэтому L_0 пересекает хотя бы одну из инвариантных прямых: $x = 0$, $x - \alpha_{n-2} = 0$, $y = 0$, $y - \beta_{n-2} = 0$ в точке, расположенной вне области, ограниченной прямоугольником Π_1 . Это невозможно, так как через любую внеузловую точку, отличную от V , должна проходить хотя бы

одна из главных изоклин L^0 и L^∞ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

Пример 2. Во внеузловой точке $V(2; 2,5)$ пересекаются изоклины $L^0 : 4y + 5x - 20 = 0$ и $L^\infty : 4y - 5x = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-4)(4y-5x), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-3)(y-5)(4y+5x-20). \end{cases}$$

Кроме этого, L^0 проходит через противоположные вершины $(4; 0)$ и $(0; 5)$, а L^∞ — через противоположные вершины $(0; 0)$ и $(4; 5)$ прямоугольника Π_1 . Согласно теореме 3 данная система не имеет инвариантной прямой, отличной от шести очевидных инвариантных прямых.

Лемма 8. Если узловая точка $U = L^0 \cap L^\infty$ системы (2) принадлежит инвариантной прямой $L_0 \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, то L_0 проходит только через узловые точки.

Справедливость леммы следует из того, что прямая L_0 пересекается с изоклинами L^0 и L^∞ только в одной точке U .

Пример 3. Прямые изоклины $L^0 : x + y - 4 = 0$, $L^\infty : 4x - 2y - 4 = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(4x-2y-4), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2)(x+y-4) \end{cases}$$

пересекаются в узловой точке $U(2; 2)$. Инвариантная прямая $y - x = 0$, не принадлежащая множеству

$$M_3^0(0) \cup M_3^\infty(\infty) = \{x = 0, x - 1 = 0, x - 2 = 0, y = 0, y - 1 = 0, y - 2 = 0\}$$

проходит только через узловые точки $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 2)$.

Лемма 9. Пусть $U = L^0 \cap L^\infty$ — узловая точка системы (2), причем L^0 проходит через противоположные вершины O_1 и G_1 (или F_1 и H_1), а L^∞ — через противоположные вершины F_1 и H_1 (или O_1 и G_1) прямоугольника Π_1 . Тогда эта система не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$.

Доказательство. Согласно лемме 8 инвариантная прямая $L_0 \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, если она существует, не проходит через точку U . По лемме 3 прямая L_0 пересекает изоклины L^0 и L^∞ . Следовательно, L_0 пересекает хотя бы одну из инвариантных прямых: $x = 0$, $x - \alpha_{n-2} = 0$, $y = 0$, $y - \beta_{n-2} = 0$ в точке, расположенной вне односвязной области, ограниченной прямоугольником Π_1 . Такая точка является внеузловой, и через нее должна проходить хотя бы одна из изоклин L^0 и L^∞ . Но это невозможно, так как по условию L^0 и L^∞ проходят через пары противоположных вершин прямоугольника Π_1 . Лемма доказана. \square

Пример 4. Главные изоклины $L^0 : y + x - 2 = 0$, $L^\infty : y - x = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(y-x), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2)(y+x-2) \end{cases} \quad (8)$$

проходят через узловую точку $(1; 1)$. Кроме этого, изоклине L^0 принадлежит одна пара противоположных вершин, а изоклине L^∞ — другая пара противоположных вершин прямоугольника Π_1 . Поэтому эта система не имеет инвариантной прямой, отличной от очевидных шести инвариантных прямых.

Из теоремы 3 и леммы 9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Если все вершины прямоугольника Π_1 принадлежат пересекающимся главным изоклинам L^0 и L^∞ системы (2), то эта система не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$.

Рассмотрим систему (2) в предположении, что две инвариантные прямые L_1 и L_2 этой системы, не принадлежащие множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, проходят через внеузловую точку $V = L^0 \cap L^\infty$. Для удобства рассуждений перепишем систему (2) в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x - \nu_1) \cdots (x - \nu_{n-1})(Ax + By + C), \\ \frac{dy}{dt} = (y - \omega_1) \cdots (y - \omega_{n-1})(Mx + Ny + L), \end{cases} \quad (9)$$

где $0 = \nu_1 < \cdots < \nu_{n-1}$, $0 = \omega_1 < \cdots < \omega_{n-1}$.

По лемме 7 одна пара противоположных вершин прямоугольника Π_1 принадлежит инвариантной прямой L_1 , а другая пара противоположных вершин прямоугольника Π_1 принадлежит инвариантной прямой L_2 . Здесь прямоугольник Π_1 образован инвариантными прямыми

$$x - \nu_1 = 0, \quad x - \nu_{n-1} = 0, \quad y - \omega_1 = 0, \quad y - \omega_{n-1} = 0.$$

Вершины прямоугольника Π_1 обозначим $O_1(\nu_1; \omega_1)$, $F_1(\nu_1; \omega_{n-1})$, $G_1(\nu_{n-1}; \omega_{n-1})$, $H_1(\nu_{n-1}; \omega_1)$. Заметим, что по теореме 2 число n нечетно. Среди прямоугольников, образованных инвариантными прямыми множества

$$M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty) = \{x - \nu_1 = 0, \dots, x - \nu_{n-1} = 0, y - \omega_1 = 0, y - \omega_{n-1} = 0\}$$

выделим прямоугольник Π_2 , образованный инвариантными прямыми

$$x - \nu_{(n-1)/2} = 0, \quad x - \nu_{(n+1)/2} = 0, \quad y - \omega_{(n-1)/2} = 0, \quad y - \omega_{(n+1)/2} = 0.$$

Обозначим вершины прямоугольника Π_2 через

$$O_2(\nu_{(n-1)/2}; \omega_{(n-1)/2}), \quad F_2(\nu_{(n-1)/2}; \omega_{(n+1)/2}), \quad G_2(\nu_{(n+1)/2}; \omega_{(n+1)/2}), \quad H_2(\nu_{(n+1)/2}; \omega_{(n-1)/2}).$$

Теорема 5. Пусть через внеузловую точку $V = L^0 \cap L^\infty$ системы (9) проходят две инвариантные прямые L_1 и L_2 , не принадлежащие множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Если при этом система (9) имеет инвариантную прямую L_3 , отличную от L_1 и L_2 , не принадлежащую множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, то L_3 проходит через одну из вершин прямоугольника Π_2 и система (9) имеет не более $2n + 4$ инвариантных прямых.

Доказательство. Так как пересекающиеся инвариантные прямые L_1 и L_2 проходят через пары противоположных вершин прямоугольника Π_1 , то одна пара противоположных вершин прямоугольника Π_2 расположена на L_1 , а другая пара противоположных вершин Π_2 расположена на L_2 .

Поэтому для определенности полагаем, что O_2 и G_2 инцидентны инвариантной прямой L_1 , а F_2 и H_2 прямой L_2 . Легко видеть, что при $n = 3$ теорема верна. При $n > 3$ (именно этот случай мы рассматриваем) инвариантная прямая L_3 не проходит через внутреннюю точку односвязной области, ограниченной прямоугольником Π_2 , так как в противном случае на L_3 расположены не менее трех внеузловых точек. Это противоречит лемме 6.

Предположим, что L_3 не проходит ни через одну из вершин прямоугольника Π_2 . Согласно лемме 7 L_3 не проходит через точку V . Не уменьшая общности считаем, что угловой коэффициент k прямой L_3 положителен (случай $k < 0$ сводится к случаю $k > 0$ путем параллельного переноса начала координат в соответствующую точку равновесия системы и выбора положительных направлений осей координат). Относительно k возможны следующие предположения:

$$(1) k = \frac{\omega_{n-1}}{\nu_{n-1}}; \quad (2) k > \frac{\omega_{n-1}}{\nu_{n-1}}; \quad (3) 0 < k < \frac{\omega_{n-1}}{\nu_{n-1}}.$$

Обозначим точку пересечения L_3 с L_2 через U_1 . При этом точка U_1 является узловой точкой системы (9).

В случае (1) L_3 пересекает инвариантные прямые $y - \omega_1 = 0$ и $x - \nu_{n-1} = 0$ во внеузловых точках V_1^0 и V_2^∞ соответственно (см. рис. 1).

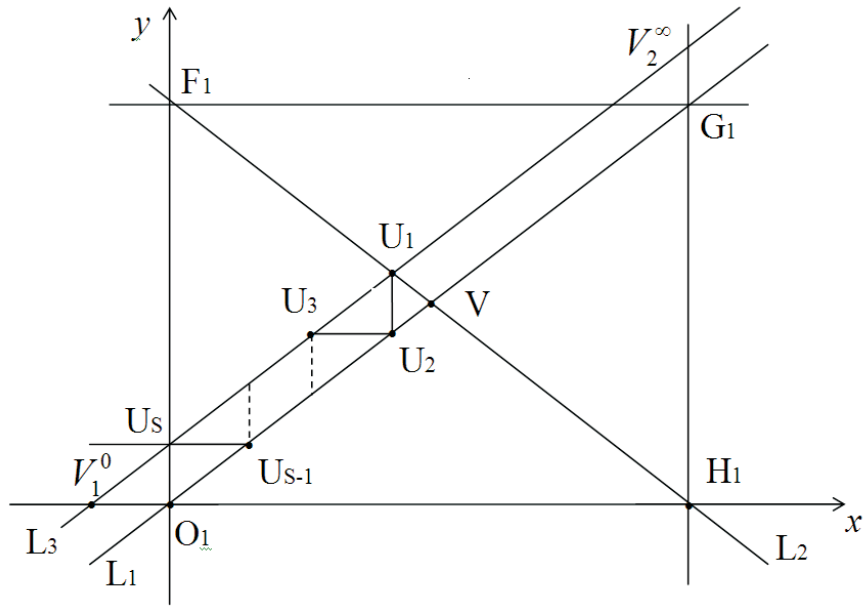


Рис. 1. Инвариантная прямая L_3 параллельна инвариантной прямой L_1 и проходит через внеузловые точки V_1^0 и V_2^∞

Так как по лемме 7 на прямых L_1 и L_2 все состояния равновесия системы (9), отличные от V , являются узловыми точками, а на L_3 являются узловыми все состояния равновесия, отличные от V_1^0 и V_2^∞ , то существует ломаная $U_1U_2 \cdots U_{s-1}U_s$, состоящая из отрезков инвариантных прямых, принадлежащих множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Здесь $U_s \equiv (\nu_1; \omega_2)$.

Так как по предположению точка F_2 расположена на L_2 между точками V и U_1 , то существует и вторая ломаная, звеньями которой являются отрезки прямых множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, заключенные между прямыми L_1 и L_3 . Среди звеньев этой ломаной имеется один отрезок, имеющий с инвариантной прямой $x - \nu_1 = 0$ общую точку, расположенную между точками O_1 и U_s . Это равносильно наличию на инвариантной прямой L_3 более двух внеузловых точек, что противоречит лемме 6.

Если в случае (1) абсцисса точки U_1 больше $\nu_{(n+1)}/2$, то снова приходим к противоречию с леммой 6. Пусть $k > \omega_{n-1}\nu_{n-1}$. Тогда L_3 пересекает прямую L_1 только в точке O_1 или G_1 , так как в противном случае система (9) имеет на прямой L_3 две внеузловые точки типа V^∞ , что противоречит лемме 6, либо прямая L_3 пересекается с прямой L_1 в точке W , расположенной вне односвязной области, ограниченной прямоугольником Π_1 . Прямая L_3 не может пересекаться в точке W с прямой L_1 , так как в противном случае по необходимости через W должны проходить прямые L^0 и L^∞ , а эти прямые пересекают L_1 уже в точке V .

Рассмотрим случай, когда прямая L_3 проходит через точки O_1 и U_1 (см. рис. 2). Если L_3 проходит через G_1 и U_1 , в рассуждениях ничего не изменится. Так как $V_2^\infty = L_3 \cap \bar{l}$, где \bar{l} — инвариантная прямая $x - \nu_{n-1} = 0$, является внеузловой точкой типа V^∞ , то по лемме 5 на L_3 расположена внеузловая точка типа V^0 . Обозначим эту точку V_1^0 . Относительно расположения точки V_1^0 на прямой L_3 возможны предположения:

- (а) V_1^0 расположена между точками U_1 и V_2^∞ ;
- (б) V_1^0 расположена между точками O_1 и U_1 .

Если предположить, что имеет место случай (а), то на отрезке $[O_1; U_1]$ инвариантной прямой L_3 расположены только узловые точки системы (9); обозначим их U_1, U_3, \dots, U_s , где s нечетно. Точка U_s — ближайшая к O_1 узловая точка на прямой L_3 . Через состояние равновесия U_s проходит инвариантная прямая $l_s^\infty \in M_{n-1}^\infty(\infty)$, пересекающая инвариантную прямую L_1 во внеузловой точке V_s^∞ . Пришли к противоречию с леммой 7.

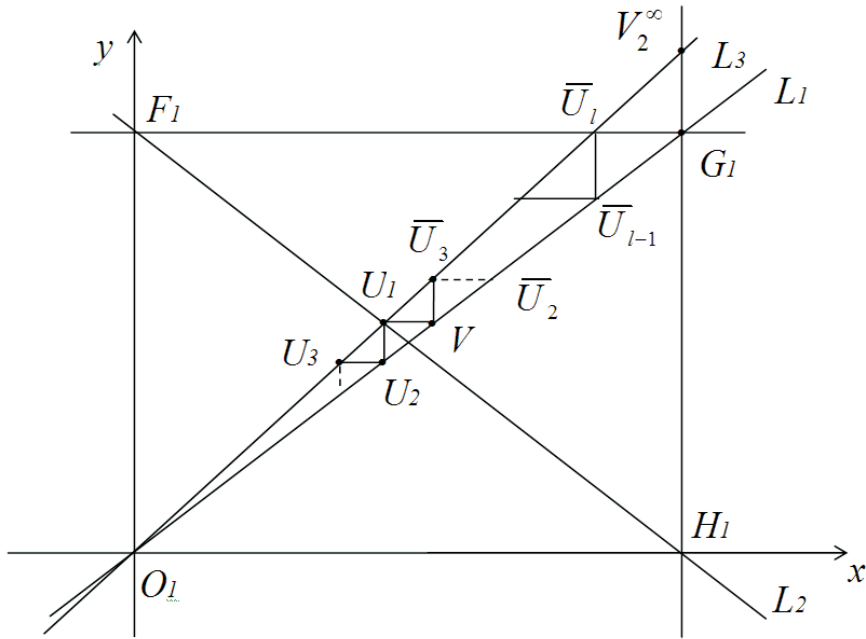


Рис. 2. Инвариантная прямая L_3 проходит через точки U_1 и O_1

Предположим, что V_1^0 расположена между точками O_1 и U_1 . Тогда существует ломаная $U_1\bar{U}_2 \cdots \bar{U}_l$, где l нечетно, $\bar{U}_l \equiv (\nu_{n-2}; \omega_{n-1})$. Так как по предположению узловая точка F_2 расположена на инвариантной прямой L_2 между точками V и U_1 , то существует ломаная с началом в точке F_2 , звеньями которой являются отрезки инвариантных прямых множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, заключенные между прямыми L_1 и L_3 . На прямой L_1 нет состояний равновесия системы (9), расположенных между V и G_1 и имеющих абсциссу больше, чем ν_{n-2} . Поэтому последнее звено в ломаной с началом в точке F_2 является отрезком, параллельным оси ординат и имеющим с прямой L_3 общую точку с абсциссой, меньшей чем ν_{n-2} . Это противоречит лемме 6.

Случай (3) расположения инвариантной прямой сводится к рассмотренному случаю (2).

Таким образом, доказано, что L_3 проходит через одну из вершин прямоугольника Π_2 . Следовательно, количество инвариантных прямых системы (9) не превосходит $2(n-1) + 6 = 2n + 4$. Теорема доказана. \square

Пример 5. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(3x-2y-2)}{x(x-1)(x-2)}$$

траекторий системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(3x-2y-2), \end{cases} \quad (10)$$

представленное в [1], имеет два инвариантных множества $M_2^0(0)$ и $M_2^1(1)$. В самом деле, применив к системе (10) преобразование

$$x = \bar{x} + \bar{y}, \quad y = \bar{y},$$

получим систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x}(\bar{x}-1)(\bar{x}+3\bar{y}-2), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{y}(\bar{y}-1)(3\bar{x}+\bar{y}-2). \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) имеет два инвариантных множества

$$M_2^0(0) = \{\bar{y} = 0, \bar{y} - 1 = 0\}, \quad M_2^\infty(\infty) = \{\bar{x} = 0, \bar{x} - 1 = 0\}$$

и внеузловую точку $V(1/2, 1/2)$, через которую проходят инвариантные прямые $L_1 : \bar{y} - \bar{x} = 0$ и $L_2 : \bar{y} + \bar{x} - 1 = 0$. Кроме этого, данная система имеет две инвариантные прямые $\bar{y} + \bar{x} = 0$, $\bar{y} + \bar{x} - 2 = 0$.

Замечание 2. Система (11) является частным случаем системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)[(B+C)x + By + C], \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)[Bx + (B+C)y + C], \end{cases}$$

имеющей кроме очевидных четырех инвариантных прямых две пересекающиеся инвариантные прямые $y + x = 0$, $y - x = 0$.

Пример 6. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(x-3)(3x-5y+3), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2)(y-3)(-5x+3y+3) \end{cases}$$

имеет кроме очевидных восьми инвариантных прямых, образующих инвариантное множество $M_4^0(0) \cup M_4^\infty(\infty)$, инвариантные прямые $y - x = 0$, $y - x + 1 = 0$, $y + x - 3 = 0$. При этом инвариантные прямые $y - x = 0$ и $y + x - 3 = 0$ пересекаются во внеузловой точке $V(3/2; 3/2)$.

Отметим, что дифференциальное уравнение траекторий системы (10) и уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(y-1)(-3x-2y+4)}{x(x-1)(x-4)}$$

из [1], имеющие максимальное число (восемь) инвариантных прямых, принадлежат одному и тому же классу кубических дифференциальных уравнений с двумя инвариантными множествами $M_2^0(0)$ и $M_2^k(k)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и внеузловой точкой, через которую не проходит ни одна из инвариантных прямых множества $M_2^0(0) \cup M_2^k(k)$.

Пример 7. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-a) \left[x - \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \right] \left[x - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} \right] \left[x - \sqrt{5}y + \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \right], \\ \frac{dy}{dt} = y(y-a) \left[y - \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \right] \left[y - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} \right] \left[-\sqrt{5}x + y + \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \right] \end{cases} \quad (12)$$

имеет инвариантные множества

$$M_4^0(0) = \left\{ y = 0, y - a = 0, y - \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} = 0, y - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} = 0 \right\},$$

$$M_4^\infty(\infty) = \left\{ x = 0, x - a = 0, x - \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} = 0, x - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} = 0 \right\},$$

где $a \in (0; +\infty)$, и шесть инвариантных прямых

$$y - x = 0, \quad y + x - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} = 0, \quad y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x = 0, \quad y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} = 0,$$

$$y - \frac{2}{1+\sqrt{5}}x = 0, \quad y - \frac{2}{1+\sqrt{5}}x - a = 0,$$

не принадлежащих множеству $M_4^0(0) \cup M_4^\infty(\infty)$.

В [3] впервые построено полиномиальное векторное поле 5-й степени, имеющее максимальное число (четырнадцать) инвариантных прямых. При помощи параллельного переноса оно приводится к виду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[x - (3 - \sqrt{5})][x - (\sqrt{5} - 1)](x - 2)(x + \sqrt{5}y - \sqrt{5} - 1), \\ \frac{dy}{dt} = y[y - (3 - \sqrt{5})][y - (\sqrt{5} - 1)](y - 2)(-\sqrt{5}x + y - \sqrt{5} - 1). \end{cases} \quad (13)$$

Последняя система имеет два инвариантных множества

$$M_4^0(0) = \{y = 0, y - 3 + \sqrt{5} = 0, y - \sqrt{5} + 1 = 0, y - 2 = 0\},$$

$$M_4^\infty(\infty) = \{x = 0, x - 3 + \sqrt{5} = 0, x - \sqrt{5} + 1 = 0, x - 2 = 0\},$$

и шесть инвариантных прямых

$$\begin{aligned} y - x = 0, \quad y + x - 2 = 0, \quad y + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x - 2 = 0, \quad y + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x - \sqrt{5} + 1 = 0, \\ y + \frac{2}{\sqrt{5} - 1}x - \frac{4}{\sqrt{5} - 1} = 0, \quad y - \frac{2}{\sqrt{5} - 1}x - 2 = 0, \end{aligned}$$

не принадлежащих множеству $M_4^0(0) \cup M_4^\infty(\infty)$. Как отмечено в [3], точки $x = 3 - \sqrt{5}$ и $x = \sqrt{5} - 1$ производят золотое сечение отрезка $[0; 2]$. В системе (12) точки $x = a$ и $x = a(1 + \sqrt{5})/2$ также производят золотое сечение отрезка $[0; a(3 + \sqrt{5})/2]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Любимова Р. А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми// в кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Вып. 1. — Горький: Изд-во Горьков. ун-та, 1977. — С. 19–22.
2. Уокер Р. Алгебраические кривые. — М.: ИЛ, 1952.
3. Artes I., Grünbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems// Pac. J. Math. — 1998. — 184, № 2. — P. 207–230.
4. Bujac C., Llibre J., Vulpe N. First integrals and phase portraits of planar polynomial differential cubic systems with the maximum number of invariant straight lines// Qual. Th. Dynam. Syst. — 2016. — 15, № 2. — P. 327–348.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ушхо Адам Дамирович

Адыгейский государственный университет, Майкоп

E-mail: uschho76@rambler.ru

Тлячев Вячеслав Бесланович

Адыгейский государственный университет, Майкоп

E-mail: tlyachev@adygnet.ru

Ушхо Дамир Салихович

Адыгейский государственный университет, Майкоп

E-mail: damirubych@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 134–149
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-134-149

УДК 517.518

СТУПЕНЧАТЫЕ МАСШТАБИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ И СИСТЕМА КРЕСТЕНСОНА

© 2023 г. Ю. А. ФАРКОВ

Аннотация. Представлен обзор методов построения ступенчатых масштабирующих функций на положительной полупрямой \mathbb{R}_+ , ассоциированных с функциями Крестенсона. Обсуждаются условия, при которых эти ступенчатые функции порождают ортогональные вейвлеты и жёсткие фреймы. Приведена подробная библиография.

Ключевые слова: функция Уолша, система Крестенсона, формула Пуассона, группа Кантора, группа Виленкина, масштабирующая функция, вейвлет, жёсткий фрейм, дискретное вейвлет-преобразование.

STEP SCALING FUNCTIONS AND THE CHRESTENSON SYSTEM

© 2023 Yu. A. FARKOV

ABSTRACT. A review of methods for constructing step scaling functions on the positive half-line \mathbb{R}_+ associated with the Chrestenson functions is presented. The conditions under which such step functions generate orthogonal wavelets and tight frames are discussed. A detailed bibliography is provided.

Keywords and phrases: Walsh function, Chrestenson system, Poisson formula, Cantor group, Vilenkin group, scaling function, wavelet, tight frame, discrete wavelet transform.

AMS Subject Classification: 42C15, 42C40, 43A15, 65T60

1. Введение. При построении ортогональных вейвлетов и жёстких фреймов на локально компактных абелевых группах ключевым элементом является выбор подходящих масштабирующих функций (см., например, [2, 4, 28, 51]). Простейшей ступенчатой масштабирующей функцией является функция Хаара. Общий метод построения вейвлетов Хаара для широкого класса топологических пространств с мерой, содержащего группы Виленкина и аддитивную группу поля p -адических чисел, обсуждался в [5]. Хорошо известно (см. [63]), что функции Уолша могут быть определены как характеры группы Кантора, а характеры групп Виленкина являются обобщенными функциями Уолша. Ортогональные вейвлеты, масштабирующие функции которых представимы лакунарными рядами Уолша на локально компактной группе Кантора, изучались Лэнгом в [52, 53]. В то время как для вейвлетов Добеши (см. [2]) гладкость растет с увеличением длины носителя, вейвлеты Лэнга могут иметь сколь угодно высокую диадическую гладкость на фиксированном носителе (см. [9], [12, пример 4.3]). В книге [43] содержатся обобщения вейвлетов Лэнга на группы Виленкина и приведено несколько других конструкций вейвлетов в анализе Уолша, включая биортогональный, нестационарный и периодический случаи (см. также [28, гл. 8], [10, 13–15, 17, 32–36, 36–45, 55]).

Характеристические свойства ступенчатых масштабирующих функций на вещественной прямой \mathbb{R} изучались в [48, 54]. Первый пример ступенчатой масштабирующей функции в анализе

Уолша, отличной от масштабирующей функции Хаара и порождающей кратномасштабный анализ, был найден в [31] (ср. [8, пример 3], [20, пример 2.32]). На группах Виленкина ступенчатые функции представимы конечными линейными комбинациями обобщенных функций Уолша и применяются в теории приближений и для обработки сигналов (см. [7, 8, 36, 40, 49, 50, 60, 61]).

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Для каждого целого $p \geq 2$ функции Крестенсона соответствуют обобщенным функциям Уолша в стандартной интерпретации группы Виленкина G_p на \mathbb{R}_+ (см., например, [1, § 1.5], [28, § 8.2], [62], [63, § 1.3]). В настоящей статье приведен обзор методов построения ступенчатых масштабирующих функций с компактными носителями на \mathbb{R}_+ , ассоциированных с функциями Крестенсона. Аналоги сформулированных в разделе 2 характеристических свойств ступенчатых масштабирующих функций для группы G_p доказаны в недавней статье [46]. В разделе 3 показано как теоремы из раздела 2 могут применяться для построения ортогональных масштабирующих функций и соответствующих им ортогональных вейвлетов на \mathbb{R}_+ ; при этом используются модифицированное условие Коэна, критерий отсутствия блокирующих множеств и метод N -валидных деревьев. Кроме того, в разделе 3 отмечаются некоторые недавние результаты о построении жёстких фреймов из ступенчатых функций с компактными носителями. Существенным элементом излагаемых конструкций является дискретное преобразование Виленкина—Крестенсона, для которого формула Пуассона записывается в виде (12).

Как обычно, пусть \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_+ и \mathbb{N} — множества целых, целых неотрицательных и натуральных чисел соответственно. Для любого $x \in \mathbb{R}_+$ цифры $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ определим из разложения

$$x = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j p^{-j} \tag{1}$$

(для p -ично рационального числа x берется разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Если для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$ в разложении (1) все $x_j = 0$ при $j < -m$, то пишут $x = x_{-m}x_{-m+1} \dots x_0, x_1x_2x_3 \dots$. В частности, если $x \in [0, 1)$, то $x = 0, x_1x_2x_3 \dots$.

Будем рассматривать полупрямую \mathbb{R}_+ с операцией \oplus поразрядного сложения по модулю p . Напомним, что если $\langle s \rangle_p$ — остаток при делении целого числа s на p , то для любых $x, y \in \mathbb{R}_+$ равенство $z = x \oplus y$ означает, что

$$z = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle x_j + y_j \rangle_p p^{-j},$$

где x_j и y_j — цифры чисел x и y в p -ичной системе. При этом $z = x \ominus y$, если $z \oplus y = x$.

Числовые промежутки

$$I_l^{(m)} = [lp^{-m}, (l+1)p^{-m}), \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

называются p -ичными интервалами ранга m . Топология на \mathbb{R}_+ , определяемая семейством интервалов $\{I_l^{(m)} : m \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}_+\}$, называется W -топологией (при $p = 2$ — *диадической топологией*; см. [63, с. 11]). Класс функций из $L^2(\mathbb{R}_+)$, имеющих в W -топологии компактные носители на \mathbb{R}_+ , обозначается через $L_c^2(\mathbb{R}_+)$. Для каждой функции $f \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ через $\text{supp } f$ обозначается носитель функции f в W -топологии.

Пусть

$$\chi(x, y) = \exp \left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j y_{1-j} \right), \quad x, y \in \mathbb{R}_+,$$

где цифры x_j и y_j берутся из разложений вида (1). Известно (см. [1, § 1.5]), что равенство

$$\chi(x, y)\chi(z, y) = \chi(x \oplus z, y)$$

при фиксированных x и y имеет место для всех z из \mathbb{R}_+ , кроме счетного множества значений.

Обобщенное преобразование Уолша—Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ определяется по формуле

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \overline{\chi(x, \omega)} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

и стандартным образом продолжается на пространство $L^2(\mathbb{R}_+)$. Обозначим через $\mathcal{S}^{(m)}$ множество всех функций $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, принимающих постоянные значения на p -ичных интервалах ранга m . Для каждого целого m положим

$$\mathcal{S}_l^{(m)} := \{f \in \mathcal{S}^{(m)} : \text{supp } f \subset [0, p^l]\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 1 (см. [1, § 6.2]). *Имеют место следующие свойства:*

- (а) если $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{S}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$, то $\text{supp } \widehat{f} \subset [0, p^m]$;
 (б) если $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $\text{supp } f \subset [0, p^m]$, то $\widehat{f} \in \mathcal{S}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$.

В качестве следствия из предложения 1 для любых $m, l \in \mathbb{Z}$ имеем

$$f \in \mathcal{S}_l^{(m)} \iff \widehat{f} \in \mathcal{S}_m^{(l)}. \quad (2)$$

Система Крестенсона $\{w_l : l \in \mathbb{Z}_+\}$, совпадающая при $p = 2$ с классической системой Уолша (см. [27]), определяется равенством

$$w_l(x) = \chi(x, l), \quad l \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in [0, 1].$$

Хорошо известно, что система $\{w_l : l \in \mathbb{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в $L^2[0, 1]$. На полупрямую \mathbb{R}_+ функции Крестенсона продолжаютс периодически:

$$w_l(x) = w_l(x + 1) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}_+.$$

При построении ортогональных вейвлетов с компактными носителями на \mathbb{R}_+ , определяемых с помощью функций Крестенсона, центральную роль играют масштабирующие уравнения вида

$$\varphi(x) = p \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k \varphi(px \ominus k), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (3)$$

Функции $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющие уравнениям вида (3), называют *масштабирующими* функциями. Применяя обобщенное преобразование Уолша–Фурье, можем записать уравнение (3) в виде

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(\omega/p) \widehat{\varphi}(\omega/p), \quad \omega \in \mathbb{R}_+, \quad (4)$$

где

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k \overline{w_k(\omega)}. \quad (5)$$

Функция m_0 называется *маской* масштабирующего уравнения (3) (или его решения φ). Отметим, что при условии $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ из равенства (4) имеем $m_0(0) = 1$. Обозначим через $\mathcal{M}_0^{(n)}$ множество таких 1-периодических функций m_0 , что $m_0 \in \mathcal{S}^{(n)}$ и $m_0(0) = 1$.

В формуле (5) функции Крестенсона w_k постоянны на каждом интервале $I_l^{(n)}$, $0 \leq l \leq p^n - 1$. Поэтому маска m_0 имеет период 1 и принадлежит классу $\mathcal{S}^{(n)}$. Обратнo, всякая 1-периодическая функция из класса $\mathcal{S}^{(n)}$ может быть записана в виде (5). Отметим также, что коэффициенты уравнения (3) восстанавливаются по значениям маски m_0 с помощью дискретного преобразования Виленкина–Крестенсона. Действительно, если $b_l = m_0(l/p^n)$ для $0 \leq l \leq p^n - 1$, т.е.

$$b_l = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k \overline{w_k(l/p^n)}, \quad l \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}, \quad (6)$$

то

$$a_k = \frac{1}{p^n} \sum_{l=0}^{p^n-1} b_l w_l(k/p^n), \quad k \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}; \quad (7)$$

обратно, из (7) следуют равенства (6). Эти дискретные преобразования могут быть выполнены с помощью быстрых алгоритмов (см., например, [1, § 11.2], [47]).

Теорема 1 (см. [31]). Пусть функция $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению (3), $\widehat{\varphi}(0) = 1$, и пусть маска m_0 определена по формуле (5). Тогда $\text{supp } \varphi \subset [0, p^{n-1})$, $\widehat{\varphi}(k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega) \quad \text{для всех } \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (8)$$

При условиях теоремы 1 имеем $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$; следовательно, $m_0(p^{-j}\omega) = 1$ для всех $\omega \in [0, p^{j-n})$. Поэтому произведение в формуле (8) конечно при каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $\mathbf{1}_E$ — характеристическая функция множества E . Предположим, что функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1 и существует такое $m \in \mathbb{Z}_+$, что $\varphi \in \mathcal{S}^{(m)}$. В этом случае, поскольку $\text{supp } \varphi \subset [0, p^{n-1})$, функция φ принадлежит классу $\mathcal{S}_{n-1}^{(m)}$. В силу соотношения (2) имеем равенство

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \mathbf{1}_{I_0^{(n-1)}}(\omega) + \sum_{l=1}^{\infty} \widehat{\varphi}(l/p^{n-1}) \mathbf{1}_{I_l^{(n-1)}}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (9)$$

С помощью формулы

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{I_l^{(n-1)}}(\omega) \chi(x, \omega) d\omega = (1/p^{n-1}) \mathbf{1}_{[0,1)}(x/p^{n-1}) w_l(x/p^{n-1})$$

отсюда получается следующее выражение функции φ через функции Крестенсона—Леви:

$$\varphi(x) = (1/p^{n-1}) \mathbf{1}_{[0,1)}(x/p^{n-1}) \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \widehat{\varphi}(l/p^{n-1}) w_l(x/p^{n-1}) \right), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (10)$$

где $\widehat{\varphi}(l/p^{n-1}) = 0$, для всех $l \geq p^{m+n-1}$. Кроме того, из теоремы 1 по формуле Пуассона

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(x \oplus k) = \widehat{\varphi}(k) \chi(x, k) \quad (11)$$

выводится следующее свойство разбиения единицы:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(x \oplus k) = 1 \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{R}_+.$$

Приведем аналог формулы Пуассона для дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона (ср. [11, теорема 1]). Пусть компоненты векторов $(a_0, a_1, \dots, a_{p^n-1})$ и $(b_0, b_1, \dots, b_{p^n-1})$ связаны равенствами (6) и (7). Предположим, что $a(j) = a_j$ и $b(j) = b_j$ для $0 \leq j \leq p^n - 1$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{p^m-1} b(p^l j) = p^m \sum_{k=0}^{p^l-1} a(p^m k), \quad (12)$$

где l и m — натуральные числа, $l + m = n$. В связи с формулами (11) и (12) отметим, что для вполне несвязных локально компактных групп (в частности, для групп Виленкина и для коммутативных дискретных групп) в [6] вместо унитарных представлений предлагается применять чисто алгебраические индуцированные представления, что может быть использовано при построении вейвлетов и фреймов (ср. [18, 22, 26, 29]).

Масштабирующая функция φ является ортогональной, если система $\{\varphi(\cdot \ominus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Предложение 2 (см. [31]). Масштабирующая функция φ является ортогональной в $L^2(\mathbb{R}_+)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k \in \mathbb{R}_+} |\widehat{\varphi}(\omega \ominus k)|^2 = 1 \quad \text{для п.в. } \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Подобный критерий для масштабирующих функций на прямой \mathbb{R} хорошо известен (см., например, [4, предложение 1.1.12]).

2. Характеристические свойства ступенчатых масштабирующих функций. Следующее предложение является прямым следствием теоремы 1 и предложения 1.

Предложение 3. Пусть функция $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет уравнению (3), $\widehat{\varphi}(0) = 1$ и $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $\varphi \in \mathcal{S}_{n-1}^{(m)}$;
- (ii) $\prod_{j=1}^{m+n} m_0(p^{-j}\omega) = 0$ для всех $\omega \in [p^m, p^{m+1})$;
- (iii) $\bigcup_{k=-n+1}^m p^{m-k+1}E_k = [p^m, p^{m+1})$,

где m_0 — маска уравнения (3), E_k — множество нулей маски m_0 на $[p^{k-1}, p^k)$.

Доказательство. Согласно (4) для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}(p^{-m-n}\omega) \prod_{j=1}^{m+n} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (13)$$

Пусть выполнено (i). Тогда $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}_m^{(n-1)}$ в силу (2) и из формулы (13) следует (ii) (действительно, если $\omega \in [p^m, p^{m+1})$, то $\widehat{\varphi}(\omega) = 0$ и $\widehat{\varphi}(p^{-m-n}\omega) = 1$, так как $\widehat{\varphi}(0) = 1$ и $p^{-m-n}\omega \in [p^{-n}, p^{-n+1}) \subset [0, p^{1-n})$). Пусть выполнено (ii). Тогда из (13) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = 0 \quad \text{для всех } \omega \in [p^m, p^{m+1})$$

и по формуле (8) получаем $\widehat{\varphi}(\omega) = 0$ для всех $\omega \geq p^m$. С другой стороны, согласно предложению 1 из включения $\text{supp } \varphi \subset [0, p^{n-1})$ следует, что $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}^{(n-1)}$. Таким образом, (i) \Leftrightarrow (ii).

Далее, условие (ii) означает, что для любого $\omega \in [p^m, p^{m+1})$ найдется такой номер $j \in \{1, \dots, m+n\}$, что $m_0(p^{-j}\omega) = 0$. Здесь $p^{-j}\omega \in [p^{m-j}, p^{m-j+1})$, и если $k = m - j + 1$, то $k \in \{-n+1, -n+2, \dots, m\}$. Поскольку $E_k = \{\omega \in [p^{k-1}, p^k) : m_0(\omega) = 0\}$, отсюда следует эквивалентность (ii) \Leftrightarrow (iii). Предложение 3 доказано. \square

Пример 1. Предположим, что m_0 — такая маска уравнения (3), что $m_0(\omega) = 1$ для $\omega \in [0, p^{-r})$ и $m_0(\omega) = 0$ для $\omega \in [p^{-r}, p^{-r+1})$, где $r \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $\varphi = p^{1-r} \mathbf{1}_{[0, p^{-r})}$ (в случае Хаара $r = 1$).

Пусть $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$. Тогда для любого $\omega \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$m_0(\omega) = m_0(0, \omega_1 \dots \omega_n), \quad (14)$$

где $\omega_1, \dots, \omega_n$ — цифры дробной части числа ω . Полагая

$$b[s_1 \dots s_n] := m_0(0, s_1 \dots s_n), \quad s_j \in \{0, \dots, p-1\},$$

в силу формул (6) и (7) замечаем, что множество всех значений $b[s_1 \dots s_n]$ однозначно определяет функцию m_0 . Кроме того, если m_0 — маска масштабирующей функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$, то по теореме 1 для каждого $\omega = \omega_{-m}\omega_{-m+1} \dots \omega_0, \omega_1\omega_2 \dots$ имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = b[\omega_0 \dots \omega_{n-1}] b[\omega_{-1} \dots \omega_{n-2}] \dots b[0 \dots 0\omega_{-m}]. \quad (15)$$

Для данного $r \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $\sigma_r = \sigma_r(m_0)$ множество всех таких векторов

$$(s_0, s_1, \dots, s_r), \quad s_0 \neq 0, \quad s_j \in \{0, 1, \dots, p-1\},$$

что для каждого $l \in \{0, 1, \dots, r\}$ выполнено неравенство

$$b[s_{1-n+l} \dots s_l] \neq 0, \quad (16)$$

где $s_j = 0$ для $j < 0$. Далее, обозначим через $\sigma_\infty = \sigma_\infty(m_0)$ множество таких последовательностей

$$(s_0, s_1, \dots), \quad s_0 \neq 0, \quad s_j \in \{0, 1, \dots, p-1\},$$

что (16) верно для любого $l \in \mathbb{Z}_+$. Из определений видно, что если $\sigma_r = \emptyset$, то $\sigma_{r+1} = \emptyset$, а если $\sigma_\infty \neq \emptyset$, то $\sigma_r \neq \emptyset$ для каждого r .

Предложение 4. Если функция $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$ является маской ступенчатой масштабирующей функции φ с компактным носителем, то $\sigma_\infty = \emptyset$.

Доказательство. Действительно, предположим, что σ_∞ содержит последовательность (s_0, s_1, \dots) такую, что $s_0 \neq 0$. Согласно (15) тогда

$$\widehat{\varphi}(s_0 \dots s_M, s_{M+1} \dots s_{M+n-1}) = b[s_M \dots s_{M+n-1}]b[s_{M-1} \dots s_{M+n-2}] \dots b[0 \dots 0s_0] \neq 0$$

для каждого натурального M . Поэтому носитель функции $\widehat{\varphi}$ не компактен, что в силу предложения 1 противоречит тому, что масштабирующая функция φ ступенчатая. \square

Аналоги сформулированных ниже теорем 2–4 для группы Виленкина G_p доказаны в [46].

Теорема 2. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$ и $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$, где $n \in \mathbb{N}$. Для того чтобы функция m_0 была маской масштабирующей функции $\varphi \in S_{n-1}^{(r-n+1)}$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma_r = \emptyset$.

Теорема 3. Пусть $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$ и $r = p^{n-1} - 1$, где $n \in \mathbb{N}$. Функция m_0 является маской ступенчатой масштабирующей функции с компактным носителем тогда и только тогда, когда $\sigma_r = \emptyset$.

В качестве следствия из теоремы 3 имеем следующее предложение.

Предложение 5. Предположим, что m_0 и r такие, как в теореме 3. Для того чтобы функция m_0 была маской ступенчатой масштабирующей функции с компактным носителем, необходимо и достаточно, чтобы

- либо $b[0 \dots 0s_0] = 0$ для каждого $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$;
- либо $b[0 \dots 0s_0s_1] = 0$ для каждого $s_1 \in \{0, \dots, p-1\}$ вместо того, чтобы $b[0 \dots 0s_0] = 0$ для некоторого $s_0 \neq 0$;
- либо $b[0 \dots 0s_0s_1s_2] = 0$ для каждого $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ вместо того, чтобы $b[0 \dots 0s_0s_1] = 0$ для некоторого вектора (s_0, s_1) , $s_0 \neq 0$;
-;
- либо $b[s_{l-n+2} \dots s_{l+1}] = 0$ для каждого $s_{l+1} \in \{0, \dots, p-1\}$ вместо того, чтобы $b[s_{l-n+1} \dots s_l] = 0$ для некоторого вектора (s_{l-n+1}, \dots, s_l) , $l < r$.

Для иллюстрации формул (9), (10), предложений 2, 5 и теоремы 2 приведем следующие два примера.

Пример 2. Пусть $p = 3$ и $n = 2$.

(а) Если $b[01] = b[02] = 0$, то $\sigma_0 = \emptyset$ (так как $(1), (2) \notin \sigma_0$). Поэтому $\widehat{\varphi} \in S_{-1}^{(1)}$ и $\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_{[0,1/3]}$. Как в примере 1, отсюда получаем $\varphi(x) = (1/3)\mathbf{1}_{[0,1]}(x/3)$.

(б) Если $b[01] = b[20] = b[21] = b[22] = 0$, то $\sigma_1 = \emptyset$ (так как $(1, s), (2, s) \notin \sigma_1$ для любого $s \in \{0, 1, 2\}$). Поэтому $\widehat{\varphi} \in S_0^{(1)}$ и

$$\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_{[0,1/3]} + \widehat{\varphi}(1/3)\mathbf{1}_{[1/3,2/3]} + \widehat{\varphi}(2/3)\mathbf{1}_{[2/3,1]} = \mathbf{1}_{[0,1/3]} + b[01]\mathbf{1}_{[1/3,2/3]} + b[02]\mathbf{1}_{[2/3,1]},$$

где $b[01] = 0$. Следовательно,

$$\varphi(x) = (1/3)\mathbf{1}_{[0,1]}(x/3)(1 + b[02]w_2(x/3)).$$

(с) Если $b[02] = b[10] = b[11] = b[12] = 0$, то как в случае (б) (меняя ролями 1 и 2), имеем

$$\varphi(x) = (1/3)\mathbf{1}_{[0,1]}(x/3)(1 + b[01]w_1(x/3)).$$

(д) Если $b[20] = b[22] = b[10] = b[11] = b[12] = 0$, то $\sigma_2 = \emptyset$. Действительно, очевидно, $(1, s, s'), (2, s, s') \notin \sigma_2$ для всех $s, s' \in \{0, 1, 2\}$. Поэтому $\widehat{\varphi} \in S_1^{(1)}$ и

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} &= \mathbf{1}_{[0,1/3]} + \widehat{\varphi}(1/3)\mathbf{1}_{[1/3,2/3]} + \widehat{\varphi}(2/3)\mathbf{1}_{[2/3,1]} + \widehat{\varphi}(1)\mathbf{1}_{[1,4/3]} + \widehat{\varphi}(4/3)\mathbf{1}_{[4/3,5/3]} + \\ &\quad + \widehat{\varphi}(5/3)\mathbf{1}_{[5/3,2]} + \widehat{\varphi}(2)\mathbf{1}_{[2,7/3]} + \widehat{\varphi}(7/3)\mathbf{1}_{[7/3,8/3]} + \widehat{\varphi}(8/3)\mathbf{1}_{[8/3,3]} = \\ &= \mathbf{1}_{[0,1/3]} + b[01]\mathbf{1}_{[1/3,2/3]} + b[02]\mathbf{1}_{[2/3,1]} + b[01]b[10]\mathbf{1}_{[1,4/3]} + b[01]b[11]\mathbf{1}_{[4/3,5/3]} + \\ &\quad + b[01]b[12]\mathbf{1}_{[5/3,2]} + b[02]b[20]\mathbf{1}_{[2,7/3]} + b[02]b[21]\mathbf{1}_{[7/3,8/3]} + b[02]b[22]\mathbf{1}_{[8/3,3]}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\varphi(x) = (1/3)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/3)(1 + b[01]w_1(x/3) + b[02]w_2(x/3) + b[02]b[21]w_7(x/3)). \quad (17)$$

С помощью предложения 2 проверяется, что эта масштабирующая функция ортогональна, если $|b[01]|^2 + |b[21]|^2 = 1$ и $|b[02]| = 1$.

(е) Если $b[10] = b[11] = b[20] = b[21] = b[22] = 0$, то аналогично случаю (d) (меняя местами 1 и 2), имеем

$$\varphi(x) = (1/3)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/3)(1 + b[01]w_1(x/3) + b[02]w_2(x/3) + b[01]b[12]w_5(x/3)). \quad (18)$$

Эта масштабирующая функция ортогональна, если $|b[01]| = 1$ и $|b[02]|^2 + |b[12]|^2 = 1$.

Известно (см. [46]), что при $p = 3$, $n = 2$ никаких других масштабирующих ступенчатых масштабирующих функций в $L_c^2(\mathbb{R}_+)$, кроме перечисленных в примере 2, не существует.

Пример 3. Пусть $p = 2$ и $n = 3$.

(а) Если $b[001] = 0$, то $\sigma_0 = \emptyset$ (так как $(1) \notin \sigma_0$). Следовательно, $\varphi \in S_2^{(-2)}$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4).$$

(b) Если $b[010] = b[011] = 0$, то $\sigma_1 = \emptyset$ (так как $(1, 1) \notin \sigma_1$ и $(1, 0) \notin \sigma_1$). Поэтому $\varphi \in S_2^{(-1)}$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1 + b[001]w_1(x/4)).$$

(c) Если $b[011] = b[100] = b[101] = 0$, то $\sigma_2 = \emptyset$ (так как $(1, 0, 0) \notin \sigma_2$, $(1, 0, 1) \notin \sigma_2$ и $(1, 1, s) \notin \sigma_2$, $s \in \{0, 1\}$). Следовательно, $\varphi \in S_2^{(0)}$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1 + b[001]w_1(x/4) + b[001]b[010]w_2(x/4)).$$

(d) Если $b[010] = b[110] = b[111] = 0$, то $\sigma_2 = \emptyset$ (так как $(1, 1, 0) \notin \sigma_2$, $(1, 1, 1) \notin \sigma_2$ и $(1, 0, s) \notin \sigma_2$, $s \in \{0, 1\}$). Поэтому $\varphi \in S_2^{(0)}$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1 + b[001]w_1(x/4) + b[001]b[011]w_3(x/4)).$$

(е) Предположим, что $b[100] = b[101] = b[111] = 0$. Отметим, что в силу предложения 4 эти равенства необходимы для компактности носителя функции $\widehat{\varphi}$, если указанные в (а)–(d) условия на значения $b[s_1s_2s_3]$ не выполнены. Действительно, в противном случае $(1, 0, 0, 0, \dots) \in \sigma_\infty$ или $(1, 0, 1, 0, \dots) \in \sigma_\infty$ или $(1, 1, 1, 1, \dots) \in \sigma_\infty$.

Поскольку $(1, 0, 0, s) \notin \sigma_3$, $(1, 0, 1, s) \notin \sigma_3$, $(1, 1, 1, s) \notin \sigma_3$ для $s \in \{0, 1\}$, а также $(1, 1, 0, 0) \notin \sigma_3$, $(1, 1, 0, 1) \notin \sigma_3$, мы получаем $\sigma_3 = \emptyset$. Поэтому $\varphi \in S_2^{(1)}$ и аналогично предыдущим случаям имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1 + b[001]w_1(x/4) + b[001]b[010]w_2(x/4)) + \\ + b[001]b[011]w_3(x/4) + b[001]b[011]b[110]w_6(x/4)). \end{aligned}$$

По предложению 2 эта масштабирующая функция ортогональна, если $|b[001]| = |b[011]| = 1$ и $|b[010]|^2 + |b[110]|^2 = 1$ (ср. [8, пример 3] и [20, пример 2.32]).

Приведем описание ступенчатых масштабирующих функций для случая $n = 2$ при произвольном p . Согласно предложению 5, прежде всего следует рассмотреть случай, когда $b[0s] = 0$ для каждого $s \neq 0$. Тогда $\sigma_0 = \emptyset$ и m_0 является маской масштабирующей функции $\varphi \in S_1^{(-1)}$, для которой, как выше, получается формула $\varphi = (1/p)\mathbf{1}_{[0,p)}$. В этом случае шаг является максимально возможным. Семейство ступенчатых масштабирующих функций со всеми возможными шагами описывается следующей теоремой (случай $p = 3$ был рассмотрен в примере 2).

Теорема 4. Пусть $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(2)}$, $r \in \{1, \dots, p-1\}$, и пусть (ξ_1, \dots, ξ_r) — такой вектор, что $\xi_k \in \{1, \dots, p-1\}$, $\xi_k \neq \xi_{k'}$ для $k \neq k'$. Предположим, что $b[ss'] = 0$ при $s \neq 0$ и $(s, s') \neq (\xi_k, \xi_{k+1})$ для $k \in \{1, \dots, r-1\}$. Тогда m_0 является маской масштабирующей функции $\varphi \in S_1^{(r-1)}$. Более того, если $b[\xi_k \xi_{k+1}] \neq 0$ для $k \in \{1, \dots, r-1\}$ и $b[0\xi_1] \neq 0$, то $\varphi \in S_1^{(r-1)} \setminus S_1^{(r-2)}$.

Аналоги следующих двух предложений для группы Виленкина G_p доказаны в [46].

Предложение 6. Пусть $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(2)}$ является маской масштабирующей функции φ с компактным носителем. Для того чтобы функция φ принадлежала множеству $S_1^{(p-2)} \setminus S_1^{(p-3)}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор $(\xi_1, \dots, \xi_{p-1})$, $\xi_k \in \{1, \dots, p-1\}$, что $b[\xi_k \xi_{k+1}] \neq 0$ для всех $k \in \{1, \dots, p-2\}$ и $b[0\xi_1] \neq 0$.

Предложение 7. Пусть m_0 , r и вектор (ξ_1, \dots, ξ_r) такие, как в теореме 4. Предположим, что $|b[\xi_k \xi_{k+1}]| = 1$ для $k \in \{1, \dots, r-1\}$, $|b[0s]| = 1$ для $s \notin \{\xi_2, \dots, \xi_r\}$ и пусть $b[0\xi_k] = 0$ для $k \in \{2, \dots, r\}$. Тогда m_0 является маской ортогональной ступенчатой масштабирующей функции $\varphi \in S_1^{(r-1)}$.

3. Ступенчатые ортогональные вейвлеты и фреймы Парсеваля. Алгоритмы построения ортогональных вейвлетов в $L^2(\mathbb{R}_+)$ по данной ортогональной масштабирующей функции приведены в [28, § 8.2], [44] и [43, § 5.2]. Если масштабирующая функция φ ступенчатая, то и полученные по указанным алгоритмам ортогональные вейвлеты $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ будут ступенчатыми. Таким образом, для построения ортогональных ступенчатых вейвлетов $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ достаточно найти ортогональную ступенчатую масштабирующую функцию в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Для нахождения таких масштабирующих функций наряду с предложением 7 применяются модифицированное условие Коэна, критерий отсутствия у маски блокирующих множеств и N -валидные деревья.

Известно (см. [33]), что если m_0 является маской такой ортогональной масштабирующей функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то

$$m_0(0) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{p-1} |m_0(\omega + k/p)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (19)$$

Полагая $b_l = m_0(l/p^n)$, $0 \leq l \leq p^n - 1$, запишем условие (19) в виде

$$b_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{p-1} |b_{s+kp^{n-1}}|^2 = 1 \quad \text{для всех } s \in \{0, 1, \dots, p^{n-1} - 1\}. \quad (20)$$

Пример 4. Пусть $n = 2$, $p > 2$ и $l \in \{1, 2, \dots, p-2\}$. Предположим, что множества $E_l^{(0)}$ и $E_l^{(1)}$ образуют такое разбиение множества $\{0, 1, \dots, p-1\}$, что $E_l^{(0)} = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ и $0 \in E_l^{(1)}$. Для фиксированного $j_0 \in E_l^{(1)}$, $j_0 \neq 0$, выберем в (20) такие числа b_s , $s = s_1 + s_2 p$, $s_1, s_2 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, что

- 1) $b_0 = 1$,
- 2) $|b_s| = 1$ для всех $s \in E_l^{(1)} \setminus \{0\}$,
- 3) $|b_{j_1+j_0p}| = |b_{j_2+j_1p}| = \dots = |b_{j_l+j_{l-1}p}| = 1$,
- 4) $b_s = 0$ в остальных случаях.

Согласно предложению 7 соответствующая данной маске m_0 масштабирующая функция φ ортогональна и принадлежит классу $\mathcal{S}_1^{(l)}$ (ср. [35, замечание 3.11] и [57, теорема 4.6]).

Для произвольной функции $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ положим

$$\varphi_{jk}(x) = p^{j/2} \varphi(p^j x \ominus k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Напомним, что функция φ порождает кратномасштабный анализ (КМА) в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot \ominus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, во-вторых, подпространства

$$V_j := \overline{\text{span}}_{L^2(\mathbb{R}_+)} \{\varphi_{jk} : k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

обладают свойствами

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R}_+).$$

Множество $E \subset \mathbb{R}_+$ называется *конгруэнтным* $[0, 1)$ по модулю \mathbb{Z}_+ , если мера Лебега множества E равна 1 и для каждого $x \in [0, 1)$ существует $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $x \oplus k \in E$.

Теорема 5 (см. [14]). Пусть функция $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ является решением уравнения (3) и маска m_0 этого уравнения удовлетворяет условию (19). Предположим, что существует множество $E \subset \mathbb{R}_+$, конгруэнтное $[0, 1)$ по модулю \mathbb{Z}_+ , состоящее из конечного числа p -ичных интервалов, содержащее интервал $[0, p^{-n})$ и такое, что выполнено модифицированное условие Козна

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\omega \in E} |m_0(p^{-j}\omega)| > 0. \quad (21)$$

Тогда функция φ порождает КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Если коэффициенты уравнения (3) выбраны так, чтобы выполнялись условия (19) и $m_0(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in [0, 1/p)$, то в условии (21) можно выбрать $E = [0, 1)$. Для маски m_0 из примера 4 модифицированное условие Козна выполнено на множестве $E = \{\omega \in [0, 1) : |m_0(\omega)| = 1\}$.

Блокирующее множество для маски m_0 определяется следующим образом (см. [8, 13]). Для произвольного $M \subset [0, 1)$ положим

$$T_p M = \bigcup_{l=0}^{p-1} \left\{ l/p + \omega/p : \omega \in M \right\}.$$

Множество M называется *блокирующим для маски m_0* , если оно представимо в виде объединения p -ичных интервалов ранга $n - 1$, не содержит интервала $[0, p^{-n+1})$ и удовлетворяет условию

$$T_p M \setminus M \subset Z(m_0),$$

где $Z(m_0) := \{\omega \in [0, 1) : m_0(\omega) = 0\}$.

Теорема 6 (см. [13]). Пусть функция $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ является решением уравнения (3) и маска m_0 этого уравнения удовлетворяет условию (19). Тогда функция φ порождает КМА в том и только в том случае, когда маска m_0 не имеет блокирующих множеств.

Примеры применения теорем 5 и 6 к построению ортогональных масштабирующих функций для малых p и n имеются в [8, 9, 35, 36, 43].

В [58] для построения ступенчатых масштабирующих функций на группе Виленкина G_p применялись (N, m) -элементарные множества и N -валидные деревья. Следуя краткому сообщению [39], сформулируем определения этих понятий для полупрямой \mathbb{R}_+ и проиллюстрируем их несколькими примерами.

Определение 1. Пусть $N, m \in \mathbb{N}$. Множество E называется (N, m) -элементарным множеством, если существуют такие числа $\zeta_j, j = 0, 1, \dots, p^N - 1$, что

$$E = \bigcup_{j=0}^{p^N-1} \Delta^{(N)}(\zeta_j), \quad \Delta^{(N)}(\zeta_j) \cap \Delta^{(N)}(\zeta_{j'}) = \emptyset \quad \text{для } j \neq j',$$

где $\Delta^{(N)}(\zeta_j) := [\zeta_j/p^N, (\zeta_j + 1)/p^N)$, $\zeta_0 = 0$, и для $\eta_j = [\zeta_j]$, $\xi_j = \{\zeta_j\}$ выполнены следующие условия:

- (a) $\eta_j \in \{0, 1, \dots, p^m - 1\}$;
- (b) $\xi_j \in \{0, 1/p^N, \dots, (p^N - 1)/p^N\}$, $\xi_j \neq \xi_{j'}$ для $j \neq j'$;
- (c) $E \cap [p^{-N+l}, p^{-N+l+1}) \neq \emptyset$ для $l = 0, 1, \dots, m + N - 1$.

Заметим, что из условия (a) следует равенство

$$\bigcup_{j=0}^{p^N-1} [\xi_j, \xi_j + p^{-N}) = [0, 1).$$

Кроме того, очевидно, всякое (N, m) -элементарное множество E имеет единичную меру Лебега и содержится в интервале $[0, p^m)$.

Определение 2. *Периодическим продолжением $(N, 1)$ -элементарного множества \tilde{E} называется множество*

$$P(\tilde{E}) := \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{p^s-1} (\tilde{E} + l \cdot p). \quad (22)$$

Отметим, что $P(\tilde{E}) \supset \tilde{E} \supset [0, p^{-N})$.

Пример 5. В случае $N = 1, p = 3$ множество \tilde{E} в определении 2 имеет вид

$$\tilde{E} = [0, 1/3) \cup [\zeta_1/3, (\zeta_1 + 1)/3) \cup [\zeta_2/3, (\zeta_2 + 1)/3),$$

где числа ζ_1 и ζ_2 представимы в виде

$$\zeta_j = \eta_j + \xi_j, \quad \eta_j \in \{0, 1, 2\}, \quad \xi_j \in \{1/3, 2/3\}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \xi_1 \neq \xi_2.$$

Числа ζ_1 и ζ_2 выбираются так, чтобы пересечение множества \tilde{E} с каждым из интервалов $[1/3, 1)$ и $[1, 3)$ было не пустым. В частности, при $\eta_1 = 0, \xi_1 = 1/3, \eta_2 = 2, \xi_2 = 2/3$, получаем $(1, 1)$ -элементарное множество

$$\tilde{E} = [0, 1/3) \cup [1/3, 2/3) \cup [8/3, 3).$$

Периодическое продолжение этого множества есть

$$P(\tilde{E}) = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_s(\tilde{E}),$$

где

$$F_1(\tilde{E}) = \tilde{E} \cup (\tilde{E} + 3) \cup (\tilde{E} + 6),$$

$$F_2(\tilde{E}) = F_1(\tilde{E}) \cup (\tilde{E} + 9) \cup (\tilde{E} + 12) \cup (\tilde{E} + 15) \cup (\tilde{E} + 18) \cup (\tilde{E} + 21) \cup (\tilde{E} + 24),$$

и, вообще,

$$F_s(\tilde{E}) = F_{s-1}(\tilde{E}) \cup \left(\bigcup_{k=3^{s-1}-1}^{3^s-1} (\tilde{E} + 3k) \right) \quad \text{для } s \geq 2.$$

Определение 3. Будем говорить, что задано N -валидное дерево T , если T ориентировано от листьев к корню и удовлетворяет следующим условиям:

- (а) каждая вершина дерева T имеет значение из множества $\{0, 1, \dots, p-1\}$;
- (б) корень и все вершины дерева T до $(N-1)$ -го уровня включительно имеют значение 0;
- (в) любой путь длины $N-1$ встречается в T и притом только один раз.

Каждому N -валидному дереву T сопоставим множество индексов $I(T)$ по правилу:

$$s \in I(T) \iff s = 0 \quad \text{или} \quad s = \sum_{k=0}^N s_k p^k, \quad s_k \in \{0, 1, \dots, p-1\},$$

при условии, что путь $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_N$ встречается хотя бы один раз в каком-нибудь из путей дерева T .

Предложение 8 (см. [58]). *Для любого N -валидного дерева T множество*

$$\tilde{E}_T := \bigcup_{s \in I(T)} [sp^{-N}, (s+1)p^{-N}) \quad (23)$$

является $(N+1, 1)$ -элементарным.

Пример 6. Пусть $N = 2$, $p = 3$, а дерево T выбрано как на рис. 1 в [58], но с противоположной ориентацией. Дерево T имеет следующие пути, начинающиеся в листьях и оканчивающиеся в корне:

$$\begin{aligned} P_1 : 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 0, & \quad P_2 : 1 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 0, \\ P_3 : 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 0, & \quad P_4 : 2 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Множество индексов

$$I(T) = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 19, 21\}$$

находится из условия

$$s \in I(T) \setminus \{0\} \iff s = s_0 + 3s_1 + 9s_2,$$

где $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2$ встречается хотя бы один раз в каком-нибудь из путей P_1, P_2, P_3, P_4 . Из формулы (23) для данного дерева T получается множество

$$\tilde{E}_T = [0, 1/9) \cup [2/9, 1/3) \cup [4/9, 1) \cup [19/9, 20/9) \cup [7/3, 22/9).$$

Положим $n = 3$ и выберем в условии (20) отличные от нуля значения маски

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{26} a_k \overline{w_k(\omega)}$$

так, что $b_0 = 1$, $|b_2| = |b_4| = |b_5| = |b_6| = |b_7| = |b_8| = |b_{19}| = |b_{21}| = 1$. Отметим, что если все эти значения равны 1, то маска m_0 на интервале $[0, 1)$ совпадает с характеристической функцией множества $\tilde{E}_T/3$. Кроме того, $m_0(\omega) = 1$ для всех $\omega \in [0, 1/27)$ и в силу предложения 3 формула

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^3 m_0(3^{-j}\omega), \quad \omega \in [0, 3),$$

задаёт масштабирующую функцию $\varphi \in \mathcal{S}_2^{(2)}$ (ср. [46, пример 4]). Для этой функции с помощью формулы (10) получается разложение

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{1}{9} \mathbf{1}_{[0,1)}(y) & \left(1 + b_2 w_2(y) + b_2 b_6 w_6(y) + b_2 b_7 w_7(y) + b_2 b_8 w_8(y) + \right. \\ & \left. + b_2 b_6 b_{19} w_{19}(y) + b_2 b_7 b_{21} w_{21}(y) + b_2 b_4 b_6 b_{19} w_{58}(y) + b_2 b_5 b_6 b_{19} w_{59}(y) \right), \end{aligned}$$

где $y = x/9$, $x \in [0, 9)$. Видно, что функция φ отлична от нуля на множестве \tilde{E}_T и обращается в нуль на $\mathbb{R}_+ \setminus \tilde{E}_T$. Более того, модифицированное условие Коэна

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\omega \in E} |m_0(3^{-j}\omega)| > 0$$

выполнено для $E = \tilde{E}_T$. Значит, по теореме 5 система $\{\varphi(\cdot \ominus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Построенная в примере 6 ступенчатая масштабирующая функция относится к случаю $p = n = 3$. Из предложения 4 следует, что если при $p = n = 3$ некоторое решение φ масштабирующего уравнения (3) является ступенчатой функцией, то среди нулевых значений маски m_0 уравнения (3) будут следующие: $b_9, b_{10}, b_{13}, b_{18}, b_{20}, b_{26}$.

Определение 4. Говорят, что множество E порождено N -валидным деревом T , если

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} p^k P(\tilde{E}_T/p),$$

где множество \tilde{E}_T задано по формуле (23).

Предложение 9 (см. [58]). Пусть множество E порождено N -валидным деревом T с высотой H . Тогда множество E представимо в виде

$$E = \bigcap_{k=1}^{H-N+1} p^k P(\tilde{E}_T/p)$$

и является (N, m) -элементарным множеством с $m = H - 2N + 1$.

Следующая теорема представляет собой переформулировку теоремы 4.1 из [58].

Теорема 7. Пусть модуль маски m_0 масштабирующего уравнения (3) принимает только два значения: 0 или 1, причем $m_0(0) = 1$. Предположим, что решение φ уравнения (3), заданное по формуле

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

таково, что $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}_m^{(N)}$ и $|\hat{\varphi}| = \mathbf{1}_E$, где $N = n - 1$ и E является (N, m) -элементарным множеством. Тогда существует N -валидное дерево T с высотой $H = m + 2N - 1$, порождающее множество E .

При условиях предложения 9 имеем $E \subset [0, p^m)$ и

$$\mathbf{1}_E(\omega) = \prod_{k=1}^{m+N} \mathbf{1}_{P(\tilde{E}_T/p)}(p^{-k}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (24)$$

С другой стороны, для данной функции φ имеем

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{\varphi}(p^{-m-N}\omega) \prod_{j=1}^{m+N} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (25)$$

Отметим, что формула (25) совпадает с (24), если $\hat{\varphi} = \mathbf{1}_E$ и $m_0(\omega) = \mathbf{1}_{P(\tilde{E}_T/p)}(\omega)$ для $\omega \in \tilde{E}_T/p$ (при этом $p^{-m-N}E \subset [0, p^{-N}) \subset E$).

Пример 7. Пусть $N = 2$, $p = 3$, а дерево T и множество \tilde{E}_T как в примере 6. Тогда $H = 5$ и по предложению 9 множество

$$E = \bigcap_{k=1}^4 3^k P(\tilde{E}_T/3), \quad E \subset [0, 9),$$

является $(2, 2)$ -элементарным. Полагая $\tilde{E}_0 = \tilde{E}_T/3$, как в примере 5 определим множества

$$F_1(\tilde{E}_0) = \tilde{E}_0 \cup (\tilde{E}_0 + 3) \cup (\tilde{E}_0 + 6),$$

$$F_s(\tilde{E}_0) = F_{s-1}(\tilde{E}_0) \cup \left(\bigcup_{k=3^{s-1}-1}^{3^s-1} (\tilde{E}_0 + 3k) \right) \quad \text{для } s \geq 2.$$

Тогда

$$P(\tilde{E}_T/3) = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_s(\tilde{E}_0).$$

Если функция φ определена условием $\hat{\varphi} = \mathbf{1}_E$, то согласно (24) и (25) имеем

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{k=1}^4 \mathbf{1}_{P(\tilde{E}_T/3)}(3^{-k}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

и с помощью модифицированного критерия Козна проверяется, что масштабирующая функция φ является ортогональной.

Произвольное N -валидное дерево T может быть записано в векторной форме \tilde{T} таким образом, что выполнены следующие условия:

- (а) вершинами дерева \tilde{T} являются N -мерные векторы $\mathbf{s} = (s_N, s_{N-1}, \dots, s_1)$ с компонентами $s_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $i \in 1, 2, \dots, N$;
- (б) дерево \tilde{T} ориентировано от листьев к корню, причем корнем дерева \tilde{T} является N -мерный нулевой вектор;
- (с) для любой дуги $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{t}$ дерева \tilde{T} выполнено условие «суффикс-префикс»: первые $N-1$ компонент вектора \mathbf{t} совпадают с последними $N-1$ компонентами вектора \mathbf{s} .

Высоты деревьев \tilde{T} и T связаны равенством $\tilde{H} = H - N + 1$. Векторная форма применяется при $N \geq 2$; в случае $N = 1$ эти формы отождествляются: $\tilde{T} = T$.

Вектору $\mathbf{t} = (t_N, t_{N-1}, \dots, t_1)$ поставим в соответствие число $t = t_1 + t_2p + \dots + t_Np^{N-1}$, $t \in \{0, 1, \dots, p^N - 1\}$. Всем исходящим из вершины $\mathbf{s} = (s_N, s_{N-1}, \dots, s_1)$ дерева \tilde{T} дугам $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{t}$ приписываются положительные веса λ_t , сумма которых равна 1. Аналогом сформулированной в [3] теоремы является следующее предложение.

Предложение 10. Пусть числа λ_t определены для N -валидного дерева \tilde{T} как указано выше, причем $N = n - 1$. Предположим, что ненулевые значения маски m_0 выбраны так, что $b_0 = 1$ и $|b_{t+kp^N}|^2 = \lambda_t$ для $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $t \in \{0, 1, \dots, p^N - 1\}$. Тогда решение φ уравнения (3), заданное по формуле

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

принадлежит классу $\mathcal{S}_N^{(m)}$, где $m = \tilde{H} - N$.

Для группы Виленкина G_p необходимые и достаточные условия ортонормированности системы целых сдвигов масштабирующей функции, определяемой аналогично функции φ из предложения 10, доказаны в [24].

При построении фреймов Парсеваля (т.е. нормализованных жёстких фреймов; см. [65, определение 2.1]) вместо (20) применяется условие

$$b_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{p-1} |b_{s+kp^{n-1}}|^2 \leq 1 \quad \text{для всех } s \in \{0, 1, \dots, p^{n-1} - 1\}. \quad (26)$$

Это условие гарантирует принадлежность классу $L^2(\mathbb{R}_+)$ функции φ , заданной своим преобразованием Уолша—Фурье по формуле (8) (ср. [8, предложение 6] и [17, раздел 2]). В сочетании с приведенными в разделе 2 характеристическими свойствами условие (26) задает класс масок, для которых соответствующие нормализованные жёсткие фреймы состоят из ступенчатых функций. В [38] определены три типа вейвлет-фреймов на \mathbb{R}_+ : КМА-фреймы, маски которых удовлетворяют условию (26) (см. [38, раздел 2]); фреймы, ассоциированные с «допустимым условием» типа Добеши (см. [38, теорема 3.3], [56]); и фреймы, ассоциированные с ядрами типа Дирихле—Уолша. Вычислительные алгоритмы для построения фреймов первого типа изложены в [35, 42, 46], а для группы Кантора фреймы второго и третьего типов рассматривались в [34] (в этих случаях условие (26) не требуется). Для фреймов на локальных полях аналоги «допустимого условия» типа Добеши содержатся в [56]. Недавно доказано (см. [19]), что для произвольного локального поля K множество жёстких вейвлет фреймов не плотно в $L^2(K)$. Известно, что в случае простого p группа Виленкина G_p изоморфна аддитивной группе поля формальных рядов Лорана над конечным полем $GF(p)$ (о соответствующих масштабирующих функциях см., например, [20, теорема 2.29], [21, 23, 59]). Изучение жёстких фреймов на поле p -адических чисел \mathbb{Q}_p представляет особый интерес, поскольку не существует «нетривиального» ортогонального базиса в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, состоящего из ступенчатых вейвлетов с компактными носителями. Действительно, согласно [30, 64] любой такой ортогональный базис в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ является модифицированным базисом Хаара. Подробная библиография о вейвлетах и фреймах на локальных полях имеется в [20] (см. также [21, 22, 25, 26]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — М.: ЛКИ, 2008.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
3. Лукомский С. Ф., Бердников Г. С., Крусс Ю. С. Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина// Мат. заметки. — 2015. — 98, № 2. — С. 310–313.
4. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2006.
5. Новиков И. Я., Скопина М. А. Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые? Мат. заметки. — 2012. — 91, № 6. — С. 895–898.
6. Паршин А. Н. Записки о формуле Пуассона// Алгебра анал. — 2011. — 23, № 5. — С. 1–54.
7. Протасов В. Ю. Аппроксимация диадическими всплесками// Мат. сб. — 2007. — 198, № 11. — С. 135–152.
8. Протасов В. Ю., Фарков Ю. А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой// Мат. сб. — 2006. — 197, № 10. — С. 129–160.
9. Родионов Е. А., Фарков Ю. А. Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши// Мат. заметки. — 2009. — 86, № 3. — С. 429–444.
10. Скопина М. А., Фарков Ю. А. Функции типа Уолша на M -положительных множествах в \mathbb{R}^d // Мат. заметки. — 2022. — 111, № 4. — С. 631–635.
11. Устинов А. В. Дискретный аналог формулы суммирования Пуассона// Мат. заметки. — 2003. — 73, № 1. — С. 106–112.
12. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — 69, № 3. — С. 193–220.
13. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп// Мат. заметки. — 2007. — 82, № 6. — С. 934–952.
14. Фарков Ю. А. Биортогональные всплески на группах Виленкина// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2009. — 265. — С. 110–124.
15. Фарков Ю. А. Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина–Крестенсона// Мат. заметки. — 2011. — 89, № 6. — С. 914–928.
16. Фарков Ю. А. Ортогональные всплески в анализе Уолша// в кн.: Современные проблемы математики и механики. Т. XI. Вып. 1. Математика. К 80-летию В. А. Скворцова. Обобщенные интегралы и гармонический анализ (Лукашенко Т. П., Солодов А. П., ред.). — М.: Изд-во МГУ, 2016. — С. 62–75.
17. Фарков Ю. А. Фреймы в анализе Уолша, матрицы Адамара и равномерно распределенные множества// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 199. — С. 17–30.
18. Чернов В. М. Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований. — М.: Физматлит, 2007.
19. Behera B. Density of frame wavelets and tight frame wavelets in local fields// Complex Anal. Oper. Theory. — 2021. — 15, № 6. — 102.
20. Behera B., Jahan Q. Wavelet Analysis on Local Fields of Positive Characteristic. — Singapore: Springer, 2021.
21. Benedetto J. J., Benedetto R. L. A wavelet theory for local fields and related groups// J. Geom. Anal. — 2004. — 14. — P. 423–456.
22. Benedetto J. J., Benedetto R. L. Frames of translates for number-theoretic groups// J. Geom. Anal. — 2020. — 30, № 4. — P. 4126–4149.
23. Benedetto R. L. Examples of wavelets for local fields// Contemp. Math. — 2004. — 345. — P. 27–47.
24. Berdnikov G. S. Necessary and sufficient condition for an orthogonal scaling function on Vilenkin groups// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2019. — 19, № 1. — P. 24–33.
25. Berdnikov G., Kruss Yu., Lukomskii S. How to construct wavelets on local fields of positive characteristic// Lobachevskii J. Math. — 2017. — 38, № 4. — P. 615–621.
26. Bownik M., Iverson J. W. Multiplication-invariant operators and the classification of LCA group frames// J. Funct. Anal. — 2021. — 280, № 2. — 108780.
27. Chrestenson H. E. A class of generalized Walsh functions// Pac. J. Math. — 1955. — 5, № 1. — P. 17–32.
28. Debnath L., Shah F. A. Wavelet Transforms and Their Applications. — Springer, 2015.
29. Evdokimov S. Haar multiresolution analysis and Haar bases on the ring of rational adeles// J. Math. Sci. — 2013. — 192, № 2. — P. 215–219.

30. *Evdokimov S., Skopina M.* On orthogonal p -adic wavelet bases// J. Math. Anal. Appl. — 2015. — 424, № 2. — P. 952–965.
31. *Farkov Yu. A.* Orthogonal p -wavelets on \mathbb{R}_+ // Proc. Int. Conf. on Wavelets and Splines (St. Petersburg, Russia, July 3–8, 2003). — Saint Petersburg: St. Petersburg Univ. Press, 2005. — P. 4–26.
32. *Farkov Yu. A.* Multiresolution analysis and wavelets on Vilenkin groups// Facta Univ. Ser. Electr. Energ. — 2008. — 21, № 3. — P. 309–325.
33. *Farkov Yu. A.* On wavelets related to the Walsh series// J. Approx. Theory. — 2009. — 161. — P. 259–279.
34. *Farkov Yu. A.* Examples of frames on the Cantor dyadic group// J. Math. Sci. — 2012. — 187, № 1. — P. 22–34.
35. *Farkov Yu. A.* Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis// Poincaré J. Anal. Appl. — 2015. — № 2. — P. 13–36.
36. *Farkov Yu. A.* On the best linear approximation of holomorphic functions// J. Math. Sci. — 2016. — 218, № 5. — P. 678–698.
37. *Farkov Yu. A.* Nonstationary multiresolution analysis for Vilenkin groups// Proc. Int. Conf. on Sampling Theory and Applications (Tallinn, Estonia, July 3-7, 2017), 2017. — P. 595–598.
38. *Farkov Yu. A.* Wavelet frames related to Walsh functions// Eur. J. Math. — 2019. — 5, № 1. — P. 250–267.
39. *Farkov Yu. A.* Chrestenson–Levy system and step scaling functions// Bull. Gumilyov Eurasian Natl. Univ. Ser. Math. Comput. Sci. Mech. — 2020. — 130, № 1. — P. 59–72.
40. *Farkov Yu. A.* Discrete wavelet transforms in Walsh analysis// J. Math. Sci. — 2021. — 257, № 1. — P. 127–137.
41. *Farkov Yu. A.* Finite Parseval frames in Walsh analysis// J. Math. Sci. — 2022. — 263, № 4. — P. 579–589.
42. *Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties// Int. J. Wavelets Multires. Inf. Process. — 2015. — 13, № 5. — 1550036.
43. *Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H.* Construction of Wavelets through Walsh Functions. — Singapore: Springer, 2019.
44. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups// p -Adic Num. Ultramet. Anal. Appl. — 2011. — 3, № 3. — P. 181–195.
45. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* On biorthogonal discrete wavelet bases// Int. J. Wavelets Multires. Inf. Process. — 2015. — 13, № 1. — 1550002.
46. *Farkov Yu. A., Skopina M. A.* Step wavelets on Vilenkin groups// J. Math. Sci. — 2022. — 266, № 5. — P. 696–708.
47. *Gajić D. B., Stanković R. S.* Computation of the Vilenkin–Chrestenson transform on a GPU// J. Mult.-Val. Log. Soft Comput. — 2015. — 24, № 1-4. — P. 317–340.
48. *Hirn M. J.* The refinability of step functions// Proc. Am. Math. Soc. — 2010. — 136, № 3. — P. 899–908.
49. *Karapetyants M. A., Protasov V. Yu.* Spaces of dyadic distributions// Funct. Anal. Appl. — 2020. — 54, № 4. — P. 272–277.
50. *Krivoshein A. V., Lebedeva E. A.* Uncertainty principle for the Cantor dyadic group// J. Math. Anal. Appl. — 2015. — 423, № 2. — P. 1231–1242.
51. *Krivoshein A., Protasov V., Skopina M.* Multivariate Wavelet Frames. — Singapore: Springer, 2016.
52. *Lang W. C.* Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group// SIAM J. Math. Anal. — 1996. — 27, № 1. — P. 305–312.
53. *Lang W. C.* Wavelet analysis on the Cantor dyadic group// Houston J. Math. — 1998. — 24, № 3. — P. 533–544.
54. *Lawton W., Lee S. L., Shen Z.* Characterization of compactly supported refinable splines// Adv. Comput. Math. — 1995. — 3, № 1-2. — P. 137–145.
55. *Lebedeva E. A.* Approximation properties of systems of periodic wavelets on the Cantor group// J. Math. Sci. — 2020. — 244, № 4. — P. 642–648.
56. *Li D., Jiang H.* The necessary condition and sufficient conditions for wavelet frame on local fields// J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 344, № 1. — P. 500–510.
57. *Lukomskii S. F.* Step refinable functions and orthogonal MRA on p -adic Vilenkin groups// J. Fourier Anal. Appl. — 2014. — 20. — P. 42–65.
58. *Lukomskii S. F., Berdnikov G. S.* N -Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups// Int. J. Wavelets Multires. Inf. Process. — 2015. — 13, № 5. — 1550037.

59. *Mahapatra P., Singh D.* Construction of MRA and non-MRA wavelet sets on the Cantor dyadic group// Bull. Sci. Math. — 2021. — 167. — 102945.
60. *Mallat S.* A Wavelet Tour of Signal Processing. The Sparse Way. — Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2009.
61. *Platonov S. S.* Some problems in the theory of approximation of functions on locally compact Vilenkin groups// *p-Adic Num. Ultramet. Anal. Appl.* — 2019. — 11, № 2. — P. 163–175.
62. *Plotnikov M.* On the Vilenkin-Chrestenson systems and their rearrangements// *J. Math. Anal. Appl.* — 2020. — 492, № 1. — 124391.
63. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. — New York: Adam Hilger, 1990.
64. *Skopina M.* *p-Adic wavelets*// *Poincaré J. Anal. Appl.* — 2015. — № 2. — P. 53–63.
65. *Waldron S.* An Introduction to Finite Tight Frames. — New York: Springer, 2018.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Фарков Юрий Анатольевич
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте РФ, Москва
E-mail: farkov-ya@ranepa.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 150–159
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-150-159

УДК 517.53, 517.54, 514.17

КРИТЕРИИ ПОЛНОТЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕРМИНАХ ШИРИНЫ В НАПРАВЛЕНИИ

© 2023 г. Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, Е. Г. КУДАШЕВА, А. Е. САЛИМОВА

Аннотация. Установлен критерий полноты экспоненциальной системы в пространствах функций, непрерывных на выпуклом компакте и голоморфных во внутренности этого компакта, а также в пространствах голоморфных функций в выпуклой области в терминах ширины компакта или области в направлении. Основные результаты сформулированы исключительно через соотношения между шириной в направлении, шириной или диаметром компакта или области с одной стороны и так называемыми логарифмическими субмерами или логарифмическими блок-плотностями распределения показателей экспоненциальной системы с другой.

Ключевые слова: полнота систем функций, экспоненциальная система, ширина в направлении, диаметр, целая функция экспоненциального типа, распределение корней, опорная функция.

COMPLETENESS CRITERIA OF AN EXPONENTIAL SYSTEM IN GEOMETRIC TERMS OF BREADTH IN THE DIRECTION

© 2023 B. N. KHABIBULLIN, E. G. KUDASHEVA, A. E. SALIMOVA

ABSTRACT. In this paper, we establish criterions for the completeness of an exponential system in spaces of functions that are continuous on a convex compact set and holomorphic in the interior of this compact set and in spaces of holomorphic functions in a convex domain in terms of the directional width of a compact set or a domain. The main results are formulated exclusively in terms of the relationship between the breadth in the direction or the diameter of a compact set or a domain, on the one hand, and the so-called logarithmic submeasures or logarithmic block densities of the distribution of exponential system indicators, on the other hand.

Keywords and phrases: completeness of systems of functions, exponential system, breadth in the direction, diameter, entire function of exponential type, distribution of roots, support function.

AMS Subject Classification: 30B60, 30D15, 52A38, 31A05

1. Введение. Формулировки критериев в терминах ширины множества. Одноточечные множества $\{a\}$ часто записываем без фигурных скобок, т.е. просто как a . Так, $\mathbb{N}_0 := 0 \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ для множества $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ натуральных чисел, а множество $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup +\infty$ — верхнее порядковое пополнение множества \mathbb{N}_0 со стандартным отношением порядка \leq точной верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{N}_0 \notin \mathbb{N}_0$, для которой выполнены неравенства $n \leq +\infty$ при всех $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Множество всех действительных чисел \mathbb{R} с таким же отношением порядка \leq рассматриваем и как вещественную ось в комплексной плоскости \mathbb{C} , а множество всех положительных чисел $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ — как положительную полуось в \mathbb{R} или в \mathbb{C} . Порядковое пополнение множества \mathbb{R} верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{R}$ и нижней гранью $-\infty := \inf \mathbb{R}$ даёт расширенные

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124) при поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-888).

вещественную ось $\overline{\mathbb{R}} := +\infty \cup \mathbb{R} \cup -\infty$ и положительную полуось $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+ \cup +\infty$. Для *пустого* множества \emptyset по определению $\sup \emptyset := -\infty$ и $\inf \emptyset := +\infty$.

Система векторов из топологического векторного пространства *полна* в нём, если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с этим пространством. Здесь мы обсуждаем только полноту экспоненциальных систем в функциональных пространствах. Истоки нашего исследования — в следующем результате П. Мальявена и Л. А. Рубела из их совместной статьи [32] начала 1960-х гг. Для формулировки их критерия *открытую и замкнутую полосы* ширины $b \in \overline{\mathbb{R}}^+$ в \mathbb{C} , симметричные относительно вещественной оси \mathbb{R} и нуля, обозначаем соответственно через

$$\text{str}_{b/2} := \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| < b/2\}, \quad \overline{\text{str}}_{b/2} := \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| \leq b/2\}. \quad (1)$$

Критерий Мальявена – Рубела (см. [32, теорема 9.1]). Пусть $0 < b \in \mathbb{R}^+$ и $Z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — *возрастающая последовательность положительных попарно различных чисел, для которой последовательность $(n/z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена, т.е. Z — последовательность конечной верхней плотности. Экспоненциальная система Exp^Z , состоящая из функций $z \mapsto e^{z_n z}$, $n \in \mathbb{N}$, *полна в пространстве непрерывных на $\overline{\text{str}}_{b/2}$ и голоморфных на $\text{str}_{b/2}$ функций, снабжённом топологией равномерной сходимости на компактах из $\overline{\text{str}}_{b/2}$, если и только если не существует числа $C \in \mathbb{R}$, для которого**

$$\sum_{r < z_n \leq R} \frac{1}{z_n} \leq \frac{b}{2\pi} \ln \frac{R}{r} + C \quad \text{при всех } 0 < r < R < +\infty. \quad (2)$$

Замечание 1. Оригинальная формулировка [32, теорема 9.1] — это *критерий неполноты экспоненциальной системы Exp^{-Z} из функций $z \mapsto e^{-z_n z}$, $n \in \mathbb{N}$, для полос (1) ширины $2\pi b$ вместо b . Она эквивалентна сформулированному нами критерию полноты Мальявена–Рубела.*

Для компакта K в \mathbb{C} через $C(K)$ обозначим банахово пространство (алгебру) непрерывных функций $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ с *sup-нормой*

$$\|f\|_{C(K)} := \sup \left\{ |f(z)| \mid z \in K \right\}. \quad (3)$$

Для открытого подмножества $O \subset \mathbb{C}$ через $\text{Hol}(O)$ обозначаем пространство голоморфных функций $f: O \rightarrow \mathbb{C}$ с топологией равномерной сходимости на всех компактах $K \subset O$, определяемой полунормами (3). Для компакта $K \subset \mathbb{C}$ с *внутренностью* $\text{int } K$ через $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ обозначаем банахово пространство непрерывных на K и голоморфных на *внутренности* $\text{int } K$ функций $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ с *sup-нормой* (3). Очевидно, если $\text{int } K = \emptyset$, то $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K) = C(K)$.

Всюду далее через Z обозначаем *распределение точек* на комплексной плоскости \mathbb{C} , среди которых могут быть повторяющиеся и, вообще говоря, даже бесконечное количество раз. Распределение точек Z однозначно определяется функцией, действующей из \mathbb{C} в $\overline{\mathbb{N}}_0$ и равной в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ количеству повторений этой точки z в распределении точек Z . Для такой функции, которую часто называют *функцией кратности*, или *дивизором* распределения точек Z (см. [22, пп. 0.1.2–0.1.3]), сохраняем то же обозначение Z . Другими словами, $Z(z)$ — это количество вхождений точки $z \in \mathbb{C}$ в Z ; пишем $z \in Z$, если $Z(z) > 0$. Два распределения точек Z и W *совпадают* (обозначение $Z = W$), если $Z(z) \equiv W(z) \stackrel{z \in \mathbb{C}}{=} W(z)$. Будем писать $Z \subset W$, если $Z(z) \leq W(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. *Объединение* $Z \cup W$ определяется тождеством $(Z \cup W)(z) \stackrel{z \in \mathbb{C}}{=} Z(z) + W(z)$, а *разность* $Z \setminus W$ при условии $W \subset Z$ — тождеством $(Z \setminus W)(z) \stackrel{z \in \mathbb{C}}{=} Z(z) - W(z)$. Распределение точек Z можно эквивалентным образом трактовать и как меру со значениями в $\overline{\mathbb{N}}_0$ с тем же обозначением

$$Z(S) := \sum_{z \in S} Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0 \quad \text{для любого } S \subset \mathbb{C}. \quad (4)$$

При такой трактовке пересечение $Z \cap S$ однозначно определяется сужением меры Z на S , а для положительной функции $f: S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ можно корректно определить суммы

$$\sum_{\substack{z \in Z \\ z \in S}} f(z) := \int_S f dZ =: \sum_{z \in Z \cap S} f(z) \in \overline{\mathbb{R}}^+. \quad (5)$$

Произведение числа $w \in \mathbb{C} \setminus 0$ на распределению точек Z определяет распределение точек wZ через функцию кратности $(wZ)(z) \stackrel{\text{def}}{=} Z(z/w)$. В частности, $-Z := (-1)Z$. Для числа $\theta \in \mathbb{R}$ распределение точек $e^{i\theta}Z$ с функцией кратности $(e^{i\theta}Z)(z) \stackrel{\text{def}}{=} Z(e^{-i\theta}z)$ называем *поворотом распределения точек Z на угол θ* .

При $z \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{R}^+$ через

$$D_z(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z' - z| < r\}, \quad \overline{D}_z(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z' - z| \leq r\}$$

обозначаем соответственно *открытый и замкнутый круги*, а через $\partial\overline{D}_z(r) := \overline{D}_z(r) \setminus D_z(r)$ — *окружность с центром $z \in \mathbb{C}$ радиуса r* .

Простейшая характеристика распределение точек Z на \mathbb{C} — это его *верхняя p -плотность*, определяемая в (4) как величина

$$p\text{-}\overline{\text{dens}}(Z) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{Z(\overline{D}_0(r))}{r^p} \in \overline{\mathbb{R}}^+. \quad (6)$$

В дальнейшем при $p = 1$ в (6) порядок p не упоминаем и вместо $1\text{-}\overline{\text{dens}}(Z)$ пишем просто $\overline{\text{dens}}(Z)$; в случае $\overline{\text{dens}}(Z) \in \mathbb{R}^+$ называем Z распределением точек *конечной верхней плотности*, а при $\overline{\text{dens}}(Z) = +\infty$ — распределением точек *бесконечной верхней плотности*.

Левая часть неравенства (2), использованная в [32] и [34, гл. 22] в качестве основной, так называемой логарифмической характеристики распределения точек Z на \mathbb{R}^+ , была распространена на произвольные распределения точек Z в \mathbb{C} первоначально в статьях Б. Н. Хабибуллина [16, 17] 1988 г. с дальнейшим развитием и применениями в его же работах [18, 19] 1989–91 гг. и в последние годы в совместных статьях О. А. Кривошеевой, А. Ф. Кужаева, А. И. Рафикова [4, 5] 2017 г., а также А. Е. Салимовой и Б. Н. Хабибуллина [11–13] 2020–21 гг. Обзор по состоянию тематики вплоть до 2012 г. содержится в книге Б. Н. Хабибуллина [22, п. 3.2]. Определим развития упомянутой логарифмической характеристики распределения точек Z , расположенного произвольным образом на \mathbb{C} .

Для величины $a \in \overline{\mathbb{R}}$ и функции $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ их *положительные части* обозначаем соответственно через $a^+ := \max\{a, 0\}$ и $f^+: x \mapsto (f(x))^+$. К примеру, $\text{Re}^+ z = \max\{\text{Re } z, 0\}$ — положительная часть действительной части $\text{Re } z$. Произвольное число $\theta \in \mathbb{R}$ будем трактовать и как *направление*, определяемое единичным радиус-вектором числа $e^{i\theta} \in \partial\overline{D}_0(1)$. При такой трактовке для направления θ направления $\theta \pm \pi$ *противоположны*, направления $\theta \pm \pi/2$ *ортогональны*, направление $-\theta$ — *сопряжённое*, а направление $\pi/2 - \theta$ — *ортогональное сопряжённое*.

Правую логарифмическую меру интервала $(r, R] \subset \mathbb{R}^+$ для распределения точек Z на \mathbb{C} определяем как величину

$$\ell_Z(r, R) \stackrel{(5)}{:=} \sum_{\substack{z \in Z \\ r < |z| \leq R}} \text{Re}^+ \frac{1}{z} \stackrel{(5)}{=} \sum_{z \in Z \cap (\overline{D}_0(R) \setminus \overline{D}_0(r))} \text{Re}^+ \frac{1}{z} \in \overline{\mathbb{R}}^+; \quad (7)$$

левая логарифмическая мера интервала $(r, R] \subset \mathbb{R}^+$ для Z на \mathbb{C} — это величина $\ell_{-Z}(r, R)$ из (7) для $-Z$, а логарифмическую субмеру интервала $(r, R] \subset \mathbb{R}^+ \setminus 0$ для Z на \mathbb{C} задаём как

$$\mathcal{L}_Z(r, R) := \max\{\ell_Z(r, R), \ell_{-Z}(r, R)\} \in \overline{\mathbb{R}}^+. \quad (8)$$

Ширина подмножества $S \subset \mathbb{C}$ в направлениях $\theta \in \mathbb{R}$ (см. [1, п. 33], [28, п. 4.1.1], [14, гл. I, § 4], [24, п. 3.2], [22, п. 3.2]) — это функция

$$\text{breadth}_S: \theta \mapsto \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left\{ \text{Re}((z - w)e^{-i\theta}) \mid z \in S, w \in S \right\} \in \overline{\mathbb{R}}^+ \cup -\infty, \quad (9)$$

которая, очевидно, π -периодична, равна $-\infty$ лишь при $S = \emptyset$, а при $S \neq \emptyset$ — величина из $\overline{\mathbb{R}}^+$, равная наименьшей ширине замкнутых полос в \mathbb{C} , содержащих S и какую-нибудь прямую, ортогональную прямой $\{te^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Пример 1. Ширина любого круга в любом направлении равна его диаметру. Полосы (1) имеют ширину b в направлениях $\pi/2 + \pi k$ при любом целом $k \in \mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N})$, а в любом другом

направлении — ширину $+\infty$. Для $S \subset \mathbb{C}$ и числа $a \in \mathbb{C}$ полагаем $aS := \{az \mid z \in S\} \subset \mathbb{C}$. При таком обозначении $e^{i(\theta-\pi/2)} \text{str}_{b/2}$ — полоса ширины b в направлении θ .

Теорема 1. Для любых числа $b \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$, направления $\theta \in \mathbb{R}$ и произвольного распределения точек Z на \mathbb{C} следующие четыре утверждения равносильны:

I. Для любой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ ширины $\text{breadth}_D(\theta) \leq b$ в направлении θ система

$$\text{Exp}^Z := \left\{ w \xrightarrow{w \in \mathbb{C}} w^p e^{zw} \mid z \in Z, Z(z) - 1 \geq p \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

полна в пространстве $\text{Hol}(D)$ с топологией равномерной сходимости на компактах.

II. Для любого выпуклого компакта K ширины $\text{breadth}_K(\theta) < b$ в направлении θ экспоненциальная система Exp^Z полна в банаховом пространстве $C(\overline{K}) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ с нормой (3).

III. Распределение точек Z бесконечной верхней плотности с $\overline{\text{dens}}(Z) = +\infty$ или же логарифмическая субмера $\mathcal{L}_{e^{i(\pi/2-\theta)}Z}(r, R)$ для поворота $e^{i(\pi/2-\theta)}Z$ распределения точек Z на угол $\pi/2 - \theta$ удовлетворяет неравенству

$$\limsup_{1 < s \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln s} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_{e^{i(\pi/2-\theta)}Z}(r, sr) \geq \frac{b}{2\pi}. \quad (10)$$

IV. Система Exp^Z полна в пространстве $\text{Hol}(e^{i(\theta-\pi/2)} \text{str}_{b/2})$.

Если при $N \subset \mathbb{N}$ и некоторой нумерации $Z = (z_n)_{n \in N}$ распределения точек Z на \mathbb{C} , в которой каждое число $z \in \mathbb{C}$ встречается ровно $Z(z)$ раз, можно так подобрать последовательность $(m_n)_{n \in N}$ попарно различных целых чисел $m_n \in \mathbb{Z}$ и число $c \in \mathbb{R}^+$, что

$$\sum_{n \in N} \left| \frac{1}{z_n} - \frac{c}{m_n} \right| < +\infty, \quad (11)$$

то внешняя плотность Редхеффера распределения точек Z на \mathbb{C} конечна и не превышает числа c (см. [3, 20, 33], а также [22, 2.1.1]), а сама она равна точной нижней грани таких $c \in \mathbb{R}^+$.

Пример 2. Если распределение попарно различных точек Z является разделённым в том смысле, что $\inf\{|z - z'| \mid z \in Z, z' \in Z, z \neq z'\} > 0$ и целиком лежит в какой-нибудь полосе (1) конечной ширины $b \in \mathbb{R}^+$, то Z имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера.

Будем говорить, что распределение точек Z на \mathbb{C} имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера вблизи направления θ , если найдётся число $a \in (0, \pi/2]$, для которого часть

$$Z_a^\theta := \left\{ z \in Z \mid |\arg z - \theta| < a \right\} \quad (12)$$

распределения точек Z после её поворота $e^{-i\theta} Z_a^\theta$ на угол $-\theta$ является распределением точек $e^{-i\theta} Z_a^\theta$ конечной внешней плотности Редхеффера.

Пример 3. Если при некотором $a \in (0, \pi/2]$ для распределения точек Z_a^θ из (12) сумма

$$\sum_{z \in Z_a^\theta} \frac{1}{|z|} < +\infty$$

конечна, то при выборе $c := 0$ ряд (11), очевидно, сходится, откуда следует, что распределение точек Z на \mathbb{C} имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера вблизи направления θ . Согласно примеру 2, если для распределения точек Z_a^θ из (12) при некотором $a \in (0, \pi/2]$ его поворот $e^{-i\theta} Z_a^\theta$ на угол $-\theta$ является разделённым и полностью лежит в какой-нибудь полосе (1) конечной ширины $b \in \mathbb{R}^+$, то Z имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера вблизи направления θ .

Следующий, существенно более тонкий, чем теорема 1, результат значительно обобщает критерий полноты Мальявена—Рубела и даже не улучшаем, если использовать в критерии лишь логарифмическую субмеру распределения точек Z на \mathbb{C} .

Теорема 2. Для любых числа $b \in \mathbb{R}^+$, направления $\theta \in \mathbb{R}$ и распределения точек Z на \mathbb{C} конечной внешней плотности Редхеффера вблизи противоположных направлений θ и $\theta - \pi$ следующие четыре утверждения равносильны:

- I. Для любого выпуклого компакта K ширины $\text{breadth}_K(\theta) \leq b$ экспоненциальная система Exp^Z полна в банаховом пространстве $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ с нормой (3).
- II. Логарифмическая субмера $\mathcal{L}_{e^{i(\pi/2-\theta)Z}}$ для поворота $e^{i(\pi/2-\theta)Z}$ распределения точек Z на угол $\pi/2 - \theta$ удовлетворяет равенству

$$\sup_{1 \leq r < R < +\infty} \left(\mathcal{L}_{e^{i(\pi/2-\theta)Z}}(r, R) - \frac{b}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \right) = +\infty. \quad (13)$$

- III. При значениях n и N , пробегающих соответственно \mathbb{N}_0 и \mathbb{N} , имеем

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq n < N} \left(\mathcal{L}_{e^{i(\pi/2-\theta)Z}}(e^n, e^N) - \frac{b}{2\pi}(N - n) \right) = +\infty. \quad (14)$$

- IV. Система Exp^Z полна в пространстве $C(e^{i(\theta-\pi/2)\overline{\text{str}}_{b/2}}) \cap \text{Hol}(e^{i(\theta-\pi/2)} \text{str}_{b/2})$, снабжённом топологией равномерной сходимости на компактах из замкнутой полосы $e^{i(\theta-\pi/2)\overline{\text{str}}_{b/2}}$.

2. Доказательства критериев.

Доказательство теоремы 1. Эквивалентность утверждений I и II, верная для любых систем целых функций, а не только экспоненциальных, — простое следствие определений полноты в функциональных пространствах и топологии равномерной сходимости на компактах.

Докажем эквивалентность утверждений IV и II. Неполнота системы Exp^Z в пространстве $\text{Hol}(e^{i(\theta-\pi/2)} \text{str}_{b/2})$ в топологии равномерной сходимости на компактах по теореме Хана—Банаха эквивалентна существованию ненулевого линейного непрерывного функционала на $\text{Hol}(e^{i(\theta-\pi/2)} \text{str}_{b/2})$, который обращается в нуль на каждой экспоненциальной функции из Exp^Z (см. [22, теорема 1.1.1]). Такой функционал может быть продолжен как ненулевой линейный непрерывный функционал на $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ для некоторого выпуклого компакта $K \subset e^{i(\theta-\pi/2)} \text{str}_{b/2}$, который по-прежнему равен нулю на каждой экспоненциальной функции из Exp^Z . Вновь по теореме Хана—Банаха (см. [22, теорема 1.1.1]) это означает, что система Exp^Z не полна в $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$, в то время как ширина компакта $K \subset e^{i(\theta-\pi/2)} \text{str}_{b/2}$ в направлении θ строго меньше b .

Докажем эквивалентность утверждений III и IV. Если Z имеет конечную верхнюю плотность, т.е. $\overline{\text{dens}}(Z) < +\infty$, то левая часть (10) — это один из вариантов определения логарифмической блок-плотности распределения точек $e^{i(\pi/2-\theta)Z}$ (см. [18], [22, определение (3.2.4)]); согласно [18, теорема 2], [22, теорема 3.2.2] условие (10) означает, что система $\text{Exp}^{e^{i(\pi/2-\theta)Z}}$ полна в пространстве $\text{Hol}(\text{str}_{b/2})$. Используя обратный поворот на угол $\theta - \pi/2$ к распределению точек $e^{i(\pi/2-\theta)Z}$, получаем полноту системы Exp^Z в пространстве $\text{Hol}(e^{i(\theta-\pi/2)} \text{str}_{b/2})$. \square

Доказательство теоремы 2. Эквивалентность утверждений I и IV обосновывается практически так же, как выше доказывалась эквивалентность утверждений II и IV теоремы 1 на основе следствий из теоремы Хана—Банаха по схеме, изложенной в [22, п. 1.1.1].

При доказательстве эквивалентности $\text{II} \Leftrightarrow \text{IV}$ после соответствующих поворотов \mathbb{C} и распределения точек Z достаточно рассмотреть случай $\theta = \pi/2$. Выделим в этом случае из Z определённую в (12) часть $Z_a^{\pi/2}$ конечной внешней плотности Редхеффера вблизи направления $\pi/2$. Это означает, что распределение точек $e^{-i\pi/2} Z_a^{\pi/2}$ имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера, из определения которой в соответствии с $\check{\text{E}}$ (11) легко видеть, что конечна сумма

$$\sum_{z \in Z_a^{\pi/2}} \left| \text{Re} \frac{1}{z} \right| < +\infty.$$

Точно так же для части $Z_a^{-\pi/2}$, определённой в (12), имеем

$$\sum_{z \in Z_a^{-\pi/2}} \left| \text{Re} \frac{1}{z} \right| < +\infty.$$

Таким образом, для распределения точек $Z_a^{\pm\pi/2} := Z_a^{\pi/2} \cup Z_a^{-\pi/2}$ сходится сумма

$$\sum_{z \in Z_a^{\pm\pi/2}} \left| \operatorname{Re} \frac{1}{z} \right| < +\infty. \quad (15)$$

По построению часть $Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}$ распределения точек отделена от мнимой оси $i\mathbb{R}$ в том смысле, что она лежит вне пары открытых вертикальных углов, содержащих $i\mathbb{R} \setminus 0$, и при выполнении (13) и (15) точная верхняя грань

$$\sup_{1 \leq r < R < +\infty} \left(\mathcal{L}_{Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}}(r, R) - \frac{b}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \right) \quad (16)$$

равна $+\infty$. Отсюда согласно [19, следствие 4.2] для отделённого от мнимой оси распределения точек $Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}$ следует, что экспоненциальная система $\operatorname{Exp}^{Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}}$ полна в пространстве $C(\overline{\operatorname{str}}_{b/2}) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{str}_{b/2})$, снабжённом топологией равномерной сходимости на компактах. Тем более экспоненциальная система Exp^Z с бóльшим распределением показателей $Z \supset Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}$ полна в этом пространстве. Таким образом, доказана импликация $\text{II} \Rightarrow \text{IV}$.

Теперь из отрицания утверждения II выведем отрицание утверждения IV. Если не выполнено (13) при $\theta = \pi/2$, то ввиду (15) конечна точная верхняя грань из (16). Рассмотрим целую функцию

$$g: z \mapsto_{z \in \mathbb{C}} \sin \frac{bz}{2} \quad (17)$$

экспоненциального типа. Легко подсчитать, что найдётся число $C_b \in \mathbb{R}^+$, с которым

$$\frac{b}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \leq \frac{1}{2\pi} \int_r^R \frac{\ln |g(iy)g(-iy)|}{y^2} dy + C_b \quad \text{при всех } 1 \leq r < R < +\infty.$$

Исходя из последнего согласно предполагаемой конечности (16) для функции g из (17) имеем

$$\sup_{1 \leq r < R < +\infty} \left(\mathcal{L}_{Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}}(r, R) - \frac{1}{2\pi} \int_r^R \frac{\ln |g(iy)g(-iy)|}{y^2} dy \right) < +\infty.$$

При этом условии для целой функции g экспоненциального типа с распределением нулей, лежащим вне пары открытых вертикальных углов, содержащих мнимую ось, а точнее, для (17) на \mathbb{R} , найдётся (см. [19, основная теорема]) такая целая функций $f_b \neq 0$ экспоненциального типа с распределением нулей $\operatorname{Zero}_{f_b}$, рассматриваемым с учётом кратности, что $Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2} \subset \operatorname{Zero}_{f_b}$ и в то же время $|f_b(iy)| \leq |g(iy)|$ при всех $y \in \mathbb{R}$. Учитывая явный вид функции g из (17), получаем

$$\ln |f_b(iy)| \leq \frac{b}{2} |y| + c_b \quad \text{для некоторого } c_b \in \mathbb{R}^+ \text{ при всех } y \in \mathbb{R}, \quad Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2} \subset \operatorname{Zero}_{f_b}. \quad (18)$$

Поворот $e^{-i\pi/2} Z_a^{\pm\pi/2}$ распределения точек $Z_a^{\pm\pi/2}$ на угол $-\pi/2$ по условию имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера. Для такого распределения точек из сочетания теоремы Бёрлинга—Мальявена о радиусе полноты с классической теоремой Пэли—Винера (см., например, [20, 33]) следует, что найдётся целая функция $q \neq 0$ экспоненциального типа с распределением корней $\operatorname{Zero}_q \supset e^{-i\pi/2} Z_a^{\pm\pi/2}$, для которой $|q(x)| \leq (1+x^2)^{-1}$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Обратный поворот на угол $\pi/2$ даёт целую функцию $h \neq 0$ экспоненциального типа, определяемую тождеством $h(z) \equiv_{z \in \mathbb{C}} q(e^{-i\pi/2} z)$, для которой

$$|h(iy)| \leq \frac{1}{1+y^2} \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}, \quad Z_a^{\pm\pi/2} \subset \operatorname{Zero}_h.$$

Отсюда согласно (18) следует, что целая функция $f := f_b h \neq 0$ экспоненциального типа для некоторой постоянной $C \in \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условиям

$$|f(iy)| \leq \frac{C}{1+y^2} \exp \frac{b|y|}{2} \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}, \quad Z \subset \operatorname{Zero}_f.$$

Это значит (см. [8, гл. IV, § 1, п. 3]), что найдётся прямоугольник $Q \subset \text{str}_{b/2}$ и ненулевая непрерывная функция p на его границе ∂Q , для которых имеет место представление функции f через преобразование Фурье–Лапласа

$$f(w) = \int_{\partial Q} e^{zw} p(z) dz.$$

Таким образом, найден линейный непрерывный функционал на $C(\overline{\text{str}}_{b/2}) \cap \text{Hol}(\text{str}_{b/2})$ (см. [22, гл. 1; п. 3.2.2]), который равен нулю на каждой функции из экспоненциальной системы Exp^Z . Следовательно, система Exp^Z не полна в $C(\overline{\text{str}}_{b/2}) \cap \text{Hol}(\text{str}_{b/2})$; импликация $\text{IV} \Rightarrow \text{II}$ тоже доказана.

Импликация $\text{II} \Rightarrow \text{III}$ получается при выборе значений $r = e^n$ и $R = e^N$, когда n и N пробегают соответственно \mathbb{N}_0 и \mathbb{N} . Если же II неверно и левая часть (13) конечна, то, переходя к случаю $\theta = \pi/2$ и разбирая рассмотренные выше распределения точек $Z_a^{\pm\pi/2}$ и $Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}$, нетрудно убедиться, что каждое из этих распределений точек конечной верхней плотности. Следовательно, их объединение Z тоже имеет конечную верхнюю плотность, и тогда величины $\mathcal{L}_Z(e^n, e^{n+1})$ согласно определениям (7)–(8) равномерно ограничены по $n \in \mathbb{N}_0$. Отсюда при конечности левой части (13) нетрудно удостовериться в конечности левой части в (14), что даёт импликацию $\text{III} \Rightarrow \text{II}$. \square

Замечание 2. Более разнообразные результаты могут быть получены из электронной публикации [29], принятой к печати в существенно расширенной форме в журнал «Известия РАН. Серия математическая» [25]. Частично они доложены на Международных конференциях по комплексному анализу памяти А. А. Гончара и А. Г. Витушкина в Москве в 2021 г., а также на Международных конференциях «Понтрягинские чтения–XXXIII» в Воронеже (см. [26]) и «Комплексный анализ и смежные вопросы» в Казани (см. [30]) в 2022 г.

3. Условия полноты в иных терминах, выражаемых через ширину.

3.1. *Широта и диаметр.* *Широтой* (см. [14, гл. I, § 4], [24, п. 3.2]), или *толщиной* (см. [28, 4.1.1]), множества S называется наименьшее значение его ширины по направлениям:

$$\text{width}(S) := \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \text{breadth}_S(\theta) \in \overline{\mathbb{R}}^+ \cup -\infty; \tag{19}$$

оно равно $-\infty$ тогда и только тогда, когда S пусто, и $+\infty$, если и только если нет полосы конечной ширины, содержащей S . *Диаметр*

$$\text{diam}(S) := \sup\{|z - w| \mid z \in S, w \in S\}$$

равен наибольшему значению его ширины по направлениям (см. [14, гл. I, § 4], [27, § 11, предложение 11.1]):

$$\text{diam}(S) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \text{breadth}_S(\theta) \in \overline{\mathbb{R}}^+ \cup -\infty. \tag{20}$$

Возможно определение ширины множества $S \subset \mathbb{C}$ в направлении и через его *опорную функцию*, которую по традиции (см. [6, 31]) можно определить как 2π -периодическую функцию

$$\text{spf}_S: \theta \mapsto \sup_{s \in S} \text{Re } se^{-i\theta} \in \overline{\mathbb{R}} \tag{21}$$

на \mathbb{R} , хотя в теории выпуклости и её применениях более уместно опорной функцией множества $S \subset \mathbb{C}$ называть положительно однородную выпуклую функцию

$$\text{Spf}_S: z \mapsto \sup_{s \in S} \text{Re } s\bar{z} \stackrel{(21)}{\equiv} |z| \text{spf}_S(\arg z) \tag{22}$$

(см. [1, 7, 9, 10, 15], а также [24, п. 1.1]), где для последнего равенства и всюду далее используем соглашение $0 \cdot x = 0$ для любого $x \in \overline{\mathbb{R}}$. В терминах опорных прямых к $S \subset \mathbb{C}$ (см. [1, п. 33], [28, п. 4.1.1], [14, гл. I, § 4]) ширина $\text{breadth}_S(\theta)$ в направлении $\theta \in \mathbb{R}$ равна расстоянию между двумя опорными прямыми к S , ортогональными радиус-вектору точки $e^{i\theta}$, что в терминах опорных функций (21)–(22) означает тождества

$$\text{breadth}_S(\theta) \stackrel{(21)}{\equiv} \text{spf}_S(\theta) + \text{spf}_S(\theta + \pi) \stackrel{(22)}{\equiv} \frac{1}{r} (\text{Spf}_S(re^{i\theta}) + \text{Spf}_S(-re^{i\theta})) \quad \text{при всех } r \in \mathbb{R}^+ \setminus 0. \tag{23}$$

Таким образом, согласно (23) широта и диаметр множества $S \subset \mathbb{C}$ определяются через опорные функции spf_S и Spf_S из (21) и (22) по формулам

$$\text{width}(S) \stackrel{(19)}{=} \inf_{\theta \in \mathbb{R}} (\text{spf}_S(\theta) + \text{spf}_S(\theta + \pi)) \stackrel{(19)}{=} \inf_{0 \neq z \in \mathbb{C}} \frac{\text{Spf}_S(z) + \text{Spf}_S(-z)}{|z|}, \quad (24)$$

$$\text{diam}(S) \stackrel{(20)}{=} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (\text{spf}_S(\theta) + \text{spf}_S(\theta + \pi)) \stackrel{(20)}{=} \sup_{0 \neq z \in \mathbb{C}} \frac{\text{Spf}_S(z) + \text{Spf}_S(-z)}{|z|}, \quad (25)$$

3.2. *Логарифмическая блок-плотность и следствия из теоремы 1.* Пусть ℓ — функция интервалов $(r, R] \subset \mathbb{R}^+$ со значениями из $\overline{\mathbb{R}}$ и $\ell(r, R) := \ell((r, R])$. Определим окончательно введённые в [2] четыре логарифмические блок-плотности:

$$\ln\overline{\text{dens}}(\ell) := \limsup_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \ell(r, ar); \quad (26^-)$$

$$\ln\underline{\text{dens}}(\ell) := \liminf_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \ell(r, ar); \quad (26_-)$$

$$\ln\text{-dens}_{\text{inf}}(\ell) := \inf_{a > 1} \frac{1}{\ln a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \ell(r, ar); \quad (26\text{i})$$

$$\ln\text{-dens}_b(\ell) := \inf \left\{ b \in \mathbb{R}^+ : \sup_{0 < r < R < +\infty} \left(\ell(r, R) - b \ln \frac{R}{r} \right) < +\infty \right\}. \quad (26\text{b})$$

(см. [17], [18, формула (1.9)], [32, определения 3.4, 3.5], [11, определение 4]). Положительную функцию интервалов $\ell \geq 0$ называем логарифмической субмерой интервалов, если выполнены следующие два условия:

(i) $\sup_{0 < r \in \mathbb{R}^+} \ell(r, 2r) < +\infty$ (логарифмический рост);

(ii) $\ell(r_1, r_3) \leq \ell(r_1, r_2) + \ell(r_2, r_3)$ для всех $0 < r_1 < r_2 < r_3 < +\infty$ (субаддитивность).

Если в неравенстве из (ii) знак неравенства \leq можно заменить на знак равенства $=$ для любых значений $0 < r_1 < r_2 < r_3 < +\infty$ (аддитивность), то функцию интервалов ℓ называем логарифмической мерой интервалов. Очевидно, класс всех логарифмических субмер интервалов — выпуклый конус над \mathbb{R}^+ , замкнутый относительно операции максимума.

Предложение 1 (см. [2, теорема 1], [18, § 1], [11, предложение 6]). *Для логарифмической субмеры интервалов $\ell \geq 0$ все четыре логарифмические блок-плотности из (26) конечны и совпадают, а верхний предел $\limsup_{a \rightarrow +\infty}$ в (26⁻) и нижний предел $\liminf_{a \rightarrow +\infty}$ в (26₋) можно заменить на обычный предел $\lim_{a \rightarrow +\infty}$. Далее, для логарифмической субмеры интервалов $\ell \geq 0$ все четыре логарифмические блок-плотности из (26) обозначаем единообразно символом $\ln\text{-dens}(\ell)$.*

Пример 4. Для распределения точек Z на \mathbb{C} конечной верхней плотности примерами логарифмической меры и субмеры интервалов могут служить соответственно определённая в (7) правая логарифмическая мера ℓ_Z для этого распределения точек Z , а также логарифмическая субмера \mathcal{L}_Z из (8). В таком случае логарифмическую блок-плотность $\ln\text{-dens}(\mathcal{L}_Z)$ будем обозначать через $\ln\text{-dens}(Z)$ и называть её логарифмической блок-плотностью распределения точек Z . В частности, левая часть в (10) — это в точности логарифмическая блок-плотность поворота $e^{i(\pi/2 - \theta)}Z$ распределения точек Z на угол $\pi/2 - \theta$.

Следующие два следствия теоремы 1 иллюстрируют возможности её применения в случае геометрических характеристик области, отличных от ширины в направлении, хотя и тесно связанных с ней через формулы (19), (24), (20), (25).

Следствие 1. *Пусть Z — распределение точек на \mathbb{C} конечной верхней плотности, а также $0 < b \in \mathbb{R}^+$. Тогда следующие четыре утверждения равносильны:*

- I. *Для любой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ широты $\text{width}(D) \leq b$ система Exp^Z полна в $\text{Hol}(D)$.*
- II. *Для любого выпуклого компакта K широты $\text{width}(K) < b$ система Exp^Z полна в пространстве $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$.*
- III. *Выполнено неравенство $\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \ln\text{-dens}(e^{i\theta}Z) \geq b/2\pi$.*

IV. Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ система Exp^Z полна в $\text{Hol}(e^{i\theta} \text{str}_{b/2})$.

Доказательство. Согласно определениям широты (19) и (24) эквивалентности теоремы 1 сразу следуют из соответствующих эквивалентностей теоремы 1, применённых по всем $\theta \in \mathbb{R}$. \square

Следующий результат даёт лишь достаточные условия полноты в терминах диаметра.

Следствие 2. Пусть Z — распределение точек на \mathbb{C} и $0 < b \in \mathbb{R}^+$. Если $\overline{\text{dens}}(Z) = +\infty$ или $\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \ln\text{-dens}(e^{i\theta} Z) \geq b/2\pi$, то экспоненциальная система Exp^Z полна в пространстве $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ для любого выпуклого компакта K диаметра $\text{diam}(K) < b$ и в $\text{Hol}(D)$ для всякой выпуклой области D диаметра $\text{diam}(D) \leq b$.

Доказательство. По формуле (20) или (25) для диаметра это достаточное условие полноты системы Exp^Z в $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ для любого выпуклого компакта K диаметра $\text{diam}(K) < b$ следует из импликации $\text{III} \Rightarrow \text{II}$ теоремы 1, что влечёт за собой полноту Exp^Z в $\text{Hol}(D)$ для всех выпуклых областей D диаметра $\text{diam}(D) \leq b$ по определению топологии равномерной сходимости на компактах в $\text{Hol}(D)$. \square

Замечание 3. Одна наша конструкция (см. [21, § 5, теорема 6]) позволяет для любого сколь угодно большого числа $b > 0$ построить разделённое распределение попарно различных точек Z на положительной полуоси \mathbb{R}^+ , для которого $\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \ln\text{-dens}(e^{i\theta} Z) = 0$ и в то же время система Exp^Z полна в любом $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ при $\text{diam}(K) < b$. Таким образом, логарифмическая блок-плотность даже разделённого распределения точек на луче не может полностью характеризовать полноту экспоненциальной системы в терминах диаметра $\text{diam}(K)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел. — М.: Фазис, 2002.
2. Каримов М. Р., Хабибуллин Б. Н. Совпадение некоторых плотностей распределения множеств и полнота систем целых функций // Тр. Междунар. конф. «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. III. Анализ и дифференциальные уравнения». — Уфа: Ин-т мат. с вычисл. центром УНЦ РАН, 2000. — С. 29–34.
3. Красичков-Терновский И. Ф. Интерпретация теоремы Бёрлинга—Мальявена о радиусе полноты // Мат. сб. — 1989. — 180, № 3. — С. 397–423.
4. Кривошеев А. С., Кужаев А. Ф. Об одной теореме Леонтьева—Левина // Уфим. мат. ж. — 2017. — 9, № 3. — С. 89–101.
5. Кужаев А. Ф., Рафиков А. И., Кривошеева О. А. Об одном соотношении для логарифмической блок-плотности // Вестн. Башкир. ун-та. — 2017. — 22, № 1. — С. 25–27.
6. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Физматгиз, 1956.
7. Лейтвейс К. Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985.
8. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1978.
9. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
10. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
11. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса // Уфим. мат. ж. — 2020. — 12, № 2. — С. 35–48.
12. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Распределение нулей целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль прямой // Мат. заметки. — 2020. — 108, № 4. — С. 588–600.
13. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Рост целых функций экспоненциального типа и характеристики распределений точек вдоль прямой на комплексной плоскости // Уфим. мат. ж. — 2021. — 13, № 3. — С. 116–128.
14. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. — М.: Наука, 1983.
15. Тихомиров В. М. Выпуклый анализ // Итоги науки техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направл. — 1987. — 14. — С. 5–101.
16. Хабибуллин Б. Н. О малости роста на мнимой оси целых функций экспоненциального типа с заданными нулями // Мат. заметки. — 1988. — 43, № 5. — С. 644–650.

17. Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси// Докл. АН СССР. — 1988. — 302, № 2. — С. 270–273.
18. Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси// Мат. сб. — 1989. — 180, № 5. — С. 706–719.
19. Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа с заданными нулями вдоль прямой// Anal. Math. — 1991. — 17, № 3. — С. 239–256.
20. Хабибуллин Б. Н. Неконструктивные доказательства теоремы Бёрлинга—Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций// Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — 58, № 4. — С. 125–148.
21. Хабибуллин Б. Н. Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции// Мат. сб. — 2009. — 200, № 2. — С. 129–158.
22. Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа, 2012.
23. Хабибуллин Б. Н. Теорема Хелли и сдвиги множеств. I// Уфим. мат. ж. — 2014. — 6, № 3. — С. 98–111.
24. Хабибуллин Б. Н. Теорема Хелли и сдвиги множеств. II. Опорная функция, системы экспонент, целые функции// Уфим. мат. ж. — 2014. — 6, № 4. — С. 125–138.
25. Хабибуллин Б. Н. Распределения корней и масс целых и субгармонических функций с ограничениями на их рост вдоль полосы// Изв. РАН. Сер. мат. — 2024. — 88, № 1.
26. Хабибуллин Б. Н., Мурясов Р. Р. Геометрические условия полноты экспоненциальных систем// Мат. Междунар. конф. Воронеж. весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения—XXXIII. Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 3-9 мая 2022 г.). — Воронеж, 2022. — С. 251–253.
27. Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю. Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. II// Алгебра и анализ. — 2008. — 20, № 1. — С. 190–236.
28. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. — М.: Наука, 1966.
29. Khabibullin B. N. The Malliavin–Rubel theorem on small entire functions of exponential type with given zeros: 60 years later/ arXiv: <https://arxiv.org/abs/2204.11603v1>.
30. Khabibullin B. N. Distribution of zeros for entire functions// Proc. Int. Conf. “Complex Analysis and Related Topics” (Kazan, June 30 – July 4, 2022). — Kazan. — P. 30–31.
31. Levin B. Ya. Lectures on Entire Functions. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1996.
32. Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros// Bull. Soc. Math. France. — 1961. — 89, № 2. — P. 175–201.
33. Redheffer R. M. Completeness of sets of complex exponentials// Adv. Math. — 1977. — 24. — P. 1–62.
34. Rubel L. A., Colliander J. E. Entire and Meromorphic Functions. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124) при поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-888).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хабибуллин Булат Нурмиевич

Институт математики с вычислительным центром,

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук

E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Кудашева Елена Геннадьевна

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа

E-mail: lena_kudasheva@mail.ru

Салимова Анна Евгениевна

Уфимский государственный нефтяной технический университет

E-mail: anegorova94@bk.ru

CONTENTS

Initial-value problem for an integro-differential equation with difference kernels and an inhomogeneity in the linear part (<i>S. N. Askhabov</i>)	3
Application of the method of similar operators to some classes of difference operators (<i>A. G. Baskakov, G. V. Garkavenko, N. B. Uskova</i>)	14
Stability criteria for systems of ordinary differential equations (<i>S. G. Bulanov</i>)	28
Kac–Siegert formula for oscillatory random processes (<i>Yu. P. Virchenko, A. S. Mazmanishvili</i>)	38
Quasi-nonmonodromic systems of first-order differential equations with a parameter (<i>A. A. Golubkov</i>)	59
Extreme paths on graphs with simultaneously varying arc durations (<i>Ya. M. Erusalimskiy, M. I. Osipov, V. A. Skorokhodov</i>)	69
On main equation for inverse Sturm–Liouville operator with discontinuous coefficient (<i>D. Karahan, Kh. R. Mamedov, I. F. Hasimoglu</i>)	73
On the local extension of the group of parallel translations of four-dimensional space (<i>V. A. Kyrov</i>)	87
On the search for a time-optimal boundary control using the method of moments for systems governed by the diffusion-wave equation (<i>S. S. Postnov</i>)	108
On the decay rate of solutions to the stationary Schrödinger equation with a potential depending on one variable (<i>S. M. Sitnik</i>)	115
On an exact estimate of the number of real invariant lines of polynomial vector fields of degree n (<i>A. D. Ushkho, V. B. Tlyachev, D. S. Ushkho</i>)	123
Step scaling functions and the Chrestenson system (<i>Yu. A. Farkov</i>)	134
Completeness criteria of an exponential system in geometric terms of breadth in the direction (<i>B. N. Khabibullin, E. G. Kudasheva, A. E. Salimova</i>)	150

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антонинович,
д.ф.-м.-н. (ВИНТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович