

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 224



Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 224 (2023)

Дата публикации 12 июня 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Научные редакторы выпуска

А. В. Аргучинцев

М. В. Фалалеев

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 224

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ



Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Вариационное условие оптимальности граничного управления в составной модели линейных дифференциальных уравнений разных типов (А. В. Аргучинцев, В. П. Поплевко) . . .	3
Необходимые и достаточные критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений (С. Г. Буланов)	10
Операторные методы поиска экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления (А. С. Булдаев, И. Д. Казьмин)	19
Первая краевая задача для одного класса эллиптических систем в полупространстве (Е. А. Головкин)	28
О точном решении одной гиперболической системы дифференциальных уравнений (Е. Ю. Гражданцева)	35
Оптимальные замыкаемые обратные связи в линейных задачах терминального управления (Н. М. Дмитриук)	43
Методы повышения эффективности позиционного принципа минимума в задачах оптимального управления (В. А. Дыхта)	54
Об асимптотике задачи Гурса со степенным пограничным слоем (И. В. Захарова)	65
О симметрических булевых функциях, инвариантных относительно преобразования Мёбиуса (О. В. Зубков)	71
О некоторых решениях с нулевым фронтом эволюционной параболической системы (А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, Л. Ф. Сневак)	80
Две схемы последовательных испытаний с эффектом последействия (Н. А. Колокольникова)	89
Иерархические структуры и комбинаторные задачи информационного поиска (О. В. Кузьмин)	97
Гиперповерхности с пропорциональными главными кривизнами в $(n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве (Е. Ю. Кузьмина)	109
Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле. V (В. М. Морозов, В. И. Каленова, М. Г. Рак)	115
К идентификации ядер Вольтерра в интегральных моделях линейных нестационарных динамических систем (С. В. Солодуша, Е. Д. Антипина)	125
Вариационный метод решения одной коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с интегральными условиями (Р. К. Тагиев, Ш. И. Маггеррамлы)	133
Проекционные методы улучшения управлений в нелинейных управляемых системах с терминальными ограничениями (Д. О. Трунин)	142
Сингулярные системы дифференциальных уравнений в банаховых пространствах (М. В. Фалалеев)	150



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-3-9

УДК 517.977.56

ВАРИАЦИОННОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СОСТАВНОЙ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗНЫХ ТИПОВ

© 2023 г. А. В. АРГУЧИНЦЕВ, В. П. ПОПЛЕВКО

Аннотация. Рассматривается линейная задача оптимального управления системой дифференциальных уравнений с частными производными типа кинетика-диффузия. Управляемое граничное условие на одном из концов представлено в виде линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Задачи такого типа возникают при управлении динамикой популяций с учетом пространственного распределения и возрастной структуры. В работе исходная задача сводится к двум задачам оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями. Предложенный подход основан на использовании точных формул приращения целевого функционала. Полученный результат сформулирован в виде вариационного условия оптимальности. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: двухкомпонентная модель динамики популяций, граничное управление, оптимальное управление, точные формулы приращения, вариационное условие оптимальности.

VARIATION OPTIMALITY CONDITION OF A BOUNDARY CONTROL IN A COMPOSITE MODEL OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF DIFFERENT TYPES

© 2023 А. V. ARGUCHINTSEV, V. P. POPEVKO

ABSTRACT. A linear optimal control problem of a system of differential equations with partial derivatives of the kinetic-diffusion type is considered. The controlled boundary condition is determined as a solution of a linear ordinary differential equation. Problems of this type arise when controlling the dynamics of populations, taking into account the spatial distribution and age structure. In the paper, the problem is reduced to two problems of optimal control of ordinary differential equations. The proposed approach is based on the use of exact increment formulas the goal functional. The final result is formulated as a variation optimality condition. An illustrative example is given.

Keywords and phrases: two-component model of population dynamics, boundary control, optimal control, exact increment formulas, variation optimality condition.

AMS Subject Classification: 49J20, 49M05

1. Введение. Исследования задач оптимального управления системами дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений разных типов (уравнения с частными производными — обыкновенные дифференциальные уравнения на границах, уравнения с частными производными

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00296).

разных типов, дифференциальные — интегро-дифференциальные уравнения и т.п.) стимулируется многочисленными приложениями в областях химической технологии, биологии, экологии и др.

Традиционным направлением изучения подобных проблем является распространение подходов, ранее разработанных для задач управления обыкновенными дифференциальными уравнениями. Конечно же, дело сильно осложняется разнообразием классов дифференциальных уравнений, необходимостью использования аппаратов обобщенных решений в условиях разрывности управляющих воздействий, сложностью численного решения уравнений и т. п. Однако именно при изучении отдельных классов задач оптимального управления системами с распределенными параметрами выявлен ряд особенностей, которые существенно отличают их от задач в системах с распределенными параметрами. В частности, в задачах оптимального управления гиперболическими уравнениями и системами гиперболических уравнений справедливы вариационные условия оптимальности. Так называемый вариационный принцип максимума (первые результаты были получены В. А. Дыхта и В. А. Срочко; см. [5, 6]) формулируется как условие максимума функционала в задачах оптимального управления, построенных на характеристиках исходных гиперболических уравнений или систем. При этом в случае распределенных управлений результат оказался более сильным по сравнению с классическим принципом максимума. В случае же граничных управлений классический принцип максимума часто вообще не справедлив (см. [15]).

В данной статье рассмотрен один класс задач, возникающий при управлении динамикой популяций. Возможным подходом к математическому моделированию динамики популяций с учетом пространственного распределения организмов является использование так называемой двухкомпонентной модели, содержащей дифференциальные уравнения разных типов (см. [1]). Дифференциальным уравнением параболического типа описывается часть популяции молодого возраста, перемещающаяся в пространстве, а простейшим уравнением гиперболического типа — часть популяции старшего возраста. Модели такого типа обычно применяются для описания динамики популяций наземных растений или водорослей. Они могут быть также применены для изучения динамики двух взаимодействующих популяций, в которых организмы одного вида достаточно быстро мигрируют в пространстве, а организмы другого вида стационарно распределяются на определенных площадях.

В настоящей работе для задачи оптимального управления в одной из указанных моделей получено неклассическое условие оптимальности, которое позволяет свести исходную задачу к задаче оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями. Предлагаемый подход не использует упомянутых выше идей представления решений гиперболических уравнений с использованием аппарата характеристик. Он основан на применении неклассических точных (без остаточного члена) формул приращения целевого функционала. Для задач оптимального управления линейными гиперболическими системами данный подход был применен в [3, 11, 12]. В настоящей работе он распространен на случай системы дифференциальных уравнений, содержащей параболическое уравнение и простейшее уравнение гиперболического типа. Схема редукции исходной задачи к задаче оптимального управления обыкновенным дифференциальным уравнением проиллюстрирована на примере.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} x_t - x_{ss} &= f_1(s, t)x + f_2(s, t)y, \\ y_t &= f_3(s, t)x + f_4(s, t)y, \\ (s, t) &\in \Pi, \quad \Pi = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1], \\ y(s, t_0) &= y^0(s), \quad x(s, t_0) = x^0(s), \quad s \in S; \quad x_s(s_1, t) = q(t), \quad t \in T, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(s, t)$, $y(s, t)$ — скалярные функции состояния.

Условия на левом конце фазовой траектории x определяются из управляемого обыкновенного дифференциального уравнения:

$$x_t(s_0, t) = B(u(t), t)x(s_0, t) + d(u(t), t), \quad t \in T. \tag{2}$$

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых на T вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих ограничениям типа включения

$$u(\cdot) \in U, \quad t \in T, \quad (3)$$

где $U \subset R^m$. Для основного результата настоящей работы вид множества U не имеет значения.

Требуется найти допустимое управление, доставляющее минимум целевому функционалу

$$J(u) = \int_S [\alpha(s)x(s, t_1) + \beta(s)y(s, t_1)] ds \longrightarrow \min, \quad u \in U. \quad (4)$$

Задача (1)–(4) рассматривается при следующих предположениях:

- (i) функции $q(t)$, $x^0(s)$ и $y^0(s)$ непрерывны на T и S соответственно;
- (ii) функции $f_i(s, t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $B(u, t)$, $d(u, t)$, $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ непрерывны по совокупности своих аргументов.

При моделировании динамики популяций функции $x(s, t)$ и $y(s, t)$ определяют плотности двух различных популяций или двух частей одной и той же популяции (см. [8]).

Сделаем замечание по поводу понятия решения начально-краевой задачи (1)–(2). Основным результатом работы является редукция (1)–(4) к задаче оптимального управления обыкновенным дифференциальным уравнением. При этом в зависимости от смысла поставленной задачи можно работать в разных функциональных пространствах. В задачах оптимального управления динамикой популяций часто удобно иметь дело с классическими решениями начально-краевой задачи. Возможны варианты обобщенных решений из пространства $W_2^1(\Pi)$ (см. [7]). Основным является корректность осуществляемых далее операций — возможность применения классических или обобщенных формул интегрирования по частям, существование в том же классе решений сопряженной задачи.

Отметим, что задача (1)–(4) является «почти линейной»: линейны оба дифференциальных уравнения с частными производными, линеен целевой функционал. Однако коэффициент B в обыкновенном дифференциальном уравнении (2) зависит от управления. В связи с этим в рассматриваемой задаче принцип максимума Л. С. Понтрягина не является достаточным условием оптимальности. Для решения задач данного типа обычно применяют методы, разработанные для общих нелинейных систем. Обычно эти методы являются итерационными, причем на каждой итерации необходимо интегрировать исходную и сопряженную системы с частными производными. Изложенный ниже подход избавляет от такой необходимости.

3. Формула приращения функционала. Рассмотрим два допустимых процесса: исходный $\{u, x, y\}$ и проварьированный $\{\tilde{u} = u + \Delta u, \tilde{x} = x + \Delta x, \tilde{y} = y + \Delta y\}$. Введем обозначение $Dx = x_t - x_{ss}$. Задача в приращениях имеет вид:

$$\begin{aligned} D\Delta x &= f_1(s, t)\Delta x + f_2(s, t)\Delta y, \\ \Delta y_t &= f_3(s, t)\Delta x + f_4(s, t)\Delta y, \\ \Delta y(s, t_0) &= 0, \quad \Delta x(s, t_0) = 0, \quad s \in S; \quad \Delta x_s(s_1, t) = 0, \quad t \in T, \\ \Delta x_t(s_0, t) &= B(\tilde{u}, t)\tilde{x}(s_0, t) - B(u, t)x(s_0, t) + d(\tilde{u}, t) - d(u, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Используем следующее представление для правой части равенства (5):

$$\Delta x_t(s_0, t) = \Delta_{\tilde{u}}B(u, t)\tilde{x}(s_0, t) + B(u, t)\Delta x(s_0, t) + \Delta d(u, t).$$

Приращение функционала $\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u)$ запишем в следующем виде:

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = \int_S [\alpha(s)\Delta x(s, t_1) + \beta(s)\Delta y(s, t_1)] ds.$$

Добавим в формулу приращения функционала нулевые слагаемые:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi} \psi_1(s, t) [D\Delta x - f_1(s, t)\Delta x - f_2(s, t)\Delta y] ds dt, \\ & \iint_{\Pi} \psi_2(s, t) [\Delta y_t - f_3(s, t)\Delta x - f_4(s, t)\Delta y] ds dt, \\ & \int_T p(t) [\Delta x_t(s_0, t) - \Delta_{\tilde{u}}B(u, t)\tilde{x}(s_0, t) - B(u, t)\Delta x(s_0, t) - \Delta d(u, t)] dt. \end{aligned}$$

Применяя формулы интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = & \int_S [\alpha(s)\Delta x(s, t_1) + \beta(s)\Delta y(s, t_1)] ds + \\ & + \int_S [\psi_1(s, t_1)\Delta x(s, t_1) - \psi_1(s, t_0)\Delta x(s, t_0)] ds - \iint_{\Pi} \psi_{1t}\Delta x ds dt - \\ & - \int_T [\psi_1(s_1, t)\Delta x_s(s_1, t) - \psi_1(s_0, t)\Delta x_s(s_0, t) - \psi_{1s}\Delta x(s_1, t) + \psi_{1s}\Delta x(s_0, t)] dt - \\ & - \iint_{\Pi} \psi_{1ss}\Delta x ds dt + \int_S [\psi_2(s, t_1)\Delta y(s, t_1) - \psi_2(s, t_0)\Delta y(s, t_0)] ds - \iint_{\Pi} \psi_{2t}\Delta y ds dt - \\ & - \iint_{\Pi} [\psi_1(f_1(s, t)\Delta x + f_2(s, t)\Delta y) + \psi_2(f_3(s, t)\Delta x + f_4(s, t)\Delta y)] ds dt + \\ & + p(t_1)\Delta x(s_0, t_1) - p(t_0)\Delta x(s_0, t_0) - \int_T p_t\Delta x(s_0, t) dt - \\ & - \int_T p(t) [\Delta_{\tilde{u}}B(u, t)\tilde{x}(s_0, t) + B(u, t)\Delta x(s_0, t) + \Delta d(u, t)] dt. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы функции $\psi_1(s, t)$, $\psi_2(s, t)$, $p(t)$ являлись решениями следующей сопряженной задачи:

$$\psi_{1t} + \psi_{1ss} = -\psi_1 f_1 - \psi_2 f_3, \quad \psi_1(s, t_1) = -\alpha(s), \quad (6)$$

$$\psi_1(s_0, t) = 0, \quad \psi_{1s}(s_1, t) = 0,$$

$$\psi_{2t} = -\psi_1 f_2 - \psi_2 f_4, \quad \psi_2(s, t_1) = -\beta(s); \quad (7)$$

$$p_t = -B^T(u, t)p - \psi_{1s}(s_0, t), \quad p(t_1) = 0.$$

Тогда формула приращения функционала примет следующий вид:

$$\Delta J(u) = - \int_T p(t) [\Delta_{\tilde{u}}B(u, t)\tilde{x}(s_0, t) + \Delta d(u, t)] dt. \quad (8)$$

Формула (8) является точной (без остаточных членов). Отличие от классического варианта формулы приращения, обычно применяемой при доказательстве принципа максимума Л. С. Понтрягина (см. [9]), заключается в том, что обыкновенное дифференциальное уравнение (2) интегрируется на возмущенном управлении.

Вторая формула приращения является симметричной и получается в результате использования в (5) следующего представления:

$$\Delta x_t(s_0, t) = \Delta_{\tilde{u}}B(u, t)x(s_0, t) + B(\tilde{u}, t)\Delta x(s_0, t) + \Delta d(u, t).$$

Тогда

$$\Delta J(u) = - \int_T p(t, \tilde{u}) \left[\Delta_{\tilde{u}} B(u, t) x(s_0, t, u) + \Delta d(u, t) \right] dt. \quad (9)$$

Формула (9) также является точной (без остаточных членов), при этом обыкновенное дифференциальное уравнение (7) в сопряженной задаче интегрируется на возмущенном управлении.

4. Вариационное условие оптимальности. На основе полученных формул приращения можно осуществить редукцию исходной задачи оптимального управления в частных производных к задачам оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Например, формула приращения (8) приводит к следующей задаче:

$$\begin{aligned} I(v) = - \int_T p(t, u) \left[B(v(t), t) - B(u(t), t) z(t, v) + d(v(t), t) - d(u(t), t) \right] dt \rightarrow \min, \\ \dot{z} = B(v(t), t) z(t) + d(v(t), t), \quad t \in T, \\ z(t_0) = x^0(s_0), \\ v(t) \in U, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $z(t)$ — функция состояния, $u(t)$ и $p(t, u)$ — фиксированные функции, $v(t)$ — управляющее воздействие, удовлетворяющее ограничениям на управления в исходной задаче.

Формула приращения (9) приводит к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \Phi(v) = - \int_T p(t, v) \left[B(v(t), t) - B(u(t), t) x(s_0, t, u) + d(v(t), t) - d(u(t), t) \right] dt \rightarrow \min, \\ \dot{p} = -B^T(u, t)p - \psi_{1s}(s_0, t), \\ p(t_1) = 0, \\ v(t) \in U, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $u(t)$ и $\psi_{1s}(s_0, t)$ — фиксированные функции, $x(s_0, t, u)$ — решение задачи Коши (2) при $u = u(t)$, $p = p(t)$ — функция состояния.

Полученные результаты доказывают справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Для того чтобы управление $u^*(t)$ было оптимальным в задаче (1)–(4), необходимо и достаточно, чтобы управление $v^* = u^*(t)$ было оптимальным в каждой из задач (10) и (11) для любого допустимого управления $u(t)$.

Отметим, что в силу произвольности управления $u(t)$ доказанная теорема на самом деле является бесконечным множеством вариационных условий оптимальности.

На основе полученного результата можно провести редукцию исходной задачи оптимального управления (1)–(4) к задаче оптимального управления обыкновенным дифференциальным уравнением по аналогии с [3, 11, 12].

5. Иллюстративный пример. В квадрате $S \times T = [0; 1] \times [0; 1]$ рассмотрим задачу оптимального управления (1)–(4), в которой

$$\begin{aligned} f_1(s, t) = f_2(s, t) = f_4(s, t) = 0, \quad f_3(s, t) = e^t, \\ \phi_1(s, t) = 2s \cdot \cos t, \quad \phi_2(s, t) = 0, \quad x^0(s) = 0, \quad y^0(s) = s^2, \\ q(t) = t + 2, \quad b(u(t), t) = u, \quad d(u, t) = 0, \\ \alpha(s) = -s(s - 1)^2 \cdot e, \quad \beta(s) = s^3 - 2s^2 + 7s - 4. \end{aligned}$$

Имеем следующую задачу:

$$\begin{aligned} x_t - x_{ss} = 2s \cdot \cos t, \quad y_t = e^t \cdot x; \quad x(s, 0) = 0, \quad y(s, 0) = s^2; \\ x_s(1, t) = t + 2, \quad x_t(0, t) = u \cdot x(0, t); \quad u(t) \in [0; 2]. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$J(u) = \int_S \left[-s(s-1)^2 \cdot e \cdot x(s, 1) + (s^3 - 2s^2 + 7s - 4)y(s, 1) \right] ds \rightarrow \min.$$

Выпишем сопряженную задачу (6)–(7):

$$\begin{aligned} \psi_{1t} + \psi_{1ss} &= -\psi_2 \cdot e^t, \\ \psi_1(s, 1) &= s(s-1)^2 \cdot e, \quad \psi_1(0, t) = 0; \quad \psi_{1s}(1, t) = 0; \\ \psi_{2t} &= 0, \quad \psi_2(s, 1) = -(s^3 - 2s^2 + 7s - 4); \\ p_t &= -u \cdot p - \psi_{1s}(0, t), \quad p(1) = 0. \end{aligned}$$

Задача относительно функции $\psi_1(s, t)$, $\psi_2(s, t)$ не зависит от управления. Достаточно просто можно найти аналитическое решение этой начально-краевой задачи:

$$\psi_1(s, t) = s(s-1)^2 \cdot e^t, \quad \psi_2(s, t) = -(s^3 - 2s^2 + 7s - 4).$$

Выберем допустимое управление $u(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0, 1]$. Тогда решение сопряженной задачи относительно $p(t)$ будет иметь вид

$$p(t) = -e^t + e.$$

На основании теоремы 1 исходная задача сводится к следующей задаче оптимального управления обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} I(v) &= \int_0^1 (e^t - e) \cdot v(t) \cdot z(t, v) dt \rightarrow \min; \\ z_t &= v \cdot z, \quad z(0) = 0; \quad v(t) \in [0; 2]. \end{aligned}$$

6. Заключение. Основным результатом работы является редукция исходной задачи оптимального управления составной системой, содержащей уравнения параболического типа, гиперболического типа и обыкновенное дифференциальное уравнение к задаче оптимального управления обыкновенным дифференциальным уравнением. При этом в результате редукции исходную или сопряженную систему дифференциальных уравнений с частными производными нужно проинтегрировать всего лишь один раз — в самом начале процесса; именно эта операция обычно наиболее трудоемка при решении оптимизационных задач.

Для решения редуцированных задач можно использовать целый арсенал методов (см., например, [13, 14]). Полученные задачи являются билинейными, поэтому принцип максимума Понтрягина не гарантирует оптимальность. Для такого рода задач можно эффективно применять методы, предложенные в [4, 10].

Отметим, что представляет интерес распространение предложенной методики на случай квадратичного целевого функционала по аналогии с [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апонин Ю. М., Апонина Е. А., Кузнецов Ю. А. Математическое моделирование пространственно-временной динамики возрастной структуры популяции растений // Мат. биология и биоинформатика. — 2006. — 1, № 1. — С. 1–16.
2. Аргучинцев А. В., Кедрин В. С., Кедрина М. С. Вариационное условие оптимальности в задаче управления гиперболическими уравнениями с динамическими граничными условиями // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. информ. — 2021. — № 1. — С. 13–23.
3. Аргучинцев А. В., Поплевко В. П. Вариационное условие оптимальности в задаче управления линейной гиперболической системой первого порядка с запаздыванием на границе // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — 212. — С. 3–9.
4. Аргучинцев А. В., Срочко В. А. Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. Ё10. Прикл. мат. Информ. Процессы. управл. — 2022. — 18, № 1. — С. 179–187.

5. Бокмелъдер Е. П., Дыхта В. А., Москаленко А. И. и др. Условия экстремума и конструктивные методы решения в задачах оптимизации гиперболических систем. — Новосибирск: Наука, 1993.
6. Васильев О. В., Срочко В. А., Терлецкий В. А. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление. — Новосибирск: Наука, 1990.
7. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983.
8. Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б. Математические методы в биологии и экологии. Биофизическая динамика продукционных процессов. Ч. 1. — М.: Юрайт, 2019.
9. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, I// Автомат. телемех. — 1959. — 20, № 10. — С. 1320–1334.
10. Срочко В. А., Аксеношкина Е. В. Параметризация некоторых задач управления линейными системами// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2019. — 30. — С. 83–98.
11. Arguchintsev A., Poplevko V. An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations// Games. — 2021. — 12, № 1. — 23.
12. Arguchintsev A. V., Poplevko V. P., Sinityn A. V. Variational optimality condition in control of hyperbolic systems with boundary delay parameters// Cybernet. Phys. — 2022. — 11, № 2. — P. 61–66.
13. Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P. Notes on numerical methods for solving optimal control problems// IEEE J. Ind. Appl. — 2016. — 5. — P. 154–166.
14. Rao A. A survey of numerical methods for optimal control// Adv. Astron. Sci. — 2009. — 135. — P. 1–32.
15. Wolfersdorf L. A counterexample to the maximum principle of Pontryagin for a class of distributed parameter systems// Z. Angew. Math. Mech. — 1980. — 6, № 4. — P. 204.

Аргучинцев Александр Валерьевич
Иркутский государственный университет
E-mail: arguch@math.isu.ru

Поплевко Василиса Павловна
Иркутский государственный университет
E-mail: vasilisa@math.isu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 10–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-10-18

УДК 519.6

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. С. Г. БУЛАНОВ

Аннотация. Получены необходимые и достаточные критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Критерии получены в мультипликативной форме на основе преобразования разностных схем численного интегрирования и сведены к аддитивной и интегральной форме. Представлены формальные ограничения, при которых конструируются критерии, указаны условия их применимости.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, численное моделирование устойчивости.

NECESSARY AND SUFFICIENT CRITERIA OF LYAPUNOV STABILITY FOR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 S. G. BULANOV

ABSTRACT. Necessary and sufficient criteria of Lyapunov stability for systems of ordinary differential equations are obtained. The criteria are obtained in the multiplicative form based on the transformation of difference schemes for numerical integration and are converted to the additive and integral forms. The formal restrictions for these criteria are constructed and their applicability conditions are indicated.

Keywords and phrases: Lyapunov stability, computer stability analysis, numerical modeling of stability.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение. Классическая задача анализа устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) актуальна для многочисленных отраслей современной науки и техники (см. [1, 4]). При этом существенно, чтобы анализ выполнялся в режиме реального времени, что требует разработки численных методов анализа устойчивости. В статье предлагается подход к анализу устойчивости систем ОДУ на основе преобразования разностных схем численного интегрирования. В результате преобразований формируются мультипликативные критерии устойчивости систем линейных и нелинейных ОДУ в виде необходимых и достаточных условий. Приводятся формальные ограничения, при которых конструируются критерии, выполнено их математическое обоснование, указана область применения, исследована возможность использования для теоретического и компьютерного анализа устойчивости. Далее конструируются разновидности эквивалентных критериев в аддитивной и интегральной формах. На основе критериев в интегральной форме строятся условия устойчивости по характеру поведения правой части системы и ее производных. Предлагаемый подход к анализу устойчивости систем ОДУ отличается

от известных построением. Помимо построения отличие конструируемых критериев устойчивости заключается в том, что для анализа устойчивости системы линейной ОДУ с переменной матрицей коэффициентов не требуется преобразование правой части системы и вычисление характеристических показателей. В случае матрицы постоянных коэффициентов не нужна информация о характеристическом многочлене матрицы и его корнях. При анализе нелинейных систем не используются методы качественной теории дифференциальных уравнений, в частности, не требуется построение функций Ляпунова. Математическая конструкция критериев устойчивости влечет возможность их программной реализации. Применение высокоточных численных методов при компьютерной реализации критериев должно позволить получить достоверные оценки характера устойчивости систем ОДУ в режиме реального времени. Для вычисления приближенного решения и правой части системы вместе с производными требуемого порядка целесообразно использовать метод варьируемого кусочно-интерполяционного приближения решения задачи Коши для ОДУ (см. [3]).

2. Критерии устойчивости в мультипликативной форме. Рассматривается задача Коши для системы ОДУ, которая имеет нулевое решение:

$$V' = U(t, V), \quad V_0 = V(t_0), \quad t \in [t_0, \infty). \quad (1)$$

Используются канонические нормы вектора, по умолчанию $\|V(t)\| = \max_{1 \leq k \leq n} |v_k(t)|$. Предполагается, что существует такое $\delta > 0$, что в области

$$R = \left\{ t_0 \leq t < \infty \forall \tilde{V}(t) \ V(t) : \|\tilde{V}_0 - V_0\| \leq \delta \right\}$$

выполнены все условия существования и единственности решения системы (1). Вектор-функция $U(t, V)$ определена, непрерывна в R и удовлетворяет условию Липшица:

$$\|U(t, \tilde{V}) - U(t, V)\| \leq L \|\tilde{V}(t) - V(t)\| \quad \forall \tilde{V}(t), V(t) \in R, \quad L = \text{const}.$$

Требуется исследовать на устойчивость в смысле Ляпунова [8] решение системы (1).

Идея подхода заключается в представлении величины возмущения решения на произвольном отрезке $[t_0, t]$ в виде произведения возмущения начальных данных на некоторый коэффициент, который и определяет характер устойчивости. Далее для наглядности предлагаемого подхода и простоты изложения в качестве приближенного метода решения системы ОДУ используется метод Эйлера.

Разность между точным значением возмущенного и невозмущенного решения (1) в форме метода Эйлера с остаточным членом на шаге имеет вид

$$\tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} = \tilde{v}_{ki} - v_{ki} + h \frac{u_k(t_i, \tilde{V}_i) - u_k(t_i, V_i)}{\tilde{v}_{ki} - v_{ki}} (\tilde{v}_{ki} - v_{ki}) + w_{ki},$$

или

$$\tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} = (1 + hD_i^{(k)}) (\tilde{v}_{ki} - v_{ki}) + w_{ki}, \quad k \in \overline{1, n}, \quad (2)$$

где

$$D_i^{(k)} = \frac{u_k(t_i, \tilde{V}_i) - u_k(t_i, V_i)}{\tilde{v}_{ki} - v_{ki}}, \quad t = t_{i+1}, \quad h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Таким образом, величина возмущения на текущем шаге выражается через величину возмущения на предыдущем шаге. Рекуррентно преобразуя выражение (2), получим выражение для возмущения на текущем шаге через возмущение начальных данных:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} &= \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{v}_{k0} - v_{k0}) + R_i^{(k)}, \quad k \in \overline{1, n}, \\ R_i^{(k)} &= \sum_{r=0}^{i-1} \prod_{\ell=0}^r (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) w_{k(i-r-1)} + w_{ki}. \end{aligned}$$

В рассматриваемых условиях

$$\lim_{i \rightarrow \infty} R_i^{(k)} = 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}$$

(см. [5, 6]). Отсюда следует

$$\tilde{v}_k(t) - v_k(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) (\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)) \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (3)$$

Согласно (3) величина возмущения равна бесконечному произведению, умноженному на возмущение начальных данных. Следовательно, величина возмущения при любом t определяется характером поведения бесконечного произведения. Отсюда вытекает критерий устойчивости систем нелинейных ОДУ.

В рассматриваемых условиях для устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы существовало такое Δ_1 , $0 < \Delta_1 \leq \delta$, что для всех $\tilde{V}(t)$, $\tilde{V}(t_0) = \tilde{V}_0$, при условии $\|\tilde{V}_0 - V_0\| \leq \Delta_1$ выполняется неравенство

$$\left| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \right| \leq c_1, \quad c_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (4)$$

Для асимптотической устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое $\Delta_2 \leq \Delta_1$, что $\|\tilde{V}_0 - V_0\| \leq \Delta_2$ влечет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (5)$$

Практическая значимость критериев (4), (5) заключается в возможности выполнять анализ устойчивости нелинейной системы ОДУ без представления решения в аналитической форме, непосредственно по значениям разностных приближений. Мультипликативная форма выражений под знаком предела позволяет выполнить программную реализацию критериев (4), (5). Это создает возможность компьютерного анализа устойчивости систем нелинейных ОДУ.

Соотношение (3) эквивалентно следующему:

$$\frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Следовательно, имеют место следующие разновидности критериев устойчивости и асимптотической устойчивости решения системы (1):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)} \right| &\leq c_1, \quad c_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)} \right| &= 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Предложенный подход используется для получения критериев устойчивости однородной системы линейной ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (6)$$

В этом случае критерии устойчивости и асимптотической устойчивости имеют вид (см. [2])

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| \leq c_2, \quad c_2 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty); \quad (7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| = 0. \quad (8)$$

Полученные критерии позволяют определить характер устойчивости систем линейных и нелинейных ОДУ без представления решения в аналитической форме, преобразования правой части системы, построения функций Ляпунова. Математическая конструкция критериев влечет возможность программной реализации, тем самым компьютеризируется анализ устойчивости.

Прикладное значение критериев (7), (8) представляется важным для приложений и теории, поскольку к системам линейных ОДУ с помощью линеаризации сводится анализ устойчивости ряда общих методов качественной теории дифференциальных уравнений (см. [9]).

3. Критерии устойчивости в аддитивной и интегральной форме. Для получения критериев устойчивости системы (1) в аддитивной форме выполним следующее преобразование соотношения (3):

$$\tilde{v}_k(t) - v_k(t) = \exp \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i \ln (1 + hD_{i-\ell}^{(k)}) \right\} (\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)) \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

С учетом того факта, что $hD_{i-\ell}^{(k)}$ — бесконечно малая, и принимая во внимание соотношение

$$\frac{\ln (1 + hD_{i-\ell}^{(k)})}{hD_{i-\ell}^{(k)}} \rightarrow 1 \quad \forall \ell \leq i, \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

получим аддитивную форму критериев устойчивости решения системы (1):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i hD_{i-\ell}^{(k)} \leq c_3, \quad c_3 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i hD_{i-\ell}^{(k)} = -\infty.$$

Для системы линейной ОДУ (6) критерии устойчивости и асимптотической устойчивости в аддитивной форме имеют вид

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i hA(t_{i-\ell}) \leq C_2, \quad C_2 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i hA(t_{i-\ell}) = (-\infty),$$

где C_2 — постоянная (диагональная) матрица; символ $(-\infty)$ означает предел диагональной матрицы, диагональные элементы которой стремятся к $-\infty$.

Выражение в левой части аддитивных критериев — предел интегральной суммы на $[t_0, t]$, элементами которой являются дискретные функции

$$D^{(k)}(t) = \frac{u_k(t, \tilde{V}) - u_k(t, V)}{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}, \quad k \in \overline{1, n}.$$

Следовательно, выражения аддитивных критериев включают определенные интегралы, и критерии можно сформулировать в интегральной форме:

$$\int_{t_0}^t \frac{u_k(\tau, \tilde{V}) - u_k(\tau, V)}{\tilde{v}_k(\tau) - v_k(\tau)} d\tau \leq c_3, \quad c_3 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}; \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{u_k(\tau, \tilde{V}) - u_k(\tau, V)}{\tilde{v}_k(\tau) - v_k(\tau)} d\tau = -\infty \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (10)$$

Числитель переменной дроби $D^{(k)}(t)$ является производной возмущения решения и делится на само возмущение, поэтому существует первообразная

$$\int_{t_0}^t D^{(k)}(\tau) d\tau = \ln \left| \frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)} \right|.$$

Соответственно критерии (9), (10) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)} \right| &\leq c_3, \quad c_3 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{\tilde{v}_k(t) - v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)} \right| &= -\infty \quad \forall k \in \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Далее приводится вывод критериев устойчивости нулевого решения системы (1) по характеру поведения правой части. Дополнительно предполагается существование и непрерывность в R второй производной решения системы (1). Для $U'(t, V)$ имеет место аналог условия Липшица:

$$\|U'(t, U, V) - U'(t, \tilde{U}, \tilde{V})\| \leq L_1 \|U(t, V) - \tilde{U}(t, \tilde{V})\| \quad \forall U, \tilde{U}, \forall V(t), \tilde{V}(t) \in R, \quad L_1 = \text{const}.$$

Ниже ненулевое решение и его производную не помечается знаком $\sim$.

Пусть существует такое $\Delta_3 \leq \delta$, что для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $\|V_0\| \leq \Delta_3$, выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^t \frac{u_k(\tau, V)}{v_k(\tau)} d\tau \leq c_4 \int_{t_0}^t \frac{u'_k(\tau, V)}{u_k(\tau, V)} d\tau, \quad c_4 = \text{const} > 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n} \quad (11)$$

(см. [7]) или следующее неравенство, из которого вытекает (11):

$$\frac{u_k(t, V)}{v_k(t)} \leq c_5 \frac{u'_k(t, V)}{u_k(t, V)}, \quad c_5 = \text{const} > 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (12)$$

Теорема 1. Для устойчивости нулевого решения системы (1) достаточно существование такого Δ_4 , $0 < \Delta_4 \leq \delta$, что при всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $\|V_0\| \leq \Delta_4$, выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^t \frac{u'_k(\tau, V)}{u_k(\tau, V)} d\tau \leq c_6, \quad c_6 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (13)$$

Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое Δ_5 , $\Delta_5 \leq \Delta_4$, что неравенство $\|V_0\| \leq \Delta_5$ влечет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{u'_k(\tau, V)}{u_k(\tau, V)} d\tau = -\infty. \quad (14)$$

Доказательство. При выполнении условия (11) или (12) критерии (9), (10), записанные для нулевого решения системы (1), являются необходимыми следствиями соотношений (13), (14). $\square$

Критерии устойчивости теоремы 1 можно представить в следующей эквивалентной форме.

Теорема 2. Для устойчивости нулевого решения системы (1) достаточно существование такого Δ_6 , $0 < \Delta_6 \leq \delta$, что для всх $V(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|V_0\| \leq \Delta_6$, выполняется соотношение

$$\left| \frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)} \right| \leq c_7, \quad c_7 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad u_k(t_0, V_0) \neq 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (15)$$

Для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое Δ_7 , $\Delta_7 \leq \Delta_6$, что условие $0 < \|V_0\| \leq \Delta_7$ влечет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)} \right| = 0, \quad u_k(t_0, V_0) \neq 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (16)$$

Доказательство. Представим неравенство (13) в виде

$$\int_{t_0}^t \frac{du_k(\tau, V)}{u_k(\tau, V_0)} \leq c_6$$

или

$$\ln |u_k(t, V)| - \ln |u_k(t_0, V_0)| \leq c_6,$$

что равносильно

$$\ln \frac{|u_k(t, V)|}{|u_k(t_0, V_0)|} \leq c_6 \quad \text{или} \quad \left| \frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)} \right| \leq e^{c_6}.$$

В результате (13) эквивалентно (15) при $c_7 = e^{c_6}$. Критерий устойчивости (14) выполняется, если выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{|u_k(t, V)|}{|u_k(t_0, V_0)|} = -\infty.$$

При $u_k(t_0, V_0) \neq 0$ это эквивалентно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)} \right| = 0.$$

Следовательно, (14) эквивалентно (16). Теорема доказана. $\square$

Далее приводятся ограничения, при выполнении которых, достаточные условия устойчивости, представленные в теоремах 1, 2 будут и необходимыми.

Предположим, что для системы (1) в R существует такое $\Delta_8 > 0$, что для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|V_0\| \leq \Delta_8$, выполняются неравенства

$$u_k(t, V) \geq 0, \quad u'_k(t, V) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}, \quad (17)$$

или

$$u_k(t, V) \leq 0, \quad u'_k(t, V) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (18)$$

Кроме того предполагается, что выполнено неравенство

$$\left| \frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} \right| \leq \left| \frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)} \right| \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (19)$$

При данных предположениях имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Для устойчивости нулевого решения системы (1) необходимо существование такого Δ_8 , $0 < \Delta_8 \leq \delta$, что для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $\|V_0\| \leq \Delta_8$, каждый компонент правой части (1) и его производная сохраняют знак в виде нестрогого неравенства при всех $t \in [t_0, \infty)$ и выполняется условие (17) или (18). Дополнительно выполнение условия (19) достаточно для устойчивости нулевого решения системы (1).

Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) необходимо и при выполнении (19) достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое Δ_9 , $\Delta_9 \leq \Delta_8$, что $0 < \|V_0\| \leq \Delta_9$ влечет (14).

Лемма 2. Условия предыдущей леммы необходимы, а при выполнении (19) достаточны для устойчивости нулевого решения системы (1). В тех же условиях для ее асимптотической устойчивости необходимо, а при выполнении (19) достаточно, чтобы выполнялось (16).

Доказательство. В условиях лемм 1 и 2 выполняется неравенство

$$\frac{u'_k(t, V)}{u_k(t, V)} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n},$$

что влечет (13) и, как следствие, (15). Следовательно, при выполнении (19), имеет место соотношение

$$\left| \frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} \right| \leq c_1, \quad c_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

что достаточно для устойчивости. Если нулевое решение системы (1) устойчиво, то в условиях каждого из предложений необходимо выполнено (17) либо (18). В этом случае необходимо выполнение условия

$$\frac{u_k(t, V)}{v_k(t)} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

Таким образом, для устойчивости нулевого решения системы (1) необходимы условия (17), (18). Следовательно, они необходимы для асимптотической устойчивости. Для асимптотической устойчивости достаточно выполнение критерия (14) или эквивалентного критерия (16) в сочетании с выполнением условия (19), так как это влечет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} \right| = 0.$$

Если нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, то $v_k(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$; тогда $u_k(t, V) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что эквивалентно (14) и (16). Поэтому эти условия необходимы. Леммы доказаны. $\square$

Пусть в условиях теоремы 1 рассматриваются соотношения (13) и (9), а также (14) и (10). Для нулевого решения системы (1) соотношения (13) и (9) будут выполняться одновременно, если для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|V_0\| \leq \Delta_8$, выполняется неравенство

$$\left| \int_{t_0}^t \frac{u'_k(\tau, V)}{u_k(\tau, V)} d\tau - \int_{t_0}^t \frac{u_k(\tau, V)}{v_k(\tau)} d\tau \right| \leq c_0, \quad c_0 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (20)$$

Неравенство (20) преобразуется к виду

$$\left| \ln \left| \frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)} \right| - \ln \left| \frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} \right| \right| \leq c_0, \quad c_0 = \text{const},$$

что равносильно

$$\left| \ln \left(\left| \frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)} \right| / \left| \frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} \right| \right) \right| \leq c_0 \quad \text{или} \quad -c_0 \leq \ln \left(\left| \frac{u_k(t, V)}{v_k(t)} \right| / \left| \frac{u_k(t_0, V_0)}{v_k(t_0)} \right| \right) \leq c_0.$$

Последнее соотношение эквивалентно неравенствам

$$e^{-c_0} \leq \left| \frac{u_k(t, V)}{v_k(t)} \right| / \left| \frac{u_k(t_0, V_0)}{v_k(t_0)} \right| \leq e^{c_0}, \quad c_0 = \text{const} > 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (21)$$

Условия (20) и (21) равносильны. Поэтому выполнение условия (21) влечет одновременное выполнение соотношений (13) и (9), при этом соотношение (13) является необходимым, а вместе с (9) — достаточным условием устойчивости. Стоит отметить, что выполнение соотношения (21) при $u_k(t, V) \rightarrow 0$ возможно только если $v_k(t) \rightarrow 0$, иначе не выполнится неравенство

$$e^{-c_0} \leq \left| \frac{u_k(t, V)}{v_k(t)} \right| / \left| \frac{u_k(t_0, V_0)}{v_k(t_0)} \right|.$$

Если $v_k(t) \rightarrow 0$, то необходимо $u_k(t, V) \rightarrow 0$, иначе нарушается неравенство

$$\left| \frac{u_k(t, V)}{v_k(t)} \right| / \left| \frac{u_k(t_0, V_0)}{v_k(t_0)} \right| \leq e^{c_0}.$$

В результате выполнение (21) вместе с (14) влечет выполнение (10). Выполнение (14) или (10) оказывается необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости.

Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. В рассматриваемых условиях и при выполнении соотношения (21) для устойчивости нулевого решения системы (1) необходимо и достаточно существование такого Δ_8 , $0 < \Delta_8 \leq \delta$, что

$$\int_{t_0}^t \frac{u'_k(\tau, V)}{u_k(\tau, V)} d\tau \leq c_8, \quad c_8 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}$$

и для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|V_0\| \leq \Delta_8$.

Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее утверждение и нашлось такое Δ_9 , $\Delta_9 \leq \Delta_8$, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{u'_k(\tau, V)}{u_k(\tau, V)} d\tau = -\infty \quad \forall k \in \overline{1, n}$$

и для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|V_0\| \leq \Delta_9$.

В силу эквивалентности теорем 1 и 2 теорема 3 переходит в следующее утверждение.

Следствие 1. В условиях теоремы 3 для устойчивости нулевого решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое $\Delta_8 > 0$, что

$$\left| \frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)} \right| \leq c_9, \quad c_9 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad u_k(t_0, V_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1, n}$$

и для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|V_0\| \leq \Delta_8$.

Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее утверждение и нашлось такое $\Delta_9 \leq \Delta_8$, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{u_k(t, V)}{u_k(t_0, V_0)} \right| = 0, \quad u_k(t_0, V_0) \neq 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}$$

и для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|V_0\| \leq \Delta_9$.

Предложенный подход допускает конструировать критерии устойчивости для производных правой части системы (1) произвольного порядка $\ell \geq 2$, если эти производные существуют. В этом случае критерии устойчивости и асимптотической устойчивости примут следующий вид:

$$\int_{t_0}^t \frac{u_k^{(\ell)}(\tau, V)}{u_k^{(\ell-1)}(\tau, V)} d\tau \leq c_{10}, \quad c_{10} = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1, n}, \quad \forall V(t) : \|V_0\| \leq \Delta_8;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{u_k^{(\ell)}(\tau, V)}{u_k^{(\ell-1)}(\tau, V)} d\tau = -\infty, \quad \forall k \in \overline{1, n}, \quad \forall V(t) : \|V_0\| \leq \Delta_9.$$

Полученные критерии будут необходимыми и достаточными условиями устойчивости и асимптотической устойчивости при ограничении

$$\left| \int_{t_0}^t \frac{u_k^{(\ell)}(\tau, V)}{u_k^{(\ell-1)}(\tau, V)} d\tau - \int_{t_0}^t \frac{u_k(\tau, V)}{v_k(\tau)} d\tau \right| \leq c_0, \quad c_0 = \text{const}, \quad \forall V(t) : 0 < \|V_0\| \leq \Delta_{10}.$$

При этом дополнительно потребуются предполагать выполненным следующий аналог условия Липшица:

$$\begin{aligned} & \left| u_k^{(\ell)}(t, U, V) \right| \leq L_0 \left| u_k^{(\ell-1)}(t, U, V) \right|, \quad L_0 = \text{const}, \\ & \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall U^{(\ell-1)}(t, U, V) \neq \bar{O}, \quad V(t) \in R, \quad \forall k \in \overline{1, n}. \end{aligned}$$

После перехода к первообразным критерии устойчивости и асимптотической устойчивости примут вид

$$\left| \frac{u_k^{(\ell-1)}(t, V)}{u_k^{(\ell-1)}(t_0, V_0)} \right| \leq c_{11}, \quad c_{11} = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad u_k^{(\ell-1)}(t_0, V_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1, n};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{u_k^{(\ell-1)}(t, V)}{u_k^{(\ell-1)}(t_0, V_0)} \right| = 0, \quad u_k^{(\ell-1)}(t_0, V_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Все полученные критерии допускают программную реализацию. В частности, для реализации критериев (15), (16) достаточно находить приближенное значение правой части системы и выводить через заданный интервал времени значение нормы выражения из левой части критерия (15). Ограниченное изменение нормы соответствует устойчивости, стремление нормы к нулю свидетельствует об асимптотической устойчивости, неограниченный рост является признаком неустойчивости решения системы ОДУ.

При анализе устойчивости систем нелинейных ОДУ наряду с данным методом целесообразно применять методы описанные в [10, 11]. Эти методы, основанные на построении функций Ляпунова, предполагают аналитическое применение, в отдельных разновидностях допускают компьютерную реализацию.

4. Заключение. Представлен подход к анализу устойчивости по Ляпунову систем ОДУ. Подход базируется на критериях устойчивости первоначально конструируемых на основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования. Получены критерии устойчивости систем линейных и нелинейных ОДУ в эквивалентных мультипликативных, аддитивных и интегральных формах в виде необходимых и достаточных условий. На основе критериев в интегральной форме получены разновидности необходимых и достаточных условий устойчивости по характеру поведения правой части системы и ее производных. Значимым отличием критериев является возможность их программной реализации, что влечет возможность выполнять анализ устойчивости в режиме реального времени по ходу решения задачи Коши для ОДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Ю., Жабко А. П., Косов А. А. Анализ устойчивости и стабилизация нелинейных систем на основе декомпозиции // Сиб. мат. ж. — 2015. — 56, № 6. — С. 1215–1233.
2. Буланов С. Г. Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2019. — 20, № 9. — С. 542–549.
3. Джсануцц Г. А., Ромм Я. Е. Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 10. — С. 1641–1660.
4. Мельников Г. И., Мельников В. Г., Дударенко Н. А., Талапов В. В. Устойчивость движения нелинейных динамических систем при постоянно действующих возмущениях // Науч.-техн. вестн. информ. технол. мех. опт. — 2019. — 19, № 2. — С. 216–221.
5. Ромм Я. Е., Буланов С. Г. Численное моделирование устойчивости по Ляпунову // Современные наукоемкие технологии. — 2021. — № 7. — С. 42–60.
6. Ромм Я. Е. Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости по знакам компонентов решения дифференциальной системы и их двух производных // Современные наукоемкие технологии. — 2021. — № 9. — С. 100–124.
7. Ромм Я. Е. О необходимых и достаточных условиях устойчивости по Ляпунову // Современные наукоемкие технологии. — 2022. — № 2. — С. 92–109.
8. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.
9. Bulanov S. G. Differential systems stability analysis based on matrix multiplicative criteria // J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — 012103.
10. Hafstein S. A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations // Dynam. Syst. — 2005. — 20. — P. 281–299.
11. Zhaolu T., Chuanning G. A numerical algorithm for Lyapunov equations // J. Appl. Math. Comput. — 2008. — 202, № 1. — P. 45–53.

Буланов Сергей Георгиевич

Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВПО
«Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»

E-mail: bulanovtspi@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 19–27
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-19-27

УДК 517.977

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2023 г. А. С. БУЛДАЕВ, И. Д. КАЗЬМИН

Аннотация. В классе билинейных управляемых систем с квадратичным по состоянию критерием оптимальности рассматриваются новые методы поиска экстремальных управлений. Предлагаемый подход основывается на специальных формах принципа максимума, имеющих вид операторных задач о неподвижной точке в пространстве управлений, которые эквивалентны известному условию принципа максимума в рассматриваемом линейно-квадратичном классе задач оптимального управления. Рассматриваемые операторные формы условий оптимальности позволяют конструировать новые итерационные алгоритмы для поиска управлений, удовлетворяющих условию принципа максимума. Сравнительная эффективность предлагаемых операторных методов иллюстрируется численными расчетами известной модельной задачи оптимизации квантовой системы, характеризующейся особыми экстремальными управлениями.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача оптимального управления, экстремальное управление, неподвижная точка, итерационный алгоритм.

OPERATOR METHODS OF THE SEARCH FOR EXTREMAL CONTROLS IN LINEAR-QUADRATIC OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© 2023 A. S. BULDAEV, I. D. KAZMIN

ABSTRACT. In the class of bilinear control systems with a state-quadratic optimality criterion, new methods of the search for extremal controls are considered. The approach proposed is based on special versions of the maximum principle that have the form of operator fixed-point problems in the space of controls, which are equivalent to the well-known condition of the maximum principle in the class of linear-quadratic optimal control problems. The operator forms of optimality conditions allows one to construct new iterative algorithms for finding controls satisfy the maximum principle. The comparative efficiency of the operator methods is illustrated by numerical simulations of a well-known model optimization problem for a quantum system characterized by degenerate extremal controls.

Keywords and phrases: linear-quadratic optimal control problem, extremal control, fixed point, iterative algorithm.

AMS Subject Classification: 49M20

1. Введение. Класс линейно-квадратичных задач оптимального управления по-прежнему является актуальным как в теории оптимизации управляемых систем, так и для практики моделирования управляемых процессов в различных приложениях. Математические постановки линейно-квадратичных задач оптимального управления рассматривались во многих работах, в частности, в [5, 7, 8].

Традиционным подходом к решению рассматриваемого класса задач является поиск экстремального управления, т. е. удовлетворяющего известному принципу максимума (см. [4, 6]). При этом возникают существенные трудности при поиске особых экстремальных управлений [4], характеризующихся существованием интервалов времени ненулевой меры, на которых условию принципа максимума удовлетворяет любое допустимое управление.

В [6] в классе линейно-квадратичных задач разработаны эффективные методы улучшения управления, которые основаны на решении специальных сопряженных и фазовых задач Коши в пространстве состояний. В данной работе разрабатываются и апробируются модельно-ориентированные алгоритмы поиска экстремальных управлений в классе линейно-квадратичных задач, основанные на специальных операторных условиях принципа максимума в форме задач о неподвижной точке в пространстве управлений, предложенных в [3] в общем классе нелинейных задач оптимального управления.

2. Операторные методы принципа максимума. Рассматривается класс линейно-квадратичных задач оптимального управления:

$$\Phi(u) = \langle x(t_1), Lx(t_1) \rangle + \langle c, x(t_1) \rangle \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в котором $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — вектор состояния системы, L — вещественная симметричная матрица, c — вещественный вектор, функция $f(x, u, t)$ линейна по переменной x , линейна по переменной u и непрерывна по переменной t на множестве $\mathbb{R}^n \times U \times T$. Допустимое управление $u(t)$, $t \in T$, является кусочно непрерывной функцией со значениями в компактном и выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$. Множество V обозначает соответствующее множество допустимых управлений. Временной интервал T и начальное состояние x^0 заданы. Используется общее обозначение билинейной функции $f(x, u, t)$ для удобства и простоты представления конструкций рассматриваемых операторных методов принципа максимума.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной ψ в задаче (1), (2) представляется в следующей форме:

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Стандартная сопряженная система принимает вид:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -2Lx(t_1) - c. \quad (3)$$

Обозначим $x(t, v)$, $t \in T$, — решение системы (2) для допустимого управления $v \in V$; $\psi(t, v)$, $t \in T$, — решение стандартной сопряженной системы (3) при $x(t) = x(t, v)$, $u(t) = v(t)$.

Известное (см. [4, 6]) необходимое условие оптимальности (принцип максимума) для управления $u \in V$ в классе линейно-квадратичных задач (1), (2) можно представить в следующей форме:

$$u(t) = \arg \max_{w \in U} \langle H_u(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), w \rangle, \quad t \in T. \quad (4)$$

С помощью отображения u^* , определяемого соотношением

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} H(\psi, x, w, t), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T,$$

условие (4) можно записать в следующем виде:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T.$$

В рассматриваемом классе задач условие (4) можно представить в эквивалентной форме с параметром $\alpha > 0$ на основе операции проектирования:

$$u(t) = P_U \left(u(t) + \alpha H_u(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t) \right), \quad t \in T. \quad (5)$$

Определим отображение u^α с параметром $\alpha > 0$ на основе соотношения

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U (w + \alpha H_u(\psi, x, w, t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad w \in U, \quad t \in T.$$

С помощью отображения u^α принцип максимума в проекционной форме (5) можно записать следующим образом:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T.$$

Особые экстремальные управления определяются наличием особого интервала времени $[\Theta_1, \Theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие $H_u(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t) \equiv 0$.

В соответствии с [3] определим отображения $X, \Psi, V^*, V^\alpha, \alpha > 0$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} X(u) &= x, \quad u \in V, \quad x(t) = x(t, u), \quad t \in T; \quad \Psi(u) = \psi, \quad u \in V, \quad \psi(t) = \psi(t, u), \quad t \in T; \\ V^*(\psi, x) &= v^*, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad v^*(t) = u^*(\psi(t), x(t), t), \quad t \in T; \\ V^\alpha(\psi, x, u) &= v^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad u \in V, \quad v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \end{aligned}$$

где $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций.

Рассмотрим оператор

$$X^*(\psi) = x, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad t \in T,$$

где $x(t), t \in T$, — решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Введем оператор

$$\Psi^\alpha(x, u) = \psi^\alpha, \quad x \in C(T), \quad u \in V, \quad \psi^\alpha \in C(T), \quad \alpha > 0$$

где $\psi^\alpha(t), t \in T$, — решение сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -2Lx(t_1) - c.$$

В соответствии с [3] следующие операторные задачи о неподвижной точке являются эквивалентными условию принципа максимума (4):

$$u = V^*(\Psi(u), X^*(\Psi(u))), \quad (6)$$

$$u = V^*(\Psi^*(X(u)), X(u)), \quad (7)$$

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u), \quad (8)$$

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u). \quad (9)$$

Для поиска экстремальных управлений рассмотрим соответствующие итерационные процессы метода простой итерации с индексом $k \geq 0$ для численного решения задач о неподвижной точке (6)–(9):

$$u^{k+1} = V^*(\Psi(u^k), X^*(\Psi(u^k))), \quad (10)$$

$$u^{k+1} = V^*(\Psi^*(X(u^k)), X(u^k)), \quad (11)$$

$$u^{k+1} = V^\alpha(\Psi(u^k), X^\alpha(\Psi(u^k), u^k), u^k), \quad (12)$$

$$u^{k+1} = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u^k), u^k), X(u^k), u^k). \quad (13)$$

Процесс (10) в поточечной форме имеет вид

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, u^k), x(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t), t \in T$, — решение специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^*(\psi(t, u^k), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Процесс (10) можно также записать в эквивалентной неявной поточечной форме:

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, u^k), x(t, u^{k+1}), t), \quad t \in T.$$

Процесс (11) в поточечной форме имеет вид

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi(t), x(t, u^k), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, — решение специальной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x\left(\psi(t), x(t, u^k), u^*(\psi(t), x(t, u^k), t), t\right), \quad \psi(t_1) = -2Lx(t_1, u^k) - c.$$

Процесс (12) в поточечной форме принимает вид

$$u^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, u^k), x(t), u^k(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, — решение специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u^\alpha(\psi(t, u^k), x(t), u^k(t), t), t\right), \quad x(t_0) = x^0.$$

Процесс (12) можно также записать в неявной поточечной форме:

$$u^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, u^k), x(t, u^{k+1}), u^k(t), t), \quad t \in T.$$

Процесс (13) в поточечной форме можно представить в виде

$$u^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u^k), u^k(t), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, — решение специальной сопряженной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x\left(\psi(t), x(t, u^k), u^\alpha(\psi(t), x(t, u^k), u^k(t), t), t\right), \quad \psi(t_1) = -2Lx(t_1, u^k) - c.$$

В процессах (12) и (13) параметр проектирования $\alpha > 0$ фиксируется и подбирается экспериментально для обеспечения сходимости процессов. Анализ сходимости итерационных процессов (10)–(13) можно исследовать на основе известного принципа сжимающих отображений.

Отметим, что в классе билинейных задач оптимального управления, в которых матрица $L = 0$, процессы (11) и (13) в поточечной форме можно соответственно также записать в неявном виде:

$$\begin{aligned} u^{k+1}(t) &= u^*(\psi(t, u^{k+1}), x(t, u^k), t), & t \in T, \\ u^{k+1}(t) &= u^\alpha(\psi(t, u^{k+1}), x(t, u^k), u^k(t), t), & t \in T. \end{aligned}$$

При этом в указанном классе билинейных задач оптимального управления процессы (10) и (11) становятся эквивалентными известным (см. [6]) итерационным процессам x -метода нелокального улучшения управления и ψ -метода нелокального улучшения управления соответственно. Проекционные процессы (12) и (13) также становятся эквивалентными известным (см. [6]) проекционным нелокальным методам улучшения управления.

В классе задач (1), (2) с матрицей $L \neq 0$ итерационные процессы (10)–(13) являются новыми для поиска экстремальных управлений. При этом на каждой итерации этих процессов улучшение управления не гарантируется.

Трудоемкость реализации одной итерации процессов (10)–(13) составляет две задачи Коши. Последовательные приближения итерационных процессов (10)–(13) характеризуются нелокальностью приближений управления и отсутствием трудоемкой операции варьирования управления для достижения строгого улучшения по функционалу на каждой итерации. Указанные свойства итерационных процессов (10)–(13) являются важными для повышения эффективности поиска экстремальных управлений.

3. Вычислительные эксперименты. Сравнительная эффективность предлагаемых операторных методов принципа максимума в рассматриваемом классе задач оптимального управления иллюстрируется на примере известной модельной задачи управления системой спинов квантовых

частиц (см. [2]), характеризующейся особыми экстремальными управлениями:

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= 1 - \langle x(t_1), Lx(t_1) \rangle \rightarrow \inf, \\ L &= \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 & 0 & a_1b_2 - b_1a_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_2^2 + b_2^2 & a_2b_1 - b_2a_1 & 0 \\ 0 & a_2b_1 - b_2a_1 & b_1^2 + a_1^2 & b_1b_2 + a_1a_2 \\ a_1b_2 - b_1a_2 & 0 & b_1b_2 + a_1a_2 & b_2^2 + a_2^2 \end{pmatrix}, \\ \dot{x}_1(t) &= u(t)x_3(t) + x_4(t), & \dot{x}_2(t) &= x_3(t) - u(t)x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -u(t)x_1(t) - x_2(t), & \dot{x}_4(t) &= -x_1(t) + u(t)x_2(t), \\ x_1(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0, \quad t \in T = [0, t_1], \quad t_1 = 1,5, \\ a_1 &= 0,6, \quad b_1 = -0,3, \quad a_2 = 0,1, \quad b_2 = \sqrt{0,54}.\end{aligned}$$

Вектор $x(t)$ описывает состояние квантовой системы, функция $u(t) \in U = [-30, 30]$, $t \in T$, характеризует воздействие внешним полем.

Функция Понтрягина в задаче имеет вид

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1(ux_3 + x_4) + \psi_2(x_3 - ux_4) + \psi_3(-ux_1 - x_2) + \psi_4(-x_1 + ux_2).$$

Запишем стандартную сопряженную систему:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1(t) &= u(t)\psi_3(t) + \psi_4(t), & \dot{\psi}_2(t) &= \psi_3(t) - u(t)\psi_4(t), & t \in T, \\ \dot{\psi}_3(t) &= -u(t)\psi_1(t) - \psi_2(t), & \dot{\psi}_4(t) &= u(t)\psi_2(t) - \psi_1(t), & t \in T, \\ \psi_1(t_1) &= 2(a_1^2 + b_1^2)x_1(t_1) + 2(a_1a_2 + b_1b_2)x_2(t_1) + 2(a_1b_2 - b_1a_2)x_4(t_1), \\ \psi_2(t_1) &= 2(a_1a_2 + b_1b_2)x_1(t_1) + 2(a_2^2 + b_2^2)x_2(t_1) + 2(a_2b_1 - b_2a_1)x_3(t_1), \\ \psi_3(t_1) &= 2(a_2b_1 - b_2a_1)x_2(t_1) + 2(b_1^2 + a_1^2)x_3(t_1) + 2(b_1b_2 + a_1a_2)x_4(t_1), \\ \psi_4(t_1) &= 2(a_1b_2 - b_1a_2)x_1(t_1) + 2(b_1b_2 + a_1a_2)x_3(t_1) + 2(b_2^2 + a_2^2)x_4(t_1).\end{aligned}$$

Условие принципа максимума (4) имеет вид:

$$\begin{aligned}u(t) &= u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T, \\ u^*(\psi, x, t) &= \begin{cases} +30, & g(\psi, x) > 0, \\ -30, & g(\psi, x) < 0, \\ w \in U, & g(\psi, x) = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

где $g(\psi, x) = \psi_1x_3 - \psi_2x_4 - \psi_3x_1 + \psi_4x_2$. Особые интервалы экстремальных управлений определяются тождеством $g(\psi(t, u), x(t, u)) \equiv 0$.

В работе [2] для расчета рассматриваемой задачи оптимального управления применялся глобальный метод Кротова, эффективность которого сравнивалась с известным градиентным методом. В качестве стартового начального приближения управления для метода Кротова выбиралось управление, определяемое из физических соображений:

$$u(t) = \operatorname{tg}(2\gamma(2t - 1,5)), \quad t \in T, \quad \gamma = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg}(-30).$$

При этом было получено расчетное приближение особого экстремального управления с значением целевого функционала $\Phi^* \approx 0,000952$. Особый интервал расчетного управления равен $[0,0667, t_1]$. Равенство нулю функции переключения $g(\psi, x)$ на итерационных приближениях методов понималось в смысле принадлежности некоторой достаточно малой окрестности нуля:

$$|g(\psi, x)| \leq \varepsilon_v, \quad \varepsilon_v = 10^{-3}.$$

В рассматриваемых операторных методах принципа максимума численное решение фазовых и сопряженных задач Коши осуществлялось с помощью модуля DIVPRK из библиотеки IMSL языка программирования FortranPowerStation 4.0 (см. [1]). Данный модуль реализует метод Рунге—

Кутта—Вернера пятого-шестого порядка точности. Значения фазовых, сопряженных и управляемых переменных запоминались в узлах заданной равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h = 10^{-5}$. В промежутках между соседними узлами сетки T_h значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле.

Итерационные процессы последовательных приближений управления осуществлялись до выполнения следующего критерия остановки:

$$\max \{|u^{k+1}(t) - u^k(t)|, t \in T_h\} \leq \varepsilon_m,$$

где $\varepsilon_m = 10^{-3}$ — заданная точность расчета операторной задачи о неподвижной точке.

3.1. Операторный метод (10). Итерационный процесс (10) в поточечной форме при $k \geq 0$ имеет вид:

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, u^k), x(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, — решение специальной фазовой задачи Коши, полученной при замене переменной управления на выражение $u^*(\psi(t, u^k), x(t), t)$ в правой части фазовой системы в модельной задаче.

Для адекватного сравнения эффективности результатов итерационного процесса (10) с результатами, полученными в [2], равенство нулю функции переключения $g(\psi(t, u^k), x)$ на итерационных приближениях также оценивалась с точностью $\varepsilon_v = 10^{-3}$. При этом значение управления $u^{k+1}(t)$ на особом интервале определялось по правилу дифференцирования тождества $g(\psi(t, u^k), x(t, u)) \equiv 0$.

На рис. 1 представлено конечное расчетное управление $v1(t)$, $t \in T$, полученное методом (10) из указанного выше стартового начального управления $u(t)$ с количеством итераций улучшения, равным 24, и значением функционала $\Phi^* \approx 0,000552$. Особый интервал конечного расчетного управления приближенно равен $[0,0857, 1,4463]$.

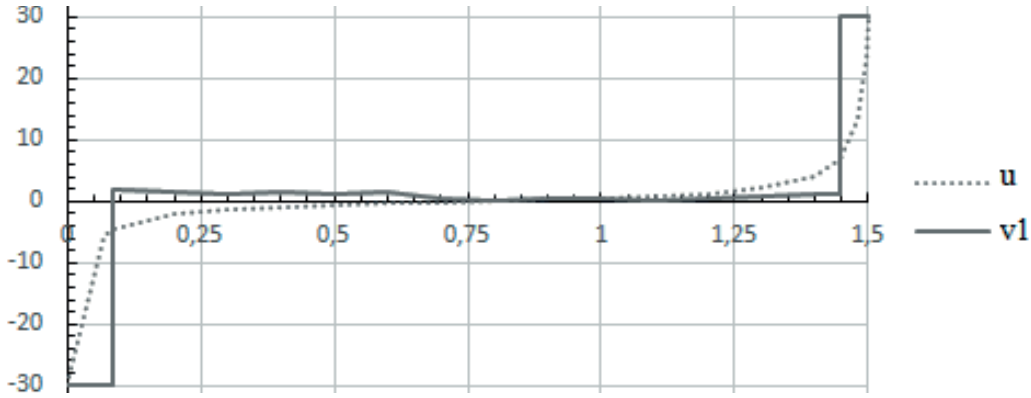


Рис. 1. u — стартовое управление, $v1$ — расчетное управление, полученное методом (10).

3.2. Операторный метод (11). Итерационный процесс (11) в поточечной форме при $k \geq 0$ имеет вид:

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi(t), x(t, u^k), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, — решение специальной сопряженной задачи Коши, полученной при замене переменной управления на выражение $u^*(\psi(t), x(t, u^k), t)$ в правой части сопряженной системы и переменной $x(t_1)$ на выражение $x(t_1, u^k)$ в правой части начального условия в момент времени t_1 в модельной задаче. Равенство нулю функции переключения $g(\psi, x(t, u^k))$ на итерационных приближениях также оценивалась с точностью $\varepsilon_v = 10^{-3}$. Значение управления $u^{k+1}(t)$ на особом интервале определялось по правилу дифференцирования тождества $g(\psi(t, u), x(t, u^k)) \equiv 0$.

На рис. 2 представлено конечное расчетное управление $u1(t)$, $t \in T$, полученное методом (11) с начального управления $u(t)$. Получено значение функционала $\Phi^* \approx 0,000567$ с количеством

итераций улучшения, равным 22. Особый интервал конечного управления приближенно равен $[0,0831, 1,4476]$.

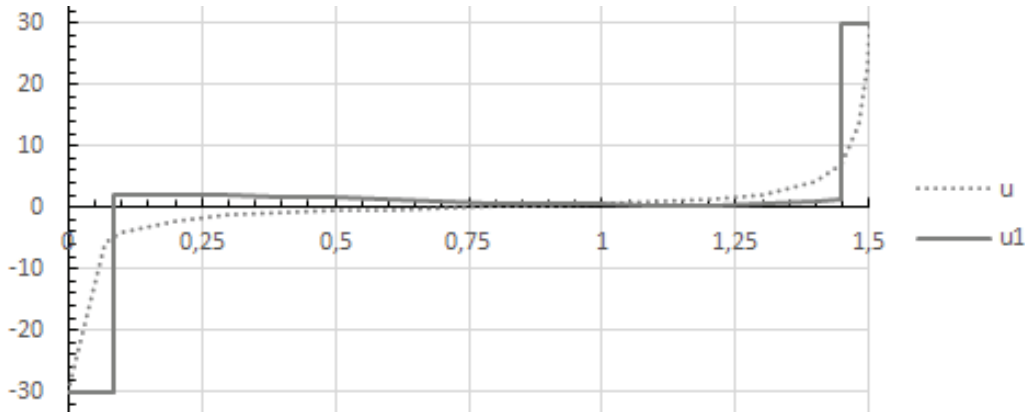


Рис. 2. u — стартовое управление, $u1$ — расчетное управление, полученное методом (11).

3.3. *Проекционный операторный метод* (12). Для заданного $\alpha > 0$ итерационный процесс (12) в поточечной форме при $k \geq 0$ принимает вид:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha g(\psi(t, u^k), x(t))), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, — решение специальной фазовой задачи Коши, полученной при замене переменной управления на выражение $P_U(u^k(t) + \alpha g(\psi(t, u^k), x(t)))$ в правой части фазовой системы.

На рис. 3 представлено конечное расчетное управление $v4(t)$, $t \in T$, полученное методом (12) из указанного выше начального управления $u(t)$ при $\alpha = 10^{-2}$ с количеством итераций улучшения, равным 26, и значением функционала $\Phi^* \approx 0,000704$. Особый интервал конечного управления, определяемый значениями функции переключения $g(\psi(t, u^k), x)$, равен $[0,0751, 1,4512]$.

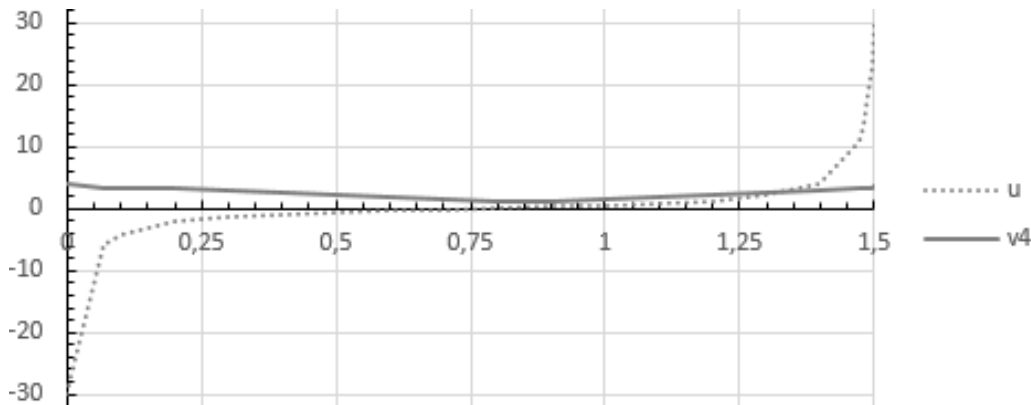


Рис. 3. u — стартовое управление, $v4$ — расчетное управление, полученное методом (12).

3.4. *Проекционный операторный метод* (13). Для заданного $\alpha > 0$ итерационный процесс (13) в поточечной форме при $k \geq 0$ принимает вид:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha g(\psi(t), x(t, u^k))), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, — решением специальной сопряженной задачи Коши, полученной при замене переменной управления на выражение $P_U(u^k(t) + \alpha g(\psi(t), x(t, u^k)))$ в правой части сопряженной системы и переменной $x(t_1)$ на выражение $x(t_1, u^k)$ в правой части начального условия в момент времени t_1 .

На рис. 4 представлено конечное расчетное управление $v_5(t)$, $t \in T$, полученное методом (13) из указанного выше начального управления $u(t)$, с $\alpha = 10^{-2}$ и количеством итераций улучшения, равным 17, и значением функционала $\Phi^* \approx 0,000676$. Особый интервал конечного управления, определяемый значениями функции переключения $g(\psi, x(t, u^k))$, равен $[0,0799, 1,4485]$.

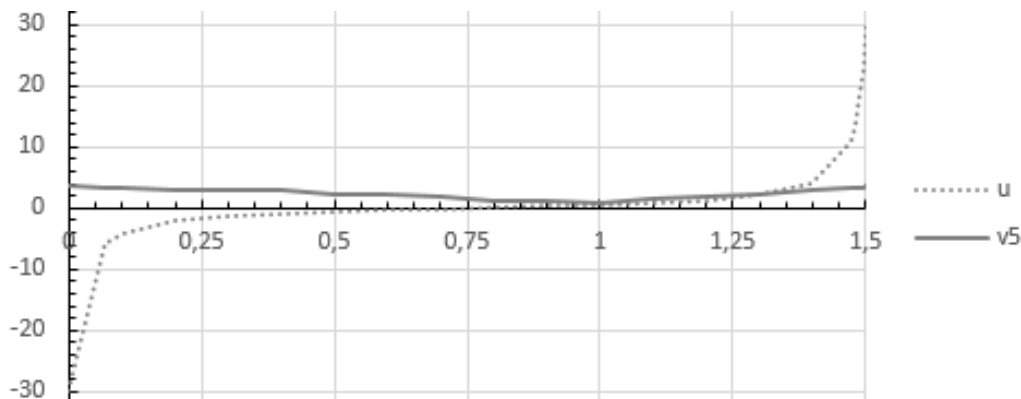


Рис. 4. u — стартовое управление, v_5 — расчетное управление, полученное методом (13).

3.5. Комбинированный операторный метод. В соответствии с принципом максимума оптимальное управление в модельной задаче вне особых интервалов обязано принимать граничные значения. Расчетные приближения экстремальных управлений, полученные проекционными операторными методами, не принимают граничных значений управления. Поэтому указанные расчетные приближения можно уточнять операторными методами (10) и (11), позволяющими получать граничные значения управления вне особых интервалов.

На рис. 5 представлено конечное расчетное управление $v_6(t)$, $t \in T$, полученное методом (10) из указанного выше расчетного управления $v_5(t)$, $t \in T$, с количеством итераций улучшения, равным 3, и значением функционала $\Phi^* \approx 0,000598$. Особый интервал конечного управления равен $[0,0799, 1,4485]$.

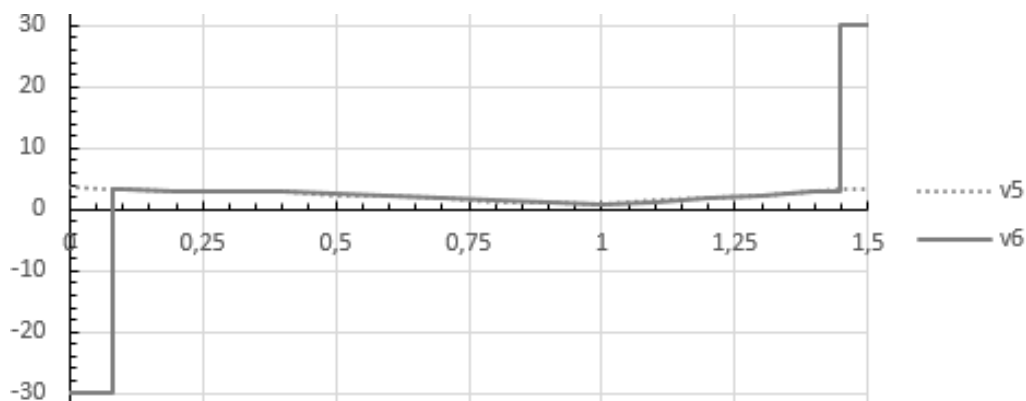


Рис. 5. v_5 — стартовое управление, v_6 — расчетное управление, полученное методом (11).

В результате вычислительного эксперимента получаем, что особые интервалы расчетных управлений v_5 и v_6 совпадают и на особом интервале уточненное расчетное управление v_6 практически не отличается от расчетного приближения v_5 экстремального управления, полученного проекционным методом.

Проведенные расчеты в рамках модельной задачи показывают высокую эффективность рассматриваемых операторных методов принципа максимума для поиска особых экстремальных

управлений, позволяющих получать лучшие значения критерия оптимальности по сравнению с известным глобальным методом Кротова. При этом существенно более простые по аналитической и практической реализации проекционные операторные методы позволяют достаточно точно вычислять особые интервалы экстремальных управлений. Полученные с помощью проекционных операторных методов (12) и (13) приближенные особые экстремальные управления могут эффективно использоваться в качестве стартовых управлений для операторных методов (10) и (11) на основе операции максимизации, позволяющих получать граничные значения управления вне особых интервалов.

4. Заключение. В классе линейно-квадратичных задач оптимального управления на основе операторных форм принципа максимума рассмотрены новые модельно-ориентированные итерационные алгоритмы, позволяющие находить экстремальные управления, в том числе особые экстремальные управления. Разработанные операторные методы поиска экстремальных управлений характеризуются следующими свойствами:

- (1) нелокальность последовательных приближений управления, получаемых расчетом двух задач Коши для фазовых и сопряженных переменных на каждой итерации;
- (2) вычислительная устойчивость в отличие от стандартных методов решения краевой задачи принципа максимума;
- (3) отсутствие трудоемкой процедуры игольчатого или выпуклого варьирования управления в малой окрестности рассматриваемого приближения управления на каждой итерации в отличие от градиентных методов;
- (4) отсутствие процедуры построения и анализа специальных вспомогательных функций переключения Кротова на каждой итерации в отличие от известного глобального метода Кротова.

Указанные свойства предлагаемых операторных методов принципа максимума являются важными для повышения эффективности поиска экстремальных управлений в рассматриваемом классе линейно-квадратичных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бартенев О. В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. — М.: Диалог-МИФИ, 2001.
2. *Батурина О. В., Моржин О. В.* Оптимальное управление системой спинов на основе метода глобального улучшения// Автомат. телемех. — 2011. — № 6. — С. 79–86.
3. *Булдаев А. С.* Операторные уравнения и алгоритмы принципа максимума в задачах оптимального управления// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2020. — № 1. — С. 35–53.
4. *Васильев О. В.* Лекции по методам оптимизации. — Иркутск, 1994.
5. *Киселев Ю. Н.* Линейно-квадратичная задача оптимального управления: анализ с помощью принципа максимума// в кн.: Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. Вып. 1. — М.: Изд-во МГУ, 2005. — С. 166–182.
6. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
7. *Хлебников М. В., Щербakov П. С., Честнов В. Н.* Задача линейно-квадратичного управления: I. Новое решение// Автомат. телемех. — 2015. — № 12. — С. 65–79.
8. *Trentelman H.* Linear quadratic optimal control// in: Encyclopedia of Systems and Control (*Baillieul J., Samad T.*, eds.). — London: Springer, 2013. — P. 1–8.

Булдаев Александр Сергеевич

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

E-mail: buldaev@mail.ru

Казьмин Иван Дмитриевич

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

E-mail: kazminvanya@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 28–34
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-28-34

УДК 517.956.2

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 г. Е. А. ГОЛОВКО

Аннотация. При помощи преобразования Фурье изучается первая краевая задача для двух эллиптических систем в полупространстве. Показано, что для обеих систем однородная задача имеет бесконечно много решений, зависящих от одной произвольной функции. При этом одна из систем является сильно связанной при определенных условиях на коэффициенты системы, а вторая система всегда сильно связана.

Ключевые слова: эллиптическая система, первая краевая задача, задача Дирихле, сильно связанные системы, преобразование Фурье.

FIRST BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF ELLIPTIC SYSTEMS IN A HALF-SPACE

© 2023 E. A. GOLOVKO

ABSTRACT. Using the Fourier transform, we examine the first boundary-value problem for two elliptic systems in a half-space. We prove that for both systems, the homogeneous problem has infinitely many solutions depending on one arbitrary function. At the same time, one of the systems is strongly connected under certain conditions for the coefficients of the system, whereas the second system is always strongly connected.

Keywords and phrases: elliptic system, first boundary-value problem, Dirichlet problem, strongly connected systems, Fourier transform.

AMS Subject Classification: 35J57

В случае одного равномерно эллиптического уравнения второго порядка фредгольмовость задачи Дирихле зависит только от характера главных частей. В общем же случае для сильно связанных систем встречаются различные новые явления в характере разрешимости первой краевой задачи, не имеющие аналогов в случае одного уравнения второго порядка. Среди таких явлений следует отметить эффект потери гладкости и влияние младших производных на разрешимость граничных задач. Впервые влияние младших членов было рассмотрено в работах Р. С. Сакса и Н. Е. Товмасыана. Позднее эти вопросы рассматривались в работах А. И. Янушаускаса и его учеников.

В теории многомерных эллиптических систем имеется еще много неясных вопросов. Одним из них является вопрос о том, как влияет структура системы на корректность задачи Дирихле. В настоящей работе рассмотрены две эллиптические системы в трехмерном пространстве. Показано, что одна из них является сильно связанной при определенных условиях на коэффициенты системы, а вторая система всегда сильно связана.

В трехмерном пространстве рассмотрим систему

$$\begin{aligned} -\Delta u + a_{11}\frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) + a_{12}\frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) + a_{13}\frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) &= 0; \\ -\Delta v + a_{21}\frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) + a_{22}\frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) + a_{23}\frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) &= 0; \\ -\Delta w + a_{31}\frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) + a_{32}\frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) + a_{33}\frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем обозначения

$$u_x + v_y + w_z = H, \quad \Delta\omega = H.$$

Тогда систему можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta u &= a_{11}H_x + a_{12}H_y + a_{13}H_z; \\ \Delta v &= a_{21}H_x + a_{22}H_y + a_{23}H_z; \\ \Delta w &= a_{31}H_x + a_{32}H_y + a_{33}H_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Если считать H известной функцией, то можно утверждать, что в системе (2) каждое уравнение содержит только одну неизвестную функцию. Решение этой системы можно представить в виде

$$\begin{aligned} u &= u_1 + a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y + a_{13}\omega_z; \\ v &= v_1 + a_{21}\omega_x + a_{22}\omega_y + a_{23}\omega_z; \\ w &= w_1 + a_{31}\omega_x + a_{32}\omega_y + a_{33}\omega_z \end{aligned} \quad (3)$$

где u_1, v_1, w_1 — произвольные гармонические функции. Продифференцируем уравнения системы (3) по x, y и z соответственно и складывая результаты дифференцирования, получим:

$$\begin{aligned} (u_1)_x + (v_1)_y + (w_1)_z + (a_{11} - 1)\omega_{xx} + (a_{22} - 1)\omega_{yy} + (a_{33} - 1)\omega_{zz} + \\ + (a_{12} + a_{21})\omega_{xy} + (a_{13} + a_{31})\omega_{xz} + (a_{23} + a_{32})\omega_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Изменяя подходящим образом одну из функций u_1, v_1, w_1 , можно утверждать, что

$$(u_1)_x + (v_1)_y + (w_1)_z = 0;$$

$$\begin{aligned} (a_{11} - 1)\omega_{xx} + (a_{22} - 1)\omega_{yy} + (a_{33} - 1)\omega_{zz} + \\ + (a_{12} + a_{21})\omega_{xy} + (a_{13} + a_{31})\omega_{xz} + (a_{23} + a_{32})\omega_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Если положить $u_1 = \varphi_z, v_1 = \psi_z, w_1 = -\varphi_x - \psi_y$, где $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ — произвольные гармонические функции, то общее решение (3) системы (1) можно записать так:

$$\begin{aligned} u &= \varphi_z + a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y + a_{13}\omega_z; \\ v &= \psi_z + a_{21}\omega_x + a_{22}\omega_y + a_{23}\omega_z; \\ w &= -\varphi_x - \psi_y + a_{31}\omega_x + a_{32}\omega_y + a_{33}\omega_z, \end{aligned}$$

где $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ — произвольные гармонические функции, а $\omega(x, y, z)$ — произвольное регулярное решение уравнения (5). Понятно, что система (1) эллиптика тогда и только тогда, когда будет эллиптическим уравнение (5).

Установим ряд условий сильной связанности систем вида (1). Поскольку определение сильной связанности многомерных эллиптических систем основано на нарушении коррекции первой краевой задачи в полупространстве, рассмотрим задачу Дирихле для системы (1): найти регулярное решение системы (1) в полупространстве $D = \{z > 0\}$, удовлетворяющее на границе $\Gamma = \{z = 0\}$ этого полупространства условиям:

$$u|_{z=0} = f_1(x, y), \quad v|_{z=0} = f_2(x, y), \quad w|_{z=0} = f_3(x, y), \quad (6)$$

где f_1, f_2, f_3 — заданные достаточно гладкие функции.

Предположим теперь, что матрица $\|a_{ij}\|, i, j = 1, 2, 3$, системы (1) является кососимметрической, т.е. $a_{ij} = -a_{ji}, i \neq j$. Тогда уравнение (4) переписывается так:

$$(a_{11} - 1)\omega_{xx} + (a_{22} - 1)\omega_{yy} + (a_{33} - 1)\omega_{zz} = 0. \quad (7)$$

Это уравнение будет уравнением эллиптического типа, если все a_{ii} , $i = 1, 2, 3$, будут одновременно больше единицы или одновременно меньше единицы. Следовательно, и система (1) будет системой эллиптического типа при этих же условиях.

Пусть $\tilde{\varphi}(\xi, \eta, z)$, $\tilde{\psi}(\xi, \eta, z)$, $\tilde{\omega}(\xi, \eta, z)$ — преобразования Фурье для функций $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $\omega(x, y, z)$ по переменным x и y . Так как φ и ψ — гармонические функции, т.е. $\Delta\varphi = 0$ и $\Delta\psi = 0$, а ω удовлетворяет уравнению (7), то преобразования Фурье ограниченных на бесконечности функций φ , ψ и ω имеют вид

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta, z) = A(\xi, \eta)e^{-\rho z}, \quad \tilde{\psi}(\xi, \eta, z) = B(\xi, \eta)e^{-\rho z}, \quad \tilde{\omega}(\xi, \eta, z) = C(\xi, \eta)e^{-\rho_1 z},$$

где $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$, $C(\xi, \eta)$ — произвольные функции,

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{a_{11}-1}{a_{33}-1}\xi^2 + \frac{a_{22}-1}{a_{33}-1}\eta^2}.$$

Теперь в терминах преобразования Фурье можем записать решение системы (1):

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -\rho A(\xi, \eta)e^{-\rho z} + (i\xi a_{11} + i\eta a_{12} - a_{13}\rho_1)C(\xi, \eta)e^{-\rho_1 z}; \\ \tilde{v} &= -\rho B(\xi, \eta)e^{-\rho z} + (-i\xi a_{12} + i\eta a_{22} - a_{23}\rho_1)C(\xi, \eta)e^{-\rho_1 z}; \\ \tilde{w} &= (-i\xi A(\xi, \eta) - i\eta B(\xi, \eta))e^{-\rho z} + (-i\xi a_{13} - i\eta a_{23} - a_{33}\rho_1)C(\xi, \eta)e^{-\rho_1 z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Применим преобразование Фурье к граничным условиям (6):

$$\tilde{u}|_{z=0} = \tilde{f}_1(\xi, \eta), \quad \tilde{v}|_{z=0} = \tilde{f}_2(\xi, \eta), \quad \tilde{w}|_{z=0} = \tilde{f}_3(\xi, \eta). \quad (9)$$

Подставим решение (8) в условия (9). Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения произвольных функций $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$, $C(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} -\rho A(\xi, \eta) + (i\xi a_{11} + i\eta a_{12} - a_{13}\rho_1)C(\xi, \eta) &= \tilde{f}_1(\xi, \eta); \\ -\rho B(\xi, \eta)e^{-\rho z} + (-i\xi a_{12} + i\eta a_{22} - a_{23}\rho_1)C(\xi, \eta) &= \tilde{f}_2(\xi, \eta); \\ -i\xi A(\xi, \eta) - i\eta B(\xi, \eta) + (-i\xi a_{13} - i\eta a_{23} - a_{33}\rho_1)C(\xi, \eta) &= \tilde{f}_3(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (10)$$

Если определитель Δ системы (10) тождественно равен нулю, то корректность задачи Дирихле заведомо нарушается. Тогда тождество $\Delta \equiv 0$ является критерием сильной связанности системы (1). Вычислим этот определитель:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -\rho & 0 & i\xi a_{11} + i\eta a_{12} - a_{13}\rho_1 \\ 0 & -\rho & -i\xi a_{12} + i\eta a_{22} - a_{23}\rho_1 \\ -i\xi & -i\eta & -i\xi a_{13} - i\eta a_{23} - a_{33}\rho_1 \end{vmatrix} = \\ &= \rho(a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 - a_{33}\rho \cdot \rho_1) - i\rho(a_{13}\xi + a_{23}\eta)(\rho - \rho_1) = \\ &= \rho(\rho - \rho_1) \left[(\rho - (a_{33} - 1)\rho_1) + i(a_{13}\xi + a_{23}\eta) \right]. \end{aligned}$$

Вещественная часть данного определителя тождественно обращается в нуль либо за счет того, что $\rho \equiv \rho_1$, либо за счет того, что $\rho - (a_{33} - 1)\rho_1 \equiv 0$. В первом случае имеем

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{\frac{a_{11}-1}{a_{33}-1}\xi^2 + \frac{a_{22}-1}{a_{33}-1}\eta^2},$$

откуда

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}.$$

Во втором случае имеем:

$$\begin{aligned} \rho - (a_{33} - 1)\rho_1 &= \frac{(\rho - (a_{33} - 1)\rho_1)(\rho + (a_{33} - 1)\rho_1)}{\rho + (a_{33} - 1)\rho_1} = \\ &= \frac{\xi^2 + \eta^2 - (a_{33} - 1)(a_{11} - 1)\xi^2 - (a_{33} - 1)(a_{22} - 1)\eta^2}{\rho + (a_{33} - 1)\rho_1} = \\ &= \frac{\xi^2(a_{11} + a_{33}(1 - a_{11})) + \eta^2(a_{33}(1 - a_{22}) + a_{22})}{\rho + (a_{33} - 1)\rho_1} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\xi^2(a_{11} + a_{33}(1 - a_{11})) + \eta^2(a_{33}(1 - a_{22}) + a_{22}) = 0.$$

Отсюда следуют равенства

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{33} = 1 + \frac{1}{a_{11} - 1},$$

причем

$$a_{11} > 1, \quad a_{22} > 1, \quad a_{33} > 1.$$

Мнимая часть определителя Δ обращается в нуль тождественно при $a_{13} = a_{23} = 0$. Эти условия гарантируют сильную связанность системы (1). Следовательно, система

$$-\Delta u + \alpha H_x + \beta H_y = 0; \quad -\Delta v - \beta H_x + \alpha H_y = 0; \quad -\Delta w + \left(1 - \frac{1}{\alpha + 1}\right) H_z = 0 \quad (11)$$

сильно связана при $\alpha > 1$ и любом β .

Рассмотрим однородную задачу Дирихле для системы (11). Все нетривиальные решения этой задачи можно записать так:

$$u = \varphi_z + \alpha \omega_x, \quad v = \psi_z + \alpha \omega_y, \quad w = -\varphi_x - \psi_y + \frac{\alpha}{\alpha - 1} \omega_z,$$

где

$$\varphi = -\alpha \frac{\partial H(x, y, \zeta)}{\partial x} \Big|_{\zeta=z}, \quad \psi = -\alpha \frac{\partial H(x, y, \zeta)}{\partial y} \Big|_{\zeta=z}, \quad \omega = \frac{\partial H(x, y, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=(\alpha-1)z},$$

а $H(x, y, \zeta)$ — произвольная регулярная в полупространстве $\zeta > 0$ гармоническая функция.

Теорема 1. *Однородная задача Дирихле для системы (11) в полупространстве $z > 0$ имеет бесконечно много линейно независимых решений, зависящих от одной произвольной регулярной гармонической функции трех независимых переменных.*

Рассмотрим еще одну систему, которая является эллиптической по Петровскому системой при $\alpha > 1$:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \alpha \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) + \beta \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) + \gamma \frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) &= 0; \\ -\Delta v - \beta \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) + \alpha \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) + h \frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) &= 0; \\ -\Delta w - \gamma \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) - h \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) + \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Системы более простого вида рассмотрены в работах А. И. Янушаускаса (см. [3]) и его учеников (см. [2]).

Первую краевую задачу для системы (12) будем рассматривать в следующей постановке: найти регулярные в полупространстве $D = \{z > 0\}$ решения системы (12), удовлетворяющие на границе этого полупространства $\Gamma = \{z = 0\}$ условиям

$$u|_{z=0} = f_1(x, y), \quad v|_{z=0} = f_2(x, y), \quad w|_{z=0} = f_3(x, y). \quad (13)$$

В системе (12) положим

$$u_x + v_y + w_z = H, \quad \Delta \omega = H.$$

С учетом этих обозначений систему (12) можно переписать так:

$$\Delta(u - \alpha\omega_x - \beta\omega_y - \gamma\omega_z) = 0; \quad \Delta(v + \beta\omega_x - \alpha\omega_y - h\omega_z) = 0, \quad \Delta(w + \gamma\omega_x + h\omega_y - \frac{\alpha}{\alpha-1}\omega_z) = 0,$$

откуда

$$u = u_1 + \alpha\omega_x + \beta\omega_y + \gamma\omega_z, \quad v = v_1 - \beta\omega_x + \alpha\omega_y + h\omega_z, \quad w = w_1 - \gamma\omega_x - h\omega_y + \frac{\alpha}{\alpha-1}\omega_z, \quad (14)$$

где u_1, v_1, w_1 — произвольные гармонические функции.

Продифференцируем равенства (14) по x, y и z соответственно и сложим результаты:

$$(u_1)_x + (v_1)_y + (w_1)_z + (\alpha-1)\omega_{xx} + (\alpha-1)\omega_{yy} + \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} - 1\right)\omega_{zz} = 0. \quad (15)$$

Из равенства (15) следует

$$(u_1)_x + (v_1)_y + (w_1)_z = 0; \quad (16)$$

$$(\alpha-1)\omega_{xx} + (\alpha-1)\omega_{yy} + \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} - 1\right)\omega_{zz} = 0. \quad (17)$$

Соотношение (16) выполнится, если положить

$$u_1 = \varphi_z, \quad v_1 = \psi_z, \quad w_1 = -\varphi_x - \psi_y,$$

где φ и ψ — произвольные гармонические функции.

Далее задачу будем решать с помощью преобразования Фурье. Пусть $\tilde{\varphi}(\xi, \eta, z), \tilde{\psi}(\xi, \eta, z), \tilde{\omega}(\xi, \eta, z)$ — преобразования Фурье для функций $\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \omega(x, y, z)$ по переменным x и y . Применяя преобразование Фурье по переменным x и y к уравнению (17), получим

$$-\xi^2(\alpha-1)\tilde{\omega} - \eta^2(\alpha-1)\tilde{\omega} + \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} - 1\right)\tilde{\omega}_{zz} = 0. \quad (18)$$

Ограниченные на бесконечности решения уравнения (18) имеют вид

$$\tilde{\omega} = C(\xi, \eta)e^{-\rho_1 z}, \quad (19)$$

где $C(\xi, \eta)$ — произвольная функция, а

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{(\alpha-1)\xi^2 + (\alpha-1)\eta^2}{\frac{\alpha}{\alpha-1} - 1}}.$$

Поскольку $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ — гармонические функции, то их преобразования Фурье с учетом ограниченности на бесконечности можно записать в виде

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta, z) = A(\xi, \eta)e^{-\rho z}, \quad \tilde{\psi}(\xi, \eta, z) = B(\xi, \eta)e^{-\rho z},$$

где $A(\xi, \eta), B(\xi, \eta)$ — произвольные функции, $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Применим преобразование Фурье к представлению решений (14):

$$\tilde{u} = \tilde{\varphi}_z + i\alpha\xi\tilde{\omega} + i\beta\eta\tilde{\omega} + \gamma\tilde{\omega}_z,$$

$$\tilde{v} = \tilde{\psi}_z - i\beta\xi\tilde{\omega} + i\alpha\eta\tilde{\omega} + h\tilde{\omega}_z,$$

$$\tilde{w} = -i\xi\tilde{\varphi} - i\eta\tilde{\psi} - i\xi\gamma\tilde{\omega} - i\eta h\tilde{\omega} + \frac{\alpha}{\alpha-1}\tilde{\omega}_z.$$

Учитывая найденные функции $\tilde{\varphi}(\xi, \eta, z), \tilde{\psi}(\xi, \eta, z), \tilde{\omega}(\xi, \eta, z)$ и граничные условия (13), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -\rho A(\xi, \eta) + (i\alpha\xi + i\beta\eta - \gamma\rho_1)C(\xi, \eta) &= \tilde{f}_1; \\ -\rho B(\xi, \eta) + (-i\beta\xi + i\alpha\eta - h\rho_1)C(\xi, \eta) &= \tilde{f}_2; \\ -i\xi A(\xi, \eta) - i\eta B(\xi, \eta) + \left(-i\xi\gamma - i\eta h - \frac{\alpha\rho_1}{\alpha-1}\right)C(\xi, \eta) &= \tilde{f}_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Если определитель этой системы равен нулю, то система имеет бесконечное множество решений. Корректность рассматриваемой задачи Дирихле будет в этом случае заведомо нарушена. Вычислим определитель системы (20):

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\rho & 0 & i\alpha\xi + i\beta\eta - \gamma\rho_1 \\ 0 & -\rho & -i\beta\xi + i\alpha\eta - h\rho_1 \\ -i\xi & -i\eta & -i\xi\gamma - i\eta h - \frac{\alpha\rho_1}{\alpha-1} \end{vmatrix} = i\rho(\rho - \rho_1)(\gamma\xi + h\eta). \quad (21)$$

Определитель (21) всегда обращается в нуль на прямой $\gamma\xi + h\eta = 0$.

В системе (12) перейдем к новым независимым переменным s, t, z и новым неизвестным функциям u_1, v_1, w по формулам:

$$s = \frac{\gamma x + hy}{\sqrt{\gamma^2 + h^2}}, \quad t = \frac{\gamma y - hx}{\sqrt{\gamma^2 + h^2}}, \quad z = z; \quad u_1 = \frac{\gamma u + hv}{\sqrt{\gamma^2 + h^2}}, \quad v_1 = \frac{\gamma v - hu}{\sqrt{\gamma^2 + h^2}}, \quad w = w.$$

В новых переменных система (12) запишется так:

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + \alpha H_s + \beta H_t + \sqrt{\gamma^2 + h^2} H_z &= 0, \\ -\Delta v_1 - \beta H_s + \alpha H_t &= 0, \\ -\Delta w - \sqrt{\gamma^2 + h^2} H_s + \frac{\alpha}{\alpha-1} H_z &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$H = \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Если будем интересоваться только теми решениями, которые не зависят от s , система (22) примет вид:

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + \beta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \sqrt{\gamma^2 + h^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0; \\ -\Delta v_1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0; \\ -\Delta w + \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что в системе (23) два последних уравнения не содержат функцию u_1 . Поэтому их можно рассматривать как отдельную систему двух уравнений с двумя неизвестными функциями. Системы такого вида рассматривались автором ранее. Все её решения можно представить с виде:

$$v_1 = \varphi_z + \alpha\omega_t, \quad w = -\varphi_t + \frac{\alpha}{\alpha-1}\omega_z,$$

где функция φ — регулярная гармоническая функция, а ω — регулярное решение уравнения

$$(\alpha-1)^2\omega_{tt} + \omega_{zz} = 0, \quad \alpha > 1.$$

Функции φ и ω можно выразить через одну гармоническую функцию по формулам

$$\varphi = -\alpha \frac{\partial H(t, \zeta)}{\partial t} \Big|_{\zeta=z}, \quad \omega = \frac{\partial H(t, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=(\alpha-1)z}.$$

Здесь H — произвольная регулярная в полуплоскости $\zeta > 0$ гармоническая функция.

Далее остается найти функцию u_1 , решив первое уравнение системы (23). Если функции v_1 и w известны, то это уравнение является уравнением Пуассона в полуплоскости $z > 0$, причем его решение обращается в нуль при $z = 0$. Как известно, такое решение можно выписать в явном виде (см. [1]).

Теорема 2. *Однородная задача Дирихле для системы (12) в полупространстве $z > 0$ имеет бесконечно много линейно независимых решений, зависящих от одной произвольной регулярной гармонической функции двух независимых переменных.*

Следовательно, система (12) всегда сильно связана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
2. *Черняева Т. Н.* Решение не сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2015. — 46, № 2. — С. 29–32.
3. *Янушаускас А. И.* Граничные задачи для уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1997.

Головко Елена Анатольевна
Иркутский государственный университет
E-mail: elena-golovko@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 35–42
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-35-42

УДК 517.957

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. Е. Ю. ГРАЖДАНЦЕВА

Аннотация. В работе рассмотрено построение точного решения однородной гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка, содержащей линейные либо нелинейные с квадратичной нелинейностью уравнения, построение решения начальной задачи (задачи Коши) для линейной гиперболической системы и построение решения одного из видов начально-краевой задачи для нелинейной гиперболической системы.

Ключевые слова: частная производная, гиперболическая система, задача Коши, точное решение.

ON THE EXACT SOLUTION OF A CERTAIN SYSTEM OF HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 Е. Yu. GRAZHDANTSEVA

ABSTRACT. In this paper, we construct an exact solution of a first-order hyperbolic system of partial differential equations containing linear and quadratic nonlinear equations. Also, we construct a solution of the initial-value (Cauchy) problem for a linear hyperbolic system and a solution of an initial-boundary-value problem for a nonlinear hyperbolic system.

Keywords and phrases: partial derivative, hyperbolic system, Cauchy problem, exact solution.

AMS Subject Classification: 35L02, 35L60

1. Введение. Гиперболическими системами дифференциальных уравнений первого порядка описываются многочисленные процессы в физике сплошной среды, а именно, неустановившееся течение жидкости, сверхзвуковое двумерное установившееся движение сжимаемых газов и т. п. Исследование гиперболических систем и гиперболических уравнений, изучение общих свойств нелинейных уравнений в частных производных и методов их решения представляет собой развивающуюся область современной математики. Отметим, что библиография, посвященная изучению нелинейных дифференциальных уравнений и систем, а также описываемых ими процессов, весьма обширна (см., например, [1–3, 6–9, 11] и ссылки в этих работах). Как правило, попытки найти решение сводятся к применению численных методов. Однако наличие нерешенных вопросов, связанных с быстродействием и надежностью процедур расчета динамических характеристик, приводят к задаче модификации существующих и развития новых способов получения точных решений. Данная работа посвящена построению точного решения однородной гиперболической

Работа выполнена при поддержке гранта FWEU-2021-0006 программы фундаментальных исследований РФ на 2021–2030 гг.

системы дифференциальных уравнений первого порядка, как линейной, так и нелинейной с квадратичной нелинейностью одного из уравнений. Также рассмотрены построение решения начальной задачи (задачи Коши) для линейной гиперболической системы и построение решения одного из видов начально-краевой задачи для нелинейной гиперболической системы.

2. Решение задачи Коши для однородной линейной гиперболической системы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — неизвестные функции достаточной гладкости, x и y — независимые переменные, a и c — действительные числа, не равные нулю и удовлетворяющие условию $ac > 0$, которое обеспечивает гиперболичность рассматриваемой системы. Решением характеристического уравнения данной системы являются прямые

$$y - \sqrt{ac}x = C_1, \quad y + \sqrt{ac}x = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные (см. [4, 8]). Введем переменные (см. [4])

$$\xi = y - \sqrt{ac}x, \quad \eta = y + \sqrt{ac}x. \quad (2)$$

Будем искать функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ свободных переменных x и y в форме сложных функций переменных ξ, η , т.е.

$$u = u(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad v = v(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y)).$$

Согласно правилу дифференцирования сложных функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\sqrt{ac} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \sqrt{ac} \frac{\partial u}{\partial \eta}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\sqrt{ac} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \sqrt{ac} \frac{\partial v}{\partial \eta}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Следовательно система (1) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \left(a \frac{\partial v}{\partial \xi} - \sqrt{ac} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \left(a \frac{\partial v}{\partial \eta} + \sqrt{ac} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \\ \left(c \frac{\partial u}{\partial \xi} - \sqrt{ac} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \left(c \frac{\partial u}{\partial \eta} + \sqrt{ac} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{ac} \left(\left(\sqrt{\frac{a}{c}} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \left(\sqrt{\frac{a}{c}} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) = 0, \\ -c \left(\left(\sqrt{\frac{a}{c}} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \left(\sqrt{\frac{a}{c}} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть

$$r_1 = r_1(\xi, \eta) = \sqrt{a/c}v - u, \quad r_2 = r_2(\xi, \eta) = \sqrt{a/c}v + u. \quad (4)$$

Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial \xi} + \frac{\partial r_2}{\partial \eta} = 0, \\ \frac{\partial r_1}{\partial \xi} - \frac{\partial r_2}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\partial r_2}{\partial \eta} = 0, \\ \frac{\partial r_1}{\partial \xi} = 0. \end{cases}$$

После интегрирования полученной системы получаем

$$r_1 = f_1(\eta), \quad r_2 = f_2(\xi),$$

где $f_1(\eta)$ и $f_2(\xi)$ — произвольные функции (см. [4]). Далее, учитывая (2), получаем

$$r_1 = f_1(y + \sqrt{ac}x), \quad r_2 = f_2(y - \sqrt{ac}x).$$

Из (4) имеем

$$v = \sqrt{\frac{c}{a}} \frac{r_2 + r_1}{2}, \quad u = \frac{r_2 - r_1}{2}.$$

Следовательно,

$$v(x, y) = \sqrt{\frac{c}{a}} \frac{f_2(y - \sqrt{ac}x) + f_1(y + \sqrt{ac}x)}{2}, \quad u(x, y) = \frac{f_2(y - \sqrt{ac}x) - f_1(y + \sqrt{ac}x)}{2}. \quad (5)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ac > 0$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда гиперболическая система (1) имеет общее решение вида (5), где $f_1 = f_1(y + \sqrt{ac}x)$ и $f_2 = f_2(y - \sqrt{ac}x)$ — произвольные функции.

Доказательство. В силу обозначений (2) функции f_1 и f_2 примут вид $f_1 = f_1(\eta)$, $f_2 = f_2(\xi)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} (-\sqrt{ac}f_2' - \sqrt{ac}f_1'), & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} (f_2' - f_1'), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} (-\sqrt{ac}f_2' + \sqrt{ac}f_1'), & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} (f_2' + f_1'). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2} (-\sqrt{ac}f_2' - \sqrt{ac}f_1') + a \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} (f_2' + f_1') = -\frac{\sqrt{ac}}{2} (f_2' + f_1') + \frac{\sqrt{ac}}{2} (f_2' + f_1') = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} (-\sqrt{ac}f_2' + \sqrt{ac}f_1') + c \frac{1}{2} (f_2' - f_1') = -\frac{c}{2} (f_2' - f_1') + \frac{c}{2} (f_2' - f_1') = 0, \end{aligned}$$

т.е. функции (5) удовлетворяют уравнениям системы (1), а, следовательно, являются решением этой системы. $\square$

Пусть требуется найти решение системы (1) при условиях

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (6)$$

где $u_0(x)$ и $v_0(x)$ — функции достаточной гладкости. Поскольку общее решение системы (1) имеет вид (5), получим

$$u(x, 0) = \frac{f_2(-\sqrt{ac}x) - f_1(\sqrt{ac}x)}{2}, \quad v(x, 0) = \sqrt{\frac{c}{a}} \frac{f_2(-\sqrt{ac}x) + f_1(\sqrt{ac}x)}{2}.$$

Следовательно, учитывая (6), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{f_2(-\sqrt{ac}x) - f_1(\sqrt{ac}x)}{2} = u_0(x), \\ \sqrt{\frac{c}{a}} \frac{f_2(-\sqrt{ac}x) + f_1(\sqrt{ac}x)}{2} = v_0(x), \end{cases} \quad (7)$$

в которой неизвестными являются $f_1(\sqrt{ac}x)$ и $f_2(-\sqrt{ac}x)$. Решая систему (7), получаем

$$f_1(\sqrt{ac}x) = \sqrt{\frac{a}{c}} v_0(x) - u_0(x), \quad f_2(-\sqrt{ac}x) = \sqrt{\frac{a}{c}} v_0(x) + u_0(x)$$

или

$$\begin{aligned} f_1(y + \sqrt{ac}x) &= \sqrt{\frac{a}{c}} v_0 \left(\frac{1}{\sqrt{ac}} y + x \right) - u_0 \left(\frac{1}{\sqrt{ac}} y + x \right), \\ f_2(y - \sqrt{ac}x) &= \sqrt{\frac{a}{c}} v_0 \left(-\frac{1}{\sqrt{ac}} y + x \right) + u_0 \left(-\frac{1}{\sqrt{ac}} y + x \right), \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{1}{2} \left[u_0 \left(x - \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) + u_0 \left(x + \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} \left[v_0 \left(x - \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) - v_0 \left(x + \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) \right], \\ v(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} \left[u_0 \left(x - \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) - u_0 \left(x + \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) \right] + \frac{1}{2} \left[v_0 \left(x - \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) + v_0 \left(x + \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) \right]. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ac > 0$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда начальная задача (задача Коши) (1), (6) имеет решение вида (8).

Доказательство. Справедливость утверждения подтвердит проверка, удовлетворяют ли функции (8) одновременно уравнениям системы (1) и условиям (6). Для удобства дифференцирования введем обозначения:

$$x - \frac{1}{\sqrt{ac}} y = z_1, \quad x + \frac{1}{\sqrt{ac}} y = z_2.$$

С учетом этих обозначений имеем

$$\begin{aligned} u_0 \left(x - \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) &= u_0(z_1), \quad u_0 \left(x + \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) = u_0(z_2), \\ v_0 \left(x - \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) &= v_0(z_1), \quad v_0 \left(x + \frac{1}{\sqrt{ac}} y \right) = v_0(z_2). \end{aligned}$$

Так как частные производные этих функций имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(u'_0(z_1) + u'_0(z_2) + \sqrt{\frac{a}{c}} (v'_0(z_1) - v'_0(z_2)) \right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{ac}} u'_0(z_1) + \frac{1}{\sqrt{ac}} u'_0(z_2) + \sqrt{\frac{a}{c}} \left(-\frac{1}{\sqrt{ac}} v'_0(z_1) - \frac{1}{\sqrt{ac}} v'_0(z_2) \right) \right), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{c}{a}} (u'_0(z_1) - u'_0(z_2)) + v'_0(z_1) + v'_0(z_2) \right), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{c}{a}} \left(-\frac{1}{\sqrt{ac}} u'_0(z_1) - \frac{1}{\sqrt{ac}} u'_0(z_2) \right) - \frac{1}{\sqrt{ac}} v'_0(z_1) + \frac{1}{\sqrt{ac}} v'_0(z_2) \right), \end{aligned}$$

получим следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left[u'_0(z_1) + u'_0(z_2) + \sqrt{\frac{a}{c}} v'_0(z_1) - \sqrt{\frac{a}{c}} v'_0(z_2) + \right. \\ &\quad \left. + a \left(-\frac{1}{a} u'_0(z_1) - \frac{1}{a} u'_0(z_2) - \frac{1}{\sqrt{ac}} v'_0(z_1) + \frac{1}{\sqrt{ac}} v'_0(z_2) \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{c}{a}} u'_0(z_1) - \sqrt{\frac{c}{a}} u'_0(z_2) + v'_0(z_1) + v'_0(z_2) + \right. \\ &\quad \left. + c \left(-\frac{1}{\sqrt{ac}} u'_0(z_1) + \frac{1}{\sqrt{ac}} u'_0(z_2) - \frac{1}{c} v'_0(z_1) - \frac{1}{c} v'_0(z_2) \right) \right], \end{aligned}$$

т.е. функции (8) удовлетворяют уравнениям системы (1). Кроме того, эти функции удовлетворяют условиям (6), поскольку

$$u(x, 0) = \frac{u_0(x) + u_0(x)}{2} + 0 = u_0(x), \quad v(x, 0) = 0 + \frac{v_0(x) + v_0(x)}{2} = v_0(x).$$

Следовательно, функции (8) действительно являются решением задачи (1), (6). $\square$

3. Решение однородной гиперболической системы с нелинейностью. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + bv^2 = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

a , b и c — действительные числа, не равные нулю, причем $ac > 0$, $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — неизвестные функции достаточной гладкости, x и y — независимые переменные, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Введем обозначение

$$A = A(x, y) = 2bcxy - b\sqrt{\frac{c}{a}}(y^2 - acx^2) \ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} + 4aC(y^2 - acx^2), \quad (10)$$

где C — произвольная постоянная.

Предложение 3. Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ac > 0$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда система (9) имеет решение вида

$$u(x, y) = \frac{4ay}{A(x, y)} \quad \left(\text{или} \quad u = \frac{4ay}{A} \right), \quad (11)$$

$$v(x, y) = \frac{4acx}{A(x, y)} \quad \left(\text{или} \quad v = \frac{4acx}{A} \right). \quad (12)$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-4ay \cdot A'_x}{A^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4a}{A} - \frac{4ay \cdot A'_y}{A^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4ac}{A} - \frac{4acx \cdot A'_x}{A^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{4acx \cdot A'_y}{A^2},$$

где

$$\begin{aligned} A'_x &= \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} = 2bcy - b\sqrt{\frac{c}{a}} \left(-2acx \cdot \ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} + 2\sqrt{ac}y \right) - 8a^2Ccx, \\ A'_y &= \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = 2bcx - b\sqrt{\frac{c}{a}} \left(2y \cdot \ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - 2\sqrt{ac}x \right) + 8aCy, \end{aligned}$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + bv^2 = -\frac{4ay \cdot A'_x}{A^2} + a \frac{-4acx \cdot A'_y}{A^2} + b \frac{16a^2c^2x^2}{A^2} = \frac{-4ay \cdot A'_x - 4a^2cx \cdot A'_y + 16a^2c^2x^2}{A^2} = 0,$$

так как для числителя этой дроби справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} & -4ay \cdot A'_x - 4a^2cx \cdot A'_y + 16a^2c^2x^2 = \\ & = -4ay \left(2bcy - b\sqrt{\frac{c}{a}} \left(-2acx \cdot \ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} + 2\sqrt{ac}y \right) - 8a^2Ccx \right) - \\ & - 4a^2cx \left(2bcx - b\sqrt{\frac{c}{a}} \left(2y \cdot \ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - 2\sqrt{ac}x \right) + 8aCy \right) + 16a^2bc^2x^2 = \\ & = b\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot \ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} \cdot (-8a^2cxy + 8a^2cxy) + \\ & + \left(-8abcy^2 + 8abcy^2 + 32a^3Cxy - 8a^2bc^2x^2 - 8a^2bc^2x^2 - 32a^3Cxy + 16a^2bc^2x^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4ac}{A} - \frac{4acx \cdot A'_x}{A^2} + c \left(\frac{4a}{A} - \frac{4ay \cdot A'_y}{A^2} \right) = \frac{4acA - 4acx \cdot A'_x + 4acA - 4acy \cdot A'_y}{A^2} = 0,$$

так как для выражения в числителе справедливы равенства

$$\begin{aligned}
4acA - 4acx \cdot A'_x + 4acA - 4acy \cdot A'_y &= 8acA - 4acx \cdot A'_x - 4acy \cdot A'_y = \\
&= 8ac \left(2bcxy - b\sqrt{\frac{c}{a}}(y^2 - acx^2) \ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} + 4aC(y^2 - acx^2) \right) - \\
&- 4acx \left(2bcy - b\sqrt{\frac{c}{a}} \left(-2acx \cdot \ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} + 2\sqrt{acy} \right) - 8a^2Ccx \right) - \\
&- 4acy \left(2bcx - b\sqrt{\frac{c}{a}} \left(2y \cdot \ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - 2\sqrt{acx} \right) + 8aCy \right) = \\
&= b\sqrt{\frac{c}{a}} \ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} \left(-8acy^2 + 8a^2c^2x^2 - 8a^2c^2x^2 + 8acy^2 \right) + 16abc^2xy + 32a^2cC(y^2 - acx^2) - \\
&- 8abc^2xy + 8abc^2xy + 32a^3c^2Cx^2 - 8abc^2xy - 8abc^2xy + 32a^2cCy^2 = \\
&= 32a^2cCy^2 - 32a^3c^2Cx^2 + 32a^3c^2Cx^2 - 32a^2cCy^2 = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, функции (11) и (12) являются решением системы (9). $\square$

Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ac > 0$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $v_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 > \sqrt{ac}|x_0|$ и выполняются условия

$$u(x_0, y_0) = u_0, \quad v(x_0, y_0) = v_0. \quad (13)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned}
B &= B(x, y) = 2bcv_0(y_0x - x_0y)(y_0y + acx_0x) - \\
&- b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2)(y^2 - acx^2) \left(\ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{acx_0}}{y_0 - \sqrt{acx_0}} \right) + 4acx_0(y^2 - acx^2). \quad (14)
\end{aligned}$$

Предложение 4. Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ac > 0$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $v_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 > \sqrt{ac}|x_0|$. Если $v_0y_0 = cu_0x_0$, то начально-краевая задача для системы (9) при условиях (13) имеет решение вида

$$u(x, y) = \frac{4av_0(y_0^2 - acx_0^2)y}{B(x, y)} \quad \left(\text{или} \quad u = \frac{4av_0(y_0^2 - acx_0^2)y}{B} \right), \quad (15)$$

$$v(x, y) = \frac{4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)x}{B(x, y)} \quad \left(\text{или} \quad v = \frac{4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)x}{B} \right). \quad (16)$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-4av_0(y_0^2 - acx_0^2)y \cdot B'_x}{B^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4av_0(y_0^2 - acx_0^2)}{B} - \frac{4av_0(y_0^2 - acx_0^2)y \cdot B'_y}{B^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)}{B} - \frac{4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)x \cdot B'_x}{B^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)x \cdot B'_y}{B^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'_x &= \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} = 2bcv_0(y_0^2y + 2ax_0y_0x - acx_0^2y) - \\
&- b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2) \left(-2acx \left(\ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{acx_0}}{y_0 - \sqrt{acx_0}} \right) + 2\sqrt{acy} \right) - 8a^2c^2x_0x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'_y &= \frac{\partial B(x, y)}{\partial y} = 2bcv_0(y_0^2x - 2x_0y_0y - acx_0^2x) - \\
&- b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2) \left(2y \left(\ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{acx_0}}{y_0 - \sqrt{acx_0}} \right) - 2\sqrt{acx} \right) + 8acx_0y,
\end{aligned}$$

получаем следующие равенства:

(i) для первого уравнения системы (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + bv^2 &= \\ &= \frac{-4av_0(y_0^2 - acx_0^2)y \cdot B'_x}{B^2} + a \cdot \frac{-4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)x \cdot B'_y}{B^2} + b \frac{16a^2c^2v_0^2(y_0^2 - acx_0^2)^2x^2}{B^2} = \\ &= \frac{v_0(y_0^2 - acx_0^2)}{B^2} \cdot (-4ay \cdot B'_x - 4a^2cx \cdot B'_y + 16a^2bc^2v_0(y_0^2 - acx_0^2)x^2) = 0, \end{aligned}$$

поскольку второй множитель обращается в нуль:

$$\begin{aligned} -4ay \cdot B'_x - 4a^2cx \cdot B'_y + 16a^2bc^2v_0(y_0^2 - acx_0^2)x^2 &= -4ay \left(2bcv_0(y_0^2y + 2ax_0y_0x - acx_0^2y) - \right. \\ &- b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2) \left(-2acx \left(\ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{acx_0}}{y_0 - \sqrt{acx_0}} \right) + 2\sqrt{acy} \right) - 8a^2c^2x_0x \Big) - \\ &- 4a^2cx \left(2bcv_0(y_0^2x - 2x_0y_0y - acx_0^2x) - \right. \\ &- b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2) \left(2y \left(\ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{acx_0}}{y_0 - \sqrt{acx_0}} \right) - 2\sqrt{acx} \right) + 8acx_0y \Big) + \\ &+ 16a^2bc^2v_0(y_0^2 - acx_0^2)x^2 = \\ &= b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2) \left(\ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{acx_0}}{y_0 - \sqrt{acx_0}} \right) (8a^2cxy - 8a^2cxy) + \\ &+ (y_0^2 - acx_0^2) \left(-8abcv_0y^2 + 8abcv_0y^2 - 8a^2bc^2v_0x^2 - 8a^2bc^2v_0x^2 + 16a^2bc^2v_0x^2 \right) - \\ &- 16a^2bc^2x_0y_0v_0xy + 32a^3c^2x_0xy + 16a^2bc^2x_0y_0v_0xy - 32a^3c^2x_0xy = 0; \end{aligned}$$

(ii) для второго уравнения системы (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} &= \\ &= \frac{4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)}{B} - \frac{4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)x \cdot B'_x}{B^2} + c \left(\frac{4av_0(y_0^2 - acx_0^2)}{B} - \frac{4av_0(y_0^2 - acx_0^2)y \cdot B'_y}{B^2} \right) = \\ &= \frac{4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)}{B^2} \cdot (B - x \cdot B'_x + B - y \cdot B'_y) = 0, \end{aligned}$$

так как второй множитель, в свою очередь, обращается в нуль:

$$\begin{aligned} B - cx \cdot B'_x + B - y \cdot B'_y &= 2 \left\{ 2bcv_0(y_0x - x_0y)(y_0y + acx_0x) - \right. \\ &- b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2)(y^2 - acx^2) \left(\ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{acx_0}}{y_0 - \sqrt{acx_0}} \right) + 4acx_0(y^2 - acx^2) \Big\} - \\ &- x \cdot \left\{ 2bcv_0(y_0^2y + 2ax_0y_0x - acx_0^2y) - \right. \\ &- b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2) \left(-2acx \left(\ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{acx_0}}{y_0 - \sqrt{acx_0}} \right) + 2\sqrt{acy} \right) - 8a^2c^2x_0x \Big\} - \\ &- y \cdot \left\{ 2bcv_0(y_0^2x - 2x_0y_0y - acx_0^2x) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2) \left(2y \left(\ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{acx_0}}{y_0 - \sqrt{acx_0}} \right) - 2\sqrt{acx} \right) + 8acx_0y \Big\} = \\
& = b\sqrt{\frac{c}{a}}v_0(y_0^2 - acx_0^2) \left(\ln \frac{y + \sqrt{acx}}{y - \sqrt{acx}} - \ln \frac{y_0 + \sqrt{acx_0}}{y_0 - \sqrt{acx_0}} \right) (-2(y^2 - acx^2) - 2acx^2 + 2y^2) + \\
& \quad + (y_0^2 - acx_0^2) (4bcv_0 - 2bcv_0 + 2bcv_0 + 2bcv_0 - 2bcv_0 - 2bcv_0) xy + \\
& \quad + (-4bcv_0y_0 + 8ac + 4bcv_0y_0 - 8ac) x_0(y^2 - acx^2) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, функции (15) и (16) удовлетворяют уравнениям системы (9). Кроме того, функции (15) и (16) удовлетворяют условиям (13), поскольку, учитывая, что

$$B(x_0, y_0) = 4acx_0(y_0^2 - acx_0^2),$$

из (15) находим

$$u(x_0, y_0) = \frac{4av_0(y_0^2 - acx_0^2)y_0}{B(x_0, y_0)} = u_0;$$

согласно условию $v_0y_0 = cu_0x_0$ из (16) получаем

$$v(x_0, y_0) = \frac{4acv_0(y_0^2 - acx_0^2)x_0}{B(x_0, y_0)} = v_0. \quad \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. А., Огородников Е. Н. Применение матричных интегродифференциальных операторов в постановке и решении нелокальных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2001. — № 12. — С. 45–53.
2. Гражданцева Е. Ю., Солодуша С. В. Об одном аналитическом решении нелинейного дифференциального уравнения в частных производных // в кн.: Proc. 7th Int. Conf. “Nonlinear Analysis and Extremal Problems” (Иркутск, 2022). — Иркутск, 2022. — С. 42–44.
3. Картвелишвили Л. Н. Принципы расчета гидравлического удара и их развитие // Природоустройство. — 2012. — № 4. — С. 72–77.
4. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
6. Мышкис А. Д., Филимонов А. М. О глобальной непрерывной разрешимости смешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Диффер. уравн. — 2008. — 44, № 3. — С. 394–407.
7. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Жуков А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. — М.: Физматлит, 2005.
8. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их применение в газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
9. Тарасевич В. В. Развитие теории и методов расчета гидродинамических процессов в напорных трубопроводных системах / Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Новосибирск, 2017.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
11. Assanova A. T., Zholamankyzu A. Problem with data on the characteristics for a loaded system of hyperbolic equations // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьютер. науки. — 2021. — 31, № 3. — С. 353–364.

Гражданцева Елена Юрьевна

Иркутский государственный университет;

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН, Иркутск

E-mail: grelyur@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 43–53
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-43-53

УДК 517.977.5

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАМЫКАЕМЫЕ ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2023 г. Н. М. ДМИТРУК

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления линейной дискретной системой с неизвестными ограниченными возмущениями, которую требуется за конечное время перевести с гарантией на терминальное множество, обеспечивая при этом минимум гарантированного значения терминального критерия качества. Обсуждается два подхода к построению оптимальных обратных связей в рассматриваемой задаче: размыкаемая обратная связь, которая определяется на основе оптимальных гарантирующих программ, и замыкаемая обратная связь на основе оптимальных стратегий управления с замыканиями. Обсуждаются недостатки первого подхода и предлагается эффективный метод построения оптимальной замыкаемой обратной связи в режиме реального времени.

Ключевые слова: линейная система, возмущение, оптимальное управление, обратная связь, управление в реальном времени.

CLOSED-LOOP STATE FEEDBACK IN LINEAR PROBLEMS OF TERMINAL CONTROL

© 2023 N. M. DMITRUK

ABSTRACT. We consider the optimal control problem for a linear discrete system with unknown limited disturbances, which must be transferred to a terminal set in a finite time, while providing a minimum guaranteed value of the terminal quality criterion. We discuss two approaches to constructing optimal feedbacks: the disconnectable feedback, which is determined through optimal guarantee programs, and the closed feedback based on optimal control strategies with closures. We discuss disadvantages of the first approach and propose an effective method of constructing optimal closed real-time feedback.

Keywords and phrases: linear system, disturbance, optimal control, feedback, real-time control.

AMS Subject Classification: 93C05, 93B52, 49N05

1. Введение. Задачи оптимального управления динамическими системами, подверженными действию неизвестных возмущений или содержащими другие неопределенности, для которых требуется получить гарантированный результат, рассматриваются в литературе с конца 1960-х гг. (см. [9, 10]). Для таких задач требуется строить решение в виде обратной связи, поскольку оптимальные программы (в случае, если они существуют) в значительной степени недооценивают потенциальные возможности системы управления.

Оптимальная обратная связь в задачах оптимального управления системами с возмущениями может быть определена различными способами. Простейший из них в работах [2, 5, 6, 13] получил название оптимальной размыкаемой обратной связи. При ее построении семейство, в которое

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (НИР 1.2.04.1).

погружается исходная задача оптимального управления, есть семейство задач построения оптимальных гарантирующих программ. В то время как такой подход отчасти решает проблему консервативности программного решения, он неприменим в случае когда исходная задача не имела программного решения.

В [2, 5, 6, 13, 14] для формирования обратной связи предлагается использовать не оптимальные гарантирующие программы, а оптимальные стратегии, учитывающие зависимость управляющих воздействий от информации не только о текущих, но и о будущих состояниях процесса управления. Такие оптимальные обратные связи получили название замыкаемых (см. [2, 5, 6]). В терминологии приведенных работ замкнутая обратная связь совпадает с решением динамического программирования, а замыкаемая обратная связь представляет собой компромисс между последним и размыкаемой обратной связью с точки зрения качества процесса управления и вычислительных затрат.

Настоящая работа примыкает к работам [2, 5, 6, 12, 13], в которых стратегия управления определяется в предположении о коррекции управлений в несколько заданных будущих моментов времени. В отличие от [2, 5, 6] предлагается новый метод построения оптимальной стратегии (см. подход в [8, 12]), трудоемкость которого сравнима с трудоемкостью построения оптимальной программы, что делает его применимым для построения замыкаемой обратной связи в режиме реального времени.

2. Постановка задачи. Оптимальная размыкаемая обратная связь. Рассмотрим дискретную линейную стационарную систему управления с неизвестным ограниченным возмущением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots, T-1. \quad (1)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы (1), $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$ — управление, $w(t) \in W \subset \mathbb{R}^p$ — неизвестное возмущение в момент времени t ; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$; множества доступных значений управления U и возмущения W имеют вид

$$U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}, \quad W = \{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|_{\infty} \leq w_{\max}\},$$

где $\|z\|_{\infty} = \max_i |z_i|$.

Для системы (1) рассмотрим задачу о ее переводе в момент времени T на заданное терминальное множество

$$X_T = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq g\}, \quad H \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad g \in \mathbb{R}^m,$$

с гарантией, т.е. при всех возможных реализациях возмущения, при минимуме гарантированного значения линейного терминального критерия качества $c^T x(T)$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Для решения поставленной задачи будем строить обратные связи. Простейшая оптимальная обратная связь, которую можно предложить в рассматриваемой задаче, основана на оптимальных программных решениях (см. [2, 8]).

Задача построения оптимальной гарантирующей программы имеет вид

$$\begin{aligned} J(0, x_0) &= \min_u \max_w c^T x(T), \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \\ Hx(T) &\leq g \quad \forall w(t) \in W, \quad t = 0, 1, \dots, T-1. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение задачи (2) — оптимальная гарантирующая программа $u^0(\cdot) = (u^0(t), t = 0, 1, \dots, T-1)$, зависит только от времени t и доставляет минимум гарантированному значению критерия качества $\max_w c^T x(T)$ при условии выполнения терминального ограничения для всех возможных реализаций возмущения $w(\cdot)$.

Погрузим задачу (2) в семейство задач

$$\begin{aligned} J(\tau, z) &= \min_u \max_w c^\top x(T), \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(\tau) = z, \\ u(t) &\in U, \quad t = \tau, \tau+1, \dots, T-1, \\ Hx(T) &\leq g \quad \forall w(t) \in W, \quad t = \tau, \tau+1, \dots, T-1, \end{aligned} \quad (3)$$

зависящее от позиции процесса управления (τ, z) , где $\tau = 0, 1, \dots, T-1$, $z \in X_\tau \subseteq \mathbb{R}^n$, X_τ — множество всех состояний z , для которых в момент времени τ разрешима задача (3).

Пусть $u^0(\cdot|\tau, z) = (u^0(t|\tau, z), t = \tau, \tau+1, \dots, T-1)$, — оптимальная программа задачи (3) для позиции (τ, z) . Оптимальную обратную связь на основе оптимальных программ определим как функцию

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau|\tau, z), \quad z \in X_\tau, \quad \tau = 0, 1, \dots, T-1. \quad (4)$$

В работе [2] такая обратная связь названа *оптимальной размыкаемой обратной связью*.

Пусть в конкретном процессе управления реализуется траектория $x^*(\tau)$, $\tau = 0, 1, \dots, T-1$ (зависит от конкретной реализации возмущения); при этом текущие состояния $x^*(\tau)$ в момент τ доступны для полных и точных измерений. Функция

$$u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau)), \quad \tau = 0, 1, \dots, T-1, \quad (5)$$

называется *реализацией оптимальной размыкаемой обратной связи* (4) в рассматриваемом процессе управления (см. [2]).

Нетрудно видеть, что для вычисления реализации (5) в конкретном процессе управления знать оптимальную обратную связь (4) для всех позиций (τ, z) , $z \in X_\tau$, $\tau = 0, 1, \dots, T-1$, не обязательно. Достаточно уметь вычислять значения $u^*(\tau)$ для состояний $x^*(\tau)$ по ходу процесса управления, т.е. в реальном времени (см. [7]). Устройство, способное вычислять значения реализации $u^*(\tau)$ в реальном времени, называется *оптимальным регулятором* (см. [7]).

Оптимальный регулятор осуществляет управление системой (1) по принципу размыкаемой обратной связи в реальном времени согласно следующему алгоритму.

Алгоритм реализации оптимальной размыкаемой обратной связи.

Для всех $\tau = 0, 1, \dots, T-1$:

- (i) измерить $x^*(\tau)$;
- (ii) решить задачу (3) при $z = x^*(\tau)$, найти ее оптимальную программу $u^0(\cdot|\tau, x^*(\tau))$;
- (iii) подать управление $u^*(\tau) = u^0(\tau|\tau, x^*(\tau))$ на вход системы (1).

Указанный алгоритм работы оптимального регулятора реализуем при условии разрешимости задачи построения оптимальной гарантирующей программы (2) для начальной позиции $(0, x_0)$. Это условие называется условием начальной разрешимости.

Предложение 1. Пусть задача (2) имеет решение. Тогда задача (3) также имеет решение при всех $\tau = 1, 2, \dots, T-1$. Кроме того, выполняются следующие неравенства для оптимального значения критерия качества:

$$J(\tau, x^*(\tau)) \leq J(\tau-1, x^*(\tau-1)), \quad \tau = 1, 2, \dots, T-1.$$

Доказательство предложения 1 непосредственно следует из того факта, что $u^0(t|\tau-1, x^*(\tau-1))$, $t = \tau, \tau+1, \dots, T-1$, т.е. сужение решения, полученного в предыдущий момент времени $\tau-1$, на промежуток управления $\{\tau, \tau+1, \dots, T-1\}$, является допустимым управлением для задачи (3) для позиции $(\tau, x^*(\tau))$.

Обсудим условие начальной разрешимости, т.е. существования решения задачи (2). Терминальные ограничения этой задачи выполняются с гарантией тогда и только тогда (см. [2, 8]), когда для номинальной системы (системы без возмущений)

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

найдется управление $u(t) \in U$, $t = 0, 1, \dots, T-1$, переводящее ее на «суженное» терминальное множество:

$$x_0(T) \in \bar{X}_T = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq g - \gamma\},$$

где $\gamma = (\gamma_i, i = 1, 2, \dots, m)$,

$$\gamma_i = w_{\max} \sum_{t=0}^{T-1} \|h_i^\top A^t M\|_1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \|z\|_1 = \sum_i |z_i|.$$

Отсюда следует, что условие начальной разрешимости может не выполняться по двум причинам: (i) множество $\bar{X}_T$ пусто; (ii) множество достижимости номинальной системы не имеет общих точек с $\bar{X}_T$. В обоих этих случаях оптимальная размыкаемая обратная связь, очевидно, не может быть реализована (см. примеры 2 и 3 в разделе 5).

При реализации алгоритма необходимо эффективно реализовать шаг (ii), на котором по ходу процесса управления решается задача (3). Эта задача может быть сведена сначала к детерминированной задаче оптимального управления, а затем к задаче линейного программирования (см. [8]). При этом информацию о решении $u^0(\cdot | \tau - 1, x^*(\tau - 1))$ в предыдущий момент времени $\tau - 1$ нужно использовать в качестве начального приближения для итераций в текущий момент времени τ (см. подходы, описанные в [1, 3, 7]). Это позволяет значительно ускорить процесс решения задачи для (3) в позиции $(\tau, x^*(\tau))$.

3. Оптимальная стратегия управления и замыкаемая обратная связь. Начальная неразрешимость задачи (2) — частая проблема, возникающая при реализации оптимальной размыкаемой обратной связи. Для ее преодоления дополним постановку задачи из раздела 2 предположением о том, что до начала управления известно, что система (1) будет замкнута (см. [2, 8, 12]) в некоторые фиксированные моменты времени $T_j \in \{1, 2, \dots, T-1\}$, $j = 1, 2, \dots, N$, $T_1 < T_2 < \dots < T_N$, которые будем называть *моментами замыкания*. Моменты замыкания разбивают интервал управления на $\Delta_j = \{T_j, T_j + 1, \dots, T_{j+1} - 1\}$, $j = 0, 1, \dots, N$, где считается, что $T_0 = 0$, $T_{N+1} = T$.

Пусть $u_j(\cdot) = (u_j(t) \in U, t \in \Delta_j)$ — управление, $w_j(\cdot) = (w_j(t) \in W, t \in \Delta_j)$ — возмущение на Δ_j ,

$$U_j = U^{T_{j+1}-T_j} = \underbrace{U \times \dots \times U}_{T_{j+1}-T_j \text{ раз}}, \quad W_j = W^{T_{j+1}-T_j}.$$

Обозначим через $x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)$ состояние системы (1) в момент T_{j+1} при начальном состоянии $x(T_j) = x_j$, управлении $u_j(\cdot) \in U_j$ и возмущении $w_j(\cdot) \in W_j$, а через

$$X(T_{j+1}|x_j, u_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j), w_j(\cdot) \in W_j\},$$

— множество состояний, в которых может оказаться система (1) в момент времени T_{j+1} .

Относительно моментов замыкания предполагаем, что в каждый момент T_j можно будет: (i) точно измерить текущее состояние $x^*(T_j)$ системы; (ii) в зависимости от измеренного $x^*(T_j)$ выбрать новое управление $u_j(t|x^*(T_j))$, $t \in \Delta_j$.

Согласно сделанному предположению процесс управления будет организован следующим образом. Выбирается управление $u_0(\cdot|x_0) \in U_0$, которое используется в моменты времени $t \in \Delta_0$. В момент T_1 измеряется текущее состояние системы $x^*(T_1)$ и вычисляется управление $u_1(\cdot|x^*(T_1)) \in U_1$, которое применяется на Δ_1 . Продолжая этот процесс, в момент времени T_j измеряется реализующееся состояние $x^*(T_j)$ и строится управление $u_j(\cdot|x^*(T_j)) \in U_j$ для Δ_j .

Состояния $x^*(T_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, заранее (в момент $t = 0$) не известны; известно только, что $x^*(T_j) \in X(T_j|x_{j-1}, u_{j-1})$. Поэтому решение задачи управления, поставленной в разделе 2, будем искать в виде *стратегии управления* $\pi_N(0, x_0)$ с N моментами замыкания $T_1, \dots, T_N$, которую определим рекуррентно на основе стратегий $\pi_{N-j}(T_j, x_j)$ с $N-j$ моментами замыкания, $j = N-1, N-2, \dots, 1$:

$$\begin{aligned} \pi_1(T_{N-1}, x_{N-1}) &= \{u_{N-1}(\cdot|x_{N-1}); u_N(\cdot|x_N), x_N \in X(T_N|x_{N-1}, u_{N-1})\}, \\ \pi_{N-j}(T_j, x_j) &= \{u_j(\cdot|x_j); \pi_{N-j-1}(T_{j+1}, x_{j+1}), x_{j+1} \in X(T_{j+1}|x_j, u_j)\}, \\ \pi_N(0, x_0) &= \{u_0(\cdot|x_0); \pi_{N-1}(T_1, x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0)\}. \end{aligned}$$

Траекторию системы управления (1), соответствующую стратегии $\pi_N(0, x_0)$ и возмущению $w(\cdot) = (w_0(\cdot), w_1(\cdot), \dots, w_N(\cdot))$, определим, следуя [8, 13], как последовательное решение систем:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu_0(t|x_0) + Mw_0(t), & x(0) &= x_0, & t &\in \Delta_0, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t|x(T_j)) + Mw_j(t), & x(T_j) &= x(T_j|x_{j-1}, u_{j-1}, w_{j-1}), & t &\in \Delta_j, \end{aligned}$$

$j = 1, 2, \dots, N$. Положим $X_{N+1} = X_T$ и введем в рассмотрение множества $X_N, \dots, X_1$ согласно правилам

$$X_j = \{x_j \in \mathbb{R}^n : \exists u_j(\cdot|x_j) \in U_j, X(T_{j+1}|x_j, u_j) \subseteq X_{j+1}\}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

т.е. множество X_j составим из всех точек x_j , для которых существует управление $u_j(t|x_j)$, $t \in \Delta_j$, переводящее систему (1) с гарантией на множество X_{j+1} .

Согласно [2, 8], эти множества будем называть *множествами замыкания*. Далее предполагаем, что все множества замыкания $X_1, X_2, \dots, X_N$ не пустые.

Стратегия управления $\pi_N(0, x_0)$ называется допустимой (см. [8]), если все составляющие ее управления $u_j(\cdot|x_j) \in U_j$ таковы, что

$$X(T_{j+1}|x_j, u_j) \subseteq X_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Оптимальная стратегия $\pi_N^0(0, x_0)$ определяется (см. [8]) управлениями $u_j^0(t|x_j)$, $t \in \Delta_j$, которые, согласно принципам динамического программирования, находятся из уравнения Беллмана

$$V_j(x_j) = \min_{u_j \in U_j} \max_{w_j \in W_j} V_{j+1}(x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)), \quad j = N, N-1, \dots, 0,$$

где $V_{N+1}(x) = c^\top x$ при $x \in X_{N+1}$, $V_{N+1}(x) = +\infty$ при $x \notin X_{N+1}$.

На основе стратегий управления определим оптимальную замыкаемую обратную связь. Погрузим рассматриваемую задачу в семейство задач, в котором процесс управления начинается в момент времени τ из начального состояния $x(\tau) = z$, $\tau = 0, 1, \dots, T-1$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Для позиции (τ, z) с $\tau \in \Delta_j$ решением задачи в классе стратегий с замыканиями будет оптимальная стратегия с $N-j$ моментами замыкания $T_{j+1}, T_{j+2}, \dots, T_N$:

$$\pi_{N-j}^0(\tau, z) = \{u_j^0(\cdot|\tau, z); \pi_{N-j-1}^0(T_{j+1}, x_{j+1}), x_{j+1} \in X(T_{j+1}|\tau, z, u_j^0)\},$$

где $u_j^0(\cdot|\tau, z) \in U^{T_{j+1}-\tau}$ определена на промежутке $\Delta_j(\tau) = \{\tau, \tau+1, \dots, T_{j+1}-1\}$:

$$u_j^0(\cdot|\tau, z) = \arg \min_{u_j} \max_{w_j} V_{j+1}(x(T_{j+1}|\tau, z, u_j, w_j)); \quad (6)$$

$x(T_{j+1}|\tau, z, u_j, w_j)$ — состояние системы (1) в момент T_{j+1} при начальном состоянии $x(\tau) = z$, управлении $u_j(\cdot) \in U^{T_{j+1}-\tau}$ и возмущении $w_j(\cdot) \in W^{T_{j+1}-\tau}$; $X(T_{j+1}|\tau, z, u_j)$ — множество состояний, в которых может оказаться система (1) в момент времени T_{j+1} .

Обозначим через X_τ^π множество всех состояний $z \in \mathbb{R}^n$, для которых существует оптимальная стратегия $\pi_{N-j}^0(\tau, z)$.

Оптимальную замыкаемую обратную связь определим следующим образом:

$$u_\pi^0(\tau, z) = u_j^0(\tau|\tau, z), \quad z \in X_\tau^\pi, \quad \tau \in \Delta_j, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (7)$$

Как и в случае с оптимальной размыкаемой обратной связью (см. раздел 2), в реальном процессе управления обратная связь (7) не используется полностью, для всех $z \in X_\tau^\pi$, нужны лишь ее значения вдоль реализующейся траектории $x^*(\tau)$, $\tau = 0, 1, \dots, T$. Функция

$$u_\pi^*(\tau) = u_\pi^0(\tau, x^*(\tau)) = u_j^0(\tau|\tau, x^*(\tau)), \quad \tau \in \Delta_j, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

называется *реализацией оптимальной замыкаемой обратной связи* в конкретном процессе управления, а устройство, способное вычислять значения реализации $u_\pi^*(\tau)$ в реальном времени — оптимальным регулятором.

Оптимальный регулятор осуществляет управление системой (1) в реальном времени согласно следующему алгоритму, выполняемому для всех $\tau = 0, 1, \dots, T-1$.

Алгоритм реализации оптимальной замыкаемой обратной связи.

- (i) Измерить $x^*(\tau)$, определить j : $\tau \in \Delta_j$;
- (ii) решить задачу построения оптимальной стратегии $\pi_{N-j}^0(\tau, x^*(\tau))$ для текущей позиции и найти управление (6);
- (iii) подать управление $u_\pi^*(\tau) = u_j^0(\tau | \tau, x^*(\tau))$ на вход системы (1).

Для реализации приведенного алгоритма работы оптимального регулятора, осуществляющего управление системой (1) по принципу замыкаемой обратной связи, необходимо в режиме реального времени решать минимаксные задачи (6), которые в подробной записи имеют вид

$$\begin{aligned} V(\tau, x^*(\tau)) &= \min_{u_j} \max_{w_j} V_{j+1}(x(T_{j+1})), \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t) + Mw_j(t), \quad x(\tau) = x^*(\tau), \\ u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_j(\tau), \\ x(T_{j+1}) &\in X_{j+1} \quad \forall w_j(t) \in W, \quad t \in \Delta_j(\tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Как и в случае реализации оптимальной размыкаемой обратной связи, очевидно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть задача (8) имеет решение для позиции $(0, x_0)$. Тогда задача (8) имеет решение при всех $\tau = 1, 2, \dots, T-1$ и, кроме того, выполняется неравенство для оптимального значения критерия качества:

$$V(\tau, x^*(\tau)) \leq V(\tau-1, x^*(\tau-1)), \quad \tau = 1, 2, \dots, T-1.$$

Эффективный метод решения задач вида (8) был предложен в [8]. В следующем разделе приведем основные результаты из [8] и обсудим применение этого метода в режиме реального времени.

4. Метод построения оптимальной стратегии управления и реализации оптимальной замыкаемой обратной связи. Перепишем минимаксную задачу (8) в эквивалентном виде (см. [11, с. 134])

$$\begin{aligned} V(\tau, x^*(\tau)) &= \min_{u_j, \alpha} \alpha, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t) + Mw_j(t), \quad x(\tau) = x^*(\tau), \\ u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_j(\tau), \\ x(T_{j+1}) &\in X_{j+1}(\alpha) \quad \forall w_j(t) \in W, \quad t \in \Delta_j(\tau), \end{aligned} \quad (9)$$

где $X_{j+1}(\alpha) = \{x \in X_{j+1} : V_{j+1}(x) \leq \alpha\}$.

Множества $X_j(\alpha)$, $j = 1, 2, \dots, N$, при фиксированном значении параметра α являются выпуклыми многогранниками. Иногда удается точно найти нормали к граням этих многогранников, но в большинстве случаев приходится прибегать к более простым внешним многогранным аппроксимациям

$$\bar{X}_j(\alpha) = \left\{ x_j \in \mathbb{R}^n : p_{ji}^\top x_j \leq f_{ji}(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, m_j \right\}, \quad (10)$$

где $p_{ji} \in \mathbb{R}^n$, $\|p_{ji}\| = 1$,

$$f_{ji}(\alpha) = \max_{x_j} p_{ji}^\top x_j, \quad x_j \in X_j(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, m_j. \quad (11)$$

Для формулировки основного результата, позволяющего получить простое представление для аппроксимации $\bar{X}_j(\alpha)$ с линейной зависимостью от параметра α в правой части неравенства, введем в рассмотрение матрицы и векторы

$$\begin{aligned} P_{N+1} &= \begin{pmatrix} H \\ c^\top \end{pmatrix}, \quad g_{N+1} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{N+1} = \begin{pmatrix} 0_m \\ 1 \end{pmatrix}, \\ P_j &= \begin{pmatrix} p_{ji}^\top \\ k = 1, 2, \dots, K_{ji} \\ i = 1, 2, \dots, m_j \end{pmatrix}, \quad g_j = \begin{pmatrix} f_{ji}^k - \lambda_{j+1}^\top y_{ji}^k a_{ji}^k \\ k = 1, 2, \dots, K_{ji} \\ i = 1, 2, \dots, m_j \end{pmatrix}, \quad \lambda_j = \begin{pmatrix} \lambda_{j+1}^\top y_{ji}^k \\ k = 1, 2, \dots, K_{ji} \\ i = 1, 2, \dots, m_j \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Элементы матриц (12) таковы: f_{ji}^k — оптимальное значение, а y_{ji}^k — оптимальное решение следующей задачи линейного программирования при $\alpha = a_{ji}^k$:

$$\begin{aligned} f_{ji}(\alpha) &= \min_y (g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha - \chi_j(T_j))^\top y + c_{ji}, \\ (P_{j+1}A^{T_{j+1}-T_j})^\top y &= p_{ji}, \quad y \geq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$c_{ji} = \sum_{t \in \Delta_j} \left([-p_{ji}^\top A^{T_j-t-1} B]_+ u_{\max} - [p_{ji}^\top A^{T_j-t-1} B]_+ u_{\min} \right),$$

$[z]_+ = \max\{z, 0\}$ — положительная срезка для $z \in \mathbb{R}$; $[z]_+ = ([z_j]_+, j = 1, \dots, r)$, $z \in \mathbb{R}^r$;

$$\chi_j(\tau) = \left(\begin{array}{c} \chi_{ji}(\tau) \\ k = 1, 2, \dots, K_{ji} \\ i = 1, 2, \dots, m_j \end{array} \right) : \quad \chi_{ji}(\tau) = w_{\max} \sum_{t \in \Delta_j(\tau)} \|p_{j+1i}^\top A^{T_{j+1}-t-1} M\|_1.$$

Отметим, что задачи (13) эквивалентны задачам, двойственным к задачам (11). Они решаются рекуррентно, начиная с $j = N$.

В качестве значения параметра α , при котором решается каждая конкретная задача (13), выбирается любая точка a_{ji}^k из промежутка $[\alpha_{ji}^{k+1}, \alpha_{ji}^k]$, $k = 1, 2, \dots, K_{ji}$. Указанные промежутки находятся из условия, что оптимальное решение задачи (13) остается постоянным при $\alpha \in [\alpha_{ji}^{k+1}, \alpha_{ji}^k]$,

$$\alpha_{ji}^1 = \alpha_{\max} > \alpha_{ji}^2 > \dots > \alpha_{ji}^{K_{ji}} > \alpha_{ji}^{K_{ji}+1} = \alpha_{\min}, \quad (14)$$

$\alpha_{\min}$ — минимальное значение параметра α , при котором задачи (13) имеют конечное решение (оказывается одинаковым для всех задач), $\alpha_{\max}$ — оценка сверху на оптимальное значение критерия качества $V(0, x_0)$. Схема, которая позволяет эффективно найти значения (14), приведена в [8]; там же доказано следующее утверждение.

Предложение 3. Для аппроксимаций (10) имеют место представления

$$\bar{X}_j(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : P_j x \leq g_j + \lambda_j \alpha\}, \quad \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}], \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

С учетом представления (15) задача (9) аппроксимируется задачей вида

$$\begin{aligned} \min_{u_j, \alpha} \alpha, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t) + Mw_j(t), \quad x(\tau) = x^*(\tau), \\ u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_j(\tau), \\ P_{j+1}x(T_{j+1}) &\leq g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha \quad \forall w_j(t) \in W, \quad t \in \Delta_j(\tau), \end{aligned}$$

которая может быть сведена к задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} \min_{u_j, \alpha} \alpha, \\ \sum_{t \in \Delta_j(\tau)} P_{j+1}A^{T_{j+1}-t-1} Bu_j(t) - \lambda_{j+1}\alpha &\leq g_{j+1} - \chi_j(\tau) - P_{j+1}A^{T_{j+1}-\tau} x^*(\tau), \\ u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_j(\tau). \end{aligned} \quad (16)$$

В результате решения задачи (16) будет построено субоптимальное управление $\bar{u}_j^0(t|\tau, z)$, $t \in \Delta_j(\tau)$, задачи (8), оценка субоптимальности которого зависит от точности аппроксимации множеств замыкания и может быть оценена в каждом конкретном примере (см. [8, 12]).

Теперь в алгоритме реализации оптимальной замыкаемой обратной связи на шаге (ii) будем решать задачу (16) и на шаге (iii) на вход системы в момент τ подавать управление $\bar{u}_\pi^*(\tau) = \bar{u}_j^0(\tau|\tau, x^*(\tau))$.

Построение множеств $\bar{X}_j(\alpha)$, $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, $j = 1, 2, \dots, N$, является достаточно трудоемкой процедурой. Однако из приведенных результатов и вида задачи (16), следует, что они могут быть построены до начала процесса управления и не требуют модификации в реальном времени. Это существенное улучшение по сравнению с алгоритмом, приведенным в [2].

В режиме реального времени решается только задача (16). Для нее удобно использовать адаптивный метод решения задач линейного программирования (см. [4]) или симплекс-метод. При этом необходимо различать две ситуации:

- (a) $\tau = T_j, j = 1, 2, \dots, N$;
- (b) $\tau \in \Delta_j(\tau) \setminus \{T_j\}, j = 1, 2, \dots, N$.

Рассмотрим сначала ситуацию (b). Поскольку задача (16) для текущего интервала Δ_j уже решалась в момент $\tau - 1$ для позиции $(\tau - 1, x^*(\tau - 1))$, известна структура ее решения: оптимальная опора (для адаптивного метода) или оптимальный базис (для симплекс-метода), а также соответствующие множители Лагранжа (потенциалы и оценки). В работах [?, 1, 2], посвященных реализациям алгоритмов работы оптимальных регуляторов для различных классов задач оптимального управления, показано, что выбор оптимальной опоры/базиса предыдущей задачи в качестве начальной в текущий момент времени τ позволяет быстро получать оптимальные решения для позиции $(\tau, x^*(\tau))$.

В ситуации (a) в момент $\tau = T_j$ происходит переход от промежутка Δ_{j-1} к промежутку Δ_j . Соответственно, меняется целевое множество с $X_j(\alpha)$ на $X_{j+1}(\alpha)$, и структура предыдущего решения в момент $\tau - 1$ непригодна для использования в текущий момент τ . Здесь можно предложить два подхода.

В первом подходе сразу после решения задачи (16) для позиции $(T_j, x^*(T_j))$ (для $j = 0$ эта задача решена до начала процесса управления) сразу решить задачу (16) для позиции $(T_{j+1}, x_0(T_{j+1}|x^*(T_j), \bar{u}_j^0))$, где $x_0(T_{j+1}|x^*(T_j), \bar{u}_j^0)$ — состояние номинальной системы для начального состояния $x_0(T_j) = x^*(T_j)$ и субоптимального управления $\bar{u}_j^0(\cdot)$. Эта задача может решаться параллельно с процессом управления на промежутке Δ_j , а затем ее оптимальная опора/базис принимаются в качестве начального приближения для решения задачи (16) для позиции $(T_{j+1}, x^*(T_{j+1}))$.

Второй подход применим в случае, если решение задачи (16) для позиции $(T_{j+1}, x_0(T_{j+1}|x^*(T_j), \bar{u}_j^0))$ удастся построить за время до наступления момента $T_j + 1$. Тогда в каждый момент $\tau \in \Delta_j$ оптимальный регулятор будет успевать решать две задачи: задачу (16) для текущей позиции $(\tau, x^*(\tau))$ и задачу для позиции $(T_{j+1}, x_0(T_{j+1}|\tau, x^*(\tau), \bar{u}_j^0))$. При решении второй задачи заготавливается и в режиме реального времени корректируется оптимальная опора/базис, которая будет использована в качестве начальной в момент $\tau = T_{j+1}$.

5. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим задачу из [8, 12]:

$$x_2(T) \rightarrow \max,$$

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0998 \\ -0,0998 & 0,9950 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0998 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0998 \end{pmatrix} w(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$x(T) \in X_T = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_{\min} \leq x_1 \leq g_{\max}\}, \quad |u(t)| \leq 1, \quad |w(t)| \leq 0,5, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

где $T = 120$, $g_{\min} = 2$, $g_{\max} = 10$. В задаче (17) для начальной позиции $(0, x_0)$ существует оптимальная гарантирующая программа $u^0(\cdot)$; она доставляет критерию качества гарантированное значение $J(x_0) = 1,501102$. Как следует из предложения 1, оптимальная размыкаемая обратная связь в рассматриваемой задаче может быть реализована согласно алгоритму из раздела 2. Для эксперимента был выбран процесс управления, в котором реализовалось возмущение

$$w(t) = \begin{cases} -0,5, & t \in \{0, 1, \dots, 9\} \cup \{41, 42, \dots, 72\} \cup \{104, 105, \dots, 119\}, \\ 0,5, & t \in \{10, 11, \dots, 40\} \cup \{73, 74, \dots, 103\}. \end{cases}$$

Реализация оптимальной размыкаемой обратной связи $u^*(\cdot)$ и соответствующие ей траектории $x_1^*(\cdot)$, $x_2^*(\cdot)$ представлены на рис. 1 (штриховые линии). К терминальному моменту времени удается достичь значения критерия качества $x_2^*(T) = 3,328877$.

В рассматриваемом процессе минимальное время решения задач (3) для текущих позиций $(\tau, x^*(\tau))$ адаптивным методом (см. [4]) составило 0,41 мс, максимальное — 2,62 мс, среднее — 0,91 мс.

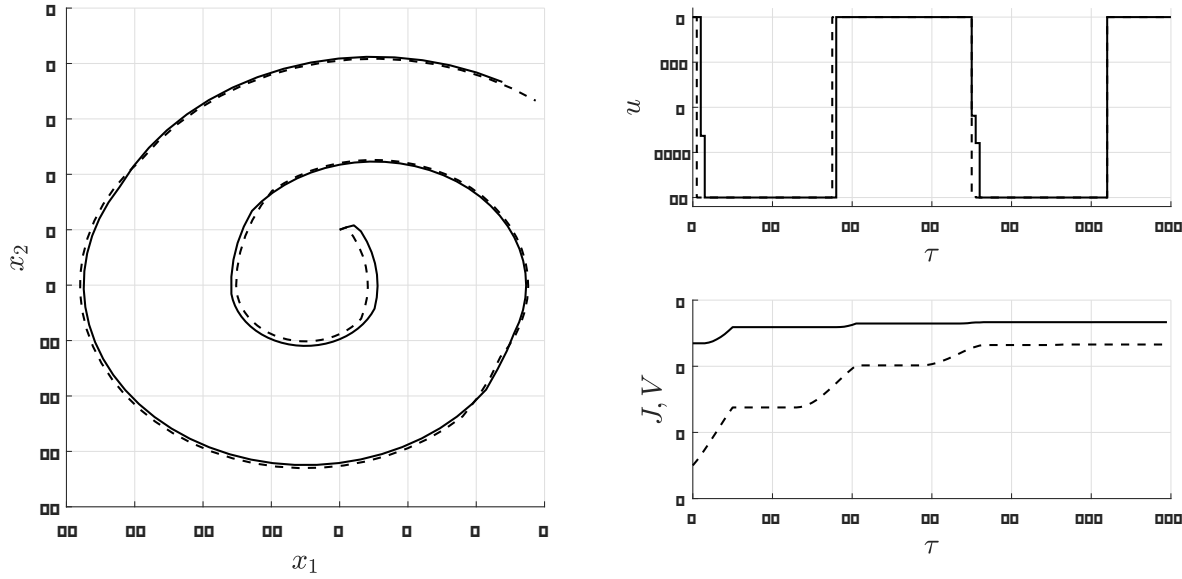


Рис. 1. Фазовые траектории, реализации обратных связей и сравнение критериев качества в примере 1.

Для построения оптимальной замыкаемой обратной связи были выбраны 5 моментов замыкания: $T_1 = 20$, $T_2 = 40$, $T_3 = 60$, $T_4 = 80$, $T_5 = 100$. Субоптимальная стратегия для позиции $(0, x_0)$ гарантирует оптимальное значение критерия качества $V(0, x_0) = 3,347376$ при точности аппроксимации множеств замыкания $6 \cdot 10^{-4}$.

Реализация оптимальной замыкаемой обратной связи согласно алгоритму раздела 3 для рассмотренного выше процесса и соответствующие траектории изображены на рис. 1 сплошными линиями. На рис. 1 также представлено сравнение изменения значений критерия качества $J(\tau, x^*(\tau))$ и $V(\tau, x^*(\tau))$. При использовании оптимальной замыкаемой обратной связи получено значение критерия качества равное $x_2^*(T) = 3,666780$.

Минимальное время решения задач (16) составило 0,3 мс, максимальное — 6,36 мс, среднее — 0,96 мс, что сравнимо со временем решения задач (3) при реализации размыкаемой обратной связи.

Пример 2. Если в примере 1 принять $g_{\max} = 3,5$, то задача (2) для начальной позиции $(0, x_0)$ не имеет решения, поскольку множество $\bar{X}_T = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2 + \gamma \leq x_1 \leq 3,5 - \gamma\}$ с $\gamma = 3,9206138$ оказывается пустым. Оптимальная замыкаемая обратная связь, однако, существует и совпадает с построенной реализацией в примере 1 для рассмотренного выше процесса.

Пример 3. Рассмотрим динамическую систему и критерий качества примера 1, изменив начальное состояние, терминальное множество X_T и множество возможных значений возмущения W :

$$\begin{aligned}
 & x_2(T) \rightarrow \max, \\
 & x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0998 \\ -0,0998 & 0,9950 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0998 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0998 \end{pmatrix} w(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \\
 & x(T) \in X_T = \{x \in \mathbb{R}^2 : 8 \leq x_1 + x_2 \leq 13, -6 \leq x_1 - x_2 \leq -1\}, \\
 & |u(t)| \leq 1, \quad |w(t)| \leq 0,2, \quad t = 0, 1, \dots, T-1.
 \end{aligned}$$

Для выбранных новых параметров не существует оптимальной гарантирующей программы для позиции $(0, x_0)$. Этот пример демонстрирует случай, когда множество $\bar{X}_T$ не пусто, однако это

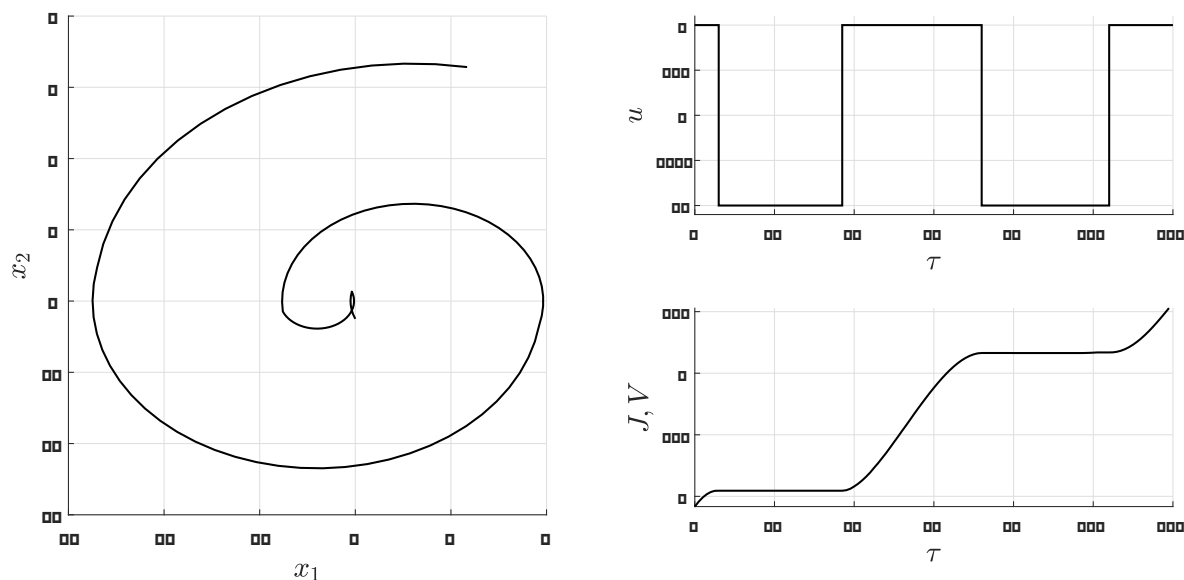


Рис. 2. Фазовая траектория, реализация оптимальной замыкаемой обратной связей и улучшение критерия качества в примере 2.

множество недостижимо из выбранного начального состояния x_0 . Таким образом, оптимальная размыкаемая обратная связь в рассматриваемом примере не может быть реализована.

Однако оптимальная стратегия управления для позиции $(0, x_0)$ существует, если выбрать, например, моменты замыкания $T_1 = 40$, $T_2 = 80$. При этом $V(0, x_0) = 4,916932$, и график улучшения значения $V(\tau, x^*(\tau))$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$, в процессе управления замыкаемой обратной связи изображен на рис. 2. Также на рис. 2 представлены реализация $\bar{u}_\pi^*(\tau)$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$, и соответствующая ей фазовая траектория $x^*(\tau)$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$.

Минимальное время решения задач (16) составило 0,31 мс, максимальное — 3,56 мс, среднее — 0,82 мс.

6. Заключение. В работе исследована проблема построения оптимальных обратных связей в задаче минимизации гарантированного значения терминального критерия качества на траекториях линейной дискретной системы с неизвестными ограниченными возмущениями. Основное внимание уделяется построению оптимальных замыкаемых обратных связей, основанных на оптимальных стратегиях управления с замыканиями и вопросу их реализаций в режиме реального времени. Показано, что с применением метода, предложенного в [8] для построения оптимальных стратегий, реализация замыкаемой обратной связи по трудоемкости вычислений сравнима с реализацией размыкаемой обратной связи, которая определяется на основе оптимальных гарантирующих программ. При этом использование замыканий позволяет строить обратные связи в тех случаях, когда оптимальных программ в задаче не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2000. — 40, № 6. — С. 838–859.
2. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — 44, № 2. — С. 265–286.
3. Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М. Оптимизация многомерных систем управления с параллелепипедными ограничениями // Автомат. телемех. — 2002. — 63, № 3. — С. 3–26.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. — Минск, 1984.

5. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костина Е. А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. I. Однократное замыкание// Автомат. телемех. — 1996. — 57, № 7. — С. 121–130.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костина Е. А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. II. Многократно замыкаемые обратные связи// Автомат. телемех. — 1996. — 57, № 8. — С. 90–99.
7. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче// Докл. АН СССР. — 1991. — 320, № 6. — С. 1294–1299.
8. Дмитрук Н. М. Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2022. — 28, № 3. — С. 66–82.
9. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985.
10. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1978.
11. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. — New York: Cambridge Univ. Press, 2004.
12. Kastsiukevich D. A., Dmitruk N. M. A method for constructing an optimal control strategy in a linear terminal problem// J. Belarus. State Univ. Math. Inform. — 2021. — № 2. — P. 38–50.
13. Kostyukova O., Kostina E. Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances// Math. Program. — 2006. — 107, № 1–2. — P. 131–153.
14. Lee J. H., Yu Z. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters// Automatica. — 1997. — 33, № 15. — P. 763–781.

Дмитрук Наталия Михайловна

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

E-mail: dmitrukn@bsu.by



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 54–64
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-54-64

УДК 517.977.5

МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОЗИЦИОННОГО ПРИНЦИПА МИНИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2023 г. В. А. ДЫХТА

Аннотация. Позиционный принцип минимума — это необходимое условие глобальной оптимальности, усиливающее принцип максимума Понтрягина и большинство известных условий экстремальности для гладких и негладких задач. Его конструктивную основу составляют итерации позиционного спуска по функционалу, базирующиеся на использовании экстремальных стратегий относительно явно заданной слабо убывающей функции — решения соответствующего неравенства Гамильтона—Якоби. Рассматриваются основные методы, позволяющие повысить эффективность итераций позиционного спуска в ситуациях неопределенности экстремальных стратегий и «застывания» на явно неоптимальном процессе. Детально исследован позиционный спуск со скользящего режима, т.е. с допустимого процесса овыпукленной задачи с обобщенными управлениями — регулярными вероятностными мерами. На этой основе получен позиционный принцип минимума для скользящих режимов.

Ключевые слова: принцип максимума, экстремаль, позиционный спуск, скользящий режим.

METHODS FOR IMPROVING THE EFFICIENCY OF THE POSITIONAL MINIMUM PRINCIPLE IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© 2023 V. A. DYKHTA

ABSTRACT. The positional minimum principle is a necessary condition of global optimality, which strengthen the Pontryagin maximum principle and various extremal conditions for smooth and nonsmooth problems. It is based on iterations of the positional descent over the functional related to extremal strategies with respect to a solution of the corresponding Hamilton–Jacobi inequality. We discuss the main methods that allow one to increase the efficiency of positional descent iterations for uncertain extreme strategies and «stuck» on clearly nonoptimal processes. The positional descent from the sliding mode was examined in detail, i.e., from an admissible process of the convex problem with generalized controls, which are regular probability measures. Based on these ideas, we obtain the positional minimum principle for sliding modes.

Keywords and phrases: maximum principle, extremal, positional descent, sliding mode.

AMS Subject Classification: 49K15, 49L99

1. Введение. Статья посвящена необходимым условиям глобальной оптимальности в форме позиционного принципа минимума для следующей задачи (P):

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$J[x, u] = l(x(t_1)) \rightarrow \inf.$$

Здесь $(x, u) \in AC(T, \mathbb{R}^n) \times L_\infty(T, U)$ — допустимые пары функций, где U — компакт в $\mathbb{R}^m$. Вектор-функция $f(t, x, u)$ предполагается непрерывной, локально липшицевой по x и удовлетворяющей условию сублинейного роста на $T \times \mathbb{R}^n \times U$; целевую функцию $l(x)$ считаем гладкой на $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что задача (P) является негладкой из-за предположений на f . При дополнительном предположении непрерывной дифференцируемости f по x получим гладкую задачу (P_s).

Через Σ будем обозначать множество всех допустимых пар $\sigma = (x, u)$, а через $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u}) \in \Sigma$ — пару, исследуемую на оптимальность. ввв

Как известно (см. [5, 6]), общий позиционный принцип минимума является необходимым условием глобальной оптимальности, которое базируется на использовании позиционных управлений спуска (как правило, разрывных). Эти управления находятся по образцу динамического программирования как селекторы экстремального отображения

$$U_\varphi(t, x) = \operatorname{Argmin}_{u \in U} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u), \quad (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

где $\varphi(t, x)$ — липшицево по (t, x) , гладкое по x решение неравенства

$$\begin{aligned} \varphi_t(t, x) + \min_{u \in U} \varphi_x(t, x) \cdot f(t, x, u) &\leq 0, \\ \varphi(t_1, x) &= l(x) - l(\bar{x}(t_1)) \end{aligned} \quad (4)$$

для слабо убывающих (u -стабильных) функций (см. [10, 12]). Это свойство означает, в частности, существование траектории $x_*(\cdot)$ овыпукленной системы (1), (2) для которой

$$l(x_*(t_1)) - l(\bar{x}(t_1)) = \varphi(t_1, x_*(t_1)) \leq \varphi(t_0, x_0). \quad (5)$$

Если при этом окажется, что $\varphi(t_1, x_*(t_1)) < 0$, то траектория x_* бракует $\bar{\sigma}$ в силу плотности множества траекторий системы (1), (2) в ее овыпукленном расширении (неравенство $\varphi(t_0, x_0) \leq 0$ в (5) при этом может не выполняться).

Таков исходный замысел позиционного спуска на основе неравенства (4) и его проксимального [12] (или Дини [10]) обобщения с непрерывными решениями. Этот замысел можно трансформировать в необходимое условие оптимальности, зависящее от φ , который мы называем общим позиционным принципом минимума (кратко, GF-ПМ). Его теоретическая общность обусловлена произвольностью структуры мажорант φ (их нелинейностью) и негладкостью. В этих предположениях GF-ПМ анонсирован в [13].

2. Позиционный принцип минимума в гладкой задаче. По сфере приложений и естественной логике градаций условий оптимальности на первом месте стоит, безусловно, «простой» позиционный принцип минимума (F-ПМ) с явно заданной квазилинейной мажорантой:

$$\varphi^\psi(t, x) = l(x) - l(\bar{x}(t)) + (\psi(t) - l_x(\bar{x}(t))) \cdot (x - \bar{x}(t)) + r(t). \quad (6)$$

Здесь $\psi(\cdot)$ — котраектория процесса $\bar{\sigma}$ (в случае гладкой задачи (P_s)), т.е. решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x(t, \bar{x}(t), \psi, \bar{u}(t)), \quad \psi(t_1) = l_x(\bar{x}(t_1)), \quad (7)$$

$H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$ — функция Понтрягина, а «поправка» $r(\cdot)$ обеспечивает слабое убывание функции (6). Эта функция, а также ее φ -экстремальное отображение (3), полностью определяются котраекторией $\psi(\cdot)$ (помимо целевой функции l и исследуемой траектории, что естественно), так что обозначение U_φ лучше сменить на U_ψ .

Фактически это все, что нужно для формулировки F-ПМ, остались лишь технические обозначения. Обозначим через $\mathcal{V}_\psi$ множество селекторов $\{v(t, x)\}$ отображения $U_\psi(t, x)$ и через $\mathcal{X}(v)$ пучок кривых Эйлера (конструктивных движений Красовского—Субботина, соответствующий

селектору $v(t, x) \in \mathcal{V}_\psi$, дополненный решениями типа Каратеодори; см. [8, 10, 12]). Тогда базовый F-ПМ формулируется следующим образом [5, 6, 13].

Теорема 1. *Для оптимальности пары $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ в задаче (P_s) необходимо, чтобы траектория $\bar{x}$ была оптимальной в следующей ψ -присоединенной задаче:*

$$l(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}(v), \quad v \in \mathcal{V}_\psi. \quad (8)$$

Хотя это необходимое условие формулируется в рамках конструкций принципа максимума Понтрягина (ПМП), оно является его существенным вариационным усилением: конечномерное условие минимума функции H по управлению —

$$H(t, \bar{x}(t), \psi(t), \bar{u}(t)) = \min_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), \psi(t), u), \quad t \in T, \quad (9)$$

— сменило условие минимума по $x(\cdot)$ в бесконечномерной задаче (8) на траекторию $\bar{x}(\cdot)$.

Формально усиление теоремой 1 ПМП устанавливает следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть пара $(\bar{x}, \bar{u})$ удовлетворяет теореме 1 (т.е. F-ПМ).*

- (а) *если $\bar{x}$ — решение типа Каратеодори, соответствующее борелевскому селектору $\bar{v} \in \mathcal{V}_{\bar{\psi}}$ со свойством $\bar{v}(t, \bar{x}(t)) = \bar{u}(t)$ п.в. на T , то пара $(\bar{x}, \bar{u})$ — экстремаль Понтрягина в задаче (P_s) с котраекторией $\bar{\psi}$;*
- (б) *более общо, если $\bar{x}$ — кривая Эйлера (конструктивное движение), соответствующая селектору $\bar{v} \in \mathcal{V}_{\bar{\psi}}$, то $\bar{x}$ — траектория понтрягинской экстремали в овыпукленной задаче (со P_s) в паре с некоторым обобщенным управлением $\bar{\mu}_t$ и котраекторией $\bar{\psi}$.*

Эта лемма существенно обобщает лемму 1.3.1 из [7].

Важнейшей особенностью F-ПМ является его неотрывная связь с методом решения задачи итерациями позиционного спуска, венцом которых он и является. F-ПМ в полном объеме включает в себя технологию позиционных итераций, и собственно основным способом ее реализации посвящена данная статья.

3. Методы выхода из «ловушек застревания». Начнем со следующего определения, которое лишь на первый взгляд далеко от технологии спуска.

Определение 1. Программное управление $u(\cdot) \in \mathcal{U} := L_\infty(T, U)$ назовем совместимым с траекторией $\bar{x}$, если оно генерирует $\bar{x}$, т.е. система (1) при $u = u(\cdot)$ имеет решение $\bar{x}$.

Обозначим через $\mathcal{U}(\bar{x})$ множество всех управлений, программно совместимых с $\bar{x}$, а через $\Sigma(\bar{x})$ — множество допустимых пар $\sigma = (\bar{x}, u)$ с различными $u \in \mathcal{U}(\bar{x})$.

Элементарное (и давно замеченное) приложение определения 1 следующее: если некоторая пара $\sigma_* \in \Sigma(\bar{x})$ не экстремальна, то она и все пары из $\Sigma(\bar{x})$ не оптимальны.

К другим, более практичным приложениям, обратимся чуть далее, а сейчас введем давно назревшее определение *позиционной экстремали*, которое без определения 1 было бы дефектным. Но предварительно обратим внимание, что теперь мы можем рассматривать сопряженную систему (7) при любом $u \in \mathcal{U}(\bar{x})$, что порождает множество соответствующих котраекторий $\Psi(\bar{x})$. Аналогично, в левой части условия минимума (9) черту над управлением можно убрать — допустимо любое $u \in \mathcal{U}(\bar{x})$.

Определение 2. Пару $(\bar{x}, \bar{u})$ (или любую пару $(\bar{x}, u) \in \Sigma(\bar{x})$) назовем позиционной экстремалью задачи (P_s) , если траектория $\bar{x}$ оптимальна в присоединенной задаче (8) хотя бы при одной $\psi \in \Psi(\bar{x})$.

Это определение очень осторожно: оно не требует перебора всех $\psi \in \Psi(\bar{x})$, что может оказаться невозможным. С другой стороны, если для некоторой пары $\sigma_* \in \Sigma(\bar{x})$ с котраекторией $\psi_* \in \Psi(\bar{x})$ F-ПМ не выполнен ($\bar{x}$ не оптимальна в ψ_* -задаче), то бракуются сразу все процессы из $\Sigma(\bar{x})$.

В технологическом плане типичная ситуация для эффективного использования понятия совместимых управлений такова. На стартовой паре $\bar{\sigma}$ экстремальное отображение $U_{\bar{\psi}}$ не имеет селекторов спуска, или же множество его неоднозначности столь «массивно», что порождает

чрезмерную неопределенность. Тогда можно перейти к другой паре $\tilde{\sigma} \in \Sigma(\bar{x})$, с которой спуск реализуем. Отметим, что, как правило, известно некоторое параметрическое семейство совместимых управлений, что предоставляет свободу выбора селекторов спуска. Хорошей иллюстрацией этого приема является пример 2.1.1 из [7] (там же можно найти и другие примеры этого плана).

Описанный способ подмены стартовой пары совместимой с ней, как и все последующие, связан с эффектом «застревания» — невозможностью спуститься с исследуемой неоптимальной траектории. Довольно простой другой способ в этом случае — переход к квазиэкстремальному отображению $U_{\psi\varepsilon}(t, x)$ из управлений ε -минимума функции H . Далее оперирование селекторами этого отображения ничем не отличается от стандартного варианта. Но в случае, если на данной паре исследуется ε -оптимальность в задаче (P_s) , то в ψ -присоединенной задаче траектория $\bar{x}$ должна быть тоже ε -оптимальной.

Следующий способ повышения эффективности F-ПМ — это *вогнутое возмущение функционала* или, кратко, антирегуляризация (термины условны). Этот метод, привлекательный своей необычностью и глубиной спуска, состоит в следующем. Фиксируется некоторый неотрицательный выпуклый функционал $\omega(\sigma, \bar{\sigma})$ со свойством $\omega[\bar{\sigma}, \bar{\sigma}] = 0$ (как правило, квадратичный) и формируется однопараметрическое возмущение

$$V_{\omega\gamma}[\sigma] = J[\sigma] - \gamma\omega[\sigma, \bar{\sigma}] \quad (10)$$

функционала J с параметром $\gamma > 0$. Рассматривается задача минимизации функционала $V_{\omega\gamma}$ на множестве Σ . Ясно, что если пара $\bar{\sigma}$ не оптимальна в задаче (P_s) , то она тем более не оптимальна в возмущенной задаче при любом $\gamma > 0$, причем глубина нарушения минимума оценивается порядком ω . Следовательно, потенциал спуска в возмущенной задаче выше, чем в исходной, и остается отследить сопровождается ли он спуском в задаче (P_s) .

Антирегуляризация лишь на первый взгляд похожа на широко известный метод регуляризации с параметром $\gamma < 0$ в (10), а в действительности является его антиподом. Целью А. Н. Тихонова, основоположника метода регуляризации (однопараметрического вариационного принципа в современной терминологии), было обеспечение единственности минимума выпуклого функционала путем возмущения квадратом нормы в гильбертовом пространстве. Популярные ныне замечательные вариационные принципы Экланда и Борвейна—Прейса в различных вариантах [11] — это глубокие обобщения идей Тихонова.

Обратимся к примерам.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \quad x(-1) = 0, \quad |u| \leq 1, \\ J[x, u] &= \int_{-1}^0 u^2(t^2 + \alpha x) dt \rightarrow \min, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Это упрощенный вариант примера, предложенного А. А. Милутиным, в котором $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u}) \equiv 0$ строго удовлетворяет ПМП на полуотрезке $[-1, 0)$ при всех $\alpha > 0$, а также необходимым условиям Лежандра и Якоби. Однако сильного (и даже понтрягинского) минимума на $\bar{\sigma}$ нет при достаточно больших α — эту гипотезу подсказывает структура интегранта.

Применим метод антирегуляризации с

$$\omega[\sigma, \bar{\sigma}] = \int_{[-1, 0]} u^2(t) dt.$$

Тогда для возмущенной задачи

$$H^{\omega\gamma} = (t^2 + \alpha x - \gamma)u^2$$

является вогнутой функцией при достаточно больших $\gamma > 0$ (хватит больше $1 + \alpha$). Но тогда имеются всего два селектора: $u = \pm 1$. Очевиден выбор $u^* \equiv -1$, при котором

$$J[\sigma^*] = \frac{2 - 3\alpha}{6} < 0 = J[\bar{\sigma}],$$

если $\alpha > 2/3$. Полученное улучшение нелокально как по управлению, так и по траекториям.

Однако полученная оценка сверху значений параметра, при которых экстремаль $\bar{\sigma}$ не оптимальна, является довольно грубой. Это показали численные расчеты, проведенные независимо Т. С. Зароднюк и С. П. Сорокиным, причем этот факт особенно не удивил: антирегуляризацию «включили» без предварительного обращения к F-ПМ и какого-либо заикливания. Обратимся к F-ПМ.

Легко убедиться, что при $\bar{\psi} \equiv (0, 1)$, соответствующей $\bar{\sigma}$, экстремальное отображение $U_{\bar{\psi}}(t, x)$ таково:

$$U_{\bar{\psi}}(t, x) = \begin{cases} 0, & g(t, x) > 0, \\ \{-1, +1\}, & g(t, x) < 0, \\ [-1, 1], & g(t, x) = 0, \end{cases}$$

где $g(t, x) = t^2 + \alpha x$. Очевидно, что при любом выборе $v(t, x) \in U_{\bar{\psi}}(t, x)$ генерируется лишь исходная траектория $\bar{x} \equiv 0$. Поэтому выберем квазиэкстремальный селектор

$$v^\varepsilon(t, x) = \begin{cases} -\varepsilon, & g(t, x) > 0, \\ -1, & g(t, x) \leq 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ и выбор -1 во второй подобласти принудительный: он учитывает предпочтительность отрицательных значений траекторий для спуска. Селектор v^ε порождает управление $u^\varepsilon = -\varepsilon$ на отрезке времени $[-1, \tau]$, где момент переключения τ определяется из условия пересечения траектории $\{x^\varepsilon(t) = -\varepsilon(t+1), t \geq -1\}$ с параболой $g(t, x) = 0$. Тем самым полностью определяются управление $u^\varepsilon(\cdot)$, траектория $x^\varepsilon(\cdot)$ и значение функционала

$$J[\sigma^\varepsilon] = -\frac{1}{3} \varepsilon \alpha \sqrt{\varepsilon \alpha} + o(\varepsilon^2) < 0 \quad \forall \alpha > 0$$

на соответствующей паре σ^ε . Этот ответ, дискредитирующий $\bar{\sigma}$ при всех $\alpha > 0$, не улучшаем.

Пример 2.

$$\dot{x} = u_2, \quad x(0) = 0, \quad u = (u_1, u_2) \in [-1, 1]^2,$$

$$J[x, u] = \int_0^1 (x^2 + 4xu_1 + u_1^2) dt \rightarrow \min.$$

В этом примере Габасова—Кирилловой (см. [1, с. 145]) на особой классической экстремали $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u}) \equiv 0$ нет даже слабого минимума: вторая вариация принимает отрицательные значения.

Между тем наиболее сильные нелокальные квадратичные условия понтягинского минимума для особых экстремалей Понтрягина — многоточечные условия Срочно для обычных процессов (см. [9]), Варги — для обобщенных (см. [15]), а также интегральное условие — не бракуют $\bar{\sigma}$ (см. [1]).

Применим F-ПМ. Поскольку для $\bar{\sigma}$ $\bar{\psi} \equiv 0$, то отображение $U_{\bar{\psi}}(x)$ определяется из задачи

$$4xu_1 + u_1^2 \rightarrow \min, \quad u \in U.$$

Она оставляет совершенно свободным u_2 , а u_1 находится из условия стационарности как $\tilde{u}_1 = -2x$ пока оно будет допустимо в зависимости от неопределенной функции $x(t)$.

Для $\bar{x} \equiv 0$ нет совместимых управлений; поэтому, чтобы избавиться от неопределенности с выбором u_2 , применим антирегуляризацию с

$$\omega[\sigma, \bar{\sigma}] = \int_{[0,1]} u_2^2(t) dt.$$

Тогда функция $H^{\omega\gamma} = H - \gamma u_2^2$ вогнута по u_2 и имеет две точки минимума $u_2 = \pm 1$. Выбор $\tilde{u}_2 = -1$ предпочтительней в силу смешанного слагаемого в интегранте.

В итоге получим пару $\tilde{\sigma}$, для которой

$$\tilde{x}(t) = -t, \quad \tilde{u}_2 \equiv -1, \quad \tilde{u}_1 = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 1/2), \\ +1, & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

и стационарное значение $\tilde{u}_1$ скорректировано с учетом его допустимости лишь до $t = 1/2$, а при $t > 1/2$ — условие минимума H .

Легко подсчитать, что $J[\tilde{\sigma}] = -5/6 < 0 = J[\bar{\sigma}]$; следовательно, глобального минимума на $\tilde{\sigma}$ нет, что, конечно, грубее вывода об отсутствии слабого минимума. Но F-ПМ и антирегуляризация поддерживали реноме условий глобальной оптимальности в плане решения задачи в целом, и не только по глубине спуска с $\bar{\sigma}$: можно проверить, что $\tilde{\sigma}$ — экстремаль Понтрягина с одной точкой переключения управления.

В рассмотренных примерах финальные процессы F-ПМ не тестировались достаточными условиями оптимальности, что было бы естественно. И тому есть веские причины. В примере 1 это вырождение (особость) ПМП в конечный момент времени. В примере 2 одна компонента управления входит линейно, а другая нелинейно (квадратично). Между тем типичные достаточные условия сильного и понтрягинского минимумов для этих двух классов задач различаются, так что в примере их надо как-то комбинировать. В общем, оба примера нетривиальны с позиций достаточности.

Отметим, что к ним применимы метод бипозиционных функций и нестандартная двойственность для обобщенно-линейных и квадратичных задач (см. [1, 7]), но и этот подход не дал существенных продвижений в части достаточности.

Иной метод выхода из «ловушки застревания» описывает следующая лемма.

Лемма 2. *Предположим, что в задаче (P_s) градиент $l_x(x)$ удовлетворяет условию Липшица на $\mathbb{R}^n$. Пусть допустимые пары $(x^1, u^1), \dots, (x^k, u^k)$ равнозначны по функционалу с $\bar{\sigma}$, т.е. $J[x^1, u^1] = \dots = J[x^k, u^k] = J[\bar{x}, \bar{u}]$, и хотя бы одна из этих пар не является экстремалью Понтрягина в задаче (P_s) .*

Рассмотрим частично овыпукленную по Гамкрелидзе управляемую систему

$$\dot{x} = \alpha_1 f(t, x, u^1(t)) + \dots + \alpha_k f(t, x, u^k(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

с весовыми управлениями $\alpha_i(\cdot) \in L_\infty$. Если существуют такие $\alpha_i^(\cdot)$, что набор функций*

$$s^* = (x^*(\cdot), \alpha_i^*(\cdot), u^i(\cdot), i = \overline{1, k})$$

является экстремалью Понтрягина в задаче $(\text{co } P_s)$, то справедливо неравенство $J[s^] \leq J[\bar{\sigma}]$ (т.е. возможен спуск из $\bar{\sigma}$ по функционалу).*

Доказательство. Доказательство леммы базируется на точной формуле приращения функционала (см. [6, 7]) со свободной липшицевой функцией $\psi(t)$, удовлетворяющей лишь условию трансверсальности. Процесс наиболее глубокого спуска с пары $\bar{\sigma}$ находится минимизацией ΔJ по тройкам $\gamma = (x(\cdot), \psi(\cdot), u(\cdot))$, что приводит к условию биекстремальности искомой тройки в задаче (P_s) . Затем естественный логический переход к биекстремальности в овыпукленной задаче при уже имеющихся $u^k(\cdot)$ (это важно) завершает доказательство. $\square$

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 3.

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = u^2 - x_1^2, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad |u| \leq 1,$$

$$J = \frac{1}{2}(x_2(1) - 1)^2 \rightarrow \inf.$$

Возьмем $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u}) \equiv 0$ с котраекторией $\bar{\psi} \equiv (0, -1)$ и значением функционала $J[\bar{\sigma}] = 1/2$. Тогда $H(x, \bar{\psi}, u) = x_1^2 - u^2$ и $U_{\bar{\psi}} = \{\pm 1\}$, так что $\bar{\sigma}$ не экстремальна. Два элементарных селектора отображения $U_{\bar{\psi}}$ — управления $u^1 \equiv +1$, $u^2 \equiv -1$ — генерируют траектории

$$x^1(t) = \left(t, \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{1}{2} \right), \quad x^2(t) = \left(-t, \frac{(1-t)^2}{2} - 1 \right)$$

соответственно и пары σ^1, σ^2 . Для них $J[\sigma^1] = J[\sigma^2] = 9/8 > J[\bar{\sigma}]$, так что спуск с не оптимальной пары $\bar{\sigma}$ по элементарным селекторам оказался невозможным. Но можно применить лемму 2 к равнозначным парам σ^1, σ^2 (формально можем считать, например, что σ^1 является стартовой парой, а не $\bar{\sigma}$).

Нетрудно убедиться, что в овыпукленной системе

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \dot{x}_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - x_1^2, \quad x(0) = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

экстремальной в расширенной задаче может быть только траектория с $x_1^*(t) \equiv 0$. Но тогда $x_2^*(t) = t$, $\alpha_1^* = \alpha_2^* = 1/2$, и $J[s^*] = 0$ на соответствующем скользящем режиме s^* , т.е. овыпуклением достигается не только спуск с $\bar{\sigma}$ и σ^i , но и абсолютный инфимум функционала.

4. Обобщение на негладкие задачи. Рассмотрим кратко, как распространяется F-ПМ на негладкую задачу (P) , приняв в качестве базового необходимого условия оптимальности принцип максимума Кашкоч—Лоясиевича (кратко, ПМКЛ) в его расширенной версии статьи [14]. Важнейшее достоинство ПМКЛ — он справедлив как для гладких задач (усиливая ПМП), так и для негладких (усиливая результаты типа Кларка).

Определение 3. Вектор-функцию $\hat{f}: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{co } f(t, x, U)$ назовем L -совместимой с траекторией $\bar{x}$, если

- (а) $\hat{f}(t, \bar{x}(t)) = \dot{\bar{x}}(t)$ почти всюду на T ;
- (б) функция $\hat{f}(t, x)$ измерима по t , липшицева по x и ограничена на ограниченных множествах.

Согласно теореме о селекторе Лоясиевича (см. [14]) для любой траектории включения $\dot{x} \in \text{co } f(t, x, U)$ функция $\hat{f}$ с указанными свойствами существует.

Используя свойства функции $\hat{f}$, введем сопряженное включение Кларка

$$\dot{\psi}(t) \in -\psi(t)\partial\hat{f}(t, \bar{x}(t)), \quad \psi(t_1) = l_x(\bar{x}(t_1)). \quad (11)$$

Тогда ПМКЛ можно сформулировать следующим образом.

Условие $M(\hat{f}, \psi)$. Если траектория $\bar{x}$ оптимальна в задаче (P) , то для любой L -совместимой с $\bar{x}$ функции $\hat{f}(t, x)$ существует такое решение ψ дифференциального включения (11), что

$$\psi(t) \cdot \dot{\bar{x}}(t) = h(t, \bar{x}(t), \psi(t)) \quad \text{почти всюду на } T.$$

Здесь $h(t, x, \psi) = \min\{H(t, x, \psi, u) \mid u \in U\}$ — нижний гамильтониан задачи.

Введем следующие обозначения:

- (i) $\mathcal{F}(\bar{x})$ — множество L -совместимых с $\bar{x}$ селекторов $\hat{f}(t, x)$;
- (ii) $\Psi(\hat{f}, \bar{x})$ — множество всех решений дифференциального включения (11) при фиксированном $\hat{f} \in \mathcal{F}(\bar{x})$;
- (iii) для $\psi \in \Psi(\hat{f}, \bar{x})$ определим функцию φ^ψ по формуле (6) и отображения $U_\psi(t, x)$, $\mathcal{V}_\psi, \mathcal{X}(v)$ аналогично разделу 2.

Тогда F-ПМ, доставляющий вариационное усиление ПМКЛ, формулируется следующим образом.

Теорема 2. Если траектория $\bar{x}$ оптимальна в задаче (P) , то для любого селектора $\hat{f} \in \mathcal{F}(\bar{x})$ существует такая функция $\psi \in \Psi(\hat{f}, \bar{x})$, что $\bar{x}$ оптимальна в ψ -присоединенной задаче (8).

Пример 4.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \quad \dot{x}_2 = u_1|x_1| + u_2, \quad x(0) = (0, 0), \\ |u_1| &\leq 1, \quad u_2 \in [-1, 0], \quad J = -x_2(1) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Пусть $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u}) \equiv 0$. Тогда $\bar{\sigma}$ — экстремаль Кларка с котраекторией $\bar{\psi} \equiv (0, -1)$ (напомним, что мы используем условие минимума H по $u \in U$ в силу граничного условия в (11)). Возьмем позиционное управление $w(x_1) = (0, \omega(x_1))$, где $\omega(x_1)$ — липшицева функция с условием $\omega(0) = 0$.

Легко видеть, что $w(x_1)$ совместимо с $\bar{x}$. Положим $\hat{f}(x) = w(x_1)$. Тогда $\hat{f} \in \mathcal{F}(\bar{x})$, и сопряженное включение (11) принимает вид

$$(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) \in (s\psi_1, 0), \quad \psi_1(1) = 0, \quad \psi_2(1) = -1,$$

где s — любой элемент обобщенного градиента Кларка. Очевидно, что единственным решением этого включения является $\bar{\psi}$. Следовательно, ПМКЛ для $\bar{\sigma}$ выполнен, оставляя $\bar{\sigma}$ подозрительной на оптимальность.

Однако для этой $\bar{\psi}$ множество $U_{\bar{\psi}}(x) = \{v^* = (1, 0)\}$ одноэлементно и не генерирует траекторию $\bar{x}$, т.е. она даже не допустима в $\bar{\psi}$ -присоединенной задаче. Поэтому $\bar{x}$ не удовлетворяет F-ПМ, т.е. теореме 2, и она не оптимальна. Единственный селектор v^* — это обычное управление $u^* \equiv (1, 0)$, для которого $x_1^*(t) = t$, $x_2^*(t) = t^2/2$, $J[x^*, u^*] = -1/2 < 0 = J[\bar{\sigma}]$. Нетрудно усмотреть, что σ^* — глобально оптимальный процесс.

Нетрудно привести пример гладкой задачи, в которой F-ПМ бракует экстремаль ПМКЛ, и, как следствие, экстремаль Понтрягина.

5. F-ПМ для скользящих режимов. Хотя предыдущие результаты относились к задаче (P) со стандартными управлениями $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, со скользящими режимами (или обобщенными управлениями) нам уже приходилось сталкиваться в леммах 1, 2. Но вообще-то они являются спутниками итераций позиционного спуска (основы F-ПМ), ибо конструктивные движения в общем случае являются решениями овыпукленной системы (1), (2) [8], т.е. траекториями скользящих режимов. Если итогом некоторой итерации окажется скользящий режим (что вполне возможно при невыпуклом множестве скоростей $f(t, x, U)$), то процесс спуска придется оборвать. Для его продолжения необходим F-ПМ для скользящих режимов, т.е. для овыпукленной задачи (со P).

Один из вариантов такого обобщения фактически описан в предыдущем пункте. Действительно, поскольку, согласно теореме Лоясиевича, каждая траектория скользящего режима (т.е. включения $\dot{x} \in \text{co } f(t, x, U)$) генерируется L -совместимым селектором $\hat{f}$ отображения со $f(t, x, U)$, то задачу (со P) можно ставить на множестве S пар $s = (x(t), \hat{f}(t, x), t \in T, x \in \mathbb{R}^n)$ с позиционным управлением. Тогда для оптимальности пары $\bar{s} = (\bar{x}, \hat{f})$ будет необходимо условие $M(\hat{f}, \psi)$, в формулировке которого следует заменить задачу (P) на (со P). Это будет ПМКЛ для $\bar{s}$; F-ПМ для $\bar{s}$ получим из теоремы 2 той же заменой задач.

Отметим, что при использовании данного подхода поиск селектора $\hat{f}$ для исследуемой траектории $\bar{x}$ можно вести с помощью позиционных управлений, совместимых с $\bar{x}$ (как в примере 4), или — на базе теоремы Каратеодори об овыпуклении множеств — искать в форме

$$\begin{aligned} \hat{f}(t, x) &= \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) f(t, x, u^i(t)), \\ \alpha_i(t) &\geq 0, \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) = 1, \quad u^i(t) \in \mathcal{U}, \quad i = 0, \dots, n. \end{aligned} \tag{12}$$

Необходимо признать, что при таком описании всевозможных управлений $\hat{f}$ овыпукленной системы, которые могут быть селекторами отображения $U_{\psi}(t, x)$, придется столкнуться с существенными затруднениями: $2(n+1)$ управляющих параметров необходимо представить в форме обратной связи. Видимо поэтому более традиционен другой подход к построению позиционных управлений в задаче (со P) (смешанных стратегий), который выработан в теории дифференциальных игр (см. [8, 10]). В отличие от описания овыпукленной системы в форме (12) с управлениями-функциями (этот подход восходит к Р. В. Гамкрелидзе; см. [2, предложение 8.3]), альтернативный подход использует в качестве управлений регулярные вероятностные меры на компакте U . Пространство таких мер обозначается через $\text{grm}(U)$, но для краткости обозначим его через M . Заметим, что основные свойства этого пространства кратко изложены в [8] (см. также [2]).

Функция $\mu_t : T \rightarrow M$ называется обобщенным управлением, если она слабо измерима, т.е. функция

$$t \rightarrow \int_U g(u) d\mu_t$$

измерима при любой $g \in C(U)$. Множество $\mathcal{M}$ обобщенных управлений выпукло и секвенциально слабо* компактно.

Если $\mu_t \in \mathcal{M}$, то соответствующая траектория находится как решение Каратеодори уравнения

$$\dot{x} = \langle \mu_t, f(t, x, u) \rangle := \int_U f(t, x, u) d\mu_t =: F(t, x). \quad (13)$$

Множество S пар (x, μ_t) , связанных этим уравнением с условием $x(t_0) = x_0$, состоит из скользящих режимов, т.е. допустимых пар задачи (со P).

Далее при изложении F-ПМ для смешанных стратегий будем предполагать для простоты, что рассматривается гладкая задача (со P_s), и, кроме того, опустим оперирование совместимыми стратегиями.

Начнем с ПМП для пары $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{\mu}_t) \in S$. Определим функцию (см. (13))

$$\tilde{H}(t, x, \psi, \mu_t) = \psi \cdot F(t, x) \quad (14)$$

и котраекторию $\bar{\psi}$ как решение уравнения

$$\dot{\bar{\psi}} = -\tilde{H}_x(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}, \bar{\mu}_t), \quad \bar{\psi}(t_1) = l_x(\bar{x}(t_1)).$$

Тогда ПМП для $\bar{s}$ состоит в следующем условии минимума (см. [2, § 7.1]):

$$\tilde{H}(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{\mu}_t) = \min_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), u) \quad \text{почти всюду на } T. \quad (15)$$

Заметим, что в силу равенства (14) слева стоит интеграл по множеству U ; поэтому равенство (15) означает, что почти всюду на T оптимальная мера $\bar{\mu}_t$ сосредоточена на множестве точек минимума в операции справа.

Имея котраекторию $\bar{\psi}$, введем квазилинейную мажоранту $\varphi^{\bar{\psi}}$ по формуле (6) и вектор-функцию $p^{\bar{\psi}}(t, x) = \varphi_x^{\bar{\psi}}(t, x)$. Определим множество

$$M_{\bar{\psi}}(t, x) = \operatorname{Argmin}_{m \in M} \tilde{H}(t, x, p(t, x), m),$$

где индекс « ψ » у функции $p(t, x)$ опущен. Мету $\mu_{tx} : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow M_{\bar{\psi}}(t, x)$ назовем $\bar{\psi}$ -экстремальной смешанной стратегией, если для любого $t \in T$ и любой непрерывной (скалярной или векторной) функции $g(u)$ на U функция

$$x \rightarrow \int_U g(u) d\mu_{tx}$$

измерима по Борелю. Множество таких стратегий обозначим через $\mathcal{M}_{\bar{\psi}}$. Для любого селектора $\mu_{tx} \in \mathcal{M}_{\bar{\psi}}$ в [8] описано построение ломаных Эйлера и их равномерных пределов — движений, соответствующих смешанной стратегии μ_{tx} . Пучок таких движений обозначим через $\mathcal{X}(\mu)$. Таким образом, возникает множество пар $(x(\cdot), \mu_{tx})$ с одной стратегией.

Теперь надлежит распространить функционал $J[\sigma]$ на такие пары, необходимые для F-ПМ. Мы сделаем это по следующему правилу:

$$J[x, \mu] = \inf_{\Pi(x)} \varliminf_{i \rightarrow \infty} J[x_{\Delta_i}, \mu_{\Delta_i}],$$

где Π — множество всех последовательностей $\{\Delta_i, x_{\Delta_i}, \mu_{\Delta_i}\}$, состоящих из разбиений Δ_i отрезка T точками дробления τ_i (диаметры разбиений $|\Delta_i| \rightarrow 0$), ломаных Эйлера $x_{\Delta_i} \rightarrow x$ в $C(T, \mathbb{R}^n)$, мер μ_{Δ_i} , которые стратегия μ_{tx} ставит в соответствие позиции $(\tau_i, x_{\Delta_i}(\tau_i))$.

Данное полунепрерывное снизу доопределение функционала на пары движение-стратегия нацелено на получение возможно меньшего его значения. В теории дифференциальных игр используется другое доопределение, нацеленное на получение гарантированной оценки качества стратегии.

Отметим, что введенные множества M , $M_{\bar{\psi}}(t, x)$, $\mathcal{M}_{\bar{\psi}}$, $\mathcal{X}(\mu)$, совершенно аналогичны по смыслу множествам U , $U_{\bar{\psi}}(t, x)$, $\mathcal{V}_{\bar{\psi}}$, $\mathcal{X}(v)$, участвующим в формулировке F-ПМ исходной задачи. Обратим также внимание, что если $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{\mu}_t)$ — экстремаль Понтрягина в задаче $(\text{со } P_s)$, то выполняется включение $\bar{\mu}_t \in M_{\bar{\psi}}(t, \bar{x}(t))$ на T .

F-ПМ для скользящих режимов сформулируем следующим образом.

Теорема 3. Если пара $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{\mu})$ оптимальна в задаче $(\text{со } P_s)$, то траектория $\bar{x}$ оптимальна в следующей $\bar{\psi}$ -присоединенной задаче:

$$l(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}(\mu), \quad \mu \in \mathcal{M}_{\bar{\psi}}.$$

ПМП для овыпукленной задачи следует из этой теоремы, т.е. для задачи $(\text{со } P_s)$ имеет место аналог леммы 1. Доказательство этого утверждения вполне аналогично случаю задачи (P_s) .

6. Заключение. В статье рассмотрены основные методы повышения эффективности позиционного спуска по функционалу для гладких и негладких задач оптимального управления. Эти методы, базирующиеся на использовании свойств слабо убывающих решений неравенства Гамильтона—Якоби, являются неотъемлемой частью теории позиционного принципа минимума — вариационного усиления большинства необходимых условий оптимальности типа классического принципа максимума Понтрягина.

В ближайшей перспективе наиболее важной представляется задача обобщения данных результатов на задачи с терминальными ограничениями. В этом направлении пока получены лишь первые результаты, требующие апробации и теоретического совершенствования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.
2. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1977.
3. Дыхта В. А. Квадратичные условия минимума на выпуклом множестве и метод скользящих режимов в задаче оптимального управления // в кн.: Методы расширения задач теории управления на основе принципа расширения. — Новосибирск: Наука, 1990.
4. Дыхта В. А. Двойственные условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах, квадратичных по состоянию // Тр. Междунар. конф. «Динамика систем и процессы управления—2014», посв. 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Красовского (Екатеринбург, 15-20 сентября 2014 г.). — Екатеринбург, 2011. — С. 171–178.
5. Дыхта В. А. Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // Докл. РАН. — 2015. — 462, № 6. — С. 653–656.
6. Дыхта В. А. Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2015. — 21, № 2. — С. 73–86.
7. Дыхта В. А., Самсонов О. Н. Неравенства Гамильтона—Якоби и вариационные условия оптимальности. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2015.
8. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Физматлит, 1974.
9. Сточко В. А. Многоточечные условия оптимальности для особых управлений // в кн.: Численные методы анализа. — Иркутск: Изд-во СЭИ СО РАН, 1976. — С. 43–50.
10. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. — М.-Ижевск: Ин-т компьютер. иссл., 2003.
11. Borwein J. M., Zhu Q. J. Techniques of Variational Analysis. — New York: Springer, 2005.
12. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey // J. Dynam. Control Syst. — 1995. — 1, № 1. — P. 1–48.
13. Dykhtha V. A. On variational necessary optimality conditions with descent feedback controls strengthening maximum principle // in: Differential Equations and Optimal Control/ Proc. Int. Conf. Dedicated to the Centenary of the Birth of Academician E. F. Mishchenko (Moscow, June 7-9, 2022). — Moscow: Steklov Mathematical Institute RAS, 2022. — P. 38–42.

14. *Kaškosz B.* Extremality, controllability, and abundant subsets of generalized control systems// J. Optim. Theory Appl. — 1999. — 101, № 1. — P. 73–108.
15. *Warga J. A.* A second order condition that strengthens Pontryagin's maximum principle// J. Differ. Equations. — 1978. — 28, № 2. — P. 284–307.

Дыхта Владимир Александрович
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения РАН, Иркутск;
Иркутский государственный университет
E-mail: dykhta@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 65–70
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-65-70

УДК 517.928

ОБ АСИМПТОТИКЕ ЗАДАЧИ ГУРСА СО СТЕПЕННЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

© 2023 г. И. В. ЗАХАРОВА

Аннотация. В работе рассматривается задача Гурса для уравнения в частных производных, содержащего малый параметр ε в коэффициенте при старшей производной. При $\varepsilon = 0$ понижения порядка уравнения не происходит, но появляется особенность, имеющая характер степенного пограничного слоя. Построено решение сингулярно возмущенной задачи Гурса в виде формального ряда по степеням малого параметра и показан асимптотический характер построенного ряда.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение, асимптотическое интегрирование, степенной пограничный слой, задача Гурса.

ON THE ASYMPTOTICS OF THE GOURSAT PROBLEM WITH A POWER BOUNDARY LAYER

© 2023 I. V. ZAKHAROVA

ABSTRACT. In this paper, we consider the Goursat problem for a partial differential equation containing a small parameter ε in the coefficient of the highest derivative. For $\varepsilon = 0$, the order of the equation does not decrease, but a singularity appears, which has the nature of a power boundary layer. A solution of the singularly perturbed Gaussian problem is constructed in the form of a formal series in powers of the small parameter. The asymptotic nature of the constructed series is proved.

Keywords and phrases: singularly perturbed differential equation, asymptotic integration, power boundary layer, Goursat problem.

AMS Subject Classification: 34E15

1. Введение. Дифференциальные уравнения с особенностями находят применение в задачах гидро- и аэродинамики. Среди таких задач отдельное место занимают задачи, в которых при $\varepsilon = 0$ порядок уравнения не понижается, но уравнение становится вырождающимся на границе области. Впервые такие уравнения были изучены английским исследователем Дж. Лайтхиллом на примере уравнения

$$(x + \varepsilon y)y' + k(x)y = h(x).$$

Трудность для асимптотического анализа вносит описание пограничного слоя, возникающего в точках задания дополнительных условий. Если в дифференциальном уравнении при старшей производной множителем является только ε , то пограничный слой описывается экспоненциальной функцией в терминах одной переменной. Когда в уравнении при старшей производной присутствует коэффициент вида $(\varepsilon + x)$, пограничный слой является степенным. Для таких задач в [4] показан способ описания пограничного слоя в терминах двух переменных. Здесь же приведены примеры смешанных задач для уравнений в частных производных, при решении которых возникает явление степенного пограничного слоя. Структура и доказательство утверждений о структуре степенного пограничного слоя содержится в [2].

2. Постановка задачи. Теорию степенного пограничного слоя [3] применим для построения асимптотического разложения решения следующей задачи Гурса:

$$(\varepsilon + z)U_{xz}(x, z, \varepsilon) + \alpha(x, z)U_x(x, z, \varepsilon) = f(x, z, \varepsilon), \quad (1)$$

$$U(x, 0, \varepsilon) = \mu(x, \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (2)$$

$$U(0, z, \varepsilon) = \gamma(z, \varepsilon), \quad 0 \leq z \leq b, \quad (3)$$

где ε — малый параметр,

$$f(x, z, \varepsilon) = f_0(x, z) + \varepsilon f_1(x, z) + \dots + \varepsilon^n f_n(x, z) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$\gamma(z, \varepsilon) = \gamma_0(z) + \varepsilon \gamma_1(z) + \dots + \varepsilon^n \gamma_n(z) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$\mu(x, \varepsilon) = \mu_0(x) + \varepsilon \mu_1(x) + \dots + \varepsilon^n \mu_n(x) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Функции $\alpha(x, z)$, $f(x, z, \varepsilon)$ для простоты будем считать бесконечно дифференцируемыми, а $\gamma(z, \varepsilon)$, $\mu(x, \varepsilon)$ — непрерывно дифференцируемыми; $\alpha(x, 0) > 0$; $\gamma(0, \varepsilon) = \mu(0, \varepsilon)$.

3. Алгоритм построения асимптотики задачи. Для уравнения (1) введём обозначение

$$U_x(x, z, \varepsilon) = y(x, z, \varepsilon).$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$(\varepsilon + z)y'_z(x, z, \varepsilon) + \alpha(x, z)y(x, z, \varepsilon) = f(x, z, \varepsilon), \quad (4)$$

$$y(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad (5)$$

где $\alpha(x, 0) > 0$. Следуя работе [4], решение задачи (4), (5) будем искать как сумму двух функций:

$$y(x, z, t, \varepsilon) = w(x, z, \varepsilon) + g(x, z, t, \varepsilon), \quad t = \frac{z}{\varepsilon}. \quad (6)$$

Регулярную часть решения $w(x, z, \varepsilon)$ представим рядом

$$w(x, z, \varepsilon) = w_0(x, z) + \varepsilon w_1(x, z) + \dots + \varepsilon^n w_n(x, z) + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (7)$$

Степенной пограничный слой $g(x, z, t, \varepsilon)$ будем строить в виде произведения двух функций:

$$g(x, z, t, \varepsilon) = v(x, z, \varepsilon)\bar{v}(x, t, \varepsilon),$$

где

$$v(x, z, \varepsilon) = v_0(x, z) + \varepsilon v_1(x, z) + \dots + \varepsilon^n v_n(x, z) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad (8)$$

$$\bar{v}(x, t, \varepsilon) = \bar{v}_0(x, t) + \varepsilon \bar{v}_1(x, t) + \dots + \varepsilon^n \bar{v}_n(x, t) + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (9)$$

Тогда

$$g(x, z, t, \varepsilon) = g_0(x, z, t) + \varepsilon g_1(x, z, t) + \dots + \varepsilon^n g_n(x, z, t) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где

$$g_0(x, z, t) = v_0(x, z)\bar{v}_0(x, t),$$

$$g_1(x, z, t) = v_1(x, z)\bar{v}_0(x, t) + v_0(x, z)\bar{v}_1(x, t),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$g_k(x, z, t) = \sum_{i=0}^k v_{k-i}(x, z)\bar{v}_i(x, t).$$

Подставляя разложение (7) в уравнение (4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения для определения функций $w_i(x, z)$:

$$z \frac{dw_i(x, z)}{dz} + \alpha(x, z)w_i(x, z) = h_i(x, z),$$

где

$$h_0(x, z) = f_0(x, z), \quad h_i(x, z) = f_i(x, z) - \frac{dw_{i-1}(x, z)}{dz}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Предполагая, что для всех $w_i(x, z)$ выполняется условие

$$|w_i(x, 0)| < \infty,$$

найдем:

$$w_i(x, z) = z^{-\alpha(x,0)} \int_0^z \zeta^{\alpha(x,0)-1} h_i(x, \zeta) \varphi(x, \zeta, z) d\zeta.$$

Полученная таким образом функция $w(x, z, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (4) с точностью до слагаемых, содержащих ε^{n+1} .

Пограничный слой будем искать как решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (4). Оно имеет следующий вид:

$$(\varepsilon + z)v'_z(x, z, \varepsilon)\bar{v}(x, t, \varepsilon) + \frac{\varepsilon + z}{\varepsilon}v(x, z, \varepsilon)\bar{v}_t(x, t, \varepsilon) + \alpha(x, z)v(x, z, \varepsilon)\bar{v}(x, t, \varepsilon) = 0.$$

Преобразовав последнее равенство, получим уравнения для определения функций $v(x, z, \varepsilon)$ и $\bar{v}(x, t, \varepsilon)$:

$$(\varepsilon + z)v_z(x, z, \varepsilon) + (\alpha(x, z) - \alpha(x, -\varepsilon))v(x, z, \varepsilon) = 0, \quad (10)$$

$$(1 + t)\bar{v}_t(x, t, \varepsilon) + \alpha(x, -\varepsilon)\bar{v}(x, t, \varepsilon) = 0, \quad (11)$$

где

$$\alpha(x, -\varepsilon) = \alpha(x, 0) - \alpha_1(x, 0)\varepsilon + \alpha_2(x, 0)\varepsilon^2 + \dots$$

Подставим в уравнения (10), (11) соответственно выражения (8), (9) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Получим уравнения для определения функций $v_i(x, z)$ и $\bar{v}_i(x, t)$:

$$z \frac{dv_i(x, z)}{dz} + (\alpha(x, z) - \alpha(x, 0))v_i(x, z) = p_i(x, z), \quad (12)$$

$$p_0(x, z) = 0, \quad p_i(x, z) = -\frac{dv_{i-1}(x, z)}{dz} + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j} \alpha_{i-j}(x, 0) v_j(x, z), \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(1 + t) \frac{d\bar{v}_i(x, t)}{dt} + \alpha(x, 0)\bar{v}_i(x, t) = g_i(x, t), \quad (13)$$

$$g_0(x, t) = 0, \quad g_i(x, t) = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j-1} \alpha_{i-j}(x, 0) \bar{v}_j(x, t), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Функции $v_i(x, z)$ определим из условий

$$v_i(x, 0) = 1, \quad (14)$$

а функции $\bar{v}_i(x, t)$ — из условий

$$w_0(x, 0) + \bar{v}_0(x, 0) = \dot{\mu}_0(x), \quad w_1(x, 0) + \bar{v}_0(x, 0) + \bar{v}_1(x, 0) = \dot{\mu}_1(x), \quad \dots \quad (15)$$

Интегрируя уравнения (12) при условиях (14), получим выражения для функций $v_i(x, z)$:

$$v_i(x, z) = \int_0^z H_i(x, \zeta) \varphi(x, 0, \zeta) d\zeta + \varphi(x, 0, z),$$

где $H_i(x, \zeta)$ — известные функции.

Интегрируя уравнения (13) с учётом соответствующих условий (15), получим выражения для функций $\bar{v}_i(x, t)$. Например, при $i = 0$ получим

$$\bar{v}_0(x, t) = (\dot{\mu}_0(x) - w_0(x, 0))(1 + t)^{-\alpha(x, 0)}.$$

Таким образом, решение (6) можно представить в виде

$$y(x, z, t, \varepsilon) = w_n(x, z, \varepsilon) + g_n(x, z, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Возвращаясь к функции $U(x, z, \varepsilon)$ с учётом обозначения $U_x(x, z, \varepsilon) = y(x, z, \varepsilon)$ и условия (2), получим

$$U(x, z, \varepsilon) = \int_0^x y(\xi, z, t, \varepsilon) d\xi + \gamma(z, \varepsilon).$$

В частности, нулевое приближение имеет вид

$$U(x, z, \varepsilon) \sim u_0(x, z) = \bar{U}(x, z) + \int_0^x \frac{\dot{\mu}_0(\xi) - w_0(\xi, 0)}{(1+t)^{\alpha(\xi, 0)}} \varphi(\xi, 0, z) d\xi + \gamma_0(z). \quad (16)$$

В последнем выражении функция $\bar{U}(x, z)$ является решением предельного вырождающегося уравнения, которое получается из уравнения (1) при $\varepsilon = 0$:

$$z\bar{U}_{xz}(x, z) + \alpha(x, z)\bar{U}_x(x, z) = f_0(x, z), \quad (17)$$

где $\bar{U}(x, z) = U(x, z, 0)$, причём

$$\dot{U}_x(x, 0) = \frac{f_0(x, 0)}{\alpha(x, 0)} \neq \dot{\mu}_0(x).$$

При переходе от допредельной задачи к предельной мы теряем одно условие.

Решение предельного уравнения при условии $\bar{U}(0, z) = \gamma_0(z)$ имеет вид

$$\bar{U}(x, z) = \int_0^x z^{\alpha(\zeta, 0)} \int_0^z f_0(\xi, \zeta) \varphi(x, \zeta, z) \zeta^{\alpha(\zeta, 0)-1} d\zeta d\xi,$$

где

$$\varphi(x, \zeta, z) = \exp \left(- \int_{\zeta}^z \frac{\alpha(x, \zeta_1) - \alpha(x, 0)}{\zeta_1} d\zeta_1 \right).$$

4. Оценка остаточного члена. Для начала проведём рассуждения для случая $n = 0$.

Рассмотрим нулевое приближение к решению задачи (4), (5):

$$y(x, z, \varepsilon) = w_0(x, z) + v_0(x, z)\bar{v}_0(x, t).$$

Тогда её решение можно представить в виде

$$y(x, z, \varepsilon) = w_0(x, z) + v_0(x, z)\bar{v}_0(x, t) + \varepsilon R_1(x, z, \varepsilon). \quad (18)$$

Найдём уравнение, которому удовлетворяет $R_1(x, z, \varepsilon)$. Прежде заметим, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} (\varepsilon + z) \frac{dg_0(x, z, t)}{dz} + \alpha(x, z)g_0(x, z, t) &= \varepsilon \frac{dv_0(x, z)}{dz} \bar{v}_0(x, t), \\ (\varepsilon + z) \frac{dw_0(x, z)}{dz} + \alpha(x, z)w_0(x, z) &= \varepsilon \frac{dw_0(x, z)}{dz}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение (18) в уравнение (4) и условие (5), с учётом последних равенств получим:

$$(\varepsilon + z) \frac{dR_1(x, z, \varepsilon)}{dz} + \alpha(x, z)R_1(x, z, \varepsilon) = \alpha_1(x, z, t, \varepsilon), \quad (19)$$

где

$$\alpha_1(x, z, t, \varepsilon) = \frac{f(x, z, \varepsilon) - f_0(x, z)}{\varepsilon} - \frac{dw_0(x, z)}{dz} - \frac{dv_0(x, z)}{dz} \bar{v}_0(x, t), \quad R_1(x, 0, \varepsilon) = 0.$$

Сведём дифференциальное уравнение (19) к интегральному:

$$R_1(x, z, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^z M(x, z, \zeta, \varepsilon) R_1(x, \zeta, \varepsilon) d\zeta + b_1(x, z, \varepsilon).$$

Проводя аналогичные рассуждения для $n = 1$, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} (\varepsilon + z) \frac{d(w_0(x, z) + \varepsilon w_1(x, z))}{dz} + \alpha(x, z)(w_0(x, z) + \varepsilon w_1(x, z)) &= \varepsilon^2 \frac{dw_1(x, z)}{dz}, \\ (\varepsilon + z) \frac{dg_1(x, z, t)}{dz} + \alpha(x, z)g_1(x, z, t) &= \frac{dv_0(x, z)}{dz} \bar{v}_1(x, t) + \frac{dv_1(x, z)}{dz} \bar{v}_0(x, t). \end{aligned}$$

С учётом последних выражений задача для определения $R_2(x, z, \varepsilon)$ будет иметь вид

$$(\varepsilon + z) \frac{dR_2(x, z, \varepsilon)}{dz} + \alpha(x, z) R_2(x, z, \varepsilon) = \alpha_2(x, z, t, \varepsilon), \quad R_2(x, 0, \varepsilon) = 0,$$

где

$$\alpha_2(x, z, t, \varepsilon) = \frac{f(x, z, \varepsilon) - f_0(x, z) - \varepsilon f_1(x, z)}{\varepsilon^2} - \frac{dw_1(x, z)}{dz} - \frac{dv_0(x, z)}{dz} \bar{v}_1(x, t) - \frac{dv_1(x, z)}{dz} \bar{v}_0(x, t).$$

Переходя к интегральному уравнению, получим:

$$R_2(x, z, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^z M(x, z, \zeta, \varepsilon) R_2(x, \zeta, \varepsilon) d\zeta + b_2(x, z, \varepsilon),$$

где $M(x, z, \zeta, \varepsilon)$, $b_1(x, z, \varepsilon)$, $b_2(x, z, \varepsilon)$ — известные функции.

Обозначим остаточный член решения задачи (4), (5) через $\varepsilon^{n+1} R_{n+1}(x, z, t, \varepsilon)$. Тогда для любого n уравнение для определения $R_{n+1}(x, z, t, \varepsilon)$ будет иметь вид

$$(\varepsilon + z) \frac{dR_{n+1}(x, z, t, \varepsilon)}{dz} + \alpha(x, z) R_{n+1}(x, z, t, \varepsilon) = c_{n+1}(x, z, t, \varepsilon) \quad (20)$$

с условием

$$R_{n+1}(x, 0, \varepsilon) = 0,$$

где

$$c_{n+1}(x, z, t, \varepsilon) = \frac{f(x, z, \varepsilon) - \sum_{i=0}^n \varepsilon^i f_i(x, z)}{\varepsilon^{n+1}} - \frac{dw_n(x, z)}{dz} - \sum_{j=0}^n \frac{dv_j(x, z)}{dz} \bar{v}_{n-j}(x, t).$$

Уравнение (20) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, в котором x является параметром:

$$R_{n+1}(x, z, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^z M(x, z, \zeta, \varepsilon) R_{n+1}(x, \zeta, \varepsilon) d\zeta + b_{n+1}(x, z, \varepsilon),$$

где

$$M(x, z, \zeta, \varepsilon) = \frac{1}{1 + \varepsilon} z^{-\alpha(x, 0)} \alpha(x, 0) \zeta^{\alpha(x, 0) - 1},$$

$$b_{n+1}(x, z, \varepsilon) = -\frac{1}{1 + \varepsilon} z^{-\alpha(x, 0)} \int_0^z \alpha_{n+1}(x, \zeta, \varepsilon) \varphi(x, \zeta, z) \zeta^{\alpha(x, 0)} d\zeta.$$

Интегрируя $R_{n+1}(x, z, \varepsilon)$ по x , получим выражение для остаточного члена задачи (1)–(3).

5. Применение метода регуляризации для построения асимптотики задачи Гурса.

Многие методы построения асимптотических решений сингулярно возмущенных задач нашли широкое приложение в практике. Каждый из них позволяет решать определённый круг задач. Однако у всех этих методов есть общее свойство: асимптотическое, равномерно пригодное во всей рассматриваемой области решение является составным. Полученное выше решение задачи (1)–(3) также является составным, т.е. каждый член асимптотики является суммой двух слагаемых, описывающих отдельно зону пограничного слоя и зону вне его.

В настоящее время разработан метод построения решений сингулярно возмущенных задач — метод регуляризации (см. [5]), который позволяет записать решение сингулярно возмущённой задачи без отдельного описания области пограничного слоя. При этом пограничные эффекты описываются дополнительными независимыми переменными, вводимыми по спектру некоторого оператора.

В [1] на примере задачи Гурса показано применение идеи метода регуляризации к построению асимптотики решений малоизученного класса задач со степенным погранслоем.

Для уравнения (4) вводится регуляризирующая функция по формуле:

$$\tau = - \int_0^z \frac{\alpha(x, s)}{\varepsilon + s} ds \equiv g(x, z, \varepsilon). \quad (21)$$

Далее ищется решение расширенной задачи

$$(\varepsilon + z) \frac{\partial \tilde{y}(x, z, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{y}(x, z, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + \alpha(x, z) \tilde{y}(x, z, \tau, \varepsilon) = f(x, z, \varepsilon), \quad \tilde{y}(x, 0, 0, \varepsilon) = \dot{\mu}(x, \varepsilon)$$

в виде ряда классической теории возмущений:

$$\tilde{y}(x, z, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{y}_i(x, z, \tau).$$

Рекуррентные соотношения для определения коэффициентов ряда имеют вид:

$$z \frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial z} - \alpha(x, z) \frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial \tau} + \alpha(x, z) \tilde{y}_0 = f_0(x, z), \quad (22)$$

$$\tilde{y}_0(x, 0, 0) = \dot{\mu}_0(x), \quad (23)$$

$$z \frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial z} - \alpha(x, z) \frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \tau} + \alpha(x, z) \tilde{y}_i = f_i(x, z) - \frac{\partial \tilde{y}_{i-1}}{\partial z}, \quad (24)$$

$$\tilde{y}_i(x, 0, 0) = \dot{\mu}_i(x). \quad (25)$$

Решение задач (22)–(25) строится в пространстве безрезонансных решений, описанном в [5]. Так, решение задачи (22)–(23) имеет вид

$$\tilde{y}_0(x, z, \tau) = z^{-\alpha(x, 0)} \varphi(x, 0, z) \int_0^z f_0(x, \xi) \varphi(x, \xi, 0) \xi^{\alpha(x, 0)-1} d\xi + \dot{\mu}_0(x) e^\tau.$$

С учётом обозначения $U_x(x, z, \varepsilon) = y(x, z, \varepsilon)$ и формулы (21) для главного члена асимптотики задачи (1)–(3) получено выражение

$$U_0(x, z) = \int_0^x z^{-\alpha(\zeta, 0)} \varphi(\zeta, 0, z) \int_0^z f_0(\zeta, \xi) \varphi(\zeta, \xi, 0) \xi^{\alpha(\zeta, 0)-1} d\xi d\zeta + \\ + \int_0^x \dot{\mu}_0(\zeta) \exp \left(- \int_0^z \frac{a(\zeta, s)}{\varepsilon + s} ds \right) d\zeta + \gamma_0(z).$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (16), приходим к выводу, что, полученные разными методами, они отличаются только вторыми слагаемыми. Слагаемые, отвечающие за регулярную часть решения, полностью совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захарова И. В. Построение асимптотических решений некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений с малым параметром // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — 212. — С. 50–56.
2. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011.
3. Ломов С. А. Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1966. — 30, № 3. — С. 525–572.
4. Ломов С. А. Степенной пограничный слой в задачах с малым параметром // Докл. АН СССР. — 1963. — 148, № 3. — С. 516–519.
5. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.

Захарова Ирина Валентиновна
Иркутский государственный университет
E-mail: zair@math.isu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 71–79
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-71-79

УДК 519.714.24

О СИММЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЯХ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЁБИУСА

© 2023 г. О. В. ЗУБКОВ

Аннотация. Работа посвящена изучению класса инвариантных относительно преобразования Мёбиуса булевых функций. В первой части статьи систематизирована общая информация по преобразованию Мёбиуса и его неподвижным точкам. Во второй части статьи рассмотрен класс симметрических булевых функций, инвариантных относительно преобразования Мёбиуса. Показана взаимосвязь этих функций со столбцами треугольника Серпинского. Приведен метод получения масок всех таких функций в виде суммы столбцов треугольника Серпинского. Для случая $n = 2^m - 1$ доказано, что симметрическая функция инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантна её маска.

Ключевые слова: полином Жегалкина, преобразование Мёбиуса, инварианты преобразования Мёбиуса, стационарные функции, симметрические булевы функции, вес двоичного набора.

ON SYMMETRIC BOOLEAN FUNCTIONS INVARIANT UNDER THE MÖBIUS TRANSFORM

© 2023 O. V. ZUBKOV

ABSTRACT. The work is devoted to the study of the class of Boolean functions that are invariant under the Möbius transform. In the first part of the paper, we systematize general information on the Möbius transform and its fixed points. In the second part, we consider a class of symmetric Boolean functions that are invariant under the Möbius transform. The relationship of these functions with columns of the Sierpinski triangle is shown. We propose a method for obtaining masks of all such functions as sums of columns of the Sierpinski triangle. For the case $n = 2^m - 1$, we proved that a symmetric function is invariant if and only if its mask is invariant.

Keywords and phrases: algebraic normal form, Möbius transform, coincident functions, symmetric Boolean functions, weight of a binary set.

AMS Subject Classification: 93B50

1. Необходимые определения. Будем использовать следующие обозначения. Множество из двух элементов $\{0, 1\}$ будем обозначать через E_2 , а множество двоичных наборов длины n — через E_2^n . Все 2^n таких наборов будем считать упорядоченными натуральным образом от $(0, \dots, 0)$ до $(1, \dots, 1)$; каждому набору поставим в соответствие число от 0 до $2^n - 1$, двоичным представлением которого является этот набор. Далее двоичные наборы будем обозначать малыми греческими буквами со знаком $\sim$ над ними, например $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Весом Хэмминга (или просто весом) двоичного набора называется число единиц в нем. Будем писать $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, если $\alpha_i \leq \beta_i$ для любого $1 \leq i \leq n$.

Булевой функцией f от n переменных $x_1, \dots, x_n$ называется отображение $f : E_2^n \rightarrow E_2$. Множество всех булевых функций от n переменных обозначим через $P_2(n)$. Каждой булевой функции f от n переменных поставим в соответствие вектор её значений длины 2^n , который перечисляет для

всех натурально упорядоченных наборов значения функции f на этих наборах. Вектор значений функции f будем обозначать через $\tilde{f}$ в матричных преобразованиях.

Нулевой остаточной по i -й переменной для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется функция от $n-1$ переменных $f_{x_i}^0 = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Аналогично определим единичную остаточную $f_{x_i}^1 = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Верно разложение вида $f = \bar{x}_i \cdot f_{x_i}^0 \oplus x_i \cdot f_{x_i}^1$.

Булева функция называется симметрической, если при произвольной перестановке переменных вектор её значений не изменяется. Данное свойство эквивалентно следующему: значения функции f на любых двух наборах одинакового веса всегда совпадают.

Любая ненулевая булева функция может быть представлена единственным образом в виде полинома Жегалкина (алгебраической нормальной формы) следующего вида:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

где g — вектор коэффициентов её полинома Жегалкина, а выражение $x_i^{\alpha_i}$ равно x_i , если $\alpha_i = 1$, и 1 в противном случае. Далее этот вектор коэффициентов g длины 2^n будем также рассматривать как булеву функцию от n переменных $g(x_1, \dots, x_n)$.

2. Преобразование Мёбиуса для булевых функций и треугольник Серпинского. Упомянутое выше отображение функции f в вектор коэффициентов g её полинома называется преобразованием Мёбиуса для булевых функций. Далее будем обозначать это преобразование через $\mu(f)$. Если g — вектор коэффициентов полинома для функции f , то $\mu(f) = g$. Для вычисления $\mu(f)$ по вектору функции f будем использовать матрицу преобразования Мёбиуса T_n , которая определяется следующим образом:

$$T_0 = 1, T_n = \begin{bmatrix} T_{n-1} & 0_{2^{n-1}} \\ T_{n-1} & T_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $0_{2^{n-1}}$ — нулевая матрица размера $2^{n-1} \times 2^{n-1}$. Отметим следующие полезные для дальнейших рассуждений свойства матрицы преобразования Мёбиуса:

- (i) i -й столбец матрицы, при нумерации с 0, образует вектор значений монома $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, где $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — двоичное представление числа i ;
- (ii) матрица T_n содержит в точности остатки от деления соответствующих биномиальных коэффициентов треугольника Паскаля по модулю 2; этот треугольник называется треугольником Серпинского (см. [8]).

Матрица T_3 представлена в таблице 1.

Таблица 1

	0	1	2	3	4	5	6	7
0:	1	0	0	0	0	0	0	0
1:	1	1	0	0	0	0	0	0
2:	1	0	1	0	0	0	0	0
3:	1	1	1	1	0	0	0	0
4:	1	0	0	0	1	0	0	0
5:	1	1	0	0	1	1	0	0
6:	1	0	1	0	1	0	1	0
7:	1	1	1	1	1	1	1	1

Сведения о преобразовании Мёбиуса подробно систематизированы в [7]. В частности, там показано, что

$$\mu(f) = T_n \times \tilde{f}, \quad (2)$$

где n — число переменных функции f . Там же показано, что матрица T_n является обратной к самой себе, т.е. $T_n^2 = E_n$, где E_n — единичная матрица размера n . Этот факт влечет инволютивность преобразования Мёбиуса; иными словами верно соотношение

$$\mu(\mu(f)) = f.$$

Для вычисления вектора коэффициентов полинома $g = \mu(f)$ имеется и другой способ, указанный в [4, с. Ё69] и в [6, с. 372]. Для того, чтобы вычислить значение $g(\tilde{\alpha})$, нужно просуммировать значения функции f на всех наборах, меньших либо равных $\tilde{\alpha}$:

$$\mu(f)(\tilde{\alpha}) = \bigoplus_{\tilde{\beta} \leq \tilde{\alpha}} f(\tilde{\beta}). \quad (3)$$

Помимо упомянутых выше свойств преобразования Мёбиуса, дополнительно отметим еще ряд свойств, приведенных в [7]:

(iii) $\mu(f_1 \oplus f_2) = \mu(f_1) \oplus \mu(f_2)$;

(iv) если $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ — некоторая перестановка переменных, то

$$\mu(f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})) = \mu(f)(x_{i_1}, \dots, x_{i_n});$$

(v) если $f_{x_i}^0$ и $f_{x_i}^1$ — соответственно нулевая и единичная остаточные по аргументу x_i функции f , то

$$\mu(f) = \bar{x}_i \cdot \mu(f_{x_i}^0) \oplus x_i \cdot (\mu(f_{x_i}^0 \oplus f_{x_i}^1))$$

для любой переменной x_i ;

(vi) если $f_1 \otimes f_2$ — кронекерово произведение функций f_1 и f_2 (в векторе f_1 все единицы заменяются на вектор f_2 , а все нули на вектор из нулей такой же длины, как и вектор f_2), то

$$\mu(f_1 \otimes f_2) = \mu(f_1) \otimes \mu(f_2).$$

3. Инвариантные относительно преобразования Мёбиуса функции и их свойства.

Далее нас будет интересовать класс булевых функций, являющихся неподвижными точками оператора μ . Основные результаты по этому классу функций приводятся в [7], где они называются «coincident Boolean functions». В данной работе будем называть эти функции «инвариантными относительно преобразования Мёбиуса» или «инвариантными» (см. [1], где рассмотрена связь этого класса функций с множеством чётных функций).

Определение 1. Булеву функцию f будем называть инвариантной относительно преобразования Мёбиуса, если $\mu(f) = f$.

Из свойств преобразования Мёбиуса имеется ряд важных следствий для инвариантных относительно этого преобразования функций (см. [7]):

- (a) если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ инвариантна относительно преобразования Мёбиуса, то $T_n \times \tilde{f} = \tilde{f}$;
- (b) если функции f_1 и f_2 инвариантны, то $f_1 \oplus f_2$ также является инвариантной;
- (c) если $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ — некоторая перестановка переменных и $f(x_1, \dots, x_n)$ — инвариантная функция, то $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ также инвариантна относительно преобразования Мёбиуса;
- (d) если $f_1(\tilde{x}_1)$ и $f_2(\tilde{x}_2)$ — две инвариантные функции с непересекающимися множествами переменных $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$, объединение которых есть множество всех переменных $x_1, \dots, x_n$, то их кронекерово произведение $f_1 \otimes f_2$ и, в частности, конъюнкция $f_1 \cdot f_2$, также являются инвариантными функциями. Как следствие, можно заметить, что бесповторная конъюнкция дизъюнкций вида

$$\left(\bigvee_{x_i \in X_1} x_i \right) \cdot \left(\bigvee_{x_i \in X_2} x_i \right) \cdots \left(\bigvee_{x_i \in X_m} x_i \right)$$

инвариантна относительно преобразования Мёбиуса, где $X_1, \dots, X_m$ — разбиение множества всех переменных $x_1, \dots, x_n$ на непересекающиеся классы (см. [2]);

(е) функция $f(x_1, \dots, x_n)$ является инвариантной тогда и только тогда, когда

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \bigoplus_{\tilde{\beta} \leq \tilde{\alpha}} f(\tilde{\beta})$$

для любого набора $\alpha_1, \dots, \alpha_n$;

(ф) функция $f \oplus \mu(f)$ инвариантна относительно преобразования Мёбиуса.

4. Центральные функции и разбиение всех булевых функций на классы. Согласно свойству (ф) для любой функции f функция $f \oplus \mu(f)$ инвариантна относительно преобразования Мёбиуса.

Определение 2. Пусть $h = f \oplus \mu(f)$. Инвариантную функцию h будем называть центральной для функции f . Будем говорить, что f принадлежит классу функции h .

Таким образом, для функции f определено еще одно преобразование Ψ , ставящее в соответствие этой функции её центральную функцию: $\Psi(f) = f \oplus \mu(f) = h$. Определим матрицу

$$T_n^* = T_n \oplus E_{2^n}, \quad (4)$$

где E_{2^n} — единичная матрица размера $2^n \times 2^n$. Тогда $\Psi(f) = T_n^* \times \tilde{f}$, т.е. оператор Ψ линейен: $\Psi(f \oplus g) = \Psi(f) \oplus \Psi(g)$.

Имеют место следующие свойства (см. [7]):

(I) инвариантная функция f принадлежит классу тождественно нулевой функции; иными словами, f инвариантна тогда и только тогда, когда $\Psi(f) = \tilde{0}$. Как следствие, можно получить следующий важный факт: $f(x_1, \dots, x_n)$ инвариантна тогда и только тогда, когда

$$T_n^* \times \tilde{f} = \tilde{0}; \quad (5)$$

(II) две функции f_1 и f_2 принадлежат классу одной и той же инвариантной функции h тогда и только тогда, когда функция $f_1 \oplus f_2$ инвариантна относительно преобразования Мёбиуса. Отсюда следует, что множество $P_2(n)$ всех булевых функций от n переменных разбивается на смежные классы по множеству инвариантных функций от n переменных;

(III) если f — инвариантная функция и $f_{x_i}^1$ — единичная остаточная f по произвольному аргументу x_i , то

$$f = \bar{x}_i \cdot \Psi(f_{x_i}^1) \oplus x_i \cdot f_{x_i}^1. \quad (6)$$

Иными словами, у инвариантной функции нулевая остаточная по любой переменной является центральной для её единичной остаточной по этой переменной;

(IV) обратно, для любой функции $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, не зависящей от переменной x_i , функция $\bar{x}_i \cdot \Psi(g) \oplus x_i \cdot g$ инвариантна относительно преобразования Мёбиуса;

(V) нулевая остаточная по любому множеству из нескольких переменных у инвариантной функции также является инвариантной;

(VI) число различных функций от n переменных, инвариантных относительно преобразования Мёбиуса, равно числу всех булевых функций от $n - 1$ переменных, т.е. $2^{2^{n-1}}$.

5. Симметрические булевы функции, инвариантные относительно преобразования Мёбиуса. Основное содержание данной работы составляет исследование свойств симметрических инвариантных функций и их описание. Напомним, что f является симметрической, если $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta})$ для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ с равными весами.

Лемма 1. Если функция f является симметрической, то $\mu(f)$ и $\Psi(f)$ также являются симметрическими функциями.

Доказательство. Применим формулу (3) для вычисления функции $\mu(f)$ на двух наборах одинакового веса $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$. Согласно этой формуле для нахождения $\mu(f)(\tilde{\alpha}_1)$ нужно просуммировать значения $f(\tilde{\beta})$ по всем наборам $\tilde{\beta}$, не превосходящим $\tilde{\alpha}_1$, а для нахождения $\mu(f)(\tilde{\alpha}_2)$ нужно просуммировать значения $f(\tilde{\gamma})$ по всем наборам $\tilde{\gamma}$, не превосходящим $\tilde{\alpha}_2$. Пусть w не превосходит веса наборов $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$. Тогда число таких наборов $\tilde{\beta}$ веса w , что $\tilde{\beta} \leq \tilde{\alpha}_1$, равно числу таких наборов

$\tilde{\gamma}$ веса w , что $\tilde{\gamma} \leq \tilde{\alpha}_2$. Так как функция f симметрическая, то для любого веса все её значения на наборах этого веса будут одинаковы. Складывая одинаковые значения одинаковое количество раз, получим, что $\mu(f)(\tilde{\alpha}_1)$ и $\mu(f)(\tilde{\alpha}_2)$ получают одну и ту же добавку из наборов веса w . Так как это верно для любого w , меньшего либо равного весу этих наборов, то значения $\mu(f)(\tilde{\alpha}_1)$ и $\mu(f)(\tilde{\alpha}_2)$ совпадут на наборах одинакового веса $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$, что влечет симметричность функции $\mu(f)$. Так как $\Psi(f) = f \oplus \mu(f)$ и оба слагаемых являются симметрическими функциями, то и $\Psi(f)$ будет симметрической. $\square$

Симметрические функции удобно представлять в специальном виде при помощи перечисления множества весов (рабочих чисел) двоичных наборов, на которых они принимают значение 1 (см. [5, с. 367]. Далее, через $S(n, w_1, \dots, w_k)$ обозначим симметрическую функцию от n переменных $x_1, \dots, x_n$, равную 1 на наборах веса $w_1, \dots, w_k$ и равную 0 на остальных наборах. Любой симметрической функции $S(n, w_1, \dots, w_k)$ можно поставить в соответствие двоичный набор $\text{mask}(S(n, w_1, \dots, w_k))$ длины $n + 1$, нумерация элементов которого начинается с 0. В наборе $\text{mask}(S(n, w_1, \dots, w_k))$ единицы стоят в позициях $w_1, \dots, w_k$, а в остальных позициях этого набора стоят нули. Этот набор будем называть маской для $S(n, w_1, \dots, w_k)$.

Далее симметрическую функцию $S(n, w)$ с одним рабочим числом w будем называть элементарной.

Предложение 1 (см. [3]). Пусть число $w + 1$ делится на 2^k и не делится на 2^{k+1} . Тогда все элементарные функции $S(i, w)$ для i от 0 до $w + 2^k - 1$ включительно будут инвариантными, а $S(w + 2^k, w)$ и все последующие таковыми не будут.

Для более систематического описания функций $\mu(S(n, w))$ полезно рассмотреть треугольник Серпинского (см. [8]), в котором и строки и столбцы пронумеруем с 0. Первые строки этого треугольника представлены в таблице 2. Элемент этого треугольника, расположенный в i -й строке и j -м столбце, обозначим через $TS(i, j)$. Элементы на позициях, в которых номер строки меньше номера столбца (область выше главной диагонали), будем считать равными 0. В таблице 3 представлен аналогичный треугольник, у которого на главной диагонали находятся нули. Легко видеть, что первые 2^n строк таблицы 2 образуют матрицу T_n (см. (1)), а первые 2^n строк таблицы 3 образуют матрицу $T_n + E_n = T_n^*$ (см. (4)).

Матрицу, содержащуюся в строках таблицы 2 от 0-й до n -й обозначим через TS_n , а матрицу, содержащуюся в строках таблицы 3 от 0-й до n -й, обозначим через TS_n^* .

Таблица 2

[illegible]

Таблица 3

[illegible]

Лемма 2. Для того чтобы получить $\mu(S(n, w))$, нужно просуммировать ровно те функции $S(n, i)$, $i \leq n$, для которых $TS(i, w)$ равно 1. Иными словами,

$$\mu(S(n, w)) = \bigoplus_{i=0}^n TS(i, w) \cdot S(n, i).$$

Доказательство. Найдем значения $\mu(S(n, w))$ по формуле (3). Чтобы получить значение $\mu(S(n, w))$ на наборе $\tilde{\alpha}$ веса i , нужно просуммировать все значения функции $S(n, w)$ на всех наборах, меньших либо равных набору $\tilde{\alpha}$. Среди этих наборов только на наборах веса w функция $S(n, w)$ равна 1. Отсюда получим, что значение функции $\mu(S(n, w))$ на наборе $\tilde{\alpha}$ веса i вычисляется как остаток от деления на 2 биномиального коэффициента $\binom{i}{w}$. Согласно лемме 1, для симметрической функции $S(n, w)$ функция $\mu(S(n, w))$ также является симметрической. Таким образом, для веса i все значения $\mu(S(n, w))$ на наборе $\tilde{\alpha}$ веса i равны $TS(i, w)$. Если сгруппировать эти наборы по их весам, то получим лемму 2. $\square$

Следствие 1. Сумма по всем i от $w + 1$ до n всех функций $S(n, i)$, для которых $TS(i, w)$ равно 1, является симметрической инвариантной функцией. Эта функция равна $\Psi(S(n, w))$.

Доказательство. По определению $\Psi(f) = f \oplus \mu(f)$. Согласно лемме 2,

$$\mu(S(n, w)) = \bigoplus_{i=0}^n TS(i, w) \cdot S(n, i).$$

Функция $S(n, w)$ соответствует элементу $TS(w, w)$, который всегда равен 1, т.е. слагаемое $S(n, w)$ всегда входит в эту сумму. Прибавив к этой сумме $TS(w, w) \cdot S(n, w)$ (что равносильно удалению из этой суммы данного слагаемого), получим

$$\Psi(S(n, w)) = \bigoplus_{i=w+1}^n TS(i, w) \cdot S(n, i),$$

что и требовалось. $\square$

Переходя к матричной форме записи результатов леммы 2 и следствия 1, получим:

$$\text{mask}(\mu(S(n, w))) = TS_n \times \text{mask}(S(n, w)), \quad (7)$$

$$\text{mask}(\Psi(S(n, w))) = TS_n^* \times \text{mask}(S(n, w)). \quad (8)$$

Так как оператор Мёбиуса μ и оператор Ψ линейны, а также линейно произведение матрицы на вектор, формулы (7) и (8) можно легко обобщить на случай произвольных симметрических функций:

$$\text{mask}(\mu(S(n, w_1, \dots, w_k))) = TS_n \times \text{mask}(S(n, w_1, \dots, w_k)), \quad (9)$$

$$\text{mask}(\Psi(S(n, w_1, \dots, w_k))) = TS_n^* \times \text{mask}(S(n, w_1, \dots, w_k)). \quad (10)$$

Из формулы (10) и свойства (5) вытекает теорема.

Теорема 1. Симметрическая функция $S(n, w_1, \dots, w_k)$ инвариантна относительно преобразования Мёбиуса тогда и только тогда, когда

$$TS_n^* \times \text{mask}(S(n, w_1, \dots, w_k)) = \tilde{0}. \quad (11)$$

Пример 1. Рассмотрим симметрическую инвариантную функцию $S(5, 1, 2, 4)$. Её маска имеет вид (011010), а вектор равен

$$(0111 \ 1110 \ 1110 \ 1001 \ 1110 \ 1001 \ 1001 \ 0110).$$

Если умножить матрицу TS_5^* на вектор-столбец маски (011010), то в итоге просуммируются первый, второй и четвертый столбцы матрицы TS_5^* (отсчет с нуля). Эти столбцы имеют соответственно вид $(000101) \oplus (000100) \oplus (000001)$ и в сумме дают нулевой вектор-столбец.

6. Описание класса симметрических инвариантных относительно преобразования Мёбиуса булевых функций. В этом разделе опишем методы, при помощи которых можно получить все симметрические булевы функции, инвариантные относительно преобразования Мёбиуса.

Согласно формуле (8) любой столбец матрицы TS_n^* является маской для некоторой симметрической инвариантной функции, а значит, произвольная сумма таких столбцов также образует маску для инвариантной функции. Из формулы (10) видно, что маску для некоторой инвариантной функции $S'(n, z_1, \dots, z_p) = \Psi(S(n, w_1, \dots, w_k))$ можно получить в виде суммы столбцов матрицы TS_n^* , соответствующих единицам маски симметрической функции $S(n, w_1, \dots, w_k)$, для которой S' является центральной. Очевидно, что такое представление не обязательно единственно, так как одна и та же функция S' может быть центральной для нескольких различных симметрических функций. С другой стороны, явного метода получения маски произвольной инвариантной функции $S'(n, z_1, \dots, z_p)$ при помощи суммы столбцов матрицы TS_n^* пока нет.

Следующая теорема дает метод получения маски произвольной инвариантной относительно преобразования Мёбиуса функции $S'(n, z_1, \dots, z_p)$ при помощи суммы столбцов матрицы TS_n^* с точностью до значения этой функции на последнем единичном наборе.

Теорема 2. *Маска любой симметрической инвариантной относительно преобразования Мёбиуса функции $S'(n, z_1, \dots, z_p)$ может быть получена как сумма столбцов матрицы TS_n^* с номерами $z_i - 1$ и, возможно, маски n -местной конъюнкции $S(n, n)$.*

Доказательство. Для функции $S'(n, z_1, \dots, z_p)$ возьмем единичную остаточную по любому аргументу (в силу симметричности все единичные остаточные будут между собой равны). Эта единичная остаточная будет равна $S''(n-1, z_1-1, \dots, z_p-1)$, так как веса всех наборов уменьшатся на 1 и число переменных так же будет на 1 меньше. Согласно (10), $\Psi(S'') = TS_{n-1}^* \times \text{mask}(S'')$.

С другой стороны, $\Psi(S'')$ равна нулевой остаточной для исходной $S'(n, z_1, \dots, z_p)$ согласно (6). Добавив к матрице TS_{n-1}^* n -ю строку, получим матрицу T_n^* . Добавив к вектору $\text{mask}(S'')$ еще один бит, равный 0, в позицию n , получим вектор $\text{mask}(S'') + 0$; здесь знак «+» означает конкатенацию. Тогда $TS_n^* \times (\text{mask}(S'') + 0)$ определит некоторую симметрическую инвариантную функцию от n переменных, у которой нулевая остаточная совпадет с нулевой остаточной для исходной функции $S'(n, z_1, \dots, z_p)$. В силу симметричности последней, по ее нулевой остаточной однозначно восстанавливается единичная остаточная, за исключением значения на последнем наборе веса n .

Таким образом, формула $TS_n^* \times (\text{mask}(S'') + 0)$ определяет либо маску самой функции $S'(n, z_1, \dots, z_p)$, либо маску функции $S'(n, z_1, \dots, z_p) \oplus S(n, n)$. $\square$

Пример 2. При четном n возможны оба случая относительно необходимости корректировки при помощи функции $S(n, n)$. Например для симметрической инвариантной функции $S'(4, 1, 2)$, маска которой имеет вид (01100), а вектор самой этой функции имеет вид (0111 1110 1110 1000), единичная остаточная S'' имеет вид (1110 1000), и маска для неё имеет вид (1100). Просуммировав нулевой и первый столбцы матрицы TS_4^* , получим маску (01101), т.е. в данном случае $TS_4^* \times (\text{mask}(S'') + 0)$ соответствует маске функции $S(4, 1, 2, 4)$ или $S'(4, 1, 2) \oplus S(4, 4)$.

Если же изначально взять в качестве целевой функцию $S'(4, 1, 2, 4)$ с маской (01101) и вектором (0111 1110 1110 1001), то, повторяя рассуждения, получим маску для единичной остаточной (1101); просуммировав нулевой, первый и третий столбцы TS_4^* , опять получим (01101), что и является маской для исходной S' .

Такая неопределенность при четном n связана с тем, что в этом случае $(n-1)$ -й столбец матрицы TS_n^* полностью нулевой, и скорректировать при помощи него последний элемент маски не получится.

При нечетном n метод работает без коррекции. Например рассмотрим инвариантную функцию $S'(5, 1, 2, 4)$. Её маска имеет вид (011010), а вектор равен (0111 1110 1110 1001 1110 1001 1001 0110). Единичная остаточная имеет маску (11010); суммируя нулевой, первый и третий столбцы TS_5^* , получим (011010), т.е. маску для исходной $S'(5, 1, 2, 4)$. Если же исходно взять стационарную функцию $S'(5, 1, 2, 4, 5)$ с маской (011011), то в итоге получим маску для её единичной остаточной

(11011); суммируя нулевой, первый, третий и четвертый столбцы TS_5^* , получим на этот раз маску (011001), что опять является маской для исходной $S'(5, 1, 2, 4, 5)$.

Полученное в теореме 2 представление для произвольной симметрической инвариантной функции является в некотором смысле каноническим. В то же время оно не позволяет, например, ответить на вопрос о количестве симметрических инвариантных функций от n переменных. Метод, позволяющий перечислить все такие функции, и полностью описывающий их множество для случая $n = 2^m - 1$ представлен в следующей теореме.

Теорема 3. Пусть $n = 2^m - 1$, где m — натуральное число, и симметрическая функция $S(n, w_1, \dots, w_k)$ имеет маску $\text{mask}(S)$, которая имеет длину 2^m и является вектором для некоторой функции $f(x_1, \dots, x_m)$. Тогда верны следующие утверждения:

- (А) $\text{mask}(\mu(S)) = \mu(\text{mask}(S))$;
- (В) симметрическая функция S инвариантна относительно преобразования Мёбиуса тогда и только тогда, когда её маска $\text{mask}(S)$ является вектором инвариантной относительно преобразования Мёбиуса функции f .

Доказательство. Ранее уже отмечалось, что матрица треугольника Серпинского TS_{2^m-1} совпадает с матрицей преобразования Мёбиуса T_m . Согласно (9) имеем $\text{mask}(\mu(S)) = TS_n \times \text{mask}(S)$. Так как TS_n совпадает с T_m и верно (2), имеем $TS_n \times \text{mask}(S) = \mu(\text{mask}(S))$. Из этих двух равенств следует утверждение (А) теоремы.

Для доказательства утверждения (В) воспользуемся утверждением (А). Если функция S инвариантна, то $\text{mask}(S) = \text{mask}(\mu(S)) = \mu(\text{mask}(S))$, т.е. функция $f = \text{mask}(S)$ является инвариантной. Обратно, пусть функция $f = \text{mask}(S)$ является инвариантной; тогда $\text{mask}(\mu(S)) = \mu(\text{mask}(S)) = \text{mask}(S)$. Если совпадают маски для $\mu(S)$ и S , то совпадают и сами эти функции, т.е. S является инвариантной. $\square$

Пример 3. Пусть $\text{mask}(S) = (1011)$. Тогда $S = (1001 \ 0111)$, $\mu(S) = (1110 \ 1001)$. В итоге $\mu(\text{mask}(S)) = (1101)$ и $\text{mask}(\mu(S)) = (1101)$, что согласуется с утверждением (А) теоремы 3.

Пример 4. Пусть $m = 2$. Запишем все инвариантные функции от двух переменных: (0000), (0001), (0110), (0111). Рассматривая их как маски для симметрических функций от трёх переменных ($3 = 2^2 - 1$) получим описание всех таких инвариантов преобразования Мёбиуса: (0000 0000), $S(3, 3) = (0000 \ 0001)$, $S(3, 1, 2) = (0111 \ 1110)$, $S(3, 1, 2, 3) = (0111 \ 1111)$.

Пример 5. Для $m = 3$ имеется 16 инвариантных функций от трех переменных. Соответственно, имеется 16 симметрических инвариантов преобразования Мёбиуса от семи переменных. Далее приведем соответствующие пары $\text{mask}(S) \leftrightarrow S$:

(0000 0000) $\leftrightarrow 0_{27}$,	(0110 1010) $\leftrightarrow S(7, 1, 2, 4, 6)$,
(0000 0001) $\leftrightarrow S(7, 7)$,	(0110 1011) $\leftrightarrow S(7, 1, 2, 4, 6, 7)$,
(0000 0110) $\leftrightarrow S(7, 5, 6)$,	(0110 1100) $\leftrightarrow S(7, 1, 2, 4, 5)$,
(0000 0111) $\leftrightarrow S(7, 5, 6, , 7)$	(0110 1101) $\leftrightarrow S(7, 1, 2, 4, 5, 7)$,
(0001 0010) $\leftrightarrow S(7, 3, 6)$,	(0111 1000) $\leftrightarrow S(7, 1, 2, 3, 4)$,
(0001 0011) $\leftrightarrow S(7, 3, 6, 7)$,	(0111 1001) $\leftrightarrow S(7, 1, 2, 3, 4, 7)$,
(0001 0100) $\leftrightarrow S(7, 3, 5)$,	(0111 1110) $\leftrightarrow S(7, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$,
(0001 0101) $\leftrightarrow S(7, 3, 5, 7)$,	(0111 1111) $\leftrightarrow S(7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

Следствие 2. Для $n = 2^m - 1$, где $m \in \mathbb{N}$, число симметрических функций от n переменных, инвариантных относительно преобразования Мёбиуса, равно числу всех инвариантных функций от m переменных и равно 2^{2^m-1} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухман А. В. О распознавании функций, инвариантных относительно преобразования Мёбиуса, и чётных функций, заданных в форме полиномов// в кн.: Прикладная математика и информатика / Тр. ф-та ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: МАКС Пресс, 2012. — С. 105–112.
2. Зубков О. В. Представление полиномиально устойчивых функций суммами неповторных в элементарном базисе слагаемых// Мат. 6 Междунар. школы-семинара «Синтаксис и семантика логических систем» (Монголия, Ханх, 11-16 августа 2019 г.). — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2019. — С. 48–52.
3. Зубков О. В. О классе полиномиально устойчивых булевых функций// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — 214. — С. 37–43.
4. Логачев О. А., Сальников А. А., Яценко В. В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии. — М.: МЦНМО, 2004.
5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2001.
6. MacWilliams F. J., Sloane N. J. A. The theory of Error-Correcting Codes. — Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland, 1978.
7. Pieprzyk J., Zhang X.-M. Computing Möbius transform of boolean functions and characterising coincident boolean functions// in: Boolean Functions: Cryptography and Applications. — Rouen, France: Publications des Universités de Rouen et du Havre, 2007. — P. 135–151.
8. Sloane N. J. A. Rows of Sierpinski's triangle// <http://oeis.org/A006943/b006943.txt>.

Зубков Олег Владимирович
Иркутский государственный университет
E-mail: oleg.zubkov@mail.ru



О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ С НУЛЕВЫМ ФРОНТОМ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2023 г. А. Л. КАЗАКОВ, П. А. КУЗНЕЦОВ, Л. Ф. СПЕВАК

Аннотация. В работе представлена теорема существования и единственности нетривиального аналитического решения задачи с заданным нулевым фронтом для нелинейной эволюционной параболической системы «хищник-жертва». В частных случаях построены точные решения посредством редукции к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, наследующей все особенности исходной постановки. Для численного решения рассмотренной задачи предложен алгоритм, основанный на методе частных решений. Выполнен вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: нелинейная параболическая система, теорема существования, точное решение, метод частных решений, вычислительный эксперимент.

ON SOME ZERO-FRONT SOLUTIONS OF AN EVOLUTION PARABOLIC SYSTEM

© 2023 A. L. KAZAKOV, P. A. KUZNETSOV, L. F. SPEVAK

ABSTRACT. We present an existence and uniqueness theorem for a nontrivial analytical zero-front solution of a problem for a nonlinear evolution parabolic predator-prey system. In special cases, we construct exact solutions by reduction to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations, which inherits all features of the original problem. We propose an algorithm for the numerical solution of the problem based on the method of specific solutions and present the result of computational experiments.

Keywords and phrases: nonlinear parabolic system, existence theorem, exact solution, particular solutions method, computational experiment.

AMS Subject Classification: 35K40, 35K57

1. Введение. Рассматривается нелинейная эволюционная параболическая система следующего вида (см. [10]):

$$u_t = \alpha_1 u_x + \alpha_2 uv_{xx} + \alpha_3 v_x u_x + f(u, v), \quad v_t = \beta_1 v_x + \beta_2 vu_{xx} + \beta_3 u_x v_x + g(v, u). \quad (1)$$

Здесь $u(t, x)$, $v(t, x)$ — искомые функции; t , x — независимые переменные; α_i , β_i , $i = 1, 2, 3$, — произвольные константы; $f(u, v)$, $g(v, u)$ — известные функции, которые предполагаются достаточно гладкими. Также потребуем, чтобы выполнялось равенство $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, что обеспечивает существование у системы (1) тривиального решения $u = 0$, $v = 0$. Система (1) является обобщением системы «хищник-жертва», используемой в математической биологии для описания популяционной динамики двух взаимодействующих видов — хищников v и жертв u (см. [20]).

Результаты получены в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа» (проект № 121041300058-1).

Для системы (1) представляют интерес (см. [20, с. 10]) решения с нулевыми фронтами, удовлетворяющие условию

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = 0, \quad v(t, x)|_{x=b(t)} = 0. \quad (2)$$

Фронт для каждой неизвестной функции отождествляется с границей ареала соответствующей популяции, который, как известно, способен меняться в связи с миграцией (см. [3]), вызванной в данном случае взаимодействиями типа «хищник-жертва». Естественно предполагать, что при приближении к фронту численность животных постепенно снижается до нуля, тем самым непрерывно стыкуясь с нулевым фоном (тривиальным решением). Подобные решения нелинейных параболических уравнений обычно именуются (в зависимости от интерпретации) тепловыми (см. [4, 11]), фильтрационными (см. [12]) или диффузионными (см. [18]) волнами. Ранее такого рода математические конструкции рассматривались для задач механики сплошных сред [1]. Между тем, параболические уравнения и системы в последнее время стали широко применяться в математической биологии (см. [13, 22]).

Ранее авторами были начаты работы по построению решений с нулевым фронтом для нелинейной параболической системы «хищник-жертва» (см. [9]). Настоящая работа является их непосредственным продолжением. Помимо теоремы существования и единственности, являющейся обобщением ранее доказанной, построены новые точные решения рассматриваемого типа, предложен вычислительный алгоритм, позволяющий с достаточной точностью решать задачу (1), (2), а также задачу для системы ОДУ, к которой сводится построение точных решений. Алгоритм основан на методе частных решений (см. [16]) и методе двойственной взаимности (см. [21]). Выполнен вычислительный эксперимент, который показал эффективность предложенного алгоритмического подхода. Численное исследование рассмотренной задачи проводится впервые.

2. Теорема существования. Для задачи (1), (2) в общей постановке получить аналитические результаты пока не удастся, поскольку метод характеристических рядов (см. [15]) для раскрытия особенности здесь, к сожалению, оказался неприменим. Поэтому рассмотрим случай, когда нулевые фронты для искомых функций совпадают. Пусть $a(t) = b(t)$ и краевые условия имеют вид

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = v(t, x)|_{x=a(t)} = 0. \quad (3)$$

Для задачи (1), (3) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в задаче (1), (3) функции $f(u, v)$, $g(v, u)$ и $a(t)$ аналитичны в окрестностях точек $u = v = 0$ и $t = 0$ соответственно, причем $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$. Пусть также выполняются следующие ограничения:

- (i) $u_x(t, a(t)) \neq 0$, $v_x(t, a(t)) \neq 0$;
- (ii) $\alpha_1 + a'(0) \neq 0$, $\beta_1 + a'(0) \neq 0$;
- (iii) числа $(-\alpha_3)/\alpha_2$ и $(-\beta_3)/\beta_2$ не являются натуральными; кроме того, $\alpha_{2,3} \neq 0$, $\beta_{2,3} \neq 0$.

Тогда задача (1), (3) имеет единственное нетривиальное решение, аналитическое в окрестности точки $(0, a(0))$.

Доказательство. Поскольку аналогичные теоремы ранее неоднократно встречались в работах авторов [6, 18] (см. также [2]) и, более того, для частного случая подробное обоснование теоремы было недавно опубликовано (см. [9]), доказательство здесь излагается кратко.

Для удобства введем новую переменную $z = x - a(t)$. Задача (1), (3) примет вид

$$u_t = (\alpha_1 + a')u_z + \alpha_2 uv_{zz} + \alpha_3 v_z u_z + f(u, v), \quad (4)$$

$$v_t = (\beta_1 + a')v_z + \beta_2 vu_{zz} + \beta_3 u_z v_z + g(v, u),$$

$$u(t, z)|_{z=0} = v(t, z)|_{z=0} = 0. \quad (5)$$

Решение построим в виде рядов Тейлора

$$u(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \frac{z^n}{n!}, \quad u_n(t) = \frac{\partial^n u}{\partial z^n} \Big|_{z=0}; \quad v(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \frac{z^n}{n!}, \quad v_n(t) = \frac{\partial^n v}{\partial z^n} \Big|_{z=0}. \quad (6)$$

Определим коэффициенты. Из краевого условия (5) следуют равенства $u_0 = v_0 = 0$. Учитывая их, положим $z = 0$ в системе (4). Получим систему

$$(\alpha_1 + a')u_1 + \alpha_3 v_1 u_1 = 0, \quad (\beta_1 + a')v_1 + \beta_3 u_1 v_1 = 0. \quad (7)$$

По условию (i) теоремы 1 справедливы неравенства $u_1 \neq 0$, $v_1 \neq 0$. Отсюда, разрешая (7), получим формулы

$$v_1 = -\frac{\alpha_1 + a'}{\alpha_3}, \quad u_1 = -\frac{\beta_1 + a'}{\beta_3}. \quad (8)$$

Отметим, что из системы (7) и условия (ii) теоремы 1 также следует, что $u_1 \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $v_1 \equiv 0$. Пользуясь алгоритмом, предложенным ниже, несложно показать, что случай $u_1 \equiv 0$, $v_1 \equiv 0$ приводит к тривиальному решению задачи.

Продифференцировав систему (4) один раз по z и положив $z = 0$, получим коэффициенты

$$v_2 = \frac{u'_1 - f_1}{u_1(\alpha_2 + \alpha_3)} = \frac{a'' + \beta_3 f_1}{(\beta_1 + a')(\alpha_2 + \alpha_3)}, \quad u_2 = \frac{v'_1 - g_1}{v_1(\beta_2 + \beta_3)} = \frac{a'' + \alpha_3 g_1}{(\alpha_1 + a')(\beta_2 + \beta_3)}. \quad (9)$$

Здесь и далее для удобства будем использовать обозначения

$$f_n = \frac{\partial^n f}{\partial z^n} \Big|_{z=0}, \quad g_n = \frac{\partial^n g}{\partial z^n} \Big|_{z=0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что в [9] функции f и g имеют вполне определенный вид, соответствующий обобщенной модели Лотки—Вольтерра, и обладают всеми указанными в условии доказываемой теоремы свойствами.

Остальные коэффициенты определяются аналогично — дифференцированием по z . Применяя к первому уравнению системы (4) оператор $\partial^n[\cdot]/\partial z^n|_{z=0}$, $n = 2, 3, \dots$, получим равенство

$$u'_n = (\alpha_1 + a')u_{n+1} + \alpha_2 \sum_{k=0}^n C_n^k u_k v_{n+2-k} + \alpha_3 \sum_{k=0}^n C_n^k u_{k+1} v_{n+1-k} + f_n. \quad (10)$$

Выделим в (10) коэффициенты с индексом $n + 1$:

$$u'_n = (\alpha_1 + a')u_{n+1} + \alpha_2 n u_1 v_{n+1} + \alpha_2 \sum_{k=2}^n C_n^k u_k v_{n+2-k} + \alpha_3 u_1 v_{n+1} + \alpha_3 u_{n+1} v_1 + \alpha_3 \sum_{k=2}^n C_n^{k-1} u_k v_{n+2-k} + f_n.$$

Приводя подобные слагаемые $(\alpha_1 + a')u_{n+1}$ и $\alpha_3 u_{n+1} v_1$, выразим коэффициент v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{\beta_3}{(\beta_1 + a')(\alpha_2 n + \alpha_3)} \left[\sum_{k=2}^n (\alpha_2 C_n^k + \alpha_3 C_n^{k-1}) u_k v_{n+2-k} + f_n - u'_n \right], \quad n \geq 2. \quad (11)$$

Аналогично находим коэффициент u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \frac{\alpha_3}{(\alpha_1 + a')(\beta_2 n + \beta_3)} \left[\sum_{k=2}^n (\beta_2 C_n^k + \beta_3 C_n^{k-1}) v_k u_{n+2-k} + g_n - v'_n \right], \quad n \geq 2. \quad (12)$$

Видно, что аналитичность коэффициентов возможна лишь при выполнении неравенств

$$\beta_1 + a'(0) \neq 0, \quad \alpha_1 + a'(0) \neq 0, \quad \alpha_2 n + \alpha_3 \neq 0, \quad \beta_2 n + \beta_3 \neq 0.$$

Первые два из этих неравенств те же, что и в условии (ii). Так как n может быть любым натуральным числом, то третье и четвертое неравенства, которые в [9] выполняются a priori, можно записать в виде $-\alpha_3/\alpha_2 \notin \mathbb{N}$, $-\beta_3/\beta_2 \notin \mathbb{N}$, что соответствует условию (iii).

Таким образом, коэффициенты рядов (6) определяются однозначно по рекуррентным формулам $u_0 = v_0 = 0$, (8), (9), (11), (12). При этом они являются аналитическими функциями в окрестности точки $t = 0$.

Сходимость доказывается методом мажорант по следующей схеме в три этапа. Осветим их кратко. На первом этапе в задаче (4), (5) делается замена

$$u = u_1 z + z^2 U(t, z), \quad v = v_1 z + z^2 V(t, z),$$

представляющая собой частичное разложение искомых функций в ряды Тейлора (6). Теперь U и V — новые неизвестные функции. Задача сведется к системе

$$\begin{aligned} 4V + 5zV_z + z^2V_{zz} &= p_0(t) + zp_1(t, U, V, U_t) + z^2p_2(t, U, V, U_z, V_z) + z^3p_3(z, t, U, V, U_z, V_z, V_{zz}), \\ 4U + 5zU_z + z^2U_{zz} &= q_0(t) + zq_1(t, V, U, V_t) + z^2q_2(t, V, U, V_z, U_z) + z^3q_3(z, t, V, U, V_z, U_z, U_{zz}). \end{aligned} \quad (13)$$

Вид функций $p_i, q_i, i = 0, 1, 2, 3$, не приводится в силу крайней громоздкости, отметим лишь, что все они будут аналитическими по своим переменным в окрестности начала координат. Отсюда следует, что для них можно подобрать мажоранты.

На втором этапе доказывается, что при выполнении мажорантных оценок

$$\begin{aligned} U|_{z=0} &\ll W_0(t), \quad V|_{z=0} \ll W_0(t), \quad U_z|_{z=0} \ll W_1(t), \quad V_z|_{z=0} \ll W_1(t), \\ p_0(t), q_0(t) &\ll \psi_0(t), \quad p_1, q_1 \ll \psi_1(t, W, W, W_t), \quad p_2, q_2 \ll \psi_2(t, W, W, W_z, W_z), \\ p_3, q_3 &\ll \psi_3(z, t, W, W, W_z, W_z, W_{zz}) \end{aligned}$$

решение задачи

$$W_{zz} = \frac{\partial \psi_1(t, W, W, W_t)}{\partial z} + \psi_2(t, W, W, W_z, W_z) + z\psi_3(z, t, W, W, W_z, W_z, W_{zz}), \quad (14)$$

$$W(t, z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t, z)|_{z=0} = W_1(t) \quad (15)$$

мажорирует решение системы (13). В этом можно убедиться, построив эти решения в виде рядов Тейлора

$$\begin{aligned} U(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{z^n}{n!}, \quad V(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \frac{z^n}{n!}, \quad W(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{z^n}{n!}, \\ U_n(t) &= \frac{\partial^n U}{\partial z^n} \Big|_{z=0}, \quad V_n(t) = \frac{\partial^n V}{\partial z^n} \Big|_{z=0}, \quad W_n(t) = \frac{\partial^n W}{\partial z^n} \Big|_{z=0}. \end{aligned}$$

На третьем этапе мы приводим задачу (14), (15) к типу Ковалевской, дифференцируя уравнение (14) по z , разрешая его относительно W_{zzz} и добавляя третье краевое условие $W_{zz}(t, 0) = W_2(t)$. Все входные данные аналитичны; следовательно, согласно теореме Коши—Ковалевской, полученная задача имеет единственное аналитическое решение. Теорема доказана. $\square$

3. Точные решения. В этом разделе получим некоторые точные решения уравнения (1) с нулевым фронтом. Их построение сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка.

Конкретизируем вид системы (1). Пусть

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0; \quad \alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3 \neq 0; \quad f(u, v) = Av^{\gamma-\xi}u^\xi, \quad g(v, u) = Bu^{\gamma-\eta}v^\eta.$$

Здесь $A, B, \gamma, \xi, \eta \in \mathbb{R}, \gamma > 0, 0 \leq \xi \leq \gamma, 0 \leq \eta \leq \gamma$. Тогда (1) примет вид

$$u_t = \alpha_2 uv_{xx} + \alpha_3 v_x u_x + Av^{\gamma-\xi}u^\xi, \quad v_t = \beta_2 vu_{xx} + \beta_3 u_x v_x + g(v, u) = Bu^{\gamma-\eta}v^\eta. \quad (16)$$

Следуя [5, 7], будем искать точные решения (16) при помощи анзаца

$$u = \phi(t)r(y), \quad v = \phi(t)s(y), \quad y = -\frac{z}{a(t)} = 1 - \frac{x}{a(t)}, \quad (17)$$

где $x = a(t)$ — уравнение нулевого фронта (см. (3)). Подставив выражение (17) в систему (16) и умножив на $a^2(t)/\phi^2(t)$, получим

$$\begin{aligned} \alpha_2 r(y)s''(y) + \alpha_3 r'(y)s'(y) + \frac{a(t)}{\phi(t)}a'(t)(y-1)r'(y) + \frac{a^2(t)}{\phi^2(t)} \left[A\phi^\gamma(t)s^{\gamma-\xi}(y)r^\xi(y) - \phi'(t)r(y) \right] &= 0, \\ \beta_2 s(y)r''(y) + \beta_3 s'(y)r'(y) + \frac{a(t)}{\phi(t)}a'(t)(y-1)s'(y) + \frac{a^2(t)}{\phi^2(t)} \left[B\phi^\gamma(t)r^{\gamma-\eta}(y)s^\eta(y) - \phi'(t)s(y) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для редукции (18) к системе ОДУ относительно $r(y)$, $s(y)$ в данном случае необходимо и достаточно выполнения следующих равенств:

$$\frac{a(t)a'(t)}{\phi(t)} = \text{const}, \quad \frac{a^2(t)\phi'(t)}{\phi^2(t)} = \text{const}, \quad \phi^{\gamma-2}(t)a^2(t) = \text{const}. \quad (19)$$

Пусть $\phi'(t) \neq 0$. Подставив первое уравнение (19) во второе, получим

$$\frac{a(t)a''(t)}{[a'(t)]^2} = \text{const} = C. \quad (20)$$

Здесь возможны два подслучая: $C = 1$ и $C \neq 1$.

Сначала рассмотрим случай, когда $C = 1$. Тогда решение (20) имеет вид

$$a(t) = \lambda \exp(\mu t),$$

где μ, λ — ненулевые константы. Можно убедиться, что необходимыми и достаточными условиями того, чтобы выполнялись все соотношения из (19), является равенство $\gamma = 1$, и тогда $\phi(t) = \lambda^2 \exp(2\mu t)$. Система ОДУ для нахождения $r(y)$, $s(y)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha_2 r(y)s''(y) + \alpha_3 r'(y)s'(y) + \mu(y-1)r'(y) + As^{1-\xi}(y)r^\xi(y) - 2\mu r(y) &= 0, \\ \beta_2 s(y)r''(y) + \beta_3 s'(y)r'(y) + \mu(y-1)s'(y) + Br^{1-\eta}(y)s^\eta(y) - 2\mu s(y) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее, пусть $C \neq 1$. Тогда решение (20) имеет вид

$$a(t) = (\mu t + \lambda)^\omega,$$

где $\mu \neq 0$, $\lambda > 0$, $\omega > 0$ — константы. Необходимым и достаточным условием того, чтобы выполнялись все соотношения из (19), является равенство $\gamma = 2(\omega - 1)/(2\omega - 1)$, и тогда $\phi(t) = \omega(\mu t + \lambda)^{2\omega-1}$. Система для нахождения $r(y)$, $s(y)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha_2 r(y)s''(y) + \alpha_3 r'(y)s'(y) + \mu(y-1)r'(y) + As^{\gamma-\xi}(y)r^\xi(y) + \frac{2\mu r(y)}{\gamma-2} &= 0, \\ \beta_2 s(y)r''(y) + \beta_3 s'(y)r'(y) + \mu(y-1)s'(y) + Br^{\gamma-\eta}(y)s^\eta(y) + \frac{2\mu s(y)}{\gamma-2} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

При этом возникают дополнительные требования $\gamma \neq 1$, $\gamma \neq 2$, $(\omega - 1)/(2\omega - 1) > 0$, откуда $\omega \in (-\infty, 1/2) \cup (1, +\infty)$.

Можно видеть, что система (22) при $\gamma = 1$ переходит в систему (21); кроме того, не теряя общности рассмотрения, можем принять $\alpha_2 = \beta_2 = 1$. Окончательно получаем следующую систему ОДУ:

$$\begin{aligned} r(y)s''(y) + \alpha r'(y)s'(y) + \mu(y-1)r'(y) + As^{\gamma-\xi}(y)r^\xi(y) + \frac{2\mu r(y)}{\gamma-2} &= 0, \\ s(y)r''(y) + \beta s'(y)r'(y) + \mu(y-1)s'(y) + Br^{\gamma-\eta}(y)s^\eta(y) + \frac{2\mu s(y)}{\gamma-2} &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\alpha = \alpha_3$, $\beta = \beta_3$. Следует помнить, что при $\gamma = 1$ и $\gamma \neq 1$ система (23) описывает решения различного вида.

Начальные данные для системы (23) следуют из (3) и доказательства теоремы и имеют вид

$$r(0) = 0, \quad r'(0) = \frac{\mu}{\beta}, \quad s(0) = 0, \quad s'(0) = \frac{\mu}{\alpha}. \quad (24)$$

Из проведенных рассуждений следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. При $\gamma = 1$, $a(t) = \lambda \exp(\mu t)$ и $\gamma \neq 1, 2$, $\omega = (\gamma - 2)/(2\gamma - 2)$, $a(t) = (\mu t + \lambda)^\omega$ задача (16), (3) допускает редукцию к задаче (23), (24).

Завершая раздел, отметим, что при $\gamma \in \mathbb{N}$, $\eta, \xi \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ в силу теоремы 1 у задачи (23), (24) существует единственное аналитическое решение. Если же среди γ , η , ξ имеется хотя бы одно нецелое число, вопрос о разрешимости задачи пока открыт.

4. Вычислительный алгоритм. Получить решение задачи (23), (24) аналитически в конечной форме представляется проблематичным. При этом построение ее приближенного решения с достаточной точностью позволит получить решение задачи (16), (3), которое можно использовать в качестве референсного для верификации численного алгоритма решения задачи (1), (3).

Представим систему (23) в следующем виде:

$$r'' = R(r, r', s, s'), \quad s'' = S(r, r', s, s'), \quad (25)$$

где

$$R(r, r', s, s') = -\frac{1}{s(y)} \left(\beta s'(y) r'(y) + \mu(y-1) s'(y) + B r^{\gamma-\eta}(y) s^\eta(y) + \frac{2\mu s(y)}{\gamma-2} \right),$$

$$S(r, r', s, s') = -\frac{1}{r(y)} \left(\alpha r'(y) s'(y) + \mu(y-1) r'(y) + A s^{\gamma-\xi}(y) r^\xi(y) + \frac{2\mu r(y)}{\gamma-2} \right).$$

Решение задачи Коши (25), (24) на отрезке $y \in [0, 1]$ будем искать в виде

$$r(y) = r_p(y) + r_h(y), \quad s(y) = s_p(y) + s_h(y), \quad (26)$$

где $(r_p(y), s_p(y))$ — частное решение системы (25), а $(r_h(y), s_h(y))$ — решение следующей задачи Коши для соответствующей однородной системы:

$$r_h'' = 0, \quad s_h'' = 0,$$

$$r_h(0) = -r_p(0), \quad r_h'(0) = \frac{\mu}{\beta} - r_p'(0), \quad s_h(0) = -s_p(0), \quad s_h'(0) = \frac{\mu}{\alpha} - s_p'(0). \quad (27)$$

При найденном частном решении решение задачи (27) имеет линейный вид и определяется однозначно. Частное решение системы (25) находится итерационно при нулевом начальном приближении:

$$r_p^{(0)} \equiv 0, \quad s_p^{(0)} \equiv 0, \quad (28)$$

$$r_h^{(n)} = \left(\frac{\mu}{\beta} - [r_p^{(n)}]'(0) \right) y - r_p^{(n)}(0), \quad s_h^{(n)} = \left(\frac{\mu}{\alpha} - [s_p^{(n)}]'(0) \right) y - s_p^{(n)}(0), \quad (29)$$

$$r^{(n)} = r_p^{(n)} + r_h^{(n)}, \quad s^{(n)} = s_p^{(n)} + s_h^{(n)}, \quad (30)$$

$$[r_p^{(n+1)}]'' = R\left(r^{(n)}, [r^{(n)}]', s^{(n)}, [s^{(n)}]'\right), \quad [s_p^{(n+1)}]'' = S\left(r^{(n)}, [r^{(n)}]', s^{(n)}, [s^{(n)}]'\right). \quad (31)$$

Система (31) на каждой итерации решается методом двойственной взаимности, с использованием разложения правых частей уравнений по системе радиальных базисных функций (РБФ; см. [14, 17]):

$$R\left(r^{(n)}, [r^{(n)}]', s^{(n)}, [s^{(n)}]'\right) = \sum_{i=1}^m p_i^{(n+1)} f_i(y),$$

$$S\left(r^{(n)}, [r^{(n)}]', s^{(n)}, [s^{(n)}]'\right) = \sum_{i=1}^m q_i^{(n+1)} f_i(y). \quad (32)$$

Здесь $f_i(y) = f_i(|y - y_i|)$ — РБФ, значения которых зависят от расстояния между текущей точкой и заданными точками коллокации $y_1, y_2, \dots, y_m$, лежащими на отрезке $[0, 1]$; для каждой функции $f_i(y)$ существует такая функция $\hat{u}_i$, что $f_i = \hat{u}_i''$. Коэффициенты $p_i^{(n+1)}, q_i^{(n+1)}, i = 1, \dots, m$, определяются из систем линейных алгебраических уравнений, получаемых из равенств (32), записанных в точках коллокации. Тогда

$$r_p^{(n+1)} = \sum_{i=1}^m p_i^{(n+1)} \hat{u}_i(y), \quad s_p^{(n+1)} = \sum_{i=1}^m q_i^{(n+1)} \hat{u}_i(y). \quad (33)$$

Итерационная процедура (28)–(33) останавливается при достаточной близости n -й и $(n+1)$ -й итераций. Точность алгоритма может быть проверена оценкой невязок уравнений системы (23) при подстановке полученного решения.

Рассмотрим теперь задачу (1), (3). Пусть требуется решить ее на заданном конечном промежутке времени. Разобьем этот промежуток на достаточно малые шаги длиной h , и будем строить приближенное решение задачи по шагам. На шаге $t_k = kh$ систему (1) представим в виде

$$u_{xx} = \frac{v_t - \beta_1 v_x - \beta_3 u_x v_x - g(v, u)}{\beta_2 v}, \quad v_{xx} = \frac{u_t - \alpha_1 u_x - \alpha_3 u_x v_x - f(u, v)}{\alpha_2 u}. \quad (34)$$

и рассмотрим систему (34) на отрезке $x \in [0, a(t_k)]$ с граничными условиями

$$u|_{x=a(t_k)} = 0, \quad u_x|_{x=a(t_k)} = -\frac{\alpha_1 + a'(t_k)}{\alpha_3}, \quad v|_{x=a(t_k)} = 0, \quad v_x|_{x=a(t_k)} = -\frac{\beta_1 + a'(t_k)}{\beta_3}. \quad (35)$$

Здесь условия на производные следуют из условий (3) и уравнений (1). Фактически задача (34), (35) является обратной задачей Коши на отрезке $x \in [0, a(t_k)]$ и может быть решена с помощью алгоритма (26)–(33). Таким образом, на каждом шаге получим непрерывное по x решение задачи (1), (3).

Подход, подобный рассмотренному в этом разделе, успешно использовался авторами для решения нелинейных параболических уравнений и систем (см. [8, 19]). Отличие уравнений (25) и (33) от рассмотренных ранее заключается в более существенной связанности двух уравнений Пуассона, входящих в систему. Сложная нелинейная зависимость второй производной каждой искомой функции от другой функции и ее производной приводит к необходимости модифицировать алгоритм на стадии реализации. Именно, сходимость итерационных процедур существенно зависит от расположения точек коллокации, особенно крайних, а достижение заданной точности требует большего их числа. Подходящие точки коллокации были подобраны в процессе вычислительного эксперимента.

5. Вычислительный эксперимент. Рассмотрим пример применения предложенных в предыдущем разделе алгоритмов численного решения задач (1), (3) и (23), (24).

Численное решение системы (23), (24) было построено при следующих значениях параметров:

$$\gamma = 1, \quad \eta = 0,5, \quad \xi = 0,5, \quad \alpha = 0,5, \quad \beta = 1, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 0,5, \quad A = 1, \quad B = 1.$$

В качестве РБФ были приняты функции $f_i(y) = |y - y_i|$. Подставляя полученные решения в систему (23) и вычисляя наибольшие на отрезке $[0, 1]$ невязки левых частей уравнений, мы получили оценки точности предложенного алгоритма, приведенные в таблице. Можно убедиться, что результаты расчетов демонстрируют сходимость алгоритма относительно числа точек коллокации, и удовлетворительную точность решения.

Таблица 1. Невязки уравнений системы (23)

m	уравнение 1	уравнение 2
21	6.3×10^{-4}	5.2×10^{-4}
51	2.5×10^{-4}	2.1×10^{-4}
101	1.3×10^{-4}	1.4×10^{-4}
201	6.3×10^{-5}	5.2×10^{-5}

Таким образом, построенное решение $(r(y), s(y))$ может быть использовано для построения референсного решения задачи (1), (3):

$$u(t, x) = \lambda^2 \exp(2\mu t) r \left(1 - \frac{x}{\lambda \exp(\mu t)} \right), \quad v(t, x) = \lambda^2 \exp(2\mu t) s \left(1 - \frac{x}{\lambda \exp(\mu t)} \right). \quad (36)$$

Задача (1), (3) была решена при значениях параметров, соответствующих найденному точному решению:

$$\gamma = 1, \quad \eta = 0,5, \quad \xi = 0,5, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0,5, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 1, \\ a(t) = \lambda \exp(\mu t), \quad \lambda = 1, \quad \mu = 0,5, \quad A = 1, \quad B = 1, \quad m = 51, \quad h = 0,1, 0,05, 0,02.$$

Сравнение полученных решений при различных шагах по времени с решением (36) показано на рисунке. Иллюстрация показывает достаточную точность пошагового алгоритма решения задачи (1), (3), а также его сходимость к точному решению с уменьшением шага по времени.

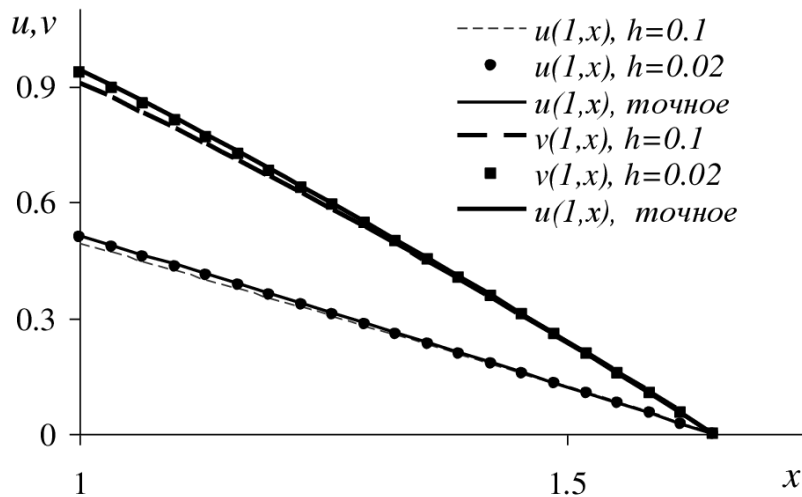


Рис. 1. Сравнение численных решений задачи (1), (3) с точным решением

6. Заключение. В работе исследована задача с заданным нулевым фронтом для системы «хищник-жертва». Обоснована теорема о существовании и единственности аналитического решения, причем доказательство доставляет конструктивную процедуру построения последнего в виде степенного ряда с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами. Найдены новые точные решения рассмотренной задачи, получение которых сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, наследующей особенность у исходной постановки. Предложены численные алгоритмы решения системы ОДУ, а также исходной системы с помощью методов частных решений и двойственной взаимности. Оценка точности решения системы ОДУ дала хорошие результаты, следовательно, эти решения могут быть использованы для построения референсных решений исходной системы «хищник-жертва». Сравнение пошаговых численных решений системы «хищник-жертва» с найденным референсным решением показало эффективность построенного алгоритма.

Дальнейшие исследования в данном направлении, прежде всего, должны быть связаны с рассмотрением задачи с двумя нулевыми фронтами, которая является более естественной с точки зрения приложений. Также представляет интерес расширение классов функциональных пространств, для которых доказано существование решений рассмотренного вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. Г., Ентов В. Н., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984.
2. Баутин С. П., Казаков А. Л. Обобщенная задача Коши и ее приложения. — Новосибирск: Наука, 2006.
3. Дедю И. И. Экологический энциклопедический словарь. — Кишинев, 1989.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматлит, 1966.
5. Казаков А. Л. О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — 16. — С. 1057–1068.

6. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах// Сиб. ж. индустр. мат. — 2018. — 24, № 2 (74). — С. 56–65.
7. Казаков А. Л., Орлов Св. С., Орлов С. С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности// Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 3. — С. 544–560.
8. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Точные и приближенные решения вырождающейся системы реакция-диффузия// Прикл. мех. техн. физ. — 2021. — 62, № 4. — С. 169–180.
9. Кузнецов П. А. Аналитические диффузионные волны в нелинейной параболической модели «хищник-жертва»// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2022. — 28, № 2. — С. 158–167.
10. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
11. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
12. Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика. Механика. — М.: Физматлит, 2001.
13. Achouri T., Ayadi M., Habbal A., Yahyaoui B. Numerical analysis for the two-dimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovski–Piskunov equation with mixed boundary condition// J. Appl. Math. Comput. — 2022. — 68. — P. 3589–3614.
14. Chen C. S., Chen W., Fu Z. J. Recent advances in radial basis function collocation method. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2013.
15. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. II. Partial Differential Equations. — New York: Interscience, 2008.
16. Dou F., Liu Y., Chen C. S. The method of particular solutions for solving nonlinear Poisson problems// Comput. Math. Appl. — 2019. — 77, № 2. — P. 501–513.
17. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions// Acta Numer. — 2015. — 24. — P. 215–258.
18. Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type// Symmetry. — 2020. — 12, № 6. — 999.
19. Kazakov A. L., Spevak L. F. Constructing exact and approximate diffusionwave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities// Mathematics. — 2022. — 10, № 9. — 1559.
20. Murray J. D. Mathematical Biology. II: Spatial Models and Biomedical Applications.. — New York: Springer, 2003.
21. Nardini D., Brebbia C. A new approach to free vibration analysis using boundary elements// Appl. Math. Model. — 1983. — 7, № 3. — P. 157–162.
22. Perthame B. Parabolic Equations in Biology. Growth, Reaction, Movement and Diffusion. — New York: Springer, 2015.

Казаков Александр Леонидович

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова

Сибирского отделения РАН, Иркутск

E-mail: kazakov@icc.ru

Кузнецов Павел Александрович

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова

Сибирского отделения РАН, Иркутск

E-mail: kuznetsov@icc.ru

Спевак Лев Фридрихович

Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова

Уральского отделения РАН, Екатеринбург

E-mail: lfs@imach.uran.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 89–96
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-89-96

УДК 519.1, 519.2

ДВЕ СХЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ С ЭФФЕКТОМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

© 2023 г. Н. А. КОЛОКОЛЬНИКОВА

Аннотация. Описаны два варианта урновой схемы с эффектом последействия. С помощью А- и Ф-схем последовательных испытаний найден явный вид распределения числа вынутых шаров определенного цвета, получены числовые характеристики, доказаны предельные теоремы.

Ключевые слова: урновая схема, А-схема последовательных испытаний, Ф-схема последовательных испытаний, вероятность, распределение, предельная теорема.

TWO SEQUENTIAL TEST SCHEMES WITH AFTEREFFECT

© 2023 N. A. KOLOKOLNIKOVA

ABSTRACT. Two variants of the urn scheme with aftereffect are described. Using A- and Ф-schemes of sequential tests, we find an explicit distribution of the number of removed balls of a certain color, obtain numerical characteristics of the distribution, and prove limit theorems.

Keywords and phrases: urn scheme, A-scheme of sequential tests, Ф-scheme of sequential tests, probability, distribution, limit theorem.

AMS Subject Classification: 60E05, 60C05, 60E10

1. Введение. При проведении последовательных испытаний (наблюдений) достаточно часто приходится сталкиваться с так называемым эффектом последействия. Например, если рассматривать испытания типа «успех-неуспех», то встречаются ситуации, когда после появления успеха вероятность следующего успеха возрастает, а после неуспеха — уменьшается. Иногда происходит наоборот: после успеха вероятность следующего успеха уменьшается; встречаются и другие варианты. Различные схемы проведения испытаний могут быть использованы при решении задач о случайных размещениях (см. [2, 3, 6, 10, 13]), при построении различных моделей, например, вероятностных моделей теории страхования (см. [7]) и др. Среди большого количества урновых схем, используемых в дискретной теории вероятностей, важное место занимают схемы, в которых наблюдается эффект последействия как эффект «заражения». Одна из подобных схем — урновая схема Маркова—Пойа (см. [4, 8, 11]). В книге В. Феллера [14] отмечено, что данная схема может быть использована при описании явлений, подобных эпидемиям. В этой схеме предполагается, что урна содержит шары двух цветов. Случайным образом шары извлекаются по одному, причём каждый вынутый шар возвращается в исходную урну с определённым числом шаров того же цвета. Иными словами, если рассматривать некоторую популяцию, в которой имеются есть заражённые индивиды, то эти индивиды будут заражать здоровых, так что количество заражённых будет возрастать. Очевидным недостатком использования схемы Маркова—Пойа для построения моделей «типа эпидемий» является то, что количество шаров в урне возрастает с каждым испытанием, причём шары добавляются после извлечения шара любого цвета.

В данной работе предлагаются две урновые схемы «с перекрашиванием». В первой из этих схем общее количество шаров в урне остаётся неизменным, но после извлечения шара заданного цвета, например, белого, происходит «перекрашивание» определенного числа шаров этого цвета. Это можно интерпретировать как заражение определенного числа индивидов. При извлечении шара другого цвета «перекрашивания» не происходит. Кроме того, рассматривается схема «с перекрашиванием», в которой общее число шаров возрастает на единицу при каждом извлечении шара.

Для описания вероятностных распределений используются специальные комбинаторные схемы: так называемые А- и Ф-схемы последовательных испытаний. Применение этих схем позволяет записать в явном виде возникающие распределения, найти их числовые характеристики и исследовать асимптотику (см. [1, 5, 9]). Рассмотрим упомянутые схемы.

2. А-схема последовательных испытаний. Предположим, что проводятся испытания типа «успех-неуспех», и после каждого успеха вероятность следующего успеха (а значит, и неуспеха) может меняться. После неуспеха изменения вероятностей не происходит. Такая схема называется А-схемой последовательных испытаний.

Пусть ξ_n — число успехов в n испытаниях, проводимых в условиях А-схемы, p_i — вероятность $(i + 1)$ -го успеха, т.е.

$$p_i = P\{\xi_{n+1} = i + 1 \mid \xi_n = i\}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Введем обозначение

$$q_i = P\{\xi_{n+1} = i \mid \xi_n = i\} = 1 - p_i.$$

Теорема 1 (см. [1]). *Если последовательные испытания проводятся в условиях А-схемы, то*

$$P\{\xi_n = 0\} = A_0^n, \quad P\{\xi_n = k\} = A_k^n \cdot \prod_{i=0}^{k-1} p_i, \quad k = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (1)$$

Здесь A_k^n — обобщенные числа Стирлинга 2-го рода, построенные на базе $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$. Эти числа могут быть определены рекуррентным соотношением

$$A_k^n = A_{k-1}^{n-1} + q_k A_k^{n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Кроме того, положим

$$A_n^n = 1, \quad n = \overline{0, \infty}; \quad A_k^n = 0, \quad \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

3. Ф-схема последовательных испытаний. Ф-Схема последовательных испытаний такова. Проводятся испытания типа «успех-неуспех». Обозначим через ξ_n число успехов в n испытаниях. Предполагаем, что условные вероятности успехов имеют такую структуру:

$$p_{ni} = P\{\xi_n = i + 1 \mid \xi_{n-1} = i\} = \alpha_{n-1} \beta_i, \\ q_{ni} = 1 - p_{ni} = P\{\xi_n = i \mid \xi_{n-1} = i\} = \alpha_{n-1} (\delta_{n-1} + \gamma_i), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Теорема 2 (см. [1]). *Если последовательные испытания проводятся в условиях Ф-схемы, то распределение случайной величины ξ_n может быть записано в виде*

$$P\{\xi_n = 0\} = \Phi_0^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i, \\ P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \beta_j, \quad k = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (2)$$

Распределение (2) называется Ф-распределением.

Комбинаторные числа Φ_k^n , участвующие в распределении (2), могут быть представлены в виде

$$\Phi_k^n = \sum_{i=k}^n B_i^n A_k^i,$$

где B_i^n — обобщённые числа Стирлинга 1-го рода, построенные на базе $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$, A_k^i — обобщённые числа Стирлинга 2-го рода, построенные на базе $\{\gamma_i\}_{i=0}^{k-1}$. Имеем

$$\Phi_n^n = 1, \text{ если } n = \overline{0, \infty}, \quad \Phi_k^n = 0, \text{ если } n < k \text{ или } k < 0. \quad (3)$$

Заметим, что числа B_i^n , построенные строящиеся на базе $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$, могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения

$$B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \alpha_{n-1} B_k^{n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n},$$

а также дополнительных условий

$$B_n^n = 1, \text{ если } n = \overline{0, \infty}, \quad B_k^n = 0, \text{ если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Рассмотрим следующий вариант Φ -распределения. Пусть $\beta_k = C + k$, $\gamma_k = -k$, где C , как и ранее, — натуральное число. Тогда

$$\delta_{n-1} = \frac{1}{\alpha_{n-1}} + C,$$

а распределение (2) запишется в виде

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i [C]_k, \quad k = \overline{0, n}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (4)$$

где

$$[C]_0 = 1, \quad [C]_k = \prod_{j=0}^{k-1} (C + j), \quad k \geq 1;$$

Φ_k^n — комбинаторные числа, удовлетворяющие рекуррентной формуле

$$\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - C + k \right) \Phi_k^{n-1}, \quad k = \overline{0, n}, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (5)$$

При этом, естественно, выполняется условие (3).

Пример 1 (см. [8]). Рассмотрим упомянутую выше урновую схему Маркова—Пойа. Урна содержит a белых и b чёрных шаров. Произвольно вынимается шар, фиксируется его цвет, а потом шар возвращается в урну вместе с d дополнительными шарами того же цвета. Описанная процедура осуществляется последовательно n раз.

Пусть ξ_n — число вынутых белых шаров. Считая успехом при каждом испытании извлечение белого шара, а неуспехом — черного, имеем

$$p_{nk} = \frac{a + kd}{a + b + (n-1)d}, \quad q_{nk} = \frac{b + (n-1-k)d}{a + b + (n-1)d}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Полагаем

$$\alpha_{n-1} = \frac{d}{a + b + (n-1)d}, \quad \beta_k = \frac{a}{d} + k, \quad \delta_{n-1} = \frac{b}{d} + n - 1, \quad \gamma_k = -k.$$

Видим, что структура элементов α_{n-1} , β_k , δ_{n-1} , γ_k соответствует рассматриваемому варианту Φ -распределения, $C = a/d$. Формула (4) принимает вид

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \frac{[a/d]_k}{[(a+b)/d]_n}, \quad k = \overline{0, n}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Итак, распределение Маркова—Пойа является частным случаем указанного варианта Φ -распределения.

3.1. *Моменты Φ -распределения.* Будем использовать производящую функцию распределения (4):

$$\Phi_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \sum_{k=0}^n \Phi_k^n[C]_k x^k. \quad (6)$$

Теорема 3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ факториальный момент порядка $1 \leq r \leq n$ имеет вид*

$$m_r = \Phi_n^{(r)}(1) = r! [C]_r \sum_{i=r}^n a_r^i B_{n-i}^n, \quad (7)$$

где $\Phi_n^{(r)}(x)$ — производная r -го порядка от производящей функции (6), $[C]_k$ — k -я возрастающая факториальная степень, a_r^i — числа Стирлинга 2-го рода, B_{n-i}^n — обобщённые числа Стирлинга 1-го рода, построенные на базе $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$.

Доказательство. Применим индукцию по n . При $n = 1$ имеем очевидное равенство

$$m_1 = \Phi_1'(1) = \alpha_0 C = 1! [C]_1 \alpha_0.$$

Предположим, что равенство (6) выполняется при некотором натуральном $n \geq 1$ и всех факториальных моментов порядка $\leq r$. Тогда

$$\begin{aligned} m_r &= m_r(n+1) = \Phi_{n+1}^{(r)}(1) = (1 + r\alpha_n) \Phi_n^{(r)}(1) + r\alpha_n(C + r - 1) \Phi_n^{(r-1)}(1) = \\ &= (1 + r\alpha_n) r! [C]_r \sum_{i=r}^n a_r^i B_{n-i}^n + r\alpha_n(C + r - 1)(r-1)! [C]_r \sum_{i=r-1}^n a_{r-1}^i B_{n-i}^n = \\ &= r! [C]_r \left(\sum_{i=r}^n a_r^i B_{n-i}^n + \alpha_n \sum_{i=r}^{n+1} a_r^i B_{n-i+1}^n \right) = r! [C]_r \left(\sum_{i=r}^{n+1} a_r^i (B_{n-i}^n + \alpha_n B_{n-i+1}^n) \right) = \\ &= r! [C]_r \sum_{i=r}^{n+1} a_r^i B_{n-i+1}^{n+1}. \end{aligned}$$

Если $r = n + 1$, то

$$m_{n+1} = m_{n+1}(n+1) = \Phi_{n+1}^{(n+1)}(1) = (n+1)! \prod_{i=0}^n \alpha_i [C]_{n+1} \Phi_{n+1}^{n+1} = (n+1)! [C]_{n+1} B_0^{n+1}.$$

Теорема доказана. $\square$

Используя (7), получим формулы для математического ожидания и дисперсии величины ξ_n :

$$E\xi_n = \Phi_n'(1) = C \left(\prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) - 1 \right), \quad D\xi_n = \Phi_n''(1) + \Phi_n'(1) - (\Phi_n'(1))^2.$$

На основании формулы (6),

$$\begin{aligned} D\xi_n &= C(C+1) \left(1 - 2 \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) + \prod_{i=0}^{n-1} (1 + 2\alpha_i) \right) + C \left(\prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) - 1 \right) - \\ &- C^2 \left(\prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) - 1 \right)^2 = C(C+1) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + 2\alpha_i) + C \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) - C^2 \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i)^2. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к рассмотрению урновых схем «с перекрашиванием».

4. Урновая схема с постоянным общим числом шаров. Урна содержит M белых и M черных шаров. Последовательно по одному шары извлекаются из урны. Извлечение каждого шара равновозможно. Если был вынут белый шар, то его возвращают в урну и при этом d черных шаров перекрашивают в белый цвет; если же был вынут черный шар, то его возвращают в урну, не изменяя цветов находящихся в урне шаров.

Предположим, что произведено n извлечений шаров из урны. Пусть ξ_n — число извлеченных белых шаров. Найдем распределение этой величины, её числовые характеристики и укажем некоторые предельные распределения.

Для нахождения явного вида распределения величины ξ_n будет использована описанная выше А-схема последовательных испытаний.

При решении этой задачи используем схему испытаний типа «успех-неуспех». Считаем успехом извлечение белого шара, неуспехом — черного. С учетом принятых обозначений,

$$p_i = \frac{M + id}{M + N}, \quad q_i = 1 - \frac{M + id}{M + N} = \frac{N - id}{M + N}.$$

Следовательно, в силу формул (1),

$$\begin{aligned} P\{\xi_n = 0\} &= A_0^n = q_0^n = \left(\frac{N}{M + N}\right)^n, & n = \overline{1, \infty}, \\ P\{\xi_n = k\} &= A_k^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{M + id}{M + N} = \frac{[M]_{kd}}{(M + N)^n} A_k^n, & k = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (8)$$

Обобщенные числа Стирлинга 2-го рода A_k^n строятся на базе $\left\{\frac{N - id}{M + N}\right\}_{i=0}^{\min(n, [N/d])}$, где $[N/d]$ — целая часть числа N/d и

$$[M]_{kd} = M(M + d)(M + 2d) \dots (M + (k - 1)d).$$

Для нахождения числовых характеристик будем использовать производящую функцию распределения (8):

$$P_n(x) = \frac{1}{(M + N)^n} \sum_{k=0}^n [M]_{kd} A_k^n x^k. \quad (9)$$

Найдем факториальные моменты этого распределения.

Теорема 4. Для любого $n \in \mathbb{N}$ факториальный момент порядка $1 \leq r \leq n$ имеет вид

$$m_r = P_n^{(r)}(1) = r! \left[\frac{M}{d}\right]_r \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} \left(\frac{d}{M + N}\right)^i a_r^i.$$

где a_r^i — числа Стирлинга 2-го рода.

Следствие 1. Математическое ожидание величины ξ_n имеет вид

$$E\xi_n = \frac{M}{d} \left(\left(1 + \frac{d}{M + N}\right)^n - 1 \right).$$

Следствие 2. Дисперсия величины ξ_n находится по формуле

$$D\xi_n = \frac{M(M + d)}{d^2} \left(1 + \frac{2d}{M + N}\right)^n + \frac{M}{d} \left(1 + \frac{d}{M + N}\right)^n - \frac{M^2}{d^2} \left(1 + \frac{d}{M + N}\right)^{2n}.$$

Приведем некоторые предельные теоремы, для доказательства которых были использованы результаты работы [9]. Считаем, что $d = \text{const}$.

Теорема 5. Если при n , $M \rightarrow \infty$ выполняются условия

$$\frac{n}{M + N} \rightarrow 0, \quad \frac{Mn}{M + N} \rightarrow \lambda < \infty,$$

то

$$P\{\xi_n = k\} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Теорема 6. Если при $n, M, N \rightarrow \infty$ выполняются условия

$$\frac{n^2}{M} \rightarrow 0, \quad \frac{Nn^2}{M} \rightarrow \mu < \infty,$$

то

$$P\{n - \xi_n = k\} \rightarrow \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Теорема 7. Если при $n, M, N \rightarrow \infty$, выполняются условия

$$\frac{n}{M+N} \rightarrow 0, \quad \frac{N}{M} \rightarrow 0, \quad \frac{n^2}{M+N} \rightarrow \infty,$$

то равномерно по $x \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость

$$P\left\{\frac{\xi_n - E\xi_n}{\sqrt{D\xi_n}} < x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Заметим, что при доказательстве последней теоремы была использована следующая теорема, доказанная Бендером (см. [15]) и процитированная в [12, с. 57].

Теорема 8. Если производящая функция $P_n(x)$ случайной величины ξ_n при $n \rightarrow \infty$ удовлетворяет равенству

$$P_n(x) = x^{\nu_n} e^{h_n(x)} (1 + o(1)),$$

где функция $h_n(x)$ обладает первыми тремя непрерывными производными в $W = [1 - \theta, 1 + \theta]$, $\theta > 0$, $\{\nu_n\}$ — числовая последовательность и $o(1) \rightarrow 0$, $h_n(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{h_n'''(x)}{(h_n'(1) + h_n''(1))^{3/2}} \rightarrow 0$$

равномерно для всех $x \in W$ и $(h_n'(1) + h_n''(1))^{3/2} \rightarrow \infty$, то случайная величина

$$\frac{\xi_n - \nu_n - h_n'(1)}{(h_n'(1) + h_n''(1))^{1/2}}$$

в пределе имеет нормальное распределение.

5. Урновая схема с увеличивающимся числом шаров. Урна содержит M белых и M черных шаров. Последовательно по одному шары извлекаются из урны. Извлечение любого шара равновозможно. Если был вынут белый шар, то его возвращают в урну и при этом d черных шаров перекрашивают в белый цвет; если же был вынут черный шар, то его возвращают в урну, не меняя цветов находящихся там шаров, и добавляют в урну один черный шар. Таким образом, общее число шаров в урне увеличивается на единицу после каждого испытания.

Пусть ξ_n — число извлеченных белых шаров в n -м испытании. Считаем успехом извлечение белого шара, а неудачей — черного. Тогда условная вероятность успеха в n -м испытании, если до этого реализовалось i успехов, имеет вид

$$p_{ni} = P\{\xi_n = i + 1 \mid \xi_{n-1} = i\} = \frac{M + id}{M + N + n - 1},$$

а соответствующая вероятность неудачи —

$$q_{ni} = P\{\xi_n = i \mid \xi_{n-1} = i\} = \frac{N + n - 1 - id}{M + N + n - 1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Введем обозначения

$$\alpha_{n-1} = \frac{d}{M + N + n - 1}, \quad \beta_i = \frac{M}{d} + i, \quad \delta_{n-1} = \frac{M + n - 1}{d}, \quad \gamma_i = -i.$$

Тогда, на основании изложенного в п. 3,

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left[\frac{M}{d} \right]_k, \quad k = \overline{0, n}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (10)$$

где

$$\left[\frac{M}{d} \right]_0 = 1, \quad \left[\frac{M}{d} \right]_k = \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{M}{d} + j \right), \quad k \geq 1;$$

Φ_k^n — комбинаторные числа, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - \frac{M}{d} + k \right) \Phi_k^{n-1}, \quad k = \overline{0, n}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

На основании теоремы 3, можем утверждать, что для случайной величины ξ_n , имеющей распределение (10), факториальный момент порядка r определяется формулой

$$m_r = r! \left[\frac{M}{d} \right]_r \sum_{i=r}^n a_r^i B_{n-i}^n, \quad 1 \leq r \leq n, \quad (11)$$

где B_{n-i}^n — обобщённые числа Стирлинга 1-го рода, построенные на базе $\{d/(M + N + i)\}_{i=0}^{n-1}$.

Используя формулу (11), приходим к следующему утверждению.

Теорема 9. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ_n задаются соответственно формулами

$$E\xi_n = \frac{M}{d} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) - 1 \right),$$

$$D\xi_n = \frac{M}{d} \left(\frac{M}{d} + 1 \right) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + 2\alpha_i) + \frac{M}{d} \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) - \left(\frac{M}{d} \right)^2 \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i)^2,$$

где $\alpha_i = d/(M + N + i)$.

Следует заметить, что достаточные условия для сходимости распределения (10) к нормальному те же, что в теореме 7. Также справедлива теорема 5. А вот утверждение теоремы 6 в данном случае места не имеет.

Таким образом, рассмотрены два варианта размещения шаров, позволяющие использовать схемы последовательных испытаний, если эти испытания проводятся в переменных условиях.

Замечание 1. Условия, описанные в п. 5, могут быть обобщены. Использованный метод применим и в том случае, когда число добавляемых шаров различно в каждый момент времени (определённым образом зависит от номера испытания). Тогда также применима Ф-схема последовательных испытаний. Отличие будет лишь в виде последовательности $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А., Кузьмин О. В., Платонов М. Л. Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. — Изд-во Иркут. ун-та, 1990.
2. Ивченко Г. И., Медведев Ю. А. Процесс последовательного заполнения ячеек в схеме размещения частиц как марковская цепь // Обозр. прикл. пром. мат. — 1996. — 3, № 4. — С. 512–529.
3. Ивченко Г. И., Медведев Ю. А. Исследование процесса заполнения ячеек в схеме размещения с отражением // Дискр. мат. — 1994. — 6, № 1. — С. 40–52.
4. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Об урновой схеме Маркова—Пойа: от 1917 г. до наших дней // Обозр. прикл. пром. мат. — 1996. — 3, № 4. — С. 484–511.
5. Имышелова В. П., Колокольникова Н. А. Одна схема случайного размещения частиц («скользящий комплект») // в кн.: Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа. — Изд-во Иркут. ун-та, 1997. — С. 43–53.

6. Колокольникова Н. А., Котоманова Д. В. А-схема последовательных испытаний и случайные размещения с отражением// в кн.: Труды ИМЭИ ИГУ. Математика и информатика. Т. 1. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2011. — С. 69–72.
7. Колокольникова Н. А. Вероятностные модели теории страхования, использующие схемы случайного размещения частиц// в кн.: Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. — Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2015. — С. 59–65.
8. Колокольникова Н. А. Одно обобщение урновой схемы Маркова—Пойа// в кн.: Прикладные проблемы дискретного анализа. — Изд-во Иркут. ун-та, 2021. — С. 59–65.
9. Колокольникова Н. А. Предельные теоремы для числа успехов в одной схеме зависимых испытаний. Деп. № 649. В92. — М.: ВИНТИ РАН, 1992.
10. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. — М.: Наука, 1975.
11. Марков А. А. О некоторых предельных формах исчисления вероятностей// Изв. АН. — 1917. — 11, № 3. — С. 177–186.
12. Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — Наука, 1978.
13. Севастьянов Б. А. Об одной схеме зависимых размещений// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. — 1981. — № 2. — С. 37–41.
14. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. — Мир, 1984.
15. Bender E. A. Central and local limit theorems applied to asymptotic enumeration// J. Comb. Theory. — 1973. — 15, № 1. — P. 91–111.

Колокольникова Наталья Арсеньевна
Иркутский государственный университет
E-mail: k_n_a_05@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 97–108
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-97-108

УДК 514.75

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПОИСКА

© 2023 г. О. В. КУЗЬМИН

Аннотация. Изучаются комбинаторные объекты пирамидальной структуры. Рассмотрен один из способов представления правил в иерархической, последовательной структуре — метод деревьев принятия решений, где каждому объекту соответствует единственный узел, дающий решение. Предложен алгоритм построения дерева решений на основе обобщенной пирамиды Паскаля. Предложен метод построения поискового индекса, который отображает долю релевантного материала и позволяет производить сравнения во множестве терминов, исходя из весовых коэффициентов терминов и путей.

Ключевые слова: иерархическая структура, частично упорядоченное множество, обобщенная пирамида Паскаля, задача принятия решений, дерево решений, комбинаторный алгоритм.

HIERARCHICAL STRUCTURES AND COMBINATORIAL PROBLEMS OF INFORMATION RETRIEVAL

© 2023 O. V. KUZMIN

ABSTRACT. We examine combinatorial objects of pyramidal structure. We consider one of the ways of representing rules in hierarchical, sequential structures: the method of decision trees, where each object corresponds to a single node that provides a solution. An algorithm for constructing a decision tree based on the generalized Pascal pyramid is suggested. Also, we propose a method for constructing a search index, which displays the proportion of relevant material and allows one to perform comparisons in the variety of terms based on the weight coefficients of terms and paths.

Keywords and phrases: hierarchical structure, partially ordered set, generalized Pascal pyramid, decision-making problem, decision tree, combinatorial algorithm.

AMS Subject Classification: 06E30, 94D10, 15B34, 05B20

1. Введение. Комбинаторные задачи алгоритмического характера на дискретных конечных математических структурах встречаются в практике постоянно. В последние годы неуклонно растет интерес к теории «больших систем», с которыми приходится иметь дело в самых различных областях науки и техники. Важным направлением исследования таких «больших» или «сложных» систем является рассмотрение их как многоуровневых систем или систем с иерархической структурой (см. [13, 14]). Процесс поэтапного построения решения многокритериальных задач с иерархическими структурами часто может быть интерпретирован как траектория на конечной решетке (см. [4, 15]), описывающей соответствующее частично упорядоченное множество (см. [2]). Подобные задачи нередко встречаются при разработке методов автоматического анализа больших массивов данных в информационных системах и обработке сетей (см. [11, 27]).

В монографии [8] предложена схема построения комбинаторных чисел и полиномов на основе иерархической пирамидальной структуры с весами, названной обобщенной пирамидой Паскаля. В [22] широко известная техника теории частично упорядоченных множеств Рота—Стенли

(см. [15]) применяется для исследования целого ряда комбинаторных объектов, описываемых этой схемой.

Деревья решений являются одним из наиболее эффективных инструментов интеллектуального анализа данных и предсказательной аналитики, которые позволяют решать задачи классификации и регрессии.

Основополагающие идеи, послужившие толчком к появлению и развитию деревьев решений, были заложены в 1950-х гг. в области исследований моделирования человеческого поведения с помощью компьютерных систем. Среди них следует выделить работы К. А. Ховланда (см. [19]) и Э. Б. Ханта и др. (см. [20]).

Дальнейшее развитие деревьев решений как самообучающихся моделей для анализа данных связано с Дж. Р. Куинленом (см. [28, 29]), который разработал алгоритм ID3 и его усовершенствованные модификации C4.5 и C5.0, и Л. Брейманом (см. [18]), предложившим алгоритм CART и метод случайного леса.

Деревья решений используются преимущественно в процессе принятия решений. В отличие от них деревья поиска предназначены в основном для управления поиском. Задачи поиска в различных постановках не являются новым предметом исследования (см. [1]). Первые системы, реализующие информационный поиск, были созданы в 1950-е гг. По мере развития информационных систем размеры и количество хранящихся документов постоянно росли. Помимо самого текста, стали хранить параметры его форматирования, гипертекстовые связи между документами и другую информацию. В связи с этим встает вопрос сравнения близости информационного содержимого в некоторой понятийной плоскости. Организацию баз данных разделяют на три уровня: физический, логический (см. [5]) и концептуальный (см. [16]). Задачи поиска выделяют, как правило, на физическом и логическом уровнях.

Основными моделями логической организации баз являются три модели: иерархическая, сетевая и реляционная. В иерархической модели данные представлены деревом иерархии, с отношениями типа «родитель-потомок», причем у потомка может быть только один «родитель», а корневой элемент не имеет «родителя». В сетевой модели нет таких жестких ограничений, однако это делает ее более сложной как в использовании, так и программной реализации. Реляционная модель, описывающая данные с помощью плоских таблиц, предложенная Е. Коддом, позволяет, используя операции разрезания и склеивания отношений, извлечения и объединения столбцов, а также процедуру нормализации, представлять как линейные, так и древовидные и сетевые структуры. Такая большая гибкость реляционной модели, вкупе с ее строгой математической моделью — реляционной алгеброй, сделали ее особенной популярной. Почти все крупные базы данных на данный момент реализованы на основе реляционной модели.

Однако несмотря на превалирование реляционных баз данных и систем управления ими, в последнее время стали развиваться альтернативные подходы к организации данных, такие как XML (Extensible Markup Language — расширяемый язык разметки), который является в некотором роде, развитием идей иерархической модели, а также объектные базы данных, которые несмотря на их определенные отличия, во многом повторяют преимущества сетевой модели.

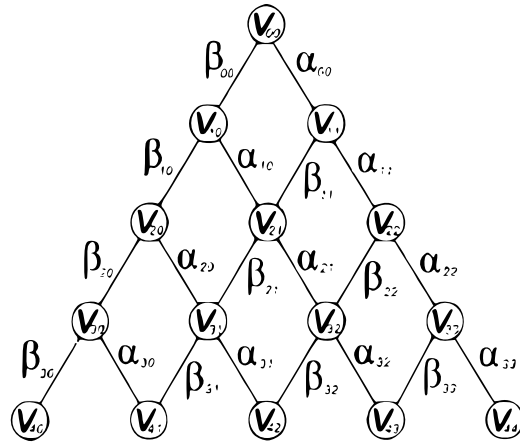
В данной работе, относящейся к области разработки методов анализа иерархических систем и их приложений в задачах поиска и принятия решений, формулируются алгоритмы построения иерархической классификационной модели — дерева принятия решений. Рассматриваются вопросы отыскания новых способов построения индексов релевантности информации, и предлагается способ построения такого индекса с помощью обобщенных пирамид Паскаля.

2. Основные понятия и соотношения. *Обобщенной пирамидой Паскаля* (или *V-пирамидой*) (см. [8]) называется иерархическая трехгранная пирамидальная структура V с весами, элементы которой удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$V(n, k, l) = \alpha_{n,k-1,l} V(n-1, k-1, l) + \beta_{n,k,l-1} V(n-1, k, l-1) + \gamma_{n,k,l} V(n-1, k, l) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$V(0, 0, 0) = V_0, \quad V(n, k, l) = 0, \text{ если } \min(n, k, l, n-k-l) < 0.$$

Рис. 1. Иерархическая структура V -треугольника

Число V_0 , стоящее в вершине (нулевом слое) V -пирамиды, оговаривается особо; во многих случаях можно считать $V_0 = 1$. Величины $\alpha_{n,k,l}$, $\beta_{n,k,l}$, $\gamma_{n,k,l}$, называют весовыми коэффициентами, или *веса*ми. Ряд свойств V -пирамид и их частных случаев приведен в [3, 10, 17, 25].

Верхним N -отсечением V -пирамиды (V_N -пирамидой) называем (см. [10]) конечный трехгранный пирамидальный массив элементов, составляющий верхнюю часть V -пирамиды, причем основанием V_N -пирамиды служит плоское N -сечение V -пирамиды, а номера рассматриваемых V_N -пирамид совпадают с номерами соответствующих сечений V -пирамиды.

Важным частным случаем обобщенной пирамиды Паскаля является *обобщенный треугольник Паскаля* (или V -треугольник) (см. [8]), определяемый как иерархическая треугольная структура V с весами, элементы которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$V(n, k) = \alpha_{n,k-1} V(n-1, k-1) + \beta_{n,k} V(n-1, k) \quad (2)$$

с граничными условиями

$$V(0, 0) = V_0, \quad V(n, k) = 0, \text{ если } \min(n, k, n-k) < 0.$$

На рис. 1 изображена иерархическая структура V с весами, которую описывает соотношение (2).

При задании соответствующих наборов значений весов соотношения (1) и (2) допускают перечислительные интерпретации в терминах решеточных путей, которые, в свою очередь, могут быть использованы при анализе решеточных структур (см. [23, 24]).

Далее нам потребуются следующие операции над графами (см. [26]).

Удалением вершины $v \in V$ графа $G = G(V, E)$ называется операция, состоящая в удалении этой вершины вместе со всеми инцидентными ей ребрами. Для обозначения графа, полученного после удаления вершины v графа G используется символ $G \setminus v$.

Удалением ребра $e \in E$ графа $G = G(V, E)$ называется операция, состоящая в удалении этого ребра при сохранении всех вершин графа. Для обозначения графа, полученного после удаления ребра e графа G используется символ $G \setminus e$.

Стягиванием ребра $e = (u, v)$ графа $G(V, E)$ называется операция, состоящая в отождествлении смежных вершин u и v и удалении образовавшейся петли.

Напомним (см. [7]), что *высота* корневого дерева — это максимальное количество дуг, отделяющих листья от корня. Если дерево не взвешенное, то его высота — это просто расстояние от корня до самого удаленного листа.

В приложениях нередко *бинарные деревья* решений. В этом случае корень и каждая внутренняя вершина имеют не более двух потомков. На уровне h бинарного дерева имеется максимум 2^h вершин. Бинарное дерево высотой h , имеющее максимальное количество узлов, является *совершенным* бинарным деревом.

Также применяются *тернарные деревья*, в которых корень и каждая внутренняя вершина имеют не более трех потомков. Общие приложения для троичных деревьев поиска включают проверку орфографии и автозаполнение.

3. Дерево принятия решений. Дерево решений является способом организации данных в виде иерархической структуры, включающей в себя элементы двух типов — *узлов* или *внутренних вершин* и *листьев* или *висячих вершин*, отличных от *корня*. Лист определяет решение для каждого попавшего в него примера, в нем содержится не правило, а подмножество объектов, удовлетворяющих всем правилам ветви, которая заканчивается этим листом. К каждому листу есть только один путь, поэтому пример или утверждение могут попасть только в один лист, что обеспечивает единственность решения.

В настоящее время деревья решений стали одним из наиболее популярных методов *интеллектуального анализа данных* (Data Mining), используемых при решении задач *классификации*.

Перейдем к описанию разработанного алгоритма построения дерева принятия решений на основе обобщенной пирамиды Паскаля (см. [21]).

Алгоритм 1.

BEGIN

Шаг 1. Определяем параметры для нахождения размеров V_N — верхнего N -отсечения V -пирамиды.

Шаг 2. Определяем параметры для построения множества запрещенных вершин $V' \subset V$.

Шаг 3. Определяем параметры для построения множества запрещенных ребер E' .

Шаг 4. Определяем множество запрещенных вершин $V' \subset V$.

Шаг 5. Определяем множество запрещенных ребер $E' \subset E$.

Шаг 6. Удаляем из множества V вершины, принадлежащие V' , т.е. заменяем V на $V \setminus V'$.

Шаг 7. Удаляем из множества ребер E ребра, принадлежащие $E' \subset E'$, т.е. запрещенные ребра, оставшихся после выполнения шага 5.

Шаг 8. Если найдутся три вершины u, w, v , которые образуют (в указанном порядке, считая от корня) (простую) цепь, причем $\deg w = 2$, то переходим к шагу 9, иначе выполняем шаг 10.

Шаг 9. Ребро (w, v) стягиваем к вершине v и переходим к шагу 7.

Шаг 10. У всех оставшихся в V_N ребер полагаем веса равными 1.

Шаг 11. Дерево D построено.

END

Алгоритм 1 может быть использован, в частности, при построении тернарного дерева T .

При построении бинарных деревьев можно использовать Алгоритм 2, который отличается от Алгоритма 1 тем, что в нем Шаг 1 заменяется следующим:

Шаг 1'. Определяем входящие параметры для нахождения размеров V_N — верхнего N -отсечения V -треугольника.

Алгоритм 2 может, в частности, использоваться при построении бинарного дерева B . При этом для определения входящих параметров для нахождения размеров V_N — верхнего N -отсечения V -треугольника можно воспользоваться следующими утверждениями (см. [21]).

Утверждение 1. Для построения совершенного бинарного дерева B высоты n с корнем V_0 необходимо и достаточно V_N -треугольника, где $N = 2^n$.

Утверждение 2. Для построения бинарного дерева B высоты n с корнем V_0 достаточно V_N -треугольника, где $N = 2^n$.

Для того чтобы показать, как Алгоритм 2 применяется к конкретным задачам, рассмотрим пример построения бинарного дерева решений B на основе V -треугольника.

Посредством задания весов, множеств $V' \subset V$ запрещенных вершин (запрещенных позиций) и $E' \subset E$ запрещенных ребер, удаления всех элементов указанных множеств V' и E' и последующего стягивания ребер, иерархическая треугольная структура, описываемая соотношением (2), может быть преобразована в соответствующее бинарное дерево решений (рис. 2 и 3).

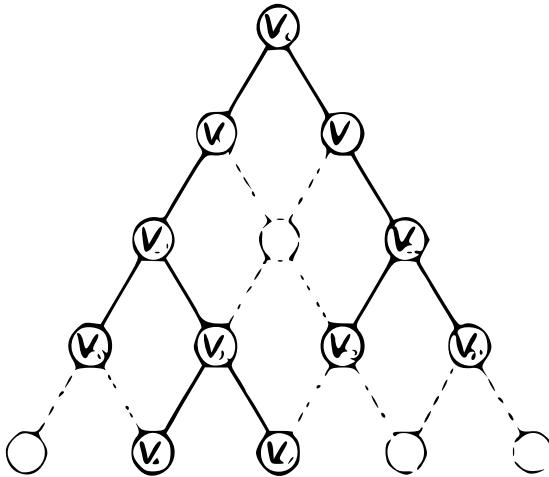


Рис. 2. V-треугольник с запрещенными ребрами и вершинами

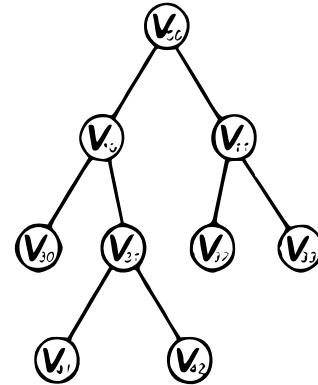


Рис. 3. Бинарное дерево решений B

Рисунок 2 получен из рис. 1, где запрещенные вершины отмечены серым, запрещенные ребра — штриховыми линиями, а остальные веса полагаются равными единице. На рис. 3 приведено бинарное дерево решений B , полученное из изображенного на рис. 2 V-треугольника удалением запрещенных вершин из множества $V' = \{V_{2,1}, V_{4,0}, V_{4,3}, V_{4,4}\}$, удалением ребер $(V_{3,0}, V_{4,1})$ и $(V_{3,2}, V_{4,2})$ из E' и последующим стягиванием ребер $(V_{1,1}, V_{2,0})$ и $(V_{1,0}, V_{2,2})$ в вершины $V_{1,0}$ и $V_{1,1}$ соответственно.

Простейшие деревья решений хороши своей наглядностью. Они не оперируют вероятностями или весами. Для решения реальных задач часто используют усложненные и дополненные модификации деревьев решений.

Метод дерева решений применяется в задачах *классификации* и *прогнозирования*, когда решения приходится принимать в условиях риска, неопределённости и исход событий зависит от вероятностей. На каждое решение влияют какие-то определённые факторы, и у каждого решения есть свои последствия, которым присущ вероятностный характер.

Замечание 1. При задании соответствующих наборов значений весов (и с учетом условия нормировки), соотношения (1) и (2) допускают вероятностные интерпретации (см. [8]) при решении реальных задач в терминах модифицированных деревьев решений.

При этом могут быть использованы модификации приведенных алгоритмов — Алгоритм 1* или Алгоритм 2*, в которых Шаг 10 заменяется на следующий:

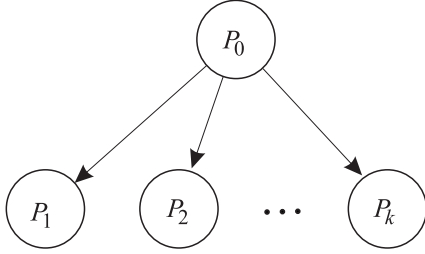
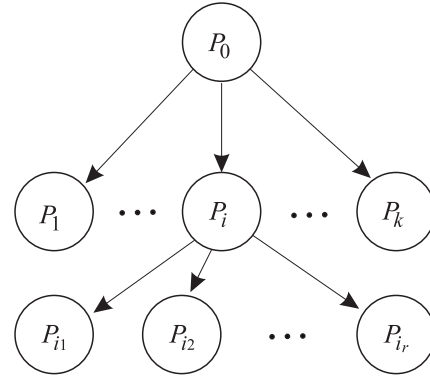
Шаг 10'. У всех оставшихся в V_N ребер значения весов полагаем равными соответствующим $p_i > 0$ с учетом условия нормировки по уровням дерева.

4. Методы поиска, использующие деревья решений. Согласно [7] *основной принцип*, на котором базируются методы поиска с деревом решений, состоит в *декомпозиции* начальной задачи P_0 на некоторое число подзадач $P_1, \dots, P_k$ (в целом представляющих всю задачу P_0) с последующей попыткой разрешить каждую из них:

- (i) найти оптимальное решение задачи P_i , если оно находится очевидным образом;
- (ii) показать, что решать задачу P_i не имеет смысла, поскольку значение оптимального решения для P_i заведомо хуже, чем для наилучшего из ранее найденных решений;
- (iii) показать, что подзадача P_i не является допустимой.

Это разбиение описывается деревом, представленным на рис. 4, где вершины $P_1, \dots, P_k$ изображают подзадачи.

Идея декомпозиции задачи P_0 на некоторое число подзадач $P_1, \dots, P_k$ состоит в том, что или эти подзадачи проще решить, или они имеют меньший размер, или обладают структурой, не

Рис. 4. Декомпозиция задачи P_0 на подзадачиРис. 5. Дерево после ветвления в вершине P_i

присущей первоначальной задаче P_0 . Если подзадачу P_i нельзя решить, то она также разбивается на новые подзадачи $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ir}$, как это показано на рис. 5. Это разбиение (называемое также ветвлением) повторяется для каждой подзадачи, которая не может быть решена.

На любом этапе полное множество подзадач, требующих решения, представляется множеством *концевых* вершин (т. е. вершин степени 1) всех цепей, исходящих из корня (начальной задачи P_0) дерева поиска. Эти вершины называются *висячими* вершинами; на рис. 5 это вершины $P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ir}, P_{i+1}, \dots, P_k$.

Если поиск исчерпан, то множество подзадач, на которые разбита задача, должно представлять все пространство подзадач исходной задачи. Таким образом, если задача P_i разбита на r подзадач $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ir}$, то

$$\{P_{i1}\} \cup \{P_{i2}\} \cup \dots \cup \{P_{ir}\} = P_i, \quad (3)$$

где $\{P\}$ обозначает множество всех допустимых решений задачи P .

Так как соотношение (3) должно быть применено к каждому разбиению, то

$$\{P_0\} = \bigcup \left\{ P(i) \mid P(j) - \text{висячая вершина дерева} \right\}. \quad (4)$$

В случаях, когда требуется перебрать все решения задачи P_0 (а не только найти оптимальное в некотором смысле решение), желательно уметь перебирать решения с помощью вышеприведенной декомпозиции задачи на подзадачи и перебирать решения каждой из этих подзадач. В этом случае нужно избежать дублирования построенных решений, т.е. нужно разбивать задачу P_i на подзадачи $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ir}$ так, чтобы

$$\{P_{is}\} \cap \{P_{iq}\} = \emptyset \quad (5)$$

для любых двух подзадач P_{is} и P_{iq} , для которых $s \neq q$.

Соотношение (5) определяет собственное разбиение задачи P_i . Хотя условие (5) не является необходимым для полноценного поиска с деревом решений, оно, тем не менее, имеет большие выгоды с вычислительной точки зрения, поскольку

- (i) для задачи оптимизации P_0 оптимальное решение является решением одной и только одной подзадачи, представляемой висячей вершиной;
- (ii) для задачи полного перебора объединение множеств решений подзадач, представляемых висячими вершинами, дает множество всех решений задачи P_0 без дублирования.

Замечание 2. Дерево решений при поиске обычно не задается априори. Оно строится непосредственно в процессе поиска: когда возникает некоторая ситуация, тогда и определяются возможные направления процесса, представляемые совокупностью дуг, исходящих из вершины, соответствующей данной ситуации. Естественно стремиться по возможности сокращать число этих дуг, чтобы быстрее найти решение. Способы этого сокращения строятся с учетом особенностей конкретных задач.

Двумя основными факторами, которые делают бинарное дерево поиска, часто сокращенно называемое BST, оптимальным решением любых реальных проблем, являются скорость и точность. Алгоритмы, основанные на BST, часто используются в реальных решениях, таких как игры, автозаполнение данных и графика.

5. Задачи информационного поиска. В связи с возникновением и развитием сети Интернет стали особенно популярны службы и технологии, позволяющие пользователям информационных систем отыскивать необходимую информацию. Такие службы подразделяются на службы общего назначения, к примеру, системы поиска во всей сети Интернет: Google, Yahoo!, Яндекс, и специализированные порталы, содержащие информацию по каким-либо областям знания, к примеру, Download.Com (поиск программного обеспечения), GettyImages (поиск изображений) — причем это только самые крупные системы, более или менее полный список же занял бы много страниц. Все они предоставляют хорошие — в некотором смысле — результаты.

Системы поиска имеют широко разработанные технологии и связанный с ними математический аппарат для получения наилучших результатов поиска в больших массивах информации. Эти технологии основаны на данных о структуре естественных языков (законы Зипфа), а также на особенностях структуры Интернет (системы взаимных ссылок, популярность сайтов). Специализированные системы, в свою очередь, используют классификаторы, сходные с библиотечными, составляемые систематизаторами — профессионалами какой-либо узкой области.

Так, большая популярность системы Google связана с качественными результатами так называемого Page Rank ранжирования, т.е. определения позиции ресурса в результирующей выборке поискового запроса в зависимости от количества внешних ссылок на ресурс. Иными словами, чем полезнее ресурс, тем больше ресурсов на него ссылаются, тем ценнее содержащаяся на нем информация. В научном мире это известно как *индекс цитирования*.

Для поисков в русском сегменте сети Интернет особенно ценна способность поисковой системы Яндекс, искать не только слова запроса на русском языке, но и все его словоформы (поиск, поиска, поиске и т. д.).

Также для улучшения результатов используют следующие технологии:

- (i) предыдущие запросы пользователя (сужая результаты согласно «интересам» пользователя (Google Personalized Search));
- (ii) рекомендации других пользователей (Digg.Com, Del.icio.us);
- (iii) сужение поиска согласно актуальности (News, Rss агрегаторы);
- (iv) отсылки на аналогично описанные ресурсы (тэги в сервисе Flickr, навигация по ключевым словам).

Однако и эти способы не являются достаточными, а поэтому исследования в этой области продолжают. Определим некоторые термины, которые не являются общепринятыми, однако понадобятся при дальнейшем изложении.

Для определения «нужности» информации при поиске обычно используют два термина:

- (a) *релевантная информация* — информация, отвечающая формальному критерию поиска, например, ключевому слову или принадлежности определенной категории;
- (b) *пертинентная информация* — информация, удовлетворяющая информационной потребности ищущего ее человека.

Рассмотрим пример поиска во всей сети Интернет поисковой службой общего назначения. Пусть поиск осуществляется по английскому слову object — объект. Список сайтов выдаваемых в ответ на подобный запрос будут ссылки на документы содержащие данные по программированию (object oriented programming), базам данных (object oriented databases), философии (object and subject relationship), лингвистике (theta role or θ -role). Какая информация будет пертинентной — заранее неизвестно. Основные отличия в результативности поиска достигаются путем предложения пользователю некоторого списка релевантных документов, однако достигнуть высокой степени пертинентности можно лишь используя разные стратегии выбора релевантных документов.

Обычно для оценки качества поиска меряют два параметра: точность (precision) — доля релевантного материала в ответе, полнота (recall) — доля найденных релевантных документов в общем числе релевантных документов коллекции.

Такие стратегии называют ранжированием информации по принципу релевантности (в некотором смысле) содержащейся в них информации. При этом пользователь, изучающий информационный блок, может быть заинтересован также и другими блоками, если они содержат информацию, релевантную в некотором смысле. В связи с этим встает вопрос сравнения близости информационного содержания в некоторой понятийной плоскости.

В приведенном выше примере в качестве близкого информационного блока можно рассматривать определение слова *object*, как и перевод его на другие языки.

Однако, очевидной проблемой является тот факт, что два блока, близкие в одной плоскости, могут оказаться достаточно далекими в другой, и нет никакой возможности сравнивать (и упорядочивать) содержимое без явного сравнения каждой пары. На данный момент подобная проблема решается поисковыми системами путем построения полного индекса значимых терминов по базе документов и последовательному уточнению запроса с использованием специального языка манипуляции данными. Однако при таком подходе поисковая система должна обладать мощными инструментами работы с большими массивами данных (как правило, распределенной реляционной базой данных, хранящей информацию о документах и их содержимом), и при этом нет гарантии, что какая-либо (возможно, пертинентная) информация не останется за пределами пересечения (упомянутое выше определение слова «*object*» вместе с его переводом на другие языки).

6. Поиск по ключевым словам и построение индекса релевантности. Поиск по ключевым словам — самый распространенный на настоящий момент способ поиска нужной информации в сети Интернет при помощи поисковых машин.

Организация поиска по ключевым словам предполагает введение в поисковой строке определяющего запрос слова или группы слов, которые являются главными для искомого документа. Можно также использовать сложные запросы, использующие логические операции, шаблоны и т. д. Поиск по одному ключевому слову всегда производится однозначно (ключевое слово либо имеется в рассматриваемом тексте, либо отсутствует). При поиске же по нескольким ключевым словам возможны различные способы их комбинирования:

- (i) в искомом тексте присутствуют все заданные ключевые слова («и то, и другое»);
- (ii) в тексте имеется хотя бы одно из заданных ключевых слов («то или другое»);
- (iii) в тексте должно иметься одно ключевое слово, но обязательно должно отсутствовать другое («то, но не другое»);
- (iv) ключевые слова составляют фразу, которая обязательно должна присутствовать в тексте «как есть»; ключевые слова обязательно должны быть взаимосвязаны (т.е. располагаться близко друг от друга, например, во фразе могут быть разделены союзом или прилагательным).

Чтобы «объяснить» поисковой системе, как нужно понимать заданную последовательность ключевых слов, используется особый язык построения запросов. Принципы построения языка запросов, как правило, универсальны для большинства поисковых систем, но для иной системы язык запросов может иметь свои особенности.

Пример языка построения запросов в поисковой системе «Яндекс»:

- (a) заяц & кролик — поиск текстов, в которых есть оба заданных ключевых слова (и «заяц», и «кролик»);
- (b) заяц | кролик — поиск текстов, в которых имеется хотя бы одно из заданных ключевых слов («заяц» или «кролик»);
- (c) заяц – кролик — знак минуса перед словом «кролик» предписывает искать только такие тексты, в которых есть слово «заяц», но нет слова «кролик»;
- (d) заяц + кролик — знак плюса перед словом «кролик» предписывает искать только такие тексты, в которых есть слово «заяц» и обязательно есть слово «кролик».

Большинство современных поисковых систем являются «интеллектуальными» — при поиске учитываются все возможные формы (падежи, склонения, спряжения, единственное и множественное число) заданных ключевых слов. Например, при задании ключевого слова «заяц» поисковая система будет искать все варианты ключевых слов — «заяц», «зайца», «зайцами» и т. п.

Нашей задачей является построение такого индекса, который бы позволял сравнивать и упорядочивать информационные блоки без прямого сравнения каждой пары, что может привести к возможности настройки релевантности результата и демонстрации пользователю дополнительных, возможно, pertinentных результатов (см. [9]).

Замечание 3. Говоря «индекс», мы не подразумеваем индексы, которые используются в системах управления базами данных для ускорения поиска на физическом уровне организации данных. Технология построения таких индексов широко разработана и базируется на различных методах сортировки и поиска. Предлагаемый индекс позволяет не ускорить поиск, а добавить некоторый предопределенный (и возможно, полезный) смысл в результаты поиска.

Для построения такого индекса применимо обобщение *правила Паскаля*, используемое при построении V -пирамид с весовыми коэффициентами (1): элемент, стоящий ниже, является суммой трех элементов непосредственно над ним с некоторыми весами.

В вершине V -пирамиды разместим элемент, соответствующий ключевому понятию, на следующем, первом уровне — элементы, напрямую связанные с ключевым понятием, а в качестве весовых коэффициентов зададим релевантность по ключу. На втором уровне размещаются элементы, «связанные» с понятиями, которые сравниваются уже не с ключевым, а с понятиями первого уровня и т. д.

Для наглядности проиллюстрируем построение такого индекса на примере V -треугольника (2). Будем сопоставлять каждое ключевое слово с одним родительским и двумя дочерними. Оговоримся, что в данном случае количество дочерних слов выбрано лишь для примера, в реальной ситуации количество ветвей может быть от 0 (тупиковая ветвь) до некоторого конечного N . Полученному треугольнику, составленному из ключевых терминов $K_{i,j}$, сопоставим треугольник, составленный из коэффициентов $A_{i,j}$.

Коэффициенты $A_{i,j}$ определяются на этапе построения пирамиды для конечного множества ключевых слов $K_{i,j}$, коэффициенты релевантности определяются по некоторому, вообще говоря, произвольному алгоритму, который может быть как автоматизирован, так и исполняться с помощью человека-классификатора.

Рассмотрим примеры таких треугольников для заранее выбранного набора терминов. Множество ключевых слов K состоит из следующих элементов:

$$\begin{array}{ll} K_{0,0} = \text{«object»}, & K_{1,0} = \text{«object oriented programming»}, \\ K_{0,1} = \text{«object oriented databases»}, & K_{2,0} = \text{«programming»}, \\ K_{1,1} = \text{«DB4Objects»}, & K_{0,2} = \text{«relational databases»}, \\ K_{3,0} = \text{«Plain ANSI C language»}, & K_{2,1} = \text{«C++ language»}, \\ K_{1,2} = \text{«JDBC»}, & K_{0,3} = \text{«Oracle»}. \end{array}$$

Множество коэффициентов A состоит из следующих элементов:

$$\begin{array}{llllll} A_{0,0} = 1, & A_{1,0} = 1, & A_{0,1} = 1, & A_{2,0} = 0,5, & A_{1,1} = 1, \\ A_{0,2} = 0,5, & A_{3,0} = 1, & A_{2,1} = 1, & A_{1,2} = 0,5, & A_{0,3} = 1. \end{array}$$

Имея подобную структуру для заданного набора терминов, мы можем при отображении документов, содержащих тот или иной термин, используя весовые коэффициенты, отображать релевантные термины и документы с ними связанные. Связанность терминов можно оценивать согласно значениям, достигнутым при суммировании весовых коэффициентов при прохождении от вершины пирамиды коэффициентов.

Введем следующие обозначения: $V(n, k)$ — коэффициент релевантности; n — степень (уровень) удаленности от определяемого понятия (запроса); k — степень (частота, ранжирование) выраженности определяемого понятия (запроса); $\alpha_{n,k}$ — «стоимость» удовлетворительного (предполагаемого) ответа; $\beta_{n,k}$ — «стоимость» неудовлетворительного (не предполагаемого) ответа.

Замечание 4. Траектория $V(0, 0) \rightarrow V(n, k)$ иллюстрирует процесс получения ответа $V(n, k)$ на уточнение запроса $V(0, 0)$.

7. Частные случаи. Рассмотрим частные случаи обобщенного треугольника Паскаля. При этом будем предполагать, что $V(0, 0) = 1$.

Пусть $\alpha_{n,k} = 1$, $\beta_{n,k} = \mu_{n-1}$, $n = \overline{1, \infty}$, $k = \overline{0, n}$. В этом случае соотношение (2) примет вид

$$B_0^0 = 1; \quad B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \mu_{n-1} B_k^{n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (6)$$

Если же $\alpha_{n,k} = 1$, $\beta_{n,k} = \mu_k$, $n = \overline{1, \infty}$, $k = \overline{0, n}$, то из (2) имеем

$$A_0^0 = 1; \quad A_k^n = A_{k-1}^{n-1} + \mu_k A_k^{n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Числа B_k^n и A_k^n , удовлетворяющие рекуррентным соотношениям (6) и (7), называются *обобщенными числами Стирлинга* первого и второго рода соответственно.

Перейдем к рассмотрению частных случаев формирования индекса релевантности, допускающих описание при помощи обобщенных чисел Стирлинга, построенных на специальном образом нормированных базах (см. [6, 13]). Это те случаи, когда весовые коэффициенты зависят только от одного из двух своих индексов — параметров. Далее считаем $V(0, 0) = 1$.

7.1. Пусть условия, в которых осуществляется поиск, изменяются от запроса к запросу, но различия между итогами запросов таковы, что не влияют на весовые коэффициенты. Полагаем $\alpha_{n,k} = \alpha_n$, $\beta_{n,k} = \beta_n$, $n = \overline{1, \infty}$, $k = \overline{0, n}$. В этом случае из формулы (2) имеем:

$$V(n, k) = \alpha_n V(n-1, k-1) + \beta_n V(n-1, k), \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Считая, что в последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ все члены отличны от нуля, введем величины

$$B_0^0 = 1; \quad B_k^n = V(n, k) \prod_{i=1}^n \alpha_i^{-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Тогда

$$B_0^0 = 1; \quad B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \beta_n \alpha_n^{-1} B_k^{n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Сравнивая последнее соотношение с (6), видим, что после вышеуказанной нормировки значения индекса релевантности выражаются при помощи обобщенных чисел Стирлинга первого рода, построенных на базе $\{\beta_n \alpha_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$.

Может оказаться, что в последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ встречаются члены, равные нулю, но существует бесконечное множество членов, отличных от нуля. Тогда следует произвести объединение некоторых, расположенных подряд, этапов информационного поиска с целью получения эквивалентной схемы поиска, приводящей к тем же распределениям, но уже с коэффициентами $\tilde{\alpha}_m$, среди которых нет равных нулю. Заранее отметим, что при $\alpha_n = 0$ будем считать $\beta_n \neq 0$, так как в противном случае n -й этап привел бы к окончанию информационного поиска, и вопрос изучения индекса релевантности был бы исчерпан.

Переход к эквивалентной схеме поиска реализуется следующим образом. Из последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ выбираем, с сохранением порядка, подпоследовательность $\{\alpha_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ членов, отличных от нуля. К каждому новому этапу с номером m относим старые этапы с номерами от n_m до $n_{m+1} - 1$ включительно. На основании формул (2) заключаем, что коэффициенты «стоимости» на объединенном этапе с номером m выразятся через коэффициенты, соответствующие вошедшим в него старым этапам, следующим образом:

$$\tilde{\beta}_m = \beta_{n_m} \pi_m, \quad \tilde{\alpha}_m = \alpha_{n_m} \pi_m, \quad \pi_m = \prod_{i=n_m+1}^{n_{m+1}-1} \alpha_i.$$

Таким образом, новая последовательность $\{\tilde{\alpha}_m\}_{m=1}^{\infty}$ уже не содержит элементов, равных нулю.

Наконец, может оказаться, что в последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, начиная с некоторого $n = n_0$, все последующие члены равны нулю. Это означает, что, начиная с $n = n_0$, дальнейшая история поиска упрощенно описывается с учетом только коэффициентов β_n .

7.2. Пусть условия, в которых осуществляется поиск, при чередовании этапов остаются неизменным, но различия между итогами запросов влияют на весовые коэффициенты. Положим $\alpha_{n,k} = \alpha_k$, $\beta_{n,k} = \beta_k$, $n = \overline{1, \infty}$, $k = \overline{0, n}$. В этом случае из соотношения (2) имеем:

$$V(n, k) = \alpha_{k-1} V(n-1, k-1) + \beta_k V(n-1, k), \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Не нарушая общности рассмотрения, считаем, что в последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ все члены отличны от нуля. Введем обозначения

$$A_0^n = V(n, 0), \quad n = \overline{0, \infty}; \quad A_k^n = V(n, k) \prod_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Тогда

$$A_0^0 = 1; \quad A_k^n = A_{k-1}^{n-1} + \beta_k A_k^{n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Сравнивая последнее соотношение с (8), видим, что величины (8) являются обобщенными числами Стирлинга второго рода, построенными на базе $\{\beta_k\}_{k=0}^\infty$.

7.3. Рассмотрим случай, когда $\alpha_{n,k} = \alpha_k$, $\beta_{n,k} = \beta_n$, $n = \overline{1, \infty}$, $k = \overline{0, n-1}$. Тогда из выражения (2) имеем:

$$V(n, k) = \alpha_{k-1} V(n-1, k-1) + \beta_n V(n-1, k), \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (9)$$

Как и в предыдущем случае, полагаем, что в последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ все члены отличны от нуля. Введем обозначения

$$B_0^n = 1, \quad B = V(n, 0), \quad n = \overline{1, \infty}; \quad B_k^n = V(n, k) \prod_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{1, n},$$

С учетом этих обозначений соотношение (9) можно представить в виде

$$B_0^0 = 1; \quad B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \beta_n B_k^{n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Сравнивая последнее соотношение с (6), видим, что величины (9) являются обобщенными числами Стирлинга первого рода, построенными на базе $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$.

Таким образом, мы сконструировали индекс, который отображает долю релевантного материала и позволяет производить сравнения на множестве терминов, исходя из весовых коэффициентов терминов и путей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альсведе В., Вегенер И. Задачи поиска. — М.: Мир, 1982.
2. Балагура А. А., Кузьмин О. В. Обобщенная пирамида Паскаля и частично упорядоченные множества // Обозр. прикл. пром. мат. — 2007. — 14, № 1. — С. 88–91.
3. Бондаренко Б. А. Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фракталы, графы и приложения. — Ташкент: Фан, 1990.
4. Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982.
5. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных. — М.: Вильямс, 2001.
6. Докин В. Н. О треугольной схеме развития популяций // Исслед. геомагнет. аэроном. физ. Солнца. — 1975. — 41. — С. 104–106.
7. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978.
8. Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
9. Кузьмин О. В., Логинов Т. А. Построение индекса релевантности с помощью обобщенных пирамид Паскаля // Вестн. Бурят. ун-та. Сер. 13. Мат. Информ. — 2006. — № 3. — С. 40–45.
10. Кузьмин О. В., Серёгина М. В. Верхние отсечения обобщенной пирамиды Паскаля и их интерпретации // Ж. Сиб. фед. ун-та. Сер. мат. физ. — 2010. — 3, № 4. — С. 533–543.

11. Лебедев В. Б., Федотов Е. А. Моделирование данных информационных систем методами теории решеток// Изв. вузов. Поволж. рег. Сер. тех. науки. — 2015. — 3. — С. 104–110.
12. Месарович М., Мако Д., Такахага И. Теория иерархических многоуровневых систем. — М.: Мир, 1973.
13. Платонов М. Л., Докин В. Н. Треугольная схема развития популяций// Исслед. геомагнет. аэроном. физ. Солнца. — 1975. — 35. — С. 26–31.
14. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1993.
15. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990.
16. Туори Т., Фрай Дж. Проектирование структур баз данных. Кн. 1. — М.: Мир, 1985.
17. Balagura A. A., Kuzmin O. V. Generalized Pascal pyramids and their reciprocals// Discr. Math. Appl. — 2007. — 17. — P. 619–628.
18. Breiman L., Friedma J., Olshen R., Stone C. Classification and Regression Trees. — New York: Wadsworth Books, 1984.
19. Howland C. I. Computer simulation of thinking// Am. Psychologist. — 1960. — 15, № 11. — P. 687–693.
20. Hunt E. B., Janet M., J. S. Philip J. S. Experiments in Induction. — New York: Academic Press, 1966.
21. Kuzmin O. V. Generalized Pascal's pyramids and decision trees// Adv. Appl. Discr. Math. — 2022. — 34. — P. 1–15.
22. Kuzmin O. V., Balagura A. A., Kuzmina V. V., Khudonogov I. A. Partially ordered sets and combinatory objects of the pyramidal structure// Adv. Appl. Discr. Math. — 2019. — 20, № 2. — P. 219–236.
23. Kuzmin O. V., Khomenko A. P., Artyunin A. I. Discrete model of static loads distribution management on lattice structures// Adv. Appl. Discr. Math. — 2018. — 19, № 3. — P. 183–193.
24. Kuzmin O. V., Khomenko A. P., Artyunin A. I. Development of special mathematical software using combinatorial numbers and lattice structure analysis// Adv. Appl. Discr. Math. — 2018. — 19, № 3. — P. 229–242.
25. Kuzmin O. V., Seregina M. V. Plane sections of the generalized Pascal pyramid and their interpretations// Discr. Math. Appl. — 2010. — 20, № 4. — P. 377–389.
26. Lovász L. Combinatorial Problems and Exercises. — Budapest: Akadémiai Kiadó, 1979.
27. Murthy S. K. Automatic construction of decision trees from data: A multidisciplinary survey// Data Mining and Knowledge Discovery. — 1998. — 2. — С. 345–389.
28. Quinlan J. R. Induction of decision trees// Machine Learning. — 1986. — 1. — P. 81–106.
29. Quinlan J. R. C4.5: Programs for Machine learning. — San Mate: Morgan Kaufmann Publ., 1993.

Кузьмин Олег Викторович
 Иркутский государственный университет
 E-mail: quzminov@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 109–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-109-114

УДК 514.75

ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ ГЛАВНЫМИ КРИВИЗНАМИ В $(n + 1)$ -МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 г. Е. Ю. КУЗЬМИНА

Аннотация. Выяснены условия существования гиперповерхностей в $(n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве E^{n+1} , главные кривизны которых пропорциональны.

Ключевые слова: G -структура, дифференцируемое многообразие, структурная функция, тонкий веер, инициальная пара.

HYPERSURFACES WITH PROPORTIONAL PRINCIPAL CURVATURES IN $(n + 1)$ -DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

© 2023 E. YU. KUZMINA

ABSTRACT. In this paper, we find conditions of the existence of hypersurfaces in the $(n + 1)$ -dimensional Euclidean space E^{n+1} whose main curvatures are proportional.

Keywords and phrases: G -structure, differentiable manifold, structural function, thin fan, initial pair.

AMS Subject Classification: 53A07

1. Введение. Среди всех расслоений G -структуры, определяемые как редукции расслоения реперов $F(M)$ дифференцируемого многообразия M к линейной группе $G \subset GL(n)$, играют значительную роль в современной дифференциальной геометрии. Ш. Черн в [13] ввел понятие G -структуры и в обзорной статье [14] привел много задач из различных разделов дифференциальной геометрии, сводящихся к задачам теории G -структур. Отметим, что понятие G -структуры позволяет описывать большинство геометрических структур единым методом, однако общих теорем о G -структурах мало, причем ответить на некоторые вопросы, даже для конкретной группы Ли, достаточно трудно. Основные результаты по проблеме интегрируемости G структур получены С. Стернбергом [18] и В. Гийемином [15]. Более широкий класс h -плоских структур, используемых в теории контактных многообразий, исследовал Дж. Монна [17].

При рассмотрении автоморфизмов и локальных автоморфизмов геометрических структур выделяются различия между структурами конечного и бесконечного типов.

Для структуры конечного типа Стернбергом было показано (см. [18]), что группа автоморфизмов является группой Ли. Поэтому изучение транзитивных структур конечного типа сводится к задачам из геометрии однородных пространств группы Ли. При рассмотрении локально-транзитивных G -структур исследование сводится к изучению пар алгебр Ли (см. [3, 6]).

Одним из наиболее простых отображений, не имеющих обратного, является вложение, которое определяет пару структур. G -Структуры на подмногообразиях изучали многие авторы. Так, в [17] рассмотрена связь между контактными и симплектическими многообразиями. Часто приемы построения канонических или полуканонических реперов (см. [7, 8]) можно интерпретировать

в терминах теории пар структур, имеющих общую базу. В этом случае подструктура B_0 является редукцией G -структуры B к подгруппе $H \subset G$.

Важнейшим инвариантом геометрических G -структур является структурная функция, введенная Д. Бернардом в [12] и принимающая свои значения в пространстве когомологий Спенсера. Необходимым, а в инволютивном случае и достаточным условием интегрируемости G -структуры является обращение её в нуль. В случае унитарной структурной группы это условие позволяет выделить кэлеровы многообразия.

Однако интересные результаты можно получать только при постоянном значении структурной функции, что позволяет выделить лишь достаточно узкий класс локально транзитивных геометрических структур, не имеющих неголономного продолжения.

При обобщении понятия автоморфизма транзитивной структуры П. Я. Грушко получил в [2] более широкий класс сопряженно транзитивных структур, для которых структурная функция уже не является константой. Для этого класса построен новый инвариант G -структуры, называемый тонким веером, и приведен критерий однородности геометрической структуры. Отметим, что такие структуры устойчивы относительно операций расширения структурной группы и неголономного продолжения (см. [4]).

Понятие инициальной пары (см. [1]) позволяет рассматривать подмногообразия в теории G -структур и посредством обобщения тонкого веера геометрической структуры на пару G -структур (см. [9]) выделять сопряженно транзитивные подмногообразия в E^{n+1} . С гиперповерхностью M в $(n+1)$ -ерном евклидовом пространстве E^{n+1} можно связать такой канонический репер $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$, что вектор e_{n+1} в любой точке A гиперповерхности M направлен по нормали к поверхности, а векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ — по касательным к линиям кривизны, принятым за координатные линии.

Заметим, что n различных главных направлений в окрестности точки A однозначно определяется только в случае различных главных кривизн в этой точке (см., например, [16]), поэтому предполагаем, что в каждой точке гиперповерхности M значения главных кривизн различны между собой. Через B_0 обозначим множество таких реперов во всех точках гиперповерхности M . Через $\mathcal{B}$ обозначим риманову структуру в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве E^{n+1} . Очевидно, $B_0 \subset \mathcal{B}$ — инициальная пара, для которой структурная функция сводится к инвариантам канонического репера.

В [7] приведено построение тонкого веера для гиперповерхностей, на которых можно задать канонический репер, и показано, что он существует только для поверхностей малых размерностей ($\dim E^{n+1} \leq 3$). Веер первого порядка существует для гиперповерхностей с постоянными значениями инвариантов канонического репера и гиперповерхностей с пропорциональными между собой инвариантами канонического репера. Поверхностями, обладающими тонким веером, являются окружность и логарифмическая спираль в E^2 , цилиндр, конус и цилиндрическая поверхность, образующая которой — логарифмическая спираль в E^3 (см. [16]).

В [7] найдены условия существования гиперповерхностей в евклидовом пространстве E^{n+1} , главные кривизны которых постоянны (в предположении, что все главные кривизны различны между собой). Классификация гиперповерхностей с постоянными главными кривизнами в евклидовом пространстве V^{n+1} приводит к задаче описания представлений V компактных групп Ли G и векторов $v \in V$ с единичными стационарными подгруппами (см. [9, 16]). В данной работе приведены условия существования в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве гиперповерхностей, главные кривизны которых пропорциональны (см. [8]).

2. Построение тонкого веера в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве E^{n+1} . Большинство свойств сопряженно-транзитивных пар геометрических структур нелегко сформулировать без большой подготовки и определений. Далее необходимые понятия и обозначения будем приводить по ходу изложения.

Морфизм $\{k, l, f\}$ геометрической структуры $\mathcal{B}_1$ в геометрическую структуру $\mathcal{B}_2$ задается гомоморфизмом $k: G_1 \rightarrow G_2$ структурных групп Ли, линейным отображением $l: V_1 \rightarrow V_2$ векторных пространств и гладким отображением $f: B_1 \rightarrow B_2$ пространств, причем

$$l g v = k g \cdot l v, \quad f R_g b = R_{k g} f b, \quad l \omega_1 = \omega_2 f^*.$$

Морфизм структуры $\mathcal{B}$ в себя называется сопряженным автоморфизмом, если он обратим.

Если l — вложение, то морфизм называется инициальной парой.

Сопряженным автоморфизмом инициальной пары структур $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ называется сопряженный автоморфизм структуры $\mathcal{B}$ в себя, сохраняющий подструктуру $\mathcal{B}_0$.

Пара структур $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ называется сопряженно транзитивной, если структура $\mathcal{B}$ сопряженно транзитивна и группа сопряженных автоморфизмов пары структур транзитивна на пространстве структуры $\mathcal{B}_0$.

В [2] введен новый инвариант пары геометрических структур — тонкий веер, в терминах которого сформулирован критерий эквивалентности сопряженно транзитивных пар.

Через $\text{Aut } V$ будем обозначать группу всех линейных автоморфизмов векторного пространства V , а N — группу его автоморфизмов, $H \subset N \subset \text{Aut } V$. Пусть R_g — правое действие элемента $g \in G$ на некотором многообразии, G — нормальный делитель в N , TB — касательное расслоение многообразия, $\overline{H}^{2,-1}(V, \hat{G}; V_0, \hat{G}_0)$ — относительные когомологии Спенсера (см. [5]).

Футляром $\Phi = \{V, N, H, G, W, Z\}$ называется набор, состоящих из векторного пространства V и таких подгрупп Ли N, H, G, W, Z в $\text{Aut } V$, что

$$Z = H \cap G, \quad H \subset G, \quad W = H \cdot G,$$

причем G — нормальный делитель в N . Подгруппы Ли N, H, G, W, Z называются соответственно фундаментальной, структурной, вспомогательной и основной группами футляра Φ .

Пусть $\Phi = \{V, N, H, G, W, Z\}$ — произвольный футляр, а футляр $\Phi_0 = \{V_0, N_0, H_0, G_0, W_0, Z_0\}$ таков, что $\Phi_0 \subset \Phi$, т.е. $V_0 \subset V, N_0 \subset N, \overline{H} \subset H, W_0 \subset W, Z_0 \subset Z$.

Через Λ будем обозначать мультипликативную группу скалярных ненулевых матриц.

Пусть $\overline{Q} \in \Lambda^2 V^* \otimes V$. Через $\overline{\Lambda}^2 V^* \otimes V$ будем обозначать такое пространство $\Lambda^2 V^* \otimes V$, что $\overline{Q}(V_0, V_0) \subset V_0$; кроме того, положим

$$\overline{V^* \otimes \hat{N}} = \left\{ \delta \in V^* \otimes \hat{N} \mid \delta V_0 \subset \hat{N}_0 B \right\}.$$

Определим действие коммутативной группы Ли $\overline{V^* \otimes \hat{N}}$ на прямом произведении

$$\left(\overline{V^* \otimes \hat{N}} \right) \times \overline{H}^{2,-1}(V, \hat{Z}; V_0, \hat{Z}_0).$$

Положим

$$(\gamma \circ \overline{\Gamma})(v) = \gamma v + \overline{\Gamma} v, \quad \gamma \in \overline{V^* \otimes \hat{W}}, \quad v \in V, \quad \overline{\Gamma} \in \overline{V^* \otimes \hat{N}}.$$

Далее, выберем такие линейные отображения $r : \hat{W} \rightarrow \hat{G}$ и $r_0 : \hat{W}_0 \rightarrow \hat{G}_0$, что $r|_{\hat{G}} = \text{id}$, $r_0|_{\hat{G}_0} = \text{id}$.

Пусть Δ — некоторое дополнение до V к V_0 , т.е. $V = V_0 + \Delta$. Тогда определены естественные проекции $\pi : V_0 \rightarrow V$, $\pi_0 : V \rightarrow \Delta$, обладающие свойством $v = \pi_0 v + \pi v$, где $v \in V$. Положим

$$\rho\gamma = r_0\gamma\pi_0 + r\gamma\pi.$$

Таким образом, $\rho\gamma : V \rightarrow \hat{G}$ — такое линейное отображение, что $\rho\gamma(V_0) \subset \hat{G}_0$.

Пусть $\overline{\Lambda}^2 V^* \otimes V \rightarrow \overline{H}^{2,-1}(V, \hat{Z}; V_0, \hat{Z}_0)$ — естественная проекция. Определим действие группы Ли $\overline{V^* \otimes \hat{W}}$ на относительных гомологиях Спенсера $\overline{H}^{2,-1}(V, \hat{Z}; V_0, \hat{Z}_0)$ следующим образом: если

$$\gamma \in \overline{V^* \otimes \hat{W}}, \quad \Pi\overline{Q} \in \overline{H}^{2,-1}(V, \hat{Z}; V_0, \hat{Z}_0), \quad \overline{Q} \in \overline{\Lambda}^2 V^* \otimes V$$

— представитель $\Pi\overline{Q}$, то

$$\gamma \circ \Pi\overline{Q} = \Pi(\gamma \circ \Pi\overline{Q}),$$

где

$$(\gamma \circ \overline{Q})(v_1, v_2) = \overline{Q}(v_1, v_2) - \partial(\rho\gamma)(\gamma \circ \overline{Q})(v_1, v_2).$$

Относительным веером $\overline{\varphi}$ называется всякая орбита коммутативной группы Ли

$$\overline{V^* \otimes \hat{W}} = \left\{ \gamma : V \rightarrow \hat{W} \mid \gamma V_0 \subset \hat{W}_0 \right\}$$

на прямом произведении $\left(\overline{V^* \otimes \hat{N}} \right) \times \overline{H}^{2,-1}(V, \hat{Z}; V_0, \hat{Z}_0)$, где $\overline{H}^{2,-1}(V, \hat{Z}; V_0, \hat{Z}_0)$ — относительные гомологии Спенсера (см. [5]).

Предположим теперь, что дана инициальная пара G -структур $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$. Пусть $\bar{c}$ — структурная функция инициальной пары $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$. Также будем считать, что для структуры $\mathcal{B}$ существует тонкий веер φ^∞ (см. [2]).

Пусть N, N_0 — такие подгруппы Ли в $\text{Aut } V$, что

$$G \subset N \subset N(G), \quad G_0 \subset N_0 \subset N(G)_0 \cap N(G), \quad N_0 V_0 \subset V_0,$$

причем значения структурной функции $\bar{c}$ пары содержатся в некоторой орбите группы N_0 . Зафиксируем точку $b_0 \in B_0$; пусть $\bar{H} = \{g \in N_0 \mid c(b)^g = c(b)\}$ — стационарная подгруппа в N элемента $c(b)$. Выберем такое отображение $a : U_b \rightarrow N$ окрестности U_b точки b в группу N , что

$$\begin{aligned} aB_0 &\subset N_0, \quad a(b) = 1, \\ R_g U_b &= U_b, \quad a(R_g b) = g^{-1} a(b), \quad g \in G, \quad x \in U_b, \\ \bar{c}(b) &= \bar{c}(b_0)^{a(b)}, \quad x \in U_b \cap B_0, \\ c(b) &= c(b_0)^{a(b)}, \quad x \in U_b. \end{aligned}$$

Если $\tilde{a}$ — другое такое отображение, то

$$\tilde{a}(x) = a(x) \cdot h(x),$$

где $h : U_b \rightarrow H$, причем $h(U_b \cap B_0) \subset \bar{H}$ и

$$h(b) = 1, \quad h(R_g b) = h(bx), \quad g \in G, \quad x \in U_b.$$

Если $\bar{H} \subset H$ — стационарная подгруппа в N_0 значения структурной функции пары $\bar{C}$ в точке b_0 , то пара $(\bar{\Gamma}, \bar{Q})$, удовлетворяющая условию

$$\bar{\Gamma}v = a^*sv, \quad \bar{Q}(v_1, v_2) = -d\omega(sv_1, sv_2), \quad v, v_1, v_2 \in V,$$

где s — горизонтальная площадка в точке b_0 , является веером $\bar{\varphi}(b_0)$, называемым веером первого приближения инициальной пары $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ в точке $b_0 \in B_0$; при этом $(\bar{\Gamma}, \bar{Q})$ называется представителем веера $\bar{\varphi}(b_0)$.

Определим веер k -го приближения по индукции. Пусть значения веера k -го приближения $\bar{\varphi}_k$ содержится в орбите N_0 так, что существует такое отображение a_k окрестности заданной точки $b_0 \in B_0$ в группу N , что

$$\begin{aligned} a(b_0) &= 1, \quad a_k(R_g b) = g^{-1} a_k(b), \quad a_k B_0 \subset N_0, \\ \bar{\varphi}_k(b) &= \bar{\varphi}_k(b_0)^{a_k(b)}, \quad \varphi_k(b) = \varphi_k(b_0)^{a_k(b)}. \end{aligned}$$

Пусть $\bar{H}_{k+1}(b_0) \subset \bar{H}_{k+1}(b)$ — стационарная подгруппа $\bar{\varphi}_k(b)$; тогда

$$\bar{\Gamma}_{k+1}(v) = a_k^*sv, \quad \bar{Q}_{k+1}(v_1, v_2) = -d\omega(sv_1, sv_2), \quad v, v_1, v_2 \in V,$$

является представителем веера $(k+1)$ -го приближения $\varphi_{k+1}(b_0)$ в точке b_0 . Результат стабилизации

$$\bar{\varphi}_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_k(b_0)$$

называется тонким веером.

Следующее утверждение дает критерий эквивалентности пар геометрических структур.

Теорема 1. Пусть структуры $\mathcal{B}_1 = \{B_1, \omega_1\}$, $\mathcal{B}_2 = \{B_2, \omega_2\}$ имеют тонкие веера φ_1 и φ_2 . Пусть пары структур $B_{01} \subset \mathcal{B}_1$, $B_{02} \subset \mathcal{B}_2$ с отмеченными точками $b_1 \in B_{01}$, $b_2 \in B_{02}$ имеют тонкие веера $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$. Пусть $l : V_1 \rightarrow V_2$ — такой изоморфизм, что

$$lV_{01} \subset V_{02}, \quad Jnt_l G_1 = G_2, \quad Jnt_l G_{01} = G_{02}$$

и

$$\forall x \in B_1 \exists z \in B_2 : \varphi_1(x)^l = \varphi_2(z), \quad \forall x \in B_{01} \exists z \in B_{02} : \bar{\varphi}_1(x)^l = \bar{\varphi}_2(z),$$

причем $\varphi_1(b_1)^l = \varphi_2(b_2)$, $\bar{\varphi}_1(b_1)^l = \bar{\varphi}_2(b_2)$.

Если алгебры Ли $\hat{Z}_1, \hat{Z}_{01}$ инволютивны и V_{01} включено в квазирегулярный флаг в V_1 , то существует такой локальный изоморфизм $\{k, \tilde{l}, f\}$ пары структур $B_{01} \subset \mathcal{B}_1$ в пару структур $B_{02} \subset \mathcal{B}_2$, что $fb_1 = b_2$, $\tilde{l} = l$.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 3 работы [2].

В [7] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Для гиперповерхностей в E^{n+1} , $n \geq 2$, тонкий веер существует в случае либо постоянных главных (различных между собой) кривизн, либо главных кривизн, пропорциональных между собой.*

3. Существование гиперповерхностей с пропорциональными главными кривизнами в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве E^{n+1} . Выясним, существуют ли такие поверхности, главные кривизны которых пропорциональны (в предположении, что все главные кривизны различны между собой). Рассмотрим в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве E^{n+1} структуру

$$\mathcal{B} = o(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^1.$$

Уравнения структуры n -мерной поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ запишем в виде

$$d\mathbf{r} = \omega^i \mathbf{e}_i, \quad d\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j, \quad j, i = \overline{1, n+1},$$

где $\omega_i^j = c_{ik}^j \lambda \omega^k$. Считаем c_{ik}^j постоянными, $\lambda = \lambda(x) \in \mathbb{R}^1$. На многообразии B рассмотрим дифференциальную систему

$$\omega^{n+1} = 0, \quad \omega_i^j = c_{ik}^j \lambda \omega^k. \quad (1)$$

Замыкание дифференциальной системы (1) дает еще два уравнения:

$$\omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^{n+1} = 0, \quad \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j = c_{ik}^j d\lambda \wedge \omega^k + c_{ik}^j d\lambda \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^k, \quad (2)$$

или

$$\omega_i^\alpha \wedge c_{\alpha\beta}^{n+1} \lambda \omega^\beta = 0, \quad c_{i\beta}^\alpha c_{\alpha\gamma}^j \lambda^2 \omega^\beta \wedge \omega^\gamma = c_{i\gamma}^j \lambda \omega^\tau \wedge \omega^k + c_{ik}^j c_{\alpha\beta}^k \lambda^2 \omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad d\lambda = \lambda_\tau \omega^\tau, \quad \tau = \overline{1, n}.$$

Следовательно, $c_{\alpha\beta}^{n+1}$ симметричны по $\alpha, \beta \leq n$ и

$$\lambda^2 [c_{i\beta}^\alpha c_{\alpha\gamma}^j - c_{i\gamma}^\alpha c_{\alpha\beta}^j] = (\lambda_\beta c_{ij}^j - \lambda_\gamma c_{i\beta}^j) + \lambda^2 c_{ik}^j (c_{\beta\gamma}^k - c_{\gamma\beta}^k)$$

— условия, получающиеся при приравнивании коэффициентов при $\omega^\beta \wedge \omega^\gamma$.

Всякий n -мерный интегральный элемент, проектирующийся изоморфно на подпространство V_0 , натянутое на векторы $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n\}$, имеет вид

$$E = \left\{ s(v + lv) + j_b \gamma v + \mu u \mid v \in V_0; \gamma \in V_0^* \otimes \hat{G}, \mu : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^1 \right\},$$

где l_v — подпространство, ортогональное к V_0 . Из уравнений (1)–(2) следует, что

$$l = 0, \quad \gamma_i^j(v) = c_{ik}^j \lambda v^k$$

и

$$\lambda^2 [c_{ip}^\alpha c_{\alpha q}^j - c_{iq}^\alpha c_{\alpha p}^j] = \mu(e_p) c_{iq}^j - \mu(e_q) c_{ip}^j + \lambda^2 c_{ik}^j (c_{pq}^k - c_{qp}^k), \quad (3)$$

где $\mu(e_p) = \lambda_p$, $\mu(e_q) = \lambda_q$. Равенство (3) можно переписать в виде

$$\lambda^2(x) ([\Gamma e_p, \Gamma e_q] - \Gamma(\Gamma e_p e_q - \Gamma e_q e_p)) = \mu(e_p) \Gamma e_q - \mu(e_q) \Gamma e_p.$$

При таких условиях элемент будет интегральным и определяется однозначно, если

$$\tilde{\mu}(\tilde{E}_p) \Gamma e_q - \tilde{\mu}(\tilde{E}_q) \Gamma e_p = 0.$$

Если Γe_i фиксирован, то определим произвол отображения μ . Пусть $\tilde{\mu}(\tilde{E}_p)$, $\tilde{\mu}(\tilde{E}_q)$ — тоже значения отображения μ в точке x . Тогда

$$[\mu(e_p) - \tilde{\mu}(e_q)] \Gamma e_q - [\mu(e_q) - \tilde{\mu}(e_p)] \Gamma e_p = 0.$$

В общем случае при различных Γe_i имеем

$$\mu(\tilde{E}_p) = \tilde{\mu}(\tilde{E}_p); \quad \mu(\tilde{E}_q) = \tilde{\mu}(\tilde{E}_q),$$

т.е. $\mu = \tilde{\mu}$. Следовательно, интегральный элемент E определяется однозначно и размерность расслоения таких интегральных элементов равна $\dim B$.

Выберем теперь в точке $b \in B$ конкретный интегральный элемент

$$E_0 = \left\{ su + j_b \gamma_0 u + \mu_0 u \mid u \in V_0 \right\}.$$

Пусть $\{U_i \subset V_0\}$ — квазирегулярный флаг, $\dim U_i = i$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогда полярный к $E(U_p)$ элемент H_p имеет вид

$$H_p = \left\{ (sw + \tau + v) \right\}, \quad w \in V_0, \quad \tau \in \hat{G} = o(n+1), \quad v \in \mathbb{R}^1.$$

Подставляя H_p в систему уравнений (2), получаем $w \in V_0$,

$$\tau_i^j = \lambda(x) c_{ik}^j \omega^k; \quad v \Gamma e_q = \mu(e_p) \tau.$$

Если $q = p$, то $v = \mu$ и $\Gamma e_p = \tau$; если $p \neq q$, то τ пропорционально Γe_p .

Условие ординарности элемента E_0 выполняется; следовательно, согласно теореме Картана—Кэлера, существует интегральное подмногообразие размерности n , проходящее через точку b , с касательной плоскостью E_0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грушко П. Я. Морфизмы геометрических структур // Мат. заметки. — 1977. — 22, № 5. — С. 844–849.
2. Грушко П. Я. О проблеме сопряженной эквивалентности Картана // Сиб. мат. ж. — 1981. — 22, № 1. — С. 68–80.
3. Грушко П. Я. Сопряженно транзитивные структуры конечного типа // Изв. вузов. Мат. — 1981. — № 2. — С. 24–29.
4. Грушко П. Я. Сопряженно транзитивные структуры // Сиб. мат. ж. — 1983. — 24, № 1. — С. 68–78.
5. Грушко П. Я. Теорема Бонне для геометрических структур // Мат. заметки. — 1981. — 29, № 2. — С. 253–264.
6. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.
7. Кузьмина Е. Ю. Гиперповерхности с постоянными главными кривизнами в евклидовом пространстве V^{n+1} // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — 214. — С. 76–81.
8. Кузьмина Е. Ю. Гиперповерхности с пропорциональными главными кривизнами в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве // Мат. 4 Междунар. конф. «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (Иркутск, 19-23 сентября 2022). — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2022. — С. 133–135.
9. Кузьмина Е. Ю. Некоторые примеры пар геометрических структур в классической дифференциальной геометрии. — Деп. в ВИНТИ №4752-84.
10. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1953. — 2. — С. 275–382.
11. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.
12. Bernard D. Sur la geometrie differentielle des G -structures // Ann. Inst. Fourier. — 1960. — 10. — P. 153–273.
13. Chern S. S. Pseudo-groupes continus infinis // Colloq. Int. C.N.R.S. — 1953. — 10. — P. 119–136.
14. Chern S. S. The geometry of G -structures // Bull. Am. Math. Soc. — 1966. — 72. — P. 167–219.
15. Guillemin V. The integrability problem for G -structures // Trans. Am. Math. Soc. — 1965. — 116. — P. 544–560.
16. Kuzmina E. Yu. Representations of simple Lie algebras with vectors having a zero stationary subalgebra // J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 1847: 012031.
17. Monna G. Integrabilite des structures de presque contact // Compt. Rend. Acad. Sci. — 291. — P. 215–217.
18. Singer I. M., Sternberg S. The infinite groups of Lie and Cartan. Part 1. The transitive groups // J. Anal. Math. — 1965. — 15. — P. 1–114.

Кузьмина Елена Юрьевна
Иркутский государственный университет
E-mail: quzminov@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 115–124
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-115-124

УДК 517.958; 629.7.052

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. V

© 2023 г. В. М. МОРОЗОВ, В. И. КАЛЕНОВА, М. Г. РАК

Аннотация. Рассматриваются задачи стабилизации стационарных движений (положений равновесия и регулярных прецессий) спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях в предположении, что центр масс движется по круговой орбите. Предложены решения ряда задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных систем. Представлены результаты математического моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики. Настоящая статья является заключительной частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 71–85. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 221. — С. 71–92. Третья часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 222. — С. 42–63. Четвертая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 223. — С. 84–106.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, приводимость, стационарные движения, линеаризованные уравнения движений спутника, стабилизация, управляемость, алгоритмы управления.

STABILIZATION OF STATIONARY MOTIONS OF A SATELLITE NEAR THE CENTER OF MASS IN A GEOMAGNETIC FIELD. V

© 2023 V. M. MOROZOV, V. I. KALENOVA, M. G. RAK

ABSTRACT. In this paper, we consider problems of stabilization of stationary motions (equilibrium positions and regular precessions) of a satellite near the center of mass in gravitational and magnetic fields under the assumption that the center of mass moves in a circular orbit. Solutions for a number of problems of stabilizing stationary motions of a satellite with the help of magnetic systems are proposed. We present the results of mathematical modeling of the algorithms, which confirm the effectiveness of the developed methodology. This paper is the final part of the work. The first part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 220. — P. 71–85. The second part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 221. — P. 71–92. The third part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 222. — P. 42–63. The fourth part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 223. — P. 84–106.

Keywords and phrases: linear nonstationary system, reducibility, stationary motions, linearized equations of satellite motions, stabilization, controllability, control algorithms.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 3. Стабилизация стационарных движений спутника в геомагнитном поле	116
3.5. Определение ориентации спутника по измерениям магнитометров	116
3.6. Приложение	118
Заключение	121
Список литературы	121

ГЛАВА 3

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА
В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ СПУТНИКА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ МАГНИТОМЕТРОВ

Рассмотрим кратко задачу определения ориентации спутника по измерениям, доставляемым магнитометром. Центр масс спутника движется по круговой орбите. Как уже указывалось в гл. 1, для работы магнитных систем ориентации и стабилизации спутников требуется информация об угловом движении спутника. Эту информацию доставляют магнитометры, измеряющие магнитное поле Земли в связанной со спутником системе координат.

Модель измерений магнитометра, представленная в гл. 1, имеет вид (1.1.9), а в линеаризованном виде (1.1.17).

Одной из классических ранних работ по ориентации спутника является книга J. Werz [76]. Использование фильтра Калмана для определения ориентации спутника по измерениям магнитометра рассмотрено в [66, 67, 70, 75]. Краткий обзор методов определения ориентации спутников, использующих магнитометры, содержится в [70].

1. Исследуем наблюдаемость линеаризованных в окрестности положения равновесия (1.1.10) уравнений движения (1.1.14) по результатам измерений магнитометра (1.1.17).

Линеаризованные уравнения движения (3.1.1) при и уравнения измерений имеют вид (множитель μ_0 опускается)

$$\ddot{x}_1 - d_1 \dot{x}_3 - \kappa_1 x_1 = 0, \quad \ddot{x}_3 + d_3 \dot{x}_1 - \kappa_3 x_3 = 0, \quad (3.5.1)$$

$$\ddot{x}_2 - \kappa_2 x_2 = 0, \quad (3.5.2)$$

$$\sigma_1 = 2x_2 s I s \tau + x_3 c I, \quad \sigma_2 = -2x_1 s I s \tau + x_3 s I c \tau, \quad \sigma_3 = -x_1 c I - x_2 s I c \tau. \quad (3.5.3)$$

Здесь

$$d_1 = \frac{d}{J_1}, \quad d_3 = \frac{d}{J_3}, \quad d = J_2 - J_1 - J_3;$$

$$\kappa_1 = 4 \frac{J_3 - J_2}{J_1}, \quad \kappa_2 = 3 \frac{J_3 - J_1}{J_2}, \quad \kappa_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}.$$

Среди измерений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ только 2 независимых. Если орбита экваториальная ($\sin I = 0$), то из формул (3.5.3) следует, что измерения имеют вид $\sigma_1 = x_3 c I, \sigma_2 \equiv 0, \sigma_3 = -x_1 c I$, т. е. переменная x_2 не наблюдаема.

Далее будем считать, что $\sin I \neq 0$.

Представим систему (3.5.1) с измерением $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2 / s I$ в форме Коши

$$\dot{\xi}^{(1)} = A \xi^{(1)}, \quad \xi^{(1)} = [x_1 \ x_3 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_3]^\top, \quad \bar{\sigma}_2 = C(\tau) \xi^{(1)}, \quad (3.5.4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \kappa_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & \kappa_3 & -d_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(\tau) = [-2s\tau \quad c\tau \quad 0 \quad 0].$$

Система (3.5.4), согласно критерию наблюдаемости (см. гл. 2, § 1.1), наблюдаема, если можно указать такую точку τ^* , в которой

$$\text{rank } W(\tau^*) = 4 \quad (\det W(\tau^*) \neq 0). \quad (3.5.5)$$

Здесь

$$W(\tau) = \begin{bmatrix} 2s\tau & 2c\tau & 2(\kappa_1 - 1)s\tau & l_{14}c\tau \\ -c\tau & s\tau & (1 - \kappa_3)c\tau & l_{24}s\tau \\ 0 & 2s\tau & (4 + d_3)c\tau & l_{34}s\tau \\ 0 & -c\tau & 2(1 + d_1)s\tau & l_{44}c\tau \end{bmatrix}$$

$$l_{14} = 6\kappa_1 + \kappa_1 d_3 - 2, \quad l_{24} = 3\kappa_3 + 2\kappa_3 d_1 - 1,$$

$$l_{34} = 2\kappa_1 - 2d_1 d_3 - 3d_3 - 6, \quad l_{44} = -\kappa_3 + d_1 d_3 + 6d_1 + 3.$$

Представим выражение $\det W(\tau)$ в виде

$$\det W = N_1(s\tau)^4 + N_2(s\tau)^2(c\tau)^2 + N_3(c\tau)^4,$$

$$N_1 = 4(d_1 + 1)(2l_{24} - l_{34}), \quad N_3 = (d_3 + 4)(2l_{44} + l_{14}).$$

Достаточно показать, что коэффициенты N_1, N_3 одновременно в ноль не обращаются ни при каких значениях моментов инерции спутника. Это означает, что система (3.5.4) наблюдаема, т. е. наблюдаются переменные $x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3$. Тогда переменные x_1, x_3 можно считать известными, и для анализа наблюдаемости системы (3.5.2) достаточно рассматривать модифицированное уравнение измерений

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 - cI(x_3 s\tau + 2x_1 c\tau) = 2x_2 sI.$$

Отсюда следует наблюдаемость системы (3.5.2) по измерению $\bar{\sigma}_1$.

Таким образом, система (3.5.1), (3.5.2) по измерениям магнитометра (3.5.3) наблюдаема при любых значениях моментов инерции, если орбита не является экваториальной.

2. Следуя методу, изложенному в главе 2, для решения задачи оценивания состояния системы (3.5.1), (3.5.2) по нестационарным измерениям (3.5.3) необходимо привести ее к стационарному виду и исследовать наблюдаемость.

Будем считать, что орбита спутника не является ни экваториальной, ни полярной $I \neq 0, I \neq \pi/2$, и рассмотрим измерения σ_1, σ_3 .

Введем замену переменных

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_2 \cos \tau, \quad y_4 = x_2 \sin \tau. \quad (3.5.6)$$

Переменные $y_1, \dots, y_4$ подчиняются стационарной системе уравнений 8-го порядка

$$\ddot{y}_1 - d_1 \dot{y}_2 - \kappa_1 y_1 = 0, \quad \ddot{y}_2 + d_3 \dot{y}_1 - \kappa_3 y_2 = 0, \quad \ddot{y}_3 + 2\dot{y}_4 - \bar{\kappa}_2 y_3 = 0, \quad \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_3 - \bar{\kappa}_2 y_4 = 0, \quad (3.5.7)$$

где

$$\sigma_1 = 2y_4 sI + y_2 cI, \quad \sigma_3 = y_1 cI + y_3 sI. \quad (3.5.8)$$

Система (3.5.7), (3.5.8) наблюдаема тогда и только тогда, когда [50]

$$\text{rank } W_y(\lambda) = 4 \quad \forall \lambda, \quad (3.5.9)$$

$$W_y(\lambda) = \begin{bmatrix} W_1 & O_2 \\ O_2 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} \lambda^2 - \kappa_1 & -d_1 \lambda \\ d_3 \lambda & \lambda^2 - \kappa_3 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 - \bar{\kappa}_2 & 2\lambda \\ -2\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_2 \end{bmatrix},$$

$$W_3 = E_2 cI, \quad W_4 = sI \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Условие наблюдаемости (3.5.9) выполняется, если хотя бы одно из выражений Δ_j не обращается в ноль:

$$\Delta_1 = 2(sI)^2[(\lambda^2 - \kappa_1)(\lambda^2 - \kappa_3) + d_1 d_3 \lambda^2],$$

$$\Delta_2 = 2sIcI\lambda[\lambda^2 - \kappa_1 + d_1(\lambda^2 - \bar{\kappa}_2)],$$

$$\Delta_3 = sIcI[-(\lambda^2 - \kappa_1)(\lambda^2 - \bar{\kappa}_2) + 4d_1 \lambda^2],$$

$$\begin{aligned}\Delta_4 &= 2sICl[(\lambda^2 - \kappa_3)(\lambda^2 - \bar{\kappa}_2) - d_3\lambda^2], \\ \Delta_5 &= sICl\lambda[4(\lambda^2 - \kappa_3) + d_3(\lambda^2 - \bar{\kappa}_2)], \\ \Delta_6 &= (cI)^2[4\lambda^2 + (\lambda^2 - \bar{\kappa}_2)^2].\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение системы (3.5.7) имеет корни $\lambda_{1,2} = 0$ при $\bar{\kappa}_2 = 0$. Тогда

$$\Delta_1 = \kappa_1\kappa_3, \quad \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0.$$

Отсюда следует, что система (3.5.7) не наблюдаема по измерениям (3.5.8), если выполняются условия

$$\bar{\kappa}_2 = 0, \quad \kappa_1 = 0 \quad \text{либо} \quad \bar{\kappa}_2 = 0, \quad \kappa_3 = 0.$$

или

$$J_2 = J_3, \quad J_1 = \frac{4}{3}J_3 \quad \text{либо} \quad J_1 = J_2, \quad J_3 = \frac{2}{3}J_1. \quad (3.5.10)$$

Можно показать, что в этих случаях исходная нестационарная система (3.5.1)–(3.5.3) наблюдаема.

Для построения алгоритма оценки следует представить стационарную систему (3.5.7), (3.5.8) в форме Коши

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_\eta \eta, \quad \sigma = C_\eta \eta, \quad \eta = [y_1 \ y_2 \ \dot{y}_1 \ \dot{y}_2 \ y_3 \ y_4 \ \dot{y}_3 \ \dot{y}_4]^\top, \\ A_\eta &= \begin{bmatrix} O_2 & E_2 & O_2 & O_2 \\ A_{21} & A_{22} & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & A_{33} & E_2 \\ O_2 & O_2 & \kappa_2 E_2 & A_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ -d_3 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{33} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_\eta = [cIE_2 \ O_2 \ sIC_3 \ O_2], \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.\end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Если стационарная система (3.5.11) наблюдаема, то можно строить те или иные алгоритмы оценивания аналогично тому, как это делалось в задачах управления.

3.6. ПРИЛОЖЕНИЕ

3.6.1. Приложение 1. В работе принята приближенная модель магнитного поля Земли в виде прямого магнитного диполя (1.1.8). Как уже указывалось в главе 1, такая аппроксимация пригодна для аналитических исследований и является традиционной. В действительности структура магнитного поля Земли (МПЗ) значительно сложнее. МПЗ имеет мультипольный характер и, кроме того, совершает суточное вращение вместе с Землей. Такие мультипольные модели МПЗ представлены в литературе [5, 37, 39, 59, 60].

Покажем, что применяемый в работе подход к исследованию линейных систем, нестационарных по управлению, описанный в главе 3, где использовалась простая модель МПЗ (1.1.8), может быть использован и при исследовании задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных моментов и в случае более сложной модели магнитного поля [39].

В соответствие с работой [39] рассмотрим движение спутника, центр масс которого движется по круговой экваториальной орбите радиуса R . Пусть $\mathbf{V}_c = R(\omega_0 - \omega_E)\mathbf{e}_\tau$ — скорость центра масс спутника относительно магнитного поля. Здесь ω_0 — орбитальная угловая скорость, ω_E — угловая скорость суточного вращения Земли.

Компоненты вектора магнитной индукции $\mathbf{b}(t)$ в орбитальной системе координат имеют вид [37]

$$\begin{aligned}b_\tau &= \left(\frac{R_E}{R}\right)^3 (g_1^1 s\tau - h_1^1 c\tau) + \sqrt{3} \left(\frac{R_E}{R}\right)^4 (g_2^2 s2\tau - h_2^2 c2\tau) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{6}}{4} \left(\frac{R_E}{R}\right)^5 [\sqrt{15}(g_3^3 s3\tau - h_3^3 c3\tau) - (g_3^1 s\tau - h_3^1 c\tau)], \quad (3.6.1a)\end{aligned}$$

$$b_n = -\left(\frac{R_E}{R}\right)^3 g_0^1 - \sqrt{3} \left(\frac{R_E}{R}\right)^4 (g_2^1 c\tau + h_2^1 s\tau) - \frac{1}{2} \left(\frac{R_E}{R}\right)^5 [\sqrt{15}(g_3^2 c2\tau + h_3^2 s2\tau) - 3g_{33}^0], \quad (3.6.1b)$$

$$b_r = 2 \left(\frac{R_E}{R} \right)^3 (g_1^1 c\tau + h_1^1 s\tau) + \frac{3}{2} \left(\frac{R_E}{R} \right)^4 \left[\sqrt{3}(g_2^2 c2\tau + h_2^2 s2\tau) - g_2^0 \right] + \\ + \sqrt{2} \left(\frac{R_E}{R} \right)^5 \left[\sqrt{5}(g_3^3 c3\tau + h_3^3 s3\tau) - \sqrt{3}(g_3^1 c\tau + h_3^1 s\tau) \right]. \quad (3.6.1c)$$

Здесь g_n^m, h_n^m — гауссовы коэффициенты; $\tau = \omega_0(1 - \varepsilon)t$, $\varepsilon = \omega_E/\omega_0$.

Выражения для b_τ, b_n, b_r содержат периодические функции с частотами, равными 1, 2, 3. Для пояснения сути предложенного выше подхода к исследованию систем, нестационарных по управлению, ограничимся в выражениях (3.6.1) рассмотрением только частот 1 и 2. Учет слагаемых с частотой 3 просто увеличит порядок приведенных стационарных систем.

Будем считать, как и ранее, что управляющий момент создается за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника с геомагнитным полем (см. формулу (1.1.6))

$$\mathbf{M}_m^c = \mathbf{m} \times \mathbf{b}. \quad (3.6.2)$$

Линеаризованные уравнения движения, управляемого моментом (3.6.2), запишем в виде, аналогичном уравнениям (1.1.16), в которых безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ следует заменить на $\tau = \omega_0(1 - \varepsilon)t$.

В соответствии с этим уравнения (1.1.16) примут вид

$$\ddot{x}_1 - \tilde{d}_1 \dot{x}_1 - \tilde{\kappa}_1 x_1 = M_1, \quad \ddot{x}_3 + \tilde{d}_3 \dot{x}_1 - \tilde{\kappa}_3 x_3 = M_3, \quad \ddot{x}_2 - \tilde{\kappa}_2 x_2 = M_2. \quad (3.6.3)$$

Здесь

$$\tilde{d}_j = \frac{d_j}{1 - \varepsilon}, \quad \tilde{\kappa}_i = \frac{\kappa_i}{(1 - \varepsilon)^2} \quad (j = 1, 2; i = 1, 2, 3).$$

Выражения для моментов имеют вид

$$M_1 = b_r m_2 - b_n m_3, \quad M_2 = b_\tau m_3 - b_r m_1, \quad M_3 = b_n m_1 - b_\tau m_2.$$

где

$$b_\tau = \mu_0 [(g_1^1 s\tau - h_1^1 c\tau) + \nu(g_2^2 s2\tau - h_2^2 c2\tau)], \\ b_n = -\mu_0 [g_0^1 + \nu(g_2^1 c\tau + h_2^1 s\tau)], \\ b_r = \mu_0 \left[2(g_1^1 c\tau + h_1^1 s\tau) + \frac{3}{2}\nu(g_2^2 c2\tau + h_2^2 s2\tau - \tilde{g}_2^0) \right].$$

Здесь

$$\mu_0 = \left(\frac{R_E}{R} \right)^3, \quad \nu = \sqrt{3} \frac{R_E}{R}, \quad \tilde{g}_2^0 = \frac{g_2^0}{\sqrt{3}}.$$

С учетом всех обозначений линеаризованные уравнения управляемого движения принимают вид

$$\ddot{x}_1 - \tilde{d}_1 \dot{x}_1 - \tilde{\kappa}_1 x_1 = \\ = \mu_* \left\{ \left[2(g_1^1 c\tau + h_1^1 s\tau) + \frac{3}{2}\nu(g_2^2 c2\tau + h_2^2 s2\tau - \tilde{g}_2^0) \right] u_2 - [g_0^1 + \nu(g_2^1 c\tau + h_2^1 s\tau)] u_3 \right\}, \quad (3.6.4a)$$

$$\ddot{x}_3 + \tilde{d}_3 \dot{x}_1 - \tilde{\kappa}_3 x_3 = -\mu_* \{ [g_0^1 + \nu(g_2^1 c\tau + h_2^1 s\tau)] u_1 + [(g_1^1 s\tau - h_1^1 c\tau) + \nu(g_2^2 s2\tau - h_2^2 c2\tau)] u_2 \}, \quad (3.6.4b)$$

$$\ddot{x}_2 - \tilde{\kappa}_2 x_2 = \mu_* \left\{ [(g_1^1 s\tau - h_1^1 c\tau) + \nu(g_2^2 s2\tau - h_2^2 c2\tau)] u_3 - \right. \\ \left. - \left[2(g_1^1 c\tau + h_1^1 s\tau) + \frac{3}{2}\nu(g_2^2 c2\tau + h_2^2 s2\tau - \tilde{g}_2^0) \right] u_1 \right\}, \quad (3.6.4c)$$

где

$$\mu_* = \frac{\mu_0}{\omega_0^2(1 - \varepsilon)^2}.$$

Замена переменных

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 c\tau + y_3 s\tau + y_5 c2\tau + y_7 s2\tau + y_9, \\x_3 &= y_2 c\tau + y_4 s\tau + y_6 c2\tau + y_8 s2\tau + y_{10}, \\x_2 &= y_{11} c\tau + y_{12} s\tau + y_{13} c2\tau + y_{14} s2\tau + y_{15}\end{aligned}\tag{3.6.5}$$

приводит систему (3.6.4) к стационарной системе:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 - (1 + \tilde{\kappa}_1)y_1 + 2\dot{y}_3 - \tilde{d}_1\dot{y}_2 - \tilde{d}_1y_4 &= \mu_*(2g_1^1u_2 + \nu g_2^1u_3), \\ \ddot{y}_3 - 2\dot{y}_1 - (1 + \tilde{\kappa}_1)y_3 + \tilde{d}_1y_2 - \tilde{d}_1\dot{y}_4 &= \mu_*(2h_1^1u_2 + \nu h_2^1u_3), \\ \ddot{y}_5 - (4 + \tilde{\kappa}_1)y_5 + 4\dot{y}_7 - \tilde{d}_1\dot{y}_6 - 2\tilde{d}_1y_8 &= \mu_*\frac{3}{2}\nu g_2^0u_2, \\ \ddot{y}_7 - (4 + \tilde{\kappa}_1)y_7 - 4\dot{y}_5 + 2\tilde{d}_1y_6 - \tilde{d}_1\dot{y}_8 &= \mu_*\frac{3}{2}\nu h_2^2u_2,\end{aligned}\tag{3.6.6}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_9 - \tilde{\kappa}_1y_9 - \tilde{d}_1\dot{y}_{10} &= \mu_*\left(-\frac{3}{2}\nu\tilde{g}_2^0u_2 + g_0^1u_3\right), \\ \ddot{y}_2 - (1 + \tilde{\kappa}_3)y_2 + 2\dot{y}_4 + \tilde{d}_3\dot{y}_1 + \tilde{d}_3y_3 &= -\mu_*(\nu g_2^1u_1 - h_1^1u_2), \\ \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - (1 + \tilde{\kappa}_3)y_4 - \tilde{d}_3y_1 + \tilde{d}_3\dot{y}_3 &= -\mu_*(\nu h_2^1u_1 + h_1^1u_2), \\ \ddot{y}_6 - (4 + \tilde{\kappa}_3)y_6 + 4\dot{y}_8 + \tilde{d}_3\dot{y}_5 + 2\tilde{d}_3y_7 &= \mu_*\nu h_2^2u_2, \\ \ddot{y}_8 - 4\dot{y}_6 - (4 + \tilde{\kappa}_3)y_8 - 2\tilde{d}_3y_5 + \tilde{d}_3\dot{y}_7 &= -\mu_*\nu g_2^2u_2, \\ \ddot{y}_{10} + \tilde{d}_3\dot{y}_9 - \tilde{\kappa}_3y_{10} &= -\mu_*g_0^1u_1,\end{aligned}\tag{3.6.7}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_{11} - (1 + \tilde{\kappa}_2)y_{11} + 2\dot{y}_{12} &= -\mu_*(2g_1^1u_1 + h_1^1u_3), \\ \ddot{y}_{12} - 2\dot{y}_{11} - (1 + \tilde{\kappa}_2)y_{12} &= -\mu_*(2h_1^1u_1 - g_1^1u_3), \\ \ddot{y}_{13} - (4 + \tilde{\kappa}_2)y_{13} + 4\dot{y}_{14} &= -\mu_*\left(\nu h_2^2u_3 + \frac{3}{2}\nu g_2^2u_1\right), \\ \ddot{y}_{14} - 4\dot{y}_{13} - (4 + \tilde{\kappa}_2)y_{14} &= \mu_*\left(\nu g_2^2u_3 - \frac{3}{2}\nu h_2^2u_1\right), \\ \ddot{y}_{15} - \tilde{\kappa}_2y_{15} &= -\mu_*\frac{3}{2}\nu\tilde{g}_2^0u_1.\end{aligned}\tag{3.6.8}$$

Если не включать в замену (3.6.5) переменные, содержащие $\sin 2\tau$, $\cos 2\tau$, т.е. положить

$$y_5 = y_6 = y_7 = y_8 = y_{13} = y_{14} = 0, \quad g_2^2 = h_2^2 = 0,$$

то система (3.6.6)–(3.6.8) примет вид

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 - (1 + \tilde{\kappa}_1)y_1 + 2\dot{y}_3 - \tilde{d}_1\dot{y}_2 - \tilde{d}_1y_4 &= \mu_*(2g_1^1u_2 + \nu g_2^1u_3), \\ \ddot{y}_2 - (1 + \tilde{\kappa}_3)y_2 + 2\dot{y}_4 + \tilde{d}_3\dot{y}_1 + \tilde{d}_3y_3 &= -\mu_*(\nu h_2^1u_1 - h_1^1u_2), \\ \ddot{y}_3 - 2\dot{y}_1 - (1 + \tilde{\kappa}_1)y_3 + \tilde{d}_1y_2 - \tilde{d}_1\dot{y}_4 &= \mu_*(2h_1^1u_2 + \nu h_2^1u_3), \\ \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - (1 + \tilde{\kappa}_3)y_4 - \tilde{d}_3y_1 + \tilde{d}_3\dot{y}_3 &= -\mu_*(\nu h_2^1u_1 + g_1^1u_2), \\ \ddot{y}_9 - \tilde{\kappa}_1y_9 - \tilde{d}_1\dot{y}_{10} &= \mu_*\left(-\frac{3}{2}\nu\tilde{g}_2^0u_2 + g_0^1u_3\right), \\ \ddot{y}_{10} + \tilde{d}_3\dot{y}_9 - \tilde{\kappa}_3y_{10} &= -\mu_*g_0^1u_1, \\ \ddot{y}_{11} - (1 + \tilde{\kappa}_2)y_{11} + 2\dot{y}_{12} &= -\mu_*(2g_1^1u_1 + h_1^1u_3), \\ \ddot{y}_{12} - 2\dot{y}_{11} - (1 + \tilde{\kappa}_2)y_{12} &= -\mu_*(2h_1^1u_1 - g_1^1u_3), \\ \ddot{y}_{15} - \tilde{\kappa}_2y_{15} &= -\mu_*\frac{3}{2}\nu\tilde{g}_2^0u_1.\end{aligned}\tag{3.6.9}$$

Сравним систему (3.6.9) с системой (3.1.7)–(3.1.9), в которой замена переменных имела вид (3.1.6), которая отличается от замены (3.6.5) только тем, что $y_9 \equiv y_5$, $y_{10} \equiv y_6$, $y_{15} \equiv 0$, $y_{11} \equiv y_7$, $y_{12} \equiv y_8$ и кроме того, $\tilde{d}_j = d_j$, $\tilde{\kappa}_i = \kappa_i$ ($j = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$), $g_1^1 = g_2^1 = h_2^1 = \tilde{g}_2^0 = 0$.

Последние условия связаны с тем, что в формулах [37] использована несколько более общая модель для представления вектора $\mathbf{b}(t)$, отличная от модели (1.1.8) при $I = 0$. В этом случае уравнения (3.6.9) совпадают с уравнениями (3.1.7)–(3.1.8).

3.6.2. Приложение 2. Уравнения движения спутника (1.1.16) при движении по экватору $I = 0$ с учетом членов второго приближения имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \dots + \frac{\delta_1}{J_1} \dot{x}_2 (\dot{x}_3 - x_1) + \frac{\delta_3}{J_1} d_3 x_2 (\dot{x}_1 + x_3) + qR\omega_0 \frac{\mu_0}{J_1} v_3 x_1, \\ \ddot{x}_3 &= \dots - \frac{\delta_2}{J_3} \dot{x}_2 (\dot{x}_1 + x_3) + \frac{\delta_3}{J_1} d_3 x_2 (\dot{x}_3 - 4x_1) - qR\omega_0 \frac{\mu_0}{J_3} v_1 x_1, \\ \ddot{x}_2 &= \dots - \frac{\delta_1}{J_2} \dot{x}_1 \dot{x}_3 + \frac{\delta_2}{J_2} x_3 \dot{x}_3 - \frac{\delta_2 \delta_4}{J_2 J_3} x_1 (\dot{x}_1 + x_3) - \frac{\mu_0}{J_2} (u_1 x_1 + u_3 x_2) + qR\omega_0 \frac{\mu_0}{J_2} v_3 x_2.\end{aligned}$$

Здесь $\delta_1 = J_1 + J_2 - J_3$; $\delta_2 = J_2 + J_3 - J_1$; $\delta_3 = J_3 - J_1$; $\delta_4 = J_3 - J_2$.

При движении по полярной орбите $I = \pi/2$ уравнения (1.1.16) с учетом нелинейных членов имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \dots + \frac{\delta_1}{J_1} \dot{x}_2 (\dot{x}_3 - x_1) + \frac{\delta_3}{J_1} d_3 x_2 (\dot{x}_1 + x_3) + \frac{\mu_0}{J_1} (x_3 \cos \tau - 2x_1 \sin \tau) u_3, \\ \ddot{x}_3 &= \dots - \frac{\delta_2}{J_3} \dot{x}_2 (\dot{x}_1 + x_3) + \frac{\delta_3}{J_1} d_3 x_2 (\dot{x}_3 - 4x_1) - \frac{\mu_0}{J_3} (x_3 \cos \tau - 2x_1 \sin \tau) u_1, \\ \ddot{x}_2 &= \dots - \frac{\delta_1}{J_2} \dot{x}_1 \dot{x}_3 + \frac{\delta_2}{J_2} x_3 \dot{x}_3 - \frac{\delta_2 \delta_4}{J_2 J_3} x_1 (\dot{x}_1 + x_3) - \\ &\quad - \frac{\mu_0}{J_2} x_2 (u_1 \cos \tau + 2u_3 \sin \tau) - 2 \frac{\mu_0 q R \omega_0}{J_2} \sin \tau (v_1 x_1 + v_3 x_3).\end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены новые результаты в решении задач стабилизации стационарных движений спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях.

Предложен аналитический подход, позволяющий эффективно проводить структурный анализ системы, корректно строить алгоритмы стабилизации. Этот подход может быть использован при решении различных задач космической тематики.

Представлены решения следующих задач стабилизации стационарных движений спутника в гравитационном поле:

1. стабилизация положения равновесия (в том числе с учетом аэродинамических сил) при помощи магнитных моментов и моментов сил Лоренца;
2. стабилизация при совместном использовании магнитных и лоренцевых моментов;
3. стабилизация регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов.

Результаты подробного математического моделирования предложенных алгоритмов подтверждают эффективность разработанной методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Астрон. — 2012. — № 2. — С. 79–90.
2. Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А. Лекции по механике управляемых систем. — М.: Курс, 2018.
3. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.

4. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
5. Белецкий В. В., Хентов А. А. Вращательное движение намагниченного спутника. — М.: Наука, 1985.
6. Дубошин Г. Н. О вращательном движении искусственных небесных тел// Бюлл. ИТА АН СССР. — 1960. — 7, № 7. — С. 511–520.
7. Каленова В. И., Морозов В. М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — М.: Физматлит, 2010.
8. Каленова В. И., Морозов В. М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением// Прикл. мат. мех. — 2012. — 76, № 4. — С. 576–588.
9. Каленова В. И., Морозов В. М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида// Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 3. — С. 6–15.
10. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления// в кн.: Тр. Конгр. ИФАК. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 521–547.
11. Калман Р. Е., Фалб П., Арbib М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
12. Кондурарь В. Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара// Прикл. мех. техн. физ/ — 1960. — 36, № 5. — С. 890–901.
13. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
14. Лурье А. А. Аналитическая механика. — М.: ГИФМЛ, 1961.
15. Морозов В. М. Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов// Космич. исслед. — 1967. — 5, № 5. — С. 727–732.
16. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов// Космич. исслед. — 1969. — 7, № 3. — С. 395–401.
17. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. Мех. — 1968. — № 6. — С. 109–111.
18. Морозов В. М. Устойчивость движения космических аппаратов// в кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНТИ, 1971. — С. 1–83.
19. Морозов В. М., Каленова В. И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации// Космич. исслед. — 2020. — 58, № 3. — С. 199–207.
20. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов// Космич. исслед. — 2021. — 59, № 5. — С. 393–407.
21. Морозов В. М., Каленова В. И., Рак М. Г. О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов// Прикл. мат. мех. — 2021. — 85, № 4. — С. 436–453.
22. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил// Космич. исслед. — 2022. — 60, № 3. — С. 246–253.
23. Овчинников М. Ю., Пеньков В. И., Ролдугин Д. С., Иванов Д. С. Магнитные системы ориентации малых спутников. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.
24. Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников// Космические аппараты и технологии. — 2019. — 3, № 2 (28). — С. 73–86.
25. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
26. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967.
27. Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю. Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты// Космич. исслед. — 2000. — 38, № 3. — С. 296–306.
28. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. — М.: ВИНТИ, 1978.
29. Сарычев В. А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов// в кн.: Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. — М.: Физматлит, 2009. — С. 111–126.
30. Сарычев В. А., Овчинников М. Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 1985.
31. Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле// Космич. исслед. — 2003. — 41, № 1. — С. 69–79.
32. Хентов А. А. Движение около центра масс экваториального спутника на круговой орбите при взаимодействии магнитного и гравитационного полей Земли// 31 — 1967. — С. 947–950.

33. Хентов А. А. Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс// Космич. исслед. — 1968. — 6, № 5. — С. 793–795.
34. Черноушко Ф. Л. Об устойчивости регулярных прецессий спутника// Прикл. мат. мех. — 1964. — 28, № 1. — С. 155–157.
35. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system// Adv. Space Res. — 2018. — 62. — P. 142–151.
36. Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A. Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the König frame// Nonlinear Dyn. — 2015. — 82. — P. 1493–1505.
37. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite// Aerospace Sci. Techn. — 2020. — № 3. — P. 1–12.
38. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay// IEEE Access. — 2021. — 9. — 132623–132630.
39. Antipov K. A., Tikhonov A. A. Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the N th approximation// Geomagnetism and Aeronomy. — 2013. — 53, № 2. — P. 271–281.
40. Antipov K. A., Tikhonov A. A. On satellite electrodynamic attitude stabilization// Aerospace Sci. Techn. — 2014. — 33. — P. 92–99.
41. Bin Zhou Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with application to spacecraft magnetic attitude control// Automatica. — 2015. — 60. — P. 145–154.
42. Brewer J. W. Kronecker Products and Matrix calculus in system Theory// IEEE Trans. Circ. Syst. — 1978. — CAS-25, № 9. — P. 772–781.
43. Chang A. An algebraic characterization of controllability// IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — AC-10, № 1. — P. 112–113.
44. Cubas J., de Ruiter A. Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft// Acta Astronaut. — 2020. — 169. — P. 108–123.
45. Cubas J., Farrahi A., Pindado S. Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits// J. Guid. Control Dynam. — 2015. — 38. — P. 1947–1958.
46. Frik M. A. Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques// AIAA J. — 1970. — 8, № 10. — P. 1780–1785.
47. Giri D. K., Mukherjee B. K., Sinha M. Three-axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-axis global magnetic attitude control// Asian J. Control. — 2017. — 19, № 6. — P. 2028–2041.
48. Giri D. K. and Sinha M. Magneto-Coulombic attitude control of Earth-pointing satellites// J. Guid. Control Dynam. — 2014. — 37, № 6. — P. 1946–1960.
49. Giri D. K., Sinha M. Lorentz Force Based Satellite Attitude Control// J. Inst. Eng. India. Ser. C. — 2016. — 97. — P. 279–290.
50. Hautus M. L. J. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems// Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. — 1969. — 72. — P. 443–448.
51. Huang X., Yan Y. Fully actuated spacecraft attitude control via the hybrid magnetocoulombic and magnetic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2017. — 40, № 12. — P. 1–8.
52. Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Doronin D. M., Ovchinnikov A. V. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties// Acta Astronaut. — 2017. — 132. — P. 103–110.
53. Kalenova V. I., Morozov V. M. Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces// Aerospace. Sci. Technol. — 2020. — 106. — 106105.
54. Kalman R. E. Lectures on Controllability and Observability. — Bologna, Italy: C.I.M.E., 1969.
55. Laub A. J., Arnold W. F. Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models// IEEE Trans. Automat. Control. — 1984. — 29, № 2. — P. 163–165.
56. Likins P. W. Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame// J. Astronaut. Sci. — 1965. — 12, № 1. — P. 18–24.
57. Morozov V. M., Kalenova V. I. Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems// AIP Conf. Proc. — 2018. — 1959. — 020003.
58. Mostaza-Prieto D., Roberts P. C. E. Methodology to analyze attitude stability of satellites subjected to aerodynamic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2016. — 39. — P. 437–449.

59. *Nababi M., Barati M.* Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application// *Appl. Math. Model.* — 2017. — 46. — P. 365–381.
60. *Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V.* Geomagnetic field models for satellite angular motion studies// *Acta Astronaut.* — 2018. — 144. — P. 171–180.
61. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites// *Progr. Aerospace Sci.* — 2019. — 109. — 100546.
62. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study// *Acta Astronaut.* — 2015. — 110. — P. 279–286.
63. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Ivanov D. S., Penkov V. I.* Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame// *Acta Astronaut.* — 2015. — 116. — P. 74–68.
64. *Psiaki M.* Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation// *J. Guid. Control Dynam.* — 2001. — 24, № 2. — P. 386–394.
65. *Psiaki M. L.* Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing// *J. Guid. Control Dynam.* — 2004. — 27. — P. 347–355.
66. *Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K.* Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data// *J. Guid. Control Dynam.* — 1990. — 13, № 3. — P. 506–514.
67. *Psiaki M. L., Oshman Y.* Spacecraft attitude rate estimation from geomagnetic fiend measurements// *J. Guid. Control Dynam.* — 2003. — 26, № 2. — P. 244–252.
68. *Sarychev V. A., Mirer S. A.* Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* — 2000. — 76, № 1. — P. 55–68.
69. *Sarychev V. A., Mirer S. A., Degtyarev A. A., Duarte E. K.* Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* — 2007. — 97, № 4. — P. 267–287.
70. *Searcy J. D., Pernicka H. J.* Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach// *J. Guid. Control Dynam.* — 2012. — 35, № 6. — P. 1693–1701.
71. *Silani E., Lovera M.* Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results// *Control Eng. Pract.* — 2005. — 13. — P. 357–371.
72. *Sofyal A., Jafarov E. M., Wisniewski R.* Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode// *Aerospace Sci. Technol.* — 2018. — 76. — P. 91–104.
73. *Sukhov E.* Numerical approach for bifurcation and orbital stability analysis of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2021. — 1925. — 012013.
74. *Sutherland R., Kolmanovsky I. K., Girard A. R.* Attitude control of a 2U cubesat by magnetic and air drag torques// *IEEE Trans. Control Syst. Techn.* — 2018. — 27, № 3. — P. 1047–1059.
75. *Tortora P., Oshman Y., Santoni F.* Spacecraft angular rate estimation from magnetometer data on using and analytic predictor// *J. Guid. Control Dynam.* — 2004. — 27, № 3. — P. 365–373.
76. *Wertz J.* Spacecraft Attitude Determination and Control. — Dordrecht: D. Reidel, 1978.
77. *Yang Y.* Controllability of spacecraft using only magnetic torques// *IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst.* — 2016. — 52, № 2. — P. 955–962.
78. *Zhou K., Huang H., Wang X., Sun L.* Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient// *Aerospace Sci. Techn.* — 2017. — 60. — P. 115–123.

Морозов Виктор Михайлович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: moroz@imec.msu.ru

Каленова Вера Ильинична

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: kalenova44@mail.ru

Рак Михаил Геннадьевич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: mihailrak@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 125–132
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-125-132

УДК 519.642.5

К ИДЕНТИФИКАЦИИ ЯДЕР ВОЛЬТЕРРА В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2023 г. С. В. СОЛОДУША, Е. Д. АНТИПИНА

Аннотация. В работе предложен алгоритм идентификации нестационарной линейной динамической системы, основанный на применении тестовых сигналов кусочно-линейного вида и сведении исходной задачи к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования. Численная реализация данного алгоритма базируется на квадратурной формуле средних прямоугольников и методе «product integration». Исследована сходимость метода средних прямоугольников для выделенного нового класса линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода.

Ключевые слова: идентификация, нестационарная динамическая система, квадратура средних прямоугольников, метод «product integration», сходимость.

ON THE IDENTIFICATION VOLTERRA KERNELS IN INTEGRAL MODELS OF LINEAR NONSTATIONARY DYNAMICAL SYSTEMS

© 2023 S. V. SOLODUSHA, E. D. ANTIPINA

ABSTRACT. In this paper, we propose an identification algorithm for a nonstationary linear dynamical system. Conceptually, this algorithm is based on the use of piecewise linear test signals and the reduction of the original problem to a Volterra integral equation of the first kind with two variable integration limits. The numerical implementation of this algorithm is based on the quadrature formula of the middle rectangles and the product integration method. The convergence of the method of middle rectangles for a new class of linear Volterra integral equations is examined.

Keywords and phrases: identification, nonstationary dynamical system, quadrature of middle rectangles, product integration method, convergence.

AMS Subject Classification: 45D05

1. Введение. Интегральные уравнения Вольтерра I рода хорошо известны в теории математического моделирования динамических систем (см. [9]). Как правило, предполагается стационарность динамической системы, так что переходные характеристики системы представлены ядрами Вольтерра типа свертки. Основные подходы к решению задачи непараметрической идентификации моделей типа «вход-выход» связаны с выбором входных тестовых сигналов. Например, в качестве таких сигналов используются белый шум (см. [13]), волновые сигналы (см. [8]), а также

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00409).

сигналы кусочно-постоянного вида (см. [6, 7]). Применение интегральных уравнений типа Вольтерра при описании нестационарных динамических систем ограничивается не только рядом технических трудностей, но и нетривиальностью идентификации ядер (подынтегральной функции $K(t, s)$; см. [4]. Тем не менее, данная задача является актуальной, так как учет нестационарных свойств динамической системы, как показано в [2], позволяет повысить точность моделирования за счет более полной информации об откликах исследуемого объекта.

Построить модель вида

$$\int_0^t K(t, s)x(s)ds = f(t), \quad t = [0, T], \quad (1)$$

означает восстановить переходные характеристики динамической системы. В [1] предложен подход к построению интегральной модели (1), в которой $f(t)$ — такая реакция динамической системы на входной сигнал $x(t)$, что $f(0) = 0$, $f'(t) \in C_{[0, T]}$, с помощью тестовых сигналов $x_\nu(t)$ в виде линейной комбинации функций Хевисайда с отклоняющимся аргументом

$$x_\nu(t) = e(t) - e(t - \nu), \quad 0 \leq \nu \leq t \leq T, \quad (2)$$

где

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Указанный подход позволяет свести задачу идентификации несимметричной функции $K(t, s)$ к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода, которое имеет явную формулу обращения (см. [1]):

$$K(t, \nu) = f'_\nu(t, \nu),$$

где $f(t, \nu)$ — отклик (1) на сигнал вида (2).

Данная статья развивает указанный в [1, 2, 7] подход. В предположении, что правая часть $f(t)$ уравнения (1) достаточно гладкая для проведения требуемых вычислений, рассмотрено построение интегральной модели нестационарной динамической системы с помощью тестовых сигналов из класса кусочно-линейных функций. Такой вид входных воздействий является приемлемым при тестировании технических (энергетических) объектов (см. [12]).

2. Постановка задачи идентификации модели (1). Рассмотрим способ идентификации интегральной модели (1), основанный на использовании тестовых входов $x_\nu(t)$ и выходов $f_\nu(t)$, $t, \nu \in \Delta = \{t, \nu : 0 \leq \nu \leq t \leq T\}$, вида

$$x(t) \equiv x_\nu(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t/\nu, & 0 < t \leq \nu, \\ 1, & \nu \leq t, \end{cases} \quad f(t) \equiv f_\nu(t) = \begin{cases} 0, & t = \nu = 0, \\ g(t, \nu), & 0 < \nu \leq t, \end{cases} \quad (3)$$

где $x_\nu(t)$ — однопараметрическое семейство кусочно-линейных функций, а отклик $f_\nu(t) \in C_\Delta^{(2)}$. Подстановка (3) в (1) приводит к следующему интегральному уравнению (см. [11]):

$$\int_0^\nu K(t, s)\frac{s}{\nu}ds + \int_\nu^t K(t, s)ds = g(t, \nu), \quad (4)$$

имеющему явную формулу обращения:

$$K(t, \nu) = - (2g'_\nu(t, \nu) + \nu g''_{\nu^2}(t, \nu)), \quad t, \nu \in \Delta.$$

В [5] получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие разрешимость (4) в классе C_Δ .

Как отмечено в [3], для целей моделирования динамической системы с помощью (1) достаточно идентифицировать интеграл от функции $K(t, \nu)$. Поэтому далее в статье, с привлечением квадратурной формулы средних прямоугольников и метода product integration (см. [10]), рассмотрены

соответственно два вычислительных алгоритма: идентификации ядра Вольтерра и идентификации интеграла от него.

3. Численная идентификация интегральной модели (4). Для построения вычислительных алгоритмов введем равномерную сетку

$$t_i = ih, \quad i = \overline{1, n}, \quad n = \left\lceil \frac{T}{h} \right\rceil, \quad (5)$$

где $\lceil \cdot \rceil$ означает целую часть числа, а также подсетку

$$t_{j-\frac{1}{2}} = \left(j - \frac{1}{2} \right) h, \quad j = \overline{1, i}. \quad (6)$$

3.1. Применение квадратурной формулы средних прямоугольников. Будем искать решение сеточного аналога (4) относительно $K^h(t_i, t_{j-1/2})$ с помощью метода средних прямоугольников. Аппроксимируя интегралы в (4) суммами и учитывая соотношение

$$\frac{t_{l-1/2}}{t_j} = \frac{l-1/2}{j},$$

получаем

$$h \sum_{l=1}^j \frac{l-1/2}{j} K^h(t_i, t_{l-1/2}) + h \sum_{l=j+1}^i K^h(t_i, t_{l-1/2}) = g(t_i, t_j), \quad i > j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, i-1}. \quad (7)$$

Для $t_i = t_j$ ($i = j$) сеточный аналог (4) выглядит следующим образом:

$$h \sum_{l=1}^i \frac{l-1/2}{i} K^h(t_i, t_{l-1/2}) = g(t_i, t_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Под замкнутостью системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) далее будем понимать равенство числа уравнений числу неизвестных. Для представленной СЛАУ сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Система линейных алгебраических уравнений (7), (8) является замкнутой и невырожденной. Ее решение единственно и представимо в следующем виде:

$$K^h(t_i, t_{i-1/2}) = -\frac{2(i-1)}{h} g(t_i, t_{i-1}) + \frac{2i}{h} g(t_i, t_i), \quad i = j, \quad (9)$$

$$K^h(t_i, t_{j-1/2}) = -\frac{2(j-1)}{h} g(t_i, t_{j-1}) + \frac{6j}{h} g(t_i, t_j) - \frac{4i}{h} g(t_i, t_i), \quad i = j+1, \quad (10)$$

$$K^h(t_i, t_{j-1/2}) = -\frac{2(j-1)}{h} g(t_i, t_{j-1}) + \frac{6j}{h} g(t_i, t_j) + \frac{8}{h} \sum_{l=j+1}^{i-1} (-1)^{l+j} l \cdot g(t_i, t_l) + \frac{4i \cdot (-1)^{i+j}}{h} g(t_i, t_i), \quad i \geq j+2. \quad (11)$$

Доказательство. Покажем, что система удовлетворяет определению замкнутости, т.е. число уравнений системы (7), (8) совпадает с числом неизвестных. Исходя из условия несимметричности функции $K(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, ее сеточный аналог $K^h(t_i, t_{j-1/2})$ представим в виде треугольной матрицы размера $(n \times n)$. С учетом дискретизации $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, i}$, количество искомых значений составляет $n(n+1)/2$. Подсчет числа уравнений дает следующую величину:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Итак, число неизвестных в системе (7), (8) равно числу уравнений.

Теперь покажем, что СЛАУ (7), (8) невырождена. Представим (7), (8) в следующем виде:

$$AK = F, \quad F = \frac{1}{h}f,$$

где K — вектор, содержащий искомые значения, F — вектор, содержащий известные значения, A — заданная блочно-диагональная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1/4 & 3/4 & 1 & \dots & 1 \\ 1/6 & 1/2 & 5/6 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/(2i) & 3/(2i) & 5/(2i) & \dots & (2i-1)/(2i) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Определитель матрицы A определяется как произведение диагональных элементов этой матрицы:

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \dots \cdot \det A_n.$$

Приведем матрицы A_i к треугольному виду

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1/6 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/(2i) \end{pmatrix},$$

находим

$$\det A_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2i} = \prod_{l=1}^i \frac{1}{2l} \Rightarrow \det A = \prod_{i=1}^n \prod_{l=1}^i \frac{1}{2l} \neq 0,$$

что свидетельствует о невырожденности системы (7), (8).

Таким образом, решение СЛАУ (7), (8) существует и единственно. Непосредственный поиск решения дает разностную схему вида (9)–(11). $\square$

3.2. Применение метода product integration. Рассмотрим далее задачу идентификации интегралов от ядер Вольтерра в (4) с привлечением метода product integration (pi-метод; см. [10]). Воспользуемся введенной сеткой дискретизации (5), (6). Согласно [10] аппроксимация (1) представима в виде

$$\int_0^{ih} K(ih, s)x(s)ds \approx \sum_{l=1}^i x\left(\left(l - \frac{1}{2}\right)h\right) \int_{(l-1)h}^{lh} K(ih, s)ds, \quad i = \overline{1, n}.$$

Применим pi-метод для получения сеточного аналога уравнения (4). Введя обозначение

$$m_{i,l} = \int_{(l-1)h}^{lh} K(ih, s)ds,$$

запишем (4) в виде

$$\frac{1}{j} \sum_{l=1}^j \left(l - \frac{1}{2}\right) m_{i,l} + \sum_{l=j+1}^i m_{i,l} = g(ih, jh), \quad j = \overline{1, i}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (12)$$

это система относительно неизвестных $m_{i,j}$. Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Система линейных алгебраических уравнений (12) является замкнутой и невырожденной. Ее решение единственно и представимо в следующем виде:

$$m_{i,i} = -2(i-1) \cdot g(t_i, t_{i-1}) + 2i \cdot g(t_i, t_i), \quad i = j, \quad (13)$$

$$m_{i,j} = -2(j-1) \cdot g(t_i, t_{j-1}) + 6j \cdot g(t_i, t_j) - 4i \cdot g(t_i, t_i), \quad i = j+1, \quad (14)$$

$$m_{i,j} = -2(j-1) \cdot g(t_i, t_{j-1}) + 6j \cdot g(t_i, t_j) + \\ + 8 \sum_{l=j+1}^{i-1} (-1)^{l+j} l \cdot g(t_i, t_l) + 4i \cdot (-1)^{i+j} \cdot g(t_i, t_i), \quad i \geq j+2. \quad (15)$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

4. Исследование сходимости разностной схемы (9)–(11). Рассмотрим вопрос о сходимости метода (9)–(11). Для краткости будем рассматривать только (9). Применим формулу Тейлора, чтобы разложить функции $g(t_i, t_{i-1})$ и $g(t_i, t_i)$ в окрестности точки

$$M_0 = (t_{i-1/2}, t_{i-1/2}) = \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right).$$

Тогда

$$g(ih, (i-1)h) = g \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) + \sum_{l=1}^2 \frac{h^2}{l!} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right)^l \right]_{M_0}, \\ g(ih, ih) = g \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) + \sum_{l=1}^2 \frac{h^2}{l!} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right)^l \right]_{M_0}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (9), получаем

$$K^h \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) = \frac{-2(i-1)}{h} \cdot g(ih, (i-1)h) + \frac{2i}{h} \cdot g(ih, ih) = \\ = \left[\frac{-2(i-1)}{h} \cdot g(t, \nu) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} - \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right) + \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} - \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2i}{h} \cdot g(t, \nu) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right) + \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} \right)^2 \right]_{M_0}.$$

Далее, раскрывая скобки и приводя подобные, имеем

$$K^h \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) = \left[\frac{2}{h} \cdot g(t, \nu) + \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial t} + (2i-1) \cdot \frac{\partial g(t, \nu)}{\partial \nu} + \right. \\ \left. + \frac{(2i-1)h}{2} \cdot \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t \partial \nu} + \frac{h}{4} \cdot \left(\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} \right) \right]_{M_0}. \quad (17)$$

Используя формулу (4), определим $g(t, \nu)$, $\partial g(t, \nu)/\partial t$, $\partial g(t, \nu)/\partial \nu$, $\partial^2 g(t, \nu)/\partial t \partial \nu$ в точке M_0 и подставим их в (17):

$$\begin{aligned} K^h \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) &= \left[\frac{2}{h} \cdot \frac{2}{h(2i-1)} \int_0^{(i-1/2)h} sK(t, s)ds + \right. \\ &+ \frac{2}{h(2i-1)} \int_0^{(i-1/2)h} sK'_t(t, s)ds + K(t, t) - (2i-1) \cdot \frac{4}{h^2(2i-1)^2} \int_0^{(i-1/2)h} sK(t, s)ds - \\ &- \frac{(2i-1)h}{2} \cdot \frac{4}{h^2(2i-1)^2} \int_0^{(i-1/2)h} sK'_t(t, s)ds + \frac{h}{4} \left(\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} \right) \Big]_{M_0} = \\ &= \left[K(t, t) + \frac{h}{4} \left(\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} \right) \right]_{M_0}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$K^h \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) = K \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) + \frac{h}{4} \left[\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} \right]_{M_0}. \quad (18)$$

Теперь разложим $K((i-1/2)h, (i-1/2)h)$ в окрестности точки $(ih, (i-1/2)h)$, воспользовавшись формулой Тейлора:

$$K \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) \approx K \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) - \frac{h}{2} K'_t \left(t, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) \Big|_{t=ih}. \quad (19)$$

Окончательно, используя замену (19), непосредственно из (18) имеем

$$\begin{aligned} K^h \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) - K \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) &\approx \\ &\approx -\frac{h}{2} K'_t \left(t, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) \Big|_{t=ih} + \frac{h}{4} \left[\frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(t, \nu)}{\partial \nu^2} \right]_{M_0}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\left| K^h \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) - K \left(ih, \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right) \right| = O(h).$$

Таким образом, данный метод имеет первый порядок сходимости по шагу сетки h . Исследование сходимости разностных формул (10), (11) осуществляется аналогичным образом.

5. Примеры. Рассмотрим несколько тестовых примеров, иллюстрирующих сходимость представленных численных схем, обозначив через $\bar{K}(t, s)$ точное решение (4).

Пример 1. Пусть

$$\bar{K}(t, s) = 1 - \frac{3}{2}(t-s)(2t-s);$$

тогда

$$g(t, \nu) = \frac{5}{4}t^3 + t + \frac{3}{4}t\nu^2 - \frac{3}{2}t^2\nu - \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{8}\nu^3.$$

Применим формулы (9)–(11), полученные на основе метода средних прямоугольников, и найдем погрешность, рассчитанную по формуле

$$\varepsilon_m = \max_{i,j} \left| K^h(t_i, t_{j-1/2}) - \bar{K}(t_i, t_{j-1/2}) \right|, \quad j = \overline{1, i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (20)$$

Таблица 1. Погрешности решения для примера 1

h	ε_m	ε_p
0,25000	0,070312	0,019531
0,12500	0,033203	0,004395
0,06250	0,016113	0,001038
0,03125	0,007935	0,000252

Таблица 2. Погрешности решения для примера 2

h	ε_m	ε_p
0,25000	0,102990	0,027501
0,12500	0,049498	0,006408
0,06250	0,024278	0,001545
0,03125	0,012025	0,000379

а также применим (13)–(15) (рі-метод) и найдем погрешность по формуле

$$\varepsilon_p = \max_{i,l} \left| m_{i,l} - \int_{(l-1)h}^{lh} \bar{K}(ih, s) ds \right|, \quad l = \overline{1, i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (21)$$

В таблице 1 представлены результаты расчета погрешности для решения примера 1 с помощью метода средних прямоугольников и рі-метода. Из таблицы (1) видно, что метод средних прямоугольников имеет линейную сходимость по шагу сетки, а рі-метод — квадратичную.

Пример 2. Пусть функция $\bar{K}$ является осциллирующей:

$$\bar{K}(t, s) = e^t \cos(s);$$

тогда

$$g(t, \nu) = e^t \cdot \left(\sin(t) + \frac{\cos(\nu)}{\nu} - \frac{1}{\nu} \right).$$

По аналогии с примером 1, применим (9)–(11), (13)–(15) и рассчитаем погрешности по формулам (20) и (21) соответственно. Таблицы (2), содержащая результаты расчета погрешности для решения примера refex2 с помощью метода средних прямоугольников и рі-метода, показывает, что порядок сходимости методов такой же, что и в примере 1.

Заметим, что в классическом случае метод средних прямоугольников имеет второй порядок сходимости. Однако, как показало исследование численной схемы (9)–(11) и подтвердили вычислительные расчеты, при численном решении уравнения Вольтерра вида (4) происходит потеря одного порядка. В случае использования рі-метода порядок сходимости метода по шагу сетки h сохраняется.

6. Заключение. Разработаны алгоритмы приближенного решения нового класса одномерных интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования с привлечением квадратурной формулы средних прямоугольников и метода product integration. Изучен эффект потери одного порядка сходимости вычислительной схемы, основанной на методе квадратурных сумм. Приведены тестовые примеры, иллюстрирующие преимущество использования рі-аппроксимации, которое заключается в высокой точности моделирования нестационарной динамической системы за счет сохранения второго порядка сходимости численного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апарцин А. С. О новых классах линейных многомерных уравнений I рода типа Вольтерра // Изв. вузов. Мат. — 1995. — № 11. — С. 28–41.
2. Апарцин А. С. О повышении точности моделирования нелинейных динамических систем полиномами Вольтерра // Электрон. модел. — 2001. — 19, № 6. — С. 3–12.
3. Апарцин А. С., Спиряев В. А. Об одном подходе к идентификации полиномов Вольтерра // Оптимизация, управление, интеллект. — 2005. — № 2. — С. 109–117.
4. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Методы идентификации динамических систем // Программные системы: теория и приложения. — 2014. — 5, № 5. — С. 79–96.

5. *Воскобойников Ю. Е., Солодуша С. В.* Задача и алгоритм непараметрической идентификации линейной нестационарной динамической системы с помощью кубических сплайнов// Сиб. ж. вычисл. мат. — 2023. — 26, № 1 (в печати).
6. *Фомин А. А., Павленко В. Д., Федорова А. Н.* Метод построения многомерной модели Вольтерра глазодвигательного аппарата// Электротехн. компьют. сист. — 2015. — 19(95). — С. 296–301.
7. *Apartsyn A. S.* Nonclassical Volterra equations of the first kind: Theory and numerical methods. — Utrecht, Boston: VSP, 2003.
8. *Balassa G.* Estimating scattering potentials in inverse problems with a non-causal Volterra model// Mathematics. — 2022. — 10, № 8. — 1257.
9. *Brunner H.* Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.
10. *Linz P.* Product integration method for Volterra integral equations of the first kind// BIT Numer. Math. — 1971. — 11. — P. 413–421.
11. *Solodusha S. V.* New classes of Volterra integral equations of the first kind related to the modeling of the wind turbine dynamics// Proc. 15 Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (Moscow, June 03–05, 2020). — IEEE, 2020. — P. 1–3.
12. *Suslov K. V., Gerasimov D. O., Vinnikov V. A., Solodusha S. V.* Modelling and simulation of power generation of smart electricity supply systems// Proc. CIGRE Session 46 (Paris, August 21–26, 2016), 2016.
13. *Wiener N.* Nonlinear Problems in Random Theory. — New York: The Technology Press of M.I.T., 1958.

Солодуша Светлана Витальевна

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН, Иркутск

E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Антипина Екатерина Дмитриевна

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН, Иркутск;

Иркутский государственный университет

E-mail: kate19961231@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 133–141
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-133-141

УДК 517.977.56

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2023 г. Р. К. ТАГИЕВ, Ш. И. МАГЕРРАМЛИ

Аннотация. Рассматривается обратная задача типа управления об определении младшего коэффициента параболического уравнения с интегральным граничным условием и дополнительным интегральным условием. Исследована корректность постановки задачи управления. Доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели, составленная на основе дополнительного интегрального условия, и найдено выражение для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности управления.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, интегральное граничное условие, корректность задачи, необходимое условие оптимальности.

VARIATIONAL METHOD FOR SOLVING A COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITIONS

© 2023 R. K. TAGIYEV, Sh. I. MAHARRAMLI

ABSTRACT. In this paper, we consider an inverse control-type problem of determining the minor coefficient of a parabolic equation with an integral boundary-value condition and an additional integral condition. The well-posedness of the problem is examined. The Fréchet differentiability of the target functional based on the additional integral condition is proved and an expression for its gradient is found. A necessary condition for the optimality of control is established.

Keywords and phrases: inverse problem, parabolic equation, integral boundary condition, correctness of the problem, necessary optimality condition.

AMS Subject Classification: 49K20, 35K20

1. Введение. Обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть поставлены как задачи оптимального управления соответствующими системами. При этом роль управляющих функций выполняют неизвестные коэффициенты или свободные члены этих уравнений (см. [2, 13]). Обратные задачи типа управления для параболических уравнений с классическими краевыми условиями и локальными дополнительными условиями изучены в [1, 5, 11, 14] и др.

Многие физические и биологические процессы описываются нелокальными краевыми задачами для уравнений параболического типа (см. [9, 10]). Среди них особое место занимают задачи с интегральными условиями (см. [3, 4, 6] и др.). Обратные задачи типа управления для параболических уравнений с интегральными условиями исследованы существенно слабее.

В данной работе рассматривается обратная задача типа управления об определении младшего коэффициента параболического уравнения с интегральным граничным условием и дополнительным интегральным условием. Исследована корректность постановки задачи управления. Доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели, составленная на основе дополнительного интегрального условия, и найдено выражение для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности управления.

2. Постановка задачи. Пусть $l, T > 0$ — заданные числа,

$$Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$$

— прямоугольник в $\mathbb{R}^2$. Используемые в работе обозначения функциональных пространств и их норм соответствуют [7, с. 21–26]. Через $W_{2,0}^1(0, l)$, $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$, $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ соответственно обозначаем подпространства пространств $W_2^1(0, l)$, $V_2^{1,0}(Q_T)$, $W_2^{1,1}(Q_T)$, элементы которых обращаются в нуль при $x = 0$. Положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаются в дальнейшем через M_j , $j = 1, 2, \dots$

Рассмотрим в прямоугольнике Q_T линейное параболическое уравнение

$$u_t - (k(x, t)u_x)_x + v(x)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad k(l, t)u_x(l, t) = \int_0^l H(x, t)u(x, t)dx, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где k, v, f, φ, H — заданные функции.

Обычно под прямой задачей понимают нахождения решения $u = u(x, t)$ задачи (1)–(3) по заданным функциям k, v, f, φ, H . Прямая задача (1)–(3) является нелокальной краевой задачей для параболического уравнения (1) с интегральным граничным условием. Однако не всегда коэффициенты k и v уравнения (1) заранее определены. На практике возникают задачи, в которых коэффициенты k или v подлежат определению по некоторой дополнительной информации. Такие задачи называются коэффициентными обратными задачами для параболического уравнения.

Рассмотрим следующую коэффициентную обратную задачу: по известным k, f, φ, H найти пару функций (u, v) так, чтобы выполнялись условия (1)–(3) и дополнительное интегральное условие

$$\int_0^T \omega(t)u(x, t)dt = \alpha(x), \quad 0 < x < l, \quad (4)$$

где ω, α — заданные функции.

В настоящей работе рассматривается следующая вариационная постановка обратной задачи (1)–(4): на множестве

$$V = \{v = v(x) \in L_s(0, l) : |v(x)| \leq d \text{ п.в. на } (0, l)\} \quad (5)$$

требуется минимизировать функционал

$$J(v) = \int_0^l \left| \int_0^T \omega(t)u(x, t; v)dt - \alpha(x) \right|^2 dx \quad (6)$$

при условиях (1)–(3), где $s > 2$, $d > 0$ — заданные числа, $u(x, t; v) = u(x, t)$ — решение краевой задачи (1)–(3) соответствующее коэффициенту $v = v(x) \in V$. Ниже эту задачу будем называть задачей (1)–(3), (5), (6). Данная задача является обратной задачей типа управления. В такой постановке коэффициент $v = v(x) \in V$ играет роль управления, а множество V является множеством допустимых управлений. Функционал (6) является функционалом невязки в $L_2(0, l)$, соответствующей условию (4).

Предполагаем, что заданные функции $k, f, \varphi, H, \omega, \alpha$ удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < \nu \leq k(x, t) \leq \mu, \quad |k_t(x, t)| \leq \mu_1 \quad \text{п.в. на } Q_T, \quad (7)$$

$$|H(x, t)| \leq \mu_2, \quad |H_t(x, t)| \leq \mu_3 \quad \text{п.в. на } Q_T, \quad (8)$$

$$\varphi \in W_{2,0}^1(0, l), \quad f \in L_2(Q_T), \quad (9)$$

$$\omega \in L_2(0, T), \quad \alpha \in L_2(0, l), \quad (10)$$

где $\nu, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$ — некоторые постоянные.

Под решением $u(x, t; v) = u(x, t)$ краевой задачи (1)–(3), соответствующим управлению $v = v(x) \in V$, будем понимать обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$, т.е. функцию

$$u = u(x, t; v) \in V_2^{1,0}(Q_T) = \left\{ u : u \in V_2^{1,0}(Q_T), u(0, t) = 0 \right\},$$

удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left[-u\eta_t + k(x, t)u_x\eta_x + v(x)u\eta \right] dx dt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x, t)u(x, t; v) dx \right] \eta(l, t) dt = \\ = \int_0^l \varphi(x)\eta(x, 0) dx + \int_{Q_T} f(x, t)\eta dx dt. \end{aligned} \quad (11)$$

при любой функции

$$\eta = \eta(x, t) \in \hat{W}_{2,0}^{1,1}(Q_T) = \left\{ \eta : \eta \in W_2^{1,1}(Q_T), \eta(0, t) = 0, \eta(x, T) = 0 \right\}.$$

Применяя метод Галеркина и используя результаты работ [3], [7, с. 165–171], можно показать, что при каждом фиксированном $v = v(x) \in V$ существует единственное обобщенное решение $u = u(x, t; v)$ краевой задачи (1)–(3) из $V_2^{1,0}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$|u|_{Q_T} \equiv \|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_1 \left[\|\varphi\|_{2,(0,l)} + 2\|f\|_{2,1,Q_T} \right]. \quad (12)$$

Более того, можно показать, что это обобщенное решение принадлежит также пространству

$$W_{2,0}^{1,1}(Q_T) = \left\{ u : u \in W_2^{1,1}(Q_T), u(0, t) = 0 \right\}$$

и справедлива оценка

$$|u|_{Q_T} + \max_{0 \leq t \leq T} \|u_x(x, t; v)\|_{2,(0,l)} + \|u_T\|_{2,Q_T} \leq M_2 \left[\|\varphi\|_{2,(0,l)}^{(1)} + \|f\|_{2,Q_T} \right] \quad (13)$$

(см. [8, с. 202–210]).

3. Корректность постановки задачи.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (7)–(10). Тогда задача (1)–(3), (5), (6) корректно поставлена в слабой топологии пространства $L_s(0, l)$, т.е. множество оптимальных управлений

$$V_* = \left\{ v_* \in V : J(v_*) = J_* \equiv \inf \{ J(v) : v \in V \} \right\}$$

непусто и любая минимизирующая последовательность $\{v_k(x)\} \subset V$ функционала (6) слабо в $L_s(0, l)$ сходится ко множеству V_* .

Доказательство. Покажем, что функционал (6) слабо в $L_s(0, l)$ непрерывен на V . Пусть $v = v(x) \in V$ — некоторая точка, $\{v_k = v_k(x)\} \subset V$ — такая последовательность, что

$$v_k \rightarrow v \quad \text{слабо в } L_s(0, l). \quad (14)$$

Пусть $u_k = u_k(x, t) = u(x, t; v_k) \in W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ — решение краевой задачи (1)–(3) при $v = v_k$. В силу (13) справедливы оценки

$$\|u_k\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \leq M_3, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Тогда из компактности вложения $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \rightarrow L_q(Q_T)$ при любом конечном $q \geq 1$ (см. [8, с. 78]) следует, что из $\{u_k\}$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$, что

$$u_{k_m} \rightarrow u \quad \text{слабо в } W_{2,0}^{1,1}(Q_T), \quad u_{k_m} \rightarrow u \quad \text{сильно в } L_q(Q_T), \quad (16)$$

где $u = u(x, t)$ — некоторый элемент из $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$.

Покажем, что $u(x, t) = u(x, t; v)$, т.е. $u(x, t)$ является решением задачи (1)–(3), соответствующим управлению $v = v(x)$. Функции u_{k_m} , $m = 1, 2, \dots$, удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left[-u_{k_m} \eta_t + k(x, t) u_{k_m} x \eta_x + v_{k_m}(x) u_{k_m} \eta \right] dx dt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x, t) u_{k_m}(x, t) dx \right] \eta(l, t) dt = \\ = \int_0^l \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{Q_T} f(x, t) \eta dx dt, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \forall \eta = \eta(x, t) \in \hat{W}_{2,0}^{1,1}(Q_T). \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того, очевидно равенство

$$\int_{Q_T} v_{k_m}(x) u_{k_m} \eta dx dt = \int_{Q_T} v_{k_m}(x) (u_{k_m} - u) \eta dx dt + \int_{Q_T} v_{k_m}(x) u \eta dx dt. \quad (18)$$

Используя ограничения $|v_{k_m}(x)| \leq d$, справедливые почти всюду на $(0, l)$, неравенство Коши—Буняковского и соотношение (16), имеем

$$\left| \int_{Q_T} v_{k_m}(x) (u_{k_m} - u) \eta dx dt \right| \leq d \|u_{k_m} - u\|_{2, Q_T} \|\eta\|_{2, Q_T} \rightarrow 0. \quad (19)$$

Из теоремы вложения следуют включения $u \in L_q(Q_T)$, $\eta \in L_q(Q_T)$, где $q \geq 1$ — любое конечное число. В частности, отсюда следует, что $u\eta \in L_{s/(s-1)}(Q_T)$. Тогда из соотношения (14) имеем

$$\int_{Q_T} v_{k_m}(x) u \eta dx dt \rightarrow \int_{Q_T} v(x) u \eta dx dt.$$

Учитывая это соотношение и (19), из (18) получаем

$$\int_{Q_T} v_{k_m}(x) u_{k_m} \eta dx dt \rightarrow \int_{Q_T} v(x) u \eta dx dt. \quad (20)$$

Используя условие $|H(x, t)| \leq \mu_2$ почти всюду на Q_T , неравенство Коши—Буняковского, теоремы о следах (см. [8, с. 78]) и соотношение (16), имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \left[\int_0^l H(x, t) u_{k_m}(x, t) dx \right] \eta(l, t) dt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x, t) u(x, t) dx \right] \eta(l, t) dt \right| \leq \\ \leq \mu_2 \int_0^l \int_0^T |u_{k_m}(x, t) - u(x, t)| \cdot |\eta(l, t)| dx dt \leq \mu_2 \sqrt{l} \|u_{k_m} - u\|_{2, Q_T} \cdot \|\eta(l, t)\|_{2, (0, T)} \leq \\ \leq \mu_2 \sqrt{l} M_4 \|u_{k_m} - u\|_{2, Q_T} \cdot \|\eta\|_{2, Q_T}^{(1,1)} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Наконец, переходя к пределу в равенстве (17) и учитывая соотношения (16), (20) и (21), получаем, что $u(x, t)$ удовлетворяет тождеству (11), т.е. является обобщенным решением задачи (1)–(3) из $V_2^{1,0}(Q_T)$. Отсюда и из включения $u(x, t) \in W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ следует, что $\psi(x, t) = \psi(x, t; v)$. Кроме того, используя единственность решения $u = u(x, t; v)$, нетрудно показать, что соотношение (16)

справедливо с функцией $u = u(x, t; v)$ не только для подпоследовательности $\{u_{k_m}\}$, но и для всей последовательности $\{u_k\}$, т.е.

$$u(x, t; v_k) \rightarrow u(x, t; v) \quad \text{слабо в } W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_q(Q_T), \quad (22)$$

где $q \geq 1$ — любое конечное число.

Покажем, что $J(v_k) \rightarrow J(v)$ при $k \rightarrow \infty$. Используя равенство (1) и неравенство Коши—Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} |J(v_k) - J(v)| &= \left| \left\| \int_0^T \omega(t) u(x, t; v_k) dt - \alpha(x) \right\|_{2,(0,l)}^2 - \left\| \int_0^T \omega(t) u(x, t; v) dt - \alpha(x) \right\|_{2,(0,l)}^2 \right| \leq \\ &\leq \left\| \int_0^T \omega(t) [u(x, t; v_k) - u(x, t; v)] dt \right\|_{2,(0,l)} \times \\ &\quad \times \left\{ \left\| \int_0^T \omega(t) u(x, t; v_k) dt \right\|_{2,(0,l)} + \left\| \int_0^T \omega(t) u(x, t; v) dt \right\|_{2,(0,l)} + 2\|\alpha(x)\|_{2,(0,l)} \right\} \leq \\ &\leq \|\omega(t)\|_{2,(0,T)} \cdot \|u(x, t; v_k) - u(x, t; v)\|_{2,Q_T} \times \\ &\quad \times \left[\|\omega(t)\|_{2,(0,T)} (\|u(x, t; v_k)\|_{2,Q_T} + \|u(x, t; v)\|_{2,Q_T}) + 2\|\alpha(x)\|_{2,(0,l)} \right] \end{aligned}$$

Отсюда, используя оценки (5), (15) и соотношение (22), получаем, что $J(v_k) \rightarrow J(v)$ при $k \rightarrow \infty$, т.е. функционал $J(v)$ слабо в $L_s(0, l)$ непрерывен на V . Кроме того, множество V , определяемое равенством (5) выпукло, замкнуто и ограничено в рефлексивном банаховом пространстве $L_s(0, l)$ и поэтому слабо компактно в $L_s(0, l)$ (см. [2, с. 51]). Применяя результат из [2, с. 49], завершаем доказательство теоремы 1. $\square$

4. Дифференцируемость функционала цели и необходимое условие оптимальности.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для определения функции $\psi(x, t) = \psi(x, t; v)$ из условий

$$\begin{aligned} \psi_t + (k(x, t)\psi_x)_x - v(x, t)\psi + H(x, t; v)\psi(l, t) &= \\ &= 2 \left[\int_0^T \omega(\xi) u(x, \xi; v) d\xi - \alpha(x) \right] \omega(t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (24)$$

$$\psi(0, t) = 0, \quad \psi_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (25)$$

где $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 \leq t < T\}$.

Решение краевой задачи (23)–(25), соответствующее управлению $v \in V$, определяем как обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$, т.е. как функцию $\psi(x, t) = \psi(x, t; v) \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} [\psi \eta_t + k(x, t)\psi_x \eta_x + v(x)\psi \eta - H(x, t)\psi(l, t)\eta] dx dt &= \\ &= -2 \int_{Q_T} \left\{ \left[\int_0^T \omega(\xi) u(x, \xi; v) d\xi - \alpha(x) \right] \omega(t) \right\} \eta dx dt \quad (26) \end{aligned}$$

для всех $\eta = \eta(x, t) \in \check{W}_{2,0}^{1,1}(Q_T) = \{\eta : \eta \in W_2^{1,1}(Q_T), \eta(0, t) = 0, \eta(x, 0) = 0\}$.

Применяя метод Галеркина, можно показать, что при каждом фиксированном $v \in V$ существует единственное обобщенное решение $\psi(x, t) = \psi(x, t; v) \in V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ краевой задачи (23)–(??); это решение принадлежит также пространству $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$|\psi|_{Q_T} + \max_{0 \leq t \leq T} \|\psi_x(x, t; v)\|_{2,(0,l)} + \|\psi_t\|_{2,Q_T} \leq M_5 \left\| \left[\int_0^T \omega(\xi) u(x, \xi; v) d\xi - \alpha(x) \right] \omega(t) \right\|_{2,Q_T}. \quad (27)$$

Учитывая очевидные неравенства

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2), \quad \sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

неравенство Коши—Буняковского и оценки (12), имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \left[\int_0^T \omega(\xi) u(x, \xi; v) d\xi - \alpha(x) \right] \omega(t) \right\|_{2,Q_T} = \\ & = \left\{ \int_0^l \int_0^T \left| \int_0^T \omega(\xi) u(x, \xi; v) d\xi - \alpha(x) \right|^2 \omega^2(t) dx dt \right\}^{1/2} \leq \\ & \leq \sqrt{2} \|\omega\|_{2,(0,T)} \left[\|\omega\|_{2,(0,T)} \|u\|_{2,Q_T} + \|\alpha\|_{2,(0,l)} \right] \leq \\ & \leq \sqrt{2} \|\omega\|_{2,(0,T)} \left[M_1 \|\omega\|_{2,(0,T)} \left(\|\varphi\|_{2,(0,l)} + 2\|f\|_{2,1,Q_T} \right) + \|\alpha\|_{2,(0,l)} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда и из (27) следует, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\psi|_{Q_T} + \max_{0 \leq t \leq T} \|\psi_x(x, t; v)\|_{2,(0,l)} + \|\psi_t\|_{2,Q_T} & \leq \\ & \leq \sqrt{2} M_5 \|\omega\|_{2,(0,T)} \left[M_1 \|\omega\|_{2,(0,T)} \left(\|\varphi\|_{2,(0,l)} + 2\|f\|_{2,1,Q_T} \right) + \|\alpha\|_{2,(0,l)} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при условиях (1)–(3), (5) функционал (6) непрерывно дифференцируем по Фреше на V и его градиент имеет вид

$$J'(v) = \int_0^T u(x, t; v) \psi(x, t; v) dt, \quad 0 < x < l. \quad (29)$$

Доказательство. Пусть $v = v(x) \in V$ — некоторая точка, $\Delta v = \Delta v(x) \in L_s(0, l)$ — такое приращение, что $v + \Delta v \in V$. Пусть $\Delta u = \Delta u(x, t) = u(x, t; v + \Delta v) - u(x, t; v)$. Из (1)–(3) следует, что Δu является обобщенным решением из $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ задачи

$$\Delta u_t - (k(x, t) \Delta u_x)_x + (v + \Delta v) \Delta u = -\Delta v u, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (30)$$

$$\Delta u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (31)$$

$$\Delta u(0, t) = 0, \quad k(l, t) \Delta u_x(l, t) = \int_0^l H(x, t) \Delta u(x, t) dx, \quad 0 < t \leq T. \quad (32)$$

Для решения задачи (30)–(32) верна оценка

$$|\Delta u|_{Q_T} + \max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u_x(x, t)\|_{2,(0,l)} + \|\Delta u_t\|_{2,Q_T} \leq M_6 \|\Delta v u\|_{2,Q_T}. \quad (33)$$

Используя неравенство (7) (см. [8]), получаем неравенство

$$\|\Delta v u\|_{2,Q_T} \leq T^{1/s} \|\Delta v\|_{s,(0,l)} \|u\|_{2s/(s-2),Q_T}.$$

Учитывая это неравенство в (33) и ограниченность вложения $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \rightarrow L_{2s/(s-2)}(Q_T)$ при $s > 2$ выводим оценку

$$|\Delta u|_{Q_T} + \max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u_x(x, t)\|_{2,(0,l)} + \|\Delta u_t\|_{2,Q_T} \leq M_7 \|\Delta v\|_{s,(0,l)} \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)}. \quad (34)$$

Приращение функционала (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta J(v) = J(v + \Delta v) - J(v) = 2 \int_0^l \left\{ \left[\int_0^T \omega(t) u(x, t; v) dt - \alpha(x) \right] \int_0^T \omega(t) \Delta u(x, t) dt \right\} dx + \\ + \int_0^l \left| \int_0^T \omega(t) \Delta u(x, t) dt \right|^2 dx. \end{aligned} \quad (35)$$

С помощью решений краевых задач (23)–(25) и (30)–(32) преобразуем приращения (35). Решение краевой задачи (30)–(32) удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (\Delta u_t \psi + k \Delta u_x \eta_x + (v + \Delta v) \Delta u \psi) dx dt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x, t) \Delta u(x, t) dx \right] \psi(l, t) dt = \\ = - \int_{Q_T} u \psi \Delta v dx dt. \end{aligned} \quad (36)$$

Если в тождестве (26) положим $\eta = \Delta u$ и полученное равенство вычтем из (36), то придем к равенству

$$2 \int_0^l \left\{ \left[\int_0^T \omega(\xi) u(x, \xi; v) d\xi - \alpha(x) \right] \int_0^T \omega(t) \Delta u(x, t) dt \right\} dx = \int_{Q_T} u \psi \Delta v dx dt + \int_{Q_T} \Delta u \psi \Delta v dx dt.$$

Учитывая это равенство, из (35) находим

$$\Delta J(v) = \int_{Q_T} u \psi \Delta v dx dt + R, \quad (37)$$

где

$$R = \int_0^l \left| \int_0^T \omega(t) \Delta u(x, t) dt \right|^2 dx + \int_{Q_T} \Delta u \psi \Delta v dx dt. \quad (38)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (37) при заданном $v \in V$ определяет линейный ограниченный функционал от Δv в $L_s(0, l)$. Действительно, линейность этого функционала очевидна. Кроме того, используя неравенство (8) из [8] и ограниченность вложения $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \rightarrow L_{2s/(s-1)}(Q_T)$ (см. [8]), получаем неравенства

$$\left| \int_{Q_T} u \psi \Delta v dx dt \right| \leq \|u\|_{2s/(s-1), Q_T} \|\psi\|_{2s/(s-1), Q_T} \|\Delta v\|_{s, Q_T} \leq M_8 \|u\|_{2, Q_T}^{(1,1)} \|\psi\|_{2, Q_T}^{(1,1)} \|\Delta v\|_{s, (0, l)}, \quad (39)$$

что влечет ограниченность функционала, определяемого первым слагаемым в правой части (37).

Рассуждая аналогично выводу оценки (39) и используя (34), имеем

$$\left| \int_{Q_T} \Delta u \psi \Delta v dx dt \right| \leq M_9 \|u\|_{2, Q_T}^{(1,1)} \|\psi\|_{2, Q_T}^{(1,1)} \|\Delta v\|_{s, (0, l)}^2. \quad (40)$$

Кроме того, используя неравенство Коши—Буняковского и оценки (34), получаем неравенства

$$\int_0^l \left| \int_0^T \omega(t) \Delta u(x, t) dt \right|^2 dx \leq \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \|\Delta u\|_{2,Q_T}^2 \leq M_7^2 \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 (\|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)})^2 \|\Delta v\|_{s,(0,l)}^2.$$

Отсюда и из (40) следует, что для остаточного члена R , определяемого равенством (38), верна оценка

$$|R| \leq \left(M_7^2 \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} + M_9 \|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \right) \|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\Delta v\|_{s,(0,l)}.$$

Учитывая в (37) эту оценку, заключаем, что функционал (6) дифференцируем по Фреше на V и его градиент определяется равенством (29).

Теперь покажем, что отображение $v \rightarrow J'(v)$ непрерывно действует из V в $L_{s'}(0, l)$, где $L_{s'}(0, l)$ — сопряженное пространство к $L_s(0, l)$, $s' = s/(s-1)$. Пусть

$$\Delta \psi = \Delta \psi(x, t) = \psi(x, t; v + \Delta v) - \psi(x, t; v), \quad \psi = \psi(x, t) = \psi(x, t; v).$$

Из (23)–(25) следует, что $\Delta \psi$ является обобщенным решением из $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta \psi_t + (k \Delta \psi_x)_x - (v + \Delta v) \Delta \psi + H \Delta \psi(l, t) = \\ = 2\omega(t) \int_0^T \omega(\xi) \Delta u(x, \xi; v) d\xi + \Delta v \psi, \quad (x, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\Delta \psi(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (42)$$

$$\Delta \psi(0, t) = 0, \quad \Delta \psi_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (43)$$

Рассуждая аналогично выводу оценки (28) и используя оценки (34), можно показать, что для решения задачи (41)–(43) верна оценка

$$|\Delta \psi|_{Q_T} + \max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta \psi_x(x, t)\|_{2,(0,l)} + \|\Delta \psi_t\|_{2,Q_T} \leq M_{10} \|\Delta v\|_{s,(0,l)}. \quad (44)$$

Используя равенство (1.7') из [8] и учитывая ограниченность вложения $W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \rightarrow L_{2s/(s-1)}(Q_T)$, а также оценки (34), (44), для любого $h = h(x) \in L_s(0, l)$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \langle J'(v + \Delta v) - J'(v), h \rangle_{L_s} \right| &= \left| \int_{Q_T} (u \Delta \psi h + \psi \Delta u h + \Delta u \Delta \psi h) dx dt \right| \leq \\ &\leq \left[\|u\|_{2s/(s-1), Q_T} \|\Delta \psi\|_{2s/(s-1), Q_T} + \|\psi\|_{2s/(s-1), Q_T} \|\Delta u\|_{2s/(s-1), Q_T} + \right. \\ &\quad \left. + \|\Delta u\|_{2s/(s-1), Q_T} \|\Delta \psi\|_{2s/(s-1), Q_T} \right] \|h\|_{s,(0,l)} \leq \\ &\leq M_{11} \left[\|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\Delta \psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} + \|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\Delta u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} + \|\Delta u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \|\Delta \psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \right] \|h\|_{s,(0,l)} \leq \\ &\leq M_{12} \left[\|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} + \|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} + \|\Delta v\|_{s,(0,l)} \right] \|\Delta v\|_{s,(0,l)} \|h\|_{s,(0,l)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Из (45) следует неравенство

$$\|J'(v + \Delta v) - J'(v)\|_{s',(0,l)} \leq M_{12} \left[\|u\|_{2,Q_T}^{(1,1)} + \|\psi\|_{2,Q_T}^{(1,1)} + \|\Delta v\|_{s,(0,l)} \right] \|\Delta v\|_{s,(0,l)}.$$

Отсюда следует, что

$$\|J'(v + \Delta v) - J'(v)\|_{s',(0,l)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\Delta v\|_{s,(0,l)} \rightarrow 0,$$

т.е. $v \rightarrow J'(v)$ есть непрерывное отображение из V в $L_{s'}(0, l)$. Теорема 2 доказана. $\square$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для оптимальности управления $v_* \in V$ в задаче (1)–(3), (5), (6) необходимо выполнение неравенства

$$\int_0^l \left[\int_0^T u(x, t; v_*) \psi(x, t; v_*) dt \right] [v(x) - v_*(x)] dx \geq 0 \quad (46)$$

для любого $v = v(x) \in V$.

Доказательство. Множество V , определяемое равенством (5), выпукло в $L_s(0, l)$. Согласно теореме 2 функционал $J(v)$ непрерывно дифференцируем по Фреше на V . Тогда в силу [2, теорема 5] на элементе $v_* \in V_*$ необходимо выполнение неравенства $\langle J'(v_*), v - v_* \rangle_{L_s} \geq 0$ при всех $v \in V$. Отсюда и из (29) следует справедливость неравенства (46). Теорема 3 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов О. А., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М., 1988.
2. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М., 1981.
3. Данилкина О. Ю. Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — 14, № 1. — С. 5–9.
4. Иванцов Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Диффер. уравн. — 2004. — 40, № 4. — С. 547–564.
5. Искендеров А. Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // Докл. АН СССР. — 1984. — 274, № 3. — С. 531–533.
6. Кожанов А. И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2004. — № 30. — С. 63–69.
7. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М., 1973.
8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М: Наука, 1967.
9. Назгушев А. З. Уравнения математической биологии. — М.: Наука, 1995.
10. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Диффер. уравн. — 1980. — 16, № 11. — С. 1925–1935.
11. Тагиев Р. К., Касумов Р. А. Об оптимизационной постановке коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием // Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2017. — № 45. — С. 49–59.
12. Тагиев Р. К., Магеррамлы Ш. И. О разрешимости начально-краевой задачи для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием // Вестн. Бакин. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2019. — № 2. — С. 17–26.
13. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 3. — С. 501–504.
14. Iskenderov A. D., Tagiyev R. K. Variational method solving the problem of identification of the coefficients of quasilinear parabolic problem // Proc. 7 Int. Conf. “Inverse Problems: Modelling and Simulation” (Fethiye, Turkey, May 26—31, 2014). — Fethiye, Turkey, 2014. — P. 31.

Тагиев Рафиг Каландар оглы
Бакинский государственный университет
E-mail: r.tagiyev@list.ru

Магеррамлы Шахла Илхам кызы
Бакинский государственный университет
E-mail: semedli.shehla@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 142–149
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-142-149

УДК 517.977

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2023 г. Д. О. ТРУНИН

Аннотация. Рассматривается новый подход к оптимизации нелинейных управляемых систем с терминальными ограничениями на основе последовательного решения задач нелокального улучшения управления в форме специальных систем функциональных уравнений в пространстве управлений. Соответствующие системы строятся как задачи о неподвижной точке специальных операторов управления с дополнительным алгебраическим уравнением. Предлагаемые методы последовательных приближений управления с сохранением всех терминальных ограничений на каждой итерации приближений не содержат трудоемкой операции параметрического варьирования управления, характерной для известных градиентных методов.

Ключевые слова: нелинейная управляемая система, терминальное ограничение, условие улучшения управления, неподвижная точка, итерационный алгоритм.

PROJECTION METHODS FOR IMPROVING CONTROLS IN NONLINEAR CONTROL SYSTEMS WITH TERMINAL CONSTRAINTS

© 2023 D. O. TRUNIN

ABSTRACT. In this paper, we consider a new approach to the optimization of nonlinear control systems with terminal constraints based on the consecutive solution of nonlocal control improvement problems in the form of special systems of functional equations in the control space. The corresponding systems are constructed as fixed-point problems for special control operators with an additional algebraic equation. The methods of successive approximations of the control that preserve terminal constraints at each iteration used in this paper do not contain the time-consuming operation of parametric variation of the control, which is typical for common gradient methods.

Keywords and phrases: nonlinear control system, terminal constraint, control improvement conditions, fixed point, iterative algorithm.

AMS Subject Classification: 49M20

1. Введение. В [6] предложены проекционные методы нелокального улучшения управления в классе линейно-квадратичных задач оптимального управления со свободным правым концом с линейным и квадратичным по состоянию целевым функционалом. Эти методы основываются на специальных формулах приращения целевого функционала без остаточных членов разложений и не содержат трудоемкой операции параметрического варьирования управления в окрестности текущего приближения. Улучшение управления достигается ценой решения двух специальных задач Коши. Указанные особенности методов являются существенными факторами для повышения эффективности решения задач рассматриваемого класса.

В [2] были разработаны проекционные методы нелокального улучшения управления в классе полиномиальных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом на основе формул приращения целевого функционала без остаточных членов приращений, которые были получены с помощью дифференциальной модификации сопряженной системы. При этом для улучшения управления требуется решить специальную краевую задачу улучшения, для которой применяется известный в математике подход возмущений.

В [3] проекционные методы нелокального улучшения управления (см. [2]) обобщаются для класса нелинейных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом. В данном классе задач модифицированная сопряженная система представляет собой дифференциально-алгебраическую систему с дополнительными алгебраическими уравнениями. Задача улучшения управления рассматривается как задача о неподвижной точке проекционного оператора управления, для решения которой модифицируются известные методы неподвижных точек.

В данной статье проекционные методы (см. [3]) развиваются в классе нелинейных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями. Для нелокального улучшения допустимых управлений в рассматриваемом классе задач предлагается использовать итерационные методы решения конструируемой операторной задачи о неподвижной точке с дополнительным алгебраическим условием в пространстве управлений.

2. Постановка задачи. Рассматривается класс нелинейных по состоянию и линейных по управлению задач оптимального управления с одним терминальным ограничением-равенством

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad (2)$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T, \quad (3)$$

$$\Phi_0(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x, u, t) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\Phi_1(u) = \chi(x(t_1)) = 0. \quad (5)$$

Здесь $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ — вектор состояния, $u = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$ — вектор управления; начальное состояние $x^0 \in \mathbb{R}^n$ задано. Функции $f(x, u, t)$ и $F(x, u, t)$ нелинейны по x и линейны по u :

$$f(x, u, t) = A(x, t)u + b(x, t), \quad F(x, u, t) = \langle d(x, t), u \rangle + g(x, t).$$

Функции $A(x, t)$, $b(x, t)$, $d(x, t)$ и $g(x, t)$ нелинейны и дифференцируемы по x и непрерывны по t на множестве $\mathbb{R}^n \times T$; функции $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ нелинейны и дифференцируемы по x ; U — выпуклое компактное множество; интервал времени T фиксирован. К виду (1)–(5) могут быть приведены различные задачи оптимального управления с терминальными, фазовыми и смешанными ограничениями.

Под доступными управлениями в задаче (1)–(5) будем понимать кусочно непрерывные на отрезке T функции со значениями в компактном и выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^r$:

$$V = \{u \in PC^r(T) : u(t) \in U, t \in T\}.$$

Для доступного управления $v \in V$ обозначим через $x(t, v)$, $t \in T$, решение задачи Коши (1), (2) при $u(t) = v(t)$, $t \in T$. Под допустимыми управлениями будем понимать доступные управления, если выполнено терминальное ограничение (5):

$$W = \{u \in V : \chi(x(t_1, u)) = 0\}.$$

В задаче (1)–(5) функция Понтрягина с сопряженной переменной $p \in \mathbb{R}^n$ может быть представлена в виде

$$H(p, x, u, t) = H_0(p, x, t) + \langle H_1(p, x, t), u \rangle,$$

где

$$H_0(p, x, t) = \langle p, b(x, t) \rangle - g(x, t), \quad H_1(p, x, t) = A(x, t)^T p - d(x, t).$$

Рассмотрим регулярный функционал Лагранжа

$$L(u, \lambda) = \Phi_0(u) + \lambda \Phi_1(u), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пусть (u^0, v) — пара доступных управлений в задаче (1)–(5). В соответствии с [3] формула приращения функционала Лагранжа, не содержащая остаточных членов разложения, принимает вид

$$\Delta_v L(u^0, \lambda) = - \int_T \left\langle H_1(p(t, u^0, v, \lambda), x(t, v), t), v(t) - u^0(t) \right\rangle dt, \quad (6)$$

где $p(t, u^0, v, \lambda)$, $t \in T$ — решение модифицированной дифференциально-алгебраической сопряженной системы

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left\langle H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x(t, v) - x(t, u^0) \right\rangle + \left\langle r(t), x(t, v) - x(t, u^0) \right\rangle = \\ = H(p, x(t, v), u^0(t), t) - H(p, x(t, u^0), u^0(t), t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u^0)) - \lambda \chi_x(x(t_1, u^0)) - q, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi_x(x(t_1, u^0)) + \lambda \chi_x(x(t_1, u^0)), x(t_1, v) - x(t_1, u^0) \right\rangle + \left\langle q, x(t_1, v) - x(t_1, u^0) \right\rangle = \\ = \varphi(x(t_1, v)) - \varphi(x(t_1, u^0)) + \lambda(\chi(x(t_1, v)) - \chi(x(t_1, u^0))). \end{aligned} \quad (10)$$

Алгебраические соотношения (8), (10) всегда можно разрешить (см. [3]) относительно величин $r(t)$, q и свести дифференциально-алгебраическую задачу к обычной дифференциальной задаче (возможно, не единственным способом).

В частности, в подклассе квадратичных по состоянию задач (функции f , F , φ , χ квадратичны по x) величины $r(t)$, q могут быть представлены следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{2} H_{xx}(p, x(t, u^0), u^0(t), t) (x(t, v) - x(t, u^0)), \\ q &= \frac{1}{2} \left(\varphi_{xx}(x(t_1, u^0)) + \lambda \chi_{xx}(x(t_1, u^0)) \right) (x(t_1, v) - x(t_1, u^0)). \end{aligned}$$

Для доступного управления $u^0 \in V$ и фиксированного параметра проектирования $\alpha > 0$ образуем аналогично [2] вектор-функцию

$$u^\alpha(p, x, t) = P_U(u^0(t) + \alpha H_1(p, x, t)), \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0, \quad q \quad t \in T,$$

где P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

Согласно известному свойству проекции имеет место оценка

$$\left\langle H_1(p, x, t), u^\alpha(p, x, t) - u^0(t) \right\rangle \geq \frac{1}{\alpha} \|u^\alpha(p, x, t) - u^0(t)\|^2. \quad (11)$$

Тогда из (6) и (11) следует оценка приращения функционала:

$$\Delta_{u^\alpha} L(u^0, \lambda) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|u^\alpha(p, x, t) - u^0(t)\|^2 dt. \quad (12)$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$ со свойством

$$\Phi_0(v) \leq \Phi_0(u^0).$$

Покажем, что для нелокального улучшения допустимого управления $u^0 \in W$ достаточно решить при некотором $\alpha > 0$ следующую систему функциональных уравнений в пространстве управлений:

$$\begin{aligned} v(t) &= u^\alpha(p(t, u^0, v, \lambda), x(t, v), t), \quad t \in T, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \chi(x(t_1, v)) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть управление $v \in W$ является решением системы (13). Тогда в силу оценки (12) имеет место улучшение целевого функционала Φ_0 с оценкой

$$\Delta_v \Phi_0(u^0) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v(t) - u^0(t)\|^2 dt. \quad (14)$$

Из оценки (14) следует, что, если управление v отличается от управления u^0 , то обеспечивается строгое улучшение целевого функционала.

Система уравнений (13) рассматривается как задача о неподвижной точке в пространстве управлений с дополнительным алгебраическим уравнением. Это позволяет применить и модифицировать известные итерационные методы неподвижных точек для решения системы (13).

3. Итерационные методы. Для решения системы (13) при фиксированном $\alpha > 0$ предлагается следующая модификация известного алгоритма метода простой итерации (см. [5]) при $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} v^{k+1}(t) &= u^\alpha(p(t, u^0, v^k, \lambda), x(t, v^{k+1}), t), \quad t \in T, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \chi(x(t_1, v^{k+1})) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В качестве начального приближения итерационного процесса (15) выбирается управление $v^0 \in V$. Главной особенностью предлагаемого итерационного алгоритма является подбор параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ на каждой итерации при $k \geq 1$ для удовлетворения терминального ограничения. Предполагается, что такая возможность существует.

Реализация предлагаемого неявного итерационного процесса (15) на каждой итерации состоит в следующих действиях.

Найдем решение $p^\lambda(t)$, $t \in T$, задачи (7)–(10) при $v = v^k(t)$. Пусть $x^\lambda(t)$, $t \in T$, — решение специальной задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, u^\alpha(p^\lambda(t), x, t), t), \quad t \in T, x(t_0) = x^0.$$

Найдем значение множителя Лагранжа $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ из условия

$$\chi(x^\lambda(t_1)) = 0. \quad (16)$$

Следующее приближение управления сформируем по правилу

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(p^{\bar{\lambda}}(t), x^{\bar{\lambda}}(t), t).$$

Таким образом, реализация неявного процесса (15) на каждой итерации сводится к решению алгебраического уравнения (16).

Другая модификация алгоритма метода простой итерации для решения системы (13) имеет более привычную стандартную явную форму при $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} v^{k+1}(t) &= u^\alpha(p(t, u^0, v^k, \lambda), x(t, v^k), t), \quad t \in T, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \chi(x(t_1, v^{k+1})) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Для этой модификации на каждой итерации процесса (17) после вычисления решения $p^\lambda(t)$, $t \in T$, задачи (7)–(10) при $v = v^k(t)$ формируется вспомогательное управление

$$v^\lambda(t) = u^\alpha(p^\lambda(t), x(t, v^k), t), \quad t \in T.$$

Для вспомогательного управления v^λ отыскивается решение $x(t, v^\lambda)$, $t \in T$, стандартной задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, v^\lambda(t), t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x^0.$$

Значение множителя Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}$ на каждой итерации процесса (17) выбирается из условия выполнения терминального ограничения:

$$\chi(x(t_1, v^\lambda)) = 0. \quad (18)$$

При этом предполагается, что решение задачи (18) существует.

Для полученного решения $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ уравнения (18) определяется следующее приближение управления:

$$v^{k+1}(t) = v^{\bar{\lambda}}(t), \quad t \in T.$$

Особенностью предлагаемых итерационных алгоритмов для решения задачи о неподвижной точке (13) является выполнение терминального ограничения (5) на каждой итерации процесса последовательных приближений управления. При этом начальное приближение v^0 итерационных процессов может не удовлетворять терминальному ограничению, что является важным для практической реализации алгоритмов.

Сходимость предлагаемых итерационных процессов регулируется выбором параметра проектирования $\alpha > 0$ и может быть обоснована на основе метода возмущений и принципа сжимающих отображений аналогично [2] при достаточно малых значениях $\alpha > 0$.

Итерационные процессы применяются до первого улучшения управления u^0 . Далее строится новая задача улучшения для полученного управления и процесс повторяется. Критерием остановки итераций улучшения управления является отсутствие строгого улучшения управления по целевому функционалу.

На основе последовательного решения задач улучшения управления строятся соответствующие итерационные методы построения релаксационных последовательностей управлений, удовлетворяющих терминальному ограничению.

4. Пример. Рассматривается модельная задача стабилизации вращения спутника (см. [7]), которая приводилась к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{3}x_2x_3 + 100u_1, & \dot{x}_2 &= -x_1x_3 + 25u_2, & \dot{x}_3 &= -x_1x_2 + 100u_3, \\ x_1(0) &= 200, & x_2(0) &= 30, & x_3(0) &= 40, \\ u_1(t) &\in [-40, 40], & u_2(t) &\in [-20, 20], & u_3(t) &\in [-40, 40], & t \in [0, 0.1], \\ \Phi_0(u) &= \frac{1}{2}(x_2^2(0.1) + x_3^2(0.1)) \rightarrow \min, \\ \Phi_1(u) &= x_1(0.1) = 0. \end{aligned}$$

Уравнения системы описывают динамику вращения спутника, снабженного тремя реактивными двигателями. Управления характеризуют расход топлива. Минимизируемый функционал от управления отражает цель достигнуть состояния, характеризующегося отсутствием вращения спутника (стабилизация).

Расчет полученной задачи производился на основе последовательного решения задач улучшения управления (13), для решения которых использовался неявный итерационный процесс (15). Эффективность указанного метода (М3) сравнивалась со стандартными методами условного градиента (М1) и проекции градиента (М2) (см. [4]). Для решения полученной задачи методами М1 и М2 задача приводилась к задаче без ограничений со штрафным функционалом следующего вида:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(x_2^2(0.1) + x_3^2(0.1)) + \frac{\gamma}{2}x_1^2(0.1),$$

где $\gamma > 0$ — параметр штрафа, который подбирается экспериментально для обеспечения выполнения ограничения с заданной точностью. Параметр $\alpha > 0$ выбирается экспериментально для обеспечения сходимости итерационных приближений метода М3.

Расчет фазовых и сопряженных задач Коши осуществлялся с помощью стандартной процедуры языка Фортран `divprk` (см. [1]), реализующей метод Рунге—Кутты 5-6 порядка. Абсолютная погрешность численного интегрирования задач Коши задавалась равной 10^{-10} . Значения вычисленных управляющих, фазовых и сопряженных переменных в процессе расчета запоминались в узлах заданной равномерной сетки с шагом дискретизации, равным 0,001. Для аппроксимации управлений между узлами равномерной сетки использовалась кусочно постоянная интерполяция.

Решение алгебраического уравнения с заданной точностью относительно множителя Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}$, возникающего на каждой итерации процесса (15), осуществлялось с помощью минимизации квадратичной невязки уравнения средствами стандартной процедуры языка Фортран `dumpr1`

Таблица 1

Метод	Φ_0^*	Φ_1^*	N	Примечание
M1	$3,16428 \times 10^{-13}$	$2,45074 \times 10^{-7}$	8512	0,5
M2	$1,48471 \times 10^{-13}$	$3,13041 \times 10^{-7}$	2642	0,5
M3	$3,63122 \times 10^{-13}$	$5,229144 \times 10^{-8}$	1458	10^{-5}

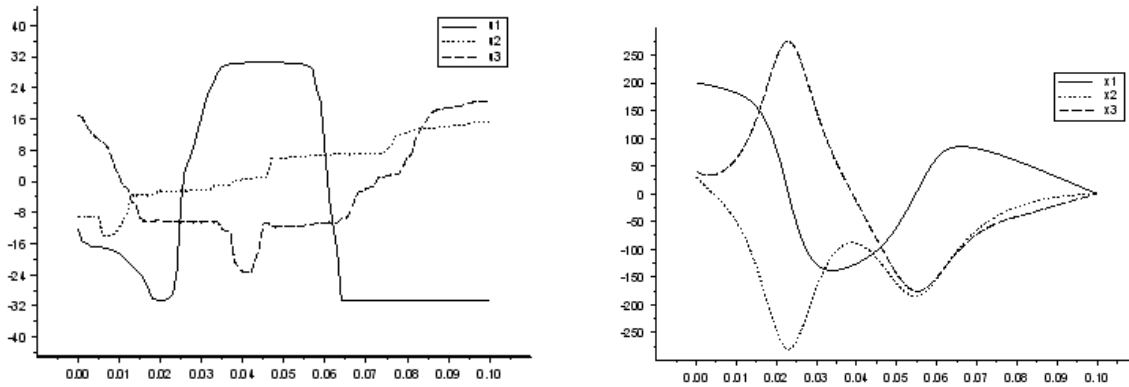


Рис. 1

(см. [1]), реализующей метод деформируемого многогранника. Трудоемкость методов оценивалась суммарным количеством расчетных задач Коши для фазовых и сопряженных переменных. В качестве начального приближения для всех сравниваемых методов выбиралось $u^0(t) \equiv 0, t \in T$. Практическим критерием остановки расчета задачи во всех методах являлось условие

$$|\Phi_0(u^{k+1}) - \Phi_0(u^k)| \leq M |\Phi_0(u^k)|,$$

где $k \geq 0$ — номер итерации, $M = 10^{-5}$.

Сравнительные качественные и количественные результаты расчетов представлены в таблице 1, где использованы следующие обозначения: Φ_0^* — расчетное значение целевого функционала задачи, Φ_1^* — модуль расчетного значения функционала ограничения, N — суммарное количество расчетных фазовых и сопряженных задач Коши. В примечании для методов M1 и M2 указано значение параметра штрафа $\gamma > 0$, для метода M3 — значение проекционного параметра $\alpha > 0$, обеспечивающего сходимость итерационного процесса (15). Графики расчетных управлений и фазовых траекторий для методов M1, M2 и M3 приведены соответственно на рис. 1, 2 и 3.

Результаты расчетов позволяют сделать вывод о лучшей вычислительной эффективности предлагаемого проекционного метода, оцениваемой по суммарному количеству задач Коши, по сравнению с методами условного градиента и проекции градиента. При этом всеми сравниваемыми методами получены практически одинаковые расчетные фазовые траектории и значения функционалов от управления.

5. Заключение. Предлагаемые проекционные методы нелокального улучшения допустимых управлений в рассматриваемом классе нелинейных задач с ограничениями характеризуются следующими свойствами:

- 1) отсутствие достаточно трудоемкой процедуры варьирования управления в малой окрестности улучшаемого управления, характерной для градиентных методов;
- 2) точное выполнение терминального ограничения на каждой итерации улучшения управления.

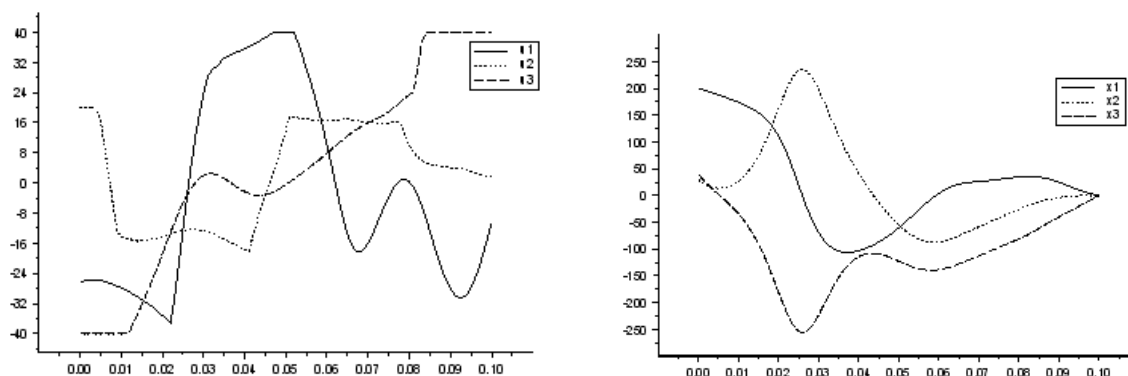


Рис. 2

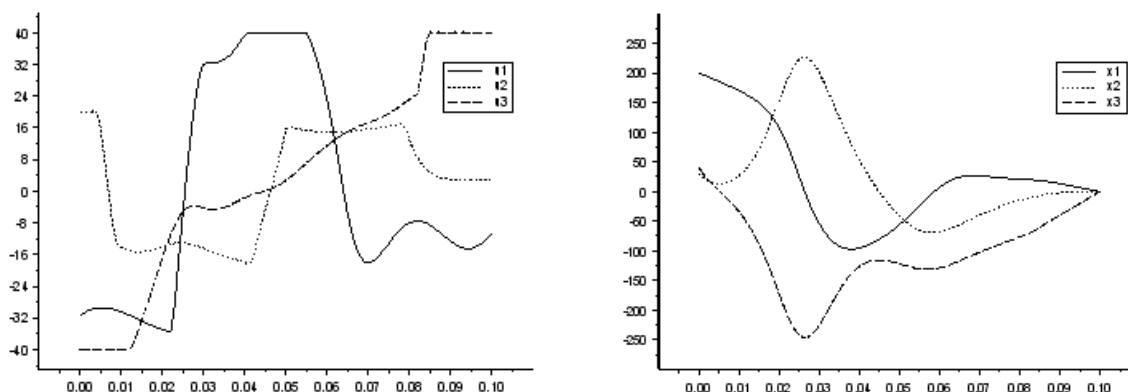


Рис. 3

Точное выполнение терминального ограничения на каждой итерации процесса дает возможность сузить область поиска управлений до множества допустимых управлений в отличие от стандартных методов Лагранжа, в которых поиск осуществляется одновременно как по множеству доступных управлений, так и по множеству множителей Лагранжа. Методы штрафов в общем случае также не позволяют строить итерационный процесс на множестве допустимых управлений в рассматриваемом классе задач оптимального управления с ограничениями. Свойство допустимости управлений предлагаемых проекционных методов дает возможность эффективно получать приемлемые на практике допустимые управления по значению критерия оптимальности.

Указанные свойства методов являются важными факторами для повышения эффективности решения задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бартенев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч. 2. — М.: Диалог-МИФИ, 2001.
2. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. — Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008.
3. Булдаев А. С. Методы неподвижных точек на основе операции проектирования в задачах оптимизации управляющих функций и параметров// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат., информ. — 2017. — 1. — С. 38–54.
4. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1994.

5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
6. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
7. Тятюшкин А. И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 1992.

Трунин Дмитрий Олегович

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

E-mail: tdobsu@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 150–160
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-150-160

УДК 517.983.51

СИНГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2023 г. М. В. ФАЛАЛЕЕВ

Аннотация. Рассматриваются вырожденные линейные системы дифференциальных уравнений специального вида в банаховых пространствах. Структура решения задачи Коши для таких систем полностью определяется свойствами матричного и операторного пучков системы. Решения строятся в пространстве распределений с ограниченным слева носителем и восстанавливаются с помощью матричной фундаментальной оператор-функции системы. На основе анализа построенного таким способом обобщенного решения можно получить теоремы о разрешимости в пространстве функций конечной гладкости исходной задачи Коши.

Ключевые слова: банахово пространство, оператор Фредгольма, обобщенная функция, фундаментальная матричная оператор-функция, пучок постоянных матриц.

SINGULAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES

© 2023 M. V. FALALEEV

ABSTRACT. Degenerate linear systems of differential equations of a special form in Banach spaces are considered. The structure of the solution of the Cauchy problem for such systems is completely determined by the properties of the matrix and operator pencils of the system. Solutions are constructed in the space of distributions with support bounded on the left and are restored using the matrix fundamental operator function of the system. Based on the analysis of the generalized solution constructed in this way, one can obtain theorems on the solvability in the space of functions of finite smoothness of the original Cauchy problem.

Keywords and phrases: Banach space, Fredholm operator, generalized function, fundamental matrix operator-function, sheaf of constant matrices.

AMS Subject Classification: 34G10

1. Введение. Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$MB\bar{u}^{(N)}(t) = LA\bar{u}(t) + \bar{f}(t), \quad (1)$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0, \quad \dot{\bar{u}}(0) = \bar{u}_1, \quad \dots, \quad \bar{u}^{(N-1)}(0) = \bar{u}_{N-1}; \quad (2)$$

здесь $\bar{u}(t)$ и $\bar{f}(t)$ — вектор-функции (столбцы) размерности s , компоненты $u_i(t)$ которых — функции со значениями в E_1 , $f_i(t)$ — функции со значениями в E_2 , $i = 1, \dots, s$, E_1, E_2 — банаховы пространства, B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2 , $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00407 А)..

оператор B необратим, $\overline{R(B)} = R(B)$, оператор A непрерывно обратим. Символами $A\bar{u}(t)$ и $B\bar{u}^{(N)}(t)$ обозначены вектор-функции (столбцы) размерности s с компонентами $Au_i(t)$ и $Bu_i^{(N)}(t)$, M и L — квадратные $(s \times s)$ -матрицы, записи $M\bar{u}^{(N)}(t)$ и $L\bar{u}(t)$ означают, как обычно, действия матриц M и L на вектор-функции (столбцы) $B\bar{u}^{(N)}(t)$ и $A\bar{u}(t)$ соответственно.

В уравнении (1) не только оператор B при старшей производной необратим, но и матрица M вырождена. В случае $\det M \neq 0$ без ограничения общности можно считать, что $M \equiv E_s$ — единичная матрица; соответствующие результаты были получены в [10]. Таким образом, в уравнении (1) имеем «двойное вырождение», а именно, ядро оператора $N(B) \neq \emptyset$ и $\det M = 0$. Отметим, что системы вида (1)–(2) встречаются, например, при изучении колебательных процессов в сложно организованных структурах типа молекулы ДНК (см. [12] и библиографию там же).

2. Основные сведения о пучках матриц с постоянными коэффициентами. Известно (см. [4]), что для любой квадратной матрицы C размерности d существует такая невырожденная матрица T , что

$$TCT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{q_1} + N_{q_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_{q_2} + N_{q_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\mu E_{q_\mu} + N_{q_\mu} \end{pmatrix} = \text{diag} \{ \lambda_1 E_{q_1} + N_{q_1}, \lambda_2 E_{q_2} + N_{q_2}, \dots, \lambda_\mu E_{q_\mu} + N_{q_\mu} \}; \quad (3)$$

здесь $q_1 + q_2 + \dots + q_\mu = d$, индекс q_i при матрицах E_{q_i} (единичной) или N_{q_i} (жорданов нильпотентный блок) означает их размерность q_i ,

$$N_{q_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, \mu, \quad N_{q_i}^{q_i} = O_{q_i}. \quad (4)$$

Правую часть равенства (3) называют канонической жордановой формой матрицы C , блоки $(\lambda_i E_{q_i} + N_{q_i})$ называют жордановыми «ящичками», числа λ_i называют собственными числами матрицы C кратности q_i , причем все λ_i отличны от нуля, если $\det C \neq 0$.

Для квадратных матриц M и L размерности s из уравнения (1) выражение вида $(\lambda M + L)$, где λ — скалярный параметр (вообще говоря, комплексный), принято называть пучком пары матриц M и L (см. [3, 11]). Такой пучок называется регулярным, если его характеристический многочлен $\det(\lambda M + L) \neq 0$; в этом случае существует пара таких невырожденных квадратных матриц P и Q размерности s , что

$$P(\lambda M + L)Q = \lambda \begin{pmatrix} E_d & O_{d \times (s-d)} \\ O_{(s-d) \times d} & N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_d & O_{d \times (s-d)} \\ O_{(s-d) \times d} & E_{s-d} \end{pmatrix} \quad (5)$$

(см. [3, 11]), где $N = \text{diag} \{ N_{m_1}, N_{m_2}, \dots, N_{m_j} \}$, N_{m_i} — жордановы нильпотентные блоки размерности m_i (см. (4)), $d + m_1 + m_2 + \dots + m_j = s$. Обозначим через $\tilde{m} = \max(m_1, m_2, \dots, m_j)$ индекс регулярности (см. [11]) матричного пучка $(\lambda M + L)$; тогда $N^{\tilde{m}} = O_{m_1+m_2+\dots+m_j} = O_{s-d}$, J_d — квадратная матрица размерности d жордановой структуры (см. правую часть формулы (3)). Если $\det L \neq 0$, то в силу (5) в представлении (3) для матрицы J_d все $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, \mu$.

3. Матричные фундаментальные оператор-функции в условиях фредгольмовости. Пусть для пучка $(\lambda B + A)$ операторных коэффициентов уравнения (1) выполнено следующее условие:

- (А) оператор B фредгольмов (см. [2]), т.е. $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n$, и имеет полный A -жорданов набор (см. [2]) элементов $\{\varphi_i^{(j)} \in E_1, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i\}$.

Тогда существует набор функционалов $\{\phi_i^{(j)} \in E_2^*, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i\}$, составляющих полный A^* -жорданов набор оператора B^* ; здесь $\{\phi_i^{(1)}, i = 1, \dots, n\}$ — базис ядра $N(B)$ оператора B и $\{\phi_i^{(1)}, i = 1, \dots, n\}$ — базис ядра $N(B^*)$ сопряженного оператора B^* .

В соответствии с теоремой Хана—Банаха (см. [2]) существуют биортогональные системы элементов

$$\langle \varphi_i^{(1)}, \gamma_k \rangle = \langle z_k, \phi_i^{(1)} \rangle = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad \gamma_k \in E_1^*, \quad z_k \in E_2,$$

где δ_{ik} — символ Кронекера; тогда существуют ограниченный оператор Треногина—Шмидта вида

$$\Gamma = \left(B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$$

(см. [2]) и проектор в E_2

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \phi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)}.$$

В соответствии с [10, теорема 1] справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если матричный пучок $(\lambda \mathbb{M} + \mathbb{L})$ регулярен, $\det \mathbb{L} \neq 0$, операторный пучок $(\lambda B + A)$ удовлетворяет условию (A), то матричный дифференциальный оператор $(\mathbb{E}_d B \delta^{(N)}(t) - \mathbb{J}_d A \delta(t))$ имеет в классе $K'_+(E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию вида

$$\tilde{\mathcal{E}}_d(t) = \text{diag} \{ E_{\lambda_1}(t), E_{\lambda_2}(t), \dots, E_{\lambda_\mu}(t) \}; \quad (6)$$

здесь каждый из диагональных блоков $E_{\lambda_\nu}(t)$ является верхнетреугольной квадратной матрицей размерности q_ν вида

$$E_{\lambda_\nu}(t) = \mathbb{E}_{q_\nu} \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) * \sigma_{\lambda_\nu}(t), \quad \nu = 1, \dots, \mu,$$

$$\sigma_{\lambda_\nu}(t) = \begin{pmatrix} I\delta(t) & A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) & (A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t))^2 & \dots & \dots & (A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t))^{q_\nu-1} \\ 0 & I\delta(t) & A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) & \dots & \dots & (A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t))^{q_\nu-2} \\ 0 & 0 & I\delta(t) & \dots & \dots & (A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t))^{q_\nu-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) & (A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t))^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I\delta(t) & A\delta(t) * \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I\delta(t) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) = \Gamma \mathcal{U}_N(\lambda_\nu A \Gamma t) [I - \tilde{Q}] \theta(t) - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \phi_i^{(j)} \rangle \frac{1}{\lambda_\nu^{k+1}} \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k \cdot N)}(t) \right),$$

$$\mathcal{U}_N(\lambda_\nu A \Gamma t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_\nu A \Gamma)^{i-1} \frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}.$$

Следствие 1. Если в условиях утверждения 1 все элементарные делители матрицы $\mathbb{J}_d$ имеют первую степень, то матричная фундаментальная оператор-функция дифференциального оператора $(\mathbb{E}_d B \delta^{(N)}(t) - \mathbb{J}_d A \delta(t))$ имеет в классе $K'_+(E_2)$ (наиболее простой) вид

$$\tilde{\mathcal{E}}_d(t) = \text{diag} \{ \mathcal{E}_{\lambda_1}(t), \mathcal{E}_{\lambda_2}(t), \dots, \mathcal{E}_{\lambda_d}(t) \}.$$

Имеет место также следующий факт.

Утверждение 2. Если матричный пучок $(\lambda \mathbb{M} + \mathbb{L})$ регулярен, оператор A непрерывно обратим, то матричный дифференциальный оператор $(\mathbb{N} B \delta^{(N)}(t) - \mathbb{E}_{s-d} A \delta(t))$ имеет в классе $K'_+(E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию вида

$$- \sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k (A^{-1} B)^k A^{-1} \delta^{(k \cdot N)}(t).$$

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции (см. [17]) необходимо проверить справедливость следующих двух матрично-операторных равенств:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{N}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{E}_{s-d}A\delta(t) \right) * \left(- \sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{(k \cdot N)}(t) \right) = \mathbb{E}_{s-d}I_2\delta(t), \\ & \left(- \sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{(k \cdot N)}(t) \right) * \left(\mathbb{N}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{E}_{s-d}A\delta(t) \right) = \mathbb{E}_{s-d}I_1\delta(t); \end{aligned}$$

здесь I_1 и I_2 — единичные операторы банаховых пространств E_1 и E_2 соответственно. Действительно, в силу нильпотентности $\mathbb{N}$ (см. формулу (5)) получаем

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{N}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{E}_{s-d}A\delta(t) \right) * \left(- \sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{(k \cdot N)}(t) \right) = \\ & = - \sum_{k=0}^{\tilde{m}-2} \mathbb{N}^{k+1}B(A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{((k+1) \cdot N)}(t) + \sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k A(A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{(k \cdot N)}(t) = \\ & = - \sum_{k=1}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k B(A^{-1}B)^{k-1} A^{-1}\delta^{(k \cdot N)}(t) + \sum_{k=1}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k AA^{-1}B(A^{-1}B)^{k-1} A^{-1}\delta^{(k \cdot N)}(t) + \mathbb{E}_{s-d}AA^{-1}\delta(t) = \\ & = \mathbb{E}_{s-d}I_2\delta(t). \end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично:

$$\begin{aligned} & \left(- \sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{(k \cdot N)}(t) \right) * \left(\mathbb{N}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{E}_{s-d}A\delta(t) \right) = \\ & = - \sum_{k=0}^{\tilde{m}-2} \mathbb{N}^{k+1}(A^{-1}B)^{k+1}\delta^{((k+1) \cdot N)}(t) + \sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k \delta^{(k \cdot N)}(t) = \\ & = - \sum_{k=1}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k \delta^{(k \cdot N)}(t) + \sum_{k=1}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k \delta^{(k \cdot N)}(t) + \mathbb{E}_{s-d}I_1\delta(t) = \mathbb{E}_{s-d}I_1\delta(t). \quad \square \end{aligned}$$

Из утверждений 1 и 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Если матричный пучок $(\lambda\mathbb{M} + \mathbb{L})$ регулярен, $\det \mathbb{L} \neq 0$, операторный пучок $(\lambda B + A)$ удовлетворяет условию (A) и оператор A непрерывно обратим, то матричный дифференциальный оператор $(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L}A\delta(t))$ (соответствующий уравнению (1)) имеет в классе $K'_+(E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t) = \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & - \sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{(k \cdot N)}(t) \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t). \quad (8)$$

Доказательство. Доказательство проведем по той же схеме, что и в утверждении 2. В силу равенства (5) и утверждений 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L}A\delta(t) \right) * \mathcal{E}_N(t) = \mathbb{P}^{-1}\delta(t) * \mathbb{P}\delta(t) * \left(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L}A\delta(t) \right) * \\ & * \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & - \sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k(A^{-1}B)^k A^{-1}\delta^{(k \cdot N)}(t) \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}^{-1}\delta(t) * \left(\begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & \mathbb{N} \end{pmatrix} B\delta^{(N)}(t) - \begin{pmatrix} \mathbb{J}_d & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & \mathbb{E}_{s-d} \end{pmatrix} A\delta(t) \right) * \\
&\quad * \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & -\sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k (A^{-1}B)^k A^{-1} \delta^{(k \cdot N)}(t) \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t) = \\
&= \mathbb{P}^{-1}\delta(t) * \begin{pmatrix} \mathbb{E}_d B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{J}_d A\delta(t) & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & \mathbb{N} B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{E}_{s-d} A\delta(t) \end{pmatrix} * \\
&\quad * \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & -\sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k (A^{-1}B)^k A^{-1} \delta^{(k \cdot N)}(t) \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t) = \\
&= \mathbb{P}^{-1}\delta(t) * \begin{pmatrix} \mathbb{E}_d I_2 \delta(t) & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & \mathbb{E}_{s-d} I_2 \delta(t) \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t) = \mathbb{E}_s I_2 \delta(t).
\end{aligned}$$

Аналогично проверяется второе равенство:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_N(t) * \left(\mathbb{M} B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L} A\delta(t) \right) &= \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & -\sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k (A^{-1}B)^k A^{-1} \delta^{(k \cdot N)}(t) \end{pmatrix} * \\
&\quad * \mathbb{P}\delta(t) * \left(\mathbb{M} B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L} A\delta(t) \right) * \mathbb{Q}^{-1}\delta(t) = \\
&= \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_d(t) & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & -\sum_{k=0}^{\tilde{m}-1} \mathbb{N}^k (A^{-1}B)^k A^{-1} \delta^{(k \cdot N)}(t) \end{pmatrix} * \\
&\quad * \begin{pmatrix} \mathbb{E}_d B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{J}_d A\delta(t) & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & \mathbb{N} B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{E}_{s-d} A\delta(t) \end{pmatrix} * \mathbb{Q}^{-1}\delta(t) = \\
&= \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \mathbb{E}_d I_1 \delta(t) & \mathbb{O}_{d \times (s-d)} \\ \mathbb{O}_{(s-d) \times d} & \mathbb{E}_{s-d} I_1 \delta(t) \end{pmatrix} * \mathbb{Q}^{-1}\delta(t) = \mathbb{E}_s I_1 \delta(t). \quad \square
\end{aligned}$$

В условиях теоремы 1 единственным обобщенным решением класса $K'_+(E_1)$ задачи Коши (1)–(2) является функция вида

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \left(\bar{f}(t)\theta(t) + \mathbb{M} B \bar{u}_{N-1} \delta(t) + \mathbb{M} B \bar{u}_{N-2} \delta'(t) + \dots + \mathbb{M} B \bar{u}_0 \delta^{(N-1)}(t) \right). \quad (9)$$

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 все элементарные делители матрицы $\mathbb{J}_d$ первой степени, $\mathbb{N}$ – нильпотентный блок второго порядка (см. (4)), все $p_i = 1, i = 1, \dots, n$, $N = 1$, то матричная фундаментальная оператор-функция (соответствующая уравнению (1)) имеет вид

$$\mathcal{E}_1(t) = \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \text{diag} \left\{ \mathcal{E}_{\lambda_1}^1(t), \mathcal{E}_{\lambda_2}^1(t), \dots, \mathcal{E}_{\lambda_d}^1(t) \right\} & \mathbb{O}_{d \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times d} & \begin{pmatrix} -A^{-1}\delta(t) & -A^{-1}BA^{-1}\delta'(t) \\ 0 & -A^{-1}\delta(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t);$$

здесь

$$\mathcal{E}_{\lambda_\nu}^1(t) = \Gamma \exp(\lambda_\nu A \Gamma t) \left[I - \sum_{i=1}^n \left\langle \cdot, \phi_i^{(1)} \right\rangle A \varphi_i^{(1)} \right] \theta(t) - \frac{1}{\lambda_\nu} \sum_{i=1}^n \left\langle \cdot, \phi_i^{(1)} \right\rangle \varphi_i^{(1)} \delta(t), \quad \nu = 1, \dots, d.$$

В условиях теоремы 2 единственным обобщенным решением задачи Коши (1)–(2) в классе $K'_+(E_1)$, в соответствии с формулой (9), является функция

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_1(t) * \left(\bar{f}(t)\theta(t) + \mathbb{M} B \bar{u}_0 \delta(t) \right), \quad (10)$$

сингулярная составляющая которой имеет вид

$$-\mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \mathbb{O}_d & \mathbb{O}_{d \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times d} & \mathbb{N} \end{pmatrix} (\mathbb{Q}^{-1}A^{-1}B\bar{u}_0 + \mathbb{P}A^{-1}BA^{-1}\bar{f}(0))\delta(t)$$

и обращается в нуль при выполнении условий

$$(\mathbb{O}_{2 \times d} \quad \mathbb{N})(\mathbb{Q}^{-1}B\bar{u}_0 + \mathbb{P}BA^{-1}\bar{f}(0)) = 0; \quad (11)$$

это первое условие разрешимости задачи Коши (1)–(2) в классе $C^1(t \geq 0, E_1)$. Регулярная составляющая функции (10) обращает уравнение (1) в тождество; потребовав, чтобы она удовлетворяла начальным условиям (2), получим ещё одну группу условий разрешимости исходной задачи Коши (1)–(2) в классе $C^1(t \geq 0, E_1)$, а именно,

$$(\mathbb{O}_{2 \times d} \quad \mathbb{E}_2)(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_0 + \mathbb{P}\bar{f}(0)) + (\mathbb{O}_{2 \times d} \quad \mathbb{N})\mathbb{P}BA^{-1}\bar{f}'(0) = 0, \quad (12)$$

$$\langle (\mathbb{P}\bar{f}(0))_\nu + \lambda_\nu(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_0)_\nu, \phi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \nu = 1, \dots, d; \quad (13)$$

здесь $(\mathbb{P}\bar{f}(0))_\nu$ и $(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_0)_\nu$ — координаты ν соответствующих векторов.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2, то исходная задача Коши (1)–(2) разрешима в классе $C^1(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия разрешимости (11), (12), (13).

Теорема 4. Если в условиях теоремы 1 все элементарные делители матрицы $\mathbb{J}_d$ имеют первую степень, $\mathbb{N}$ — нильпотентный блок второго порядка (см. (4)), все $p_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, $N = 2$, то матричная фундаментальная оператор-функция (соответствующая уравнению (1)) имеет вид

$$\mathcal{E}_2(t) = \mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \text{diag} \{ \mathcal{E}_{\lambda_1}^2(t), \mathcal{E}_{\lambda_2}^2(t), \dots, \mathcal{E}_{\lambda_d}^2(t) \} & \mathbb{O}_{d \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times d} & \begin{pmatrix} -A^{-1}\delta(t) & -A^{-1}BA^{-1}\delta''(t) \\ 0 & -A^{-1}\delta(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix} * \mathbb{P}\delta(t);$$

здесь

$$\mathcal{E}_{\lambda_\nu}^2(t) = \Gamma \frac{\text{sh}(\sqrt{\lambda_\nu A \Gamma} t)}{\sqrt{\lambda_\nu A \Gamma}} \left[I - \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \phi_i^{(1)} \rangle A \varphi_i^{(1)} \right] \theta(t) - \frac{1}{\lambda_\nu} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \phi_i^{(1)} \rangle \varphi_i^{(1)} \delta(t), \quad \nu = 1, \dots, d.$$

Так как

$$\frac{\text{sh}(\sqrt{\lambda_\nu A \Gamma} t)}{\sqrt{\lambda_\nu A \Gamma}} = \mathcal{U}_2(\lambda_\nu A \Gamma t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_\nu A \Gamma)^{i-1} \frac{t^{2i-1}}{(2i-1)!},$$

то здесь операторный корень $\sqrt{\lambda_\nu A \Gamma}$ — «формальный символ».

В условиях теоремы 4 единственное решение задачи Коши (1)–(2) в классе $K'_+(E_1)$ имеет вид

$$\bar{u}(t) = \mathcal{E}_2(t) * (\bar{f}(t)\theta(t) + \mathbb{M}B\bar{u}_1\delta(t) + \mathbb{M}B\bar{u}_0\delta'(t)). \quad (14)$$

Сингулярной составляющей решения (14) является распределение

$$-\mathbb{Q}\delta(t) * \begin{pmatrix} \mathbb{O}_d & \mathbb{O}_{d \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times d} & \mathbb{N} \end{pmatrix} \times \left[(\mathbb{Q}^{-1}A^{-1}B\bar{u}_0 + \mathbb{P}A^{-1}BA^{-1}\bar{f}(0))\delta'(t) + (\mathbb{Q}^{-1}A^{-1}B\bar{u}_1 + \mathbb{P}A^{-1}BA^{-1}\bar{f}'(0))\delta(t) \right],$$

которое обращается в нуль, если

$$\begin{cases} (\mathbb{O}_{2 \times d} \quad \mathbb{N})(\mathbb{Q}^{-1}B\bar{u}_0 + \mathbb{P}BA^{-1}\bar{f}(0)) = 0, \\ (\mathbb{O}_{2 \times d} \quad \mathbb{N})(\mathbb{Q}^{-1}B\bar{u}_1 + \mathbb{P}BA^{-1}\bar{f}'(0)) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Регулярная составляющая решения (14) удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2), если

$$\begin{cases} (\mathbb{O}_{2 \times d} & \mathbb{E}_2)(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_0 + \mathbb{P}\bar{f}(0)) + (\mathbb{O}_{2 \times d} & \mathbb{N})\mathbb{P}B A^{-1}\bar{f}''(0) = 0, \\ (\mathbb{O}_{2 \times d} & \mathbb{E}_2)(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_1 + \mathbb{P}\bar{f}'(0)) + (\mathbb{O}_{2 \times d} & \mathbb{N})\mathbb{P}B A^{-1}\bar{f}'''(0) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \langle (\mathbb{P}\bar{f}(0))_\nu + \lambda_\nu(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_0)_\nu, \phi_i \rangle = 0, \\ \langle (\mathbb{P}\bar{f}'(0))_\nu + \lambda_\nu(\mathbb{Q}^{-1}A\bar{u}_1)_\nu, \phi_i \rangle = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad \nu = 1, \dots, d. \quad (17)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. Если выполнены условия теоремы 4, то задача Коши (1)–(2) разрешима в классе $C^2(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия разрешимости (15), (16) и (17).

Замечание 1. Условия разрешимости (11), (12), (15) и (16) связаны с индексом регулярности матричного пучка $(\lambda\mathbb{M} + \mathbb{L})$ (см. [11]), а условия (13) и (17) со свойствами операторного пучка $(\lambda B + A)$.

Пример 1 (система уравнений Баренблата–Желтова–Кочиной). Рассмотрим систему уравнений

$$(\alpha - \Delta)\mathbb{M}\bar{u}_t = \beta\mathbb{L}\Delta\bar{u} + \bar{f}(x);$$

здесь $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $\mathbb{M}$ и $\mathbb{L}$ — квадратные матрицы размерности s , $\bar{u}(t, x)$ и $\bar{f}(x)$ — вектор-функции столбцы размерности s , Δ — оператор Лапласа.

Рассмотрим для этой системы задачу Коши–Дирихле в цилиндре $(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$:

$$\bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0(x), \quad x \in \Omega; \quad \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (t, x) \in (\mathbb{R}_+ \times \Omega).$$

Уравнения такого вида встречаются при моделировании динамики давления жидкости, фильтрующей в трещиновато-пористой среде (см. [1]), процессов теплопроводности с «двумя температурами» (см. [13]), процессов влагопереноса в почве (см. [15]), течения жидкостей второго порядка (см. [19]).

Пусть в разложении (5) все элементарные делители матрицы $\mathbb{J}$ имеют первую степень и $\mathbb{N}$ — нильпотентный блок второго порядка. Данная задача редуцируется к системе вида (1)–(2), если выбрать операторы B и A и банаховы пространства, например, следующим образом:

$$E_1 \equiv \left\{ u \in W_2^{k+2} : u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad E_2 \equiv W_2^k;$$

здесь W_2^k — пространство Соболева, $B = \alpha - \Delta$, $A = \beta\Delta$, $\alpha \in \sigma(\Delta)$ — спектр оператора Лапласа. При таком выборе оператор B — фредгольмов, $\{\varphi_i, i = 1, \dots, n\}$ — пространство решений однородной задачи Дирихле

$$\Delta u = \alpha u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0;$$

так как $(\Delta\varphi_i, \varphi_j) = \alpha\delta_{ij}$, то A -присоединенных элементов нет, т.е. все $p_i = 1$, $i = 1, \dots, n$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 3 и справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Если начальные условия $\bar{u}_0(x)$ и правая часть $\bar{f}(x)$ таковы, что

$$(\bar{e}_s, (\alpha - \Delta)(\beta\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_0(x) + \mathbb{P}\Delta^{-1}\bar{f}(x))) \equiv 0, \quad \bar{e}_s = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^s,$$

$$(\mathbb{O}_{2 \times d} & \mathbb{E}_2)(\beta\mathbb{Q}^{-1}\Delta\bar{u}_0(x) + \mathbb{P}\bar{f}(x)) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$((\mathbb{P}\bar{f}(x))_\nu + \lambda_\nu\alpha\beta(\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_0)_\nu, \phi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \nu = 1, \dots, d, \quad d = s - 2,$$

то задача Коши–Дирихле для системы уравнений Баренблатта–Желтова–Кочиной будет однозначно разрешимой в классе $C^1(t \geq 0, E_1)$ (гладких по t функций).

Пример 2 (система уравнений Буссинеска—Лява). Рассмотрим систему уравнений

$$(\alpha - \Delta)\mathbb{M}\bar{u}_{tt} = \beta^2\mathbb{L}\Delta\bar{u} + \bar{f}(x).$$

Такое уравнение в одномерном случае моделирует продольные волновые процессы в тонком упругом стержне с поперечной инерцией (см. [8]). Здесь, как и в предыдущем примере, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $\mathbb{M}$ и $\mathbb{L}$ — квадратные матрицы размерности s , $\bar{u}(t, x)$ и $\bar{f}(x)$ — вектор-функции столбцы размерности s , Δ — оператор Лапласа.

Ищется вектор-функция $\bar{u}(t, x)$, определенная в цилиндре $(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$, удовлетворяющая рассматриваемой системе, а также начальным и краевым условиям

$$\bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0(x), \quad \bar{u}_t|_{t=0} = \bar{u}_1(x), \quad x \in \Omega; \quad \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (t, x) \in (\mathbb{R}_+ \times \Omega).$$

Пусть в разложении (5) все элементарные делители матрицы $\mathbb{J}$ имеют первую степень и $\mathbb{N}$ — нильпотентный блок второго порядка. Данная начально-краевая задача редуцируется к системе вида (1)–(2), если выбрать пространства E_1 и E_2 , как в примере 1, а операторы определить формулами $B = \alpha - \Delta$, $A = \beta^2\Delta$, $\alpha \in \sigma(\Delta)$; тогда в соответствии с теоремой 5 получаем следующее утверждение.

Утверждение 4. Если начальные условия $\bar{u}_0(x)$ и $\bar{u}_1(x)$ и правая часть $\bar{f}(x)$ таковы, что

$$\begin{aligned} &(\bar{e}_s, (\alpha - \Delta)(\beta^2\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_0(x) + \mathbb{P}\Delta^{-1}\bar{f}(x))) \equiv 0, \\ &(\bar{e}_s, (\alpha - \Delta)\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_1(x)) \equiv 0, \quad \bar{e}_s = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^s, \\ &(\mathbb{O}_{2 \times d} \quad \mathbb{E}_2)(\beta^2\mathbb{Q}^{-1}\Delta\bar{u}_0(x) + \mathbb{P}\bar{f}(x)) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{O}_{2 \times d} \quad \mathbb{E}_2)(\mathbb{Q}^{-1}\Delta\bar{u}_1(x)) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &((\mathbb{P}\bar{f}(x))_\nu + \lambda_\nu\alpha\beta^2(\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_0)_\nu, \phi_i) = 0, \quad ((\mathbb{Q}^{-1}\bar{u}_1)_\nu, \phi_i) = 0, \\ &i = 1, \dots, n, \quad \nu = 1, \dots, d, \quad d = s - 2, \end{aligned}$$

то задача Коши—Дирихле для системы уравнений Буссинеска—Лява однозначно разрешима в классе $C^2(t \geq 0, E_1)$.

4. Матричные фундаментальные оператор-функции в условиях нетеровости. Пусть для пучка $(\lambda B + A)$ операторных коэффициентов уравнения (1) выполняются условия $\dim N(B) = n$, $\dim N(B^*) = m$, $n \neq m$. Как в предыдущем разделе, введем следующие обозначения: $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in E_1$ — базис ядра $N(B)$ оператора B , $\{\phi_j\}_{j=1}^m \in E_2^*$ — базис ядра $N(B^*)$ сопряженного оператора B^* , $\{z_j\}_{j=1}^m \in E_2$ и $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \in E_1^*$ — биортогональные к этим базисам системы элементов и функционалов, т.е.

$$\langle \varphi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad \langle z_k, \phi_j \rangle = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, m.$$

С помощью этих систем элементов и функционалов построим проекторы

$$P = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i : E_1 \rightarrow E_1, \quad Q = \sum_{j=1}^m \langle \cdot, \phi_j \rangle z_j : E_2 \rightarrow E_2.$$

В монографии [16] доказано, что в этих предположениях существует единственный ограниченный псевдообратный оператор $B^+ \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$, обладающий следующими свойствами:

$$\begin{aligned} D(B^+) &= R(B) \oplus \{z_1, \dots, z_m\} \equiv E_2, \quad R(B^+) = N(P) \cap D(B), \\ BB^+ &= I - Q \text{ на } D(B^+), \quad B^+B = I - P \text{ на } D(B), \end{aligned}$$

причем $N(B^+) = \{z_1, \dots, z_m\}$, справедливы операторные равенства $BB^+B = B$, $B^+BB^+ = B^+$ и оператор AB^+ ограничен.

Аналогичным набором свойств обладает сопряженный оператор $B^{+*} \in \mathcal{L}(E_1^*, E_2^*)$, а именно:

$$\begin{aligned} N(B^{+*}) &= \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}, \quad B^*B^{+*}B^* = B^*, \quad B^{+*}B^*B^{+*} = B^{+*}, \quad B^{+*} = B^{+*}, \\ D(B^{+*}) &= R(B^*) \oplus \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \equiv E_1^*, \quad R(B^{+*}) = N(Q^*) \cap D(B^*), \end{aligned}$$

$$B^*B^{*+} = I - P^* \text{ на } D(B^{*+}), \quad B^{*+}B^* = I - Q^* \text{ на } D(B^*);$$

здесь

$$P^* = \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, \cdot \rangle \gamma_i : E_1^* \rightarrow E_1^*, \quad Q^* = \sum_{j=1}^m \langle z_j, \cdot \rangle \phi_j : E_2^* \rightarrow E_2^*.$$

Следуя работам [6, 7] введем системы присоединенных элементов и функционалов:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(j)} &= (B^+A)^{j-1} \varphi_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j \geq 2, \quad \varphi_i^{(1)} = \varphi_i, \\ \phi_i^{(j)} &= (B^{*+}A^*)^{j-1} \phi_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j \geq 2, \quad \phi_i^{(1)} = \phi_i. \end{aligned}$$

Для присоединенных элементов и функционалов справедливы включения

$$\varphi_i^{(j)} \in N(P), \quad \phi_i^{(j)} \in N(Q^*),$$

т.е. в силу их построения и свойств операторов B^+ и B^{*+} выполняются равенства

$$\langle \varphi_i^{(j)}, \gamma_k \rangle = 0, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad j \geq 2, \quad \langle z_k, \phi_i^{(j)} \rangle = 0, \quad i, k = 1, \dots, m, \quad j \geq 2.$$

Далее, как и в [7], введем следующее условие:

(В) Элементы $\varphi_i^{(j)}$ удовлетворяют системе уравнений и неравенств

$$\begin{aligned} B\varphi_i^{(j)} &= A\varphi_i^{(j-1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p_i, \\ B\varphi_i^{(p_i+1)} &\neq A\varphi_i^{(p_i)}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \text{rang} \left\| \langle A\varphi_i^{(p_i)}, \phi_k^{(1)} \rangle \right\|_{\substack{i=1, \dots, n, \\ k=1, \dots, m}} &= \min(n, m) = l. \end{aligned}$$

Условие (В) означает, что система элементов $\{\varphi_i^{(j)}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i\}$ образует полный А-жорданов набор оператора B (см. [2, 6]). Введем еще один проектор пространства E_2 :

$$\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \phi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)};$$

если при этом $n > m$, то полагаем $\phi_i^{(1)} = 0$ при $i = m + 1, \dots, n$, а остальные функционалы $\phi_i^{(j)} \in E_2^*$, $i = m + 1, \dots, n$, $j = 2, \dots, p_i$ произвольны («свободные параметры»).

Теорема 6. Если матричный пучок $(\lambda \mathbb{M} + \mathbb{L})$ регулярен, $\det \mathbb{L} \neq 0$, операторный пучок $(\lambda B + A)$ удовлетворяет условию (В), $n > m$, и оператор A непрерывно обратим, то матричный дифференциальный оператор $(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L}A\delta(t))$, соответствующий уравнению (1), имеет в классе $K'_+(E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию, определяемую формулами (8), (7), (6), в которых при $\nu = 1, \dots, \mu$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) &= B^+ \mathcal{U}_N(\lambda_\nu AB^+ t) [I - \mathcal{Q}] \theta(t) - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \phi_i^{(j)} \rangle \frac{1}{\lambda_\nu^{k+1}} \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k \cdot N)}(t) \right), \\ \mathcal{U}_N(\lambda_\nu AB^+ t) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_\nu AB^+)^{i-1} \frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}. \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы опускаем, поскольку оно в идейном плане не отличается от доказательства теоремы 1. Учет технических особенностей, связанных с условием $n > m$, осуществляется так же, как, например, при доказательстве [14, теорема 1].

Теорема 7. Если матричный пучок $(\lambda \mathbb{M} + \mathbb{L})$ регулярен, $\det \mathbb{L} \neq 0$, операторный пучок $(\lambda B + A)$ удовлетворяет условию (В), $n < m$, и оператор A непрерывно обратим, то матричная оператор-функция из теоремы 6 является фундаментальной для дифференциального оператора

$(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L}A\delta(t))$, соответствующего уравнению (1), в подклассе из $K'_+(E_2)$, удовлетворяющем условию

$$\text{diag} \{ \sigma_1^r(t), \sigma_2^r(t), \dots, \sigma_\mu^r(t) \} * \bar{u}(t) = 0, \quad r = n+1, \dots, m, \quad \dim \bar{u}(t) = d,$$

где

$$\sigma_\nu^r(t) = \mathbb{E}_{q_\nu} \langle \mathcal{U}_N(\lambda_\nu AB^+t), \psi_r \rangle z_r \theta(t) * \sigma_{\lambda_\nu}(t), \quad \nu = 1, \dots, \mu$$

(представление для $\sigma_{\lambda_\nu}(t)$ — формула (7)).

Доказательство этой теоремы не приводим по тем же причинам, что и для предыдущей теоремы. Появление специального подкласса в пространстве распределений $K'_+(E_2)$ связано с условием $n < m$.

Замечание 2. Если $n = m$, т.е. если оператор B фредгольмов, то $\Gamma = B^+$ и теорема 6 превращается в теорему 1.

5. Матричные фундаментальные оператор-функции в условиях спектральной ограниченности. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, оператор $B \in L(E_1, E_2)$ необратим, A — замкнутый линейный оператор из E_1 в E_2 . Далее, следуя [5, 18], будем называть B -резольвентным множеством оператора A следующее открытое множество комплексной плоскости:

$$\rho^B(A) \equiv \{ \mu \in \mathbb{C} : (\mu B - A)^{-1} \in L(E_2, E_1) \}.$$

Оператор A называется спектрально ограниченным относительно оператора B (или (B, σ) -ограниченным), если вне некоторого круга радиуса $a > 0$ операторный пучок $(\mu B - A)$ непрерывно обратим, т.е. $\{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu| > a \} \subset \rho^B(A)$. Рассмотрим окружность комплексной плоскости $\Gamma \equiv \{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a \}$; тогда в условиях (B, σ) -ограниченности, как показано в [5, 18], операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mu B - A)^{-1} B d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} B (\mu B - A)^{-1} d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно. Проекторы P и Q порождают разложения пространств в прямые суммы

$$E_1 \equiv E_1^0 \oplus E_1^1 = \ker P \oplus \text{im } P, \quad E_2 \equiv E_2^0 \oplus E_2^1 = \ker Q \oplus \text{im } Q.$$

Действия операторов A и B при этом естественным образом расщепляются так, что их сужения $A_0 : E_1^0 \rightarrow E_2^0$ и $B_1 : E_1^1 \rightarrow E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1 : E_1^1 \rightarrow E_2^1$ ограничен, сами операторы A и B псевдокоммутируют с проекторами P и Q , т.е. $QB = BP$ и $QA = AP$.

Теорема 8. Если матричный пучок $(\lambda \mathbb{M} + \mathbb{L})$ регулярен, $\det \mathbb{L} \neq 0$, оператор A является (B, σ) -ограниченным и непрерывно обратимым, то матричный дифференциальный оператор $(\mathbb{M}B\delta^{(N)}(t) - \mathbb{L}A\delta(t))$, соответствующий уравнению (1), имеет в классе $K'_+(E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию, определяемую формулами (8), (7), (6), в которых при $\nu = 1, \dots, \mu$

$$\mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) = \mathcal{U}_{\lambda_\nu}(t) B_1^{-1} Q \theta(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_0^{-1} B_0)^k}{\lambda_\nu^{k+1}} A_0^{-1} (I - Q) \delta^{(k \cdot N)}(t),$$

где

$$\mathcal{U}_{\lambda_\nu}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mu^N B - \lambda_\nu A)^{-1} B e^{\mu t} d\mu.$$

Если дополнительно предположить, что ∞ — несущественно особая точка (см. [5, 18]) операторного пучка $(\mu B - A)^{-1}$ (т.е. существует такое $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, что $(A_0^{-1} B_0)^p \neq 0$, но $(A_0^{-1} B_0)^{p+1} \equiv 0$), то, очевидно,

$$\mathcal{E}_{\lambda_\nu}(t) = \mathcal{U}_{\lambda_\nu}(t) B_1^{-1} Q \theta(t) - \sum_{k=0}^p \frac{(A_0^{-1} B_0)^k}{\lambda_\nu^{k+1}} A_0^{-1} (I - Q) \delta^{(k \cdot N)}(t).$$

Как и выше, доказательство этой теоремы состоит в проверке определения; при этом специфика рассматриваемого случая учитывается так же, как, например, при доказательстве основных утверждений в [9].

Замечание 3. Представленный здесь метод исследования применим к другим типам систем уравнений, а именно, систем в частных производных вида

$$\mathbb{M}B\mathcal{D}^\alpha \bar{u}(\bar{x}) = \mathbb{L}A\bar{u}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x}),$$

где $\mathcal{D}^\alpha$ — мультииндекс, дифференциально-разностным системам вида

$$\mathbb{M}B \frac{\partial^N \bar{u}(t, \bar{x})}{\partial t^N} = \mathbb{L}A \left(\bar{u}(t, \bar{x} - \bar{\mu}) - \bar{u}(t, \bar{x}) \right) + \bar{f}(t, \bar{x}),$$

системам теплопроводности

$$\mathbb{M}B \frac{\partial \bar{u}(t, \bar{x})}{\partial t} = \mathbb{L}A \Delta_{\bar{x}} \bar{u}(t, \bar{x}) + \bar{f}(t, \bar{x}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах// Прикл. мат. мех. — 1960. — 24, № 5. — С. 58–73.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
3. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
5. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов// Усп. мат. наук. — 1994. — 49, № 4. — С. 47–74.
6. Сидоров Н. А., Романова О. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением// Диффер. уравн. — 1983. — 19, № 9. — С. 1516–1526.
7. Сидоров Н. А., Романова О. А., Благодатская Е. Б. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части// Диффер. уравн. — 1994. — 30, № 4. — С. 729–731.
8. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
9. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции интегро-дифференциальных операторов в условиях спектральной или полиномиальной ограниченности// Уфим. мат. ж. — 2020. — 12, № 2. — С. 55–70.
10. Фалалеев М. В., Коробова О. В. Системы дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах// Сиб. мат. ж. — 2008. — 49, № 4. — С. 916–927.
11. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003.
12. Chen G., Zhang H. Initial boundary value problem for a system of generalized IMBq equations// Math. Meth. Appl. Sci. — 2004. — 27. — P. 497–518.
13. Chen P. J., Gurtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures// Z. Angew. Math. Phys. — 1968. — 19. — P. 614–627.
14. Falaleev M. V. Convolutional integro-differential equations in Banach spaces with a Noetherian operator in the main part// J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. — 2022. — 15, № 2. — P. 148–159.
15. Hallaire M. On a theory of moisture-transfer// Inst. Rech. Agronom. — 1964. — № 3. — P. 60–72.
16. Nashed M. Z. Generalized Inverses and Applications. — New York: Academic Press, 1976.
17. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.
18. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht, Boston: VSP, 2003.
19. Ting T. W. Certain non-steady flows of second-order fluids// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1963. — 14, № 1. — P. 28–57.

Фалалеев Михаил Валентинович
Иркутский государственный университет
E-mail: mvfalaleev@gmail.com

CONTENTS

Variation optimality condition of a boundary control in a composite model of linear differential equations of different types (<i>A. V. Arguchintsev, V. P. Poplevko</i>)	3
Necessary and sufficient criteria of Lyapunov stability for systems of ordinary differential equations (<i>S. G. Bulanov</i>)	10
Operator methods of the search for extremal controls in linear-quadratic optimal control problems (<i>A. S. Buldaev, I. D. Kazmin</i>)	19
First boundary-value problem for a class of elliptic systems in a half-space (<i>E. A. Golovko</i>)	28
On the exact solution of a certain system of hyperbolic differential equations (<i>E. Yu. Grazhdantseva</i>)	35
Closed-loop state feedback in linear problems of terminal control (<i>N. M. Dmitruk</i>)	43
Methods for improving the efficiency of the positional minimum principle in optimal control problems (<i>V. A. Dykhta</i>)	54
On the asymptotics of the Goursat problem with a power boundary layer (<i>I. V. Zakharova</i>)	65
On symmetric boolean functions invariant under the Möbius transform (<i>O. V. Zubkov</i>)	71
On some zero-front solutions of an evolution parabolic system (<i>A. L. Kazakov, P. A. Kuznetsov, L. F. Spevak</i>)	80
Two sequential test schemes with aftereffect (<i>N. A. Kolokolnikova</i>)	89
Hierarchical structures and combinatorial problems of information retrieval (<i>O. V. Kuzmin</i>)	97
Hypersurfaces with proportional principal curvatures in $(n + 1)$ -dimensional Euclidean space (<i>E. Yu. Kuzmina</i>)	109
Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. V (<i>V. M. Morozov, V. I. Kalenova, M. G. Rak</i>)	115
On the identification Volterra kernels in integral models of linear nonstationary dynamical systems (<i>S. V. Solodusha, E. D. Antipina</i>)	125
Variational method for solving a coefficient inverse problem for a parabolic equation with integral conditions (<i>R. K. Tagiyev, Sh. I. Maharramli</i>)	133
Projection methods for improving controls in nonlinear control systems with terminal constraints (<i>D. O. Trunin</i>)	142
Singular systems of differential equations in Banach spaces (<i>M. V. Falaleev</i>)	150

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНИТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антониевич,
д.ф.-м.-н. (ВИНИТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович