

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 223



Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 223 (2023)

Дата публикации 15 мая 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редактор-составитель выпуска
Научный редактор выпуска
Компьютерная вёрстка

Н. И. Гусева
Е. Е. Букжалёв
А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 223

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«КЛАССИЧЕСКАЯ И СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ»,
ПОСВЯЩЕННОЙ 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
ПРОФЕССОРА ЛЕВОНА СЕРГЕЕВИЧА АТАНАСЯНА

(15 ИЮЛЯ 1921 г. — 5 ИЮЛЯ 1998 г.)

МОСКВА, 1–4 НОЯБРЯ 2021 г.

ЧАСТЬ 4



Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Действие преобразования подобия на семействах метрических пространств (<i>С. А. Богатый, А. А. Тужилин</i>)	3
О дискретных краевых задачах в четверти плоскости (<i>В. Б. Васильев, А. А. Ходырева</i>)	14
Инвариантность почти контактной метрической структуры гладкого многообразия относительно характеристического вектора (<i>Л. А. Игнаточкина, А. В. Никифорова, М. А. Терпстра</i>)	24
Свойство универсальности для пространств, непрерывно содержащих топологические группы, и их отображений (<i>С. Д. Илиадис, Ю. В. Садовничий</i>)	36
Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена—Вейля (<i>П. Н. Клепиков</i>)	50
Разложимо n -непрерывные отображения (<i>С. М. Комов</i>)	66
Задача о тени и изометрическое вложение псевдосферических поверхностей (<i>А. В. Костин</i>)	69
Корректные краевые двухточечные задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных (<i>А. А. Макаров, И. Г. Николенко</i>)	79
Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле. IV (<i>В. М. Морозов, В. И. Каленова, М. Г. Рак</i>)	84
Деформация норм Минковского в евклидовы нормы (<i>В. Ю. Ровенский</i>)	107
Обобщенная техника Бохнера и ее применение к изучению проективных и конформных отображений (<i>С. Е. Степанов, Й. Микеш, И. И. Цыганок</i>)	112
О магнитостатике в пространстве Лобачевского (<i>А. М. Трепалин</i>)	123
Класс симметричных форм для модели гидридного фазового перехода (<i>И. А. Чернов</i>)	128
О перечислении помеченных связных графов без мостов (<i>В. А. Воблый</i>)	138



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 3–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-3-13

УДК 514.1

ДЕЙСТВИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ НА СЕМЕЙСТВАХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

© 2023 г. С. А. БОГАТЫЙ, А. А. ТУЖИЛИН

Аннотация. Изучается действие мультипликативной группы положительных вещественных чисел на различных семействах метрических пространств, состоящее в умножении всех расстояний в метрических пространствах на одно и то же положительное вещественное число; такое действие называется подобием. Изучаются стационарные подгруппы этих действий.

Ключевые слова: метрическая геометрия, расстояние Громова—Хаусдорфа, собственный класс Громова—Хаусдорфа, облако, действие группы подобия.

ACTION OF SIMILARITY TRANSFORMATIONS ON FAMILIES OF METRIC SPACES

© 2023 S. A. BOGATYI, A. A. TUZHILIN

ABSTRACT. We study the action of the multiplicative group of positive real numbers on various families of a metric space, which consists of multiplying all distances in the metric space by the same positive real number; such an action is called similarity. Stationary subgroups of such actions are studied.

Keywords and phrases: metric geometry, Gromov–Hausdorff distance, Gromov–Hausdorff class, cloud, similarity group action.

AMS Subject Classification: 51F99

1. Введение. Работа посвящена изучению действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ положительных вещественных чисел на семействах метрических пространств: каждому вещественному числу $\lambda \in \mathbb{R}_+$ сопоставляется отображение, умножающее все расстояния в рассматриваемых метрических пространствах на λ . Особое внимание мы уделяем следующим трем семействам. Первое из них — это семейство всех непустых подмножеств нормированного пространства V . Здесь каждому $X \subset V$ сопоставляется подмножество λX того же нормированного пространства V . Второе семейство — собственный класс (в смысле теории множеств фон Неймана—Бернаиса—Гёделя, см. [2]), состоящий из всех непустых метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. Здесь каждому классу изометрии метрического пространства X сопоставляется класс изометрии метрического пространства λX . Точнее, чтобы не впадать в противоречие с теорией множеств, это отображение определим на представителях классов изометрии. Отметим, что на этом собственном классе естественным образом задается знаменитое расстояние Громова—Хаусдорфа (см. [3–5]), которое превращает класс в обобщенное псевдометрическое пространство (слово «обобщенный» означает, что допускаются бесконечные расстояния, а приставка «псевдо» — что между неизометричными пространствами могут быть нулевые расстояния). Полученный класс будем обозначать $\mathcal{GH}$ и называть *классом Громова—Хаусдорфа*. Наконец, третье семейство

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00355).

получается из класса $\mathcal{GH}$ так: вводим на $\mathcal{GH}$ отношение эквивалентности, отнеся к эквивалентным те пары метрических пространств, для которых расстояние Громова—Хаусдорфа конечно. Эти классы эквивалентности назовем *облаками*, а класс всех облаков обозначим Clouds . Оказывается, если расстояния во всех метрических пространствах из данного облака умножить на одно и то же положительное вещественное число, то все эти пространства или останутся в облаке, или перейдут в одно и то же другое облако. Таким образом, рассматриваемое действие переносится и на класс Clouds .

Описанные выше действия будем изучать в терминах стационарных подгрупп разных их элементов. Напомним, что стационарные подгруппы элементов одной и той же орбиты сопряжены. В нашем случае группа $\mathbb{R}_+$ коммутативна, поэтому у всех элементов одной и той же орбиты стационарные подгруппы совпадают. Будем пользоваться следующими обозначениями. Если $X \subset V$ — непустое подмножество нормированного векторного пространства V , то соответствующую стационарную подгруппу обозначим $\text{St}_V X$. Если $X \in \mathcal{GH}$ — представитель класса изометрии всех метрических пространств, то стационарную подгруппу X обозначим $\text{St } X$. Для каждого такого X содержащее его облако обозначим $[X]$, а стационарную подгруппу для $[X] \in \text{Clouds}$ будем обозначать $\text{St}[X]$. Перечислим основные наши результаты.

Вначале опишем общие свойства стационарных подгрупп $\text{St}[X]$ и $\text{St } X$. Для подмножеств X нормированных пространств V изучим все три подгруппы: $\text{St}[X]$, $\text{St } X$ и $\text{St}_V X$. Выясним, что $\text{St}[X] \supset \text{St } X \supset \text{St}_V X$ и приведем примеры, демонстрирующие возможность произвольного расположения равенств в этой цепочке.

Затем остановимся на нетривиальном частном случае, когда в качестве X выступает бесконечная двусторонняя геометрическая прогрессия $X_q = \{q^l\}_{l \in \mathbb{Z}}$, $q > 1$. Ясно, что подгруппа $G_q = X_q \subset \mathbb{R}_+$ переводит прогрессию X_q в себя и, в действительности, $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q$. Покажем, что при достаточно больших q , а именно, если q не меньше максимального корня уравнения $(q-1)^2 = q$, а также при всех рациональных $q > 1$, выполняется $\text{St}[X_q] = G_q$. В частности, отсюда вытекает, что и $\text{St } X_q = G_q$, т.е. все $\lambda \in \mathbb{R}_+$, для которых X_q изометрично λX_q , — это в точности элементы из G_q .

Что можно сказать для оставшихся $q > 1$? В общем случае покажем, что $\text{St}[X_q]$ представляет собой группу $G_{\sqrt[n]{q}}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. К настоящему времени у нас нет примеров, показывающих, что n может быть больше 1. Наша гипотеза: и в этом общем случае группа $\text{St}[X_q]$ равна G_q .

Наконец, рассмотрим «промежуточную» ситуацию, когда q не меньше наибольшего корня уравнения $(q-1)^{m+1} = q$. Отметим, что чем больше m , тем меньше этот корень, тем самым, расширяем область рассматриваемых q , захватывая в пределе все q из промежутка $(2, \infty)$. В этом случае докажем, что $\text{St}[X_q] = G_{\sqrt[n]{q}}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, лежащего между 1 и m . Таким образом, при $q \geq q_m$ понизим «степень неопределенности» в определении стационарной подгруппы.

В заключение соберем полученные результаты, чтобы наглядно представить устройство рассматриваемых стационарных групп для всего семейства пространств aX_q , $q > 1$, $a > 0$.

Исследование выполнено в МГУ имени М. В. Ломоносова, и при работе над статьей А. А. Тужилин пользовался поддержкой Российского научного фонда, проект 21-11-00355.

2. Основные определения и предварительные результаты. Как было отмечено во введении, одно из семейств, на котором будем изучать действие группы $\mathbb{R}_+$, — это собственный класс Громова—Хаусдорфа. Напомним соответствующие определения.

В теории множеств фон Неймана—Бернайса—Гёделя (NGB) все объекты называются *классами*, см., например, [2]. Классы бывают двух типов: множества, которые определяются как классы, являющиеся элементами других классов, и *собственные классы*, которые не являются элементами никаких других классов. На классах определены многие стандартные операции, скажем, декартово произведение, отображение и т. д. В частности, на каждом классе можно задать функцию расстояния. Будем пользоваться следующей терминологией:

- (i) *функцией расстояния* или, короче, *расстоянием* на классе $\mathcal{A}$ будем называть произвольное отображение $\rho: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, для которого всегда $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);

- (ii) если расстояние удовлетворяет неравенству треугольника, т.е. если всегда выполняется

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

то ρ назовем *обобщенной псевдометрикой* (слово «обобщенный» отвечает возможности принимать значение ∞);

- (iii) если для обобщенной псевдометрики дополнительно выполняется условие положительной определенности, т.е. если всегда $\rho(x, y) = 0$ влечет $x = y$, то такое ρ назовем *обобщенной метрикой*;
- (iv) наконец, если ρ не принимает значение ∞ , то в приведенных выше определениях слово «обобщенный» будем опускать, а иногда, чтобы подчеркнуть отсутствие ∞ , будем называть это расстояние *конечным*.

Как принято в метрической геометрии, вместо $\rho(x, y)$ будем почти всегда писать $|xy|$. Напомним теперь определения расстояния Хаусдорфа и Громова—Хаусдорфа.

2.1. Расстояние Хаусдорфа. Пусть X — произвольное метрическое пространство, $x \in X$, а $r > 0$ и $s \geq 0$ — вещественные числа. Через $U_r(x)$ и $B_s(x)$ будем обозначать соответственно *открытый* и *замкнутый шары* с центром в точке x и радиусами r и s . Если A и B — непустые подмножество X , то положим

$$|xA| = |Ax| = \inf \{|xa| : a \in A\}, \quad |AB| = |BA| = \inf \{|ab| : a \in A, b \in B\}.$$

Далее, определим *открытую r -окрестность* $U_r(A)$ и *замкнутую s -окрестность* $B_s(A)$ множества A , положив

$$U_r(A) = \{x \in X : |xA| < r\}, \quad B_s(A) = \{x \in X : |xA| \leq s\}.$$

Наконец, *расстоянием Хаусдорфа* между A и B называется величина

$$d_H(A, B) = \inf \{r : A \subset U_r(B) \text{ \& } U_r(A) \supset B\} = \inf \{s : A \subset B_s(B) \text{ \& } B_s(A) \supset B\}.$$

Расстояние Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой: оно может быть бесконечным, как в случае прямой $\mathbb{R}$ и любой ее точки, а также равняться нулю между разными подмножествами, например, между отрезком $[0, 1]$ и интервалом $(0, 1)$. Тем не менее, на множестве, состоящем из всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств метрического пространства X , расстояние Хаусдорфа является метрикой [1].

2.2. Расстояние Громова—Хаусдорфа. Обозначим $\mathcal{VGH}$ собственный класс, состоящий из всех непустых метрических пространств. На этом классе зададим функцию расстояния, которая называется *расстоянием Громова—Хаусдорфа*:

$$d_{GH}(X, Y) = \inf \{d_H(X', Y') : X', Y' \subset Z \in \mathcal{VGH}, X' \approx X, Y' \approx Y\},$$

где для метрических пространств U и V выражение $U \approx V$ обозначает, что эти пространства изометричны.

Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 1 (см. [1]). *Расстояние Громова—Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой, равной нулю на каждой паре изометричных пространств.*

Эта теорема позволяет исследовать расстояние Громова—Хаусдорфа на собственном классе $\mathcal{GH}$, состоящем из представителей классов изометрии всех метрических пространств, по одному из каждого класса изометрии. Это похоже на рассмотрение всех множеств с точностью до биекции, т.е. рассмотрение собственного класса всех кардинальных чисел. Будем называть $\mathcal{GH}$ *классом Громова—Хаусдорфа*.

Приведем ряд простейших свойств класса $\mathcal{GH}$. Через $\Delta_1 \in \mathcal{GH}$ обозначим одноточечное метрическое пространство. Также для пространства $X \in \mathcal{GH}$ и вещественного числа $\lambda > 0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое получается из X умножением всех его расстояний на λ . Если же $\lambda = 0$ и $\text{diam } X < \infty$, то положим $\lambda X = \Delta_1$.

Предложение 1 (см. [1]). Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ выполняются следующие соотношения:

- (i) $2d_{GH}(\Delta_1, X) = \text{diam } X$;
- (ii) $2d_{GH}(X, Y) \leq \max\{\text{diam } X, \text{diam } Y\}$;
- (iii) если диаметр X или Y конечен, то $|\text{diam } X - \text{diam } Y| \leq 2d_{GH}(X, Y)$;
- (iv) если диаметр X конечен, то $d_{GH}(\lambda X, \mu X) = \frac{1}{2}|\lambda - \mu| \text{diam } X$ для любых $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$;
- (v) для любого $\lambda > 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X, Y)$.

Рассмотрим на $\mathcal{GH}$ отношение $\sim$, определенное так. Будем говорить, что $X, Y \in \mathcal{GH}$ находятся в отношении $\sim$, если и только если $d_{GH}(X, Y) < \infty$. Легко видеть, что $\sim$ является эквивалентностью. Классы эквивалентности этого отношения назовем *облаками* (некоторые авторы используют термин *галактики*). Облако, содержащее метрическое пространство X , обозначим $[X]$. Ясно, что расстояние Громова—Хаусдорфа между точками одного облака конечно, а между точками разных облаков — бесконечно. Тем самым ограничение расстояния Громова—Хаусдорфа на облако является (конечной) псевдометрикой. Класс всех облаков из $\mathcal{GH}$ обозначим Clouds .

3. Основные результаты. Будем рассматривать три семейства метрических пространств и соответствующие действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ положительных вещественных чисел, состоящие в умножении всех расстояний в метрических пространствах на данные $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Эти действия будем изучать в терминах их стационарных подгрупп. Отметим, что корректность определения действия на классе Clouds мгновенно вытекает из предложения 1.

Напомним введенные выше обозначения для стационарных подгрупп G в каждом из трех случаев.

1. Если $X \subset V$ — непустое подмножество нормированного векторного пространства X , то $G = \text{St}_V X$.
2. Если $X \in \mathcal{GH}$, то $G = \text{St } X$.
3. Если $[X] \in \text{Clouds}$, то $G = \text{St}[X]$.

Отметим, что если $\lambda \in \text{St } X$, то пространства X и λX изометричны и, значит, находятся в одном облаке, поэтому $\lambda \in \text{St}[X]$. Тем самым имеет место следующий результат.

Предложение 2. Для любого $X \in \mathcal{GH}$ выполняется $\text{St } X \subset \text{St}[X]$.

В случае нормированного векторного пространства V и непустого $X \subset V$, каждое $\lambda \in \text{St}_V X$ переводит $X \subset V$ в себя, поэтому пространства λX и X изометричны. С учетом предложения 2, приходим к следующему выводу.

Предложение 3. Для любого нормированного пространства V и его непустого подмножества X выполняется $\text{St}[X] \supset \text{St } X \supset \text{St}_V X$. В частности, если $\text{St}[X] = \text{St}_V X$, то $\text{St}[X] = \text{St } X = \text{St}_V X$.

Замечание 1. Приведем примеры, показывающие, что все возможные соотношения включения между $\text{St}[X]$, $\text{St } X$ и $\text{St}_V X$, кроме «запрещенных» предложением 3, могут встречаться. Итак, пусть снова X — непустое подмножество нормированного пространства V .

1. Все три стабилизатора могут совпадать: $\text{St}[X] = \text{St } X = \text{St}_V X$. Например, пусть $X = \{3^l\}_{l \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$. Тогда в силу теоремы 3 (см. ниже) имеем $\text{St}[X] = \{3^l\}_{l \in \mathbb{Z}} = \text{St } X = \text{St}_{\mathbb{R}} X$.
2. Может иметь место $\text{St}[X] \neq \text{St } X = \text{St}_V X$. Например, если $X = \{3^l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, то $\text{St } X = \text{St}_{\mathbb{R}} X = \{1\}$, но $3 \in \text{St}[X]$.
3. Может выполняться $\text{St}[X] = \text{St } X \neq \text{St}_{\mathbb{R}} X$. Например, если $X = \{1 + 3^l\}_{l \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, то X изометрично $\{3^l\}_{l \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, поэтому $\text{St}[X] = \text{St } X$, в частности, $3 \in \text{St } X$. Но $3X \neq X$, поэтому $3 \notin \text{St}_{\mathbb{R}} X$.
4. Все три стабилизатора могут быть различными: $\text{St}[X] \neq \text{St } X \neq \text{St}_V X \neq \text{St}[X]$. Например, это так для $X = \sqrt{2} + \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Действительно, так как для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ множество λX всюду плотно в $\mathbb{R}$, то все эти множества лежат в одном облаке, поэтому $\text{St}[X] = \mathbb{R}_+$. Далее, если $\lambda \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$, то $\lambda \mathbb{Q}$ изометрично $\mathbb{Q}$ и, значит, $\sqrt{2} + \mathbb{Q} = X$ изометрично $\lambda\sqrt{2} + \lambda\mathbb{Q} = \lambda X$, поэтому $\lambda \in \text{St } X$. Если же $\lambda \in \mathbb{R}_+$ иррационально, то расстояния между разными точками из λX тоже иррациональны, а между точками в X —

рациональны, так что $\lambda \notin \text{St } X$. Итак, $\text{St } X = \mathbb{Q}$. Наконец, если $\lambda \in \mathbb{R}_+$, то, в силу предложения 3, $\text{St}_{\mathbb{R}} X \subset \text{St } X = \mathbb{Q}$. Однако если для $\lambda \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ выполняется $\lambda X = X$, то для каждого $q_1 \in \mathbb{Q}$ существует $q_2 \in \mathbb{Q}$ такое, что $\lambda(\sqrt{2} + q_1) = \sqrt{2} + q_2$, т.е. $\sqrt{2}(\lambda - 1) = q_2 - \lambda q_1$. Но для $\lambda \in \mathbb{Q}$, отличных от 1, это равенство не может иметь места, так как $\sqrt{2}$ — иррационально. Таким образом, $\text{St}_{\mathbb{R}} X = \{1\}$.

Замечание 2. Так как для каждого положительного $a > 0$ облака $[aX]$ и $[X]$ лежат в одной орбите действия коммутативной группы $\mathbb{R}_+$ на классе Clouds, то $\text{St}[aX] = \text{St}[X]$. Аналогично, имеет место равенство $\text{St}(aX) = \text{St } X$, а в случае, когда X — непустое подмножество нормированного векторного пространства V , то и равенство $\text{St}_V(aX) = \text{St}_V X$.

Структура мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ легче описывается с помощью изоморфизма $\lambda \mapsto \log \lambda$, действующего из $\mathbb{R}_+$ в аддитивную группу $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел. Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 2. Каждая подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел — или замкнутое подмножество вида $a\mathbb{Z}$, где $a \geq 0$ — некоторое вещественное число, или же всюду плотное подмножество. Таким образом, каждая подгруппа в $\mathbb{R}_+$ или равна единичной подгруппе $\{1\}$, или имеет вид $G_p := \{p^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для некоторого вещественного $p > 1$, или же всюду плотна в $\mathbb{R}_+$. Более того, у подгруппы вида G_p , $p > 1$, имеется ровно две образующих, а именно, p и $1/p$.

Для действительного числа $q > 1$ рассмотрим на числовой прямой бесконечное неограниченное подмножество

$$X_q = \{q^l : l \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R} \quad (1)$$

с естественной метрикой, индуцированной из прямой. Облако, в которое входит метрическое пространство X_q , будем, как и выше, обозначать $[X_q]$. Наша основная задача — изучить стабилизаторы $\text{St}[X_q]$, $\text{St } X_q$ и $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q$.

Замечание 3. Отметим, что хотя X_q и G_q совпадают как подмножества прямой, мы ввели для них разные обозначения. Это связано с тем, что первый из этих объектов рассматривается как метрическое пространство, а второй — как группа.

Начнем со следующего элементарного наблюдения.

Предложение 4. Для каждого $q > 1$ и $a > 0$ выполняется соотношение

$$\text{St}[aX_q] = \text{St}[X_q] \supset \text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q = \text{St}_{\mathbb{R}}(aX_q).$$

Доказательство. Равенства $\text{St}[aX_q] = \text{St}[X_q]$ и $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q = \text{St}_{\mathbb{R}}(aX_q)$ являются частными случаями замечания 2. Проверим равенство $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q$. Для этого заметим, что при каждом $l \in \mathbb{Z}$ выполняется $q^l X_q = X_q$. Обратно, если $bX_q = X_q$ для некоторого $b > 0$, то $b \cdot 1 = q^l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q$. Включение $\text{St}[X_q] \supset \text{St}_{\mathbb{R}} X_q$ является частным случаем предложения 3. $\square$

Замечание 4. Так как для каждого $q > 1$ множество $\{q^l : l \in \mathbb{Z}, l < 0\} \subset X_q$ ограничено, то для каждого $a > 0$ метрическое пространство aX_q и геометрическая прогрессия $\{aq^l : l \in \mathbb{Z}, l \geq 0\}$, рассматриваемая также как метрическое пространство, лежат в одном облаке. Таким образом, мы заодно изучаем и стабилизаторы облаков неограниченных геометрических прогрессий.

Приведем основные наши результаты. Пусть q_m — максимальный корень уравнения

$$(q - 1)^{m+1} = q.$$

Например, если $m = 1$, то $q_1 = (3 + \sqrt{5})/2$.

Предложение 5. Функция $f(q) = (q - 1)^{m+1} - q$ строго монотонно возрастает на участке $[2, \infty)$, причем $f(2) < 0$ и $f(q) \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow +\infty$, поэтому максимальный корень q_m уравнения $(q - 1)^{m+1} = q$ — это единственный ноль функции f на $[2, \infty)$. Кроме того, $q_m < 2 + 1/m$, а при росте m корень q_m строго монотонно убывает и, значит, стремится к 2.

Доказательство. Монотонность функции f вытекает из того, что

$$f'(q) = (m+1)(q-1)^m - 1 > 0 \quad \text{при } q \geq 2.$$

Таким образом, на участке $(2, q_m)$ функция f отрицательна, а на (q_m, ∞) — положительна. Далее,

$$f\left(2 + \frac{1}{m}\right) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} - 2 - \frac{1}{m} = 1 + \frac{m+1}{m} + c - 2 - \frac{1}{m} = c,$$

где $c > 0$ в силу $m+1 \geq 2$. Так как $2 + 1/m > 2$, то $2 + 1/m > q_m$.

Наконец, покажем, что $q_m > q_n$ при $n > m$. Действительно, предположим противное, т.е. $q_m \leq q_n$. Тогда, как было отмечено выше, $f(q_n) = (q_n - 1)^{m+1} - q_n \geq 0$. Однако, если положить $k = n - m \geq 1$, то

$$q_n = (q_n - 1)^{n+1} = (q_n - 1)^{m+1}(q_n - 1)^k,$$

и так как $(q_n - 1)^k > 1$, то $f(q_n) = (q_n - 1)^{m+1} - q_n < 0$, противоречие. $\square$

Теорема 3. Если $q \geq q_1$, то $\text{St}[X_q] = G_q = \{q^l : l \in \mathbb{Z}\} = \text{St } X_q = \text{St}_{\mathbb{R}} X_q$.

В следующей теореме заменим неравенство $q \geq q_1$ на $q \geq q_m$, тем самым расширив, в силу предложения 5, область определения q , что в пределе даст нам весь промежуток $(2, \infty)$. Отметим, что это расширение приведет к увеличению неопределенности в определении $\text{St}[X_q]$. Авторам неизвестно, является ли эта «неопределенность» действительным фактором, или же свойством их доказательства.

Теорема 4. Если $q \geq q_m$, то $\text{St}[X_q] = G_{\sqrt[n]{q}} = \{q^{l/n} : l \in \mathbb{Z}\}$ для некоторого натурального $n \leq m$.

Замечание 5. Если в теореме 4 существует q , для которого $n \geq 2$, то $\text{St}[X_q] \neq \text{St}_{\mathbb{R}} X_q$.

В следующей теореме заменим ограничение $q \geq q_m$ на самое общее $q > 1$. Если в теореме 4 «неопределенность» была ограничена конечным набором натуральных $n \leq m$, то теперь на n ограничения сверху отсутствуют. Как и выше, авторам неизвестно, насколько эта «неопределенность» свойственна самой задаче.

Теорема 5. Для всякого $q > 1$ существует такое натуральное n , что $\text{St}[X_q] = \{q^{l/n} : l \in \mathbb{Z}\}$.

Оказывается, для рациональных $q > 1$ вся «неопределенность» пропадает. Доказательство этого факта существенно опирается на доказательство теоремы 5.

Теорема 6. Для всякого рационального $q > 1$ выполняется

$$\text{St}[X_q] = G_q = \{q^l : l \in \mathbb{Z}\} = \text{St } X_q = \text{St}_{\mathbb{R}} X_q.$$

Соберем полученные выше результаты для того, чтобы наглядно представить геометрию действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ в рассматриваемом случае.

Следствие 1. Для $q \geq q_1$ или $q \in \mathbb{Q}$, а также произвольных вещественных $p > 1$, $a > 0$ и $b > 0$, следующие условия эквивалентны.

1. Облака $[aX_p]$ и $[bX_q]$ метрических пространств aX_p и bX_q лежат в одной орбите действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ на классах Громова—Хаусдорфа.
2. Стабилизаторы пространств aX_p и bX_q совпадают: $\text{St}(aX_p) = \text{St}(bX_q)$.
3. Имеет место равенство $p = q$.
4. Пространства aX_p и bX_q , рассматриваемые как подмножества прямой $\mathbb{R}$, лежат в одной орбите действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ на подмножествах $\mathbb{R}$, в частности, $\text{St}_{\mathbb{R}}(aX_p) = \text{St}_{\mathbb{R}}(bX_q)$.

Следствие 2. Для $q \geq q_1$ или $q \in \mathbb{Q}$, а также произвольных вещественных $p > 1$, $a > 0$ и $b > 0$, следующие условия эквивалентны.

1. Метрические пространства aX_p и bX_q лежат в одном облаке: $[aX_p] = [bX_q]$.
2. Стабилизаторы пространств aX_p и bX_q совпадают, т.е. $\text{St}(aX_p) = \text{St}(bX_q)$, и $a/b = q^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

3. Имеют место равенства $p = q$ и $a/b = q^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.
4. Пространства aX_p и bX_q совпадают как подмножества прямой $\mathbb{R}$.

Следствие 3. Если $q > 1$, $p > 1$, и пространства aX_p и bX_q лежат в одной и той же орбите действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ на классе Громова–Хаусдорфа, то $p^n = q^k$ для некоторых натуральных чисел n и k .

Перейдем к доказательству основных результатов. Нам понадобятся следующие технические утверждения.

3.1. Достаточное условие бесконечности расстояния Громова–Хаусдорфа. Для пары (X, Y) метрических пространств положим

$$\varphi_Y(x, x') = \inf_{y, y' \in Y} ||xx' - yy'||, \quad \Phi(X, Y) = \sup_{x, x' \in X} \varphi_Y(x, x').$$

Предложение 6. Пусть Z — произвольное метрическое пространство и $r > 0$ — вещественное число. Тогда для произвольных непустых $X, Y \subset Z$, удовлетворяющих условию $X \subset U_r(Y)$, выполняется $\Phi(X, Y) \leq 2r$.

Доказательство. Согласно условию, для любой точки $x \in X$ существует такая точка $y(x) \in Y$, что $|y(x)x| < r$. По неравенству треугольника

$$|xx'| \leq |xy(x)| + |y(x)y(x')| + |y(x')x'| \quad \text{и} \quad |y(x)y(x')| \leq |xy(x)| + |xx'| + |y(x')x'|,$$

откуда

$$2r > |xy(x)| + |y(x')x'| \geq ||xx' - y(x)y(x')|| \geq \inf_{y, y' \in Y} ||xx' - yy'|| = \varphi_Y(x, x'),$$

и, значит, $\Phi(X, Y) = \sup_{x, x' \in X} \varphi_Y(x, x') \leq 2r$, что и требовалось. $\square$

Следствие 4. Пусть X и Y — метрические пространства, для которых $\Phi(X, Y) = \infty$. Тогда $d_{GH}(X, Y) = \infty$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что $d_{GH}(X, Y) < \infty$, тогда для любого конечного $r > d_{GH}(X, Y)$ существует метрическое пространство Z и два его подмножества X' и Y' , изометричные соответственно X и Y , причем $d_H(X', Y') < r$, откуда $X' \subset U_r(Y')$. По предложению 6, имеем $\Phi(X', Y') \leq 2r$, но, в силу изометричности, выполняется $\Phi(X, Y) = \Phi(X', Y')$, противоречие. $\square$

3.2. Доказательство теорем 3 и 4. Для вещественного $q > 1$ и натурального i следующие полуинтервалы нам пригодятся в дальнейшем:

$$I_{q,i} = \left[\left(\frac{q}{q-1} \right)^{1/i}, q^{1/i} \right).$$

Например, при $i = 1$ получаем

$$I_{q,1} = \left[\frac{q}{q-1}, q \right).$$

Так как при $q > 1$ неравенство $q^{1/i}/(q-1)^{1/i} < q^{1/i}$ равносильно $1/(q-1) < 1$, а решение последнего неравенства — это $q > 2$, получаем следующий результат.

Предложение 7. Все полуинтервалы $I_{q,i}$ или одновременно пусты, или нет. Они непусты, если и только если $q > 2$.

Предложение 8. Если $q > 2$, то $\text{St}[X_q] \cap I_{q,1} = \emptyset$.

Доказательство. Выберем произвольное $\lambda \in I_{q,1}$ и покажем, что $d_{GH}(X_q, \lambda X_q) = \infty$. Для доказательства этого факта воспользуемся следствием 4, в силу которого достаточно проверить, что $\Phi(X_q, \lambda X_q) = \infty$.

Так как $0 < \lambda < q$, то $1 - \lambda/q > 0$, поэтому существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что $1 - \lambda/q > 1/q^s$, так что $\delta := 1 - \lambda/q - 1/q^s > 0$.

Для $n \in \mathbb{N}$, $n > s$, положим $k = n - s < n$, оценим величину

$$\varphi_{\lambda X_q}(q^n, q^k) = \inf \{|q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l| : m, l \in \mathbb{Z}, m \geq l\}$$

и покажем, что при $k \rightarrow \infty$ выполняется $\varphi_{\lambda X_q}(q^n, q^k) \rightarrow \infty$, откуда и вытекает требуемое $\Phi(X_q, \lambda X_q) = \infty$.

Пусть сначала $m = l$; тогда

$$|q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l| = q^n - q^k = q^k(q^s - 1) > q^k,$$

так как $q^s > 2$. Пусть теперь $m > l$. Если $m \geq n$, то

$$\lambda q^m - \lambda q^l - q^n + q^k \geq \lambda q^m - \lambda q^{m-1} - q^m + q^k = q^m \left(\lambda - \frac{\lambda}{q} - 1 \right) + q^k = q^m \left(\lambda \frac{q-1}{q} - 1 \right) + q^k \geq q^k,$$

где последнее неравенство вытекает из условия $\lambda \in I_{q,1}$, которое дает $\lambda \geq q/(q-1)$. Таким образом, получаем

$$|q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l| = \lambda q^m - \lambda q^l - q^n + q^k \geq q^k.$$

Если же $m < n$, то

$$q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l \geq q^n - q^k - \lambda q^{n-1} + \lambda q^l = q^n \left(1 - \frac{1}{q^s} - \frac{\lambda}{q} \right) + \lambda q^l > \delta q^n,$$

где последнее неравенство вытекает из того, что $\lambda q^l > 0$. Таким образом, в этом случае имеем

$$|q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l| = q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l \geq \delta q^n.$$

Итак, мы показали, что $\varphi_{\lambda X_q}(q^n, q^k) \geq \min\{q^k, \delta q^n\} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, что и требовалось. $\square$

Следующее предложение описывает ряд алгебраических свойств множества $\mathbb{R}_+ \setminus \text{St}[X_q]$.

Предложение 9. Для каждого $h \notin \text{St}[X_q]$, $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$ элементы h^{-1} , $h^{1/n}$ и $q^l h$ также не принадлежат $\text{St}[X_q]$.

Доказательство. Так как $\text{St}[X_q]$ — мультипликативная группа, то $h^{-1} \in \text{St}[X_q]$ или $h^{1/n} \in \text{St}[X_q]$ влечет $h \in \text{St}[X_q]$, противоречие. Если же $q^l h \in \text{St}[X_q]$, то так как, в силу предложения 4, выполняется $G_q \subset \text{St}[X_q]$, имеем $h = q^{-l} q^l h \in \text{St}[X_q]$, противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 3. Заметим, что $q_1 > 2$, поэтому применимо предложение 8. Из предложений 8 и 9 вытекает, что полуинтервалы

$$\left(\frac{1}{q}, \frac{q-1}{q} \right] = \left[\frac{q}{q-1}, q \right)^{-1}, \quad (1, q-1] = q \left(\frac{1}{q}, \frac{q-1}{q} \right]$$

не пересекают $\text{St}[X_q]$.

Если $q \geq q_1$, то $(q-1)^2 \geq q$, так как q_1 — максимальный корень уравнения $(q-1)^2 = q$, а «правее» q_1 парабола $(q-1)^2 - q$ находится выше оси абсцисс. Отсюда вытекает, что $q/(q-1) \leq q-1$, поэтому

$$(1, q) = (1, q-1] \cup \left[\frac{q}{q-1}, q \right).$$

По предложению 8, имеем $(1, q) \cap \text{St}[X_q] = \emptyset$. Осталось заметить, что

$$\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} q^l (1, q) = \mathbb{R}_+ \setminus G_q$$

не пересекает $\text{St}[X_q]$ в силу того же предложения 8, поэтому $\text{St}[X_q] \subset G_q$, но $G_q \subset \text{St}[X_q]$ и, значит, $\text{St}[X_q] = G_q$. Для завершения доказательства осталось заметить, что, по предложению 4, имеем $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q$, откуда, в силу предложения 3, получаем $\text{St}[X_q] = \text{St} X_q = \text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q$. $\square$

Доказательство теоремы 4. Так как, в силу предложения 5, выполняется $q_m > 2$, то применимо предложение 8 и, значит, непустой полуинтервал $I_{q,1}$ не содержит точек из $\text{St}[X_q]$, поэтому $\text{St}[X_q]$ не является всюду плотной подгруппой в $\mathbb{R}_+$. По теореме 2, группа $\text{St}[X_q]$ или равна $\{1\}$, или содержит бесконечную подгруппу G_p для некоторого $p > 1$. Так как $\text{St}[X_q]$, в силу предложения 4, содержит бесконечную подгруппу G_q , то $\text{St}[X_q] = G_p$. Так как $q \in \text{St}[X_q]$, то $q = p^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, откуда $p = q^{1/n}$. Так как $q > 1$ и $p > 1$, то $n > 0$.

Как и в доказательстве теоремы 3, заключаем, что полуинтервал $(1, q-1]$ не пересекает $\text{St}[X_q]$. Кроме того, из предложений 8 и 9 вытекает, что полуинтервал $I_{q,m}$ не пересекает $\text{St}[X_q]$. Как было отмечено выше, при $q \geq q_m$ выполняется $(q-1)^{m+1} \geq q$, поэтому при таких q имеем

$$\left(\frac{q}{q-1}\right)^{1/m} \leq q-1$$

и, значит, интервал $(1, q^{1/m}) = (1, q-1] \cup I_{q,m}$ не пересекает $\text{St}[X_q]$. В частности, $q^{1/n} \geq q^{1/m}$, так что $n \leq m$. $\square$

3.3. Доказательство теоремы 5. Покажем, что $\text{St}[X_q]$ не может быть всюду плотным в $\mathbb{R}_+$, откуда, в силу теоремы 2, получим $\text{St}[X_q] = G_p$. В заключение повторим рассуждения из доказательства теоремы 4 и покажем, что $p = q^{1/n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Итак, нам осталось доказать следующий результат.

Предложение 10. *Для любого $q > 1$ множество $\mathbb{R}_+ \setminus \text{St}[X_q]$ содержит некоторый интервал.*

Доказательство. Для $l \in \mathbb{Z}$ рассмотрим функцию $\varphi_{X_q}(\lambda q^{l+1}, \lambda q^l)$ и покажем, что существует интервал $(a, b) \subset (1, q)$, для которого при каждом $\lambda \in (a, b)$ выполняется $\sup_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{X_q}(\lambda q^{l+1}, \lambda q^l) = \infty$ и, значит,

$$\Phi(\lambda X_q, X_q) \geq \sup_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{X_q}(\lambda q^{l+1}, \lambda q^l) = \infty.$$

В силу следствия 4, все такие λ не лежат в $\text{St}[X_q]$, поэтому $(a, b) \subset \mathbb{R}_+ \setminus \text{St}[X_q]$, что и завершит доказательство.

Итак, выберем произвольные целые числа $n \geq k$ и положим $n = B + k$, так что $B \geq 0$. Если $B = 0$, то

$$|\lambda q^{l+1} - \lambda q^l - q^n + q^k| = \lambda q^l(q-1).$$

Пусть теперь $B > 0$, тогда

$$|\lambda q^{l+1} - \lambda q^l - q^n + q^k| = |\lambda q^l(q-1) - q^k(q^B - 1)| = q^l(q-1) \left| \lambda - q^i \frac{q^B - 1}{q-1} \right|,$$

где $i = k - l \in \mathbb{Z}$. Положим $\lambda_{B,i} = q^i(q^B - 1)/(q-1)$ и $\Lambda = \{\lambda_{B,i} : B \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}\} \cap (1, q)$.

Лемма 1. *Пусть $\bar{\Lambda}$ обозначает замыкание множества Λ в интервале $(1, q)$. Тогда $(1, q) \setminus \bar{\Lambda}$ не пересекает $\text{St}[X_q]$.*

Доказательство. Так как $(1, q) \setminus \bar{\Lambda}$ — открытое множество, каждое $\lambda \in (1, q) \setminus \bar{\Lambda}$ находится на некотором положительном расстоянии ε_λ от $\Lambda \cup \{1, q\}$, откуда

$$|\lambda q^{l+1} - \lambda q^l - q^n + q^k| \geq \varepsilon_\lambda q^l(q-1),$$

поэтому

$$\varphi_{X_q}(\lambda q^{l+1}, \lambda q^l) = \inf\{|\lambda q^{l+1} - \lambda q^l - q^n + q^k| : n, k \in \mathbb{Z}, n \geq k\} \geq \min(\varepsilon_\lambda, 1) q^l(q-1),$$

и, значит,

$$\sup_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{X_q}(\lambda q^{l+1}, \lambda q^l) \geq \sup_{l \in \mathbb{Z}} \min(\varepsilon_\lambda, 1) q^l(q-1) = \infty,$$

что и требовалось. $\square$

В заключение покажем, что $(1, q) \setminus \bar{\Lambda} \neq \emptyset$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Если для некоторого $B \in \mathbb{N}$ выполняется $\lambda_{B,i} \in (1, q)$, то при всех $j \in \mathbb{Z}, j \neq i$, имеем $\lambda_{B,j} \notin (1, q)$.*

Доказательство. Так как $1 < \lambda_{B,i} < q$, то при $j > i$ имеем $\lambda_{B,j} = q^{j-i} \lambda_{B,i} > q^{j-i} \geq q$, а при $j < i$ выполняется $\lambda_{B,j} = \lambda_{B,i}/q^{i-j} < q/q^{i-j} \leq 1$. $\square$

Число $B \in \mathbb{N}$, для которого $\lambda_{B,i} \in (1, q)$, назовем *критическим*. Из леммы 2 вытекает, что для каждого критического B однозначно определено i , для которого $\lambda_{B,i} \in (1, q)$. Напомним, что множество всех таких $\lambda_{B,i}$ мы обозначили Λ . Из сказанного выше вытекает, что Λ представляет собой последовательность, занумерованную последовательными критическими B .

Выясним, как выглядят все предельные точки множества Λ .

Лемма 3. *Все предельные точки множества $\Lambda \subset \mathbb{R}$ имеют вид $q^k/(q-1) \in [1, q]$, где $k \in \mathbb{Z}$. В частности, интервал $(1, q)$ содержит не более одной такой точки.*

Доказательство. Ясно, что все предельные точки множества Λ являются пределами подпоследовательностей в последовательности Λ . Иными словами, для каждой предельной точки A для Λ существует последовательность критических $B_j \rightarrow \infty$ и соответствующих им i_j такая, что $\lambda_{B_j, i_j} \rightarrow A$ при $j \rightarrow \infty$. Так как при $B_j \rightarrow \infty$ выполняется $(q^{B_j} - 1)/(q - 1) \rightarrow \infty$, а все λ_{B_j, i_j} лежат между 1 и q , то $i_j \rightarrow -\infty$. Отсюда вытекает, что $q^{i_j}/(q - 1) \rightarrow 0$, поэтому

$$A = \lim_{j \rightarrow \infty} q^{i_j} \frac{q^{B_j} - 1}{q - 1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{q^{B_j + i_j}}{q - 1} - \frac{q^{i_j}}{q - 1} \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{q^{B_j + i_j}}{q - 1}.$$

Так как $B_j + i_j \in \mathbb{Z}$ и $A > 0$, заключаем, что $B_j + i_j = \text{const}$ для достаточно больших j и, значит, A имеет вид $q^k/(q - 1)$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Осталось заметить, что если $q^k/(q - 1) \in (1, q)$, то для $m \in \mathbb{N}$ имеем $q^{k+m}/(q - 1) > q$ и $q^{k-m}/(q - 1) < 1$. $\square$

Из леммы 3 вытекает, что $(1, q) \setminus \bar{\Lambda} \neq \emptyset$. Доказательство предложения, а вместе с ним, и теоремы 5, закончено. $\square$

3.4. Доказательство теоремы 6. Предположим противное. В силу теоремы 5 существует $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, такое, что $q^{1/n} \in \text{St}[X_q]$. Так как $q > 1$, то $q^{1/n} \in (1, q)$. Покажем, что для рациональных q этого не может быть.

В доказательстве теоремы 5 мы построили множество Λ критических точек, лежащих в интервале $(1, q)$, выяснили, как выглядят точки из замыкания $\bar{\Lambda}$ множества Λ , а также показали, что открытое множество $(1, q) \setminus \bar{\Lambda}$ непусто и не пересекает $\text{St}[X_q]$. Таким образом, для доказательства теоремы 6 достаточно проверить, что $q^{1/n}$ не содержится в $\bar{\Lambda}$.

Напомним, что точки из Λ имеют вид $\lambda_{B,i} = q^i(q^B - 1)/(q - 1)$ для некоторых $B \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{Z}$, а предельные точки множества Λ — это $q^k/(q - 1)$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $q = s/t$, где $s, t \in \mathbb{N}$, причем s и t взаимно просты.

1. Покажем, что $q^{1/n}$ не равно $q^i(q^B - 1)/(q - 1)$ ни при каких $B \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{Z}$. Предположим противное, т.е. что $q^{1/n} = q^i(q^B - 1)/(q - 1)$ для некоторых n, i и B . Тогда

$$q(q - 1)^n = \frac{s(s - t)^n}{t^{n+1}} = q^{in}(q^B - 1)^n = \frac{s^{in}(s^B - t^B)^n}{t^{i+Bn}}.$$

Так как s и t взаимно просты не только между собой, но и с $s - t$ и $s^B - t^B$, заключаем, что $in = 1$, откуда $n = 1$, противоречие.

2. Покажем теперь, что $q^{1/n}$ не равно $q^k/(q - 1)$ ни при каком $k \in \mathbb{Z}$. Предположим противное, т.е. что $q^{1/n} = q^k/(q - 1)$ для некоторых n и k . Тогда

$$q(q - 1)^n = \frac{s(s - t)^n}{t^{n+1}} = q^{kn} = \frac{s^{kn}}{t^{kn}}.$$

Так как s и t взаимно просты не только между собой, но и с $s - t$ и $s^B - t^B$, заключаем, что $kn = 1$ и $kn = n + 1$, противоречие.

3.5. Доказательство следствия 1. Импликации $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$ очевидны. Осталось доказать $2 \Rightarrow 3$. Согласно теоремам 3, 6 и замечанию 2 имеем

$$G_p = \text{St}(X_p) = \text{St}(aX_p) = \text{St}(X_q) = \text{St}(bX_q) = G_q.$$

Так как $p > 1$ и $q > 1$, то по теореме 2 имеем $p = q$.

3.6. *Доказательство следствия 2.* Импликация $2 \Rightarrow 3$ вытекает из следствия 1. Импликации $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ очевидны. Осталось доказать $1 \Rightarrow 2$.

Так как пространства aX_p и bX_q лежат в одном облаке, их облака лежат в одной орбите действия группы $\mathbb{R}_+$, поэтому, в силу следствия 1, имеем $p = q$. Далее, пространства aX_q и bX_q лежат в одном облаке, если и только если в одном облаке лежат X_q и $(b/a)X_q$, что эквивалентно $b/a \in \text{St}[X_q]$. По теореме 3 имеем $b/a = q^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

3.7. *Доказательство следствия 3.* Раз пространства aX_p и bX_q лежат в одной и той же орбите, то и их облака также лежат в одной и той же орбите, поэтому, в силу предложения 4, имеем $\text{St}[aX_p] = \text{St}[bX_q] = \text{St}[X_p] = \text{St}[X_q]$. По теореме 5 $\text{St}[X_p] = \{p^{l/k}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и $\text{St}[X_q] = \{q^{m/n}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. По теореме 2 $p^{\pm 1/k} = q^{\pm 1/n}$ для некоторого выбора знаков, но так как $p > 1$ и $q > 1$, получаем $p^{1/k} = q^{1/n}$, откуда $p^n = q^k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. — М.-Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2004.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1984.
3. Edwards D. The structure of superspace// in: Studies in Topology (Stavarakas N. M., Allen K. R., ed.). — New York–London–San Francisco: Academic Press, 1975. — P. 121–133.
4. Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. — CEDIC/Fernand Nathan, 1981.
5. Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. — Birkhäuser, 1999.

Богатый Семеон Антонович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: bogaty@inbox.ru

Тужилин Алексей Августинovich

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: tuz@mech.math.msu.su



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 14–23
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-14-23

УДК 517.954, 517.983

О ДИСКРЕТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. В. Б. ВАСИЛЬЕВ, А. А. ХОДЫРЕВА

Аннотация. Рассматривается дискретное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в квадранте и связанная с ним дискретная краевая задача. Описаны условия разрешимости дискретной краевой задачи в дискретных аналогах пространств Соболева—Слободецкого. Проведено сравнение дискретного решения с решением соответствующей континуальной краевой задачи в зависимости от параметра дискретизации.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, двумерная периодическая задача Римана, периодическая волновая факторизация, аналитичность, разрешимость.

ON DISCRETE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN A QUARTER PLANE

© 2023 V. B. VASILYEV, A. A. KHODYREVA

ABSTRACT. We consider a discrete elliptic pseudodifferential equation in a quadrant and the corresponding discrete boundary-value problem. Conditions for the solvability of the discrete boundary-value problem in discrete analogs of the Sobolev–Slobodetskii spaces are described. The discrete solution is compared with the solution of the corresponding continuum boundary-value problem depending on the discretization parameter.

Keywords and phrases: discrete pseudodifferential operator, two-dimensional periodic Riemann problem, periodic wave factorization, analyticity, solvability.

AMS Subject Classification: 35S15, 47B38

1. Введение. Теория псевдодифференциальных операторов и уравнений активно развивалась с середины 1960-х гг., и основные задачи были связаны с ограниченностью этих операторов в различных функциональных пространствах, описанием свойств фредгольмовости и регулярности решений, вычисление индекса [6, 10, 11]. Однако дискретные аспекты этой теории (в отличие от дифференциальных операторов в частных производных и соответствующих краевых задач [7, 8]) исследовались не столь интенсивно, и, как правило, ограничивались рассмотрением псевдодифференциальных операторов на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^m$ (см. [12, 14]). Оставалось неясным, могут ли дискретные операторы стать хорошим аппроксимационным инструментом для решения псевдодифференциальных уравнений, хотя априори понятно, что дискретизация является неизменным условием для компьютерных вычислений. В связи с этим первый автор начал разрабатывать дискретную теорию таких уравнений, начав с сингулярных интегралов Кальдерона—Зигмунда [1, 16] как простейшего представления псевдодифференциальных операторов, постепенно переходя к модельным псевдодифференциальным операторам и уравнениям (пока в канонических областях) в дискретных пространствах $L_2(h\mathbb{Z}^m)$, $L_2(h\mathbb{Z}_+^m)$, $h > 0$, и сравнение дискретных

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FZWG-2020-0029).

и континуальных решений. Оказалось, что картина разрешимости дискретных уравнений выглядит подобно континуальному случаю, и в случае $h \rightarrow 0$ дискретные условия разрешимости переходят в свой континуальный аналог. Аналогичные исследования были проведены для более общих модельных псевдодифференциальных операторов в дискретных аналогах H^s -пространств [17, 18] со сравнением дискретных и непрерывных решений [3, 15].

В этой работе рассматриваем новую модельную область — квадрант в $\mathbb{R}^2$, описываем условия разрешимости соответствующего модельного уравнения, выделяем дискретную краевую задачу и даем сравнение дискретных и континуальных решений. Геометрия области оказывает существенное влияние на выбор инструментов исследования и определяет дополнительные ограничения на класс символов исследуемых уравнений. Мы используем периодический аналог волновой факторизации [2] для описания разрешимости модельных псевдодифференциальных уравнений и постановки дискретных краевых задач. Некоторые элементы этих построений были анонсированы в [19, 20]. Здесь мы приводим более общее определение и расширяем класс рассматриваемых уравнений.

2. Конусы, периодические символы, дискретные операторы и уравнения.

2.1. Дискретные пространства и преобразования. Пусть $\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка на плоскости. Обозначим $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ первый квадрант на плоскости, $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K$, $h > 0$. Мы рассматриваем функции дискретного аргумента $u_d(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$, определенные на решетке $h\mathbb{Z}^2$. Обозначим $\mathbb{T}^2$ квадрат $[-\pi, \pi]^2$, $h > 0$, $\tilde{h} = h^{-1}$. Будем рассматривать функции, изначально заданные в квадрате $\mathbb{T}^2$, как периодические функции, определенные на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\mathbb{T}^2$.

Для функций дискретного аргумента можно определить дискретное преобразование Фурье формулой

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x} \cdot \xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \tilde{h}\mathbb{T}^2,$$

в случае сходимости последнего ряда, и функция $\tilde{u}_d(\xi)$ будет периодической функцией в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\tilde{h}\mathbb{T}^2$. Так определенное дискретное преобразование Фурье наследует все свойства интегрального преобразования Фурье, и обратное дискретное преобразование Фурье можно записать как

$$(F_d^{-1} \tilde{u}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\tilde{h}\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2.$$

Дискретное преобразование Фурье устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $L_2(h\mathbb{Z}^2)$ и $L_2(\tilde{h}\mathbb{T}^2)$ с нормами

$$\|u_d\|_2 = \left(\sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} |u_d(\tilde{x})|^2 h^2 \right)^{1/2}, \quad \|\tilde{u}_d\|_2 = \left(\int_{\xi \in \tilde{h}\mathbb{T}^2} |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Нам понадобятся более общие пространства дискретных функций, и для их введения мы используем понятие разделенных разностей [8, 17] и их свойства, связанные с дискретным преобразованием Фурье. Используя эти конструкции, определим дискретные пространства Соболева—Слободецкого для исследования разрешимости широкого класса дискретных псевдодифференциальных уравнений.

Введем дискретный аналог пространства Шварца $S(h\mathbb{Z}^2)$ как совокупность дискретных функций, имеющих конечные полунормы

$$|u_d| = \sup_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} (1 + |\tilde{x}|)^l |\Delta^{(\mathbf{k})} u_d(\tilde{x})|$$

для произвольного $l \in \mathbb{N}$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, $k_r \in \mathbb{N}$, $r = 1, 2$,

$$\Delta^{(\mathbf{k})} u_d(\tilde{x}) = \Delta_1^{k_1} \Delta_2^{k_2} u_d(\tilde{x}),$$

где Δ_j^k обозначает разделенную разность k -го порядка по переменной $\tilde{x}_j$, $j = 1, 2$.

Определение 1. Дискретной обобщенной функцией называется любой линейный непрерывный функционал на $S(h\mathbb{Z}^2)$.

Множество таких дискретных обобщенных функций будем обозначать $S'(h\mathbb{Z}^2)$, а значение дискретного функционала f_d на основной дискретной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^2)$ обозначается (f_d, u_d) .

Можно ввести понятие носителя дискретной обобщенной функции. Носитель дискретной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^2)$ — это подмножество $h\mathbb{Z}^2$, где u_d отлична от нуля. Для произвольного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ обозначим $M_d = M \cap h\mathbb{Z}^2$ и говорим, что $f_d = 0$ в дискретной области M_d , если $(f_d, u_d) = 0$, $\forall u_d \in S(M_d)$, где $S(M_d) \subset S(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных функций с носителями, содержащимися в M_d . Если обозначить $\widetilde{M}_d$ объединение таких M_d , где $f_d = 0$, носителем дискретной обобщенной функции f_d будет множество $h\mathbb{Z}^2 \setminus \widetilde{M}_d$.

Аналогично [4] можно определить стандартные операции в пространстве $S'(h\mathbb{Z}^2)$, однако роль дифференцирования будет играть разделенная разность первого порядка. Свойства дискретных обобщенных функций подробно описаны в [17], сходимость понимается как слабая сходимость в пространстве функционалов $S'(h\mathbb{Z}^2)$.

Пример 1. Если $f_d(\tilde{x})$ локально суммируема, она порождает дискретную обобщенную функцию формулой

$$(f_d, u_d) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} f_d(\tilde{x}) u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \forall u_d \in S(h\mathbb{Z}^2). \quad (1)$$

Однако возможны и другие варианты, аналогичные дельта-функции Дирака $(\delta_d, u_d) = u_d(0)$, не представимые формулой (1).

Введем обозначение

$$\zeta^2 = h^{-2} \left((e^{-ih \cdot \xi_1} - 1)^2 + (e^{-ih \cdot \xi_2} - 1)^2 \right).$$

Определение 2. Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных (обобщенных) функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ по норме

$$\|u_d\|_s = \left(\int_{h\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Следует отметить, что многие свойства таких дискретных пространств были исследованы в [9]. Варьируя h в (2), получаем различные нормы, которые эквивалентны L_2 -норме, однако постоянные эквивалентности будут зависеть от h . В этой связи хотелось бы подчеркнуть, что в наших конструкциях (см. ниже) все постоянные от h не зависят.

Определение 3. Пространство $H^s(K_d)$ состоит из дискретных обобщенных функций из пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$, чьи носители содержатся в $\overline{K_d}$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Пространство $H_0^s(K_d)$ состоит из дискретных обобщенных функций $f_d \in S'(h\mathbb{R}^2)$ с носителями в K_d , и эти дискретные обобщенные функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Норма в пространстве $H_0^s(K_d)$ задается формулой

$$\|f_d\|_s^+ = \inf \|\ell f_d\|_s,$$

где $\inf$ берется по всем продолжениям ℓ .

Фурье-образ пространства $H^s(K_d)$ будем обозначать $\tilde{H}^s(K_d)$.

2.2. Символы и операторы. Измеримую периодическую функцию $A_d(\xi)$ в $\mathbb{R}^2$ с основным кубом периодов $h\mathbb{T}^2$, будем называть символом.

Определение 4. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $A_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int_{h\mathbb{T}^2} A_d(\xi) e^{i(\tilde{x} - \tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d. \quad (3)$$

Говорят, что оператор A_d — эллиптический, если

$$\operatorname{ess\,inf}_{\xi \in h\mathbb{T}^2} |A_d(\xi)| > 0.$$

Можно определить более общий дискретный псевдодифференциальный оператор с символом $A_d(\tilde{x}, \xi)$, зависящим от дискретной пространственной переменной $\tilde{x}$

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int_{h\mathbb{T}^2} A_d(\tilde{x}, \xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d,$$

однако в этой работе ограничимся модельным оператором вида (3).

Будем рассматривать класс символов, удовлетворяющих условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \leq |A_d(\xi)| \leq c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \quad (4)$$

с постоянными c_1, c_2 , не зависящими от h , и называть число $\alpha \in \mathbb{R}$ порядком псевдодифференциального оператора A_d .

Очень просто доказать, что дискретный псевдодифференциальный оператор A_d с символом $A_d(\xi)$ — линейный ограниченный оператор $H^s(h\mathbb{Z}^2) \rightarrow H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$ с нормой, не зависящей от h (см. [17]).

Исследуем разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in K_d, \quad (5)$$

в пространстве $H^s(K_d)$, предполагая, что $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$.

Нам понадобятся некоторые области комплексного пространства $\mathbb{C}^2$. Область вида $\mathcal{T}_h(K) = h\mathbb{T}^2 + iK$ назовем трубчатой областью над квадрантом K , и будем рассматривать аналитические функции $f(x + i\tau)$ в $\mathcal{T}_h(K) = h\mathbb{T}^2 + iK$, считая их вещественно-периодическими, определенными для почти всех значений x .

Введем периодическое ядро Бохнера по аналогии с [4]

$$B_h(z) = \sum_{\tilde{x} \in K_d} e^{i\tilde{x} \cdot (\xi + i\tau)} h^2, \quad \xi \in h\mathbb{T}^2, \quad \tau \in K,$$

и соответствующий интегральный оператор

$$(B_h \tilde{u}_d)(\xi) = \lim_{\tau \rightarrow 0, \tau \in K} \frac{1}{4\pi^2} \int_{h\mathbb{T}^2} B_h(\xi + i\tau - \eta) \tilde{u}_d(\eta) d\eta.$$

В [16] приведены вычисления для дискретной положительной полуоси (одномерный конус). Если воспользоваться этими вычислениями, можно прийти к следующему выводу.

Лемма 1. Для квадранта K оператор B_h имеет следующий вид

$$\begin{aligned} (B_h \tilde{u}_d)(\xi) = & \frac{h^2}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta + \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{ih}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_1 - \eta_1 + i\tau_1)}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta + \\ & + \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{ih}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_2 - \eta_2 + i\tau_2)}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta - \\ & - \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{h^2}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_1 - \eta_1 + i\tau_1)}{2} \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_2 - \eta_2 + i\tau_2)}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Поскольку формула слишком громоздка, сделаем следующие допущения. Будем рассматривать пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ как замыкание дискретного подпространства Шварца функций, принимающих нулевые значения на дискретных осях координат. В этом случае в Лемме 1 первые три слагаемых отсутствуют, и вид оператора B_h сильно упрощается.

Стоит еще отметить, что оператор B_h представляет собой двумерный периодический аналог преобразования Гильберта (одномерного сингулярного интеграла) и обладает очень схожими свойствами (см. [5, 13]).

Для описания картины разрешимости дискретного уравнения (5) нам понадобятся элементы многомерного комплексного анализа, которые приведены в следующем разделе.

3. Периодическая волновая факторизация.

Определение 5. Периодической волновой факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi)A_{d,=}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\neq}(\xi)$, $A_{d,=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в трубчатые области $\mathcal{T}_h(K)$, $\mathcal{T}_h(-K)$ соответственно и удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} c_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\varkappa/2} &\leq |A_{d,\neq}(\xi + i\tau)| \leq c'_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\varkappa/2}, \\ c_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{(\alpha-\varkappa)/2} &\leq |A_{d,=}(\xi - i\tau)| \leq c'_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{(\alpha-\varkappa)/2}, \end{aligned}$$

с постоянными c_1, c'_1, c_2, c'_2 , не зависящими от h , где

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left((e^{-ih(\xi_1+i\tau_1)} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_2+i\tau_2)} - 1)^2 \right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \hbar\mathbb{T}^2, \quad \tau = (\tau_1, \tau_2) \in K.$$

Число $\varkappa \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической волновой факторизации.

Всюду ниже предполагаем наличие периодической волновой факторизации для символа $A_d(\xi)$ с индексом $\varkappa$.

В одном специальном случае решение уравнения (5) существует и единственно.

Теорема 1. Пусть $|\varkappa - s| < 1/2$. Тогда уравнение (5) для любой правой части $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$ имеет единственное решение, которое дается формулой

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi)B_h(A_{d,=}^{-1}(\xi)(\widetilde{\ell v_d})(\xi)),$$

где ℓv_d — произвольное продолжение v_d из $H_0^{s-\alpha}(K_d)$ в $H^{s-\alpha}(\hbar\mathbb{Z}^2)$. Справедлива априорная оценка

$$\|u_d\|_s \leq c\|v_d\|_{s-\alpha}^+,$$

с постоянной c , не зависящей от h .

Замечание 1. Теорема 1 опирается на факт, что для произвольной функции $\tilde{u}_d \in \tilde{H}^s(\hbar\mathbb{Z}^m)$, $|s| < 1/2$, справедливо представление

$$\tilde{u}_d = B_h\tilde{u}_d + (I - B_h)\tilde{u}_d,$$

где первое слагаемое принадлежит $\tilde{u}_d \in \tilde{H}^s(K_d)$, а второе — $\tilde{u}_d \in \tilde{H}^s(\hbar\mathbb{Z}^m \setminus K_d)$, причем такое представление единственно.

4. Дискретная краевая задача. В этом разделе рассмотрим более содержательный случай, когда уравнение (5) может иметь много решений.

4.1. Структура дискретного решения. В этом разделе будем использовать некоторые результаты из [17] о структуре дискретной обобщенной функции, сосредоточенной в начале координат.

Теорема 2. Пусть $\varkappa - s = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$. Тогда общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi)Q_n(\xi)B_h(Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)(\widetilde{\ell v_d})(\xi)) + A_{d,\neq}^{-1}(\xi) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_k(\xi_1)\hat{\zeta}_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\hat{\zeta}_1^k \right),$$

где $Q_n(\xi)$ — произвольный многочлен степени n переменных $\hat{\zeta}_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1)$, $k = 1, 2$, удовлетворяющий условию (4) с $\alpha = n$, $\tilde{c}_k(\xi_1)$, $\tilde{d}_k(\xi_2)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, — произвольные функции из $H^{s_k}(\hbar\mathbb{T})$, $s_k = s - \varkappa + k - 1/2$. Имеет место априорная оценка

$$\|u_d\|_s \leq \text{const} \left(\|v_d\|_{s-\alpha}^+ + \sum_{k=0}^{n-1} ([c_k]_{s_k} + [d_k]_{s_k}) \right),$$

где $[\cdot]_{s_k}$ обозначает норму в $H^{s_k}(\hbar\mathbb{T})$, и const не зависит от h .

4.2. *Условия разрешимости дискретной краевой задачи.* Рассмотрим сейчас случай $v_d \equiv 0$, $\kappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$ для уравнения (5) и следующие дискретные граничные условия:

$$\sum_{\tilde{x}_1 \in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)h = f_d(\tilde{x}_2), \quad \sum_{\tilde{x}_2 \in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)h = g_d(\tilde{x}_1), \quad \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}_{++}} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)h^2 = 0. \quad (6)$$

Теорема 3. Пусть $f_d, g_d \in H^{s+1/2}(h\mathbb{Z})$, $v_d \equiv 0$. Тогда дискретная краевая задача (5), (6) имеет единственное решение, которое дается формулой

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi)(A_{d,\neq}(\xi_1, 0)\tilde{g}_d(\xi_1) + A_{d,\neq}(0, \xi_2)\tilde{f}_d(\xi_2)).$$

Справедлива априорная оценка

$$\|u_d\|_s \leq \text{const}(\|f_d\|_{s+1/2} + \|g_d\|_{s+1/2})$$

с постоянной, не зависящей от h .

4.3. *Сравнение дискретных и непрерывных решений.* Континуальным аналогом дискретной краевой задачи (5), (6) является следующая задача:

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K, \quad (7)$$

$$\int_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_1 = f(x_2), \quad \int_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_2 = g(x_1), \quad \int_K u(x)dx = 0, \quad (8)$$

с псевдодифференциальным оператором, символ которого удовлетворяет условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha.$$

и допускает волновую факторизацию относительно квадранта K с таким индексом κ , что $\kappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$.

При специальном выборе дискретных аппроксимаций для граничных функций f и g можно получить следующую оценку погрешности.

Теорема 4. Пусть $f, g \in S(\mathbb{R})$, $\kappa > 1$. Тогда справедлива следующая оценка для решений u и u_d задач (7), (8) и (5), (6)

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq C_{f,g}h^\beta,$$

где постоянная $C_{f,g}$ зависит от функций f, g , $\beta > 0$ может быть произвольным числом.

5. Дополнение. Приведем в этом разделе некоторые дополнительные сведения, связанные с дискретными обобщенными функциями. Подробное обсуждение свойств таких функций и действий с ними можно найти в [17].

5.1. *О дискретных обобщенных функциях.*

Лемма 2. $f_d \in S'(h\mathbb{Z}^m)$ тогда и только тогда, когда найдется положительное число C и целое число $p \geq 0$, такие, что для произвольной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^m)$ выполняется неравенство

$$|(f_d, u_d)| \leq C|u_d|_p,$$

где

$$|u_d|_p = \sup_{\substack{k \leq p, \\ \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m}} (1 + |\tilde{x}|)^p |(\Delta^{(k)} u_d)(\tilde{x})|.$$

Доказательство. Поскольку достаточность очевидна, остановимся на доказательстве необходимости. Возьмем $f_d \in S'(h\mathbb{Z}^m)$. Воспользуемся методом от противного и предположим, что таких чисел C и p не существует. Тогда найдется такая последовательность $\{u_{d,k}\}_{k=1}^\infty$, $u_{d,k} \in S(h\mathbb{Z}^m)$, что

$$|(f_d, u_{d,k})| \geq k|u_{d,k}|_k. \quad (9)$$

Последовательность

$$v_{d,k}(\tilde{x}) = \frac{u_{d,k}(\tilde{x})}{\sqrt{k}|u_{d,k}|_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

стремится к нулю в пространстве $S(h\mathbb{Z}^m)$, так как при $k \geq s$, $k \geq r$

$$|\tilde{x}^s \Delta^{(r)} v_{d,k}(\tilde{x})| = \frac{|\tilde{x}^s \Delta^{(s)} u_{d,k}(\tilde{x})|}{\sqrt{k} |u_{d,k}|_k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

В силу непрерывности функционала f_d в пространстве $S(h\mathbb{Z}^m)$ заключаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f_d, v_{d,k}) = 0.$$

Однако с другой стороны из (9) следует, что

$$|(f_d, v_{d,k})| = \frac{|(f_d, u_{d,k})|}{\sqrt{k} |u_{d,k}|_k} \geq \sqrt{k}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 2. $\square$

Ниже приведем одномерный вариант использованного выше результата, из которого легко следует нужный многомерный вариант.

Лемма 3. *Если дискретная обобщенная функция $f_d \in S'(h\mathbb{Z})$ сосредоточена в начале координат, то она представляет собой конечную линейную комбинацию разделенных разностей функции f_d . Другими словами,*

$$f_d(\tilde{x}) = \sum_{k=0}^n c_k (\Delta^{(k)} \delta_d)(\tilde{x}).$$

Доказательство. Поскольку $\text{supp } f_d = \{0\}$, то для произвольного $k > 0$

$$f_d = \varphi(k\tilde{x}) f_d, \quad (10)$$

где $\varphi(\tilde{x}) \in S(h\mathbb{Z}^m)$ равно 1 в некоторой окрестности 0 и равно 0 при $|\tilde{x}| > 1$. По лемме 2

$$|(f_d, u_d)| \leq C |u_d|_n, \quad \forall u_d \in S(h\mathbb{Z}^m), \quad (11)$$

для некоторых $C > 0$, $n \geq 0$, не зависящих от u_d . Для произвольной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^m)$ построим

$$u_{d,n}(\tilde{x}) = u_d(\tilde{x}) - \sum_{l=0}^n \frac{(\Delta^{(l)} u_d)(0)}{l!} \tilde{x}^l, \quad v_k(\tilde{x}) = u_{d,n}(\tilde{x}) \varphi(k\tilde{x}).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} (\Delta^{(r)} u_{d,n})(\tilde{x}) &= O(|\tilde{x}|^{n+1-r}), \quad \tilde{x} \rightarrow \infty \quad (r \leq n), \\ (\Delta^{(s)} \varphi)(k\tilde{x}) &= O(k^s), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и применяя (11) к $v_k(\tilde{x})$, заключаем, что

$$\begin{aligned} |(f_d, v_k)| &\leq C |v_k|_n = C \sup_{l \leq n, |\tilde{x}| \leq 1/k} (1 + |\tilde{x}|)^n |\Delta^{(l)} (u_{d,n}(\tilde{x}) \varphi(k\tilde{x}))| \leq \\ &\leq C_1 \max_{l \leq n, |\tilde{x}| \leq 1/k} \sum_{s=0}^l |\Delta^{(s)} u_{d,n}(\tilde{x})| |\Delta^{(l-s)} \varphi(k\tilde{x})| \leq C_2 \max_{l \leq n} \sum_{s=0}^l k^{-n-1+s} k^{l-s} = \frac{C_3}{k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что в соответствии с (10) (f_d, v_k) не зависит от k . Тогда

$$(f_d, v_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_d, v_k) = 0.$$

Таким образом, применяя (10) при $k = 1$, приходим к следующему представлению:

$$\begin{aligned} (f_d, u_d) &= (\varphi f_d, u_d) = (f_d, \varphi u_d) = \left(f_d, v_1 + \sum_{l=0}^n \frac{(\Delta^{(l)} u_d)(0)}{l!} \tilde{x}^l \right) = \\ &= (f_d, v_1) + \sum_{l=0}^n \frac{(\Delta^{(l)} u_d)(0)}{l!} (f_d, \tilde{x}^l \varphi(\tilde{x})) = \sum_{l=0}^n C_l (\Delta^{(l)} \delta_d, u_d), \end{aligned}$$

где использовано обозначение $C_l = (f_d, \tilde{x}^l \varphi)$. Нетрудно убедиться в единственности этого представления. $\square$

Чтобы получить фурье-представление леммы 3, приведем некоторые наблюдения. Отметим, что каждая дискретная обобщенная функция $f_d \in S'(h\mathbb{Z})$ может рассматриваться как обобщенная функция $f_d \in S'(\mathbb{R})$, сосредоточенная на $h\mathbb{Z}$.

Так как преобразование Фурье обобщенной функции f_d определено формулой

$$(F f_d, u) = (f_d, F u), \quad \forall u \in S(\mathbb{R})$$

(см. [4]), то

$$(F \Delta^{(1)} f_d, u) = (f_d, \Delta^{(1)} F u).$$

Остаются небольшие вычисления.

Для $u \in S(\mathbb{R})$ получаем

$$(\Delta^{(1)} \tilde{u})(\xi) = \frac{1}{h}(\tilde{u}(\xi + h) - \tilde{u}(\xi)) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-ihx} - 1) e^{-ix\xi} u(x) dx,$$

так что для обобщенной функции $f_d \in S'(\mathbb{R})$ справедливо следующее соотношение:

$$(f_d, \Delta^{(1)} F u) = \left(f_d, F \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} u(x) \right) \right) = \left(F f_d, \frac{e^{-ihx} - 1}{h} u \right) = \left(\frac{e^{-ih\xi} - 1}{h} F f_d, u \right).$$

Если $f_d \in S(h\mathbb{Z})$, то

$$(F_d \Delta_+^{(1)} f_d)(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}} e^{-i\tilde{x}\xi} \frac{f_d(\tilde{x} + h) - f_d(\tilde{x})}{h} h = \frac{e^{-ih\xi} - 1}{h} (F_d f_d)(\xi),$$

что подтверждает вышеприведенные выкладки. Теперь легко переформулировать лемму 3 в образах Фурье.

Следствие 1. Для дискретной обобщенной функции

$$f_d(\tilde{x}) = \sum_{k=0}^n c_k (\Delta^{(k)} \delta_d)(\tilde{x})$$

справедливо следующее Фурье-представление:

$$\tilde{f}_d(\xi) = \sum_{k=0}^n c_k \zeta^k,$$

где $\zeta = h(e^{-ih\xi} - 1)$.

5.2. Доказательство теоремы 2. Для доказательства будет использован прием, связанный с факторизацией (см. [11]), который тесно связан с периодической задачей Римана [1, 17, 18]. Правую часть $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$ продолжим на $\mathbb{R}^2$, обозначая $lv_d \in H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$. Теперь введем функцию

$$w_d(\tilde{x}) = lv_d(\tilde{x}) - (A_d u_d)(\tilde{x})$$

так, что $w_d(\tilde{x}) \equiv 0, \forall \tilde{x} \in D_d$. Далее запишем

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + w_d(\tilde{x}) = lv_d(\tilde{x})$$

и применим дискретное преобразование Фурье

$$A_d(\xi) \tilde{u}_d(\xi) + \tilde{w}_d(\xi) = \tilde{lv}_d(\xi).$$

С учетом факторизации символа $A_d(\xi)$ получаем

$$A_{d,+}(\xi) \tilde{u}_d(\xi) + A_{d,-}^{-1}(\xi) \tilde{w}_d(\xi) = A_{d,-}^{-1}(\xi) \tilde{lv}_d(\xi).$$

Обсудим функциональные пространства последнего равенства. Так как $\tilde{lv}_d(\xi) \in \tilde{H}^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$, то в соответствии со свойствами символа $A_{d,-}^{-1}(\xi)$ имеем $A_{d,-}^{-1}(\xi) \tilde{lv}_d(\xi) \in \tilde{H}^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$. Обозначим

через $Q_n(\xi)$ произвольный многочлен степени n от переменных $\zeta_k = \hbar(e^{-i\hbar\xi_k} - 1)$, $k = 1, 2$, удовлетворяющий условию (2). Тогда $Q_n^{-1}(\xi)A_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{lv}_d(\xi) \in \widetilde{H}^{-\delta}(\hbar\mathbb{Z}^2)$, и мы можем воспользоваться следующим представлением:

$$Q_n^{-1}(\xi)A_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{lv}_d(\xi) = f_+(\xi) + f_-(\xi),$$

где

$$f_+(\xi) = (B_h(Q_n^{-1}A_{d,-}^{-1}\widetilde{lv}_d))(\xi), \quad f_-(\xi) = ((I - B_h)(Q_n^{-1}A_{d,-}^{-1}\widetilde{lv}_d))(\xi)$$

(см. замечание 1). Конечно, $f_+ \in \widetilde{H}^{-\delta}(K_d)$, $f_- \in \widetilde{H}^{-\delta}(\hbar\mathbb{Z}^2 \setminus K_d)$. Таким образом,

$$A_{d,+}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + A_{d,-}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) = Q_n(\xi)f_+(\xi) + Q_n(\xi)f_-(\xi),$$

или

$$A_{d,+}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) - Q_n(\xi)f_+(\xi) = Q_n(\xi)f_-(\xi) - A_{d,-}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi).$$

Сравним левую и правую части последнего равенства. Левая часть из пространства $\widetilde{H}^{s-\varkappa}(K_d)$, а правая часть — из $\widetilde{H}^{s-\varkappa}(\hbar\mathbb{Z}^2 \setminus K_d)$. Применив обратное дискретное преобразование Фурье, получим равенство двух дискретных обобщенных функций, одна из которых обнуляется внутри K_d , а другая — вне. Отсюда заключаем, что это может быть только дискретная обобщенная функция, сосредоточенная на границе дискретного квадранта. С учетом леммы 3 и следствия 1 получим следующее представление:

$$A_{d,+}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) - Q_n(\xi)f_+(\xi) = \sum_{k=0}^n (\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\zeta_1^k),$$

или, по-другому,

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi)Q_n(\xi)B_h\left(Q_n^{-1}(\xi)\tilde{A}_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{lv}_d(\xi)\right) + \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi)\sum_{k=0}^n (\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\zeta_1^k).$$

Осталось выяснить, сколько слагаемых должно присутствовать в последней сумме с учетом того, что слагаемые должны содержаться в пространстве $\widetilde{H}^s(\hbar\mathbb{T}^m)$. Рассмотрим одно из слагаемых, например, $\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k$. Так как множитель $A_{d,+}^{-1}(\xi)$ имеет порядок $-\varkappa$, мы должны убедиться в конечности $H^{s-\varkappa}$ -нормы для $\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k$. Имеем

$$\begin{aligned} \|c_k(\Delta_2^{(k)}\delta)\|_{s-\varkappa}^2 &= \int_{\hbar\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^{s-\varkappa} |\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k|^2 d\xi = \int_{\hbar\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^{s-\varkappa} |\tilde{c}_k(\xi_1)|^2 |\zeta_2^k|^2 d\xi \leq \\ &\leq a_1 \hbar^{2(s-\varkappa+k+1/2)} \int_{\hbar\mathbb{T}} |\tilde{c}_k(\xi_1)|^2 d\xi_1 \leq a_2 \int_{\hbar\mathbb{T}} (1 + |\zeta_1^2|)^{s-\varkappa+k+1/2} |\tilde{c}_k(\xi_1)|^2 d\xi_1, \end{aligned}$$

где постоянные a_1, a_2 не зависят от $\hbar$.

Последнее слагаемое должно иметь номер $(n-1)$, потому что для n -го слагаемого показатель при $\hbar$ будет положительным; действительно, при $k = n$ получаем

$$s_n = s - \varkappa - n + \frac{1}{2} = -n - \delta + n + \frac{1}{2} = -\delta + \frac{1}{2} > 0.$$

Следствие 2. Пусть $\varkappa - s = n + \delta \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$, $v_d \equiv 0$. Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi) \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\zeta_1^k), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2).$$

6. Заключение. В работе рассмотрен лишь двумерный конус, однако авторы рассчитывают получить результаты, аналогичные полученным в случае многомерного дискретного полупространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках// Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 5. — С. 642–649.
2. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: КомКнига, 2010.
3. *Васильев В. Б., Тарасова О. А.* О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 174. — С. 12–19.
4. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
5. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973.
6. *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1986.
7. *Рябенский В. С.* Метод разностных потенциалов и его приложения. — М.: Физматлит, 2002.
8. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
9. *Франк Л. С.* Пространства сеточных функций// Мат. сб. — 1971. — 86, № 2. — С. 187–233.
10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов. Т. 1-4. — М.: Мир, 1986.
11. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
12. *Botchway L. N. A., Gaël Kibiti P., Ruzhansky M.* Difference equations and pseudo-differential operators on $\mathbb{Z}^n$ // J. Funct. Anal. — 2020. — 278, № 11. — 108473.
13. *King F. W.* Hilbert Transforms. Vols. 1, 2. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
14. *Rabinovich V. S.* Wiener algebra of operators on the lattice $\mathbb{Z}^n$ depending on the small parameter $\mu > 0$ // Complex Var. Elliptic Equations. — 2013. — 58, № 6. — P. 751–766.
15. *Tarasova O. A., Vasilyev V. B.* To the theory of discrete boundary value problems// Difference Differ. Equations Appl. — 2019. — 2. — 17.
16. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Discrete singular operators and equations in a half-space// Azerb. J. Math. — 2013. — 3, № 1. — P. 81–93.
17. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space// Math. Model. Anal. — 2018. — 23, № 3. — P. 492–506.
18. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* On some discrete potential like operators// Tatra Mt. Math. Publ. — 2018. — 71. — P. 195–212.
19. *Vasilyev V. B.* The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, discrete pseudo-differential operators// AIP Conf. Proc. — 2017. — 1863. — 140014.
20. *Vasilyev V. B.* On discrete solutions for pseudo-differential equations// AIP Conf. Proc. — 2019. — 2116. — 040010.

Васильев Владимир Борисович

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: vbv57@inbox.ru

Ходырева Анастасия Александровна

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: anastasia.kho@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 24–35
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-24-35

УДК 514.76

ИНВАРИАНТНОСТЬ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ВЕКТОРА

© 2023 г. Л. А. ИГНАТОЧКИНА, А. В. НИКИФОРОВА, М. А. ТЕРПСТРА

Аннотация. Получены критерии Φ -инвариантности и η -инвариантности почти контактных метрических структур, а также критерий киллинговости характеристического вектора ξ . Найдены все классы почти контактных метрических структур из классификации Кириченко, которые являются Φ -инвариантными, η -инвариантными, а вектор ξ является киллинговым. Доказано, что ξ не может быть конформно-киллинговым, отличным от киллингова, ни для одной почти контактной метрической структуры.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, инфинитезимальное конформное преобразование, инфинитезимальная изометрия.

INVARIANCE OF AN ALMOST CONTACT METRIC STRUCTURE OF A SMOOTH MANIFOLD WITH RESPECT TO THE CHARACTERISTIC VECTOR

© 2023 L. A. IGNATOCHKINA, A. V. NIKIFOROVA, M. A. TERPSTRA

ABSTRACT. In this paper, we obtain criteria for the Φ -invariance and the η -invariance for almost contact metric structures and a criterion for a characteristic vector ξ to be a Killing vector. We find all classes of almost contact metric structures from the Kirichenko classification that are Φ -invariant, η -invariant, and ξ is a Killing vector. Also, we prove that for any almost contact metric structure, ξ cannot be conformal Killing vector distinct from a Killing vector.

Keywords and phrases: almost contact metric structure, infinitesimal conformal transformation, infinitesimal isometry.

AMS Subject Classification: 53B05, 51E15

1. Введение. Почти контактные метрические структуры (Φ, η, ξ, g) возникают естественным образом на ряде гладких многообразий. Например, они индуцируются на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий, на расширенном фазовом пространстве механических систем, на вещественных вполне геодезических подмногообразиях келеровых многообразий и др. Другим примером почти контактной структуры на гладком многообразии является почти контактная метрическая структура на тотальном пространстве главного T^1 -расслоения (если фиксирована линейная связность) над почти эрмитовым многообразием [2]. Более того, если на гладком многообразии M фиксирована почти контактная структура (Φ, η, ξ) , такая, что интегральные кривые векторного поля ξ диффеоморфны окружностям, причем $\mathcal{L}_\xi(\Phi) = \mathcal{L}_\xi(\eta) = 0$ ($\mathcal{L}_\xi$ — производная Ли), то M является пространством главного T^1 -расслоения над почти комплексным многообразием, причем η является формой связности. Если риманова метрика g дополняет эту почти

контактную структуру до почти контактной метрической, причем ξ является вектором Киллинга (т.е. $\mathcal{L}_\xi(g) = 0$), то на базе расслоения индуцируется почти эрмитова структура [2]. Хорошо известно, что условия $\mathcal{L}_\xi(\Phi) = 0$, $\mathcal{L}_\xi(\eta) = 0$, $\mathcal{L}_\xi(g) = 0$ равносильны инвариантности тензорных полей Φ , η , g относительно 1-параметрической группы локальных диффеоморфизмов характеристического вектора ξ .

С другой стороны, инвариантность тензорных полей почти контактной метрической структуры относительно 1-параметрической группы локальных диффеоморфизмов характеристического вектора ξ представляет самостоятельный интерес. В [4] были получены результаты, касающиеся инвариантности тензорных полей Φ , η , g относительно ξ для некоторых классов почти контактных метрических структур. Так как классификация Кириченко почти контактных метрических структур содержит 2048 классов, встает вопрос о нахождении универсальных критериев, которые могли бы дать ответ об инвариантности относительно ξ почти контактной метрической структуры любого из 2048 классов. Такие критерии были найдены в нашей работе.

2. Почти контактные метрические структуры на гладких многообразиях. Большая часть данного пункта носит реферативный характер. Материалы взяты из монографии [2].

Пусть M — гладкое многообразие размерности $(2n + 1)$, $n > 1$. Через $\mathfrak{X}(M)$ обозначим модуль гладких векторных полей на M .

Четверка (Φ, η, ξ, g) , где эндоморфизм Φ , 1-форма η , векторное поле ξ и риманова метрика g удовлетворяют условиям:

$$\Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi; \quad (1)$$

$$\eta \circ \Phi = 0; \quad (2)$$

$$\eta(\xi) = 1; \quad (3)$$

$$\Phi(\xi) = 0; \quad (4)$$

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad (5)$$

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, называется *почти контактной метрической структурой* на многообразии M . Векторное поле ξ называется *характеристическим вектором*. Гладкое многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура называется *почти контактным метрическим многообразием*.

К каждому $(2n + 1)$ -мерному почти контактному метрическому многообразию внутренним образом присоединяется подрасслоение главного расслоения комплексных реперов со структурной группой $\{e\} \times U(n)$. Оно называется *присоединенной G-структурой*. Реперы называются *A-реперами*. Тотальное пространство расслоения A-реперов будем обозначать BM . A-реперы получают следующим образом. Комплексификация касательного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ в каждой точке m многообразия M распадается в прямую сумму

$$T_m^{\mathbb{C}}(M) = D_{\Phi}^0 \oplus D_{\Phi}^i \oplus D_{\Phi}^{-i}$$

собственных подпространств комплексификации оператора Φ_m , отвечающих собственным значениям 0 , $i \equiv \sqrt{-1}$, $-i$, соответственно. (В дальнейшем построении A-репера будем для краткости обозначать значение тензорного поля Φ в точке m через Φ). Проекторами на эти подпространства будут операторы

$$\mathfrak{m} = \text{id} + \Phi^2; \quad \pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + i\Phi); \quad \bar{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + i\Phi). \quad (6)$$

Касательное пространство $T_m(M) = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{L}$, где подпространство $\mathfrak{M}$ является образом проектора $\mathfrak{m}$ из (6), а подпространство $\mathfrak{L}$ является образом дополнительного проектора $\mathfrak{l} = -\Phi^2$. Тогда, применяя операторы π , $\bar{\pi}$ (6) к базисам $(e_1, \dots, e_n)$ подпространства $\mathfrak{L}$, ортонормированным относительно эрмитовой формы

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = g(X, Y) + ig(X, \Phi Y), \quad X, Y \in \mathfrak{L},$$

получим A-репер

$$\left(m, \varepsilon_0 = \xi_m, \varepsilon_1 = \sqrt{2}\pi(e_1), \dots, \varepsilon_n = \sqrt{2}\pi(e_n), \varepsilon_{\hat{1}} = \sqrt{2}\bar{\pi}(e_1), \dots, \varepsilon_{\hat{n}} = \sqrt{2}\bar{\pi}(e_n) \right).$$

Договоримся, что индексы $i, j, k, l, \dots$ (вторая часть латинского алфавита) пробегают значения от 0 до $2n$, индексы $a, b, c, d, \dots$ (первая часть латинского алфавита) пробегают значения от 1 до n и $\hat{a} = a + n$. Тогда А-репер коротко будет записываться в виде $p = (m, \varepsilon_i)$ или $p = (m, \xi, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}})$.

Напомним, что компоненты тензорных полей типа $(r, 0)$ и $(r, 1)$ на пространстве присоединенной G -структуры суть гладкие функции $\{t_{i_1 \dots i_r}(p)\}$ и $\{t_{i_1 \dots i_r}^j(p)\}$ на BM , определяемые формулами

$$t_{i_1 \dots i_r}(p) = t_m^{\mathbb{C}}(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_r}); \quad t_m^{\mathbb{C}}(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_r}) = t_{i_1 \dots i_r}^j(p) \varepsilon_j; \quad p \in BM.$$

Обозначение репера p для краткости часто опускают.

Компоненты тензорных полей Φ и g на пространстве расслоения А-реперов имеют вид

$$(\Phi_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & iI_n & 0 \\ 0 & 0 & -iI_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где I_n — единичная матрица порядка n .

Основная теорема тензорного анализа для тензорных полей g и Φ примет вид

$$dg_{ij} - g_{kj} \theta_i^k - g_{ik} \theta_j^k = 0; \quad (8)$$

$$d\Phi_j^i + \Phi_j^k \theta_k^i - \Phi_k^i \theta_j^k = \Phi_{j,k}^i \omega^k, \quad (9)$$

где $\{\theta_j^i\}$ — тензорные компоненты формы римановой связности ∇ метрики g , $\{\omega^k\}$ — тензорные компоненты формы смещения, $\{\Phi_{j,k}^i\}$ — компоненты ковариантного дифференциала эндоморфизма Φ в связности ∇ . На пространстве присоединенной G -структуры (8) с учетом (7) примут вид

$$\theta_{\hat{b}}^a = \frac{i}{2} \Phi_{\hat{b},k}^a \omega^k; \quad \theta_0^a = i \Phi_{0,k}^a \omega^k; \quad \theta_a^0 = -i \Phi_{a,k}^0 \omega^k; \quad (10)$$

$$\theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -\frac{i}{2} \Phi_{\hat{b},k}^{\hat{a}} \omega^k; \quad \theta_0^{\hat{a}} = -i \Phi_{0,k}^{\hat{a}} \omega^k; \quad \theta_{\hat{a}}^0 = i \Phi_{\hat{a},k}^0 \omega^k;$$

$$\Phi_{b,k}^a = 0; \quad \Phi_{\hat{b},k}^{\hat{a}} = 0; \quad \Phi_{0,k}^0 = 0. \quad (11)$$

Кроме того, (9) с учетом (7) примут вид

$$\theta_{\hat{b}}^a + \theta_{\hat{a}}^{\hat{b}} = 0; \quad \theta_{\hat{b}}^a + \theta_{\hat{a}}^b = 0; \quad \theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} + \theta_{\hat{a}}^{\hat{b}} = 0; \quad \theta_a^0 + \theta_0^{\hat{a}} = 0; \quad \theta_0^a + \theta_{\hat{a}}^0 = 0; \quad \theta_0^0 = 0. \quad (12)$$

Подставляя (10) в (12), получим

$$\Phi_{a,k}^{\hat{b}} = -\Phi_{\hat{b},k}^a; \quad \Phi_{\hat{a},k}^b = -\Phi_{b,k}^{\hat{a}}; \quad \Phi_{a,k}^0 = -\Phi_{0,k}^{\hat{a}}; \quad \Phi_{\hat{a},k}^0 = -\Phi_{0,k}^a. \quad (13)$$

Далее вводятся обозначения

$$\begin{aligned} B^{ab}{}_c &= -\frac{i}{2} \Phi_{b,c}^a; \quad B^{abc} = \frac{i}{2} \Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^a; \quad C^{abc} = \frac{i}{2} \Phi_{b,\hat{c}}^a; \quad B^a{}_b = i \Phi_{0,b}^a; \quad C^a = -i \Phi_{\hat{a},0}^0; \\ B_{ab}{}^c &= \frac{i}{2} \Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}; \quad B_{abc} = -\frac{i}{2} \Phi_{[b,c]}^a; \quad C_{abc} = -\frac{i}{2} \Phi_{b,c}^{\hat{a}}; \quad B_a{}^b = -i \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}}; \quad C_a = i \Phi_{a,0}^0; \\ B^{ab} &= i \left(\Phi_{0,\hat{b}}^a - \frac{1}{2} \Phi_{\hat{b},0}^a \right); \quad B_{ab} = -i \left(\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{1}{2} \Phi_{b,0}^{\hat{a}} \right); \quad C^{ab} = i \Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0; \quad C_{ab} = -i \Phi_{[a,b]}^0; \\ C_b^a &= -i (\Phi_{\hat{a},b}^0 + \Phi_{b,\hat{a}}^0); \quad F^{ab} = i \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0; \quad F_{ab} = -i \Phi_{a,b}^0 \end{aligned} \quad (14)$$

и следующие семейства функций на пространстве присоединенной G -структуры:

- (i) $B = \{B^i{}_{jk}\}$; $B^a{}_{\hat{b}\hat{c}} = B^{ab}{}_c$; $B^{\hat{a}}{}_{b\hat{c}} = B_{ab}{}^c$; все прочие компоненты семейства B нулевые;
- (ii) $C = \{C^i{}_{jk}\}$; $C^a{}_{\hat{b}\hat{c}} = C^{abc}$; $C^{\hat{a}}{}_{bc} = C_{abc}$; все прочие компоненты семейства C нулевые;
- (iii) $D = \{D^i{}_j\}$; $D^a{}_{\hat{b}} = B^{ab}$; $D^{\hat{a}}{}_b = B_{ab}$; все прочие компоненты семейства D нулевые;
- (iv) $E = \{E^i{}_j\}$; $E^a{}_b = B^a{}_b$; $E^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} = B_a{}^b$; все прочие компоненты семейства E нулевые;
- (v) $F = \{F^i{}_j\}$; $F^a{}_{\hat{b}} = F^{ab}$; $F^{\hat{a}}{}_b = F_{ab}$; все прочие компоненты семейства F нулевые;
- (vi) $G = \{G^i\}$; $G^a = C^a$; $G^{\hat{a}} = C_a$; все прочие компоненты семейства G нулевые;

Эти семейства функций определяют тензорные поля, которые были названы *первым, вторым, третьим, четвертым, пятым и шестым* структурными тензорами почти контактной метрической структуры.

Теорема 1 (см. [2]). *Структурные тензоры почти контактной метрической структуры обладают следующими свойствами:*

$$\begin{aligned} \Phi \circ B(X, Y) &= -B(\Phi X, Y) = B(X, \Phi Y); & \langle\langle B(X, Y), Z \rangle\rangle + \overline{\langle\langle Y, B(X, Z) \rangle\rangle} &= 0; \\ \Phi \circ C(X, Y) &= -C(\Phi X, Y) = -C(X, \Phi Y); & \langle\langle C(X, Y), Z \rangle\rangle + \overline{\langle\langle Y, C(X, Z) \rangle\rangle} &= 0; \\ \Phi \circ D &= -D \circ \Phi; & \Phi \circ E &= -E \circ \Phi; \\ \Phi \circ F &= -F \circ \Phi; & G \in \mathfrak{L}; & (X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)). \end{aligned} \quad (15)$$

Рассматриваются линейные пространства $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ тензоров на $\mathfrak{L}$, обладающих свойствами (15), соответственно. Эти тензоры $\mathbb{C}$ -линейны либо $\mathbb{C}$ -антилинейны по соответствующим аргументам, а соответствующие им $\mathbb{R}$ -линейные пространства имеют естественную структуру $\mathbb{C}$ -линейного пространства. Пространство $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \oplus \mathfrak{B}_1$ распадается в прямую сумму подпространств бесследных и примитивных тензоров (первый структурный тензор представим в виде $B = B_0 + B_1$, где B_0 — бесследный, а B_1 — примитивный); пространство $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \oplus \mathfrak{C}_1$ — в прямую сумму подпространств квазисимметричных и абсолютно кососимметричных тензоров (второй структурный тензор представим в виде $C = C_0 + C_1$, где C_0 — квазисимметричный, а C_1 — абсолютно кососимметричный); $D = \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_1$ — в прямую сумму подпространств симметричных и кососимметричных тензоров ($D = D_0 + D_1$, $F = F_0 + F_1$ где D_0, F_0 — симметричные, D_1, F_1 — кососимметричные); $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \oplus \mathfrak{E}_1$ — в прямую сумму подпространств бесследных и скалярных эндоморфизмов модуля $\mathfrak{L}$ ($E = E_0 + E_1$, где E_0 — бесследный, E_1 — скалярный). Тогда пространство $\mathfrak{T} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{C} \oplus \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{L}$ распадается в прямую сумму 11 подпространств:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{B}_0 \oplus \mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{C}_0 \oplus \mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{E}_0 \oplus \mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{L} \equiv \bigoplus_{k=1}^{11} \mathfrak{T}_k.$$

Это разложение неприводимо относительно структурной группы $U(n)$ и определяет $2^{11} = 2048$ различных классов почти контактных метрических структур в зависимости от того, в какие из перечисленных классов попадают шесть структурных тензоров почти контактной метрической структуры. Классы обозначаются $AC-N$, где N — десятичное число, в двоичной записи которого на k -м месте стоит нуль, если составляющая соответствующего структурного тензора, лежащая в подпространстве $\mathfrak{T}_k$, равна нулю. Будем называть эту классификацию почти контактных метрических структур классификацией Кириченко.

Дополним изложенный материал исследованием вида компонент ковариантного дифференциала формы η на пространстве присоединенной G -структуры. По определению компонент на пространстве присоединенной G -структуры для формы η и (3) получаем

$$\eta_0 = 1; \quad \eta_a = \eta_{\hat{a}} = 0. \quad (16)$$

По основной теореме тензорного анализа для компонент $\{\eta_i\}$ формы η имеем

$$d\eta_i - \eta_j \theta_i^j = \eta_{i,j} \omega^j, \quad (17)$$

где $\{\eta_{i,j}\}$ — компоненты ковариантного дифференциала η в римановой связности ∇ метрики g . Подставляя в (17) тождества (16) и (10)–(11), а также учитывая обозначения (14) и свойство кососимметричности (13), получим

$$\begin{aligned} \eta_{a,b} &= i\Phi_{a,b}^0 = -F_{ab}; & \eta_{a,\hat{b}} &= i\Phi_{a,\hat{b}}^0 = B_a{}^b; & \eta_{a,0} &= i\Phi_{a,0}^0 = C_a; \\ \eta_{\hat{a},b} &= -i\Phi_{\hat{a},b}^0 = B^a{}_{\hat{b}}; & \eta_{\hat{a},\hat{b}} &= -i\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0 = -F^{ab}; & \eta_{\hat{a},0} &= -i\Phi_{\hat{a},0}^0 = C^a; & \eta_{0,k} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

3. Локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порождаемая характеристическим вектором ξ . Выразим производные Ли $\mathfrak{L}_\xi$ для тензоров Φ , η , g через их ковариантные дифференциалы в римановой связности ∇ метрики g .

Применим операцию ковариантного дифференцирования ∇_X ($X \in \mathfrak{X}(M)$) к (3) и (4):

$$\Phi(\nabla_X \xi) = -\nabla_X(\Phi)(\xi); \quad \eta(\nabla_X \xi) = -\nabla_X(\eta)\xi. \quad (19)$$

По свойствам ковариантной производной имеем

$$\nabla_Y(\Phi X) = \nabla_Y(\Phi)X + \Phi(\nabla_Y X), \quad (20)$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Для производной Ли $\mathfrak{L}_\xi$ имеем

$$[\xi, \Phi X] = \mathfrak{L}_\xi(\Phi)X + \Phi([\xi, X]). \quad (21)$$

Так как ∇ является связностью без кручения, т.е. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, с учетом (19) и (20) из (21) получим

$$\mathfrak{L}_\xi(\Phi)X = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi\nabla_{\Phi X}(\xi) + \nabla_{\Phi X}(\eta)(\xi)\xi. \quad (22)$$

Ковариантно дифференцируя тождество (5), в котором $Y = \xi$ с учетом (3) и (4), а также ковариантного постоянства метрики g в римановой связности, получим

$$g(X, \nabla_Y \xi) = \nabla_Y(\eta)X. \quad (23)$$

В частности, если $X = \xi$, получим $\nabla_Y(\eta)\xi = g(\xi, \nabla_Y \xi) = 0$. (Последнее равенство получается, если применить ∇_Y к тождеству $g(\xi, \xi) = 1$). В результате этого (22) примет вид

$$\mathfrak{L}_\xi(\Phi)X = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi\nabla_{\Phi X}(\xi). \quad (24)$$

Аналогично рассуждаем для формы η . Ковариантная производная и производная Ли $\mathfrak{L}_\xi$ для η вычисляются так:

$$\xi(\eta(X)) = \mathfrak{L}_\xi(\eta)X + \eta([\xi, X]); \quad Y(\eta(X)) = \nabla_Y(\eta)X + \eta(\nabla_Y X).$$

Откуда с учетом отсутствия кручения у ∇ и (2), получаем

$$\mathfrak{L}_\xi(\eta)X = \nabla_\xi(\eta)X - \nabla_X(\eta)\xi. \quad (25)$$

Для ковариантной производной и производной Ли метрики g имеем

$$\xi(g(X, Y)) = \mathfrak{L}_\xi(g)(X, Y) + g([\xi, X], Y) + g(X, [\xi, Y]); \quad (26)$$

$$\xi(g(X, Y)) = g(\nabla_\xi X, Y) + g(X, \nabla_\xi Y). \quad (27)$$

Приравнявая (26) и (27), учитывая нулевое кручение римановой связности и подставляя в полученное равенство (23), получим

$$\mathfrak{L}_\xi(g)(X, Y) = \nabla_X(\eta)Y + \nabla_Y(\eta)X. \quad (28)$$

Следующий ряд определений взят из монографии [1]. Диффеоморфизм f псевдориманова многообразия (M, g) на себя называется *конформным преобразованием*, если $f^*g = e^\sigma g$, где σ — гладкая функция на M . Если функция σ является константой, то диффеоморфизм f называется *преобразованием подобия* или *гомотетией*, а при $\sigma = 0$ называется *изометрией*.

Векторное поле в некоторой окрестности каждой точки p многообразия M порождает локальную однопараметрическую подгруппу диффеоморфизмов. Если эти преобразования являются конформными, то векторное поле называется *инфинитезимальным конформным преобразованием* или *конформным (конформно-киллинговым) векторным полем*. Если эти преобразования являются изометриями, то векторное поле называется *инфинитезимальным изометрическим преобразованием* или *инфинитезимальной изометрией*, а также *киллинговым векторным полем*.

Хорошо известно [1], что векторное поле X является конформно-киллинговым тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{L}_X(g) = \sigma g. \quad (29)$$

Если σ является постоянной функцией, то X будет гомотетией, а если тождественным нулем, то киллинговым векторным полем.

В статье [3] были введены следующие определения. Почти контактная структура называется *контактно-инвариантной*, короче, *Φ -инвариантной*, если $\mathcal{L}_\xi(\Phi) = 0$. Почти контактная структура называется *η -инвариантной*, если $\mathcal{L}_\xi(\eta) = 0$.

Получим критерии Φ -инвариантности, η -инвариантности и конформной киллинговости характеристического вектора ξ в компонентах на пространстве расслоения A -реперов.

Согласно (24) определение Φ -инвариантности примет вид:

$$\Phi_{j,k}^i \xi^k - \Phi_{k,j}^i \xi^k - \Phi_t^i \Phi_{k,r}^t \xi^k \Phi_j^r = 0.$$

Откуда с учетом (11), (7), (16) и (18) получаем

$$\Phi_{b,0}^{\hat{a}} - 2\Phi_{0,b}^{\hat{a}} = 0; \quad \Phi_{b,0}^a - 2\Phi_{0,b}^a = 0; \quad \Phi_{b,0}^0 = 0; \quad \Phi_{\hat{b},0}^0 = 0.$$

Сравнивая полученные тождества с обозначениями C_a , C^a , B_{ab} и B^{ab} из (14), получим следующую теорему.

Теорема 2. *Почти контактная метрическая структура является Φ -инвариантной тогда и только тогда, когда третий D и шестой G структурные тензоры являются нулевыми.*

Согласно (25) определение η -инвариантности на пространстве присоединенной G -структуры примет вид:

$$\eta_{i,j} \xi^j - \eta_{j,i} \xi^j = 0;$$

отсюда с учетом (18) и (14) получим

$$C_a = 0; \quad C^a = 0.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Почти контактная метрическая структура является η -инвариантной тогда и только тогда, когда шестой G структурные тензоры являются нулевыми.*

Из этой теоремы с учетом теоремы 2 вытекает следующий факт.

Теорема 4. *Если почти контактная метрическая структура Φ -инвариантна, то она и η -инвариантна.*

Теорема 2 позволяет перечислить все классы Φ -инвариантных почти контактных метрических структур: двоичная запись их номера имеет вид ****00****0, вместо звездочки может стоять либо 0, либо 1. Количество классов таких структур 256. Аналогичным образом из теоремы 3 получаем, что классов η -инвариантных почти контактных метрических структур 1024 (на последнем месте в двоичной записи номера класса стоит 0, на остальных местах либо 0, либо 1). Согласно теореме 4 множество этих классов включает в себя 256 классов Φ -инвариантных почти контактных метрических структур.

Выясним, в каком случае ξ будет конформно-киллинговым векторным полем и, в частности, киллинговым. С учетом (28) определение конформно-киллингова векторного поля примет вид

$$\eta_{i,j} + \eta_{j,i} = \sigma g_{ij}. \quad (30)$$

При $i = 0, j = 0$ (30) с учетом (7) и седьмого равенства из (18) получим, что $\sigma = 0$; отсюда сразу получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Не существует почти контактных метрических многообразий, для которых характеристический вектор ξ являлся бы конформно-киллинговым, отличным от киллингова.*

Поэтому далее будем рассматривать (30) только при $\sigma \equiv 0$. Это будет критерий киллинговости характеристического вектора ξ . С учетом (18) и (13) на пространстве присоединенной G -структуры он примет вид

$$F_{ab} + F_{ba} = 0 \quad (\Phi_{a,b}^0 + \Phi_{b,a}^0 = 0); \quad (31)$$

$$F^{ab} + F^{ba} = 0 \quad (\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0 + \Phi_{\hat{b},\hat{a}}^0 = 0); \quad (32)$$

$$C_a = C^a = 0; \quad (33)$$

$$B_a^b + B^b_a = 0. \quad (34)$$

Тождество (31) равносильно кососимметричности пятого структурного тензора F . Кроме того, тождество (31) равносильно тождеству $B_{[ab]} = B_{ab}$. Действительно, в первом слагаемом равенства

$$B_{ab} = -i \left(\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{1}{2} \Phi_{b,0}^{\hat{a}} \right)$$

(см. (14)) применим (13)

$$B_{ab} = -i(-\Phi_{a,b}^0 - \Phi_{b,0}^{\hat{a}}).$$

В силу (13) второе слагаемое в этом тождестве кососимметрично по индексам a и b . Следовательно, $B_{(ab)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi_{(a,b)}^0 = 0$ (круглые скобки обозначают симметризацию по индексам, которые в них заключены). Так как $B_{ab} = B_{[ab]} + B_{(ab)}$, то (31) равносильно $B_{ab} = B_{[ab]}$. Аналогично (32) означает $B^{ab} = B^{[ab]}$. В результате получаем, что (31) и (32) равносильно кососимметричности третьего структурного тензора D . Тождества (33) равносильны тому, что шестой структурный тензор G тождественно равен нулю. Сворачивая по a и b тождество (34), получаем, что $B_a^a + B^a_a = 0$, т.е. след четвертого структурного тензора будет нулевым, а само тождество в инвариантном виде записывается так:

$$\langle\langle EX, Y \rangle\rangle + \langle\langle X, EY \rangle\rangle = 0$$

(см. [2, с. 404]). Так как четвертый структурный тензор однозначно представим в виде суммы скалярного и бесследного эндоморфизмов, получаем, что для классов почти контактных метрических структур, для которых четвертый структурный тензор E является скалярным (не тождественно нулевым), характеристический вектор ξ не является киллинговым. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Характеристический вектор ξ почти контактного метрического многообразия будет киллинговым тогда и только тогда, когда шестой структурный тензор G тождественно равен нулю, третий структурный тензор D кососимметричен (следовательно, кососимметричен пятый структурный тензор F), а четвертый структурный тензор E удовлетворяет тождеству (из которого следует, что E бесследен)*

$$\langle\langle EX, Y \rangle\rangle + \langle\langle X, EY \rangle\rangle = 0. \quad (35)$$

В частности, если четвертый структурный тензор E почти контактной метрической структуры является скалярным эндоморфизмом, отличным от тождественно нулевого, то характеристический вектор ξ не является киллинговым.

Теорема 6 позволяет перечислить все классы почти контактных метрических структур, для которых характеристический вектор может быть киллинговым: двоичные записи номеров этих классов имеют вид $****0*00*0$ (вместо звездочки может стоять либо 0, либо 1). Он будет киллинговым, если при этом еще выполняется (35). Таких классов 128 штук.

Если четвертый структурный тензор E тождественно равен нулю, то условие (35) выполняется автоматически. Тогда для структур классов с номерами $****0*000*0$ характеристический вектор ξ будет киллинговым. Таких классов 64 штуки.

Говорят [4], что характеристический вектор ξ сохраняет почти контактную метрическую структуру или почти контактная метрическая структура инвариантна относительно ξ , если тензорные поля Φ , η , g инвариантны относительно действия локальной 1-параметрической группы диффеоморфизмов, порождаемой ξ , т.е. эта структура Φ -инвариантна, η -инвариантна и ξ является киллинговым. С учетом теорем 2, 3, 6 получаем, что характеристический вектор ξ сохраняет классы почти контактных метрических структур с двоичными номерами $****00000*0$ (вместо звездочки стоит либо 0, либо 1). Таких классов 32 штуки. Для классов с двоичными номерами $****00*00*0$ ξ будет сохранять почти контактную метрическую структуру тогда и только тогда, когда выполняется тождество (35).

4. Локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порождаемая характеристическим вектором ξ , для некоторых классов почти контактных метрических структур. Применим теоремы 2, 3, 6 к наиболее известным классам почти контактных метрических структур. Определения и критерии этих классов взяты из [2].

Контактные метрические структуры (или *почти сасакиевы*) — это почти контактные метрические структуры, для которых $d\eta = 2\Omega$, где $\Omega(X, Y) = g(X, \Phi Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C_1 = D_1 = E_1 = F_1 = G = 0, \quad E = -\Phi.$$

K-контактными метрическими структурами называются контактные метрические структуры, для которых контактная форма η является киллинговой. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C_1 = D = E_1 = F = G = 0, \quad E = -\Phi.$$

Собственные контактные метрические структуры (т.е. контактные метрические структуры, не принадлежащие своим подклассам из классификации Кириченко) не являются Φ -инвариантными, но являются η -инвариантными. Для собственных контактных метрических структур ξ не является киллинговым.

Выясним, в каком случае контактная структура является Φ -инвариантной. Для этого нужно потребовать, чтобы $D = 0$. Тогда согласно равенству

$$B_{ab} = -i \left(\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{1}{2} \Phi_{b,0}^{\hat{a}} \right)$$

(см. (14)) имеем

$$\Phi_{a,b}^0 + \frac{1}{2} \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = 0.$$

Так как $F_1 = 0$, получим, что $\Phi_{[a,b]}^0 = 0$. В силу кососимметричности $\Phi_{b,0}^{\hat{a}}$ по индексам a и b получаем из этого, что $\Phi_{b,0}^{\hat{a}} = 0$, а значит, и $\Phi_{a,b}^0 = 0$. Это означает, что $F = 0$. Получаем, что выполняется критерий K-контактной метрической структуры.

Так как $E = -\Phi$, с учетом (7) находим

$$B_a^b + B^b_a = E_{\hat{b}}^{\hat{a}} + E^b_a = i\delta_a^b - i\delta_a^b = 0.$$

Следовательно, условие (35) для контактных структур выполняется. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема 7.

1. Контактная метрическая структура является Φ -инвариантной тогда и только тогда, когда она является K-контактной метрической структурой.
2. Характеристический вектор ξ сохраняет контактную метрическую структуру тогда и только тогда, когда она является K-контактной.
3. Характеристический вектор ξ сохраняет любую K-контактную метрическую структуру.

Почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если тензор Нейенхейса N_Φ ее структурного эндоморфизма Φ удовлетворяет тождеству $N_\Phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$. Критерий принадлежности этому классу:

$$C = D = F = G = 0.$$

Сразу получаем следующее утверждение.

Теорема 8. Нормальные структуры Φ -инвариантны (а значит, и η -инвариантны).

Теорема 9. Характеристический вектор ξ нормальной структуры является киллинговым (а значит, и сохраняет нормальную структуру) тогда и только тогда, когда для структурного тензора E выполняется (35).

Так как из (35) следует, что структурный тензор E должен быть бесследным, т.е. $E_1 = 0$, получаем, что собственные нормальные структуры (не принадлежащие подклассам классификации Кириченко) не будут сохраняться вектором ξ .

Приведем пример подкласса нормальных структур, которые сохраняются характеристическим вектором ξ .

Квази-сасакиевой структурой называется нормальная структура, фундаментальная форма Ω которой замкнута. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C = D = F = G = 0, \quad \langle\langle EX, Y \rangle\rangle + \langle\langle X, EY \rangle\rangle = 0.$$

Отсюда вытекает следующий факт.

Теорема 10. *Характеристический вектор ξ сохраняет любую квази-сасакиеву структуру.*

Этот результат был получен в [4] с помощью непосредственных вычислений.

Сасакиевой структурой называется нормальная контактная метрическая структура. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C = D = E_1 = F = G = 0, \quad E = -\Phi.$$

Отсюда получаем, что класс сасакиевых структур является подклассом квази-сасакиевых. Следовательно, характеристический вектор ξ сохраняет сасакиевы структуры. Этот результат был получен в [4].

Приближенно сасакиевой структурой называется почти контактная метрическая структура, если ее структурный эндоморфизм Φ удовлетворяет тождеству

$$\nabla_X(\Phi)X = g(X, X)\xi - \eta(X)X, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C_0 = D_0 = E_1 = F_0 = G = 0, \quad E = -\Phi.$$

Отсюда получаем, что D и F кососимметричны, а E удовлетворяет (35). Тогда верна следующая теорема.

Теорема 11. *Приближенно сасакиевы структуры являются η -инвариантными и ξ является киллинговым.*

Собственные приближенно сасакиевы структуры не являются Φ -инвариантными. Подкласс Φ -инвариантных (а следовательно, инвариантных относительно ξ) будет определяться тождествами $B = C_0 = D = E_1 = F_0 = G = 0, E = -\Phi$.

Почти косимплектической структурой называется почти контактная метрическая структура, для которой $d\eta = 0$ и $d\Omega = 0$. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C_1 = D_1 = E = F_1 = G = 0.$$

Собственные почти косимплектические структуры являются η -инвариантными, не являются Φ -инвариантными и ξ не является киллинговым.

Нормальная почти косимплектическая структура называется *косимплектической*. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C = D = E = F = G = 0.$$

Следовательно, характеристический вектор ξ сохраняет косимплектическую структуру. Этот результат также был получен в [4].

Почти контактная метрическая структура называется *слабо косимплектической*, если $\nabla_X(\Phi)X = 0, X \in \mathfrak{X}(M)$. Слабо косимплектическая структура с замкнутой контактной формой называется *точнейше косимплектической структурой*.

Критерий принадлежности классу слабо косимплектических структур:

$$B = C_0 = D_0 = E = F_0 = G = 0.$$

Критерий принадлежности классу точнее косимплектических структур:

$$B = C_0 = D = E = F = G = 0.$$

Из этого вытекает следующее утверждение.

Теорема 12.

1. Слабо косимплектические структуры являются η -инвариантными и ξ является киллинговым. Собственные слабо косимплектические структуры не являются Φ -инвариантными.
2. Слабо косимплектическая структура является Φ -инвариантной тогда и только тогда, когда она точнее косимплектическая.
3. Характеристический вектор ξ сохраняет любую точнее косимплектическую структуру.

Почти контактная метрическая структура называется *структурой Кенмоцу*, если

$$\nabla_X(\Phi)Y = g(\Phi X, Y)\xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C = D = E_0 = F = G = 0, \quad E = \text{id}.$$

Так как тензор E является скалярным, то его след отличен от нуля ($\text{tr } E = 2n$), следовательно, ξ не является киллинговым. Структуры Кенмоцу являются Φ -инвариантными и η -инвариантными. Эти результаты были получены в [4] непосредственными вычислениями.

5. Торсообразующий характеристический вектор ξ . В [4] Φ -инвариантность и η -инвариантность, а также киллинговость характеристического вектора ξ в основном рассматривалась в случае, когда ξ был торсообразующим. Эти исследования проводились для некоторых классов почти контактных метрических структур. Мы поставили перед собой задачу рассмотреть взаимосвязь этих понятий для случая произвольного почти контактного метрического многообразия.

Напомним [1], что векторное поле X на псевдоримановом многообразии называется *торсообразующим*, если

$$\nabla X = \rho \cdot \text{id} + a \otimes X, \quad (36)$$

где a — некоторая 1-форма, ρ — некоторая гладкая функция на M . Будем называть их *определяющими элементами*. Торсообразующее векторное поле X называется *локально-конциркулярным*, если $da = 0$ и *спецконциркулярным*, если $a = 0$.

Пусть характеристический вектор ξ произвольного почти контактного метрического многообразия является торсообразующим. Тогда условие (36) на пространстве присоединенной G -структуры примет вид

$$\xi^i{}_{,j} = \rho \delta_j^i + a_j \xi^i.$$

С учетом того, что $\xi^0 = 1$, $\xi^a = \xi^{\hat{a}} = 0$ получим

$$\begin{aligned} \xi^a{}_{,b} &= \rho \delta_b^a; & \xi^{\hat{a}}{}_{,\hat{b}} &= \rho \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}}; & \xi^a{}_{,\hat{b}} &= 0; & \xi^{\hat{a}}{}_{,b} &= 0; \\ \xi^a{}_{,0} &= \xi^{\hat{a}}{}_{,0} = 0; & \xi^0{}_{,a} &= a_a; & \xi^0{}_{,\hat{a}} &= a_{\hat{a}}; & \xi^0{}_{,0} &= \rho + a_0. \end{aligned} \quad (37)$$

Запишем на пространстве присоединенной G -структуры (23) с учетом (7):

$$\begin{aligned} \xi^a{}_{,b} &= \eta_{\hat{a},b}; & \xi^{\hat{a}}{}_{,b} &= \eta_{a,b}; & \xi^a{}_{,\hat{b}} &= \eta_{\hat{a},\hat{b}}; & \xi^{\hat{a}}{}_{,\hat{b}} &= \eta_{a,\hat{b}}; \\ \xi^0{}_{,a} &= \eta_{0,a}; & \xi^0{}_{,\hat{a}} &= \eta_{0,\hat{a}}; & \xi^a{}_{,0} &= \eta_{\hat{a},0}; & \xi^{\hat{a}}{}_{,0} &= \eta_{a,0}; & \xi^0{}_{,0} &= \eta_{0,0}. \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя (38) и (18) в (37), получим

$$B^a{}_b = \rho \delta_b^a; \quad B_a{}^b = \rho \delta_a^b; \quad (39)$$

$$F_{ab} = 0; \quad F^{ab} = 0; \quad C^a = 0; \quad C_a = 0; \quad a_a = 0; \quad a_{\hat{a}} = 0; \quad (40)$$

$$\rho + a_0 = 0. \quad (41)$$

Равенства (39) означают, что четвертый структурный тензор E является скалярным; (40) означают, что пятый F и шестой G структурные тензоры равны нулю. Сворачивая (39) по индексам a и b , а затем складывая, получим

$$2n\rho = B^a_a + B_a^a = E^i_i = \operatorname{tr} E.$$

Тогда

$$\rho = \frac{1}{2n} \operatorname{tr} E.$$

Из равенств (40)–(41) получаем, что

$$a(X) = a_0 X^0 = -\rho\eta(X) = -\frac{1}{2n} \operatorname{tr} E\eta(X)$$

для любого векторного поля X на M . Обратное утверждение выполняется очевидным образом. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 13. *Характеристический вектор ξ является торсообразующим тогда и только тогда, когда четвертый структурный тензор E скалярен, пятый F и шестой G структурные тензоры нулевые, причем определяющие элементы ξ однозначно задаются формулами*

$$\rho = \frac{1}{2n} \operatorname{tr} E, \quad a = -\frac{1}{2n} \operatorname{tr} E\eta.$$

Так как для многообразия Кенмоцу $E = \operatorname{id}$, получаем хорошо известный результат, что характеристический вектор многообразия Кенмоцу является торсообразующим (причем локально-конциркулярным) с определяющими элементами $\rho = 1$, $a = -\eta$.

Сравнивая эту теорему 13 с теоремой 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 14. *Если характеристический вектор ξ почти контактной метрической структуры является торсообразующим, то эта структура является η -инвариантной.*

Из теоремы 13 также вытекает следующий факт.

Теорема 15. *Если характеристический вектор ξ почти контактного метрического многообразия является спецонциркулярным, то его определяющие элементы нулевые и $\nabla\xi = 0$.*

Сравнивая теорему 13 с теоремой 2, получаем следующую теорему.

Теорема 16. *Если характеристический вектор ξ почти контактной метрической структуры является торсообразующим, то эта структура является Φ -инвариантной тогда и только тогда, когда третий структурный тензор D нулевой.*

Пусть торсообразующий характеристический вектор ξ является киллинговым. Тогда, подставляя (39) и (39) в (34), получаем $\rho = 0$ и $B^a_b = B_b^a = 0$. Следовательно, четвертый структурный тензор нулевой. С учетом теоремы 13 получаем $a = 0$. Обратно, если у почти контактной метрической структуры с торсообразующим ξ четвертый структурный тензор E нулевой, то с учетом равенств

$$B_{ab}^c = \frac{i}{2} \Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}, \quad B_{abc} = -\frac{i}{2} \Phi_{[b,c]}^a;$$

(см. (14)) и $F = 0$, т.е.

$$\Phi_{a,b}^0 = -\Phi_{0,b}^{\hat{a}} = 0, \quad \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0 = -\Phi_{0,\hat{b}}^a = 0,$$

получаем

$$B^{ab} = -\frac{i}{2} \Phi_{b,0}^a, \quad B_{ab} = \frac{i}{2} \Phi_{b,0}^{\hat{a}}.$$

Тогда согласно (13) получаем, что

$$B^{ab} = -B^{ba}, \quad B_{ab} = -B_{ba},$$

т.е. третий структурный тензор D кососимметричен. Тогда по теореме 6 вектор ξ будет киллинговым. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 17. *Если характеристический вектор ξ почти контактной метрической структуры является торсообразующим, то ξ будет киллинговым тогда и только тогда, когда четвертый структурный тензор E нулевой. При этом определяющие элементы ξ будут нулевыми и $\nabla\xi = 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аминова А. В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
2. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: Печатный Дом, 2013.
3. Терпстра М. А. Инвариантность АС-структуры относительно торсообразующего вектора Роба // Изв. Пензенск. гос. пед. ин-та им. В. Г. Белинского. — 2011. — № 26. — С. 248–254.
4. Терпстра М. А. О геометрии характеристического вектора почти контактных метрических структур / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — М.: МПГУ, 2011.

Игнаточкина Лия Анатольевна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: ignlia@gmail.com

Никифорова Анна Валентиновна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: anik7@bk.ru

Терпстра Мария Александровна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: mariya.terpstra@two-eagles.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 36–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-36-49

УДК 515.12

СВОЙСТВО УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ, НЕПРЕРЫВНО СОДЕРЖАЩИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, И ИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2023 г. С. Д. ИЛИАДИС, Ю. В. САДОВНИЧИЙ

Аннотация. В статье рассматриваются (сепарабельные метрические) пространства, непрерывно содержащие топологические группы, и отображения таких пространств. Доказано, что в некоторых классах таких пространств и классах отображений, связанных с насыщенными классами пространств, существуют правильно (и изометрично) универсальные элементы.

Ключевые слова: топологическая группа, сепарабельное метрическое пространство, изометрия, правильное отображение, насыщенный класс пространств, универсальное пространство, универсальное отображение.

UNIVERSALITY PROPERTY FOR SPACES THAT CONTINUOUSLY CONTAIN TOPOLOGICAL GROUPS AND THEIR MAPPINGS

© 2023 S. D. ILIADIS, Yu. V. SADOVNICHII

ABSTRACT. In the paper, (separable metric) spaces continuously containing topological groups and mappings of such spaces are considered. It is proved that in some classes of such spaces and classes of mappings associated with saturated classes of spaces there exist regular (and isometrically) universal elements.

Keywords and phrases: topological group, separable metric space, isometry, regular mapping, saturated class of spaces, universal space, universal mapping.

AMS Subject Classification: 54H11

1. Введение. В этой статье предполагаем все пространства и топологические группы (в частности, элементы классов пространств) T_0 -пространствами веса $\leq \tau$, где τ — произвольный фиксированный бесконечный кардинал (который отождествляется с множеством всех ординалов мощности $< \tau$). Через ω обозначаем первый бесконечный кардинал. Через $\mathcal{F}$ обозначаем множество всех конечных подмножеств кардинала τ . При введении новых обозначений используем символ $\equiv$. Кроме того, предполагаем, что всякий рассматриваемый класс $\mathbb{S}$ пространств обладает тем свойством, что если топологическое или метрическое пространство Q гомеоморфно элементу класса $\mathbb{S}$, то Q также является элементом класса $\mathbb{S}$.

Классический результат Урысона, который гласит, что любое сепарабельное метризуемое пространство вкладывается в гильбертово пространство, т.е. гильбертово пространство топологически универсально для класса всех сепарабельных метризуемых пространств, стимулировало интерес к поиску других классов пространств, в которых имеются топологически универсальные элементы. Было опубликовано множество статей, в которых строились такие классы.

В [1] были поставлены следующие общие задачи (см. раздел 3.3, задачи 7 и 8) для произвольных классов топологических пространств:

Задача 7. Пусть дан класс $\mathcal{P}$ топологических пространств. Указать (если возможно) «стандартные» топологические пространства Y , в которые можно вложить каждое пространство из класса $\mathcal{P}$. Найти наиболее простые среди таких пространств Y .

Разновидностью задачи 7 является следующая задача об универсальном объекте:

Задача 8. Для каких классов $\mathcal{P}$ топологических пространств существует в классе $\mathcal{P}$ пространство X , в которое вкладывается каждое пространство из $\mathcal{P}$?

В книге [15] был предложен метод построения так называемых содержащих пространств для любого класса $\mathcal{P}$ топологических пространств. Эти пространства можно рассматривать как удовлетворительное решение общей задачи 7 статьи [1]. Кроме того, содержащие пространства можно использовать для нахождения классов $\mathcal{P}$, в которых имеются универсальные элементы, что дает удовлетворительное решение общей задачи 8 статьи [1].

На самом деле процитированные выше задачи можно ставить не только для классов топологических пространств, но также и в любой категории, в которой определено понятие вложения одного объекта в другой. Обычно рассматриваются категории топологических пространств, в которых морфизмами являются непрерывные отображения, с теми или иными дополнительными свойствами. В литературе можно найти много статей, посвященных универсальным объектам в таких категориях. Среди других рассматриваемых категорий — категории отображений, групп, решеток и пучков абелевых групп. Метод построения содержащих пространств из книги [15] применялся к этим категориям, например, в статьях [8–12, 14, 16–20].

В этой статье будем рассматривать так называемые насыщенные классы пространств и ω^+ -насыщенные классы пространств (они *насыщены* универсальными элементами), а также изометрические отображения. (Определения этих классов в терминах содержащих пространств можно найти в разделе «Предварительные сведения».) Ниже приведены примеры насыщенных классов:

- (1) класс $\mathcal{S}$ всех пространств (см. [13, предложения 2.9 и 2.10]);
- (2) класс $\mathcal{S}[\mathbf{r}]$ всех регулярных пространств (см. [13, предложение 3.5]);
- (3) класс $\mathcal{S}[\mathbf{cr}]$ всех вполне регулярных пространств (см. [13, следствие 3.8]);
- (4) класс $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq n]$ всех пространств размерности $\mathbf{ind} \leq n \in \omega$ (см. [15, следствие 3.1.6]);
- (5) класс $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq \alpha]$ всех пространств размерности $\mathbf{ind} \leq \alpha \in \omega^+$ (см. [15, следствие 3.1.6]);
- (6) класс $\mathcal{S}[\mathbf{cd}]$ всех счетномерных пространств (см. [15, предложение 4.4.4]);
- (7) класс $\mathcal{S}[\mathbf{scd}]$ всех сильно счетномерных пространств (см. [15, предложение 4.4.4]);
- (8) класс $\mathcal{S}[\mathbf{lfd}]$ всех локально конечномерных пространств (см. [15, предложение 4.4.4]);
- (9) пересечение любых классов среди вышеперечисленных (см. [13, предложение 3.3]).

Во всех перечисленных случаях под *размерностью* подразумевается малая (трансфинитная) индуктивная размерность. Классы 1–9 являются также ω^+ -насыщенными. Однако, вообще говоря, насыщенный класс не обязан быть ω^+ -насыщенным, и наоборот. Таким образом, результаты настоящей статьи остаются верными, если в их формулировках заменить насыщенные или ω^+ -насыщенные классы пространств любыми классами из перечисленных выше классов 1–9. Этим путем для разных классов пространств получаются разные независимые друг от друга результаты, но схемы доказательств у них общие.

Отметим, что для $\tau = \omega$ существование топологически универсальных пространств в классах метризуемых элементов классов $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq n]$, $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq \alpha]$, $\mathcal{S}[\mathbf{cd}]$, $\mathcal{S}[\mathbf{scd}]$, $\mathcal{S}[\mathbf{lfd}]$ были построены в статьях [3, 23, 23–25, 27, 29].

В книге [15] для $\tau = \omega$ были построены изометрично универсальные пространства в классе всех метрических пространств из любого ω^+ -насыщенного класса пространств. В частности, такие элементы были построены в классах всех метрических элементов классов $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq n]$, $\mathcal{S}[\mathbf{ind} \leq \alpha]$, $\mathcal{S}[\mathbf{cd}]$, $\mathcal{S}[\mathbf{scd}]$ и $\mathcal{S}[\mathbf{lfd}]$. Касательно класса $\mathcal{S}$ всех сепарабельных метрических пространств отметим, что построенные изометрично универсальные пространства отличаются от хорошо известного универсального метрического пространства Урысона (см. [26]), а также от пространства

$C[0, 1]$ всех непрерывных функций на единичном отрезке $[0, 1]$ с топологией равномерной сходимости, которое, согласно [6], также универсально для этого класса. В 1986 г. результат Урысона был обобщен (см. [22]) на метрические пространства веса $\leq \tau$, где τ удовлетворяет некоторым специальным условиям.

В этой статье рассматриваем классы (сепарабельных метрических) пространств, непрерывно содержащие топологические группы, и правильные (изометрические) отображения этих пространств. Понятие пространства, непрерывно содержащего все элементы семейства $\mathbb{G}$ топологических групп, было введено в [2] в качестве альтернативы понятию универсального элемента в $\mathbb{G}$. Универсальные элементы в классе всех топологических групп веса $\leq \omega$ были построены в [4, 28] (см. также [5, 7], где универсальные элементы были построены для абелевых топологических групп). Однако проблема существования универсальных элементов в классе всех топологических групп веса $\tau \neq \omega$ (см. [28]) до сих пор не решена. (Другие открытые вопросы, касающиеся существования универсальных элементов в разных классах топологических групп, можно найти в [2, 5].) В [2] было доказано, что существует пространство веса τ , непрерывно содержащее все топологические группы веса $\leq \tau$, а в [21] — что в классе всех пространств веса $\leq \tau$, непрерывно содержащих топологические группы, есть правильно универсальные элементы.

В настоящей статье доказано, что в разных классах (сепарабельных метрических) пространств, непрерывно содержащих топологические группы, имеются правильно (и изометрически) универсальные элементы. Кроме того, универсальные элементы имеются и в разных классах отображений между (сепарабельными метрическими) пространствами, непрерывно содержащими топологические группы.

2. Предварительные сведения. Для произвольного отображения f пространств через Q_d^f обозначаем область определения f , а через Q_r^f — область значений f .

2.1. О пространствах, непрерывно содержащих топологические группы. Напомним определения пространств, непрерывно содержащих топологические группы, а также некоторых связанных с ними понятий. Пусть Q — пространство, $\mathbf{G}$ — семейство топологических групп и $\mathbf{G}^Q$ — индексация семейства $\mathbf{G}$. Предположим, что для каждого $X \in \mathbf{G}^Q$ h_Q^X — такое вложение X в Q , что $\bigcup \{h_Q^X(X) : X \in \mathbf{G}^Q\} = Q$. Будем говорить, что Q — *непрерывно содержащее пространство для $\mathbf{G}^Q$ относительно семейства $h_Q^{\mathbf{G}^Q} \equiv \{h_Q^X : X \in \mathbf{G}^Q\}$ вложений* ($\equiv$ CCTG-пространство для $\mathbf{G}^Q$ относительно $h_Q^{\mathbf{G}^Q}$), если выполнено следующее условие: для любых $x, y \in X \in \mathbf{G}^Q$ и любой окрестности U точки $h_Q^X(xy^{-1})$ в Q существуют окрестности V и W точек $h_Q^X(x)$ и $h_Q^X(y)$ в Q соответственно такие, что для любых $x', y' \in Y \in \mathbf{G}^Q$, удовлетворяющих условиям $h_Q^Y(x') \in V$ и $h_Q^Y(y') \in W$, имеем $h_Q^Y(x'(y')^{-1}) \in U$.

При рассмотрении CCTG-пространства Q всегда предполагаем, что задано фиксированное индексированное семейство топологических групп $\mathbf{G}^Q$ и для каждого $X \in \mathbf{G}^Q$ имеется фиксированное топологическое вложение h_Q^X группы X в Q такое, что Q — непрерывно содержащее пространство для $\mathbf{G}^Q$ относительно семейства $h_Q^{\mathbf{G}^Q} \equiv \{h_Q^X : X \in \mathbf{G}\}$ вложений. Будем исследовать топологические и метрические CCTG-пространства Q . В первом случае Q рассматривается как топологическое пространство, а во втором — как метрическое.

Предположение. Для удобства обозначений всякий раз при рассмотрении CCTG-пространства Q будем отождествлять каждую точку $x \in X \in \mathbf{G}^Q$ с точкой $h_Q^X(x)$ и, тем самым, группу X с подмножеством $h_Q^X(X)$ пространства Q .

Для каждого CCTG-пространства Q определим подмножество A_Q произведения $Q \times Q$, отображение $p_Q: A_Q \rightarrow Q$ и отображение $i_Q: Q \rightarrow Q$ следующим образом: включаем точку $(x, y) \in Q \times Q$ в A_Q , если и только если существует элемент $X \in \mathbf{G}^Q$, для которого $x, y \in X$, и полагаем $p_Q(x, y) = xy$ и $i_Q(x) = x^{-1}$ (произведение и операция перехода к обратному элементу рассматриваются в $X = h_Q^X(X)$). В силу [21, лемма 2.1] отображения p_Q и i_Q определены корректно (т.е. не зависят от топологической группы $X \in \mathbf{G}^Q$, фигурирующей в их определении) и непрерывны.

Примеры ССТG-пространств — любая топологическая группа Q , для которой $\mathbf{G}^Q$ — семейство всех подгрупп Q и $h_Q^{\mathbf{G}^Q}$ состоит из тождественных отображений, произведение любого пространства X и любой топологической группы G , для которого $\mathbf{G}^{X \times G} = \{\{x\} \times G : x \in X\}$ и $h_Q^{\mathbf{G}^Q}$ состоит из тождественных отображений, и любой пучок $\mathcal{A}$ абелевых групп на пространстве X , для которого $\mathbf{G}^{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}_x : x \in X\}$ и $h_Q^{\mathbf{G}^Q}$ состоит из тождественных отображений. Произвольное пространство Q тоже можно рассматривать как ССТG-пространство, считая, что $\mathbf{G}$ состоит только из тривиальной группы e и $\mathbf{G}^Q = \{e_x : x \in X\}$, где $e_x = e$ и $h_Q^{e_x}(e_x) = x$.

Правильные отображения ССТG-пространств. Пусть Q_1 и Q_2 — ССТG-пространства. Непрерывное отображение f пространства Q_1 в Q_2 называется *правильным*, если существует отображение $\varphi_{\mathbf{G}^{Q_2}}^{\mathbf{G}^{Q_1}} : \mathbf{G}^{Q_1} \rightarrow \mathbf{G}^{Q_2}$ такое, что для каждого $X \in \mathbf{G}^{Q_1}$ сужение $f|_X$ отображения f на X является гомоморфизмом X на $\varphi_{\mathbf{G}^{Q_2}}^{\mathbf{G}^{Q_1}}(X)$. (Таким образом, если f — вложение, то $f|_X$ — изоморфизм группы X на $\varphi_{\mathbf{G}^{Q_2}}^{\mathbf{G}^{Q_1}}(X)$.) В случае, когда Q_1 и Q_2 — метрические ССТG-пространства, правильное отображение f называется *правильной изометрией*, если f является изометрией.

Универсальные ССТG-пространства. Пусть $\mathbb{C}$ — класс топологических ССТG-пространств (класс метрических ССТG-пространств). Элемент $T \in \mathbb{C}$ называется *правильно* (соответственно, *правильно и изометрически*) универсальным в $\mathbb{C}$, если для каждого $Q \in \mathbb{C}$ существует правильное (соответственно, правильное и изометрическое) вложение i_T^Q пространства Q в T .

Универсальные отображения ССТG-пространств. Пусть $\mathbb{F}$ — класс правильных (правильных и изометрических) сюръективных отображений топологических (соответственно, метрических) ССТG-пространств, и пусть $F : T_1 \rightarrow T_2$ и $f : Q_1 \rightarrow Q_2$ — два элемента класса $\mathbb{F}$. Предположим, что существуют правильные (соответственно, правильные и изометрические) вложения $i_{T_1}^{Q_1}$ пространства Q_1 в T_1 и $i_{T_2}^{Q_2}$ пространства Q_2 в T_2 такие, что

$$\varphi_{\mathbf{G}^{T_2}}^{\mathbf{G}^{T_1}} \circ \varphi_{\mathbf{G}^{T_1}}^{\mathbf{G}^{Q_1}} = \varphi_{\mathbf{G}^{T_2}}^{\mathbf{G}^{Q_2}} \circ \varphi_{\mathbf{G}^{Q_2}}^{\mathbf{G}^{Q_1}}, \quad F \circ i_{T_1}^{Q_1} = i_{T_2}^{Q_2} \circ f.$$

В этом случае будем говорить, что F *правильно* (соответственно, *правильно и изометрически*) *содержит* f . Если, сверх того, вложения $i_{T_1}^{Q_1}$ и $i_{T_2}^{Q_2}$ сюръективны, то будем говорить, что F и f *правильно* (соответственно, *правильно и изометрически*) *гомеоморфны*. Назовем элемент $F : T_1 \rightarrow T_2$ класса $\mathbb{F}$ *правильно* (соответственно, *правильно и изометрически*) универсальным в $\mathbb{F}$, если F содержит любой элемент класса $\mathbb{F}$.

2.2. О содержащих пространствах. Пусть $\mathbf{S}$ — произвольное семейство топологических пространств веса $\leq \tau$. При построении универсальных пространств методом содержащих пространств используем понятия базы $\mathbf{B}$ семейства $\mathbf{S}$, расширения базы $\mathbf{B}$, допустимого семейства $\mathbf{R}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, финального измельчения допустимого семейства $\mathbf{R}$, допустимого семейства $\mathbf{R}_{\mathbf{B}} \equiv \{\sim_{\mathbf{B}}^s : s \in \mathcal{F}\}$, $\mathbf{B}$ -допустимого семейства отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, содержащего пространства $\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{B}, \mathbf{R})$, стандартной базы $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ открытых подмножеств пространства $\mathbf{T}$ и естественного вложения $i_{\mathbf{T}}^X$ пространства $X \in \mathbf{S}$ в $\mathbf{T}$. Определения всех этих понятий можно найти, например, в разделе «Предварительные сведения» статьи [21]. (Доказательства содержатся в работах, цитированных в списке литературы в [21]; дополнительную информацию можно найти в [15, гл. 1].) В терминах этих понятий насыщенный класс пространств определяется следующим образом.

Класс $\mathbb{S}$ пространств называется *насыщенным*, если у каждого индексированного семейства $\mathbf{S}$ элементов $\mathbb{S}$ имеется база $\mathbf{B}_0$ такая, что для любого расширения $\mathbf{B}$ базы $\mathbf{B}_0$ существует $\mathbf{B}$ -допустимое семейство $\mathbf{R}_0$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ с тем свойством, что для каждого допустимого семейства $\mathbf{R}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, являющегося финальным измельчением семейства $\mathbf{R}_0$, содержащее пространство $\mathbf{T}(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ принадлежит классу $\mathbb{S}$. В этом случае база $\mathbf{B}_0$ называется *инициальной базой для семейства $\mathbf{S}$* (соответствующей классу $\mathbb{S}$), а семейство $\mathbf{R}_0$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ называется *инициальным семейством отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$* (соответствующим базе $\mathbf{B}$ и классу $\mathbb{S}$). Заметим, что расширение инициальной базы само

является инициальной базой, а семейство отношений эквивалентности, являющееся финальным измельчением инициального, само является инициальным семейством отношений эквивалентности.

В настоящей статье рассматриваем ω^+ -допустимые семейства отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ вместо допустимых семейств ($\equiv \omega$ -допустимых). Напомним определение этих семейств (см. [15, гл. 9]): семейство $R \equiv \{\sim^s: s \in \mathcal{F}\}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ называется ω^+ -допустимым, если

- (а) для каждого $s \in \mathcal{F}$ число классов эквивалентности отношения $\sim^s$ меньше ω^+ , т.е. конечно или счетно, и
- (б) для любых $s \subset t \in \mathcal{F}$ выполнены отношения $\sim^t \subset \sim^s$.

Таким образом, единственное отличие между ω^+ -допустимым семейством и допустимым семейством состоит в числе классов эквивалентности для отношений эквивалентности из этих классов: для допустимых семейств число классов эквивалентности конечно.

Заметим, что во всех приведенных выше определениях, в которых фигурируют допустимые семейства (в том числе, в определении насыщенного класса), не используется конечность числа классов эквивалентности для отношений из рассматриваемых допустимых семейств. Это означает, что в этих определениях можно заменить допустимые семейства на ω^+ -допустимые. При этом, если вес всех элементов семейства $\mathbf{S}$ не превосходит бесконечного кардинала τ и R — ω^+ -допустимое семейство, то вес соответствующего содержащего пространства T так же не превосходит τ .

Таким образом, получаем определения новых понятий, соответствующих перечисленным выше «старым» понятиям. Будем называть новые семейства отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, соответствующие допустимым или $\mathbf{B}$ -допустимым семействам, ω^+ -допустимыми или $(\mathbf{B}, \omega^+)$ -допустимыми соответственно, а новые насыщенные классы пространств — ω^+ -насыщенными. Названия других понятий не будем менять, поскольку из контекста всегда будет ясно, какие модификации имеются в виду, «новые» или «старые».

Как уже отмечалось, вообще говоря, из определений не следует, что насыщенный класс пространств является ω^+ -насыщенным и наоборот. Однако можно доказать, что некоторые конкретные насыщенные классы являются ω^+ -насыщенными. Например, если доказательство того, что класс $\mathbb{S}$ является насыщенным, не использует конечность числа классов эквивалентности для отношений из рассматриваемых допустимых семейств, то такой класс является ω^+ -насыщенным. Можно проверить, что ω^+ -насыщены классы пространств $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}(\tau)$, $\mathcal{S}(\text{cr})$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq n]$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq \alpha]$, $\mathcal{S}[\text{cd}]$, $\mathcal{S}[\text{scd}]$, $\mathcal{S}[\text{lfd}]$, а также все попарные пересечения этих классов.

3. Формулировки результатов.

3.1. Теорема. Пусть $\mathbb{S}$ — ω^+ -насыщенный класс пространств веса $\leq \omega$ (т.е. $\tau = \omega$) и $\mathbf{G}$ — семейство топологических групп. Тогда в классе $\mathbb{C}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ всех метрических CCTG-пространств $Q \in \mathbb{S}$, для которых $\mathbf{G}^Q$ — индексация семейства $\mathbf{G}$, существует правильно и изометрически универсальный элемент.

3.1А. Теорема. Пусть $\mathbb{S}$ — ω^+ -насыщенный класс пространств веса $\leq \omega$ (т.е. $\tau = \omega$). Тогда в классе $\mathbb{C}^m(\mathbb{S})$ всех метрических CCTG-пространств $Q \in \mathbb{S}$ существует правильно и изометрически универсальный элемент.

3.2. Теорема. Пусть $\mathbb{S}$ — ω^+ -насыщенный класс пространств (веса $\leq \tau$) и $\mathbf{G}$ — семейство топологических групп. Тогда в классе $\mathbb{C}_{\mathbf{G}}(\mathbb{S})$ всех CCTG-пространств $Q \in \mathbb{S}$, для которых $\mathbf{G}^Q$ является индексацией семейства $\mathbf{G}$, существует правильно универсальный элемент.

3.2А. Теорема. Пусть $\mathbb{S}$ — ω^+ -насыщенный класс пространств (веса $\leq \tau$). Тогда в классе $\mathbb{C}(\mathbb{S})$ всех CCTG-пространств $Q \in \mathbb{S}$ существует правильно универсальный элемент.

3.3. Теорема. Пусть $\mathbb{S}$ — ω^+ -насыщенный класс пространств веса $\leq \omega$ (т.е. $\tau = \omega$) и $\mathbf{G}$ — семейство топологических групп. Тогда в классе $\mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ всех правильных и изометрических сюръективных отображений f , для которых $Q_d^f \in \mathbb{S}$ является метрическим CCTG-пространством

и $\mathbf{G}^{Q_d^f}$ является индексацией семейства $\mathbf{G}$, существует правильно и изометрически универсальный элемент.

3.3А. Теорема. Пусть $\mathbb{S} - \omega^+$ -насыщенный класс пространств веса $\leq \omega$ (т.е. $\tau = \omega$). Тогда в классе $\mathbb{F}^m(\mathbb{S})$ всех правильных и изометрических сюръективных отображений f , для которых $Q_d^f \in \mathbb{S}$ — метрическое CCTG-пространство, существует правильно и изометрически универсальный элемент.

3.4. Теорема. Пусть $\mathbb{S}_d$ и $\mathbb{S}_r$ — два ω^+ -насыщенных класса пространств (веса $\leq \tau$), и пусть $\mathbf{G}_d$ и $\mathbf{G}_r$ — два семейства топологических групп. Тогда в классе $\mathbb{F}_{\mathbf{G}_d, \mathbf{G}_r}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$ всех правильных сюръективных отображений f , чьи область определения Q_d^f и область значений Q_r^f являются CCTG-пространствами, причем $Q_d^f \in \mathbb{S}_d$, $Q_r^f \in \mathbb{S}_r$, $\mathbf{G}^{Q_d^f}$ является индексацией семейства $\mathbf{G}_d$ и $\mathbf{G}^{Q_r^f}$ является индексацией семейства $\mathbf{G}_r$, существует правильно универсальный элемент.

3.4А. Теорема. Пусть $\mathbb{S}_d$ и $\mathbb{S}_r$ — два ω^+ -насыщенных класса пространств (веса $\leq \tau$). Тогда в классе $\mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$ всех правильных сюръективных отображений f , чьи область определения Q_d^f и область значений Q_r^f являются CCTG-пространствами, причем $Q_d^f \in \mathbb{S}_d$ и $Q_r^f \in \mathbb{S}_r$, существует правильно универсальный элемент.

3.5. Следствие. Для $\tau = \omega$ теоремы 3.1, 3.1А, 3.3 и 3.3А остаются верными, если в качестве класса $\mathbb{S}$ взять любой из классов $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq n]$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq \alpha]$, $\mathcal{S}[\text{cd}]$, $\mathcal{S}[\text{scd}]$, $\mathcal{S}[\text{lfd}]$ или пересечение любых двух из этих классов. Для произвольного τ теоремы 3.2, 3.2А, 3.4 и 3.4А остаются верными, если в качестве классов $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$ взять один из классов $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}(r)$, $\mathcal{S}(\text{cr})$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq n]$, $\mathcal{S}[\text{ind} \leq \alpha]$, $\mathcal{S}[\text{cd}]$, $\mathcal{S}[\text{scd}]$, $\mathcal{S}[\text{lfd}]$ или пересечение любых двух из этих классов.

4. Доказательства.

Доказательство теоремы 3.1. Из теоретико-множественных соображений заключаем, что существуют семейство $\mathbf{S}$ элементов класса $\mathbb{C}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ с тем свойством, что для каждого элемента класса $\mathbb{C}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ существует правильный и изометрический гомеоморфизм между этим элементом и элементом семейства $\mathbf{S}$. Следовательно, любое метрическое CCTG-пространство $T \in \mathbb{C}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$, правильно и изометрически содержащее все элементы семейства $\mathbf{S}$, является нужным универсальным элементом семейства $\mathbb{S}$.

Требуемое универсальное пространство T строится как содержащее пространство $T(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ для некоторой индексированной базы $\mathbf{B}$ семейства $\mathbf{S}$ и подходящего $(\mathbf{B}, \omega^+)$ -допустимого семейства $\mathbf{R}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$. В качестве базы $\mathbf{B}$ семейства $\mathbf{S}$ возьмем произвольную инициальную базу семейства $\mathbf{S}$, соответствующую ω^+ -насыщенному классу $\mathbb{S}$:

$$\mathbf{B} \equiv \{\{U_i^Q : i \in \omega\} : Q \in \mathbf{S}\}.$$

(Следовательно, $\{U_i^Q : i \in \omega\}$ — индексированная база открытых подмножеств пространства $Q \in \mathbf{S}$.)

Прежде чем переходить к построению семейства $\mathbf{R}$, напомним два определения (см. [15, раздел 9.1]). Для каждого $Q \in \mathbf{S}$ обозначим через $\{a_i^Q : i \in \omega\}$ произвольное индексированное плотное подмножество пространства Q и положим

$$\mathbf{P} \equiv \{\{a_i^Q : i \in \omega\} : Q \in \mathbf{S}\}.$$

Определение 1. Для любых $Q \in \mathbf{S}$, $n \in \omega$ и $i, j \in n + 2$ элементы $k_0(Q, n, i, j)$, $k_1(Q, n, i, j)$ и $k(Q, n, i)$ множества $\omega \cup \{\infty\}$ определяются следующим образом:

(а) $k_0(Q, n, i, j)$ — элемент k множества ω , однозначно определенный условием

$$\frac{k}{n+2} \leq \rho_Q(a_i^Q, Q \setminus U_j^Q) < \frac{k+1}{n+2}$$

для $U_j^Q \neq Q$; если $U_j^Q = Q$, то $k_0(Q, n, i, j) = \infty$;

(b) $k_1(Q, n, i, j)$ — элемент k множества ω , однозначно определенный условием

$$\frac{k}{n+2} \leq \rho_Q(a_i^Q, a_j^Q) < \frac{k+1}{n+2};$$

(c) $k(Q, n, i)$ — элемент k множества ω , однозначно определенный условием

$$\frac{k}{n+2} \leq \text{Diam}(U_i^Q) < \frac{k+1}{n+2},$$

если $\text{Diam}(U_i^Q) < \infty$; если $\text{Diam}(U_i^Q) = \infty$, то $k(Q, n, i) = \infty$.

Определение 2. Скажем, что ω^+ -допустимое семейство

$$R \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$$

отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ является $(\mathbf{B}, \mathbf{P})$ -допустимым, если для каждого $n \in \omega$ существует неотрицательное целое $m \geq n$, такое, что

(*) $\sim^m \subset \sim_{\mathbf{B}}^n$ и

(**) для любых $\sim^m$ -эквивалентных $Q_1, Q_2 \in \mathbf{S}$ и любых $i, j \in n+2$ выполнены соотношения

$$k_0(Q_1, n, i, j) = k_0(Q_2, n, i, j); \quad k_1(Q_1, n, i, j) = k_1(Q_2, n, i, j); \quad k(Q_1, n, i) = k(Q_2, n, i).$$

Обозначим наименьшее неотрицательное целое m , для которого выполнены эти условия, через $m(n)$. Заметим, что любое ω^+ -допустимое семейство отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, являющееся финальным измельчением $(\mathbf{B}, \mathbf{P})$ -допустимого семейства, само является $(\mathbf{B}, \mathbf{P})$ -допустимым.

Назовем семейство отношений эквивалентности

$$R \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$$

$(\mathbf{B}, \omega^+)$ -допустимым, если оно является инициальным семейством отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, соответствующим базе $\mathbf{B}$ и классу $\mathcal{S}$, и удовлетворяет следующим условиям:

(A) для каждого $s \in \mathcal{F}$ и любых $\sim^s$ -эквивалентных элементов Q_0 и Q_1 семейства $\mathbf{S}$ и того факта, что

$$(U_{i_1}^{Q_0} \times U_{i_2}^{Q_0}) \cap A_{Q_0} \subset (p_{Q_0})^{-1}(U_{i_0}^{Q_0})$$

для некоторых $i_0, i_1, i_2 \in s$, вытекает, что

$$(U_{i_1}^{Q_1} \times U_{i_2}^{Q_1}) \cap A_{Q_1} \subset (p_{Q_1})^{-1}(U_{i_0}^{Q_1});$$

(B) для каждого $s \in \mathcal{F}$ и любых $\sim^s$ -эквивалентных элементов Q_0 и Q_1 семейства $\mathbf{S}$ из того факта, что

$$U_{i_1}^{Q_0} \subset i_{Q_0}^{-1}(U_{i_0}^{Q_0})$$

для некоторых $i_0, i_1 \in s$, вытекает, что

$$U_{i_1}^{Q_1} \subset i_{Q_1}^{-1}(U_{i_0}^{Q_1});$$

(C) семейство R $(\mathbf{B}, \mathbf{P})$ -допустимо.

Лемма 1. Существует ω^+ -допустимое семейство $R \equiv \{\sim^s : s \in \omega\}$, удовлетворяющее условиям (A)–(C).

Доказательство. Сперва зафиксируем $s \in \mathcal{F}$ и $i_0, i_1, i_2 \in s$ и определим отношение эквивалентности $\sim (A, s, i_1, i_2, i_3)$ на $\mathbf{S}$ следующим образом: элементы $Q_0, Q_1 \in \mathbf{S} \sim (A, s, i_1, i_2, i_3)$ -эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнено условие (A). Затем положим

$$\sim_A^s = \bigcap \{ \sim (A, s, i_1, i_2, i_3) : (i_1, i_2, i_3) \in s^3 \}, \quad R_A = \{ \sim_A^s : s \in \mathcal{F} \}.$$

Очевидно, число классов эквивалентности для отношения $\sim (A, s, i_1, i_2, i_3)$ равно одному или двум, так что число классов эквивалентности для отношения $\sim_A^s$ конечно. Кроме того, если $s \subset t \in \mathcal{F}$, то $\sim_A^t \subset \sim_A^s$. Значит, семейство R_A отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ допустимо.

Аналогичным образом зафиксируем отношения эквивалентности $\sim (B, s, i_1, i_2)$ и $\sim_B^s$, где $i_1, i_2 \in s \in \mathcal{F}$, и положим

$$R_B = \{ \sim_B^s : s \in \mathcal{F} \}.$$

Как и выше, R_B является допустимым семейством отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$.

Затем зафиксируем $n \in \omega \subset \mathcal{F}$ и $i, j \in n + 2$ и определим отношение эквивалентности $\sim (a, n, i, j)$ (а также отношения $\sim (b, n, i, j)$ и $\sim (c, n, i)$) на $\mathbf{S}$ следующим образом: элементы $Q_0, Q_1 \in \mathbf{S} \sim (a, n, i, j)$ -эквивалентны (соответственно, $\sim (b, n, i, j)$ -эквивалентны, $\sim (c, n, i)$ -эквивалентны), если и только если выполнено условие (а) (соответственно, условие (b), условие (с)) в определении 1. Положим

$$\begin{aligned}\sim_a^n &= \bigcap \{ \sim (a, n, i, j) : (i, j) \in n^2 \}, \\ \sim_b^n &= \bigcap \{ \sim (b, n, i, j) : (i, j) \in n^2 \} \\ \sim_c^n &= \bigcap \{ \sim (c, i) : i \in n \}.\end{aligned}$$

Ясно, что число классов эквивалентности для каждого из отношений $\sim (a, n, i, j)$, $\sim (b, n, i, j)$ и $\sim (c, n, i)$ и, следовательно, отношений $\sim_a^n$, $\sim_b^n$ и $\sim_c^n$, конечно или счетно.

Теперь зафиксируем произвольный элемент s семейства $\mathcal{F}$ и число $n = \max\{k \in \omega : k \in s\}$. Положим $\sim_a^s = \sim_a^n$, $\sim_b^s = \sim_b^n$ и $\sim_c^s = \sim_c^n$. Легко видеть, что если $s \subset t \in \mathcal{F}$, то $\sim_a^t \subset \sim_a^s$, $\sim_b^t \subset \sim_b^s$ и $\sim_c^t \subset \sim_c^s$. Следовательно, семейства

$$R_a \equiv \{ \sim_a^s : s \in \mathcal{F} \}, \quad R_b \equiv \{ \sim_b^s : s \in \mathcal{F} \}, \quad R_c \equiv \{ \sim_c^s : s \in \mathcal{F} \}$$

отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ ω^+ -допустимы. Положим

$$R_C = \{ \sim_a^s \cap \sim_b^s \cap \sim_c^s : s \in \mathcal{F} \} \equiv \{ \sim_C^s : s \in \mathcal{F} \}.$$

Наконец, пусть

$$R_{in} \equiv \{ \sim_{in}^s : s \in \mathcal{F} \}$$

— инициальное семейство отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$, соответствующее базе $\mathbf{B}$ и ω^+ -насыщенному классу $\mathbb{S}$; тогда R_{in} ($\mathbf{B}, \omega^+$)-допустимо. Семейство

$$R \equiv \{ \sim_{in}^s \cap \sim_A^s \cap \sim_B^s \cap \sim_C^s : s \in \mathcal{F} \}$$

является требуемым ω^+ -допустимым семейством отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$. $\square$

Теперь рассмотрим случай (1) теоремы из [21] для $\tau = \omega$. В этом случае класс $\mathbb{S}$, фигурирующий в теореме, совпадает с классом $\mathbf{S}$, фигурирующим в теореме 3.1 настоящей статьи. Заметим, что в доказательстве теоремы из [21] не используется конечность числа классов эквивалентности для рассматриваемых отношений эквивалентности; оно остается верным и в случае счетных классов. С другой стороны, определенные выше семейство $\mathbf{S}$, база $\mathbf{B}$ и семейство R отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ удовлетворяют всем условиям случая (1) теоремы из [21]. Это означает, что $T \equiv T(\mathbf{B}, R)$ является топологическим CCTG-пространством, принадлежащим классу $\mathbb{S}$, и что для каждого $Q \in \mathbf{S}$ вложение i_T^Q пространства Q в T правильно.

Остается доказать, что пространство $T(\mathbf{B}, R)$ метрическое и для каждого $Q \in \mathbf{S}$ вложение i_T^Q изометрично. Для этого заметим, что семейство $\mathbf{S}$, база $\mathbf{B}$ и семейство R отношений эквивалентности на $\mathbf{S}$ удовлетворяют всем условиям из [15, раздел 9.1], которые требуются для определения метрики ρ_T на множестве $T(\mathbf{B}, R)$ (см. [15, предложение 9.1.7]). Значит, согласно [15, предложение 9.1.8], топология, порожденная этой метрикой совпадает с топологией пространства $T(\mathbf{B}, R)$, и, согласно [15, предложение 9.1.9], для каждого $Q \in \mathbf{S}$ естественное вложение пространства Q в $T(\mathbf{B}, R)$ является изометрией, так что T — требуемое правильно и изометрически универсальное пространство в классе $\mathbb{S}$. $\square$

Доказательство теоремы 3.1А аналогично доказательству теоремы 3.1.

Доказательство теоремы 3.2. Единственное отличие формулировки теоремы 3.2 от формулировки теоремы в статье [21] (случай (1)) состоит в том, что в теореме из [21] класс $\mathbb{S}$ предполагается насыщенным, тогда как в теореме 3.2 он ω^+ -насыщен. Однако, как уже было отмечено выше, в доказательстве теоремы из [21] не используется конечность числа классов эквивалентности для рассматриваемых отношений эквивалентности: в случае, когда это число счетно, доказательство не меняется. Таким образом, доказательство теоремы 3.2 повторяет доказательство теоремы из [21]. $\square$

По тем же причинам, что и выше, доказательство теоремы 3.2А совпадает с доказательством случая (2) в теореме из статьи [21].

Доказательство теоремы 3.3А. По теоретико-множественным причинам существует семейство $\mathbf{F}$ элементов класса $\mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ такое, что каждый элемент $g \in \mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$ правильно и изометрически гомотоморфен элементу семейства $\mathbf{F}$. Следовательно, элемент $F \in \mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$, который правильно и изометрически содержит все элементы семейства $\mathbf{F}$, является требуемым универсальным элементом семейства $\mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$.

Рассмотрим индексированные семейства пространств

$$\mathbf{S}_d \equiv \{Q_d^f : f \in \mathbf{F}\}, \quad \mathbf{S}_r \equiv \{Q_r^f : f \in \mathbf{F}\}.$$

Пусть

$$\mathbf{B}_d^0 \equiv \{\{U_{d,n}^{f,0} : n \in \omega\} : f \in \mathbf{F}\}$$

— база для $\mathbf{S}_d$. Тогда

$$\mathbf{B}_r^0 \equiv \{\{U_{r,n}^{f,0} = f(U_{d,n}^{f,0}) : n \in \omega\} : f \in \mathbf{F}\}$$

является базой для $\mathbf{S}_r$. Пусть

$$\mathbf{B}_d \equiv \{\{U_{d,n}^f : n \in \omega\} : f \in \mathbf{S}_d\}, \quad \mathbf{B}_r \equiv \{\{U_{r,n}^f : n \in \omega\} : f \in \mathbf{S}_r\}$$

— инициальные базы для $\mathbf{S}_d$ и $\mathbf{S}_r$, являющиеся расширениями баз $\mathbf{B}_d^0$ и $\mathbf{B}_r^0$ соответственно. Без потери общности можно считать, что для любых $n \in \omega$ и $f \in \mathbf{F}$

$$U_{d,2n+1}^f = U_{d,n}^{f,0}, \quad U_{r,2n+1}^f = U_{r,n}^{f,0} = f(U_{d,n}^{f,0}).$$

Следовательно,

$$\mathbf{B}_{d,\text{odd}} \equiv \{\{U_{d,2n+1}^f : n \in \omega\} : f \in \mathbf{F}\}, \quad \mathbf{B}_{r,\text{odd}} \equiv \{\{U_{r,2n+1}^f : n \in \omega\} : f \in \mathbf{F}\}$$

являются базами для $\mathbf{S}_d$ и $\mathbf{S}_r$ соответственно.

Для каждого $f \in \mathbf{F}$ возьмем произвольное счетное индексированное плотное подмножество пространства Q_d^f :

$$\{a_{d,n}^f \in Q_d^f : n \in \omega\}.$$

Тогда индексированное множество

$$\{a_{r,n}^f \equiv f(a_{d,n}^f) \in Q_r^f : n \in \omega\}$$

является индексированным плотным подмножеством пространства Q_r^f . Положим

$$\mathbf{P}_d = \{a_{d,n}^f : f \in \mathbf{F}\}, \quad \mathbf{P}_r = \{a_{r,n}^f : f \in \mathbf{F}\}.$$

В теореме 3.1 заменим базу $\mathbf{B}$ семейства $\mathbf{S} \subset \mathbb{S}$ базой $\mathbf{B}_d$ семейства $\mathbf{S}_d \subset \mathbb{S}$, а множество $\mathbf{P}$ — множеством $\mathbf{P}_d$. Согласно этой теореме существует семейство $\mathbf{R}_d^0 \equiv \{\sim_{0,d}^s : s \in \mathcal{F}\}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}_d$ (соответствующее семейству $\mathbf{R}$ из теоремы 3.1), удовлетворяющее условиям (А)–С (в применении к базам $\{U_{d,n}^f : n \in \omega\}$, $f \in \mathbf{F}$). Заменяя в теореме 3.1 базу $\mathbf{B}$ для $\mathbf{S} \subset \mathbb{S}$ на базу $\mathbf{B}_r$ для $\mathbf{S}_r \subset \mathbb{S}_r$ и множество $\mathbf{P}$ на множество $\mathbf{P}_r$, получаем семейство $\mathbf{R}_r^0 \equiv \{\sim_{0,r}^s : s \in \mathcal{F}\}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}_r$ (соответствующее семейству $\mathbf{R}$ в теореме 3.1), удовлетворяющее условиям (А)–С (в применении к базам $\{U_{r,n}^f : n \in \omega\}$, $f \in \mathbf{F}$).

Пусть $\mathbf{R}_d \equiv \{\sim_d^s : s \in \mathcal{F}\}$ — семейство отношений эквивалентности на $\mathbf{S}_d$, определенное следующим образом: элементы Q_d^f и Q_d^g семейства $\mathbf{S}_d \sim_d^s$ -эквивалентны для $s \in \mathcal{F}$, если и только если они $\sim_{0,d}^s$ -эквивалентны и элементы Q_r^f и Q_r^g семейства $\mathbf{S}_r \sim_{0,r}^s$ -эквивалентны. Аналогичным образом определим семейство $\mathbf{R}_r \equiv \{\sim_r^s : s \in \mathcal{F}\}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{S}_r$: элементы Q_r^f и Q_r^g семейства $\mathbf{S}_r \sim_r^s$ -эквивалентны для $s \in \mathcal{F}$, если и только если они $\sim_{0,r}^s$ -эквивалентны и элементы Q_d^f и Q_d^g семейства $\mathbf{S}_d \sim_{0,d}^s$ -эквивалентны. Очевидно, семейство $\mathbf{R}_d$ является финальным измельчением семейства $\mathbf{R}_d^0$, а семейство $\mathbf{R}_r$ является финальным измельчением семейства $\mathbf{R}_r^0$; следовательно, семейства $\mathbf{R}_d$ и $\mathbf{R}_r$ также удовлетворяют соответствующим условиям (А)–(С). Заметим, что в силу определений семейств $\mathbf{R}_d$ и $\mathbf{R}_r$ два элемента Q_d^f и Q_d^g семейства $\mathbf{S}_d \sim_d^s$ -

эквивалентны для некоторого $s \in \mathcal{F}$, если и только если элементы Q_r^f и Q_r^g семейства $\mathbf{S}_r \sim_r^s$ -эквивалентны. Значит, между множеством $C(\sim_d^s)$ классов $\sim_d^s$ -эквивалентности и множеством $C(\sim_r^s)$ классов $\sim_r^s$ -эквивалентности имеется *естественное взаимно однозначное соответствие*, так что между множеством $C(R_d)$ всех классов эквивалентности для всех отношений эквивалентности из R_d и соответствующим множеством $C(R_r)$ тоже возникает *естественное взаимно однозначное соответствие*.

Таким образом, пространство $T_d \equiv T(\mathbf{B}_d, R_d)$ с метрикой ρ_{T_d} (соответствующей метрике ρ_T из теоремы 3.1) принадлежит классу $\mathbb{C}^m(\mathbb{S})$, и для каждого $f \in \mathbf{F}$ естественное вложение $i_{T_d}^{Q_d^f}$ является изометрическим и правильным; точно так же пространство $T_r \equiv T(\mathbf{B}_r, R_r)$ с метрикой ρ_{T_r} принадлежит классу $\mathbb{C}^m(\mathbb{S})$, и для каждого $f \in \mathbf{F}$ естественное вложение $i_{T_r}^{Q_r^f}$ является изометрическим и правильным.

Определим отображение $F_d: T_d \rightarrow T_r$ следующим образом. Пусть $\mathbf{a}_d$ — точка из T_d , $(a_d, Q_d^f) \in \mathbf{a}_d$. Определим $F(\mathbf{a}_d)$ как точку $\mathbf{a}_r$ из T_r , содержащую пару $(f(a_d), f(Q_d^f) = Q_r^f)$. Сперва проверим, что это определение корректно, т.е. точка $\mathbf{a}_r$ не зависит от выбора элемента (a_d, Q_d^f) множества $\mathbf{a}_d$. Пусть (b_d, Q_d^g) — другой элемент множества $\mathbf{a}_d$. Тогда $Q_d^f \sim_d^s Q_d^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$ и, следовательно, $Q_r^f \sim_r^s Q_r^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$. Предположим, что $(g(b_d), Q_r^g) \in \mathbf{b}_r \in T_r$ и $\mathbf{b}_r \neq \mathbf{a}_r$. Поскольку $\mathbf{B}_{d,\text{odd}}$ и $\mathbf{B}_{r,\text{odd}}$ — базы для $\mathbf{S}_d$ и $\mathbf{S}_r$ соответственно, множества

$$B_{\text{odd}}^{T_d} \equiv \{U_{2n+1}^{T_d}(\mathbf{H}) : n \in \omega, \mathbf{H} \in C(R_d)\} \subset B^{T_d}, \quad B_{\text{odd}}^{T_r} \equiv \{U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L}) : n \in \omega, \mathbf{L} \in C(R_r)\} \subset B^{T_r}$$

являются базами открытых подмножеств пространств T_d и T_r соответственно (см. [15, лемма 1.2.6]). Следовательно, существует $U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L}) \in B_{\text{odd}}^{T_r}$ такое, что $\mathbf{a}_r \in U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L})$ и $\mathbf{b}_r \notin U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L})$. По определению элементов стандартной базы B^{T_r} открытых подмножеств T_r и в силу того, что $Q_r^f \sim_r^s Q_r^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$, имеем $f(a_d) \in U_{r,2n+1}^f$ и $g(b_d) \notin U_{r,2n+1}^g$; следовательно, $a_d \in U_{d,2n+1}^f$ и $b_d \notin U_{d,2n+1}^g$ в противоречие с тем фактом, что $(a_d, Q_d^f), (b_d, Q_d^g) \in \mathbf{a}_d$. Таким образом, пары $(f(a_d), f(Q_d^f))$ и $(g(b_r), g(Q_d^f))$ принадлежат одному и тому же элементу T_r , так что отображение F_d определено корректно.

Из изложенных выше соображений вытекает также, что для любых $n \in \omega$ и $\mathbf{H} \in C(R_d)$ имеем

$$F_d(U_{2n+1}^{T_d}(\mathbf{H})) \subset U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L}), \quad (1)$$

где $\mathbf{L}$ — элемент множества $C(R_r)$, соответствующий элементу $\mathbf{H}$.

Аналогичным образом определим отображение $F_r: T_r \rightarrow T_d$: для $\mathbf{a}_r \in T_r$ и $(a_r, Q_r^f) \in \mathbf{a}_r$ значение $F_r(\mathbf{a}_r)$ определяется как элемент множества T_d , содержащий пару $(f^{-1}(a_r), f^{-1}(Q_r^f))$. Те же рассуждения, что и выше, доказывают, что отображение F_r определено корректно и для любых $n \in \omega$ и $\mathbf{L} \in C(R_r)$ выполнено соотношение

$$F_r(U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L})) \subset U_{2n+1}^{T_d}(\mathbf{H}), \quad (2)$$

где $\mathbf{H}$ — элемент множества $C(R_d)$, соответствующий элементу $\mathbf{L}$. Очевидно, $F_r^{-1} = F_d$. Значит, отображения F_d и F_r взаимно однозначны и сюръективны. Из соотношений (1) и (2) вытекает, что

$$F_d(U_{2n+1}^{T_d}(\mathbf{H})) = U_{2n+1}^{T_r}(\mathbf{L}),$$

а это означает, что F_d и F_r непрерывны и, следовательно, являются гомеоморфизмами.

Покажем, что F_d — правильное отображение. Пространства Q_d^f и Q_r^f являются ССТГ-пространствами относительно некоторых индексированных семейств

$$\mathbf{G}_d^f \equiv \mathbf{G}^{Q_d^f} \equiv \{X_{d,\lambda}^f : \lambda \in \Lambda_d^f\}, \quad \mathbf{G}_r^f \equiv \mathbf{G}^{Q_r^f} \equiv \{X_{r,\lambda}^f : \lambda \in \Lambda_r^f\}$$

топологических групп соответственно. Без потери общности будем считать, что $\Lambda_d^f \cap \Lambda_d^g = \emptyset$ и $\Lambda_r^f \cap \Lambda_r^g = \emptyset$, если f и g — различные элементы семейства $\mathbf{F}$. Кроме того, существует отображение

$\varphi_{\mathbf{G}_r^f}^{\mathbf{G}_d^f}$ из $\mathbf{G}_d^f$ в $\mathbf{G}_r^f$ такое, что сужение отображения f на элемент $X \in \mathbf{G}_d^f$ является гомоморфизмом группы X на $\varphi_{\mathbf{G}_r^f}^{\mathbf{G}_d^f}(X)$.

Из доказательства теоремы [21] следует, что пространства $\mathbf{T}_d$ и $\mathbf{T}_r$ являются ССТГ-пространствами относительно индексированных семейств

$$\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d} \equiv \bigcup \{ \{X_{d,\lambda}^f : \lambda \in \Lambda_d^f\} : f \in \mathbf{F} \}, \quad \mathbf{G}^{\mathbf{T}_r} \equiv \bigcup \{ \{X_{r,\lambda}^f : \lambda \in \Lambda_r^f\} : f \in \Lambda_r^f \}$$

топологических групп соответственно. Определим отображение $\varphi_{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_r}}^{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}}$ из $\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}$ в $\mathbf{G}^{\mathbf{T}_r}$, полагая $\varphi_{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_r}}^{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}}(X_{d,\lambda}^f) = \varphi_{\mathbf{G}_r^f}^{\mathbf{G}_d^f}(X_{d,\lambda}^f)$. Очевидно, отображение $\varphi_{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_r}}^{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}}$ сюръективно. Ясно также, что сужение отображения F_d на $X_{d,\lambda}^f \in \mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}$ является гомоморфизмом группы $X_{d,\lambda}^f$ на $\varphi_{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_r}}^{\mathbf{G}^{\mathbf{T}_d}}(X_{d,\lambda}^f)$ и совпадает с отображением f . Таким образом, F_d — правильная сюръекция.

Покажем, что F_d — изометрия. Пусть $\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d$ — два элемента множества $\mathbf{T}_d$, $(x_d^f, Q_d^f) \in \mathbf{a}_d$, $(y_d^g, Q_d^g) \in \mathbf{b}_d$. Обозначим через $\mathbf{a}_r$ элемент множества $\mathbf{T}_r$, содержащий пару $(f(x_d^f) \equiv x_r^f, Q_r^f)$, а через $\mathbf{b}_r$ — элемент множества $\mathbf{T}_r$, содержащий пару $(g(y_d^g) \equiv y_r^g, Q_r^g)$. Пусть $\{a_{d,i_n}^f : n \in \omega\}$ — последовательность точек Q_d^f , сходящаяся к точке x_d^f , $\{a_{d,j_n}^g : n \in \omega\}$ — последовательность точек Q_d^g , сходящаяся к y_d^g . Поскольку f и g непрерывны, последовательность $\{f(a_{d,i_n}^f) \equiv a_{r,i_n}^f : n \in \omega\}$ сходится к $f(x_d^f)$, а последовательность $\{g(a_{d,j_n}^g) \equiv a_{r,j_n}^g : n \in \omega\}$ сходится к $g(y_d^g)$. Рассмотрим два случая:

- (а) Q_d^f и $Q_d^g \sim_d^s$ -эквивалентны для любого $s \in \mathcal{F}$;
- (б) существует элемент $s \in \mathcal{F}$, для которого Q_d^f и Q_d^g не $\sim_d^s$ -эквивалентны.

В случае (а) имеем

$$\rho_{\mathbf{T}_d}(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_{Q_d^f}(a_{d,i_n}^f, a_{d,j_n}^f))$$

(см. определение метрики $\rho_{\mathbf{T}(\mathbf{E})}$ в [21, гл. 9]). Аналогично,

$$\rho_{\mathbf{T}_r}(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_{Q_r^f}(a_{r,i_n}^f, a_{r,j_n}^f)).$$

Поскольку f — изометрия, имеем

$$\rho_{Q_d^f}(a_{d,i_n}^f, a_{d,j_n}^f) = \rho_{Q_r^f}(a_{r,i_n}^f, a_{r,j_n}^f);$$

значит, $\rho_{\mathbf{T}_d}(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) = \rho_{\mathbf{T}_r}(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r)$.

Рассмотрим случай (б). В этом случае по определению метрики $\rho_{\mathbf{T}_d}$ (см. определение метрики $\rho_{\mathbf{T}}$ в [21, гл. 9]) имеем

$$\rho_{\mathbf{T}_d}(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) = \min \{ \rho_{Q_d^f}(x_d^f, a_{d,n}^f) + \rho_{Q_d^g}(a_{d,n}^g, y_d^g) : n \in n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) + 2 \} + 1/(n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) + 2).$$

Подобным образом доказывается, что

$$\rho_{\mathbf{T}_r}(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) = \min \{ \rho_{Q_r^f}(x_r^f, a_{r,n}^f) + \rho_{Q_r^g}(a_{r,n}^g, y_r^g) : n \in n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) + 2 \} + 1/(n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) + 2).$$

Поскольку f и g — изометрии, имеем также

$$\rho_{Q_d^f}(x_d^f, a_{d,n}^f) = \rho_{Q_r^f}(x_r^f, a_{r,n}^f), \quad \rho_{Q_d^g}(a_{d,n}^g, y_d^g) = \rho_{Q_r^g}(a_{r,n}^g, y_r^g),$$

а значит,

$$\begin{aligned} \min \{ \rho_{Q_d^f}(x_d^f, a_{d,n}^f) + \rho_{Q_d^g}(a_{d,n}^g, y_d^g) : n \in n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) + 2 \} &\leq \\ &\leq \min \{ \rho_{Q_r^f}(x_r^f, a_{r,n}^f) + \rho_{Q_r^g}(a_{r,n}^g, y_r^g) : n \in n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) + 2 \}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \min \{ \rho_{Q_r^f}(x_r^f, a_{r,n}^f) + \rho_{Q_r^g}(a_{r,n}^g, y_r^g) : n \in n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) + 2 \} &\leq \\ &\leq \min \{ \rho_{Q_d^f}(x_d^f, a_{d,n}^f) + \rho_{Q_d^g}(a_{d,n}^g, y_d^g) : n \in n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) + 2 \}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \min\{\rho_{Q_d^f}(x_d^f, a_{d,n}^f) + \rho_{Q_d^g}(a_{d,n}^g, y_d^g) : n \in n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) + 2\} = \\ = \min\{\rho_{Q_r^f}(x_r^f, a_{r,n}^f) + \rho_{Q_r^g}(a_{r,n}^g, y_r^g) : n \in n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r) + 2\}. \end{aligned}$$

Из определения семейств R_d и R_r вытекает, что $n(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) = n(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r)$, а это, согласно проведенным выше рассуждениям, означает, что $\rho_{T_d}(\mathbf{a}_d, \mathbf{b}_d) = \rho_{T_r}(\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r)$, а значит, отображение F_d — изометрия. В силу выбора семейства $\mathbf{F}$ отображение $F \equiv F_d$ является требуемым универсальным элементом в классе $\mathbb{F}_{\mathbf{G}}^m(\mathbb{S})$. $\square$

Доказательство теоремы 3.3 аналогично доказательству теоремы 3.3А.

Доказательство теоремы 3.4А. Теорему 3.4А можно частично вывести из доказательства теоремы 3.3А. По теоретико-множественным соображениям существует семейство $\mathbf{F}$ элементов класса $\mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$ такое, что каждый элемент $g \in \mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$ правильно гомеоморфен элементу семейства $\mathbf{F}$. Следовательно, элемент $F \in \mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$, который правильно содержит все элементы семейства $\mathbf{F}$, является требуемым универсальным элементом класса $\mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$.

Как и в теореме 3.3, рассмотрим индексированные семейства пространств

$$\mathbf{S}_d \equiv \{Q_d^f : f \in \mathbf{F}\}, \quad \mathbf{S}_r \equiv \{Q_r^f : f \in \mathbf{F}\}$$

и инициальные базы

$$\mathbf{B}_d^0 \equiv \{\{U_{d,\delta}^{f,0} : \delta \in \tau\} : f \in \mathbf{F}\}, \quad \mathbf{B}_r \equiv \mathbf{B}_r^0 \equiv \{\{U_{r,\delta}^f : \delta \in \tau\} : f \in \mathbf{F}\}$$

для $\mathbf{S}_d$ и $\mathbf{S}_r$ соответственно. Для каждого $f \in \mathbf{F}$ рассмотрим индексированное множество

$$B_d^{f,1} = \{f^{-1}(U_{r,\delta}^f) : \delta \in \tau\}$$

и положим

$$B_d^f \equiv \{U_{d,\delta}^f : \delta \in \tau\},$$

где для каждого предельного ординала $\alpha \in \tau_{\text{lim}}$ и каждого $n \in \omega$

$$U_{d,\alpha+2n}^f = U_{d,\alpha+n}^{f,0}, \quad U_{d,\alpha+2n+1}^f = f^{-1}(U_{r,\alpha+n}^f).$$

Очевидно, B_d^f — база открытых подмножеств пространства Q_d^f . Положим

$$\mathbf{B}_d = \{\{U_{d,\delta}^f : \delta \in \tau\} : f \in \mathbf{F}\}.$$

Тогда $\mathbf{B}_d$ — расширение базы $\mathbf{B}_d^0$ и, следовательно, $\mathbf{B}_d$ является также инициальной базой семейства $\mathbf{S}_d$.

Определим семейства R_d и R_r отношений эквивалентности на $\mathbf{S}_d$ и $\mathbf{S}_r$ соответственно точно так же, как в теореме 3.3. Пространство $T_d \equiv T(\mathbf{B}_d, R_d)$ принадлежит классу $\mathbb{C}(\mathbf{S}_d)$, и для каждого $f \in \mathbf{F}$ естественное вложение $i_{T_d}^{Q_d^f}$ является правильным гомеоморфизмом; точно так же, пространство $T_r \equiv T(\mathbf{B}_r, R_r)$ принадлежит классу $\mathbb{C}(\mathbf{S}_r)$, и для каждого $f \in \mathbf{F}$ естественное вложение $i_{T_r}^{Q_r^f}$ является правильным гомеоморфизмом.

Определим отображение $F_d : T_d \rightarrow T_r$ так же, как в теореме 3.3. Докажем, что F_d определено корректно. Пусть (a_d, Q_d^f) и (b_d, Q_d^g) — два элемента множества $\mathbf{a}_d$. Тогда $Q_d^f \sim_d^s Q_d^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$ и, следовательно, $Q_r^f \sim_r^s Q_r^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$. Предположим, что $(f(a_d), Q_r^f) \in \mathbf{a}_r$, $(g(b_d), Q_r^g) \in \mathbf{b}_r \in T_r$ и $\mathbf{b}_r \neq \mathbf{a}_r$. Существует элемент $U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L})$ стандартной базы B^{T_r} пространства T_r , где $\alpha \in \tau_{\text{lim}}$, $n \in \omega$ и $\mathbf{L} \in C(R)$, для которого $\mathbf{a}_r \in U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L})$ и $\mathbf{b}_r \notin U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L})$. По определению элементов стандартной базы пространства T_r и в силу того, что $Q_r^f \sim_r^s Q_r^g$ для каждого $s \in \mathcal{F}$, имеем $f(a_d) \in U_{r,\alpha+n}^f$ и $g(b_d) \notin U_{r,\alpha+n}^g$; следовательно, $a_d \in U_{d,\alpha+2n+1}^f$ и $b_d \notin U_{d,\alpha+2n+1}^g$ в противоречие с тем, что $(a_d, Q_d^f), (b_d, Q_d^g) \in \mathbf{a}_d$. Таким образом, пары $(f(a_d), f(Q_d^f))$ и $(g(b_r), g(Q_d^f))$ принадлежат одному и тому же элементу множества T_r , т.е. F_d определено корректно.

Для любых $\alpha \in \tau_{\text{lim}}$, $n \in \omega$ и $\mathbf{L} \in C(R_r)$ выполняется равенство

$$F_d^{-1}(U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L})) = U_{\alpha+2n+1}^{T_d}(\mathbf{H}), \quad (3)$$

где $\mathbf{H}$ — элемент множества $C(R_d)$, соответствующий элементу $\mathbf{L}$. В самом деле, пусть $\mathbf{a}_d$ — элемент прообраза $F_d^{-1}(U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L}))$, т.е. $\mathbf{a}_r \equiv F_d(\mathbf{a}_d) \in U_{\alpha+n}^{T_r}(\mathbf{L})$, и пусть $(a_d, Q_d^f) \in \mathbf{a}_d$. Тогда по определению отображения F_d имеем $(f(a_d), Q_r^f) \in \mathbf{a}_r$, откуда $f(a_d) \in U_{r,\alpha+n}^f$, а это означает, что $a_d \in U_{d,\alpha+2n+1}^f$. Поскольку $Q_d^f \in \mathbf{H}$, имеем $\mathbf{a}_d \in U_{\alpha+2n+1}^{T_d}(\mathbf{H})$. Мы показали, что левая часть равенства (3) содержится в правой части. Обратно, пусть $\mathbf{a}_d \in U_{\alpha+2n+1}^{T_d}(\mathbf{H})$ и $(a_d, Q_d^f) \in \mathbf{a}_d$. Тогда $a_d \in U_{d,\alpha+2n+1}^f$ и $Q_d^f \in \mathbf{H}$. Пусть $b_r \in Q_d^f$ и $a_d \in f^{-1}(b_r)$. Поскольку $f^{-1}(b_r) \in U_{d,\alpha+2n+1}^f$ и $f^{-1}(U_{d,\alpha+n}^f) = U_{d,\alpha+2n+1}^f$, имеем $b_r \in U_{r,\alpha+n}^f$. Пусть $(b_r, Q_r^f) \in \mathbf{b}_r \in T_r$. Из того, что $Q_d^f \in \mathbf{L}$, следует, что $\mathbf{b}_r \in U_{\alpha+1}^{T_r}(\mathbf{L})$. Из определения отображения F_d вытекает равенство $F_d(\mathbf{b}_r) = \mathbf{a}_d$, которое доказывает, что правая часть формулы (3) содержится в левой.

Равенство (3) показывает, что отображение F_d непрерывно и сюръективно. То, что отображение F_d правильно, доказывается точно так же, как в теореме 3.3. Отношения

$$\varphi_{\mathbf{G}^{Q_r^f}} \circ \varphi_{\mathbf{G}^{Q_d^f}} = \varphi_{\mathbf{G}^{T_d}} \circ \varphi_{\mathbf{G}^{Q_d^f}}, \quad F_d \circ i_{T_d}^{Q_d^f} = i_{T_r}^{Q_r^f} \circ f$$

вытекают непосредственно из определений отображения F_d , естественных вложений $i_{T_d}^{Q_d^f}$ и $i_{T_r}^{Q_r^f}$ и построения содержащих пространств T_d и T_r . В силу выбора семейства $\mathbf{F}$ отображение $F \equiv F_d$ является требуемым универсальным элементом в классе $\mathbb{F}(\mathbb{S}_d, \mathbb{S}_r)$. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.4 аналогично доказательству теоремы 3.4А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский А. В., Федорчук В. В. Основные понятия и конструкции в общей топологии // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — 1988. — 17. — С. 5–110.
2. Илиадис С. О вложениях топологических групп // Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 2. — С. 105–112..
3. Смирнов Ю. Об универсальных пространствах для некоторых классов бесконечномерных пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — 23. — С. 185–196.
4. Успенский В. В. Об универсальной топологической группе счетного веса // Функц. анализ. прилож. — 1986. — 20. — С. 86–87.
5. Шкарин С. А. Об универсальных абелевых топологических групп // Мат. сб. — 1999. — 190, № 7. — С. 127–144.
6. Banach S. Theorie operations lineaires. — Warsaw, 1932.
7. Ben Yaacov I. The linear isometry group of the Gurarij space is universal // Proc. Math. Soc. — 2014. — 142, № 7. — P. 2459–2467.
8. Dube T., Iliadis S. van Mill J., Naidoo I. Universal frames // Topology Appl. — 2013. — 160, № 18. — P. 2454–2464.
9. Georgiou D. N., Iliadis S. D., Megaritis A. C. On base dimension-like functions of the type Ind // Topology Appl. — 2013, № 18. — P. 2482–2494.
10. Georgiou D., Iliadis S., Megaritis A., Sereti F. Universality property and dimension for frames // Order. — 2019. — 37, № 3. — P. 427–444.
11. Georgiou D. N., Iliadis S. D., Megaritis A. C., Sereti F. Small inductive dimension and universality on frames // Algebra Univ. — 2019. — 80, № 2. — P. 21–51.
12. Gevorgyan P. S., Iliadis S. D., Sadovnichy Yu V. Universality on frames // Topology Appl. — 2017. — 220. — P. 173–188.
13. Iliadis S. D. A construction of containing spaces // Topology Appl. — 2000. — 107. — P. 97–116.
14. Iliadis S. D. Mappings and universality // Topology Appl. — 2004. — 137, № 1-3. — P. 175–186.
15. Iliadis S. D. Universal Spaces and Mappings. — Elsevier, 2005.
16. Iliadis S. D. On isometrically universal spaces, mappings, and actions of groups // Topology Appl. — 2008. — 155, № 14. — P. 1502–1515.
17. Iliadis S. D. Universal elements in some classes of mappings and classes of G -spaces // Topology Appl. — 2008. — 156, № 1. — P. 76–82.
18. Iliadis S. D. On isometric embeddings of separable metric spaces // Topology Appl. — 2015. — 179. — P. 91–98.

19. *Iliadis S. D.* On spaces continuously containing topological groups// *Topology Appl.* — 2020. — 272. — 107072.
20. *Iliadis S. D.* On actions of spaces continuously containing topological groups// *Topology Appl.* — 2020. — 275. — 107035.
21. *Iliadis S. D., Sadovnichy Yu. V.* Universality on spaces continuously containing topological groups// *Filomat.* — 2021. — 35, № 12. — P. 4087—4094.
22. *Katetov M.* On universal metric spaces// (*Frolík Z.*, ed.) *Proc. 6th Topological Symp. "General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra"* (Prague, 1986). — Berlin: Heldermann Verlag, 1988. — P. 323–330.
23. *Nagata J.* On the countable sum of zero-dimensional metric spaces// *Fund. Math.* — 1959. — 48, № 1. — P. 1–14.
24. *Nobeling G.* Über eine n -dimensionale Universalmenge im $\mathbb{R}^{2n+1}$ // *Math. Ann.* — 1930. — 104. — P. 71–80.
25. *R. Pol* Countable dimensional universal sets// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1986. — 297. — P. 255–268.
26. *Urysohn P. S.* Sur un espace metrique universel// *Bull. Sci. Math.* — 1927. — 51. — P. 43–64.
27. *Urysohn P. S.* Der Hilbertsche Raum als Urbild der Metrishen Raume// *Math. Ann.* — 1924. — 92. — P. 302–304.
28. *Uspenski V. V.* On the group of isometries of the Urysohn universal metric space// *Comment. Math. Univ. Carol.* — 1990. — 31, № 1. — P. 181–182.
29. *Wenner B. R.* A universal separable metric locally finite-dimensional space// *Fund. Math.* — 1973. — 80. — P. 283–286.

Илиадис Ставрос Димитрис

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

E-mail: s.d.iliadis@gmail.com

Садовничай Юрий Викторович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

E-mail: sadovnichiy.yu@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 50–65
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-50-65

УДК 514.765

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ПОДГРУППОЙ ИЗОТРОПИИ И ИЗОТРОПНЫМ ТЕНЗОРОМ СХОУТЕНА—ВЕЙЛЯ

© 2023 г. П. Н. КЛЕПИКОВ

Аннотация. Изотропный тензор Схоутена—Вейля ранее изучался в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. В случае локально однородных псевдоримановых пространств с нетривиальной подгруппой изотропии были классифицированы многообразия с изотропным тензором Вейля. В данной работе получена классификация четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с изотропным тензором Схоутена—Вейля. Кроме того, получены некоторые результаты о тензорах кривизны подобных многообразий.

Ключевые слова: локально однородное пространство, изотропный тензор Схоутена—Вейля, алгебра Ли.

FOUR-DIMENSIONAL LOCALLY HOMOGENEOUS PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH A NONTRIVIAL ISOTROPY SUBGROUP AND AN ISOTROPIC SCHOUTEN–WEIL TENSOR

© 2023 P. N. KLEPIKOV

ABSTRACT. The isotropic Schouten–Weyl tensor was previously studied in the case of three-dimensional Lie groups with a left-invariant Lorentzian metric. In the case of locally homogeneous pseudo-Riemannian spaces with a nontrivial isotropy subgroup, manifolds with an isotropic Weyl tensor were classified. In this paper, we obtain a classification of four-dimensional, locally homogeneous pseudo-Riemannian manifolds with an isotropic Schouten–Weyl tensor. Some results on the curvature tensors of similar manifolds are obtained.

Keywords and phrases: locally homogeneous space, isotropic Schouten–Weyl tensor, Lie algebra.

AMS Subject Classification: 53B20, 53C30

1. Введение. (Псевдо)римановы многообразия с нулевым тензором Схоутена—Вейля изучались в работах многих математиков. В частности, в класс данных многообразий входят многообразия Эйнштейна ($r = \lambda g$) и их прямые произведения, локально симметрические пространства ($\nabla R = 0$), Риччи-параллельные многообразия ($\nabla r = 0$) и конформно плоские многообразия ($W = 0$) (см. [13]). Также отметим, что в случае многообразий постоянной скалярной кривизны класс многообразий с нулевым тензором Схоутена—Вейля совпадает с классом $\mathcal{B}$ эйнштейново подобных многообразий в смысле А. Грея [17].

Для локально однородных пространств с нулевым тензором Схоутена—Вейля известны некоторые классификационные результаты в случае малых размерностей. Например, Дж. Кальварузо

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00111).

и А. Заем классифицировали левоинвариантные псевдоримановы метрики Эйнштейна, конформно плоские и Риччи-параллельные метрики на четырехмерных группах Ли [14–16]. Более того, А. Заем и А. Хаджи-Бадали классифицировали четырехмерные эйнштейново подобные псевдоримановы локально однородные пространства с нетривиальной подгруппой изотропии [20]. Классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой и нулевым тензором Схоутена–Вейля была получена в работе [6]. В случае римановой метрики Д. С. Воронов, О. П. Хромова, Е. Д. Родионов и В. В. Славский получили классификацию четырехмерных метрических групп Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля [1, 4, 5].

(Псевдо)римановы многообразия с изотропным тензором Схоутена–Вейля естественным образом возникают при изучении локально конформно однородных (псевдо)римановых пространств [19]. Ранее данные многообразия в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой изучались в работах [10, 12]. В них была получена полная классификация метрических групп Ли, тензор Схоутена–Вейля которых является изотропным. Кроме того, в работах [8, 9] была получена классификация четырехмерных локально однородных многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля. Данная работа продолжает исследования многообразий с изотропным тензором Схоутена–Вейля в случае четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии.

Целью данной работы является доказательство следующей

Теорема 1. Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда $(M = G/H, g)$ имеет изотропный тензор Схоутена–Вейля тогда и только тогда, когда алгебра Ли группы G содержится в таблице 1.

2. Основные обозначения и факты. Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m . Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G , $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии (алгебра Ли группы H), $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — фактор-пространство, являющиеся дополнением к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ определяет представление изотропии $\psi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом $\psi_X(Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}}$. Каждая инвариантная (псевдо)риманова метрика на однородном пространстве G/H соответствует невырожденной симметричной билинейной форме g на $\mathfrak{m}$, которая определяется равенством

$$(\psi_X)^t \cdot g + g \cdot \psi_X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \quad (1)$$

где $(\psi_X)^t$ — транспонированная матрица. Данная билинейная форма определяет связность Леви-Чивиты

$$\nabla: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m}), \quad \nabla_X(Y_{\mathfrak{m}}) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + v(X, Y),$$

где $v: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{m}$ определяется равенством

$$2g(v(X, Y), Z_{\mathfrak{m}}) = g(X_{\mathfrak{m}}, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + g(Y_{\mathfrak{m}}, [Z, X]_{\mathfrak{m}}).$$

Тензор кривизны $R: \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ определяется выражением

$$R(X, Y) = [\nabla_Y, \nabla_X] + \nabla_{[X, Y]}.$$

Тензор Риччи r определяется как свертка тензора кривизны по второму и четвертому индексу, скалярная кривизна Scal определяется как полная свертка тензора Риччи r с метрическим тензором g . Тензор Схоутена–Вейля определяется равенством

$$SW(X, Y, Z) = \frac{1}{n-2} \left(\nabla_Z r(X, Y) - \nabla_Y r(X, Z) - \frac{1}{2(n-1)} (g(X, Y) \nabla_Z \text{Scal} - g(X, Z) \nabla_Y \text{Scal}) \right),$$

или, в силу постоянства скалярной кривизны:

$$SW(X, Y, Z) = \frac{1}{n-2} (\nabla_Z r(X, Y) - \nabla_Y r(X, Z)).$$

Таблица 1. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена—Вейля

№	Скобки Ли	Скалярное произведение на дополнении к подалгебре изотропии	Ограничения
1.1 ¹ .1	$[e_1, u_1] = u_1, [e_1, u_3] = -u_3, [u_1, u_3] = u_2,$ $[u_2, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = u_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{13}^2 + 4\alpha_{24}^2}{4\alpha_{44}} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0, \alpha_{44} \neq 0$
1.1 ¹ .3	$[e_1, u_1] = u_1, [e_1, u_3] = -u_3, [u_1, u_3] = e_1 + u_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0, \alpha_{24} \neq 0$
1.1 ² .1	$[e_1, u_1] = u_3, [e_1, u_3] = -u_1, [u_1, u_3] = -u_2,$ $[u_1, u_4] = u_1, [u_2, u_4] = 2u_2, [u_3, u_4] = u_3$	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{24}^2 - \alpha_{33}^2}{\alpha_{44}} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{33}^2, \alpha_{33} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$
1.1 ² .3	$[e_1, u_1] = u_3, [e_1, u_3] = -u_1, [u_1, u_3] = e_1 + u_2$	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0, \alpha_{24} \neq 0$
1.1 ² .4	$[e_1, u_1] = u_3, [e_1, u_3] = -u_1, [u_1, u_3] = -e_1 + u_2$		$\alpha_{33} \neq 0, \alpha_{24} \neq 0$
1.3 ¹ .1	$[e_1, u_1] = e_1, [e_1, u_3] = u_1, [e_1, u_4] = u_2,$ $[u_1, u_2] = -\frac{1}{2}u_2, [u_1, u_3] = u_3, [u_1, u_4] = \frac{1}{2}u_4,$ $[u_2, u_3] = \frac{1}{2}u_4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 \neq 0,$ $\alpha_{33}\alpha_{44} \neq \alpha_{34}^2, \alpha_{23} \neq 0$
1.4 ¹ .1	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [e_1, u_4] = e_1,$ $[u_1, u_2] = u_1, [u_1, u_3] = u_2, [u_1, u_4] = u_1,$ $[u_2, u_3] = u_3, [u_3, u_4] = -u_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0, \alpha_{22} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$
1.4 ¹ .2	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [e_1, u_4] = e_1,$ $[u_1, u_4] = pu_1, [u_2, u_4] = (p-1)u_2,$ $[u_3, u_4] = (p-2)u_3$		$\alpha_{33} \neq 0, p \neq 3, p \neq \frac{5}{3},$ $\alpha_{22} \neq 0, \alpha_{44} \neq 0$
1.4 ¹ .3	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [e_1, u_4] = e_1,$ $[u_1, u_4] = 2u_1, [u_2, u_3] = e_1, [u_2, u_4] = u_2$		$\alpha_{33} \neq \alpha_{44}, \alpha_{22} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$
1.4 ¹ .4	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [e_1, u_4] = e_1,$ $[u_1, u_4] = 2u_1, [u_2, u_3] = -e_1, [u_2, u_4] = u_2$		$\alpha_{33} \neq -\alpha_{44}, \alpha_{22} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$
1.4 ¹ .5	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_1, u_2] = u_1,$ $[u_1, u_3] = u_2, [u_2, u_3] = u_3$		$\alpha_{33} \neq 0, \alpha_{22} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$
1.4 ¹ .6	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_1, u_4] = u_1,$ $[u_2, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = u_1 + u_3$		$\alpha_{22} \neq 0, \alpha_{44} \neq 0$
1.4 ¹ .7	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = u_2, [u_1, u_4] = u_1,$ $[u_2, u_4] = u_2, [u_3, u_4] = -u_1 + u_3$		$\alpha_{22} \neq 0, \alpha_{44} \neq 0$
2.5 ¹ .1	$[e_1, u_2] = u_1, [e_1, u_3] = -u_4, [e_1, u_4] = -2e_1,$ $[e_2, u_2] = -2e_2, [e_2, u_3] = -u_2, [e_2, u_4] = u_1,$ $[u_1, u_2] = 2e_2 - u_1, [u_1, u_3] = u_2 + u_4,$ $[u_1, u_4] = 2e_1 - u_1, [u_2, u_3] = -2u_3,$ $[u_2, u_4] = u_2 - u_4, [u_3, u_4] = 2u_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0, \alpha_{24} \neq 0$
2.5 ² .1	$[e_1, u_2] = -e_1 + u_1, [e_1, u_3] = -u_2, [e_1, u_4] = e_2,$ $[e_2, u_2] = -e_2, [e_2, u_3] = u_4, [e_2, u_4] = -e_1 - u_1,$ $[u_1, u_2] = e_1 - u_1, [u_1, u_3] = u_2, [u_1, u_4] = -e_2,$ $[u_2, u_3] = -2u_3, [u_2, u_4] = -u_4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0, \alpha_{22} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$

Если размерность многообразия $m \geq 4$, то тензор Схоутена—Вейля связан с дивергенцией тензора Вейля следующим равенством [13]:

$$SW = -(n - 3) \operatorname{div} W.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ определяется как полная свертка тензора Схоутена—Вейля с метрическим тензором по каждому индексу.

Тензор Схоутена—Вейля SW будем называть *изотропным*, если квадрат его длины равен нулю ($\|SW\|^2 = 0$), а сам тензор не равен нулю ($SW \neq 0$).

Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять квадрат длины тензора Схоутена—Вейля на локально однородном (псевдо)римановом пространстве (см. подробнее [7, 11]).

Пусть, как и ранее, $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m , $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G , $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ дополнение в $\mathfrak{g}$ к $\mathfrak{h}$, $h = \dim \mathfrak{h}$.

Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_h, u_1, u_2, \dots, u_m\}$ — базис в $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ есть базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k, \quad [u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k, \quad [h_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{c}_{ij}^k u_k,$$

где c_{ij}^k , C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — массивы соответствующих размеров.

Первым шагом является вычисление представления изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\psi_i)_j^k = (\psi(e_i))_j^k = \bar{c}_{ij}^k \quad (2)$$

и запись системы уравнений (1).

Далее вычисляются компоненты связности Леви-Чивиты ∇ с помощью известного метрического тензора g_{ij} и структурных констант c_{ij}^k , C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(c_{ij}^k + g^{sk} c_{sj}^l g_{il} + g^{sk} c_{si}^l g_{jl}), \quad \bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^k - \frac{1}{2}g^{sk} \bar{c}_{is}^l g_{jl}, \quad (3)$$

где $\nabla_{u_i} u_j = \Gamma_{ij}^k u_k$, $\nabla_{h_i} u_j = \bar{\Gamma}_{ij}^k u_k$, $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная к $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R и тензора Риччи r :

$$R_{ijks} = (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p + C_{ij}^l \bar{\Gamma}_{lk}^p) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}. \quad (4)$$

В конце вычисляются компоненты тензора Схоутена—Вейля

$$SW_{ijk} = \frac{1}{n-2}(r_{ij,k} - r_{ik,j}) = \frac{1}{n-2}(r_{sk} \Gamma_{ji}^s + r_{is} \Gamma_{jk}^s - r_{sj} \Gamma_{ki}^s - r_{is} \Gamma_{kj}^s)$$

и квадрат длины тензора Схоутена—Вейля

$$\|SW\|^2 = SW_{ijk} SW_{\alpha\beta\gamma} g^{i\alpha} g^{j\beta} g^{k\gamma}.$$

Отметим, что подобные математические модели для метрических групп Ли также были построены в работах [2, 3], а для локально однородных пространств в работах [11, 14].

В данной работе будем использовать классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий, полученную в работе [18]. Для каждого случая указаны скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы G , параметры могут принимать любые действительные значения, если не указано обратное; во всех случаях подалгебра изотропии $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_i)$, дополнение $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_i)$. Далее по тексту будем ссылаться на случаи из данной классификации по их номеру (например, 2.1^{3.5}).

Ниже по тексту, при указании вида инвариантной метрики, будем ссылаться на таблицу 2. Так, например, фраза «Метрический тензор имеет вид 4» означает, что матрица метрического тензора имеет вид, приведенный в таблице 2 под номером 4 вместе с соответствующими ограничениями на компоненты метрического тензора.

Таблица 2. Вид инвариантного метрического тензора

№	Матрица метрического тензора	Ограничения	№	Матрица метрического тензора	Ограничения
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0,$ $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0,$ $\alpha_{24} \neq 0$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
3	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0,$ $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	11	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{44} & 0 \\ -\alpha_{23} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$
4	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$	12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$	13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{44} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{22} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$	14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$	15	$\begin{pmatrix} \alpha_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{24} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2 \neq 0$			

3. Кривизна четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии. В данном разделе приведем некоторые теоремы о тензорах кривизны четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий. Но сначала упомянем следующую лемму, доказательство которой приводится, например, в [13].

Лемма 1. Пусть $\{R = 0\}$ обозначает класс всех плоских (псевдо)римановых многообразий; $\{r = 0\}$ — класс многообразий с нулевым тензором Риччи; $\{\nabla R = 0\}$ — класс локально симметричных многообразий; $\{W = 0\}$ — класс конформно плоских многообразий; $\{\nabla r = 0\}$ — класс Риччи-параллельных многообразий; $\{\nabla W = 0\}$ — класс многообразий с параллельным тензором Вейля; $\{SW = 0\}$ — класс многообразий с нулевым тензором Схоутена–Вейля. Тогда выполняются следующие включения:

- (i) $\{R = 0\} \subseteq \{r = 0\}, \{R = 0\} \subseteq \{\nabla R = 0\}, \{R = 0\} \subseteq \{W = 0\};$
- (ii) $\{r = 0\} \subseteq \{\nabla r = 0\}, \{\nabla R = 0\} \subseteq \{\nabla r = 0\};$
- (iii) $\{W = 0\} \subseteq \{\nabla W = 0\}, \{\nabla R = 0\} \subseteq \{\nabla W = 0\};$
- (iv) $\{\nabla r = 0\} \subseteq \{SW = 0\}, \{\nabla W = 0\} \subseteq \{SW = 0\}.$

Теорема 2. Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда $(G/H, g)$ является плоским многообразием (т.е. $R = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 46 типов локально однородных пространств:

$1.1^1.9,$	$1.2^1.1,$	$2.1^2.6,$	$2.3^1.1,$	$3.2^1.4,$	$3.5^2.4,$	$5.1^1.1,$
$1.1^1.10,$	$1.2^2.1,$	$2.1^3.6,$	$2.4^1.3,$	$3.2^2.2,$	$4.1^1.1,$	$6.1^1.2,$
$1.1^2.12,$	$1.3^1.18,$	$2.1^4.2,$	$2.5^1.14,$	$3.3^1.4,$	$4.1^2.1,$	$6.1^2.3,$
$1.1^3.1,$	$1.3^1.32,$	$2.2^1.6,$	$2.5^2.7,$	$3.3^2.4,$	$4.2^1.2,$	$6.1^3.3,$
$1.1^4.1,$	$1.4^1.23,$	$2.2^1.7,$	$3.1^1.1,$	$3.4^1.1,$	$4.2^2.3,$	
$1.1^5.1,$	$1.4^1.26,$	$2.2^2.4,$	$3.1^2.1,$	$3.4^2.1,$	$4.2^3.2,$	
$1.1^6.1,$	$2.1^1.3,$	$2.2^3.1,$	$3.2^1.2,$	$3.5^1.4,$	$4.3^1.2,$	

Доказательство. Ниже подробно рассмотрим случай $1.1^1.9$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Для случая $1.1^1.9$ существует такой базис $\{e_1, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ в $\mathfrak{g}$, что ненулевые скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_2] = \frac{1}{2}u_2, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [e_1, u_4] = -\frac{1}{2}u_4, \quad [u_1, u_4] = u_2.$$

Далее, обозначая $\mathfrak{m} = \text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ и с использованием (1) и (2), получаем представление изотропии и вид инвариантного метрического тензора в данном базисе:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как g невырождена, то $\alpha_{13}\alpha_{24} \neq 0$. Компоненты связности Леви-Чивиты определяются с помощью (3):

$$(\Gamma_1)_j^k = (\Gamma_2)_j^k = (\Gamma_3)_j^k = 0, \\ (\Gamma_4)_j^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{24}}{\alpha_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\bar{\Gamma}_1)_j^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Далее с помощью (4) убеждаемся, что все компоненты тензора кривизны R тождественно равны нулю.

Остальные случаи теоремы 2 рассматриваются аналогично. □

Доказательство теорем 3—7 аналогично доказательству теоремы 2 и основывается на прямых вычислениях, поэтому приводить их не будем.

Теорема 3. Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 2). Тогда $(G/H, g)$ является Риччи плоским многообразием (т.е. $r = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 12 типов локально однородных пространств:

$1.3^1.17,$	$1.3^1.31,$	$2.2^2.3,$	$2.5^1.11,$	$2.5^1.13,$	$3.2^1.3,$
$1.3^1.23,$	$2.2^1.5,$	$2.5^1.2,$	$2.5^1.12,$	$2.5^2.6,$	$4.3^1.1.$

Теорема 4. Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 2). Тогда $(G/H, g)$ является конформно плоским многообразием (т.е. $W = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 28 типов локально однородных пространств:

$1.4^1.8,$	$2.4^1.2,$	$2.5^1.10,$	$3.3^1.2,$	$3.3^2.3,$	$3.5^2.1,$	$6.1^2.1,$
$2.2^1.2,$	$2.5^1.4,$	$3.2^1.1,$	$3.3^1.3,$	$3.5^1.1,$	$3.5^2.2,$	$6.1^2.2,$
$2.2^1.3,$	$2.5^1.6,$	$3.2^2.1,$	$3.3^2.1,$	$3.5^1.2,$	$3.5^2.3,$	$6.1^3.1,$
$2.4^1.1,$	$2.5^1.9,$	$3.3^1.1,$	$3.3^2.2,$	$3.5^1.3,$	$6.1^1.1,$	$6.1^3.2,$

Теорема 5. Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 2). Тогда $(G/H, g)$ является локально симметричным многообразием (т.е. $\nabla R = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 73 типов локально однородных пространств:

$1.1^1.5,$	$1.4^1.8,$	$2.1^2.4,$	$2.2^2.1,$	$2.5^1.11,$	$3.3^2.2,$	$4.2^3.1,$
$1.1^1.6,$	$1.4^1.14,$	$2.1^2.5,$	$2.2^2.2,$	$2.5^1.12,$	$3.3^2.3,$	$4.3^1.1,$
$1.1^1.7,$	$1.4^1.21,$	$2.1^3.1,$	$2.2^2.3,$	$2.5^1.13,$	$3.5^1.1,$	$6.1^1.1,$
$1.1^2.6,$	$1.4^1.22,$	$2.1^3.2,$	$2.4^1.1,$	$2.5^2.4,$	$3.5^1.2,$	$6.1^2.1,$
$1.1^2.7,$	$1.4^1.24,$	$2.1^3.3,$	$2.4^1.2,$	$2.5^2.5,$	$3.5^1.3,$	$6.1^2.2,$
$1.1^2.8,$	$1.4^1.25,$	$2.1^3.4,$	$2.5^1.2,$	$2.5^2.6,$	$3.5^2.1,$	$6.1^3.1,$
$1.1^2.9,$	$2.1^1.1,$	$2.1^3.5,$	$2.5^1.6,$	$3.2^1.1,$	$3.5^2.2,$	$6.1^3.2,$
$1.1^2.10,$	$2.1^1.2,$	$2.1^4.1,$	$2.5^1.7,$	$3.2^1.3,$	$3.5^2.3,$	
$1.3^1.11,$	$2.1^2.1,$	$2.2^1.1,$	$2.5^1.8,$	$3.2^2.1,$	$4.2^1.1,$	
$1.3^1.17,$	$2.1^2.2,$	$2.2^1.4,$	$2.5^1.9,$	$3.3^1.2,$	$4.2^2.1,$	
$1.3^1.31,$	$2.1^2.3,$	$2.2^1.5,$	$2.5^1.10,$	$3.3^1.3,$	$4.2^2.2,$	

Теорема 6. Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теоремах 2, 3 и 5). Тогда $(G/H, g)$ является Риччи параллельным многообразием (т.е. $\nabla r = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 15 типов локально однородных пространств:

$1.3^1.3,$	$1.3^1.9,$	$1.4^1.13,$	$1.4^1.17,$	$1.4^1.20,$
$1.3^1.6,$	$1.3^1.10,$	$1.4^1.15,$	$1.4^1.18,$	$2.5^1.5,$
$1.3^1.8,$	$1.3^1.20,$	$1.4^1.16,$	$1.4^1.19,$	$2.5^2.3$

Теорема 7. Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теоремах 2–6). Тогда $(G/H, g)$ имеет нулевой тензор Схоутена–Вейля (т.е. $SW = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 25 типов локально однородных пространств:

$1.3^1.2,$	$1.3^1.12,$	$1.3^1.16,$	$1.3^1.24,$	$1.3^1.28,$	$1.4^1.10,$	$2.5^1.3,$
$1.3^1.4,$	$1.3^1.13,$	$1.3^1.19,$	$1.3^1.25,$	$1.3^1.29,$	$1.4^1.11,$	$2.5^2.2,$
$1.3^1.5,$	$1.3^1.14,$	$1.3^1.21,$	$1.3^1.26,$	$1.3^1.30,$	$1.4^1.12,$	
$1.3^1.7,$	$1.3^1.15,$	$1.3^1.22,$	$1.3^1.27,$	$1.4^1.9,$		

4. Изотропный тензор Схоутена–Вейля. Доказательство теоремы 1 основывается на предложениях, которые будут доказаны в данном разделе.

Предложение 1. Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда тензор Схоутена–Вейля многообразия $(G/H, g)$ равен нулю для любой инвариантной метрики g , если и только если G/H содержится в следующем списке:

$1.1^1.(5-10),$	$1.1^6.1,$	$2.1^2.(1-6),$	$2.3^1.1,$	$3.2^1.(1-4),$	$3.5^1.(1-4),$	$4.2^3.(1,2),$
$1.1^2.(6-10),$	$1.2^1.1,$	$2.1^3.(1-6),$	$2.4^1.(1-3),$	$3.2^2.(1,2),$	$3.5^2.(1-4),$	$4.3^1.(1,2),$
$1.1^2.12,$	$1.2^2.1,$	$2.1^4.(1,2),$	$2.5^1.(2-14),$	$3.3^1.(1-4),$	$4.1^1.1,$	$5.1^1.1,$
$1.1^3.1,$	$1.3^1.(2-32),$	$2.2^1.(1-7),$	$2.5^2.(2-7),$	$3.3^2.(1-4),$	$4.1^2.1,$	$6.1^1.(1,2),$
$1.1^4.1,$	$1.4^1.(8-26),$	$2.2^2.(1-4),$	$3.1^1.1,$	$3.4^1.1,$	$4.2^1.(1,2),$	$6.1^2.(1-3),$
$1.1^5.1,$	$2.1^1.(1-3),$	$2.2^3.1,$	$3.1^2.1,$	$3.4^2.1,$	$4.2^2.(1-3),$	$6.1^3.(1-3).$

Доказательство. Данное предложение является следствием теорем 2–7 в силу леммы 1. $\square$

Предложение 2. Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда, если G/H есть случай 1.1¹.8 или 1.1².11, то квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ не равен нулю ни для какой инвариантной метрики g .

Доказательство.

Случай 1.1¹.8. В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [e_1, u_1] &= u_1, & [e_1, u_2] &= \frac{1}{2}u_2, & [e_1, u_3] &= -u_3, & [e_1, u_4] &= -\frac{1}{2}u_4, \\ [u_1, u_3] &= -2e_1, & [u_1, u_4] &= u_2, & [u_2, u_3] &= u_4, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= 0, & 2\alpha_{11} &= 0, & \frac{3}{2}\alpha_{12} &= 0, & \frac{1}{2}\alpha_{14} &= 0, \\ -\frac{1}{2}\alpha_{23} &= 0, & -2\alpha_{33} &= 0, & -\frac{3}{2}\alpha_{34} &= 0, & -\alpha_{44} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 2. Нетривиальными компонентами тензора Схоутена–Вейля являются

$$SW_{223} = -SW_{232} = -SW_{441} = \frac{3\alpha_{24}}{2\alpha_{13}}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля равен

$$\|SW\|^2 = -\frac{9}{\alpha_{13}^3}.$$

Он, очевидно, не обращается в нуль ни для какой инвариантной метрики g .

Случай 1.1².11. В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [e_1, u_1] &= u_3, & [e_1, u_2] &= \frac{1}{2}u_4, & [e_1, u_3] &= -u_1, & [e_1, u_4] &= -\frac{1}{2}u_2, \\ [u_1, u_2] &= u_2, & [u_1, u_3] &= -4e_1, & [u_1, u_4] &= -u_4, & [u_2, u_3] &= -u_4, & [u_3, u_4] &= u_2, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha_{24} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{11} + \alpha_{33} = 0, \quad -\alpha_{12} + \frac{1}{2}\alpha_{34} = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_{12} + \alpha_{34} = 0, \\ \frac{1}{2}\alpha_{14} + \alpha_{23} = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_{22} + \frac{1}{2}\alpha_{44} = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_{23} - \alpha_{14} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 4. Нетривиальными компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{221} = -SW_{234} = SW_{243} = -SW_{441} = \frac{3\alpha_{44}}{\alpha_{33}}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{72}{\alpha_{33}^3};$$

очевидно, он не обращается в нуль ни для какой инвариантной метрики g . $\square$

Предложение 3. Если $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что приведены в предложении 1). Если G/H содержится в приведенном ниже списке, то из равенства нулю квадрата длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ для некоторой инвариантной метрики g следует равенство нулю самого тензора Схоутена—Вейля SW :

$$1.1^1.2, \quad 1.1^1.4, \quad 1.1^2.2, \quad 1.1^2.5.$$

Доказательство. Последовательно рассмотрим все случаи, приведенные выше.

Случай 1.1¹.2. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [u_2, u_4] = pu_2, \quad [u_3, u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, $p \in \mathbb{R}$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$\begin{aligned} SW_{224} = -SW_{242} = \frac{\alpha_{22}^2 p(2p-1)}{4(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \quad SW_{143} = -SW_{134} = SW_{341} = \frac{\alpha_{13}\alpha_{22}p(2p-1)}{8(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \\ SW_{442} = -\frac{\alpha_{24}\alpha_{22}p(2p-1)}{4(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}. \end{aligned}$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}^3 p^2 (2p-1)^2}{16(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^3}.$$

Он обращается в нуль, когда либо $\alpha_{22} = 0$, либо $p = 0$, либо $p = 1/2$. Но во всех этих случаях сам тензор Схоутена—Вейля также равен нулю.

Поскольку во всех случаях алгоритм доказательства однообразен, то далее для каждого случая приведем лишь номер вида метрического тензора g (из таблицы 2), нетривиальные компоненты тензора Схоутена—Вейля SW и квадрат длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$.

Случай	g	SW	$\ SW\ ^2$
1.1 ¹ .4	1	$SW_{123} = -SW_{132} = \frac{\alpha_{22}^2}{4\alpha_{13}^2},$ $SW_{143} = -SW_{341} = -SW_{134} = \frac{\alpha_{24}\alpha_{22}}{4\alpha_{13}^2},$ $SW_{231} = -\frac{\alpha_{22}^2}{2\alpha_{13}^2}$	$-\frac{3\alpha_{22}^3}{4\alpha_{13}^6}$
1.1 ² .2	3	$SW_{141} = SW_{343} = -SW_{114} = -SW_{334} =$ $\frac{\alpha_{33}\alpha_{22}p(p-1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, SW_{224} = -SW_{242} = \frac{\alpha_{22}^2p(p-1)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2},$ $SW_{442} = -\frac{\alpha_{24}\alpha_{22}p(p-1)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}$	$\frac{3\alpha_{22}^3p^2(p-1)^2}{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^3}$
1.1 ² .5	3	$SW_{132} = -SW_{123} = \frac{\alpha_{22}^2}{4\alpha_{33}^2},$ $SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}\alpha_{22}}{4\alpha_{33}^2}, SW_{231} = \frac{\alpha_{22}^2}{2\alpha_{33}^2}$	$\frac{3\alpha_{22}^3}{4\alpha_{33}^6}$

□

Предложение 4. Если $(M = G/H, g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда, если G/H есть случай 1.4¹.6 или 1.4¹.7, то квадрат длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ равен нулю для любой инвариантной метрики g , а сам тензор Схоутена—Вейля не тривиален.

Доказательство.

Случай 1.4¹.6. В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1, u_2] = u_1, \quad [e_1, u_3] = u_2, \quad [u_1, u_4] = u_1, \quad [u_2, u_4] = u_2, \quad [u_3, u_4] = u_1 + u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{24} = 0, \quad 2\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{22} + \alpha_{13} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 6. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{343} = -SW_{334} = \frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{44}}.$$

Они не могут обращаться в нуль, поскольку при $\alpha_{23} = 0$ метрический тензор был бы вырожденным. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен нулю.

Случай 1.4¹.7. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_2] = u_1, \quad [e_1, u_3] = u_2, \quad [u_1, u_4] = u_1, \quad [u_2, u_4] = u_2, \quad [u_3, u_4] = -u_1 + u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{24} = 0, \quad 2\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{22} + \alpha_{13} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 6. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{334} = -SW_{343} = \frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{44}}.$$

Они не могут обратиться в нуль, поскольку при $\alpha_{23} = 0$ метрический тензор был бы вырожденным. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен нулю. $\square$

Предложение 5. Если $(M = G/H, g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности $\ddot{E}A$ с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда, если G/H содержится в нижеприведенном списке, то квадрат длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ равен нулю для любой инвариантной метрики g , но сам тензор Схоутена—Вейля может быть равен нулю для некоторых инвариантных метрик:

$$1.3^1.1, \quad 1.4^1.1, \quad 1.4^1.2, \quad 1.4^1.3, \quad 1.4^1.4, \quad 1.4^1.5, \quad 2.5^1.1, \quad 2.5^2.1.$$

Доказательство. Последовательно рассмотрим все случаи, приведенные выше.

Случай 1.3¹.1. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$\begin{aligned} [e_1, u_1] &= e_1, & [e_1, u_3] &= u_1, & [e_1, u_4] &= u_2, & [u_1, u_2] &= -\frac{1}{2}u_2, \\ [u_1, u_3] &= u_3, & [u_1, u_4] &= \frac{1}{2}u_4, & [u_2, u_3] &= \frac{1}{2}u_4, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{24} = 0, \quad \alpha_{23} + \alpha_{14} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 5. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{331} = \frac{45(\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2)}{32\alpha_{23}^2}, \quad SW_{334} = -SW_{343} = \frac{15\alpha_{44}(\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2)}{64\alpha_{23}^3}.$$

Они могут обратиться в нуль, когда $\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2 = 0$. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен нулю. Поскольку во всех случаях алгоритм доказательства однообразен, то далее для каждого случая приведем лишь номер вида метрического тензора g (из таблицы 2) и нетривиальные компоненты тензора Схоутена—Вейля SW . Во всех случаях квадрат длины тензора Схоутена—Вейля тривиален.

Случай	g	SW
1.4 ¹ .1	6	$SW_{332} = -\frac{3\alpha_{33}(\alpha_{44} + 2\alpha_{22})}{4\alpha_{22}\alpha_{44}}, SW_{343} = -SW_{334} = \frac{\alpha_{33}(5\alpha_{44} + 8\alpha_{22})}{4\alpha_{22}\alpha_{44}}$
1.4 ¹ .2	6	$SW_{343} = -SW_{334} = \frac{\alpha_{33}(p-3)(3*p-5)}{2\alpha_{44}}$
1.4 ¹ .3	6	$SW_{334} = -SW_{343} = \frac{\alpha_{33} - \alpha_{44}}{2\alpha_{44}}$
1.4 ¹ .4	6	$SW_{334} = -SW_{343} = \frac{\alpha_{33} + \alpha_{44}}{2\alpha_{44}}$
1.4 ¹ .5	6	$SW_{332} = -\frac{3\alpha_{33}}{4\alpha_{22}}$
2.5 ¹ .1	12	$SW_{332} = SW_{334} = -SW_{343} = \frac{15\alpha_{33}}{\alpha_{24}}$
2.5 ² .1	6	$SW_{332} = \frac{15\alpha_{33}}{2\alpha_{44}}$

□

В предложениях 1, 2, 3 перечислены четырехмерные локально однородные (псевдо)римановы многообразия, которые не могут иметь изотропный тензор Схоутена—Вейля. В предложении 4 перечислены локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4, тензор Схоутена—Вейля которых изотропен для любой инвариантной метрики. В предложении 5 содержатся четырехмерные однородные псевдоримановы многообразия, тензор Схоутена—Вейля которых изотропен при некоторых условиях типа «неравенство», эти многообразия вместе с соответствующими условиями содержатся в таблице 1. Пять оставшихся случаев из классификации [18] рассмотрим далее.

Случай 1.1¹.1. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [u_1, u_3] = u_2, \quad [u_2, u_4] = u_2, \quad [u_3, u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad 2\alpha_{11} = 0, \quad -\alpha_{23} = 0, \quad -2\alpha_{33} = 0, \quad -\alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$\begin{aligned} SW_{123} &= SW_{224} = -SW_{132} = -SW_{231} = -SW_{242} = \frac{(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}^2}{4\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \\ SW_{143} &= -SW_{134} = \frac{(\alpha_{13} + 2\alpha_{24})(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{8\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \\ SW_{341} &= \frac{(\alpha_{13} - 2\alpha_{24})(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{8\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \\ SW_{442} &= -\frac{(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}\alpha_{24}}{4\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}. \end{aligned}$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{3(\alpha_{13}^2 - 4\alpha_{22}\alpha_{44} + 4\alpha_{24}^2)(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^2\alpha_{22}^3}{16\alpha_{13}^6(\alpha_{44}\alpha_{22} - \alpha_{24}^2)^3}.$$

Он обращается в нуль в трех случаях:

- (i) при $\alpha_{22} = 0$; в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;
- (ii) при $\alpha_{22} = -\frac{\alpha_{13}^2 - \alpha_{24}^2}{\alpha_{44}}$; в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;
- (iii) при $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{13}^2 + 4\alpha_{24}^2}{4\alpha_{44}}$; в этом случае тензор Схоутена—Вейля является изотропным.

Случай 1.1¹.3. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [u_1, u_3] = e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad 2\alpha_{11} = 0, \quad -\alpha_{23} = 0, \quad -2\alpha_{33} = 0, \quad -\alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{132} = -SW_{123} = 2SW_{231} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{13} - \alpha_{22})}{4\alpha_{13}^2}, \quad SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{13} - \alpha_{22})}{4\alpha_{13}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = -\frac{3\alpha_{22}(\alpha_{13} - \alpha_{22})^2}{4\alpha_{13}^6};$$

он обращается в нуль в двух случаях:

- (i) при $\alpha_{13} = \alpha_{22}$; в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;
- (ii) при $\alpha_{22} = 0$, в этом случае тензор Схоутена—Вейля является изотропным.

Случай 1.1².1. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_3, \quad [e_1, u_3] = -u_1, \quad [u_1, u_3] = -u_2, \quad [u_1, u_4] = u_1, \quad [u_2, u_4] = 2u_2, \quad [u_3, u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{33} - \alpha_{11} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$\begin{aligned} SW_{114} &= SW_{334} = -SW_{141} = -SW_{343} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{4\alpha_{33}(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \\ SW_{242} &= 2SW_{123} = -SW_{224} = -SW_{231} = -2SW_{132} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)\alpha_{22}^2}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \\ SW_{442} &= 2SW_{143} = -2SW_{134} = -2SW_{341} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)\alpha_{24}\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}. \end{aligned}$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{3(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + \alpha_{33}^2)\alpha_{22}^3(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)^2}{4\alpha_{33}^6(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^3}.$$

Он обращается в нуль нулю в трех случаях:

- (i) при $\alpha_{22} = 0$; в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;
- (ii) при $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{24}^2 + 4\alpha_{33}^2}{\alpha_{44}}$; но в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;
- (iii) при $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{24}^2 - \alpha_{33}^2}{\alpha_{44}}$; в этом случае тензор Схоутена—Вейля является изотропным, если $\alpha_{24}^2 - \alpha_{33}^2 \neq 0$.

Случай 1.1².3. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_3, \quad [e_1, u_3] = -u_1, \quad [u_1, u_3] = e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{33} - \alpha_{11} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{231} = 2SW_{132} = -2SW_{123} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{22} - \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}, \quad SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{22} - \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}(\alpha_{22} - \alpha_{33})^2}{4\alpha_{33}^6}.$$

Он обращается в нуль в двух случаях:

- (i) при $\alpha_{22} = \alpha_{33}$; но в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;
- (ii) при $\alpha_{22} = 0$; в этом случае тензор Схоутена—Вейля является изотропным.

Случай 1.1².4. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_3, \quad [e_1, u_3] = -u_1, \quad [u_1, u_3] = -e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{33} - \alpha_{11} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{132} = -SW_{123} = 2SW_{231} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{22} + \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}, \quad SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{22} + \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}(\alpha_{22} + \alpha_{33})^2}{4\alpha_{33}^6}.$$

Он обращается в нуль в двух случаях:

- (i) при $\alpha_{22} = -\alpha_{33}$; в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;
- (ii) при $\alpha_{22} = 0$; в этом случае тензор Схоутена—Вейля является изотропным.

В заключение заметим, что для 186 многообразий из этой классификации [18] справедливо следующее:

- (I) 15 многообразий могут иметь изотропный тензор Схоутена—Вейля SW , причем:
 - (a) для двух из них тензор Схоутена—Вейля SW изотропен для любой инвариантной метрики;
 - (b) в остальных 13 случаях тензор Схоутена—Вейля SW является изотропным лишь при определенных условиях на инвариантную метрику, причем:
 - (i) в пяти случаях условия на инвариантную метрику являются условиями типа равенств;
 - (ii) в восьми случаях условия на инвариантную метрику являются условиями типа неравенств;
- (II) 171 многообразие не может иметь изотропный тензор Схоутена—Вейля SW , причем:
 - (a) в двух случаях квадрат длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ не равен нулю ни для какой инвариантной метрики;
 - (b) в 165 случаях все компоненты тензора Схоутена—Вейля SW равны нулю для любой инвариантной метрики;
 - (c) в четырех случаях тривиальность квадрата длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ для некоторой инвариантной метрики влечет за собой тривиальность тензора Схоутена—Вейля SW .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронов Д. С., Родионов Е. Д. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с тензором Вейля с нулевой дивергенцией// Докл. РАН. — 2010. — 432, № 3. — С. 301—303.
2. Гладунова О. П. Применение математических пакетов к вычислению инвариантных тензорных полей на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой// Вестн. Алтайск. гос. пед. ун-та. — 2006. — 6, № 2. — С. 111—115.

3. *Гладунова О. П., Оскорбин Д. Н.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли// Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2013. — № 1 (77). — С. 19–23.
4. *Гладунова О. П., Славский В. В.* Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с тензором Вейля с нулевой дивергенцией// Докл. РАН. — 2010. — № 6. — С. 736–738.
5. *Гладунова О. П., Славский В. В.* О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли// Мат. тр. — 2011. — 14, № 1. — С. 50–69.
6. *Клепиков П. Н.* Четырехмерные метрические группы Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — 16. — С. 271–330.
7. *Клепиков П. Н., Родионов Е. Д.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию алгебраических солитонов Риччи на однородных (псевдо)римановых многообразиях// Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2017. — № 4 (96). — С. 108–111.
8. *Клепикова С. В.* Изотропный тензор Вейля на четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразиях// Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2019. — № 1 (105). — С. 80–83.
9. *Клепикова С. В., Храмова О. П.* Локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4 с изотропным тензором Вейля// Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2018. — № 1 (99). — С. 99–102.
10. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н.* Локально конформно однородные псевдоримановы пространства// Мат. тр. — 2006. — 9, № 1. — С. 130–168.
11. *Храмова О. П.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях// Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2017. — № 1 (93). — С. 140–143.
12. *Храмова О. П., Клепиков П. Н., Клепикова С. В., Родионов Е. Д.* On the Schouten–Weyl tensor of 3-dimensional metric Lie groups// Тр. семин. геом. мат. модел. — 2017. — 3. — С. 21–29.
13. *Besse A.* Einstein Manifolds. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.
14. *Calvaruso G., Zaeim A.* Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds// Tôhoku Math. J. — 2014. — 66. — P. 31–54.
15. *Calvaruso G., Zaeim A.* Four-dimensional Lorentzian Lie groups// Differ. Geom. Appl. — 2013. — 31. — P. 496–509.
16. *Calvaruso G., Zaeim A.* Neutral metrics on four-dimensional Lie groups// J. Lie Theory. — 2015. — 25. — P. 1023–1044.
17. *Gray A.* Einstein-like manifolds which are not Einstein// Geom. Dedicata. — 1978. — 7. — P. 259–280.
18. *Komrakov B. B.* Einstein–Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces// Lobachevskii J. Math. — 2001. — 8. — P. 33–165.
19. *Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces// Comment. Math. Univ. Carol. — 2002. — 43, № 2. — P. 271–282.
20. *Zaeim A., Haji-Badali A.* Einstein-like pseudo-Riemannian homogeneous manifolds of dimension four// Mediter. J. Math. — 2016. — 13, № 5. — P. 3455–3468.

Клепиков Павел Николаевич
Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: klepikov.math@gmail.com



РАЗЛОЖИМО n -НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

© 2023 г. С. М. КОМОВ

Аннотация. Введено понятие разложимо n -непрерывного отображения, являющееся обобщением понятия непрерывного отображения. Доказано, что разложимо n -непрерывные отображения сохраняют такие топологические инварианты, как сепарабельность, линделёфовость, наличие счётной сети. Доказано также, что разложимо n -непрерывное отображение пространства со счётной базой на компактное хаусдорфово пространство в сторону образа сохраняет метризуемость.

Ключевые слова: непрерывность, линделёфовость, сепарабельность, метризуемость.

DECOMPOSABLE n -CONTINUOUS MAPPINGS

© 2023 S. M. KOMOV

ABSTRACT. In this paper, we introduce the concept of a decomposable n -continuous mapping, which is a generalization of the concept of a continuous mapping. We prove that decomposable n -continuous mappings preserve such topological invariants as the separability, the Lindelöf property, and the presence of a countable net. We also prove that a decomposable n -continuous mapping of a space with a countable base onto a compact Hausdorff space preserves the metrizability.

Keywords and phrases: continuity, Lindelöf property, separability, metrizability.

AMS Subject Classification: 54C08

Определение 1. Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y назовём *разложимо n -непрерывным*, где n — положительное целое число, если можно представить X в виде объединения n его подпространств таким образом, что сужение отображения f на каждое из этих подпространств непрерывно.

Пусть X и Y — топологические пространства, f — отображение пространства X на пространство Y . Сужение отображения f на подпространство A пространства X будем обозначать через $f|_A$.

Заметим, что всякое непрерывное отображение является разложимо 1-непрерывным. Кроме того, так как в приведённом выше определении не требуется, чтобы подпространства пространства X были различны, каждое непрерывное отображение является разложимо n -непрерывным при любом целом положительном n .

Однако не каждое разложимо n -непрерывное отображение является непрерывным.

Примером не непрерывного, но разложимо n -непрерывного отображения является функция Дирихле.

Пример 1. Обозначим через $\mathbb{R}$ вещественную прямую с обычной топологией, через $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, а через $\mathcal{U}$ — дискретное топологическое пространство, построенное на множестве $\{0, 1\}$.

Рассмотрим отображение $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$, определённое следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (1)$$

Легко показать, что сужения $D|_{\mathbb{Q}}$ и $D|_{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$ отображения D на, соответственно, подпространства $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ пространства $\mathbb{R}$ являются непрерывными отображениями. Однако само отображение D не является непрерывным отображением пространства $\mathbb{R}$ в пространство $\mathcal{U}$.

Таким образом, понятие разложимо n -непрерывного отображения является расширением понятия непрерывного отображения, но к нему не сводится.

Напомним определения базы и сети топологического пространства.

Определение 2. Семейство $\mathcal{B}$ открытых в топологическом пространстве X множеств называется базой топологического пространства X , если каждое непустое открытое подмножество пространства X можно представить в виде объединения некоторого подсемейства семейства $\mathcal{B}$.

Если из определения базы топологического пространства убрать требование открытости элементов семейства $\mathcal{B}$, то получим определение сети топологического пространства. Впервые понятие сети топологического пространства было сформулировано А. В. Архангельским в [1].

Приведём теперь несколько теорем о разложимо n -непрерывных отображениях пространств со счётными базами и сетями.

Теорема 1. *При каждом разложимо n -непрерывном отображении пространства со счётной сетью образ тоже имеет счётную сеть.*

Доказательство. Пусть X и Y — топологические пространства; X имеет счётную сеть; $A_1, \dots, A_n$ — подпространства пространства X , такие, что пространство X представимо в виде объединения семейства $\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$; f — такое отображение пространства X на пространство Y , что сужения $f|_{A_1}, \dots, f|_{A_n}$ являются непрерывными отображениями. Рассмотрим пространство A_i , где i — некоторое целое число в промежутке от единицы до n . Так как подпространство топологического пространства со счётной сетью тоже обладает счётной сетью, каждое A_i имеет счётную сеть. Тогда, так как образ пространства со счётной сетью имеет счётную сеть, каждое подпространство вида $f(A_i)$ пространства Y имеет счётную сеть. Тогда, так как пространство Y представимо в виде объединения семейства $\{f(A_i) : 1 \leq i \leq n\}$, и, так как любое пространство, представимое в виде объединения конечного числа пространств со счётной сетью, имеет счётную сеть, пространство Y имеет счётную сеть. $\square$

Так как база топологического пространства является также и его сетью, справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *При каждом разложимо n -непрерывном отображении пространства со счётной базой образ имеет счётную сеть.*

Напомним определения сепарабельных и линделёфовых топологических пространств.

Определение 3. Топологическое пространство X называется сепарабельным, если существует счётное всюду плотное в X подмножество пространства X .

Определение 4. Топологическое пространство X называется линделёфовым, если из каждого его открытого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.

Пользуясь теоремой 2 и тем фактом, что каждое топологическое пространство со счётной сетью сепарабельно и наследственно сепарабельно, легко доказать следующее:

Теорема 3. *При разложимо n -непрерывном отображении пространства со счётной сетью образ будет сепарабельным и наследственно сепарабельным пространством.*

С помощью теоремы 2 и того факта, что пространство со счётной сетью линделёфово и наследственно линделёфово, легко доказать следующую теорему:

Теорема 4. *При разложимо n -непрерывном отображении пространства со счётной сетью образ будет линделёфовым и наследственно линделёфовым пространством.*

Докажем ещё одно утверждение:

Теорема 5. *Если f — разложимо n -непрерывное отображение пространства X со счётной базой на компактное хаусдорфово пространство Y , то Y — пространство со счётной базой.*

Доказательство. По теореме 1 пространство Y имеет счётную сеть. Так как Y — компактное хаусдорфово пространство согласно утверждению о том, что каждое компактное хаусдорфово пространство со счётной сетью имеет счётную базу (см. [1]), пространство Y имеет счётную базу. Что и требовалось доказать. $\square$

В 1924 г. в [2] П. С. Урысон доказал следующую теорему.

Теорема 6. *Компактное хаусдорфово пространство метризуемо в том и только в том случае, если оно имеет счётную базу.*

С помощью последних двух теорем доказывается следующее утверждение.

Теорема 7. *Если f — разложимо n -непрерывное отображение пространства X со счётной базой на компактное хаусдорфово пространство Y , то Y — метризуемое пространство.*

Таким образом, при разложимо n -непрерывных отображениях сохраняются некоторые топологические инварианты. Кроме того, как видно, построение разложимо n -непрерывного отображения между топологическими пространствами может являться средством исследования топологических свойств образа при этом отображении. Поэтому данное понятие представляет интерес для дальнейшего изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский А. В. Аддиционная теорема для веса множеств, лежащих в бикомпактах // Докл. АН СССР. — 1959. — 126, № 4. — С. 239–241.
2. Urysohn P. Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume // Math. Ann. — 1924. — 92. — P. 275–293.

Комов Сергей Михайлович

Московский педагогический государственный университет

E-mail: roddniki34@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 69–78
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-69-78

УДК 514.13

ЗАДАЧА О ТЕНИ И ИЗОМЕТРИЧЕСКОЕ ВЛОЖЕНИЕ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

© 2023 г. А. В. КОСТИН

Аннотация. Задача о тени для оришаров оказывается некоторым образом связанной с задачей глобального изометрического вложения поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны в трехмерное евклидово пространство. Евклидовы поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны глобально изометричны частям касательных конусов к орисферам в трехмерном пространстве Лобачевского. В работе меридианы евклидовых псевдосферических поверхностей вращения выражаются через метрические характеристики в гиперболическом пространстве, а именно через расстояние от вершины касательного конуса до орисферы или через расстояние от полюса вершины до орисферы.

Ключевые слова: задача о тени, поверхность постоянной кривизны, псевдосфера, орисфера, пространство Лобачевского.

SHADOW PROBLEM AND ISOMETRIC EMBEDDINGS OF PSEUDOSPHERICAL SURFACES

© 2023 А. V. KOSTIN

ABSTRACT. The shadow problem for horospheres is related to the problem of global isometric embedding of surfaces of revolution of constant negative curvature into the three-dimensional Euclidean space. Euclidean surfaces of revolution of constant negative curvature are globally isometric to parts of tangent cones of horospheres in the three-dimensional Lobachevsky space. In this work, meridians of Euclidean pseudospherical surfaces of revolution are expressed in terms of metric characteristics in the hyperbolic space, namely, in terms of the distance from the vertex of the tangent cone to the horosphere or through the distance from the polar of the vertex to the horosphere.

Keywords and phrases: shadow problem, surface of constant curvature, pseudosphere, horosphere, Lobachevsky space.

AMS Subject Classification: 53A35, 53B30

1. Введение. Задача о тени была поставлена Г. Худайбергановым в 1982 г. в следующей формулировке (см. [8]): какое минимальное число шаров с центрами на сфере n -мерного евклидова пространства и радиусами, меньшими радиуса сферы, достаточно для того, чтобы каждая прямая, проходящая через центр сферы, пересекалась хотя бы с одним из этих шаров?

В двумерном случае Г. Худайберганов доказал, что для решения задачи достаточно двух кругов. В [8] также было высказано предположение, что в n -мерном случае «для создания тени в центре сферы» будет достаточно n шаров. Это предположение оказалось ошибочным. В 2015 г. в [1] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская и М. В. Стефанчук решили задачу о тени в постановке Худайберганова в n -мерном случае. Они доказали, что в n -мерном евклидовом пространстве

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета.

при $n > 2$ минимальное число шаров с центрами на евклидовой сфере и радиусами, меньшими радиуса сферы, обеспечивающих создание тени в центре сферы, равно $n + 1$. Идея доказательства существования набора из $n + 1$ шаров, обеспечивающего создание тени, следующая. В сферу вписывается правильный симплекс и рассматриваются шары с центрами в его вершинах и радиусами, равными половине ребра. Замкнутые шары создают тень в центре сферы, но имеют общие точки касания. После этого берётся достаточно малое ε . Пусть a — длина ребра. Заменяем радиусы шаров на $a/2 + \varepsilon$, $a/2 - \varepsilon/2$, ..., $a/2 - \varepsilon/2^n$, и добьёмся, чтобы шары снова касались друг друга. Исходный правильный симплекс немного деформируется и перейдёт в симплекс с вершинами, близкими к исходному. Конфигурация шаров с разными радиусами обеспечит создание тени в центре сферы, описанной около нового симплекса. Решение задачи о тени в n -мерном случае описано также в обзорной статье Ю. Б. Зелинского, И. Ю. Выговской и К. Х. Дакхила [2]. Там же описано решение ряда смежных задач, полученное к тому времени, и поставлено несколько новых.

Задача о тени является частным случаем задачи о нахождении минимальных условий, обеспечивающих принадлежность точки обобщенно-выпуклой оболочке семейства множеств. Соответствующие определения приведем с учетом того, что пространство, в котором будут рассматриваться все фигурирующие множества, заменим на гиперболическое. В пространстве Лобачевского кроме сфер есть еще два типа их аналогов, имеющие группы симметрий той же размерности. Это эквидистантные поверхности и орисферы. Внутренняя геометрия эквидистантных поверхностей гиперболическая, орисфер — евклидова. Рассмотрение конфигураций ограниченных ими областей является первым естественным обобщением задачи о тени в случае гиперболического пространства.

Под n -мерным гиперболическим пространством H^n , или n -мерным пространством Лобачевского, в работе всюду понимается пространство, глобально изометричное полусфере мнимого радиуса $n + 1$ -мерного псевдоевклидова пространства с метрикой

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2.$$

Определение 1. Множество U из n -мерного пространства Лобачевского H^n называется m -выпуклым относительно произвольной фиксированной точки $M \in H^n \setminus U$, если существует m -мерная плоскость, проходящая через точку M и не имеющая с множеством U общих точек.

Пересечение любого семейства множеств пространства Лобачевского, m -выпуклых относительно некоторой точки M , является m -выпуклым относительно этой точки M .

Определение 2. Множество $U \in H^n$, m -выпуклое относительно каждой не принадлежащей этому множеству точки, называется m -выпуклым.

Это определение также удовлетворяет аксиоме выпуклости: пересечение m -выпуклых множеств само является m -выпуклым.

Определение 3. Минимальное m -выпуклое множество, содержащее множество $U \in H^n$, называется m -выпуклой оболочкой множества U .

Понятие m -полувыпуклости является обобщением рассматриваемого понятия m -выпуклости.

Определение 4. Множество U , принадлежащее n -мерному пространству Лобачевского H^n , называется m -полувыпуклым относительно некоторой точки $M \in H^n \setminus U$, если существует m -мерная полуплоскость, содержащая точку M , и не имеющая с множеством U общих точек.

Определение 5. Эквидистантой гиперплоскости n -мерного пространства Лобачевского называется множество точек этого пространства, удаленных на фиксированное расстояние h от гиперплоскости. Это расстояние h называют высотой эквидистанты, а саму гиперплоскость называют базой эквидистанты.

«Евклидово» доказательство Зелинского и соавторов для $n + 1$ шара остаётся в силе и для шаров в n -мерном пространстве Лобачевского. Метрические характеристики для такой конфигурации в гиперболическом пространстве приведены в работе [12].

Фактически эта же идея остаётся в силе, если в пространстве Лобачевского вместо шаров рассматривать «эквишары», т.е. области, ограниченные эквидистантами гиперплоскостей n -мерного пространства Лобачевского. Центры «эквишаров» будут находиться в идеальной области расширенного пространства Лобачевского. Радиус сферы с центром в собственной точке O расширенного пространства Лобачевского в этом случае будет выражаться комплексным числом. Радиусы шаров тоже будут комплексными. Если оставаться в рамках метрической геометрии, вместо комплексных радиусов шаров можно рассматривать расстояния от точки O до полюс центров шаров. В качестве «эквишаров» можно рассматривать либо области, ограниченные двумя полостями эквидистанты гиперплоскости, либо области, ограниченные ближней к центру O полостью эквидистанты и гиперплоскостью, являющейся базой эквидистанты. Высоты эквидистант в конфигурации, создающей тень, различны.

2. Задача о тени для оришаров.

Определение 6. Орисферой (или гиперорисферой) и n -мерного пространства Лобачевского называется гиперповерхность этого пространства, ортогонально пересекающая (гипер)связку параллельных прямых этого пространства. Центр (гипер)связки называют несобственным центром орисферы. Область, ограниченную орисферой, называют оришаром. Прямые связки параллелей называют осями орисферы. Иначе орисферу можно определить как (гипер)поверхность уровня функции Буземана по лучу на ее оси, а оришар как множество подуровня функции Буземана.

При доказательстве достаточности $n + 1$ оришара для принадлежности некоторой точки их 1-выпуклой оболочке рассуждения, аналогичные рассуждениям для шаров и «эквишаров» не проходят. Покажем это. Рассмотрим семейство из $n + 1$ касающегося оришара с несобственными центрами в бесконечно удаленных вершинах правильного симплекса. Такой симплекс можно получить предельным переходом из правильного симплекса, устремляя длину ребра к бесконечности. При этом равные касающиеся шары с центрами в вершинах симплекса перейдут в оришары. Любая прямая, проходящая через центр симплекса, будет пересекаться хотя бы с одним из замкнутых оришаров. Но, в отличие от исходной постановки задачи, оришары в этой конфигурации будут касаться друг друга. Если по аналогии с решением задачи для шаров чуть деформировать конфигурацию, сместив бесконечно удаленные вершины симплекса, то в общем случае при $n > 2$ получим не изометричный симплекс. Но если далее добиться, чтобы оришары снова стали касаться, то симплекс с вершинами в несобственных центрах оришаров снова превратится в правильный, т.е. в симплекс с той же группой симметрий, что и обычный правильный симплекс с вершинами в собственной области пространства Лобачевского. Особенно наглядно это представляется в модели Пуанкаре в полупространстве. Положим кривизну пространства Лобачевского равной -1 . В модели Пуанкаре в евклидовом полупространстве метрика гиперболического пространства примет вид:

$$ds^2 = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2. \quad (1)$$

Орисферы максимальной размерности в модели пространства Лобачевского с метрикой (2) изображаются евклидовыми гиперплоскостями, параллельными гиперплоскости $x_n = 0$ и евклидовыми гиперсферами, касающимися этой гиперплоскости. Если одна из орисфер, ограничивающих оришары, в этой модели изображается (гипер)плоскостью $z = c = \text{const}$, то остальные касающиеся ее орисферы будут изображаться равными попарно касающимися евклидовыми сферами с центрами в плоскости $z = c/2$. Поэтому несобственные центры их «соберутся» в вершины правильного симплекса. Это обусловлено тем, что все орисферы пространства Лобачевского глобально изометричны между собой.

«Освещающая» точка в дальнейшем будет обозначаться через M . В двумерном случае легко доказывается, что двух непересекающихся открытых или замкнутых орикругов достаточно для того, чтобы выбранная точка плоскости Лобачевского принадлежала их 1-выпуклой оболочке. Можно просто через выбранную точку провести две неортогональные прямые, и в пару образованных ими смежных углов вписать по орикругу. Затем в случае открытых орикругов один из

них чуть приблизить к точке пересечения прямых. Аналогично доказывается, что трех открытых или замкнутых непересекающихся орикругов достаточно, чтобы выбранная точка M принадлежала их 1-полувыпуклой оболочке, т.е. чтобы каждый луч с началом в точке M пересекался хотя бы с одним из орикругов. Если потребовать, чтобы орикруги находились на равном (ненулевом) расстоянии от выбранной точки M , то минимальное число орикругов, обеспечивающих принадлежность точки M их 1-выпуклой оболочке, будет равно трем. Нетрудно доказать, что в случае равной удаленности никакого конечного числа непересекающихся орикругов недостаточно для принадлежности точки M их 1-полувыпуклой оболочке.

Если оришары в H^3 могут касаться, то четырех оришаров, удаленных от точки M на одно и то же расстояние, достаточно для принадлежности точки M их 1-выпуклой оболочке. Если же оришары не имеют общих точек, то, опираясь на результаты статьи [3], для трехмерного случая можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Никакого конечного числа непересекающихся оришаров, находящихся от выбранной точки M трехмерного пространства Лобачевского H^3 на равном расстоянии, недостаточно для того, чтобы точка M принадлежала их 1-выпуклой (тем более, 1-полувыпуклой) оболочке.*

Доказательство. Возьмем n -мерное пространство Лобачевского кривизны $K = -1$ в модели Пуанкаре в евклидовом единичном шаре

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1. \quad (2)$$

Метрика гиперболического пространства в этой модели имеет следующий вид:

$$ds^2 = \left(4 \sum_{i=1}^n dx_i^2 \right) / \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2. \quad (3)$$

Точку M поместим в центр абсолюта, задаваемого уравнением

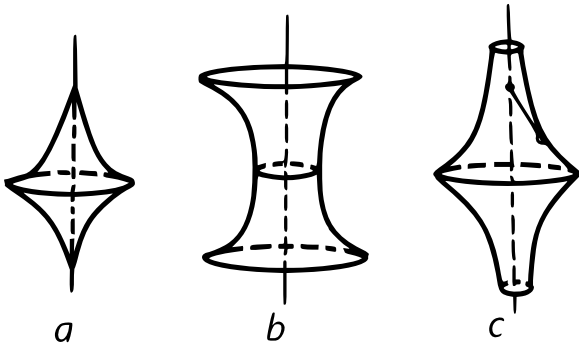
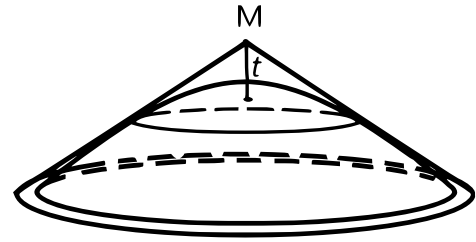
$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

Оришары пространства Лобачевского в этой модели изображаются евклидовыми шарами, касающимися абсолюта. Отсюда следует, что задача исследования принадлежности одной выбранной точки пространства Лобачевского 1-выпуклой оболочке семейства оришаров может быть переформулирована в евклидовых терминах: какого числа непересекающихся шаров, касающихся внутренним образом сферы с центром в точке M евклидова пространства и не содержащих точку M , достаточно для того, чтобы точка M принадлежала их 1-выпуклой оболочке. Равные шары при этом будут играть роль равноудаленных от точки M оришаров в модели Пуанкаре в шаре. Оришары пространства Лобачевского, удаленные от точки M на равные расстояния d , будут изображаться евклидовыми шарами, удаленными от точки M на евклидовы расстояния

$$\frac{e^d}{e^d + 1}. \quad (4)$$

Из (4) следует, что евклидовы радиусы этих шаров будут равны $1/(e^d + 1)$. В [3] доказано, что никакого конечного числа равных шаров, не содержащих центр евклидовой сферы и имеющих центры на этой сфере, недостаточно для того, чтобы центр сферы принадлежал их 1-выпуклой оболочке. Отсюда следует, что и никакого числа оришаров, удаленных от фиксированной точки пространства Лобачевского на ненулевые равные расстояния, недостаточно для принадлежности этой точки их 1-выпуклой оболочке. $\square$

Если же расстояния от точки M могут быть различными, то для принадлежности этой точки $M \in H^3$ 1-выпуклой оболочке непересекающихся открытых или замкнутых оришаров, не содержащих эту точку, достаточно четырех оришаров. Необходимость в настоящее время является открытым вопросом. В работе [13] приведены конфигурации из девяти одновременно открытых или одновременно замкнутых непересекающихся оришаров, обеспечивающих принадлежность

Рис. 1. Поверхности Миндинга в E^3 .Рис. 2. Вложение конической псевдосферической поверхности в H^3 .

выбранной точки их 1-полувыпуклой оболочке. Там же приведена конфигурация из трех замкнутых и пяти открытых оришаров, обеспечивающих принадлежность выбранной точки их 1-полувыпуклой оболочке. Точная оценка минимального числа оришаров, обеспечивающих принадлежность точки их 1-полувыпуклой оболочке, тоже является открытой проблемой.

Поверхности вращения постоянной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве, речь о которых пойдет ниже, найдены Ф. Миндингом [15–17] (см. также [11]). Вид их изображен на рис. 1. Сегмент поверхности a после разреза по меридиану отображается на круговой сектор, сегмент поверхности b — на эквидистантный сектор, сегмент поверхности c — на орициклический сектор. Необходимые для чтения статьи сведения из геометрии Лобачевского можно найти в [7].

3. Основные результаты. С задачей о тени для оришаров косвенно оказывается связанной задача изометрического вложения поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны в евклидово пространство. Для общности картины «освещающую» точку M нужно помещать в разные области расширенного трехмерного гиперболического пространства. Ф. Миндингом найдены три типа поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны. Все эти поверхности Э. Бельтрами назвал псевдосферическими.

Каждая псевдосферическая поверхность вращения глобально изометрична касательному конусу к орисфере в трехмерном пространстве Лобачевского. В работе найдены выражения для меридианов поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны через расстояния от вершины касательного конуса до орисферы, либо через расстояние от полярной вершины, если вершина конуса находится в идеальной области расширенного трехмерного пространства Лобачевского, до орисферы. Глобальная изометричность касательного конуса доказывается для случая расположения вершины на бесконечности. Для двух других случаев доказательство может быть проведено аналогично.

4. Коническая псевдосферическая поверхность вращения и касательный конус с вершиной в собственной области трехмерного пространства Лобачевского.

Теорема 2. Пусть ω — некоторая фиксированная орисфера в трехмерном пространстве Лобачевского H^3 кривизны $K = -1$, а точка M не принадлежит оришару, ограниченному орисферой ω . Пусть конус с вершиной в точке M касается орисферы ω по линии γ . Тогда если расстояние от точки M до орисферы ω равно t (см. рис. 1), то часть касательного конуса от точки M до линии γ глобально изометрична евклидовой поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны, меридиан которой в декартовых координатах x, y, z задается следующим образом:

$$z = \int \sqrt{\frac{e^{2t}(1-x^2)-1}{x^2e^{2t}+1}} dx, \quad y = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Меридиан евклидовой конической поверхности вращения постоянной кривизны $K = -1$ задается соотношениями

$$z = \int \sqrt{\frac{(1-b^2)-x^2}{x^2+b^2}} dx, \quad y = 0, \quad b > 0. \quad (6)$$

Элементарными средствами определяется, что радиус максимальной параллели поверхности равен $\sqrt{1-b^2}$. Длина этой параллели $2\pi\sqrt{1-b^2}$.

Трехмерное пространство Лобачевского рассмотрим в модели Пуанкаре в евклидовом пространстве. Метрика гиперболического пространства в этой модели в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}. \quad (7)$$

Зададим орисферу ω уравнением $x_3 = 1$. У точек, не принадлежащих оришару с границей ω , координата x_3 будет меньше единицы. Пусть вершина касательного конуса к орисфере ω лежит в плоскости $x_2 = 0$. Зададим одну из образующих конуса в этой плоскости следующим образом:

$$x_1 = \cos(u), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sin(u). \quad (8)$$

Пусть вершина M конуса в (8) соответствует значению параметра $u = u_0$, где $u_0 \in (0, \pi/2)$. Тогда, учитывая, что расстояние от вершины до орисферы ω равно t , имеем:

$$\int_{\sin(u_0)}^1 \frac{dx_3}{x_3} = t.$$

Отсюда $t = -\ln(\sin(u_0))$. Хорошо известно, что внутренняя геометрия орисфер пространства Лобачевского является евклидовой. В модели Пуанкаре это проверяется элементарным образом, при помощи ограничения метрики (7) на поверхность ω : $x_3 = 0$. Отсюда $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. Используя евклидовость внутренней геометрии орисферы, получаем, что лучи с началом в точке M на орисфере ω освещают круг радиуса $\cos(u_0)$. Из равенств $\sqrt{1-b^2} = \cos(u_0)$ и $t = -\ln(\sin(u_0))$ получим $b = e^{-2t}$. Подставив отсюда b в (6), получим выражение (5) меридиана евклидовой конической псевдосферической поверхности. $\square$

5. Псевдосфера Бельтрами—Миндинга и касательный конус с вершиной в бесконечно удаленной точке трехмерного пространства Лобачевского.

Теорема 3. Пусть вершина касательного конуса к орисфере находится на абсолюте трехмерного пространства Лобачевского. Тогда часть касательного конуса до линии касания глобально изометрична одной полости псевдосферы Бельтрами—Миндинга.

Доказательство. Хорошо известно, что псевдосфера Бельтрами—Миндинга кривизны $K = -1$ после разреза по меридиану отображается на орициклический сектор с длиной дуги граничного орицикла, равной 2π . Орисферу ω евклидовой инверсией с центром в точке $O(0,0,0)$ и евклидовым радиусом, равным $\sqrt{2}$, переведем в орисферу ω_1 , задаваемую уравнением

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3 - 1)^2 = 1.$$

Такая инверсия служит симметрией пространства Лобачевского относительно плоскости. Вершину касательного конуса поместим в бесконечно удаленную точку пространства. Сам касательный конус до линии касания с орисферой ω_1 можно задать следующим образом:

$$x_1 = \cos(u), \quad x_2 = \sin(u), \quad x_3 = v \geq 1. \quad (9)$$

Ограничим метрику (7) на касательный конус (9). Получим, что индуцированная метрика на конусе примет вид

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2},$$

т.е. локально совпадет с метрикой гиперболической плоскости кривизны $K = -1$. Учитывая, что $v \geq 1$ и длина линии касания конуса и орисферы ω_1 в точности равна 2π , убеждаемся, что такой

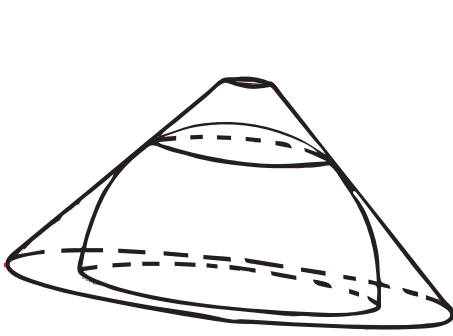
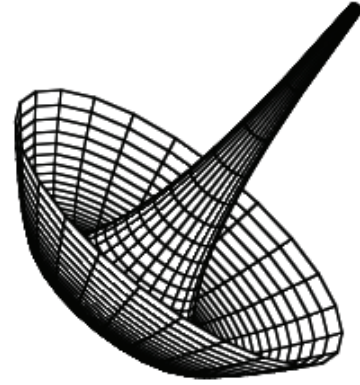
Рис. 3. Вложение псевдосферы в H^3 .

Рис. 4. «Полная» псевдосфера в плоском пространстве.

касательный конус до линии касания глобально изометричен одной полости псевдосферы Бельтрами—Миндинга. Непосредственно изоморфизм поверхности (9) на одну полость псевдосферы Бельтрами—Миндинга в евклидовом пространстве с метрикой $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ можно осуществить по равенству локальных координат, параметризовав псевдосферу координатами карты Пуанкаре:

$$x_1 = \frac{1}{v} \cos(u), \quad x_2 = \frac{1}{v} \sin(u), \quad x_3 = -\sqrt{1 - \frac{1}{v^2}} + \ln \left(v \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{v^2}} \right) \right). \quad \square$$

На рис. 3 изображена абстрактная картинка сегмента орисферы и касательного конуса в H^3 . Линия касания разделяет части конуса, изометрически вкладываемые в евклидово и псевдоевклидово пространства. Касательный конус к орисфере в случае, когда вершина конуса удалена от орисферы на бесконечное расстояние, можно рассматривать как поверхность, полученную вращением прямой вокруг параллельной ей прямой. Причем изначально пару параллелей можно выбрать произвольно, так как любая пара параллельных прямых в пространстве Лобачевского движением переводится в любую другую пару параллелей. После нужно рассмотреть вращение одной из прямых вокруг другой и в полученную поверхность вписать орисферу.

Замечание 1. Часть касательного конуса, для которой $x_3 \leq 1$, глобально изометрична одному из псевдоевклидовых аналогов псевдосферы, задаваемому в пространстве с метрикой

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$$

следующим образом (см. [4]):

$$x_1 = \operatorname{ch}(u) \sin(v), \quad x_2 = \operatorname{ch}(u) \cos(v), \quad x_3 = \operatorname{sh}(u) - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(u)). \quad (10)$$

Меридиан поверхности является одним из аналогов трактрисы:

$$x_1 = \operatorname{ch}(u), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \operatorname{sh}(u) - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(u)).$$

Он обладает постоянным вещественным отрезком касательной до оси вращения Ox_3 . В этом нетрудно убедиться непосредственным подсчетом. В плоскости $x_2 = 0$ уравнение касательной в точке M_0 , определяемой параметром u_0 , будет иметь следующий вид:

$$\frac{x_1 - \operatorname{ch}(u_0)}{\operatorname{sh}(u_0)} = \frac{x_3 - \operatorname{sh}(u_0) + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(u_0))}{\operatorname{ch}(u_0) - 1/\operatorname{ch}(u_0)}. \quad (11)$$

Положив в (11) $x_1 = 0$, найдем координаты точки M_1 пересечения касательной с осью Ox_3 :

$$M_1(0, 0, \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(u_0))).$$

Отсюда получим:

$$M_0 M_1^2 = (\operatorname{ch}(u_0))^2 - (\operatorname{sh}(u_0))^2. \quad (12)$$

Из (12) следует, что длина отрезка $M_0 M_1$ в метрике $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$ будет равна единице. Как и евклидова трактриса, этот ее псевдоевклидов аналог имеет точку возврата. Кроме того, каждая ветвь этой кривой имеет изотропную асимптоту.

Введем на поверхности (10) другие локальные координаты:

$$u^1 = v, \quad u^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}(u)}.$$

Уравнения поверхности примут следующий вид:

$$x_1 = \frac{\sin(u^1)}{u^2}, \quad x_2 = \frac{\cos(u^1)}{u^2}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{1 - (u^2)^2}}{u^2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1 - (u^2)^2}}{u^2}\right).$$

Индукцированная на поверхности метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2 + (du^2)^2}{(u^2)^2}. \quad (13)$$

Одну полость поверхности в конформной карте Пуанкаре с координатами u^1, u^2 бесконечно-листно накрывает область $0 < u^2 \leq 1$. Накрытие строится факторизацией по действию дискретной группы Z орициклических вращений. В качестве образующей группы берется орициклическое вращение, моделируемое евклидовым параллельным переносом параллельно абсолюту на расстояние 2π . Поскольку одну полость псевдосферы Бельтрами—Миндинга кривизны $K = -1$ бесконечно-листно накрывает орикруг $u^2 > 1$, данная поверхность действительно осуществляет изометрическое вложение в плоское пространство продолжения псевдосферы Бельтрами—Миндинга. Если в трехмерном пространстве с координатами x_1, x_2, x_3 внутри цилиндра $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$ взять евклидову метрику:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

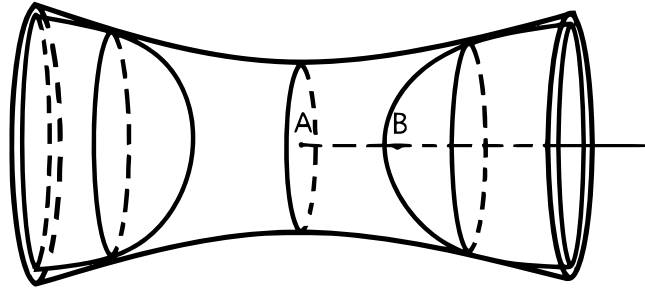
а вне его — псевдоевклидову метрику:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2,$$

то в такое пространство с кусочно-регулярной метрикой изометрически вкладывается полная псевдосфера, т.е. весь касательный конус к орисфере: и до, и после линии касания конуса с орисферой. Такое изометрическое вложение изображено на рис. 4. К плоскости ребра возврата и евклидова, и псевдоевклидова части поверхности подходят тангенциально. И евклидова, и псевдоевклидова ветвь меридиана такой скомпонованной поверхности имеют одинаковую длину отрезка касательной до их общей оси вращения.

О других псевдоевклидовых аналогах псевдосферы и свойствах асимптотических линий на них см. [4, 6, 14]. Винтовые поверхности в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, обобщающие псевдоевклидовы аналоги псевдосферы, рассмотрены в работе автора [5]. Регулярные изометрические вложения класса C^∞ «полной» псевдосферы, т.е. всей лежащей в собственной области части конуса с вершиной на абсолюте, и «полной катушки» в 7-мерное евклидово и 8-мерное сферическое пространства построены Д. Бланушей [9, 10].

6. Катушка Миндинга и касательный конус с вершиной в идеальной области расширенного трехмерного гиперболического пространства. Если трехмерное пространство Лобачевского рассматривать в проективной модели, то часть проективного пространства, внешняя по отношению к абсолюту, называется идеальной областью пространства Лобачевского. В ней реализуется псевдориманова геометрия с индефинитной метрикой постоянной кривизны. Пусть орисфера ω' лежит в собственной области пространства Лобачевского. Поместим вершину касательного к орисфере ω' конуса в идеальную область. Тогда в собственной области найдется еще одна орисфера ω'' , вписанная в этот конус.

Рис. 5. Вложение катушки Миндинга в H^3 .

Теорема 4. Если расстояние от поляры вершины конуса, лежащей в идеальной области расширенного трехмерного пространства Лобачевского, до орисферы ω' равно t , то часть касательного конуса между линиями касания с орисферами ω' и ω'' глобально изометрична катушке Миндинга с меридианом, задаваемым в декартовых координатах следующим образом:

$$z = \int \sqrt{\frac{1 + e^{-2t} - x^2}{x^2 - e^{-2t}}} dx, \quad y = 0, \quad (14)$$

Доказательство. На рис. 5 точка A оси конуса лежит в поляре его вершины, а точка B — на орисфере, касающейся этого конуса. Ось конуса является также одной из осей, касающейся его орисферы. $AB = t$ — расстояние от поляры вершины конуса до касающейся его орисферы. Часть конуса, лежащую в собственной области пространства Лобачевского, можно рассматривать как поверхность, полученную вращением прямой вокруг расходящейся с ней прямой.

Меридиан катушки Миндинга в декартовых координатах задается следующим образом:

$$z = \int \sqrt{\frac{(1 + b^2) - x^2}{x^2 - b^2}} dx, \quad y = 0, \quad b > 0. \quad (15)$$

Обратимся опять к модели Пуанкаре пространства Лобачевского в евклидовом полупространстве. Орисферу ω' зададим уравнением $x_3 = 0$, а осевое сечение конуса — уравнением $x_2 = 0$. Часть образующей, лежащую в собственной области, зададим следующим образом:

$$x_1 = \sin(u), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \cos(u). \quad (16)$$

Поляра идеальной вершины конуса будет пересекать часть конуса, лежащую в собственной области, по горловому сечению, т.е. по сечению минимального радиуса. Аналогично тому, как это было сделано для конической поверхности, можно показать, что если расстояние от поляры до орисферы ω' равно t , то поляра пересечет образующую (16) в точке

$$\left(\arcsin \frac{1}{1 + e^{-2t}}, 0, 0 \right),$$

а часть конуса между орисферами ω' и ω'' будет соответствовать катушке Миндинга с меридианом (15), для которого $b = e^{-t}$. Подставив это выражение в уравнения евклидова меридиана, получим его представление (14) через расстояние от поляры вершины конуса до касательной орисферы. Орисфера ω'' будет изображаться сферой

$$(x_1 - \sqrt{1 + e^{-2t}})^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}e^{-2t} \right)^2 = \frac{1}{4}e^{-4t},$$

инверсной орисфере $x_3 = 0$ относительно сферы S^2 с центром в точке $(\sqrt{1 + e^{-2t}}, 0, 0)$ и радиусом e^{-t} . Такая инверсия моделирует симметрию пространства Лобачевского относительно плоскости, изображаемой половиной сферы S^2 , а сама плоскость (евклидова полусфера) моделирует поляру вершины конуса, лежащей в идеальной области расширенного трехмерного пространства Лобачевского. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени// Укр. мат. ж. — 2015. — 67, № 12. — С. 1658–1666.
2. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхил Х. К. Задача о тени и смежные задачи// Proc. Int. Geometry Center. — 2016. — 9, № 3-4. — С. 50–58.
3. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхил Х. К. Задача о тени для шаров фиксированного радиуса// Укр. мат. вісн. — 2016. — 13, № 4. — С. 599–602.
4. Костин А. В. Об асимптотических линиях на псевдосферических поверхностях// Владикавказ. мат. ж. — 2019. — 21, № 1. — С. 16–26.
5. Костин А. В. О геликоидах Дини в пространстве Минковского// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 180. — С. 50–57.
6. Костин А. В. Эволюты меридианов и асимптотические на псевдосферах// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 169. — С. 23–30.
7. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
8. Худайбергенов Г. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке семейства шаров. — Деп. в ВИНИТИ 21.02.1982, № 1772.
9. Blanusha D. C^∞ -Isometric imbeddings of the hyperbolic plane and of cylinders with hyperbolic metric in spherical spaces// Ann. Math. Pura Appl. — 1962. — 57. — P. 321–337.
10. Blanusha D. C^∞ -Isometric imbeddings of cylinders with hyperbolic metric in Euclidean 7-space// Glas. Mat.-Fiz. Astron. — 1956. — 11, № 3-4. — P. 243–246.
11. Klein F. Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. — Berlin, 1928.
12. Kostin A. V. Problem of shadow in the Lobachevskii space// Ukr. Math. J. — 2019. — 70, № 11. — P. 1758–1766.
13. Kostin A. V. Some generalisations of the shadow problem in the Lobachevsky space// Ukr. Math. J. — 2021. — 73, № 1. — P. 61–68.
14. Костин А. В. Асимптотические на псевдосферах и угол параллельности// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 6. — С. 25–34.
15. Minding F. Über die Biegung krummer Flächen// J. Reine Angew. Math. — 1838. — 18. — P. 365–368.
16. Minding F. Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse// J. Reine Angew. Math. — 1839. — 19. — P. 370–387.
17. Minding F. Beiträge zur Theorie der kürzerten Linien auf krummen Flächen// J. Reine Angew. Math. — 1840. — 20. — P. 323–327.

Костин Андрей Викторович

Елабужский институт Казанского федерального университета

E-mail: kostin_andrei@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 79–83
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-79-83

УДК 517.954

КОРРЕКТНЫЕ КРАЕВЫЕ ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2023 г. А. А. МАКАРОВ, И. Г. НИКОЛЕНКО

Аннотация. Исследованы системы дифференциальных уравнений в частных производных, для которых существуют корректные двухточечные задачи в пространстве Л. Шварца. В частности, к таким системам относятся системы с эрмитовой матрицей $P(s)$, системы, корректные по Петровскому, а также системы с одной пространственной переменной.

Ключевые слова: краевая задача, преобразование Фурье, пространство Шварца, разрешающая матрица.

WELL-POSED BOUNDARY TWO-POINT PROBLEMS FOR SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 А. А. MAKAROV, I. G. NIKOLENKO

ABSTRACT. In this paper, we examine systems of partial differential equations that admit well-posed two-point problems in the Schwartz space, in particular, systems with Hermitian matrices, well-posed systems in the Petrovsky sense, and also systems with a one space variable.

Keywords and phrases: boundary-value problem, Fourier transform, Schwartz space, resolution matrix.

AMS Subject Classification: 35A01

Краевые задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных рассматривались неоднократно. Были получены критерии разрешимости данной задачи в различных классах функций [1, 4–6]. Целью данной работы является получение эффективных достаточных условий корректности данной задачи в пространствах функций степенного роста.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$Au(x, 0) + Bu(x, T) = \varphi(x), \quad (2)$$

где $P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ — квадратная матрица, элементами которой являются дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами; A и B — постоянные квадратные матрицы.

Задача (1)–(2) называется корректно разрешимой из пространства Φ_1 в пространство Φ_2 , если для любых $\varphi(x) \in \Phi_1$ существует единственное решение $u(x, t) \in \Phi_2$, где $t \in [0; T]$; и это решение непрерывно зависит от $\varphi(x)$ в топологии соответствующих пространств.

В качестве пространств Φ_1 и Φ_2 будем рассматривать пространство Л. Шварца

$$S = \bigcap_{s,l} C_l^s,$$

состоящее из бесконечно дифференцируемых функций, убывающих быстрее любой степени. Если подействовать на функцию $u(x, t)$ преобразованием Фурье по пространственным переменным, то краевая задача перейдет в следующую задачу:

$$\frac{\partial \tilde{u}(s, t)}{\partial t} = P(s) \tilde{u}(s, t), \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$A \tilde{u}(s, 0) + B \tilde{u}(s, T) = \tilde{\varphi}(s), \quad (4)$$

где $\tilde{u}(s, t)$ и $\tilde{\varphi}(s)$ также принадлежат пространству S . Важную роль в корректности краевой задачи (3)–(4) играют определитель краевой задачи

$$\Delta(s) = \det(A + B \exp TP(s))$$

и разрешающая матрица

$$Q(s, t) = \exp tP(s)(A + B \exp TP(s))^{-1}.$$

Необходимым условием корректности краевой задачи (1)–(2) в пространстве S является условие $\Delta(s) \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{R}^n$.

Критерий корректности краевой задачи (1)–(2) в пространстве S — это выполнение степенной оценки [4], т.е. существование таких неотрицательных p и C , для которых при всех $s \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$\|Q(s, t)\| \leq C(1 + |s|)^p.$$

Наша задача — для различных классов матриц $P(s)$ подобрать такие матрицы A и B , чтобы краевая задача была корректной в пространстве S . Рассмотрим случай, когда матрица $P(s)$ является эрмитовой матрицей, т.е. $P_{ij}(s) = \overline{P_{ji}(s)}$ — комплексно сопряженные.

Теорема 1. Если матрица $P(s)$ эрмитова, то краевая задача с условием

$$u(x, 0) + u(x, T) = \varphi(x)$$

корректна в пространстве S .

Доказательство. Так как собственные значения эрмитовой матрицы действительные, то определитель краевой задачи отличен от нуля:

$$\Delta(s) = \prod_j (1 + \exp T\lambda_j(s)) \neq 0.$$

Покажем, что разрешающая матрица $Q(s, t) = \exp tP(s)(E + \exp TP(s))^{-1}$ удовлетворяет степенной оценке.

Рассмотрим функцию $f(\lambda) = e^{t\lambda}(1 + e^{T\lambda})^{-1}$. Она определена и ограничена на действительной оси. Поэтому разрешающая матрица $Q(s, t) = f(P(s))$ также определена и удовлетворяет оценке $\|Q(s, t)\| \leq C(1 + |s|)^p$ (см. [3]). Значит, краевая задача корректна в пространстве S . $\square$

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$P(s) = \begin{pmatrix} s^2 & is \\ -is & -s^2 \end{pmatrix}.$$

Это эрмитова матрица, собственные значения которой равны $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{s^4 + s^2}$. Значит, краевая задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x}, & u_1(x, 0) + u_1(x, T) = \varphi_1(x), \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2}, & u_2(x, 0) + u_2(x, T) = \varphi_2(x), \end{cases}$$

корректна в пространстве S .

Рассмотрим произвольную полиномиальную матрицу $P(s)$.

Теорема 2. Если существует такое действительное число α , что на множествах

$$N_j = \left\{ s \in \mathbb{R}^n : \operatorname{Re} \lambda_j(s) = \alpha \right\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

выполняются неравенства

$$\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq \frac{(2k+1)\pi}{T}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

то при $b = e^{-\alpha T}$ краевая задача для системы (1) с условием $u(x, 0) + bu(x, T) = \varphi(x)$ корректна в пространстве S .

Доказательство. Определитель краевой задачи

$$\Delta(s) = \prod_j \left(1 + e^{T(\lambda_j - \alpha)} \right),$$

обращается в нуль при $\lambda_j(s) = \alpha + (2k+1)\pi i/T$ с некоторым j . Это равносильно условиям

$$\operatorname{Re} \lambda_j(s) = \alpha, \quad \operatorname{Im} \lambda_j(s) = \frac{(2k+1)\pi}{T}.$$

Но это не может быть выполнено в силу условий теоремы.

Докажем теперь, что разрешающая матрица $Q(s, t) = \exp tP(s)(E + b \exp TP(s))^{-1}$ удовлетворяет степенной оценке. Рассмотрим функцию $f(\lambda) = e^{t\lambda}(1 + be^{T\lambda})^{-1}$. Она определена на спектре матрицы $P(s)$, так как $\Delta(s) \neq 0$. Если $\operatorname{Re} \lambda < \alpha$, то

$$|f(\lambda)| = |e^{t\lambda}(1 + e^{-T(\lambda - \alpha)})^{-1}| < C_1,$$

так как величина $|e^{t\lambda}| = e^{t \operatorname{Re} \lambda}$ ограничена. Если $\operatorname{Re} \lambda \geq \alpha$, то

$$|f(\lambda)| = e^{(t-T)(\operatorname{Re} \lambda - \alpha)} |(1 + e^{-T(\lambda - \alpha)})^{-1}| < C_2,$$

поскольку $|e^{(t-T)(\operatorname{Re} \lambda - \alpha)}| < 1$. Поэтому значения функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы $P(s)$ ограничены, а значит,

$$\|Q(s, t)\| \leq C(1 + |s|)^p.$$

Следовательно, краевая задача корректна в пространстве S . $\square$

Замечание 1. Из степенной оценки разрешающей матрицы $Q(s, t)$ следует также корректная разрешимость данной краевой задачи из пространства $\mathbb{C}_{l_1}^{s_1}$ в пространство $\mathbb{C}_{l_2}^{s_2}$ с некоторыми $s_j, l_j, j = 1, 2$ [2].

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, t)}{\partial t} = u_1(x_1, x_2, t) + \frac{\partial^2 u_2(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_2(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}, \\ \frac{\partial u_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} = u_1(x_1, x_2, t) + u_2(x_1, x_2, t). \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет вид

$$P(s_1, s_2) = \begin{pmatrix} 1 & -s_1^2 + s_2^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение

$$(\lambda - 1)^2 + s_1^2 - s_2^2 = 0,$$

а собственные значения

$$\lambda_{1,2}(s) = 1 \pm \sqrt{s_2^2 - s_1^2}.$$

Значит, корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \pm \sqrt{s_2^2 - s_1^2} & \text{при } |s_2| \geq |s_1|, \\ 1 \pm i\sqrt{s_1^2 - s_2^2} & \text{при } |s_2| < |s_1|. \end{cases}$$

Тогда при любом значении $\alpha > 0$ и $\alpha \neq 1$ выполнены условия теоремы 2. А значит, соответствующая краевая задача корректна в пространстве S .

Следствие 1. Если система (1) корректна по Петровскому, то краевая задача с условием $u(x, 0) + e^{-\alpha T}u(x, T) = \varphi(x)$ при $\alpha > C$ будет корректна в пространстве S .

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = u_2(x, t), \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = 2\frac{\partial u_2^2(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1^2(x, t)}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Собственные значения матрицы

$$P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -s^2 & -2s^2 \end{pmatrix}$$

равны

$$\lambda_{1,2}(s) = -s^2 \pm \sqrt{s^4 - s^2}, \quad \operatorname{Re} \lambda_j(s) \leq 0.$$

Поэтому краевая задача с условием $u(x, 0) + bu(x, T) = \varphi(x)$ при $b < 1$ будет корректна в пространстве S .

Рассмотрим систему с одной пространственной переменной, т.е. $x \in \mathbb{R}$. Тогда из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Для системы (1) в случае $x \in \mathbb{R}$ всегда существует корректная краевая задача в пространстве S .

Доказательство. Если собственные значения матрицы $P(s)$ действительные, то $\operatorname{Im} \lambda_j(s) = 0$, а значит, выполнены условия теоремы 2: $\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq (2k+1)\pi/T$. Следовательно, краевая задача с условием $u(x, 0) + bu(x, T) = \varphi(x)$ с любым $b > 0$ будет корректна в пространстве S .

Если $\operatorname{Im} \lambda_j(s) \neq 0$, то уравнение $\lambda_j(s) - \alpha = (2k+1)\pi i/T$ равносильно системе

$$\operatorname{Re} \lambda_j(s) = \alpha, \quad \operatorname{Im} \lambda_j(s) = \frac{(2k+1)\pi}{T}.$$

Второе уравнение при фиксированном значении k имеет конечное число корней, а при $k \in \mathbb{Z}$ таких корней счетное множество s_k . Тогда множество значений $\operatorname{Re} \lambda_j(s_k)$ тоже счетное, а значит, найдется такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\operatorname{Re} \lambda_j(s_k) \neq \alpha$. Следовательно, выполнены условия теоремы 2 и существует корректная краевая задача с условием $u(x, 0) + e^{-\alpha T}u(x, T) = \varphi(x)$. $\square$

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = u_2(x, t), \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - b^2 u_1(x, t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Тогда собственные значения равны $\lambda_{1,2}(s) = \pm \sqrt{s^2 - b^2}$, поэтому при $|s| \geq b$ корни действительные, а при $|s| < b$ корни мнимые, $\operatorname{Im} \lambda_j(s) = \pm \sqrt{b^2 - s^2}$.

Если взять $b < \pi/T$, то условие $\operatorname{Im} \lambda_j(s) = (2k+1)\pi/T$ не будет выполняться. Значит, краевая задача с условием $u(x, 0) + u(x, T) = \varphi(x)$ будет корректна в пространстве S .

Полученные результаты можно перенести на линейные дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\partial^j}{\partial t^j} P_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = 0.$$

Тогда условия существования корректных краевых задач будут аналогичными условиям теоремы 2, где $\lambda_j(s)$ — корни характеристического уравнения

$$\lambda^m + \sum_{j=0}^{m-1} P_j(s)\lambda^j = 0.$$

Теорему 1 можно применить, например, к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

если заменить это уравнение на эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ее матрица

$$P(s) = \begin{pmatrix} 0 & is \\ -is & 0 \end{pmatrix}$$

является эрмитовой матрицей и, значит, краевая задача с условиями

$$\begin{cases} u(x, 0) + u(x, T) = \varphi_1(x), \\ u'_t(x, 0) + u'_t(x, T) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

является корректной в пространстве S .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борок В. М. Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1971. — 35, № 1. — С. 185–201.
2. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. — М.: Физматлит, 1994.
3. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: ГИФМЛ, 1958.
4. Макаров А. А. Критерий корректной разрешимости краевой задачи в слое для системы линейных уравнений в свертках в топологических пространствах // в кн.: Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебры / Сб. науч. тр. — Киев: Наукова думка, 1978. — С. 178–180.
5. Макаров А. А. О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Диффер. уравн. — 1981. — 17, № 2. — С. 320–324.
6. Фардигола Л. В. Корректные задачи в слое с дифференциальными операторами в краевом условии // Укр. мат. ж. — 1992. — 44, № 8. — С. 1083–1090.

Макаров Александр Анатольевич

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, Украина

E-mail: makarovfamily07@gmail.com

Николенко Ирина Геннадиевна

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, Украина

E-mail: nig@ukr.net



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 84–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-84-106

УДК 517.958; 629.7.052

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. IV

© 2023 г. В. М. МОРОЗОВ, В. И. КАЛЕНОВА, М. Г. РАК

Аннотация. Рассматриваются задачи стабилизации стационарных движений (положений равновесия и регулярных прецессий) спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях в предположении, что центр масс движется по круговой орбите. Предложены решения ряда задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных систем. Представлены результаты математического моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики. Настоящая статья является четвертой частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 71–85. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 221. — С. 71–92. Третья часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 222. — С. 42–63.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, приводимость, стационарные движения, линеаризованные уравнения движений спутника, стабилизация, управляемость, алгоритмы управления.

STABILIZATION OF STATIONARY MOTIONS OF A SATELLITE NEAR THE CENTER OF MASS IN A GEOMAGNETIC FIELD. IV

© 2023 V. M. MOROZOV, V. I. KALENOVA, M. G. RAK

ABSTRACT. In this paper, we consider problems of stabilization of stationary motions (equilibrium positions and regular precessions) of a satellite near the center of mass in gravitational and magnetic fields under the assumption that the center of mass moves in a circular orbit. Solutions for a number of problems of stabilizing stationary motions of a satellite with the help of magnetic systems are proposed. We present the results of mathematical modeling of the algorithms, which confirm the effectiveness of the developed methodology. This paper is the fourth part of the work. The first part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 220. — P. 71–85. The second part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 221. — P. 71–92. The third part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 222. — P. 42–63.

Keywords and phrases: linear nonstationary system, reducibility, stationary motions, linearized equations of satellite motions, stabilization, controllability, control algorithms.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 3. Стабилизация стационарных движений спутника в геомагнитном поле	85
3.3. Стабилизация положения относительного равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов	85
3.4. Стабилизация регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов . . .	94
Список литературы	103

ГЛАВА 3

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА
В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ3.3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА
ПРИ ПОМОЩИ МАГНИТНЫХ И ЛОРЕНЦЕВЫХ МОМЕНТОВ

Рассмотрим стабилизацию относительного равновесия спутника при совместном использовании магнитных катушек и экрана, обладающего электрическим зарядом.

Управляющий момент $\mathbf{M} = \mathbf{M}_m^c + \mathbf{M}_m^q$ создается как за счет взаимодействия собственного дипольного магнитного момента спутника с магнитным полем Земли ($\mathbf{M}_m^c$) (1.1.6), так и силами Лоренца, действующими на заряженную поверхность спутника ($\mathbf{M}_m^q$) (1.1.7). Линеаризованные выражения моментов $\mathbf{M}_m^c$, $\mathbf{M}_m^q$ имеют вид (1.1.14), (1.1.15).

3.3.1. Линеаризованные уравнения. Линеаризованные уравнения управляемого движения имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - d_1 \dot{x}_3 - \kappa_1 x_1 &= \mu_0 [2\beta_1 u_2 s\tau + \beta_4 u_3 - b_1 v_2 + b_2 v_3 s\tau], \\ \ddot{x}_3 + d_3 \dot{x}_1 - \kappa_3 x_3 &= -\mu_0 [\beta_5 u_1 + \beta_3 u_2 c\tau - \tilde{b}_2 v_1 s\tau], \\ \ddot{x}_2 - \kappa_2 x_2 &= \mu_0 [-2\beta_2 u_1 s\tau + \beta_2 u_3 c\tau + \tilde{b}_1 v_1].\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned}x_1 = \theta_2, \quad x_2 = \theta_3, \quad x_3 = \theta_1; \quad d_1 = \frac{d}{J_1}, \quad d_3 = \frac{d}{J_3}, \quad d = J_2 - J_1 - J_3; \\ \kappa_1 = 4 \frac{J_3 - J_2}{J_1}, \quad \kappa_2 = 3 \frac{J_3 - J_1}{J_2}, \quad \kappa_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}; \\ \beta_j = \frac{sI}{J_j} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \beta_4 = \frac{cI}{J_1}, \quad \beta_5 = \frac{cI}{J_3}; \\ b_1 = \frac{qR\omega_0 cI}{J_1}, \quad b_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_1}; \quad \tilde{b}_1 = \frac{qR\omega_0 cI}{J_2}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_3}.\end{aligned}$$

Представим систему (3.3.1) в виде двух подсистем

$$\dot{\xi}^{(1)} = A^{(1)} \xi^{(1)} + B_u^{(1)} u + B_v^{(1)} v, \quad (3.3.2)$$

$$\dot{\xi}^{(2)} = A^{(2)} \xi^{(2)} + B_u^{(2)} u + B_v^{(2)} v. \quad (3.3.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} = [x_1 \quad x_3 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_3]^\top, \quad \xi^{(2)} = [x_2 \quad \dot{x}_2]^\top \\ A_{(4 \times 4)}^{(1)} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_3), \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ -d_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa_2 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$B_u^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta_1 s\tau & \beta_4 \\ -\beta_5 & -\beta_3 c\tau & 0 \end{bmatrix}, \quad B_v^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & b_2 s\tau \\ \tilde{b}_2 s\tau & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_u^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2\beta_2 s\tau & 0 & \beta_2 c\tau \end{bmatrix}, \quad B_v^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требуется построить управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость положения относительного равновесия.

Для построения стабилизирующего управления применим тот же метод, который использовался в разделе 3.1.

3.3.2. Приведение к стационарной системе. Введем новые переменные y_j ($j = 1, \dots, 9$) по формулам $x_1 = y_1 c\tau + y_3 s\tau + y_5$, $x_3 = y_2 c\tau + y_4 s\tau + y_6$, $x_2 = y_7 c\tau + y_8 s\tau + y_9$.

Дважды дифференцируя эти соотношения, подставляя их в систему (3.3.1) и приравнявая коэффициенты при функциях $\cos \tau$, $\sin \tau$, 1 получим

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - \bar{\kappa}_1 y_1 - d_1 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 - d_1 y_4 &= 0, \\ \ddot{y}_2 - \bar{\kappa}_3 y_2 + d_3 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 + d_3 y_3 &= -\mu_0 \beta_3 u_2, \\ \ddot{y}_3 - \bar{\kappa}_1 y_3 - d_1 \dot{y}_4 - 2\dot{y}_1 + d_1 y_2 &= 2\mu_0 \beta_1 u_2 + \mu_0 b_2 v_3, \\ \ddot{y}_4 - \bar{\kappa}_3 y_4 + d_3 \dot{y}_3 - 2\dot{y}_2 - d_3 y_1 &= -\mu_0 \tilde{b}_2 v_1, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

$$\ddot{y}_9 - \kappa_2 y_9 = \mu_0 \tilde{b}_1 v_1, \quad (3.3.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_5 - \kappa_1 y_5 - d_1 \dot{y}_6 &= \mu_0 \beta_4 u_3 - \mu_0 b_1 v_2, \\ \ddot{y}_6 - \kappa_3 y_6 + d_3 \dot{y}_5 &= -\mu_0 \beta_5 u_1, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_7 - \bar{\kappa}_2 y_7 + 2\dot{y}_8 &= \mu_0 \beta_2 u_3, \\ \ddot{y}_8 - \bar{\kappa}_2 y_8 - 2\dot{y}_7 &= -2\mu_0 \beta_2 u_1, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\bar{\kappa}_i = \kappa_i + 1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Стационарная система (3.3.4)–(3.3.7) состоит из двух независимых систем (3.3.4), (3.3.5) и (3.3.6), (3.3.7), в которые входят управления u_2 , v_1 , v_3 и u_1 , u_3 , v_2 соответственно.

Для построения алгоритмов управления преобразуем теперь системы (3.3.2), (3.3.3) к стационарной системе. Введем векторы

$$\begin{aligned} z_{(8 \times 1)}^{(1)} &= [z_1, z_2, z_3, z_4, z_7, \dots, z_{10}]^\top; & z_{(4 \times 1)}^{(2)} &= [z_{13}, \dots, z_{16}]^\top; \\ z_{(4 \times 1)}^{(3)} &= [z_5, z_6, z_{11}, z_{12}]^\top; & z_{(2 \times 1)}^{(4)} &= [z_{17}, z_{18}]^\top. \end{aligned}$$

Переменные $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, удовлетворяющие системе (3.3.2), (3.3.3), связаны с переменными z_j ($j = 1, \dots, 18$) соотношениями

$$\xi_{(4 \times 1)}^{(1)} = F_1^\top z^{(1)} + z^{(3)}, \quad \xi_{(2 \times 1)}^{(2)} = F_2^\top z^{(2)} + z^{(4)}. \quad (3.3.8)$$

Здесь

$$F_1^\top = \begin{bmatrix} c\tau E_2 & s\tau E_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & c\tau E_2 & s\tau E_2 \end{bmatrix}, \quad F_2^\top = [c\tau E_2 \quad s\tau E_2].$$

В переменных z_j ($j = 1, \dots, 18$) система стационарна и имеет вид

$$\dot{z}^{(1)} = G^{(1)} z^{(1)} + B^{(1)} V_1, \quad (3.3.9)$$

$$\dot{z}^{(4)} = G^{(4)} z^{(4)} + B^{(4)} V_1, \quad (3.3.10)$$

$$\dot{z}^{(2)} = G^{(2)} z^{(2)} + B^{(2)} U_1, \quad (3.3.11)$$

$$\dot{z}^{(3)} = G^{(3)} z^{(3)} + B^{(3)} U_1. \quad (3.3.12)$$

Здесь $V_1 = [u_2, v_1, v_3]^\top$, $U_1 = [u_1, u_3, v_2]^\top$,

$$G^{(1)} = \begin{bmatrix} G_{11} & E_4 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{bmatrix} O_{43} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad B_2^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & 0 & 0 \\ 2\beta_1 & 0 & b_2 \\ 0 & \tilde{b}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_{11} = \begin{bmatrix} O_2 & -E_2 \\ E_2 & O_2 \end{bmatrix},$$

$$G_{21} = \begin{bmatrix} A_{21} & O_2 \\ O_2 & A_{21} \end{bmatrix}, \quad G_{22} = \begin{bmatrix} A_{22} & -E_2 \\ E_2 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad G^{(2)} = \begin{bmatrix} A^{(2)} & -E_2 \\ E_2 & A^{(2)} \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^{(3)} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B^{(3)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_4 & -b_1 \\ -\beta_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G^{(4)} = A^{(2)}; \quad B^{(4)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эта стационарная система состоит из двух независимых групп (3.3.19), (3.3.10) с управлением V_1 и (3.3.11), (3.3.12) с управлением U_1 .

Замечание 3.1. Если системы (3.3.4)–(3.3.7) представить в виде системы первого порядка, то нетрудно показать, что полученная система будет связана с системой (3.3.9)–(3.3.12) невырожденным преобразованием с постоянной матрицей.

3.3.3. Управляемость. Управляемость в рассматриваемой задаче можно исследовать как исходя из нестационарной системы, так и анализируя приведенные стационарные системы.

Применяя критерий Красовского (см. [13]), нетрудно показать, что, если орбита не является ни полярной ($I = \pi/2$), ни экваториальной ($I = 0$), то нестационарная система (3.3.2), (3.3.3) управляема при наличии всех шести управляющих воздействий u_j, v_j ($j = 1, 2, 3$).

1. Если орбита экваториальная ($I = 0$), то система (3.3.1) становится стационарной ($\beta_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), $b_2 = \tilde{b}_2 = 0$).

В этом случае управления u_2, v_3 в систему не входят; на переменную x_2 действует управление v_1 , а для переменных x_1, x_3 — управления u_1, u_3, v_2 .

Необходимым условием управляемости является наличие управления v_1 , т. е. если лоренцевых сил нет, то система неуправляема (см. п. 3.1).

При отсутствии магнитных моментов ($u_j = 0$) система управляема только при наличии лоренцевых сил, если выполнены условия $J_2 \neq J_1 + J_3$ и $J_1 \neq J_2$. (см. п. 3.2).

2. Если орбита полярная ($I = \pi/2$), то система (3.3.1) расщепляется на две независимые группы: уравнения для переменных x_1, x_3 с управлениями u_2, v_1, v_3 ; уравнения для x_2 с управлениями u_1, u_3 . Управление v_2 в систему не входит.

Представим уравнение для переменной x_2 системы (3.3.1) в виде

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = \kappa_2 \eta_1 - 2\beta_2 u_1 s \tau + \beta_2 u_3 c \tau.$$

Применяя критерий (см. [13]), нетрудно получить, что эта система управляема при наличии хотя бы одного управления u_1 или u_3 . При отсутствии магнитного управления ($u_1 = u_3 = 0$) система неуправляема.

Аналогично, для переменных x_1, x_3 можно показать, что система управляема при наличии управлений u_2, v_1, v_3 . В [20] показано, что при отсутствии лоренцевых моментов ($v_1 = v_3 = 0$), система также управляема, если $u_2 \neq 0$.

Итак, на экваториальной орбите система неуправляема при отсутствии моментов лоренцевых сил. На полярной орбите система неуправляема при отсутствии магнитных моментов.

Управляемость стационарной системы удобнее исследовать на основе системы (3.3.9)–(3.3.12), состоящей из двух подсистем (3.3.9), (3.3.10) и (3.3.11), (3.3.12), на которые действуют независимые управления $V_1 = (u_2, v_1, v_3)$ и $U_1 = (u_1, u_3, v_2)$.

Согласно критерию [50] система (3.3.4), (3.3.5) управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda^2 - \bar{\kappa}_1 & -d_1\lambda & 2\lambda & -d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_3 & d_3 & 2\lambda & 0 & -\mu_0\beta_3 & 0 & 0 \\ -2\lambda & d_1 & \lambda^2 - \bar{\kappa}_1 & -d_1\lambda & 0 & 2\mu_0\beta_1 & 0 & \mu_0b_2 \\ -d_3 & -2\lambda & d_3\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_3 & 0 & 0 & -\mu_0\tilde{b}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \kappa_2 & 0 & \mu_0\tilde{b}_1 & 0 \end{bmatrix} = 5$$

для любых значений корней λ характеристического уравнения

$$\det \begin{bmatrix} \lambda^2 - \bar{\kappa}_1 & -d_1\lambda & 2\lambda & -d_1 & 0 \\ d_3\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_3 & d_3 & 2\lambda & 0 \\ -2\lambda & d_1 & \lambda^2 - \bar{\kappa}_1 & -d_1\lambda & 0 \\ -d_3 & -2\lambda & d_3\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \kappa_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Можно показать, что критерием неуправляемости в этом случае является выполнение условий

1. $J_1 = J_2 = J_3$; либо
2. $J_1 = J_3, J_2 = 2J_3$.

Неуправляемость в этих случаях можно проиллюстрировать наличием первых интегралов систем (3.3.4), (3.3.5) или (3.3.9), (3.3.10): для систем (3.3.4), (3.3.5):

$$\tilde{b}_1(\dot{y}_1 + \dot{y}_4 - y_2 + y_3) + \tilde{b}_2 y_9 = \text{const}, \quad \tilde{b}_1(\dot{y}_4 - 2y_2) + \tilde{b}_2 \dot{y}_9 = \text{const};$$

для систем (3.3.9), (3.3.10):

$$\tilde{b}_1(z_7 + z_{10}) + \tilde{b}_2 z_{18} = \text{const}, \quad \tilde{b}_1(z_{10} - z_2) + \tilde{b}_2 z_{18} = \text{const}.$$

Система (3.3.6), (3.3.7) управляема тогда и только тогда, когда для любых значений λ выполняется

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda^2 - \kappa_1 & -d_1\lambda & 0 & 0 & 0 & \mu_0\beta_4 & -\mu_0b_1 \\ d_3\lambda & \lambda^2 - \kappa_3 & 0 & 0 & -\mu_0\beta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \bar{\kappa}_2 & 2\lambda & 0 & \mu_0\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_2 & -2\mu_0\beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4,$$

где λ — корни соответствующего характеристического уравнения системы (3.3.6), (3.3.7).

Нетрудно показать, что критерием неуправляемости в этом случае будут условия

$$J_2 = J_1, \quad J_3 = \frac{2}{3}J_1.$$

Это также подтверждается наличием не зависящего от управления первого интеграла у систем (3.3.6), (3.3.7) или (3.3.11), (3.3.12)

$$2\beta_2(\dot{y}_6 - y_5) - \beta_5(\dot{y}_8 - 2y_7) = \text{const}, \quad 2\beta_2(z_{12} - z_5) - \beta_5(z_{16} - z_{13}) = \text{const}.$$

3.3.4. Алгоритм стабилизации. Задача стабилизации состоит в том, чтобы построить управление, обеспечивающее стремление к нулю компонент вектора состояния системы при $\tau \rightarrow \infty$. Алгоритм стабилизации строится на основе стационарной системы (3.3.9)–(3.3.12).

Как было отмечено, система (3.3.9)–(3.3.12) состоит из двух независимых подсистем: системы (3.3.9), (3.3.10) (десятого порядка) с управлением V_1 и системы (3.3.11), (3.3.12) (восьмого порядка) с управлением U_1 .

Далее будем полагать

$$u_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad U = [u_1 \quad u_3]^\top, \quad V = [v_1 \quad v_3]^\top.$$

Стабилизирующее управление строится для каждой подсистемы независимо в виде обратной связи по состоянию, а матрица коэффициентов управления выбирается из условия минимума квадратичных функционалов

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty [Z_1^\top(\tau) Q_1 Z_1(\tau) + V^\top(\tau) \Gamma_1 V(\tau)] d\tau,$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty [Z_2^\top(\tau) Q_2 Z_2(\tau) + U^\top(\tau) \Gamma_2 U(\tau)] d\tau.$$

Здесь

$$Z_{(10 \times 1)}^{(1)} = \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(4)} \end{bmatrix}, \quad Z_{(8 \times 1)}^{(2)} = \begin{bmatrix} z^{(2)} \\ z^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} Q_1 & Q_2 \\ (10 \times 10) & (8 \times 8) \end{matrix}$$

— неотрицательно определенные, Γ_1, Γ_2 — положительно определенные постоянные матрицы.

Оптимальное управление имеет вид

$$\begin{aligned} V(\tau) &= -K_z^{(1)} Z^{(1)}(\tau), & U(\tau) &= -K_z^{(2)} Z^{(2)}(\tau), \\ K_z^{(1)} &= \Gamma_1^{-1} \tilde{B}_1^\top P^{(1)}, & K_z^{(2)} &= \Gamma_2^{-1} \tilde{B}_2^\top P^{(2)}, \end{aligned} \quad \begin{matrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ (10 \times 2) & (8 \times 2) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}^{(1)} \\ \tilde{B}^{(4)} \\ \tilde{B}^{(2)} \\ \tilde{B}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \tilde{B}^{(1)} & \tilde{B}^{(2)} \\ (8 \times 2) & (4 \times 2) \end{matrix}. \quad (3.3.13)$$

Матрицами $\tilde{B}^{(i)}$ обозначены матрицы $B^{(i)}$ с исключенными вторыми столбцами. Матрицы $P_{(10 \times 10)}^{(1)}$, $P_{(8 \times 8)}^{(2)}$ являются положительно определенными решениями соответствующих матричных алгебраических уравнений Риккати

$$\begin{aligned} P^{(j)} \tilde{G}_j + \tilde{G}_j^\top P^{(j)} - P^{(j)} \tilde{B}_j \Gamma_j^{-1} \tilde{B}_j^\top P^{(j)} + Q_j &= 0 \quad (j = 1, 2); \\ \tilde{G}_1 &= \text{diag}(G^{(1)}, G^{(4)}), \quad \tilde{G}_2 = \text{diag}(G^{(2)}, G^{(3)}). \end{aligned}$$

Синтезированные управляющие воздействия $V(\tau)$ и $U(\tau)$ являются функциями переменных $Z^{(1)}(\tau)$ и $Z^{(2)}(\tau)$ стационарной системы (3.3.9)–(3.3.12) более высокого порядка, чем исходная нестационарная система (3.3.2), (3.3.3). Для введения этих управлений непосредственно в исходную систему следует выразить векторы $Z^{(1)}(\tau)$ и $Z^{(2)}(\tau)$ через векторы состояния $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$, до-

полненные вспомогательными векторами $\xi_d^{(1)}$ и $\xi_d^{(2)}$, которые введем, учитывая формулы (3.3.8):

$$\begin{aligned} \xi_d^{(1)} &= \begin{bmatrix} \zeta^{(1)} \\ \zeta^{(4)} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}, \quad \xi_d^{(2)} = \begin{bmatrix} \zeta^{(2)} \\ \zeta^{(3)} \end{bmatrix}_{(6 \times 1)}, \quad \begin{matrix} \zeta^{(1)} = F_3^\top z^{(1)}, & \zeta^{(2)} = z^{(3)}, \\ (4 \times 1) & (4 \times 1) \end{matrix} \\ \zeta^{(3)} &= F_4^\top z^{(2)}, & \zeta^{(4)} &= z^{(4)}; \\ (2 \times 1) & (2 \times 1) \end{matrix} \quad (3.3.14) \\ F_3^\top &= \begin{bmatrix} -E_2 s \tau & E_2 c \tau & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & -E_2 s \tau & E_2 c \tau \end{bmatrix}_{(4 \times 8)}, \quad F_4^\top = \begin{bmatrix} -E_2 s \tau & E_2 c \tau \end{bmatrix}_{(2 \times 4)}. \end{aligned}$$

Уравнения для вспомогательных векторов $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \zeta^{(3)}, \zeta^{(4)}$ имеют вид

$$\dot{\zeta}^{(1)} = A^{(1)} \zeta^{(1)} + \tilde{B}_d^{(1)} V, \quad (3.3.15)$$

$$\dot{\zeta}^{(2)} = A^{(1)} \zeta^{(2)} + \tilde{B}_d^{(2)} U, \quad (3.3.16)$$

$$\dot{\zeta}^{(3)} = A^{(2)} \zeta^{(3)} + \tilde{B}_d^{(3)} U, \quad (3.3.17)$$

$$\dot{\zeta}^{(4)} = A^{(2)} \zeta^{(4)} + \tilde{B}_d^{(4)} V. \quad (3.3.18)$$

Здесь

$$\tilde{B}_d^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{2c\tau} \\ -\tilde{b}_{2c\tau} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_4 \\ -\beta_5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d^{(3)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\beta_{2c\tau} & -\beta_{2s\tau} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d^{(4)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Векторы состояния $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ исходной нестационарной системы вместе с вспомогательными векторами $\xi_d^{(1)}$ и $\xi_d^{(2)}$ связаны с векторами $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ стационарной системы преобразованиями

$$\begin{aligned} \xi_{(18 \times 1)} &= T(\tau) Z_{(18 \times 1)}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi_d^{(1)} \\ \xi^{(2)} \\ \xi_d^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \zeta^{(1)} \\ \xi^{(4)} \\ \xi^{(2)} \\ \zeta^{(2)} \\ \zeta^{(3)} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \\ z^{(3)} \\ z^{(4)} \end{bmatrix}, \quad T(\tau) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{11} \end{bmatrix}, \\ &\quad \begin{matrix} (10 \times 8) & (10 \times 10) \\ (8 \times 8) & (8 \times 10) \end{matrix} \end{aligned}$$

$$T_{11} = \begin{bmatrix} F_1^\top \\ (4 \times 8) \\ F_3^\top \\ (4 \times 8) \\ O \\ (2 \times 8) \end{bmatrix}, \quad T_{12} = \begin{bmatrix} O & E_4 & O \\ (4 \times 4) & (4 \times 4) & (4 \times 2) \\ O & O & O \\ (4 \times 4) & (4 \times 4) & (4 \times 2) \\ O & O & E_2 \\ (2 \times 4) & (2 \times 4) & (2 \times 2) \end{bmatrix}, \quad T_{21} = O_{(8 \times 8)}, \quad T_{22} = \begin{bmatrix} F_2^\top & O & E_2 \\ (2 \times 4) & (2 \times 4) & (2 \times 2) \\ O & E_4 & O \\ (4 \times 4) & (4 \times 4) & (4 \times 2) \\ F_4^\top & O & O \\ (2 \times 4) & (2 \times 4) & (2 \times 2) \end{bmatrix}.$$

Исходная система (3.3.2), (3.3.3) при $u_2 = 0$, $v_2 = 0$ имеет вид

$$\dot{\xi}^{(1)} = A^{(1)}\xi^{(1)} + \tilde{B}_u^{(1)}U + \tilde{B}_v^{(1)}V, \quad (3.3.19)$$

$$\dot{\xi}^{(2)} = A^{(2)}\xi^{(2)} + \tilde{B}_u^{(2)}U + \tilde{B}_v^{(2)}V, \quad (3.3.20)$$

где

$$\tilde{B}_u^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_4 \\ \beta_5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_v^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 s \tau \\ \tilde{b}_2 s \tau & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_u^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\beta_2 s \tau & \beta_2 c \tau \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_v^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда нестационарную систему для моделирования составляют системы (3.3.19), (3.3.15), (3.3.18) и (3.3.20), (3.3.16), (3.3.17)

$$\dot{\xi} = \tilde{A}_\xi \xi + \tilde{B}_\xi(\tau)U_\xi, \quad U_\xi = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}. \quad (3.3.21)$$

Здесь $\tilde{A}_\xi = \text{diag}(A^{(1)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(2)}, A^{(1)}, A^{(2)})$;

$$\tilde{B}_\xi = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{\xi 1} \\ \tilde{B}_{\xi 2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{\xi 1} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_u^{(1)} & \tilde{B}_v^{(1)} \\ O & B_d^{(1)} \\ O & B_d^{(4)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{\xi 2} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_u^{(2)} & \tilde{B}_v^{(2)} \\ B_d^{(2)} & O \\ B_d^{(3)} & O \end{bmatrix}.$$

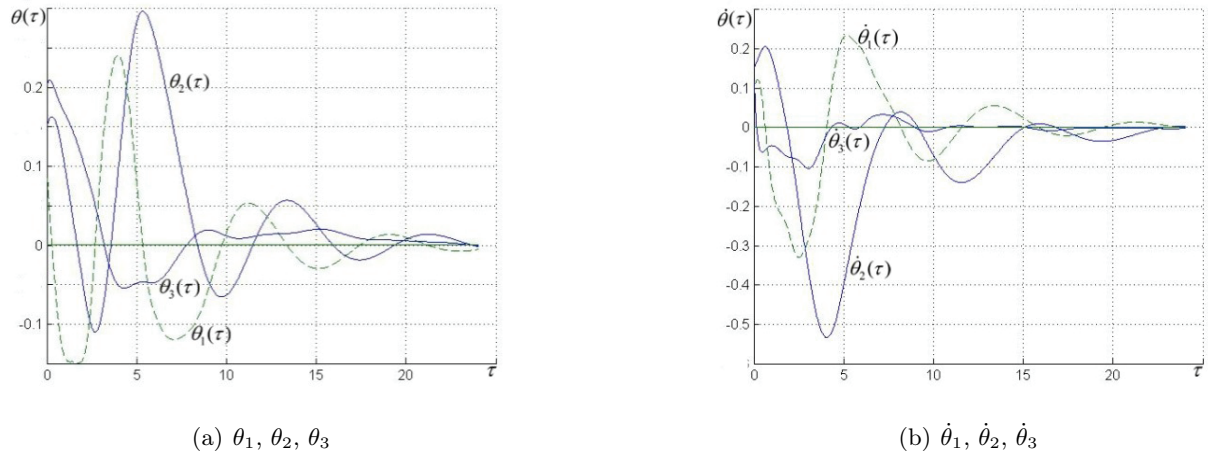
Управления (3.3.13), построенные для стационарной системы (3.3.9)–(3.3.12), можно вводить в систему (3.3.21) в виде

$$U_\xi = -K_Z T^{-1}(\tau)\xi, \quad K_Z = \begin{bmatrix} K_z^{(1)} & O \\ O & K_z^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (3.3.22)$$

Замкнутая управлением система имеет вид

$$\dot{\xi} = (\tilde{A}_\xi - \tilde{B}_\xi(\tau)K_Z T^{-1}(\tau))\xi. \quad (3.3.23)$$

Решения $\xi(\tau)$ системы (3.3.23), содержащие компоненты исходного вектора $\xi^{(1)}(\tau)$, $\xi^{(2)}(\tau)$, стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ в силу выбора матрицы K_Z , так как они связаны ограниченным преобразованием T с асимптотически стремящимися к нулю компонентами вектора Z .

Рис. 3.15. Поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$.

3.3.5. Моделирование. Задача стабилизации относительного равновесия спутника при помощи собственных магнитных моментов и моментов лоренцевых сил моделировалась на основе уравнений (3.3.21). Коэффициенты управления выбирались при помощи стандартной программы LQR для стационарных систем (3.3.9), (3.3.10) десятого порядка и (3.3.11), (3.3.12) восьмого порядка.

Матрицы в функционалах Φ_1, Φ_2 приняты в виде

$$Q_1 = \text{diag}(\alpha_{v1}E_4, O_4, \alpha_{v3}E_2),$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{v1} & 0 \\ 0 & \gamma_{v3} \end{bmatrix};$$

$$Q_2 = \text{diag}(\alpha_{u1}E_2, \alpha_{u3}E_2, O_2, O_2),$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{u1} & 0 \\ 0 & \gamma_{u3} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\alpha_{u1}, \alpha_{u3}, \alpha_{v1}, \alpha_{v3}, \gamma_{u1}, \gamma_{u3}, \gamma_{v1}, \gamma_{v3}$ — задаваемые параметры:

$$\begin{aligned} \alpha_{u1} = \alpha_{u3} &= 0,01; & \gamma_{u1} &= 0,01, & \gamma_{u3} &= 0,001; \\ \alpha_{v1} = \alpha_{v3} &= 0,01; & \gamma_{v1} &= 0,001, & \gamma_{v3} &= 0,1. \end{aligned}$$

Начальные значения углов: $\theta_1(0) = 0,1, \theta_2(0) = 0,15, \theta_3(0) = 0,2$; угловых скоростей: $\dot{\theta}_1(0) = 0,15, \dot{\theta}_2(0) = 0,1, \dot{\theta}_3(0) = 0,1$. По дополнительным переменным начальные условия принимались нулевыми.

Спутник движется по орбите радиуса $R = 7000$ км. Угол наклона плоскости орбиты $I = 60^\circ$. Тензор инерции спутника $J = [115, 0, 120, 0, 135, 0]$ кг $\cdot$ м² (см. [49]).

Параметр, определяющий величину собственного магнитного момента $\mu_0 = \frac{\mu E}{\mu}, \mu_E = 7,812 \cdot 10^6$ км³ $\cdot$ кг $\times$ с⁻² $\cdot$ А⁻¹, $\mu = 3,986 \cdot 10^5$ км³с⁻².

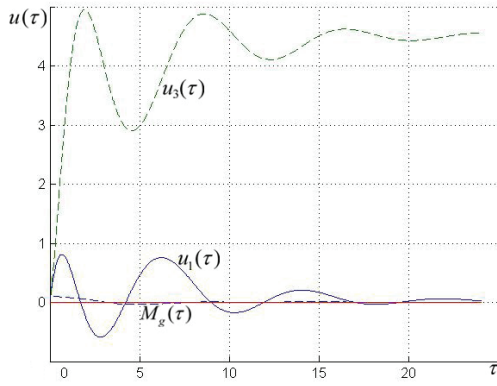
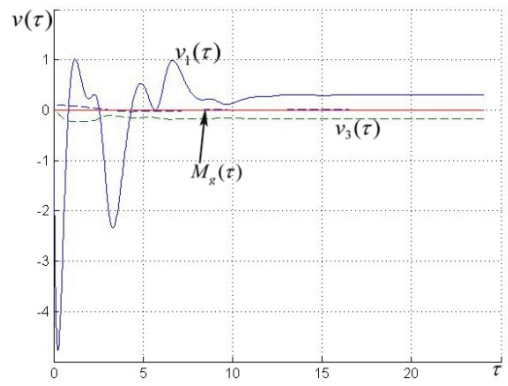
Величина заряда в коэффициентах матрицы управления при помощи лоренцевых сил $q = 5,0 \cdot 10^{-3}$ А $\times$ с (см. [40]).

На рис. 3.15 представлено поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и их производных $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ в зависимости от безразмерного времени τ .

Процесс стабилизации практически завершился к моменту времени $\tau = 20$, что соответствует $\approx 4,5$ часа.

На рис. 3.16 представлено поведение компонент управлений $u_j(\tau), v_j(\tau)$ ($j = 1, 3$) в сравнении с гравитационным моментом $M_g(\tau)$.

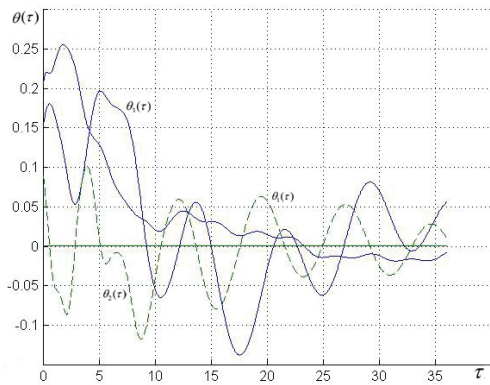
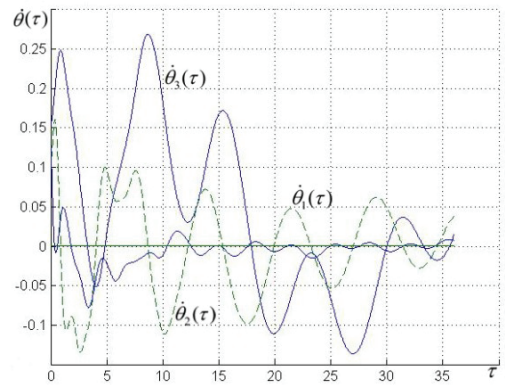
Если моменты инерции спутника не являются близкими к «критическим» (не удовлетворяют условиям неуправляемости стационарной системы), то их изменение на 10–15% не приводит

(a) $u_j(\tau)$ ($j = 1, 3$), $M_g(\tau)$ (b) $v_j(\tau)$ ($j = 1, 3$), $M_g(\tau)$ Рис. 3.16. Поведение компонент управлений $u_j(\tau)$, $v_j(\tau)$ ($j = 1, 3$).

к изменению характера кривых. Чувствительность алгоритма к изменению компонент тензора инерции проявляется только в окрестности условий неуправляемости.

Было проведено моделирование алгоритмов «вблизи» выполнения условий неуправляемости $J_1 = J_2 = J_3$; и $J_1 = J_3$, $J_2 = 2J_3$.

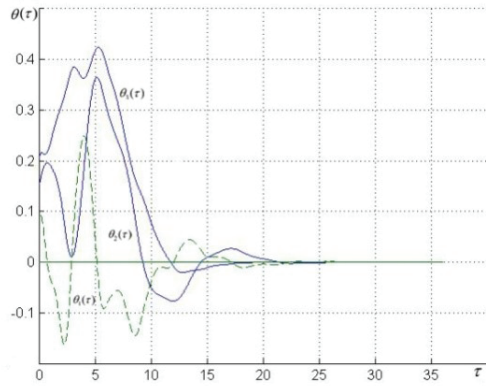
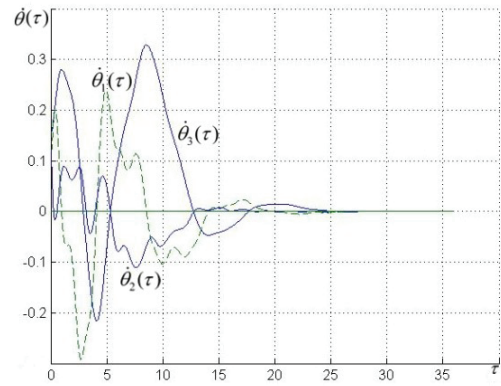
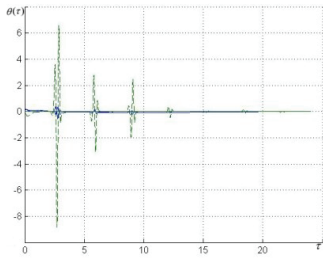
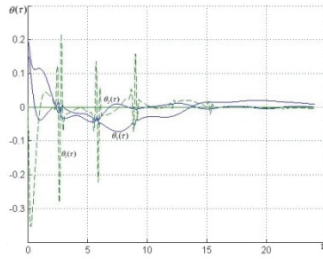
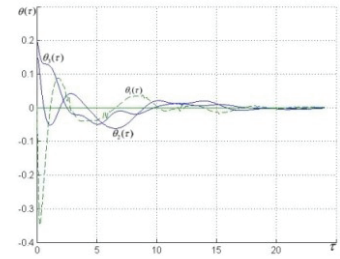
На рис. 3.17, 3.18 продемонстрировано, как влияет близость моментов инерции к соотношениям, удовлетворяющим условиям неуправляемости стационарной системы.

(a) $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (b) $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ Рис. 3.17. Поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$.

На рис. 3.17 показано поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и их производных $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ в зависимости от времени для спутника с тензором инерции $J = [210, 0, 190, 0, 210, 0]$ кг · м² (тензор инерции отличается от шарового на 5%).

Было проведено моделирование для значений компонент тензора инерции, отличающихся от шарового на 10%, а именно: $J_1 = [220, 0, 180, 0, 230, 0]$ кг · м², поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ показано на рис. 3.18.

Чувствительность алгоритма к параметрам спутника в окрестности условий неуправляемости для малого спутника продемонстрировано на рис. 3.19.

(a) $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (b) $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ Рис. 3.18. Поведение переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$.(a) $J = [3,2; 3,4; 3,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (b) $J = [3,2; 3,6; 3,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (c) $J = [3,2; 4,0; 3,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ Рис. 3.19. Поведение переменных $\theta_i(\tau)$ и $\dot{\theta}_i(\tau)$.

Поведение компонент вектора состояния в том случае, когда тензор инерции спутника равен $J_1 = [220,0,420,0,220,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (почти удовлетворяет условию неуправляемости стационарной системы $J_1 = J_3, J_2 = 2J_3$), представлено на рис. 3.20.

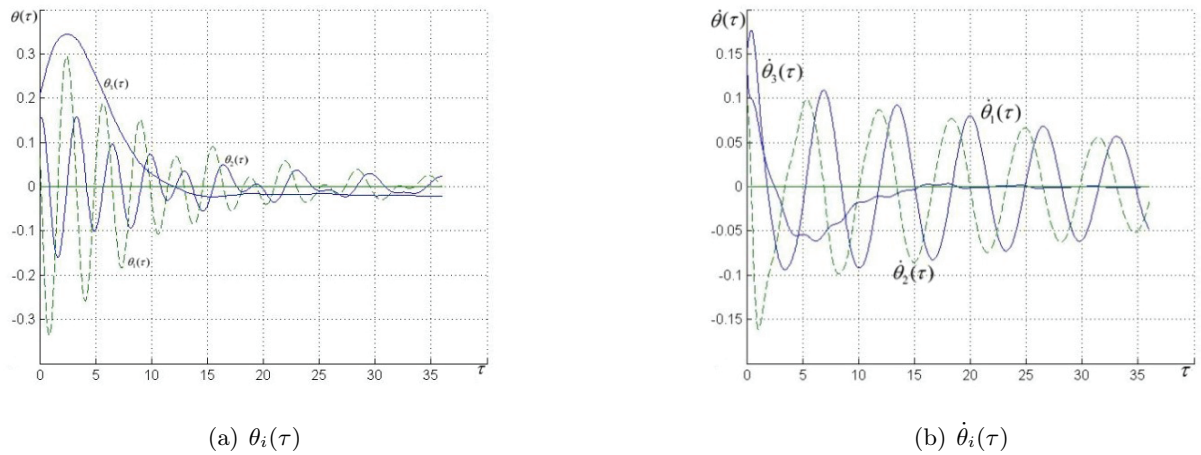
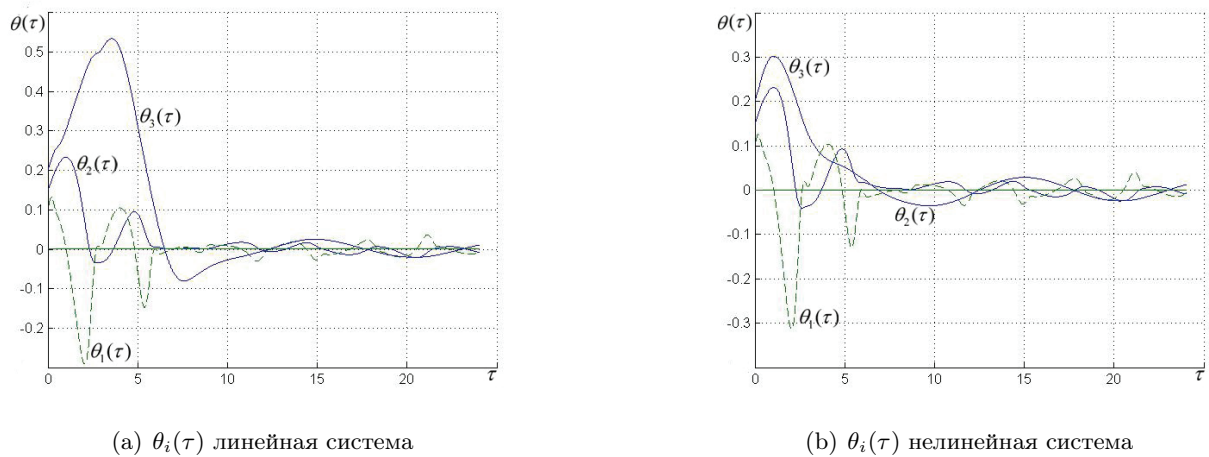
Характер кривых, отображающих процесс стабилизации на рис. 3.20, отличается от варианта, представленного на рис. 3.17.

Для сравнения процесса стабилизации переменных $\theta_i(\tau)$ в тех случаях, когда интегрировалась линейная система и когда в исходной системе учитывались нелинейные члены (см. Приложение 3.6.2), было проведено моделирование стабилизации спутника с моментами инерции $J = [27,0,17,0,25,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ при движении по орбите, близкой к полярной $I = 87,0^\circ$. Результаты моделирования на рис. 3.21.

На рис. 3.22 представлено поведение переменных $\theta_i(\tau)$ в процессе стабилизации линейной и нелинейной (см. Приложение 3.6.2) систем при движении по экватору ($I = 0,0^\circ$) для спутника (см. [49]) с моментами инерции $J = [110,0,130,0,155,0] \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Моделирование показало, что управления, построенные для линейных систем, применимы для нелинейных, если начальные условия по углам не превышают $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0,3; \theta_3(0) = 0,5$; а по скоростям не превышают значений $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = \dot{\theta}_3(0) = 0,2$.

На рис. 3.23 приведено сравнение процессов стабилизации в тех случаях, когда использовано гибридное управление (управление с использованием моментов магнитных катушек и моментов сил Лоренца) и когда используется только изменение собственного магнитного момента за счет

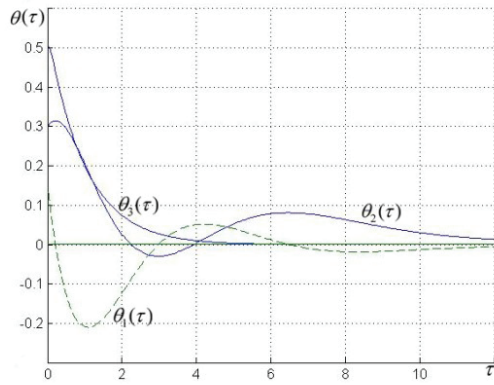
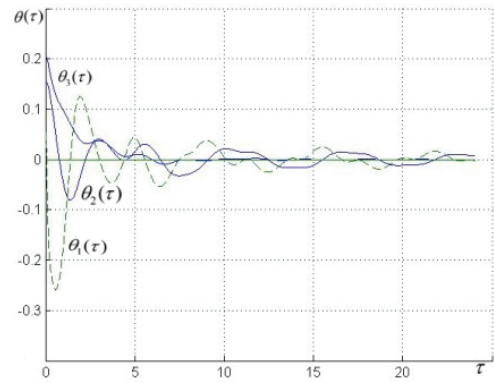
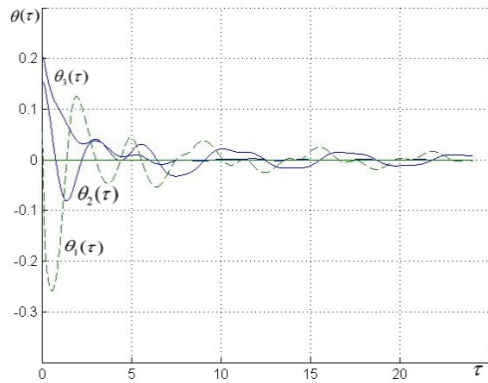
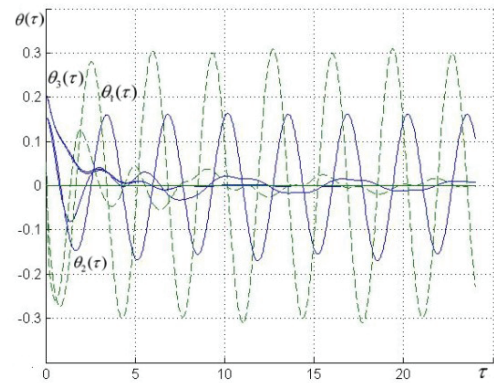
Рис. 3.20. Поведение переменных θ_1 , θ_2 , θ_3 и $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$.Рис. 3.21. Поведение переменных $\theta_i(\tau)$.

магнитных катушек. Тензор инерции спутника $J = [3, 6, 5, 8, 2, 5]$ кг·м² (см. [20]). Орбита, близкая к полярной.

Алгоритм стабилизации при использовании только собственных магнитных моментов, очевидно, результатов не дает, так как соответствующая стационарная система в этом случае неуправляема (см. [20]).

3.4. СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ СПУТНИКА ПРИ ПОМОЩИ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ

Рассмотрим задачу о стабилизации регулярных прецессий динамически симметричного спутника, центр масс которого движется по круговой орбите в гравитационном и магнитном полях Земли. Управляющие моменты формируются за счет взаимодействия собственного дипольного момента спутника с магнитным полем Земли. Работ, в которых рассматривается стабилизация вращательных движений динамически симметричного спутника при помощи магнитных моментов немного. В [1, 35] рассматривается задача стабилизации при помощи магнитных и лоренцевых моментов такого программного движения спутника, при котором ось симметрии расположена

(a) $\theta_i(\tau)$ линейная система(b) $\theta_i(\tau)$ нелинейная системаРис. 3.22. Поведение переменных $\theta_i(\tau)$.(a) $u \neq 0, v \neq 0$ (b) $u \neq 0, v = 0$ Рис. 3.23. Сравнение процессов стабилизации при гибридном управлении и управлении при помощи только магнитных катушек ($I = 82,5^\circ$).

вдоль местной вертикали или отклонена от нее на некоторый фиксированный угол, а сам спутник совершает медленное движение вокруг этой оси. При этом предполагается, что орбита — круговая экваториальная. Аналогичная задача рассматривается в [27].

Стабилизация при помощи магнитных моментов движения симметричного спутника вокруг оси, ортогональной плоскости круговой орбиты, рассмотрена в [44, 45].

В этом параграфе рассматривается движение динамически симметричного спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях Земли. Предполагается, что центр масс спутника движется по круговой орбите. Линеаризованные в окрестности регулярных прецессий уравнения управляемого движения представляют собой линейные нестационарные по управлению системы. Для решения задач стабилизации применяется подход, основанный на приведении к стационарным системам большего, чем исходная система, порядка, который использовался в разделах 3.1–3.3.

Динамические уравнения движения спутника около центра масс приведены в разделе 1.2 главы 1 и имеют вид (1.2.6), (1.2.4). Эти уравнения в отсутствие управляющих моментов допускают стационарные решения (три типа регулярных прецессий (1.2.7)–(1.2.9)).

Требуется построить управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость стационарных движений, основываясь на линеаризованных для каждого стационарного движения уравнениях, которые являются нестационарными. Управляющий момент следует формировать в виде обратной связи по компонентам вектора состояния $\alpha_1, \alpha_2, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$.

При линеаризации уравнений в окрестности стационарных движений линеаризуются выражения для управляющих моментов (1.2.4).

3.4.1. Цилиндрическая прецессия. Управляемость. Рассмотрим цилиндрическую прецессию, которая определяется следующими значениями углов $\alpha_{10} = \pi/2, \alpha_{20} = 0$. В этом движении ось симметрии спутника перпендикулярна плоскости орбиты.

В возмущенном движении положим $\alpha_1 = \pi/2 + x_1, \alpha_2 = x_2$.

Линеаризованные уравнения (1.2.10) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \kappa_1 \dot{x}_2 - \kappa_2 x_1 &= -2usI\sigma, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_1 \dot{x}_1 - \kappa_3 x_2 &= usI\sigma,\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

где $\kappa_1 = 2 + pJ, \kappa_2 = 4 + pJ - 3J, \kappa_3 = 1 + pJ; p = r_0/\omega_0, J = J_3/J_1; u = \mu_0 t$ (см. обозначения главы 1). Для приведения системы (3.4.1) к стационарному виду введем новые переменные y_j ($j = 1, \dots, 4$) по формулам

$$x_1 = y_1 \sigma + y_3 \tau, \quad x_2 = y_2 \sigma + y_4 \tau.\tag{3.4.2}$$

Дважды дифференцируя эти соотношения, подставляя их в систему (3.4.1) и приравнявая коэффициенты при функциях, получим стационарную систему

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + \kappa_1 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 - \bar{\kappa}_2 y_1 + \kappa_1 y_4 &= 0, \\ \ddot{y}_2 - \kappa_1 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 - \bar{\kappa}_3 y_2 - \kappa_1 y_3 &= usI, \\ \ddot{y}_3 - 2\dot{y}_1 + \kappa_1 \dot{y}_4 - \kappa_1 y_2 - \bar{\kappa}_2 y_3 &= -2usI, \\ \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - \kappa_1 \dot{y}_3 + \kappa_1 y_1 - \bar{\kappa}_3 y_4 &= 0.\end{aligned}\tag{3.4.3}$$

Здесь $\bar{\kappa}_2 = \kappa_2 + 1, \bar{\kappa}_3 = \kappa_3 + 1$.

Рассмотрим вопросы управляемости системы. На экваториальной орбите ($\sin I = 0$) система (3.4.1), очевидно, неуправляема.

Достаточные условия неуправляемости можно получить, если стационарная система (3.4.3) имеет линейный интеграл, не зависящий от управления. Определим условия наличия такого интеграла.

Умножим первое и четвертое уравнения системы (3.4.3) на постоянные величины δ_1 и δ_2 соответственно и сложим. Полученное соотношение не должно содержать слагаемых, зависящих от y_1, y_4 , т. е. должно выполняться соотношение $\delta_1(-\bar{\kappa}_2 y_1 + \kappa_1 y_4) + \delta_2(\kappa_1 y_1 - \bar{\kappa}_3 y_4) = 0$.

Отсюда $-\delta_1 \bar{\kappa}_2 + \delta_2 \kappa_1 = 0, \delta_1 \kappa_1 - \delta_2 \bar{\kappa}_3 = 0$.

Величины δ_1 и δ_2 не равны нулю, если

$$\kappa_1^2 - \bar{\kappa}_2 \bar{\kappa}_3 = 0 \quad \text{или} \quad (2 + pJ)(J - 1) = 0.\tag{3.4.4}$$

Возможны два случая: $pJ = -2$ и $J = 1$.

Таким образом, условия наличия интеграла найдены.

При выполнении указанных условий линейный интеграл имеет вид $\dot{y}_4 - 2y_3 = \text{const}$ при $pJ = -2$ ($\kappa_1 = 0, \bar{\kappa}_3 = 0$); $\dot{y}_1 + \dot{y}_4 + p(y_2 - y_3) = \text{const}$ при $J = 1$ ($\kappa_1 = \bar{\kappa}_2 = \bar{\kappa}_3 = p + 2$).

Если умножить второе уравнение системы (3.4.3) на 2 и сложить с третьим, то новых условий существования интегралов не появится.

Условия (3.4.4) являются достаточными условиями неуправляемости стационарной системы (3.4.3).

Используя критерий Красовского (см. [13]), можно показать, что исходная нестационарная система (3.4.1) неуправляема, если выполняются оба условия (3.4.4), т. е. при $J = 1$ и $p = -2$.

Это означает, что система неуправляема при $\Omega = -\omega_0$, т. е. угловая скорость собственного вращения равна и противоположна по знаку орбитальной угловой скорости.

3.4.2. Гиперболоидальная прецессия. Управляемость. В возмущенном движении положим

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + x_1, \quad \alpha_2 = \alpha_{20} + x_2, \quad c\alpha_{20} = -pJ.$$

В этом случае линеаризованные уравнения движения (1.2.11) имеют вид

$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_2 + \kappa_4 x_1 = \beta_1^p u s \tau, \quad \ddot{x}_2 - c^2 \alpha_{20} \dot{x}_1 + s^2 \alpha_{20} x_2 = (\beta_2^p c \tau - \beta_3^p) u. \quad (3.4.5)$$

Здесь

$$\kappa_4 = 3(J-1), \quad \beta_1^p = -2 \frac{sI}{c\alpha_{20}}, \quad \beta_2^p = sI c \alpha_{20}, \quad \beta_3^p = cI s \alpha_{20}.$$

Переменные y_j ($j = 1, \dots, 6$), введенные по формулам

$$x_1 = y_1 c \tau + y_3 s \tau + y_5, \quad x_2 = y_2 c \tau + y_4 s \tau + y_6, \quad (3.4.6)$$

удовлетворяют стационарной системе

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 + \bar{\kappa}_4 y_1 + y_4 &= 0, \quad \bar{\kappa}_4 = \kappa_4 - 1; \\ \ddot{y}_2 - c^2 \alpha_{20} \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 - c^2 \alpha_{20} y_2 - c^2 \alpha_{20} y_3 &= \beta_2^p u; \\ \ddot{y}_3 - 2\dot{y}_1 + \dot{y}_4 - y_2 + \bar{\kappa}_4 y_3 &= \beta_1^p u; \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - c^2 \alpha_{20} \dot{y}_3 + c^2 \alpha_{20} y_1 - c^2 \alpha_{20} y_4 &= 0; \\ \ddot{y}_5 + \dot{y}_6 + \kappa_4 y_5 &= 0; \\ \ddot{y}_6 - c^2 \alpha_{20} \dot{y}_5 + s^2 \alpha_{20} y_6 &= -\beta_3^p u. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Рассмотрим управляемость нестационарной системы (3.4.5) и стационарной системы (3.4.7), (3.4.8).

Если орбита экваториальная, то критерием неуправляемости являются условия $s\alpha_{20} = 0$, т. е. $\bar{\Omega} = \pm \frac{J-1}{J}$, что нетрудно видеть, так как система (3.4.5) становится стационарной. (Отметим, что при $J = 1$ собственное вращение спутника отсутствует).

Если орбита полярная ($cI = 0$), то $\beta_3^p = 0$, и вводить переменные y_5, y_6 не требуется.

Если $cI \neq 0$, то система (3.4.8) неуправляема при $J = 1$.

Условие $J = 1$ является достаточным условием неуправляемости системы (3.4.7), так как в этом случае система (3.4.7) имеет линейный интеграл, не зависящий от управления $(\dot{y}_1 + y_2 + y_3)c^2 \alpha_{20} + \dot{y}_4 - 2y_2 = \text{const}$.

Пусть $sI \neq 0$.

Используя двойственную к системе (3.4.5) систему с наблюдением, можно показать, что при $J = 1$ она наблюдаема и, следовательно, в силу принципа двойственности исходная нестационарная система (3.4.5) управляема.

3.4.3. Коническая прецессия. Управляемость. В возмущенном движении положим $\alpha_1 = \alpha_{10} + x_1, \alpha_2 = x_2, s\alpha_{10} = \frac{pJ}{3J-4}$.

В этом случае линеаризованные уравнения движения (1.2.12) имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \kappa_5 \dot{x}_2 + \kappa_6 x_1 &= (\beta_4^p - \beta_5^p s \tau) u, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_5 \dot{x}_1 + \kappa_7 x_2 &= \beta_6^p u s \tau. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \kappa_5 &= (3J-2)s\alpha_{10}, \quad \kappa_6 = (4-3J)c^2 \alpha_{10}, \quad \kappa_7 = 3(1-J), \\ \beta_4^p &= cI s \alpha_{10}, \quad \beta_5^p = 2sI s \alpha_{10}, \quad \beta_6^p = sI. \end{aligned}$$

Построение алгоритмов стабилизации основано, как и выше, на использовании приведенных стационарных систем, управляемость которых необходима.

Приведем систему (3.4.9) к стационарной системе, введя новые переменные y_j ($j = 1, \dots, 6$), удовлетворяющие стационарной системе

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \kappa_5 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 + \bar{\kappa}_6 y_1 + \kappa_5 y_4 &= 0, \\ \ddot{y}_2 - \kappa_5 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 + \bar{\kappa}_7 y_2 - \kappa_5 y_3 &= \beta_6^p u, \\ \ddot{y}_3 - 2\dot{y}_1 + \kappa_5 \dot{y}_4 - \kappa_5 y_2 + \bar{\kappa}_6 y_3 &= -\beta_5^p u, \\ \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - \kappa_5 \dot{y}_3 + \kappa_5 y_1 + \bar{\kappa}_7 y_4 &= 0, \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_5 + \kappa_5 \dot{y}_6 + \kappa_6 y_5 &= \beta_4^p u, \\ \ddot{y}_6 - \kappa_5 \dot{y}_5 + \kappa_7 y_6 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Здесь $\bar{\kappa}_6 = \kappa_6 - 1$, $\bar{\kappa}_7 = \kappa_7 - 1$.

Определим достаточные условия неуправляемости путем выявления условий существования линейных интегралов, не зависящих от управления в системе. Так же, как и для случая цилиндрической прецессии, умножив первое и четвертое уравнения системы (3.4.10) на постоянные величины δ_1 и δ_4 и складывая, получим соотношение, которое при выполнении условий

$$\delta_1 \bar{\kappa}_6 + \delta_4 \kappa_5 = 0, \quad \delta_1 \kappa_5 + \delta_4 \bar{\kappa}_7 = 0$$

не зависит от переменных y_j .

Условие $\kappa_5^2 - \bar{\kappa}_6 \bar{\kappa}_7 = 0$ существования неравных нулю величин δ_1 и δ_4 в данном случае имеет вид

$$(1 - J)(2 - 3J)(1 - 2s^2 \alpha_{10}) = 0.$$

Это означает, в системе (3.4.10) существует линейный интеграл, не зависящий от управления, в следующих случаях

$$J = 1; \quad J = \frac{2}{3}; \quad s^2 \alpha_{10} = \frac{1}{2} \quad \left(\bar{\Omega} = \pm 2\sqrt{2} \frac{J-1}{J} \right). \quad (3.4.12)$$

Выясним, существует ли другой интеграл в системе (3.4.10). Умножив второе уравнение системы (3.4.10) на δ_2 , а третье на δ_3 и сложив их, получим выражение, которое при выполнении равенств

$$\delta_2 \bar{\kappa}_7 - \delta_3 \kappa_5 = 0, \quad -\delta_2 \kappa_5 + \delta_3 \bar{\kappa}_6 = 0$$

не зависит от переменных y_2, y_3 .

Это означает, что при выполнении этих условий в системе существует еще один интеграл. Условия существования ненулевого решения этой системы приводят к равенствам

$$J = \frac{2}{3}; \quad c^2 \alpha_{10} = s^2 \alpha_{10} = \frac{1}{2},$$

которые совпадают со вторым и третьим соотношениями условий (3.4.12).

Итак, новых условий существования интегралов в системе (3.4.10) не возникает.

Таким образом, достаточными условиями неуправляемости стационарной системы (3.4.10) являются условия (3.4.12).

Рассмотрим условия неуправляемости исходной нестационарной системы (3.4.9). При движении по экваториальной орбите ($I = 0$) система (3.4.9) становится стационарной

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \kappa_5 \dot{x}_2 + \kappa_6 x_1 &= c \alpha_{10} u, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_5 \dot{x}_1 + \kappa_7 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Согласно критерию Hautus (см. [50]) эта система управляема, если для любого значения λ выполняется условие

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda^2 + \kappa_6 & \kappa_5 \lambda & c \alpha_{10} \\ -\kappa_5 \lambda & \lambda^2 + \kappa_7 & 0 \end{bmatrix} = 2. \quad (3.4.14)$$

Очевидно, что система неуправляема при $c \alpha_{10} = 0$ ($\alpha_{10} = \pi/2$).

В этом случае

$$s \alpha_{10} = \frac{pJ}{3J-4} = \pm 1.$$

Тогда

$$p = \frac{r_0}{\omega_0} = \frac{\omega - \omega_0 s \alpha_{10}}{\omega_0} = \bar{\Omega} \mp 1.$$

Откуда следует условие неуправляемости

$$\bar{\Omega} = \pm 4 \frac{J-1}{J}. \quad (3.4.15)$$

Пусть $s\alpha_{10} \neq 0$. Тогда из условий (3.4.14) следует, что условием неуправляемости является одновременное выполнение равенств $\kappa_5 \lambda = 0$ и $\lambda^2 + \kappa_7 = 0$.

Откуда следуют условия $\kappa_7 = 0$ или $\kappa_5 = 0$, т. е. условиями неуправляемости являются

$$J = 1; \quad J = \frac{2}{3}; \quad s\alpha_{10} = 0, \quad p = \Omega = 0. \quad (3.4.16)$$

Условие $\Omega = 0$ означает, что собственное вращение отсутствует (коническая прецессия переходит в относительное равновесие, при котором ось симметрии спутника расположена по радиус-вектору ($\alpha_{10} = 0$)).

Итак, если орбита экваториальная, то критерием неуправляемости являются условия (3.4.15), (3.4.16).

При движении по полярной орбите ($I = \pi/2$) система (3.4.9) имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \kappa_5 \dot{x}_2 + \kappa_6 x_1 &= -2s\alpha_{10}s\tau u, \\ \ddot{x}_2 - \kappa_5 \dot{x}_1 + \kappa_7 x_2 &= c\tau u. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Используя критерий Красовского (см. [13]), можно показать, что при выполнении условий $J = 2/3$ и $s^2\alpha_{10} = 1/2$, которые являются достаточными условиями неуправляемости (3.4.12) приведенной стационарной системы (3.4.10), нестационарная система (3.4.17) является неуправляемой.

Замечание 3.2. Пусть $sI \neq 0$. Используя двойственную к системе (3.4.9) систему с наблюдением, можно показать, что при $J = 1$ она наблюдаема, если $s\alpha_{10} \neq 0$, и, следовательно, в силу принципа двойственности исходная нестационарная система (3.4.9) управляема.

3.4.4. Алгоритмы стабилизации. Поведение вектора $x = [x_1 \ x_2]^\top$ исходной системы описывается нестационарными системами (3.4.1), (3.4.5) и (3.4.9) соответственно для каждого варианта прецессий. Для построения алгоритмов стабилизации эти системы должны быть представлены в форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_x X + B_x(\tau)u, \quad X(4 \times 1), \quad X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \quad B_x(\tau)(4 \times 1), \\ A_x &= \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ a_{11}^{(j)} & 0 & 0 & a_{14}^{(j)} \\ 0 & a_{22}^{(j)} & a_{23}^{(j)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_x(\tau) = \begin{bmatrix} O_{21} \\ b_1^{(j)}(\tau) \\ b_2^{(j)}(\tau) \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Для цилиндрической прецессии

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} &= k_2, \quad a_{22}^{(1)} = k_3, \quad a_{14}^{(1)} = -k_1, \quad a_{23}^{(1)} = k_1; \\ b_1^{(1)} &= -2sI \sin \tau, \quad b_2^{(1)} = sI \cos \tau. \end{aligned}$$

Для гиперболоидальной прецессии

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)} &= -k_4, \quad a_{22}^{(2)} = -s^2\alpha_{20}, \quad a_{14}^{(2)} = -1, \quad a_{23}^{(2)} = c^2\alpha_{20}; \\ b_1^{(2)} &= \beta_1^p \sin \tau, \quad b_2^{(2)} = \beta_2^p \cos \tau - \beta_3^p. \end{aligned}$$

Для конической прецессии

$$\begin{aligned} a_{11}^{(3)} &= -k_6, \quad a_{22}^{(3)} = -k_7, \quad a_{14}^{(3)} = -k_5, \quad a_{23}^{(3)} = k_5; \\ b_1^{(3)} &= \beta_4^p - \beta_5^p \sin \tau, \quad b_2^{(3)} = \beta_6^p \cos \tau. \end{aligned}$$

Алгоритмы стабилизирующего управления строятся на основании соответствующих стационарных систем (3.4.3); (3.4.7), (3.4.8); (3.4.10), (3.4.11), записанных в форме систем первого порядка

$$\dot{Y} = A_y Y + B_y u, \quad Y(2n \times 1), \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad B_y(2n \times 1). \quad (3.4.19)$$

Заметим, что в рассматриваемых случаях n принимает различные значения: для цилиндрической прецессии $n = 4$, для гиперболоидальной и конической прецессий $n = 6$.

Предполагается, что пара A_y, B_y управляема.

Матрицу коэффициентов управления можно выбрать из условия минимума квадратичного функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^\infty [Y^\top(\tau) Q Y(\tau) + \gamma u^2(\tau)] d\tau, \quad (3.4.20)$$

где Q — неотрицательно определенная постоянная матрица соответствующей размерности, $\gamma > 0$. Оптимальное управление имеет вид

$$u(\tau) = -K_y Y(\tau), \quad K_y = \frac{1}{\gamma} B_y^\top P. \quad (3.4.21)$$

Матрица P размерности $2n \times 2n$ является решением алгебраического уравнения Риккати

$$P A_y + A_y^\top P - \frac{1}{\gamma} P B_y B_y^\top P + Q = 0. \quad (3.4.22)$$

Синтезированное на основе расширенной стационарной системы управляющее воздействие является функцией переменных $Y(\tau)$ стационарной системы более высокого порядка, чем исходная нестационарная система.

Для введения управления непосредственно в исходную систему следует выразить вектор $Y(2n \times 1)$ ($n = 4, 6$) через вектор $x(2 \times 1)$ исходной системы, дополненный некоторым вектором $x_d(N \times 1)$ ($N = 2, 4$).

Вектор $\xi = [x, x_d]^\top$ и вектор y связаны соотношением

$$\xi = T_y y, \quad T_y = \begin{bmatrix} F(\tau) \\ D(\tau) \end{bmatrix}, \quad x = F(\tau)y, \quad x_d = D(\tau)y. \quad (3.4.23)$$

Матрица $F(\tau)$ определена согласно формулам (2.2.6) соответственно для $n = 2$ и $n = 6$.

Дополнительный вектор x_d вводится таким образом, чтобы квадратные матрицы T_y и $\dot{T}_y$ в преобразовании (3.4.23) были невырожденными.

Введем вектор $\eta = [\xi, \dot{\xi}]^\top$. Векторы Y и η связаны преобразованием

$$Y = T(\tau)\eta, \quad T(\tau) = \begin{bmatrix} T_y^{-1} & O_n \\ \dot{T}_y^{-1} & T_y^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.4.24)$$

Тогда управление (3.4.21) может быть записано в виде

$$u(\tau) = -K_y T(\tau)\eta(\tau). \quad (3.4.25)$$

Уравнения для дополнительного вектора $X_d = [x_d, \dot{x}_d]^\top$ имеют вид

$$\dot{X}_d = A_d X_d + B_d(\tau)u. \quad (3.4.26)$$

Матрицы $A_d, B_d(\tau)$ для конкретных случаев выписаны ниже.

Расширенная нестационарная система для построения алгоритма стабилизации состоит из исходной системы (3.4.18) и системы (3.4.26), где управление формируется согласно (3.4.25).

Решения этой расширенной нестационарной системы, замкнутой управлением (3.4.25), стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, в силу выбора матрицы K_y , так как компоненты вектора ξ связаны с компонентами вектора ограниченным преобразованием (3.4.23).

Оптимальные стабилизирующие управления строятся для соответствующих стационарных систем.

Для случая цилиндрической прецессии: система стационарных уравнений (3.4.3), соответствующая системе (3.4.1), имеет 8-й порядок. Матрицы расширенной нестационарной системы (3.4.18), (3.4.26) имеют вид

$$B_x = \begin{bmatrix} O_{21} \\ -2sI\sigma\tau \\ sI\sigma\tau \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} O_{21} \\ -2sI\sigma\tau \\ -sI\sigma\tau \end{bmatrix}, \quad A_x = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ k_2 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_3 & k_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_d = A_x.$$

Матрицы F , D преобразования $T(\tau)$ в выражении (3.4.23) имеют вид:

$$F(\tau) = \begin{bmatrix} c\tau E_2 & s\tau E_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 4)}, \quad D(\tau) = \begin{bmatrix} -s\tau E_2 & c\tau E_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 4)}.$$

Для случая гиперболоидальной прецессии система стационарных уравнений (3.4.7), (3.4.8), соответствующая системе (3.4.5), имеет 12-й порядок. Матрицы расширенной нестационарной системы (3.4.5), (3.4.26) в этом случае имеют вид

$$A_x = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} O_{44} & E_4 \\ A_{d1} & A_{d2} \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} A_{d11} & -A_{22} \\ A_{22} & A_{d11} \end{bmatrix}, \quad A_{d2} = \begin{bmatrix} A_{22} & 2E_2 \\ -2E_2 & A_{d11} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} \kappa_4 & 0 \\ 0 & -s^2\alpha_{20} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ c^2\alpha_{20} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^2\alpha_{20} \end{bmatrix},$$

$$B_x = \begin{bmatrix} O_{21} \\ \beta_1^p s\tau \\ \beta_2^p c\tau - \beta_3^p \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} O_{41} \\ \tilde{B}_d \end{bmatrix}_{(8 \times 1)}, \quad \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} \beta_1^p \\ 0 \\ 0 \\ \beta_2^p \end{bmatrix}.$$

Матрицы F , D преобразования $T(\tau)$ в выражении (3.4.23) для случаев гиперболоидальной и конической прецессий имеют вид:

$$F = \begin{bmatrix} c\tau E_2 & s\tau E_2 & E_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 6)}, \quad D = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 & O_2 \\ E_2 & O_2 & O_2 \end{bmatrix}.$$

Для конической прецессии стационарная система уравнений (3.4.10), (3.4.11), соответствующая системе (3.4.9), имеет также 12-й порядок. Матрицы систем (3.4.18), (3.4.26) в случае конической прецессии имеют вид

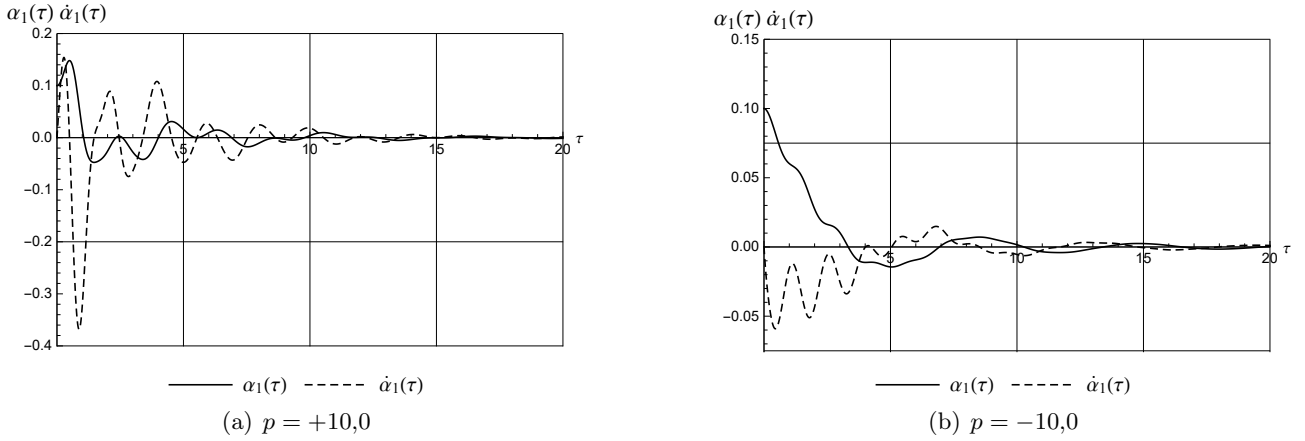
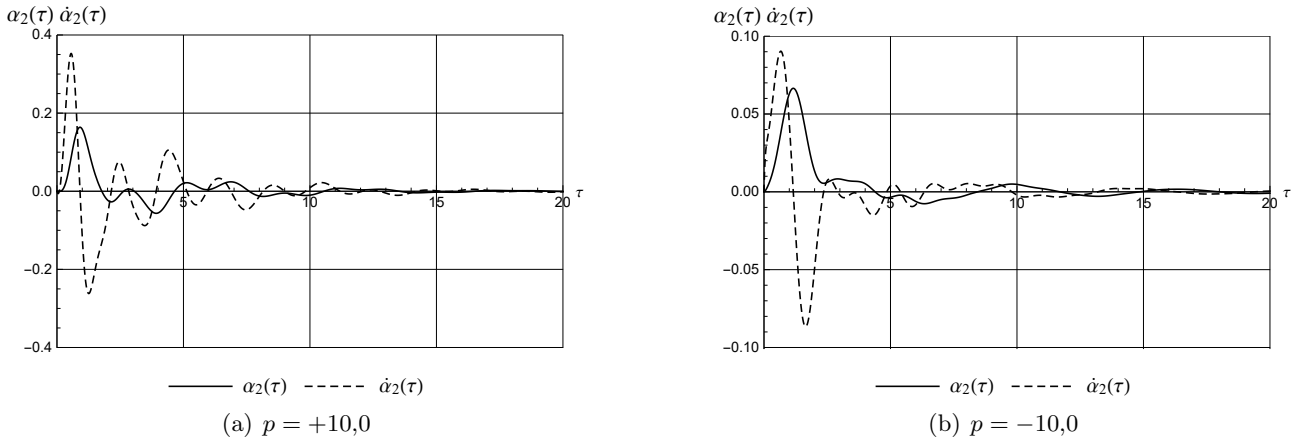
$$A_x = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} O_{44} & E_4 \\ A_{d1} & A_{d2} \end{bmatrix}, \quad B_x = \begin{bmatrix} O_{21} \\ \beta_4^p - \beta_5^p s\tau \\ \beta_6^p c\tau \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} O_{41} \\ \tilde{B}_d \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -\kappa_6 & 0 \\ 0 & -\kappa_7 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_5 \\ \kappa_5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{21} & -A_{22} \\ A_{22} & \bar{A}_{21} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} -\bar{\kappa}_6 & 0 \\ 0 & -\bar{\kappa}_7 \end{bmatrix},$$

$$A_{d2} = \begin{bmatrix} A_{22} & 2E_2 \\ -2E_2 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} -\beta_5^p \\ 0 \\ 0 \\ \beta_6^p \end{bmatrix}.$$

Таким образом, алгоритм стабилизации нестационарных систем для указанных случаев прецессий, как и в предыдущих задачах стабилизации, состоит из трех этапов:

1. нахождение постоянных коэффициентов управления K_Y для решения задачи оптимальной стабилизации соответствующей стационарной системы (на основе алгебраического уравнения Риккати);
2. построение управления в виде (3.4.20) с помощью невырожденных преобразований $T(\tau)$ и
3. решение расширенной нестационарной системы, содержащей исходную нестационарную систему и уравнения для вспомогательных переменных.

Рис. 3.24. Поведение переменных $\alpha_1(\tau)$, $\dot{\alpha}_1(\tau)$.Рис. 3.25. Поведение переменных $\alpha_2(\tau)$, $\dot{\alpha}_2(\tau)$.

3.4.5. Моделирование. Цель приведенных ниже результатов моделирования — показать принципиальную применимость предложенных алгоритмов и продемонстрировать их работоспособность.

Моделирование проводилось при помощи стандартного пакета Wolfram mathematica v11.0.

Коэффициенты управления выбирались при помощи стандартной программы LQR для стационарных систем.

Наклон орбиты движения спутника $I = \pi/6$.

Начальные значений отклонений углов $x_1(0) = x_2(0) = 0,1$; скоростей $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0,0$.

Параметр, определяющий отношение моментов инерции спутника $J = J_3/J_1 = 0,5$. Параметр отношения скоростей $p = r_0/\omega_0$ для цилиндрической прецессии $p = \pm 10,0$; для гиперболической и конической прецессий $p = 1,0$.

Параметры функционала (3.4.15): $Q = 100,0 \cdot E_k$ ($k = 8, 12$); $\gamma = 1$.

На рис. 3.24, 3.25 представлено поведение переменных $\alpha_1(\tau)$, $\dot{\alpha}_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$, $\dot{\alpha}_2(\tau)$ для случая цилиндрической прецессии (здесь через $\alpha_i(\tau)$, $\dot{\alpha}_i(\tau)$ обозначены отклонения от стационарных значений) при $p = +10,0$ (рис. (а)) и при $p = -10,0$ (рис. (б)).

На рис. 3.26 и 3.27 представлено поведение переменных $\alpha_1(\tau)$, $\dot{\alpha}_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$, $\dot{\alpha}_2(\tau)$ для случаев гиперболоидальной и конической прецессии соответственно.

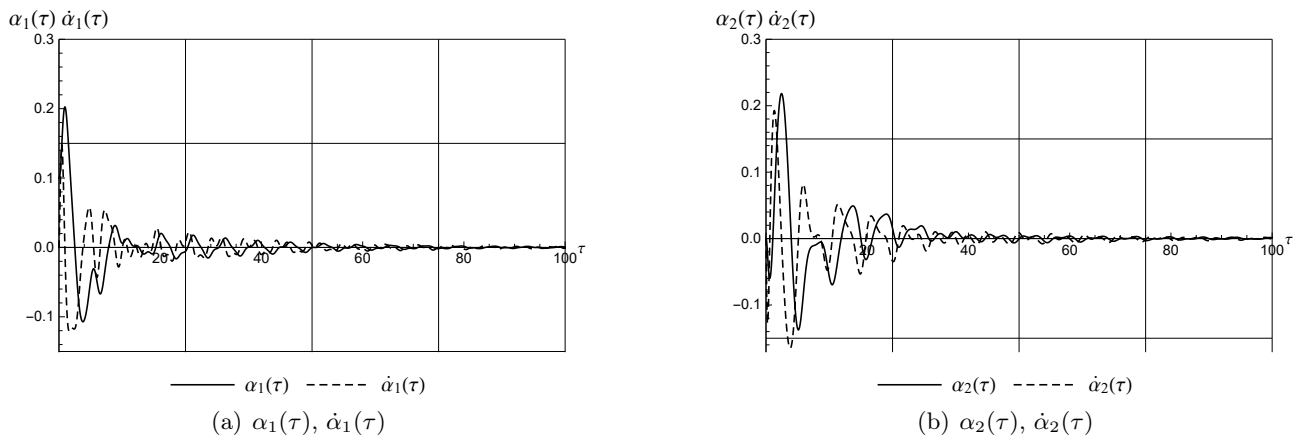


Рис. 3.26. Процесс стабилизации углов и скоростей $\alpha_i(\tau), \dot{\alpha}_i(\tau)$ при $p = 1, 0$.

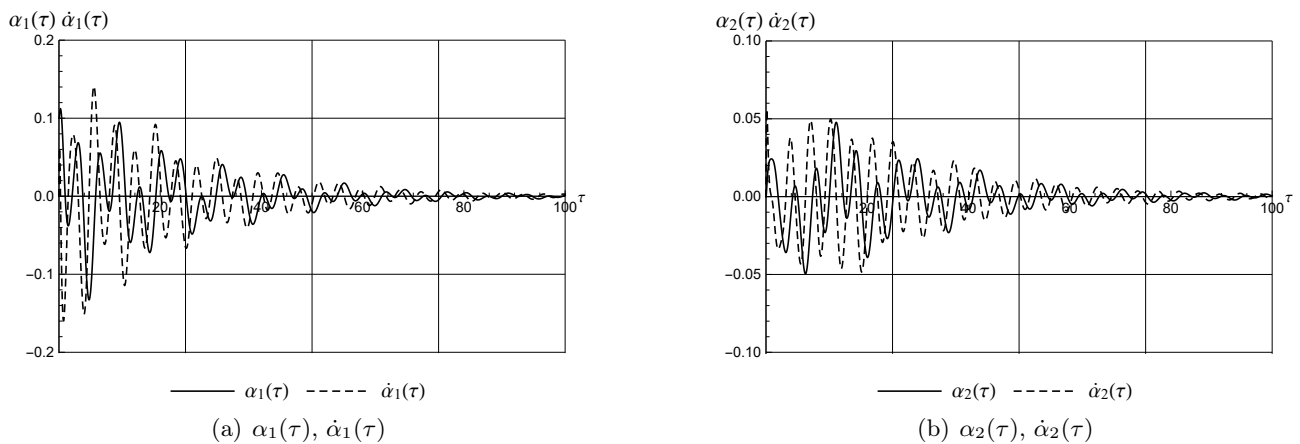


Рис. 3.27. Процесс стабилизации углов и скоростей $\alpha_i(\tau), \dot{\alpha}_i(\tau)$ при $p = 1, 0$.

Таким образом, представленные результаты моделирования подтверждают работоспособность предложенных алгоритмов стабилизации спутника в окрестности регулярных прецессий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Астрон. — 2012. — № 2. — С. 79–90.
2. Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А. Лекции по механике управляемых систем. — М.: Курс, 2018.
3. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
4. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
5. Белецкий В. В., Хентов А. А. Вращательное движение намагниченного спутника. — М.: Наука, 1985.
6. Дубошин Г. Н. О вращательном движении искусственных небесных тел // Бюлл. ИТА АН СССР. — 1960. — 7, № 7. — С. 511–520.

7. Каленова В. И., Морозов В. М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — М.: Физматлит, 2010.
8. Каленова В. И., Морозов В. М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением// Прикл. мат. мех. — 2012. — 76, № 4. — С. 576–588.
9. Каленова В. И., Морозов В. М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида// Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 3. — С. 6–15.
10. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления// в кн.: Тр. Конгр. ИФАК. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 521–547.
11. Калман Р. Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
12. Кондурарь В. Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара// Прикл. мех. техн. физ. — 1960. — 36, № 5. — С. 890–901.
13. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
14. Лурье А. А. Аналитическая механика. — М.: ГИФМЛ, 1961.
15. Морозов В. М. Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов// Космич. исслед. — 1967. — 5, № 5. — С. 727–732.
16. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов// Космич. исслед. — 1969. — 7, № 3. — С. 395–401.
17. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. Мех. — 1968. — № 6. — С. 109–111.
18. Морозов В. М. Устойчивость движения космических аппаратов// в кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНТИ, 1971. — С. 1–83.
19. Морозов В. М., Каленова В. И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации// Космич. исслед. — 2020. — 58, № 3. — С. 199–207.
20. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов// Космич. исслед. — 2021. — 59, № 5. — С. 393–407.
21. Морозов В. М., Каленова В. И., Рак М. Г. О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов// Прикл. мат. мех. — 2021. — 85, № 4. — С. 436–453.
22. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил// Космич. исслед. — 2022. — 60, № 3. — С. 246–253.
23. Овчинников М. Ю., Пеньков В. И., Ролдугин Д. С., Иванов Д. С. Магнитные системы ориентации малых спутников. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.
24. Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников// Космические аппараты и технологии. — 2019. — 3, № 2 (28). — С. 73–86.
25. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
26. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967.
27. Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю. Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты// Космич. исслед. — 2000. — 38, № 3. — С. 296–306.
28. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. — М.: ВИНТИ, 1978.
29. Сарычев В. А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов// в кн.: Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. — М.: Физматлит, 2009. — С. 111–126.
30. Сарычев В. А., Овчинников М. Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 1985.
31. Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле// Космич. исслед. — 2003. — 41, № 1. — С. 69–79.
32. Хентов А. А. Движение около центра масс экваториального спутника на круговой орбите при взаимодействии магнитного и гравитационного полей Земли// 31 — 1967. — С. 947–950.
33. Хентов А. А. Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс// Космич. исслед. — 1968. — 6, № 5. — С. 793–795.
34. Черноуцко Ф. Л. Об устойчивости регулярных прецессий спутника// Прикл. мат. мех. — 1964. — 28, № 1. — С. 155–157.

35. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system// *Adv. Space Res.* — 2018. — 62. — P. 142–151.
36. *Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A.* Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the König frame// *Nonlinear Dyn.* — 2015. — 82. — P. 1493–1505.
37. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite// *Aerospace Sci. Techn.* — 2020. — № 3. — P. 1–12.
38. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay// *IEEE Access.* — 2021. — 9. — 132623–132630.
39. *Antipov K. A., Tikhonov A. A.* Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the N th approximation// *Geomagnetism and Aeronomy.* — 2013. — 53, № 2. — P. 271–281.
40. *Antipov K. A., Tikhonov A. A.* On satellite electrodynamic attitude stabilization// *Aerospace Sci. Techn.* — 2014. — 33. — P. 92–99.
41. *Bin Zhou* Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with application to spacecraft magnetic attitude control// *Automatica.* — 2015. — 60. — P. 145–154.
42. *Brewer J. W.* Kronecker Products and Matrix calculus in system Theory// *IEEE Trans. Circ. Syst.* — 1978. — CAS-25, № 9. — P. 772–781.
43. *Chang A.* An algebraic characterization of controllability// *IEEE Trans. Automat. Control.* — 1965. — AC-10, № 1. — P. 112–113.
44. *Cubas J., de Ruiter A.* Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft// *Acta Astronaut.* — 2020. — 169. — P. 108–123.
45. *Cubas J., Farrahi A., Pindado S.* Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits// *J. Guid. Control Dynam.* — 2015. — 38. — P. 1947–1958.
46. *Frik M. A.* Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques// *AIAA J.* — 1970. — 8, № 10. — P. 1780–1785.
47. *Giri D. K., Mukherjee B. K., Sinha M.* Three-axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-axis global magnetic attitude control// *Asian J. Control.* — 2017. — 19, № 6. — P. 2028–2041.
48. *Giri D. K. and Sinha M.* Magneto-Coulombic attitude control of Earth-pointing satellites// *J. Guid. Control Dynam.* — 2014. — 37, № 6. — P. 1946–1960.
49. *Giri D. K., Sinha M.* Lorentz Force Based Satellite Attitude Control// *J. Inst. Eng. India. Ser. C.* — 2016. — 97. — P. 279–290.
50. *Hautus M. L. J.* Controllability and observability conditions of linear autonomous systems// *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A.* — 1969. — 72. — P. 443–448.
51. *Huang X., Yan Y.* Fully actuated spacecraft attitude control via the hybrid magnetocoulombic and magnetic torques// *J. Guid. Control Dynam.* — 2017. — 40, № 12. — P. 1–8.
52. *Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Doronin D. M., Ovchinnikov A. V.* Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties// *Acta Astronaut.* — 2017. — 132. — P. 103–110.
53. *Kalenova V. I., Morozov V. M.* Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces// *Aerospace. Sci. Technol.* — 2020. — 106. — 106105.
54. *Kalman R. E.* Lectures on Controllability and Observability. — Bologna, Italy: C.I.M.E., 1969.
55. *Laub A. J., Arnold W. F.* Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models// *IEEE Trans. Automat. Control.* — 1984. — 29, № 2. — P. 163–165.
56. *Likins P. W.* Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame// *J. Astronaut. Sci.* — 1965. — 12, № 1. — P. 18–24.
57. *Morozov V. M., Kalenova V. I.* Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems// *AIP Conf. Proc.* — 2018. — 1959. — 020003.
58. *Mostaza-Prieto D., Roberts P. C. E.* Methodology to analyze attitude stability of satellites subjected to aerodynamic torques// *J. Guid. Control Dynam.* — 2016. — 39. — P. 437–449.
59. *Nababi M., Barati M.* Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application// *Appl. Math. Model.* — 2017. — 46. — P. 365–381.
60. *Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V.* Geomagnetic field models for satellite angular motion studies// *Acta Astronaut.* — 2018. — 144. — P. 171–180.

61. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites// *Progr. Aerospace Sci.* — 2019. — 109. — 100546.
62. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study// *Acta Astronaut.* — 2015. — 110. — P. 279–286.
63. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Ivanov D. S., Penkov V. I.* Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame// *Acta Astronaut.* — 2015. — 116. — P. 74–68.
64. *Psiaki M.* Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation// *J. Guid. Control Dynam.* — 2001. — 24, № 2. — P. 386–394.
65. *Psiaki M. L.* Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing// *J. Guid. Control Dynam.* — 2004. — 27. — P. 347–355.
66. *Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K.* Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data// *J. Guid. Control Dynam.* — 1990. — 13, № 3. — P. 506–514.
67. *Psiaki M. L., Oshman Y.* Spacecraft attitude rate estimation from geomagnetic field measurements// *J. Guid. Control Dynam.* — 2003. — 26, № 2. — P. 244–252.
68. *Sarychev V. A., Mirer S. A.* Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* — 2000. — 76, № 1. — P. 55–68.
69. *Sarychev V. A., Mirer S. A., Degtyarev A. A., Duarte E. K.* Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* — 2007. — 97, № 4. — P. 267–287.
70. *Searcy J. D., Pernicka H. J.* Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach// *J. Guid. Control Dynam.* — 2012. — 35, № 6. — P. 1693–1701.
71. *Silani E., Lovera M.* Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results// *Control Eng. Pract.* — 2005. — 13. — P. 357–371.
72. *Sofyal A., Jafarov E. M., Wisniewski R.* Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode// *Aerospace Sci. Technol.* — 2018. — 76. — P. 91–104.
73. *Sukhov E.* Numerical approach for bifurcation and orbital stability analysis of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2021. — 1925. — 012013.
74. *Sutherland R., Kolmanovsky I. K., Girard A. R.* Attitude control of a 2U cubesat by magnetic and air drag torques// *IEEE Trans. Control Syst. Techn.* — 2018. — 27, № 3. — P. 1047–1059.
75. *Tortora P., Oshman Y., Santoni F.* Spacecraft angular rate estimation from magnetometer data on using and analytic predictor// *J. Guid. Control Dynam.* — 2004. — 27, № 3. — P. 365–373.
76. *Wertz J.* Spacecraft Attitude Determination and Control. — Dordrecht: D. Reidel, 1978.
77. *Yang Y.* Controllability of spacecraft using only magnetic torques// *IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst.* — 2016. — 52, № 2. — P. 955–962.
78. *Zhou K., Huang H., Wang X., Sun L.* Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient// *Aerospace Sci. Techn.* — 2017. — 60. — P. 115–123.

Морозов Виктор Михайлович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: moroz@imec.msu.ru

Каленова Вера Ильинична

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: kalenova44@mail.ru

Рак Михаил Геннадьевич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: mihailrak@mail.ru



ДЕФОРМАЦИЯ НОРМ МИНКОВСКОГО В ЕВКЛИДОВЫ НОРМЫ

© 2023 г. В. Ю. РОВЕНСКИЙ

Аннотация. Изучаются деформации норм Минковского с кусочно гладкими индикатрисами, определяемыми линейно независимыми 1-формами и кусочно гладкой положительной функцией. Такая деформация евклидовой нормы обобщает классические (α, β) -нормы М. Мацумото. Показано, что любую норму Минковского можно деформировать в евклидову норму композицией таких деформаций.

Ключевые слова: выпуклое тело, норма Минковского.

DEFORMING MINKOWSKI NORMS TO EUCLIDEAN NORMS

© 2023 V. Yu. ROVENSKI

ABSTRACT. We study deformations of Minkowski norms with piecewise smooth indicatrices determined by linearly independent 1-forms and a piecewise smooth positive function. Such a deformation of the Euclidean norm generalizes the classical (α, β) -norms by M. Matsumoto. We show that any Minkowski norm can be deformed into a Euclidean norm by a composition of such deformations.

Keywords and phrases: convex body, Minkowski norm.

AMS Subject Classification: 52A20, 53B40

1. Введение. Некоторый интерес геометров вызывает деформация финслеровых структур на многообразиях (см., например, [1, 5, 7]); эти структуры состоят из норм Минковского на касательных пространствах. С другой стороны, аппроксимация выпуклых тел часто рассматривалась в теории выпуклости, дискретной геометрии, теории нормированных пространств, в геометрических алгоритмах и теории оптимизации. В данной работе мы рассматриваем норму Минковского F в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) как «несимметричную» норму (т.е. допустима ситуация, когда $F(-y) \neq F(y)$), индикатриса которой $\{y \in \mathbb{R}^n : F(y) = 1\}$ является кусочно гладкой выпуклой гиперповерхностью. Рассмотрим деформации норм Минковского F , введенные в [5], и соответствующие им точечные выпуклые тела, F -единичные шары и их центры в $\mathbb{R}^n$, деформация которых определяется набором $p < n$ линейно независимых 1-форм и кусочно гладкой положительной функцией p переменных. Применение такой деформации к евклидовой норме α обобщает классические (α, β) -нормы (см. [2, 6]) и дает нормы Минковского, определенные в [4] для $p < n$ (см. также [3] для случая $p = 2$); их индикатрисы связывали выпуклые тела с $(n - p)$ -мерными осями вращения, проходящими через начало координат.

Следующий вопрос об отображении между двумя парами (B_i, q_i) , $i = 1, 2$, где B_i — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, а q_i — точка внутренности B_i , было сформулировано в [5]: *когда (B_1, q_1) можно деформировать в (B_2, q_2) композицией конечного числа этих деформаций?*

В [5] показано, что эллипсоид в $(\mathbb{R}^n, \alpha)$ можно деформировать в α -единичный шар за конечное число таких деформаций с $p = 1$. В этой работе мы докажем (теорема 4), что любое выпуклое тело (B, q) в $(\mathbb{R}^n, \alpha)$ можно деформировать в α -единичный шар посредством композиции $4n - 4$ таких деформаций с $p = 1$ и одной деформации с $p = n - 1$. Отметим, что деформацию с $p = n - 1$ можно заменить несколькими деформациями с $p = 1$. При $n = 2$ можно использовать только пять деформаций с $p = 1$ (следствие 1).

2. Предварительные результаты. Напомним необходимые результаты и примеры из [5].

Определение 1. Пусть F — норма Минковского на $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ — последовательность $p < n$ линейно независимых 1-форм на $\mathbb{R}^n$ с нормами $F(\beta_i) < \delta_i$ и $\phi : \prod_{i=1}^p [-\delta_i, \delta_i] \rightarrow (0, \infty)$ — кучно гладкая функция. Тогда $T_{\mathbf{b}, \phi}$ -деформация $\bar{F}$ нормы F (или выпуклого тела, определяемого неравенством $\{F \leq 1\}$) задается выражением

$$\bar{F}(y) = F(y) \phi(s_1, \dots, s_p), \quad \text{где } s_i = \beta_i(y)/F(y) \text{ и } y \neq 0. \quad (1)$$

Это порождает отображение $T_{\mathbf{b}, \phi} : F \mapsto \bar{F}$ из подходящего множества $D_{\mathbf{b}, \phi}$ норм Минковского во все пространство таких норм: $F \in D_{\mathbf{b}, \phi}$, если $\bar{F}$ — норма Минковского.

Образом $T_{\mathbf{b}, \phi}(\alpha)$ евклидовой нормы α называется так называемая $(\alpha, \mathbf{b})$ -норма с $p < n$ (см. [4]); его индикатриса представляет собой гиперповерхность вращения с p -мерной осью, натянутой на $\{\beta_1^\sharp, \dots, \beta_p^\sharp\}$; здесь и далее $\sharp : T^*M \rightarrow TM$ — «музыкальный» изоморфизм по отношению к скалярному произведению, определенному α . При $p = n$ понятие $T_{\mathbf{b}, \phi}$ -деформации лишено смысла, поскольку такая деформация позволила бы деформировать F до любой другой нормы $\bar{F}$. При $p = 1$ формула (1) определяет $T_{\beta, \phi}$ -деформацию, которая была названа β -заменой в [7] и (F, β) -нормой в [1]. Композиция $k < n$ деформаций с $p = 1$ имеет вид одной деформации с $p = k$, но обратное неверно. Образ $T_{\beta, \phi}(\alpha)$ нормы α — это просто (α, β) -норма, играющая важную роль в финслеровой геометрии, (см. [2, 6]).

Теорема 1. Пусть $\phi(s_1, \dots, s_p) \geq c > 0$ для $(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{R}^p$, $p < n$ (см. определение 1, α — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$). Тогда деформация

$$T_{\mathbf{b}, \phi} : (D_{\mathbf{b}, \phi}, d_H) \rightarrow (\text{Mink}_n, d_H)$$

является липшиц-непрерывной с константой $1/c$, где d_H — расстояние Хаусдорфа, определяемое нормой α .

Теорема 2. Следующие три условия для $F \in \text{Mink}_n$ эквивалентны:

- (i) F является $(\alpha, \mathbf{b})$ -нормой с $p < n$;
- (ii) $\{F = 1\}$ имеет p -мерную ось вращения в $(\mathbb{R}^n, \alpha)$;
- (iii) F можно $T_{\mathbf{b}, \phi}$ -деформировать до евклидовой нормы α .

В частности, норма Минковского F в $\mathbb{R}^n$ может быть деформирована в евклидову норму одной $T_{\beta, \phi}$ -деформацией тогда и только тогда, когда $\{F = 1\}$ имеет ось вращения.

Пример 1. О частных случаях (α, β) -норм известно довольно много. Они связаны со специальными $T_{\beta, \phi}$ -деформациями норм Минковского.

1. При $\phi = 1 + s$, $|s| < 1$, получаем норму Рандерса $F = \alpha + \beta$, введенную физиком Г. Рандерсом для изучения единой теории поля. Деформация Рандерса возникает при $\bar{F} = F + \beta$ с $F(\beta) < 1$.

2. Квадратичная норма $F = (\alpha + \beta)^2/\alpha$, т. е. $\phi = (1 + s)^2$ с $|s| < 1$, появляется во многих геометрических задачах. Квадратичная деформация задается формулой $\bar{F} = (F + \beta)^2/F$, где $F(\beta) < 1$.

3. Перенос произвольной нормы Минковского F в $(\mathbb{R}^n, \alpha)$ на вектор w в норму Минковского $\bar{F}$ неявно задается уравнением $F(v/\bar{F}(v) - w) = 1$, $v \neq 0$, аналогично тому, как описываются решения навигационной задачи Цермело (см., например, [6]). Если индикатриса нормы Минковского $\bar{F}$ в $(\mathbb{R}^n, \alpha)$ обладает вращательной симметрией, то согласно теореме 2 норма $\bar{F}$ имеет тип (α, β) . Получим выражение для функции ϕ , например, для случая, когда $\{F = 1\}$ — единичная α -сфера,

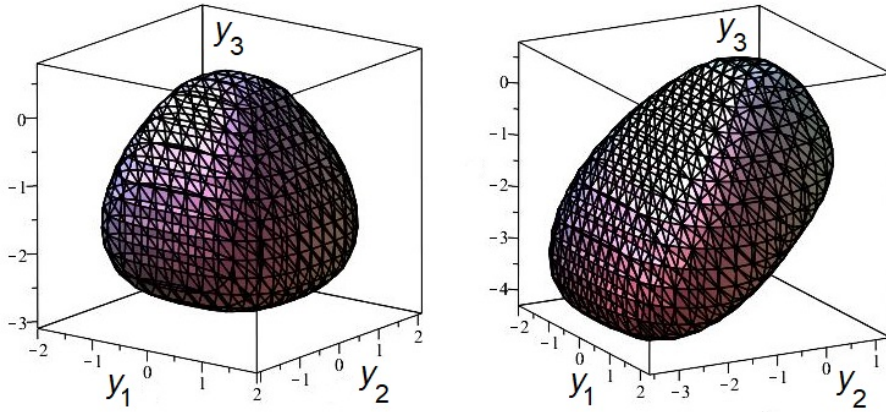


Рис. 1. Индикатриса 3-корневой нормы в $\mathbb{R}^3$ после квадратичной деформации и квадратичной деформации со сдвигом.

сдвинутая на вектор ce_1 , где $|c| < 1$. Полагая $\bar{F} = \alpha \phi(\beta/\alpha)$ для функции $\phi > 0$ и 1-формы $\beta(y) = cy_1$, получим два представления для $\{F = 1\}$:

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2} \phi\left(c y_1 / \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}\right) = 1, \quad (y_1 - c)^2 + \sum_{i=2}^n y_i^2 = 1.$$

Положив

$$s = c y_1 / \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2},$$

получим $y_1 = (s/c)(s + (s^2 + 1 - c^2)^{1/2})$. Таким образом,

$$\phi = \frac{1}{s + \sqrt{s^2 + 1 - c^2}}.$$

4. Частным случаем $T_{\mathbf{b},\phi}$ -деформации при $p = 2$ является *сдвинутая* T_{ϕ,β_1} -деформация

$$\bar{F} = F\tilde{\phi}(\beta_1/F) + \beta_2,$$

т. е. $\phi(s_1, s_2) = \tilde{\phi}(s_1) + s_2$, что для $F = \alpha$ связано с навигацией Цермело. На рис. 1 изображена индикатриса 3-корневой нормы $|y^1|^3 + |y^2|^3 + |y^3|^3 = 1$ в $\mathbb{R}^3$ для (а) квадратичной деформации с $p = 1$ и $\beta = 0,4 dy^3$, (б) *смещенной квадратичной деформации* с $p = 2$ и $\beta_1 = 0,4 dy^3$, $\beta_2 = 0,3 dy^2$.

Используя композиции $T_{\mathbf{b},\phi}$ -деформаций, можем определить отношение эквивалентности на множестве Mink_n .

Можем записать $\bar{F} \stackrel{p}{\sim} F$ для $F, \bar{F} \in \text{Mink}_n$ и $p < n$, если существуют деформации $T_{\mathbf{b}^i, \phi_i}$, $i \leq m$, такой длины p , что

$$F_1 = F\phi_1(\mathbf{b}^1/F), \quad \dots \quad \bar{F} = F_{m-1}\phi_m(\mathbf{b}^m/F_{m-1}).$$

Это отношение эквивалентности на Mink_n (см. теорему 3, приведенную ниже); например, любые две евклидовы нормы в $\mathbb{R}^n \stackrel{1}{\sim}$ эквивалентны (см. [5]).

Другими словами, пусть (B_i, q_i) , $i = 1, 2$, — два точечных (телесных) эллипсоида в $\mathbb{R}^n$; тогда (B_1, q_1) можно деформировать в (B_2, q_2) последовательностью $T_{\beta, \phi}$ -деформаций. Множества норм Минковского в $\mathbb{R}^n$ и точечных выпуклых тел остаются во взаимно однозначном соответствии друг другу, устанавливаемом с помощью индикатрис норм. Таким образом, можно написать $(B_1, q_1) \stackrel{p}{\sim} (B_2, q_2)$ для точечных выпуклых тел, если соответствующие нормы $\stackrel{p}{\sim}$ -эквивалентны.

Теорема 3. Для любой $T_{\nu\beta, \phi}$ -деформации норм Минковского F в $\bar{F}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, удовлетворяющей условию

$$\phi - \sum_i s_i \dot{\phi}_i > 0, \quad (2)$$

существует обратная $T_{\mathbf{b},\psi}$ -деформация $\bar{F}$ в F (с тем же $\mathbf{b}$), удовлетворяющая неравенству

$$\psi - \sum_i t_i \dot{\psi}_i > 0.$$

В частности, любая $(\alpha, \mathbf{b})$ -норма может быть $T_{\mathbf{b},\phi}$ -деформирована в евклидову норму α .

3. Основные результаты. Сформулируем основной результат работы.

Теорема 4. Пусть α — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Любая норма Минковского F в $(\mathbb{R}^n, \alpha)$ может быть деформирована в α при помощи композиции $4n - 3$ деформаций (1) с $p = 1$ и одной деформации с $p = n - 1$. Другими словами, любое выпуклое тело (B, q) в $\mathbb{R}^n$ может быть преобразовано в единичный α -шар при помощи композиции $4n - 4$ деформаций с $p = 1$ и одной деформации с $p = n - 1$.

Доказательство. Впишем n -мерную бипирамиду Π в $\{F = 1\}$, затем найдем $4n - 4$ преобразований T_{β_i, ϕ_i} , композиция которых деформирует $\{F = 1\}$ в Π . Наконец, преобразуем Π в единичную сферу $\{\alpha = 1\}$, используя преобразование $T_{\mathbf{b}, \tilde{\phi}}$ с $p = n - 1$. Даже для гладкой функции F на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ промежуточные нормы (в построенной нами последовательности) в некоторых точках недифференцируемы, поэтому, сглаживая функции ϕ_i в окрестностях их особенностей, приближенно получаем сферу $\{\alpha = 1\}$.

1. Пусть L — $(n - 2)$ -мерное подпространство (проходящее через начало координат O), а $L^\perp$ — плоскость, проходящая через O ортогонально к L . Пусть $l(0) \subset L^\perp$ — прямая, проходящая через O ортогонально к L . Тогда $l(0)$ пересекает $\{F = 1\}$ в двух точках $q(0)$ и $\tilde{q}(0)$. Предположим, что

$$|Oq(0)| > |O\tilde{q}(0)|.$$

Повернув $l(0)$ вокруг L на угол θ (который можно рассматривать как полярный угол в $L^\perp$), получим прямую $l(\theta) \subset L^\perp$, пересекающую $\{F = 1\}$ в двух точках $q(\theta)$ и $\tilde{q}(\theta)$, которые непрерывно зависят от $\theta \in [0, \pi]$. Отметим, что для $\theta = \pi$

$$|Oq(\pi)| = |O\tilde{q}(0)| < |Oq(0)| = |O\tilde{q}(\pi)|.$$

По соображениям непрерывности существует такое $\theta \in [0, \pi]$, что $|Oq(\theta)| = |O\tilde{q}(\theta)|$. Теперь изменим обозначения, положив $q_1 = q(\theta)$, $\tilde{q}_1 = \tilde{q}(\theta)$ и $l_1 = l(\theta)$.

2. Повороты в $\mathbb{R}^n$ с фиксированной осью l_1 находятся во взаимно однозначном соответствии со всеми поворотами в подпространстве V^{n-1} , ортогональном l_1 . Пусть F_1 — ограничение F на V^{n-1} ; тогда $\{F_1 = 1\} = \{F = 1\} \cap V^{n-1}$. Повторяем процедуру, аналогичную шагу 1, в V^{n-1} и найдем прямую l_2 , ортогональную l_1 и пересекающую $\{F_1 = 1\}$ в таких двух точках q_2 и $\tilde{q}_2$, что $|Oq_2| = |O\tilde{q}_2|$. Повторяя эту процедуру $n - 1$ раз, найдем попарно ортогональные прямые $l_1, \dots, l_{n-1}$, проходящие через O и такие, что

$$|Oq_i| = |O\tilde{q}_i|, \quad \{q_i, \tilde{q}_i\} = l_i \cap \{F = 1\}, \quad i < n.$$

Прямая l_n , ортогональная всем $l_1, \dots, l_{n-1}$, пересекает $\{F = 1\}$ в точках q_n и $\tilde{q}_n$.

Выпуклая бипирамида Π с вершинами $\{q_i, \tilde{q}_i\}$, $\mathbb{B} \leq n$, представляет собой объединение двух пирамид Π^+ и Π^- над $(n - 1)$ -мерным параллелепипедом $\tilde{\Pi}$ (общее основание) с вершинами $\{q_i, \tilde{q}_i\}$, $i < n$: Π^+ с вершиной q_n и его зеркальное отражение Π^- относительно основания с вершиной $\tilde{q}_n$.

3. Деформируем $\{F = 1\}$ в бипирамиду $\Pi = \Pi^+ \cup \Pi^-$ с помощью $4n - 4$ преобразований с $p = 1$. Занумеруем $2n - 2$ грани $\tilde{\Pi}$ и возьмем такую 1-форму β_1 , что $\alpha(\beta_1) = 1$ и вектор $\beta_1^\sharp$ ортогонален грани, натянутой на q_n , и первой грани Q_1 $\tilde{\Pi}$. Обратим внимание, что функция $\phi_1 = \max\{1, s/\beta_1(q_n)\}$ такова, что T_{β_1, ϕ_1} сохраняет часть $\{F = 1\}$ в полупространстве $\{\beta_1 \leq 1\}$ и отображает остальную часть $\{F = 1\}$ в опорную гиперплоскость $\{\beta_1 = 1\}$ грани Q_1 . Итак, T_{β_1, ϕ_1} отображает $\{F = 1\}$ в выпуклую гиперповерхность $\{F_1 = 1\} = \{F = 1\} \cap \{\beta_1 \leq 1\}$ (с особенностями на пересечении $\{F = 1\}$ с гиперплоскостью $\{\beta_1 = 1\}$). Аналогично находятся все $4n - 4$ преобразований T_{β_i, ϕ_i} (для $2n - 2$ боковых граней Π^+ и $2n - 2$ боковых граней Π^-), композиция которых $\tilde{T} = T_{\beta_1, \phi_1} \circ \dots \circ T_{\beta_{4n-4}, \phi_{4n-4}}$ отображает $\{F = 1\}$ в Π .

4. Поскольку Π имеет гиперплоскости симметрии, например, подпространство, ортогональное Oq_1 , по теореме 2 (случай $p = n - 1$) Π является индикатрисой $(\alpha, \mathbf{b})$ -нормы с $p = n - 1$. По

теореме 2 (о том, что $(\alpha, \mathbf{b})$ -норма может быть $T_{\mathbf{b}, \tilde{\phi}}$ -деформирована в α), можно взять 1-формы $\tilde{\beta}_i$, двойственные векторам $\vec{Oq_i}/\alpha(\vec{Oq_i})$ при $i = 2, \dots, n$, а затем применить равенство

$$\alpha(y) = \tilde{\phi}(\tilde{\beta}_2(y), \dots, \tilde{\beta}_n(y)), \quad y \in \Pi, \quad p = n - 1$$

(см. (1)). Находим такую функцию $\tilde{\phi}$ от переменных $(s_1, \dots, s_{n-1})$, что $T_{\mathbf{b}, \tilde{\phi}}$ с $\mathbf{b} = (\tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n)$ деформирует Π в единичную сферу $\{\alpha = 1\}$. Таким образом, композиция $T_{\mathbf{b}, \tilde{\phi}} \circ \tilde{T}$ деформирует F в евклидову норму α . $\square$

Следствие 1. Любое выпуклое тело (B, q) на евклидовой плоскости можно преобразовать в единичный круг комбинацией пяти деформаций (1) с $p = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Javaloyes M. A., Sánchez M. On the definition and examples of Finsler metrics// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 2014. — 13, № 3. — P. 813–858.
2. Matsumoto M. Theory of Finsler spaces with (α, β) -metric// Repts. Math. Phys. — 1992. — 31, № 1. — P. 43–83.
3. Rajabi T., Sadeghzadeh N. A new class of Finsler metrics// Mat. Vesnik. — 2021. — 73, № 1. — P. 1–13.
4. Rovenski V. The new Minkowski norm and integral formulae for a manifold with a set of one-forms// Balkan J. Geom. Appl. — 2018. — 23, № 1. — P. 75–99.
5. Rovenski V., Walczak P. Deforming convex bodies in Minkowski geometry// Int. J. Math.. — 33, № 1. — 2250003.
6. Shen Y.-B., Shen Z. Introduction to Modern Finsler Geometry. — World Scientific, 2016.
7. Shibata C. On invariant tensors of β -changes of Finsler metrics// J. Math. Kyoto Univ. — 1984. — 24. — P. 163–188.

Ровенский Владимир Юзефович
Хайфский университет, Хайфа, Израиль
E-mail: vrovenski@univ.haifa.ac.il



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 112–122
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-112-122

УДК 514.76

ОБОБЩЕННАЯ ТЕХНИКА БОХНЕРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ ПРОЕКТИВНЫХ И КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2023 г. С. Е. СТЕПАНОВ, Й. МИКЕШ, И. И. ЦЫГАНОК

Аннотация. Рассматривается обобщенная техника Бохнера, являющаяся естественным развитием классической техники Бохнера. Доказаны теоремы об исчезновении для солитонов Риччи, конформных и проективных отображений полных римановых многообразий.

Ключевые слова: техника Бохнера, полное риманово многообразие, теорема об исчезновении, солитон Риччи, конформное отображение, проективное отображение.

GENERALIZED BOCHNER TECHNIQUE AND ITS APPLICATION TO THE STUDY OF PROJECTIVE AND CONFORMAL MAPPINGS

© 2023 S. E. STEPANOV, J. MIKEŠ, I. I. TSYGANOK

ABSTRACT. In this paper, we consider the generalized Bochner technique, which is a natural development of the classical Bochner technique. As an illustration, we prove some vanishing theorems on Ricci solitons, conformal and projective mappings of complete Riemannian manifolds.

Keywords and phrases: Bochner technique, complete Riemannian manifold, vanishing theorem, Ricci soliton, conformal mapping, projective mapping.

AMS Subject Classification: 53C20

Техника Бохнера считается частью
базового словаря каждого геометра.
Хун-Си У (Hung-Hsi Wu)

1. От классической техники Бохнера к обобщенной технике Бохнера. Прототипом обобщенной техники Бохнера является знаменитая классическая техника Бохнера, впервые предложенная С. Бохнером, К. Яно, А. Лихнеровичем и др. в 1950–1960-х гг. для изучения взаимосвязи между топологией и кривизной компактного безграничного риманова многообразия (см., например, [6]). Этот метод используется для доказательства теоремы об исчезновении для нуль-пространства оператора Лапласа, допускающего разложение Вейценбока, на компактных многообразиях (см. [1, р. 53]). В результате появилось большое количество теорем, основанных на

Работа выполнена при поддержке гранта «Алгебраические и геометрические структуры» университета им. Ф. Палацко (проект IGA PrF 2022017).

классической технике Бохнера, утверждающих, что некоторые геометрически интересные тензорные поля и отображения обращаются в нуль в предположении положительности или отрицательности кривизны. Наиболее известными результатами классической техники Бохнера являются теорема Д. Мейера и С. Галло (см. [18]) об обращении в нуль чисел Бетти компактных римановых многообразий и теорема Дж. Эллса и Дж. Х. Сэмпсона (см. [47, р. 465]) о несуществовании гармонических отображений компактных римановых многообразий. Классическая техника Бохнера используется в многочисленных статьях, монографиях и аналитических обзорах (см., например, [1, 10, 18, 31, 41, 47, 49]). Кроме того, имеются работы, направленные на развитие классической техники Бохнера (см. [9, 32, 33]).

В настоящее время существуют две различные точки зрения на классическую технику Бохнера (см. обзорную статью [10]). Первая основана на теореме Грина о дивергенции (см. [2, 6]):

$$\int_M (\operatorname{div} X) d\operatorname{Vol} = 0,$$

где X — гладкое векторное поле на n -мерном компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) без границы, а $d\operatorname{Vol}$ — его n -форма объема. Существует множество применений этой формулы. Например, рассмотрим солитон Риччи (ξ, λ, g) , который дает автомодельное решение уравнения потока Риччи (см. [16]). Напомним, что тройка (ξ, λ, g) на n -мерном гладком многообразии M называется солитоном Риччи, если выполняется следующее уравнение:

$$-2\operatorname{Ric} = L_\xi g + 2\lambda g,$$

где Ric — тензор Риччи метрики g , L_ξ — производная Ли тензора g по ξ , а λ — константа (см. [16, 45]).

Для произвольного солитона Риччи (ξ, λ, g) мы получили в [41] интегральную формулу

$$\int_M (\operatorname{div} X) d\operatorname{Vol} = 0 = \int_M (-L_\xi s + (s + n\lambda)^2) d\operatorname{Vol}, \quad (1)$$

где $X = (\operatorname{div} \xi)\xi$. В частности, из (1) следует, что на n -мерном компактном ориентированном многообразии M не существует такого солитона Риччи, что $L_\xi s \leq 0$ и $L_\xi s < 0$ в некоторой точке многообразия M или, вообще говоря,

$$\int_M (L_\xi s) d\operatorname{Vol} < 0.$$

Для этого случая сформулируем следующую теорему.

Теорема 1.1. *На n -мерном компактном многообразии M не существует такого солитона Риччи (ξ, λ, g) , что $L_\xi s$ полуотрицательна и отрицательна хотя бы в одной точке или, вообще говоря,*

$$\int_M (L_\xi s) d\operatorname{Vol} < 0.$$

Кроме того, мы доказали в [5] следующее предложение.

Теорема 1.2. *Если скалярная кривизна s солитона Риччи (ξ, λ, g) на n -мерном компактном многообразии M удовлетворяет условию $L_\xi s \leq 0$, то g — метрика Эйнштейна.*

С другой стороны, произвольное трехмерное многообразие Эйнштейна (M, g) имеет постоянную секционную кривизну (см. [1]). Следовательно, если (ξ, λ, g) — такой сжимающийся солитон Риччи на трехмерном односвязном компактном многообразии M , что $L_\xi s \leq 0$, то он изометричен евклидовой сфере S^3 .

В заключение напомним, что солитон Риччи называется *устойчивым*, *сжимающимся* или *расширяющимся*, если $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ или $\lambda > 0$ соответственно. Кроме того, с точностью до диффеоморфизма и в зависимости от знака λ солитон Риччи (ξ, λ, g) гомотетически сжимается,

остаётся стационарным или расширяется под действием потока Риччи. Сжимающиеся и стационарные солитоны Риччи являются фундаментальными объектами в изучении потоков Риччи, поскольку они появляются как пределы разрушения сингулярностей.

Вторая точка зрения на классическую технику Бохнера основана на *теореме Хонфа* (см. [2, 6]): каждая гармоническая (субгармоническая и супергармоническая) функция $\varphi \in C^2 M$ постоянна на компактном римановом многообразии (M, g) без границы. Напомним, что функция $\varphi \in C^2 M$ называется субгармонической (соответственно супергармонической или гармонической), если $\Delta\varphi \geq 0$ (соответственно $\Delta\varphi \leq 0$ или $\Delta\varphi = 0$) для оператора Лапласа—Бельтрами $\Delta\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi)$.

Например, если $\varphi = 2^{-1}\|X\|^2$ и X — гармоническое векторное поле на (M, g) , где $\operatorname{div} X = 0$ и $\operatorname{Alt}(\nabla X) = 0$ (см. [6]). В этом случае легко получаем

$$\Delta\varphi = \operatorname{Ric}(X, X) + \|\nabla X\|^2 \quad (2)$$

(см. также [6]). С другой стороны, если X — вектор Киллинга, то X порождает однопараметрическую группу изометрий многообразия (M, g) . В этом случае $L_\xi g = 0$ и в силу [6] получаем равенство

$$\Delta\varphi = \operatorname{Ric}(X, X) - \|\nabla X\|^2. \quad (3)$$

Кривизна Риччи риманова многообразия называется *квазиположительной*, если она неотрицательна всюду и строго положительна в любом направлении (по крайней мере) в одной точке (см. [46]). Тогда из (2) следует теорема Майера о том, что первое число Бетти компактного многообразия квазиположительной кривизны Риччи равно нулю (см. [6]). С другой стороны, кривизна Риччи риманова многообразия называется *квазиотрицательной*, если она неположительна всюду и строго отрицательна в любом направлении (по крайней мере) в одной точке (см. [46]). Тогда из (3) следует, что на компактном многообразии квазиотрицательной кривизны Риччи не существует однопараметрических групп изометрий (см. [6, 46]).

Классические методы Бохнера получили существенное развитие и успешно применялись к финслеровым (см., например, обзорные статьи [48]) и лоренцевым многообразиям, включая общую теорию относительности (см., например, [4, 38, 41, 42]) за последние сорок лет.

С другой стороны, начиная с 1970-х гг. были разработаны методы геометрического анализа (см., например, монографии последних десятилетий [24, 26, 34, 35, 37]). Геометрический анализ также включает глобальный анализ, который касается изучения дифференциальных уравнений на многообразиях и связи между дифференциальными уравнениями и топологией. В 1980-е гг. К. Уленбек, К. Таубс, С.-Т. Яу, Р. Шоэн и Р. Гамильтон своими фундаментальными работами положили начало особенно интересной и продуктивной эре геометрического анализа, которая продолжается и по сей день. Выдающимся достижением стало решение Г. Перельманом гипотезы Пуанкаре, завершившее программу, инициированную и в значительной степени осуществленную Р. Гамильтоном (см. [16, 45]). Другим известным результатом является теорема С.-Т. Яу и Р. Шоэна (см. [40]), которая является обобщением теоремы Дж. Элса и Дж. Х. Сэмпсона на случай полных римановых многообразий.

В результате почти все теоремы об исчезновении классической техники Бохнера приняли форму *теорем типа Лиувилля*. В свою очередь, новый метод исследования позже получил название *обобщенной техники Бохнера* (см., например, [35]). Среди прочего, этот метод изучает связи между геометрией полного (некомпактного) риманова многообразия и глобальным поведением его субгармонических, супергармонических и выпуклых функций в предположениях либо о кривизне, либо о росте объема геодезических шаров. Сегодня новый метод исследования не так популярен среди геометров, как классический метод Бохнера. В следующих разделах будут представлены различные практические приложения геометрического анализа.

2. Новые формы теоремы о дивергенции и их приложения к теории солитонов Риччи. В этом разделе рассмотрим новые формы, которые приняла теорема Грина в обобщенной технике Бохнера, и их приложения. А именно, существуют некоторые $L^p(M, g)$ -расширения классической теоремы Грина о дивергенции на полные римановы многообразия, полученные методами геометрического анализа. Во-первых, сформулируем следующую теорему из [17].

Теорема 2.1. Пусть (M, g) — полное риманово многообразие, а X — гладкое векторное поле на (M, g) , удовлетворяющее условиям $\|X\| \in L^1(M, g)$ и $\operatorname{div} X \in L^1(M, g)$. Тогда

$$\int_M (\operatorname{div} X) \, d\operatorname{Vol} = 0,$$

где $\|X\|$ — норма векторного поля X , индуцированная метрикой g .

Теорема 2.1 влечет следующий факт.

Следствие 2.1. Пусть (ξ, λ, g) — солитон Риччи на таком n -мерном гладком многообразии M , что (M, g) — полное риманово многообразие, $\|\xi\| \in L^1(M, g)$ и $(s + n\lambda) \in L^1(M, g)$, где s — скалярная кривизна метрики g . Если $L_\xi s \leq 0$ всюду на M , то g — метрика Эйнштейна.

Позже Л. Карп представил в [27] следующую обобщенную версию теоремы 2.11.

Теорема 2.2. Пусть (M, g) — полное некомпактное риманово многообразие, а X — гладкое векторное поле на (M, g) , удовлетворяющее условию

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_{B(r)/B(2r)} \|X\| \, d\operatorname{Vol} = 0$$

где $B(r)$ — геодезический шар радиуса r с центром в некоторой фиксированной точке $x \in M$. Если $\operatorname{div} X$ имеет интеграл, то

$$\int_M (\operatorname{div} X) \, d\operatorname{Vol} = 0.$$

В заключение сформулируем третий окончательный вариант обобщенной теоремы Грина о дивергенции (см. [12, 13]).

Теорема 2.3. Пусть X — такое гладкое векторное поле на связном полном, некомпактном и ориентированном римановом многообразии (M, g) , что $\operatorname{div} X \geq 0$ (или $\operatorname{div} X \leq 0$) всюду на (M, g) . Если норма $\|X\| \in L^1(M, g)$, то $\operatorname{div} X = 0$.

Рассмотрим здесь приложение обобщенной теоремы о расходимости (теоремы 2.3): на основе этой теоремы в [3] была доказана следующая теорема о полном солитоне Риччи.

Теорема 2.4. Солитон Риччи (ξ, λ, g) на n -мерном односвязном многообразии M является эйнштейновым, если g — полная метрика, $\|\xi\| \in L^1(M, g)$ и скалярная кривизна s метрики g лежит в следующих пределах:

- (i) $s \leq n|\lambda|$ или $s \geq n|\lambda|$ для сжимающегося солитона (ξ, λ, g) ,
- (ii) $s \leq -n|\lambda|$ или $s \geq -n|\lambda|$ для расширяющегося солитона (ξ, λ, g) ,
- (iii) $s \leq 0$ или $s \geq 0$ для стационарного солитона (ξ, λ, g) .

Еще одно интересное приложение теоремы об обобщенной дивергенции 2.3 можно найти в [44].

3. Принцип максимума Хопфа и его применение к изучению конформных и проективных отображений. Существуют различные формы принципа максимума, начиная от его классической формулировки в форме Хопфа до обобщений принципа максимума Омори—Яу на бесконечности; см. [34], где приведены приложения к ряду геометрических задач в постановке полных римановых многообразий в предположениях либо о кривизне, либо о росте объема геодезических шаров. Они составляют часть обобщенной техники Бохнера. *Принцип максимума Хопфа* в теории эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка на римановых многообразиях (см., например, [34, 36]) утверждает, что если $\Delta\varphi \geq 0$ и φ достигает локального максимального значения в некоторой точке, то функция φ постоянна (это классический и фундаментальный результат). Очевидно, что прототипом известной теоремы Хопфа классической техники Бохнера является принцип максимума Хопфа обобщенной техники Бохнера. Рассмотрим его приложения к классической теории конформных и проективных отображений.

Диффеоморфизм $f : (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ называется *конформным отображением*, если существует такая гладкая функция σ на $\bar{M}$, что $f^*\bar{g} = e^{2\sigma}g$, т. е. обратный образ метрики $\bar{g}$ пропорционален g (см. [30]). Заметим, что последние уравнения можно переписать в эквивалентной форме $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ относительно f -согласованных общих координат на M и $\bar{M}$ (см. [30]). В частности, если функция σ является константой, то $f : (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ является *гомотетическим отображением*.

В этом случае, если обозначить через s и $\bar{s}$ скалярные кривизны (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно, то имеет место следующее равенство (см. [30]):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2(n-1)} (e^{-2\varphi} \bar{s} - s) + \frac{1}{2} (n-2) g(d\varphi, d\varphi) \quad (4)$$

при $\varphi = -\sigma$. Если предположить, что скалярные кривизны на U и $\bar{U} = f(U)$ удовлетворяют условиям $s \leq 0$ и $\bar{s} \geq 0$ соответственно, то $\Delta\varphi \geq 0$ для $n \geq 3$. В этом случае, если φ достигает локального максимального значения в некоторой точке U , то φ постоянна на U по принципу максимума Хопфа. Тогда из (4) заключаем, что σ постоянна на U . Следовательно, f — гомотетическое отображение и $s = \bar{s} = 0$ на U . Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ — римановы многообразия размерности $n \geq 3$ со скалярными кривизнами $s \leq 0$ и $\bar{s} \geq 0$, соответственно. Предположим, что существует такой конформный диффеоморфизм $f : (U, g) \rightarrow (\bar{U}, \bar{g})$ связных областей $U \subset M$ и $\bar{U} \subset \bar{M}$, что $f^*\bar{g} = e^{2\sigma}g$ на U . Если функция $-\sigma$ достигает локального максимума в некоторой точке $x \in U$, то отображение f является гомотетическим; более того, (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ имеют нулевую скалярную кривизну на U и $\bar{U}$ соответственно.

Замечание 3.1. В условиях теоремы 3.1 пусть $U = M$, M — компактное многообразие без края. Существует точка $x \in M$, в которой функция $\varphi = -\sigma$ достигает максимума. Таким образом, теоремы из [50] можно рассматривать как следствия теоремы 3.1.

С другой стороны, две римановы метрики g и $\bar{g}$ на связной области $U \subset M$ одного и того же гладкого многообразия M называются *поточечно проективно эквивалентными*, если каждая геодезическая метрики g в U является репараметризованной геодезической метрики $\bar{g}$. В этом случае имеем проективное преобразование $f : (U, g) \rightarrow (\bar{U}, \bar{g})$, которое совпадает с тождественным, вместо проективного отображения $f : (U, g) \rightarrow (\bar{U}, \bar{g})$, которое в общем случае $\bar{U} \neq U$ и f тождественным не является.

Кроме того, будем говорить, что метрики g и $\bar{g}$ поточечно аффинно эквивалентны в связной области $U \subset M$, если их связности Леви-Чивиты ∇ и $\bar{\nabla}$ совпадают. В этом случае, если обозначить через s скалярные кривизны (M, g) , то справедливо следующее равенство (см. [43]):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{n-1} (\text{trace}_g \bar{\text{Ric}} - s) + g(d\varphi, d\varphi),$$

где $\bar{\text{Ric}}$ — тензор Риччи метрики $\bar{g}$ и $\varphi = (n+1) \log(d\text{Vol}_{\bar{g}}/d\text{Vol})$.

В [43] при помощи принципа максимума Хопфа была доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть g и $\bar{g}$ — две поточечно проективно эквивалентные римановы метрики на связной области $U \subset M$ n -мерного многообразия M , $n \geq 2$, для которых $\text{trace}_g \bar{\text{Ric}} \geq s$ в каждой точке U , где s — скалярная кривизна метрики g , а $\bar{\text{Ric}}$ — тензор Риччи метрики $\bar{g}$. Из предположения, что функция $\varphi = (n+1) \log(d\text{Vol}_{\bar{g}}/d\text{Vol})$ достигает локального максимального значения в некоторой точке $x \in M$, следует, что g и $\bar{g}$ проективно эквивалентны на U тогда и только тогда, когда они являются поточечно аффинно эквивалентными метриками. Кроме того, если существует хотя бы одна точка окрестности U , в которой $\text{trace}_g \bar{\text{Ric}} > s$, то $\bar{g} = g$.

Замечание 3.2. Пусть $U = M$ и M — компактное многообразие. Тогда существует точка $x \in M$, в которой функция $\varphi = (n+1) \log(d\text{Vol}_{\bar{g}}/d\text{Vol})$ достигает максимума. В результате мы можем сформулировать следующие утверждения, являющиеся следствием теоремы 2.1 (см. также [28, теорема 3, следствие 4] и [15, теорема 1.3]).

4. Применение супергармонических функций к изучению конформных и проективных отображений. Начнем этот раздел с краткого обзора теории *параболических многообразий*, которая связана с супергармоническими функциями и является частью *обобщенной техники Бохнера*. С понятием параболического многообразия связан широкий класс эквивалентных свойств риманова многообразия, включая *ядро Грина*, *линейную емкость*, *броуновское движение* и др. Таким образом, имеется несколько эквивалентных определений параболичности полного риманова многообразия в различных терминах (см., например, [23]).

Одна из точек зрения на это понятие такова. Напомним, что $u \in C^2 M$ называется супергармонической функцией, если $\Delta u \leq 0$. Будем говорить, что риманово многообразие является *параболическим многообразием*, если оно не допускает непостоянных положительных супергармонических функций (см. [23, 24]). Полное риманово многообразие конечного объема является примером параболического многообразия (см. [7]).

Теорема 4.1. Пусть (M, g) — параболическое риманово многообразие размерности $n \geq 3$ (в частности, полное риманово многообразие конечного объема) со скалярной кривизной $s \leq 0$ и $(\bar{M}, \bar{g})$ — другое риманово многообразие со скалярной кривизной $\bar{s} \geq 0$. Если существует конформный диффеоморфизм $f : (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$, то он является гомотетическим отображением; более того, (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ имеют нулевую скалярную кривизну.

Доказательство. Полагая $\sigma = 2(n-2)^{-1} \log u$ для гладкой скалярной функции $u > 0$, получаем из (4) уравнение

$$\Delta u = \frac{n-2}{4(n-1)} \left(u s - u^{\frac{n+2}{n-2}} \bar{s} \right). \quad (5)$$

Из (5) заключаем, что если $s \leq 0$ и $\bar{s} \geq 0$, то $\Delta u \leq 0$. В этом случае ассоциированная функция u является супергармонической функцией. $\square$

Можно доказать теорему, аналогичную теореме 4.1 для проективных отображений (см. [8]).

Теорема 4.2. Пусть g и $\bar{g}$ — такие поточечно проективно эквивалентные римановы метрики на связном некомпактном многообразии M , что (M, g) — параболическое риманово многообразие. Тогда метрики g и $\bar{g}$ аффинно эквивалентны, если $\text{trace}_g \bar{\text{Ric}} \geq s$ или $\text{trace}_g \bar{\text{Ric}} \leq s$ и $(d \text{Vol}_{\bar{g}} / d \text{Vol})^{1/(n+1)}$ является ограниченной функцией.

5. Приложения субгармонических функций к изучению конформных и проективных отображений. Уравнение (5) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta u = \frac{n-2}{4(n-1)} \left(u s - u^{\frac{4}{n-2}} \bar{s} \right) u. \quad (6)$$

Если при этом скалярные кривизны (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ удовлетворяют условиям $s \geq 0$ и $\bar{s} \leq 0$ соответственно, то $u \geq 0$. По определению функция $u \in C^2 M$ называется *субгармонической*, если $\Delta u \geq 0$. Большое количество результатов о свойствах субгармонических функций на полных римановых многообразиях получено многими авторами, такими как Р. Грин и Х. У (By), А. Хубер, Л. Карп, С.-Т. Яу и др. В частности, напомним следующую известную теорему типа Лиувилля для субгармонических функций на полных римановых многообразиях: Пусть — неотрицательная гладкая субгармоническая функция на (M, g) . Тогда

$$\int_M u^p d \text{Vol} = \infty$$

для любого $1 < p < \infty$, если только u не является постоянной функцией (см. [52]).

Другими словами, если $u \in L^p(M, g)$ для любого $1 < p < \infty$, то u является константой $C > 0$ и, следовательно,

$$C^p \int_M d \text{Vol} < \infty.$$

Следовательно, если $\text{Vol}(M, g) = +\infty$, то $u \equiv 0$. С другой стороны, если $u > 0$, то многообразие (M, g) должно иметь конечный объем. Напомним, что каждое полное некомпактное риманово многообразие с неотрицательной кривизной Риччи имеет бесконечный объем (см. также [52]).

Закключаем, что справедливо следующее предложение.

Предложение 5.1. *Пусть (M, g) — полное риманово многообразие бесконечного объема. Тогда оно не имеет положительной субгармонической $L^p(M, g)$ -функции ни для какого $1 < p < \infty$. В частности, полное некомпактное риманово многообразие с неотрицательной кривизной Риччи не допускает положительной субгармонической $L^p(M, g)$ -функции ни при каком $0 < p < \infty$.*

С другой стороны, из (6) можно заключить, что если $s \geq 0$ и $\bar{s} \leq 0$, то $\Delta u \geq 0$ и, следовательно, u является положительной субгармонической функцией. В нашем случае $u > 0$ согласно определению, данному выше, а значит, многообразие (M, g) должно иметь конечный объем. Из вышеизложенного заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть (M, g) — полное некомпактное риманово многообразие размерности $n \geq 3$ с $\text{Ric} \geq 0$ и $(\bar{M}, \bar{g})$ — другое риманово многообразие с конформно связанной метрикой $f^*\bar{g} = u^{4/n-2}g$, где $u > 0$ — некоторая гладкая функция. Если $u \in L^p(M, g)$ при $0 < p < \infty$, то скалярная кривизна $\bar{s}$ многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$ не может быть неположительной.*

Замечание 5.1. Теорема 5.1 дополняет теорему Шоэна (см. [39]). Можно доказать теорему, аналогичную теореме 4.1, для проективных отображений (см. [8]).

6. Приложение выпуклых функций к изучению конформных и проективных отображений. Выпуклые функции являются примером субгармонических функций. В римановой геометрии выпуклые функции использовались, например, при исследовании структуры некомпактных многообразий положительной кривизны Чигером, Грином, Громоллом, Мейером, Сио-хамой, Ву и др. (см. [14, 19–22, 25]). Существование глобальных выпуклых функций на римановом многообразии имеет серьезные геометрические и топологические последствия. Например (см. [22]), каждое риманово многообразие размерности 2, допускающее глобальную локально непостоянную выпуклую функцию, должно быть диффеоморфно плоскости, цилиндру или открытой полосе Мёбиуса.

Напомним, что $u \in C^2M$ называется *выпуклой функцией*, если ее гессиан $\text{Hess}_g u := \nabla du$ положительно полуопределен. Используя данное определение и некоторые факты теории выпуклых функций, можно сформулировать и доказать следующую теорему и ее следствие.

Теорема 6.1. *Пусть $f : (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ — такой негомотетичный конформный диффеоморфизм полных римановых многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$, что $f^*\bar{S} \geq S$ для тензоров Схоутена S и $\bar{S}$ многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно. Тогда многообразие (M, g) имеет бесконечный объем.*

Доказательство. Пусть $f : (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ — такой конформный диффеоморфизм, что $f^*\bar{g} = e^{2\sigma}g$. Обозначим через S тензор Схоутена многообразия (M, g) , который вводится следующими тождествами:

$$S = \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{s}{2(n-1)} g \right). \quad (7)$$

Тензор Схоутена часто появляется в конформной геометрии из-за его относительно простого закона конформного диффеоморфизма:

$$\bar{S} = S - \nabla d\sigma + d\sigma \otimes d\sigma - \frac{1}{2} g(d\sigma + d\sigma, d\sigma) g. \quad (8)$$

В этом случае уравнения (8), определенные на (M, g) , можно переписать в виде

$$\text{Hess}_g \sigma = S - \bar{S} + d\sigma \otimes d\sigma - \frac{1}{2} g(d\sigma + d\sigma, d\sigma) g. \quad (9)$$

С другой стороны, полагая $\sigma = -\ln u$ для ассоциированной функции $u > 0$, получим $\bar{g} = u^{-2}g$. В этом случае уравнение (9) можно переписать в виде

$$\text{Hess}_g u = u \cdot (\bar{S} - S) + \frac{1}{2} u g(du, du) \cdot g. \quad (10)$$

Из (10) заключаем, что если $\bar{S} \geq S$, то $\text{Hess}_g u \geq 0$. В этом случае u — выпуклая функция. С другой стороны, теорема Яу утверждает, что полное риманово многообразие, допускающее непостоянную выпуклую функцию, имеет бесконечный объем (см. [51]). Следовательно, теорема верна. $\square$

С другой стороны, хорошо известна следующая теорема Бишоп и О'Нила: Если (M, g) — связное полное риманово многообразие конечного объема, то все выпуклые функции на (M, g) постоянны (см. [11]). В этом случае, принимая во внимание теорему 6.1, можем заключить, что имеет место следующее утверждение.

Следствие 6.1. Пусть $f : (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ — конформный диффеоморфизм полного риманова многообразия (M, g) конечного объема на другое риманово многообразие $(\bar{M}, \bar{g})$. Если $f^*\bar{S} \geq S$ для тензоров Схоутена S и $\bar{S}$ многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно, то f является гомотетическим отображением.

Замечание 6.1. Из неравенства $\bar{S} \geq S$ получаем, что $e^{2\sigma} \bar{s} \geq s$. Следовательно, если $\bar{s} \geq 0$ и $s \leq 0$, то выполняется второе неравенство.

С другой стороны, пусть g и $\bar{g}$ — две поточечно проективно эквивалентные римановы метрики на n -мерном ($n \geq 2$) C^∞ -многообразии M ; тогда выполняется уравнение

$$\text{Hess}_g \varphi = \frac{1}{n-1} (\bar{\text{Ric}} - \text{Ric}) + d\varphi \otimes d\varphi \quad (11)$$

(см. [43]), где $\varphi = (n+1) \log(d\text{Vol}_{\bar{g}}/d\text{Vol})$. В этом случае, если $\bar{\text{Ric}} \geq \text{Ric}$, то $\text{Hess}_g \varphi \geq 0$. Используя данное определение и известные факты теории выпуклых функций, можем сформулировать следующую теорему и ее следствие.

Теорема 6.2. Пусть g и $\bar{g}$ — такие две поточечно проективно эквивалентные римановы метрики на n -мерном ($n \geq 2$) многообразии M , что $\bar{\text{Ric}} \geq \text{Ric}$, где Ric и $\bar{\text{Ric}}$ — тензоры Риччи многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно. Тогда (M, g) имеет бесконечный объем.

Следствие 6.2. Пусть (M, g) — полное риманово многообразие конечного объема, а $\bar{g}$ — другая риманова метрика на M такая, что g и $\bar{g}$ — две поточечно проективно эквивалентные римановы метрики. Если $\bar{\text{Ric}} \geq \text{Ric}$, где Ric и $\bar{\text{Ric}}$ — тензоры Риччи многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно, то g и $\bar{g}$ — две аффинно эквивалентные римановы метрики на M .

Односвязное полное риманово многообразие неположительной кривизны называется многообразием Адамара (ср. теорему Картана—Адамара: Пусть (M, g) — n -мерное ($n \geq 2$) односвязное полное риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Тогда (M, g) диффеоморфно евклидову пространству R^n). В частности, не существует компактных односвязных многообразий, допускающих такую метрику. Далее, пусть $X \in T_x M$ — единичный вектор; дополним его до ортонормированного базиса $\{X, e_2, \dots, e_n\}$ касательного пространства T_x в произвольной точке $x \in M$. Тогда

$$\text{Ric}(X, X) = \sum_{a=2}^n \text{sec}(X \wedge e_a).$$

В этом случае из условия $\text{sec} \leq 0$ получаем $\text{Ric} \leq 0$, т. е. кривизна Риччи (M, g) неположительна. Если $\bar{g}$ — другая риманова метрика на (M, g) , для которой $\bar{\text{Ric}} \geq 0$ всюду на M и $\bar{g}$ поточечно проективно эквивалентна римановой метрике g , то получаем $\text{Hess}_g \varphi \geq 0$. Тогда функция φ субгармоническая. В то же время известно (см. [29]), что на полном односвязном римановом многообразии (M, g) неположительной секционной кривизны любая неотрицательная субгармоническая L^p -функция является константой C для любого $p \in (0, \infty)$. Поскольку объем многообразия Адамара (M, g) бесконечен, находим $C = 0$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6.3. Пусть (M, g) — многообразие Адамара. Не существует другой римановой метрики $\bar{g} \neq g$ на M такой, что

- (i) $\bar{g}$ поточечно проективно эквивалентна g ;
- (ii) $\overline{\text{Ric}} \geq 0$;
- (iii) $d\text{Vol}_{\bar{g}} \geq d\text{Vol}$;
- (iv) $\varphi = (n+1)\log(d\text{Vol}_{\bar{g}}/d\text{Vol})$ является L^p -функцией для некоторого $p \in (0, \infty)$.

Хорошо известно, что скалярная кривизна (M, g) определяется формулой

$$s = \text{trace}_g \text{Ric} = 2 \sum_{i < j} \sec(e_i, e_j),$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормированный базис в $T_x M$ при произвольном $x \in M$. В этом случае из условия $\sec \leq 0$ получаем $s \leq 0$, т. е. скалярная кривизна (M, g) неположительна. Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.4. Пусть (M, g) — многообразие Адамара. Не существует другой римановой метрики $\bar{g} \neq g$ на M такой, что

- (i) $\bar{g}$ поточечно конформно эквивалентна g , т. е. $\bar{g} = e^{2\sigma} g$;
- (ii) $\bar{s} \geq 0$;
- (iii) σ — неотрицательная L^p -функция для некоторого $p \in (0, \infty)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессе А. Л. Многообразия Эйнштейна. В 2 тт. — М.: Мир, 1990.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. В 2 тт. — М.: Наука, 1981.
3. Степанов С. Е., Цыганов И. И. Инфинитезимальные гармонические преобразования и солитоны Риччи на полных римановых многообразиях// Изв. вузов. Мат. — 2010. — № 3. — С. 97–101.
4. Степанов С. Е., Цыганов И. И. Полная минимальная гиперповерхность в пространстве де Ситтера первого рода// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2018. — 49. — С. 153–156.
5. Степанов С. Е., Шелепова В. Н. Заметка о солитонах Риччи// Мат. заметки. — 2009. — 86, № 3. — С. 474–477.
6. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. — ИЛ, 1957.
7. Adams S. R. Superharmonic functions on foliations// Trans. Am. Math. Soc. — 1992. — 330, № 2. — P. 625–635.
8. Aleksandrova I. A., Mikeš J., Stepanov S. E., Tsyganok I. I. Liouville type theorems in the theory of mappings of complete Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2017. — 221, № 6. — P. 737–744.
9. Almira J. M., Romero A. A new proof of a classical result on the topology of orientable connected and compact surfaces by means of the Bochner technique// Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino. — 2019. — 77, № 1. — P. 131–136.
10. Berard P. H. From vanishing theorems to estimating theorems: the Bochner technique revisited// Bull. Am. Math. Soc. — 1988. — 19, № 2. — P. 371–406.
11. Bishop R. L., O’Neil B. Manifolds of negative curvature// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — 145. — P. 1–9.
12. Caminha A. The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces// Bull. Braz. Math. Soc. — 2011. — 42, № 2. — P. 277–300.
13. Caminha A., Souza P., Camargo F. Complete foliations of space forms by hypersurfaces// Bull. Braz. Math. Soc. — 2010. — 41, № 3. — P. 339–353.
14. Cheeger J., Gromoll D. On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature// Ann. Math. — 1972. — 96. — P. 413–443.
15. Chen X., Shen Z. A comparison theorem on the Ricci curvature in projective geometry// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2003. — 23. — P. 141–155.
16. Chow C., Lu P., Ni L. Hamilton’s Ricci Flow. — Beijing–New York: Am. Math. Soc., 2006.
17. Gaffney M. P. A special Stokes’s theorem for complete Riemannian manifolds// Ann. Math. 2 Ser. — 1954. — 60, № 1. — P. 140–145.

18. *Gallot S., Meyer D.* Operateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne// J. Math. Pures. Appl. — 1975. — 54. — P. 259–284.
19. *Greene R. E., Wu H.* On the subharmonicity and plurisubharmonicity of geodesically convex functions// Indiana Univ. Math. J. — 1972/73. — 22. — P. 641–653.
20. *Greene R. E., Wu H.* C^∞ convex functions and manifolds of positive curvature// Acta Math. — 1976. — 137, № 3-4. — P. 209–245.
21. *Greene R. E., Shiohama K.* Convex functions on complete noncompact manifolds: topological structure// Invent. Math. — 1981. — 63, № 1. — P. 129–157.
22. *Greene R. E., Shiohama K.* Convex functions on complete noncompact manifolds: differentiable structure// Ann. Sci. Ec. Norm. Super. — 1982. — 14, № 4. — P. 357–367.
23. *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds// Bull. Am. Math. Soc. — 1999. — 36, № 2. — P. 135–249.
24. *Grigor'yan A.* Heat Kernel and Analysis on Manifolds. — Boston: Am. Math. Soc., 2009.
25. *Gromoll D., Meyer W.* On complete open manifolds of positive curvature// Ann. Math. — 1969. — 90. — P. 75–90.
26. *Jost J.* Riemannian Geometry and Geometric Analysis. — Springer, 2005.
27. *Karp L.* On Stokes' theorem for noncompact manifolds// Proc. Am. Math. Soc. — 1981. — 82, № 3. — P. 487–490.
28. *Kim S.* Volume and projective equivalence between Riemannian manifolds// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2005. — 27. — P. 47–52.
29. *Li P., Schoen R.* L^p and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds// Acta Math. — 1984. — 153, № 1. — P. 279–301.
30. *Mikeš J. et al.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2019.
31. *Petersen P.* Riemannian Geometry. — New York: Springer, 2016.
32. *Petersen P., Wink M.* The Bochner technique and weighted curvatures// SIGMA. — 2020. — 16. — 064.
33. *Petersen P., Wink M.* New curvature conditions for the Bochner technique// Invent. Math. — 2021. — 224, № 1. — P. 33–54.
34. *Pigola S., Rigoli M., Setti A. G.* Maximum Principles on Riemannian Manifolds and Applications. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2005.
35. *Pigola S., Rigoli M., Setti A. G.* Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis. A Generalization of the Bochner Technique. — Berlin: Birkhäuser Verlag, 2008.
36. *Pucci P., Serrin J.* The strong maximum principle revisited// J. Differ. Eqs. — 2004. — 196, № 1. — P. 1–66.
37. *Richard S., Yau S.-T.* Lectures on Differential Geometry. — Boston: International Press, 2010.
38. *Romero A.* The introduction of Bochner's technique on Lorentzian manifolds// Nonlin. Anal. — 2001. — 47. — P. 3047–3059.
39. *Schoen R.* Conformal deformation of a Riemannian metric to constant curvature// J. Differ. Geom. — 1984. — 20. — P. 479–495.
40. *Schoen R., Yau S.-T.* Lectures on Harmonic Maps. — Boston: International Press, 1994.
41. *Stepanov S. E.* Vanishing theorems in affine, Riemann and Lorentzian geometries// J. Math. Sci. — 2007. — 141, № 1. — P. 929–964.
42. *Stepanov S. E., Mikeš J.* The generalized Landau-Raychaudhuri equation and its applications// Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2015. — 12, № 8. — 1560026.
43. *Stepanov S. E., Mikeš J.* Application of the Hopf maximum principle to the theory of geodesic mappings// Kraguevac J. Math. — 2021. — 45, № 5. — P. 781–786.
44. *Stepanov S. E., Tsyganok I. I.* A remark on the mixed scalar curvature of a manifold with two orthogonal totally umbilical distributions// Adv. Geom. — 2019. — 19, № 3. — P. 291–296.
45. *Topping P.* Lectures on the Ricci Flow. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.
46. *Wu H.-H.* A remark on the Bochner technique in differential geometry// Proc. Am. Math. Soc. — 1980. — 78, № 3. — P. 403–408.
47. *Wu H.-H.* The Bochner Technique in Differential Geometry. — Harwood Academic, 1988.

- 48. *Xiao J., Qiu C., Zhong T.* Bochner–Kodaira techniques on Kähler Finsler manifolds// Chin. Ann. Math. Ser. B. — 2015. — 36, № 1. — P. 125–140.
- 49. *Yano K.* Integral Formulas in Riemannian Geometry. — New York: Marcel Dekker, 1970.
- 50. *Yau S.-T.* Remarks on conformal transformations// J. Differ. Geom. — 1973. — 8. — P. 369–381.
- 51. *Yau S.-T.* Non-existence of continuous convex functions on certain Riemannian manifolds// Math. Ann. — 1974. — 207. — P. 269–270.
- 52. *Yau S.-T.* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry// Indiana Univ. Math. J. — 1976. — 25. — P. 659–670.
- 53. *Yau S.-T.* On the heat kernel of a complete Riemannian manifold// J. Math. Pures Appl. — 1978. — 57, № 2. — P. 191–201.

Степанов Сергей Евгеньевич

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва;

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва

E-mail: stepanov@fi.ru

Mikeš Josef

Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия

E-mail: josef.mikes@upol.cz

Цыганок Ирина Ивановна

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

E-mail: tsy@fi.ru



О МАГНИТОСТАТИКЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

© 2023 г. А. М. ТРЕПАЛИН

Аннотация. Кинематическим путем получен аналог закона Био—Савара в пространстве Лобачевского. Найдено выражение для силы Лоренца при движении заряда в случае наличия электрического и магнитного полей и показано, что работа совершается только электрическими силами. Доказано, что выполняется теорема Пойнтинга. Также решена циклотронная задача.

Ключевые слова: пространство Лобачевского, магнитное поле.

ON MAGNETOSTATICS IN THE LOBACHEVSKY SPACE

© 2023 А. М. TREPALIN

ABSTRACT. An analog of the Biot–Savart law in the Lobachevsky space is obtained by a kinematic method. We find an expression for the Lorentz force in the case where a charge moves in electric and magnetic fields and prove the work is done only by electric forces. The Poynting theorem is proved and the cyclotron problem is solved.

Keywords and phrases: Lobachevsky space, magnetic field.

AMS Subject Classification: 53Z05

Пространство Лобачевского будем мыслить реализованным внутри абсолюта с уравнением

$$(xx) = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = -(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2 = 0. \quad (1)$$

Проективное пространство P_3 , реализующее L_3 , будем считать нормализованным по Нордену полярно при помощи абсолюта (1). Радиус кривизны пространства обозначим k . Вектор пространства Лобачевского будем изображать точкой пересечения прямой действия вектора с полярной точки приложения. При этом если A изображает вектор a , то

$$(AA) = -k^2(a, a).$$

При развитии магнитостатики будем исходить из закона Био—Савара. Рассмотрим этот закон в евклидовом случае. В E_3 индукция магнитного поля, создаваемого элементом тока $I d\mathbf{l}$, задается формулой:

$$d\mathbf{b} = \frac{I}{c} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{R}]}{R^3}. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{R}$ — вектор, соединяющий элемент тока в точке x с точкой наблюдения y . Но вектор $[d\mathbf{l}, \mathbf{R}]$ приложен в точке x , а в точку y он попадает после параллельного переноса. Поскольку в пространстве ненулевой кривизны результат переноса зависит от пути, то подобная процедура в L_3 не является корректной. Поэтому взглянем на формулу (2) с другой стороны. Рассмотрим вектор $(I/c)d\mathbf{l}$ как «угловую скорость» вращения вокруг прямой, по которой направлен вектор $d\mathbf{l}$. Тогда $d\mathbf{B}$ получается из поля скоростей точек пространства умножением на нормирующую функцию $1/R^3$. Подобное построение возможно и в пространстве Лобачевского. Поскольку всякий

реальный постоянный ток должен быть замкнут, положим

$$b_i = \frac{I}{c} \oint_L (x dx y y_i) f[(x, y)]. \quad (3)$$

Здесь x — точка контура L , y — точка наблюдения, b_i — ковариантные координаты вектора $\mathbf{b}$ магнитной индукции в натуральном репере $\partial/\partial u^i$, $y_i = \partial y/\partial u^i$, f зависит только от расстояния между точками x и y .

Покажем, что подынтегральное выражение в (3) пропорционально скорости точки y при вращении вокруг прямой $\{x, dx\}$ с угловой скоростью $d\mathbf{l}$, где $d\mathbf{l}$ — вектор элементарного смещения по контуру. Действительно, пусть

$$\tilde{V}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} x^\beta dx^\gamma y^\delta = [dx y]_{\alpha\beta} x^\beta \quad (4)$$

— ковектор плоскости, полярной точке V , которая изображает вектор $\mathbf{v}$ — скорость точки y . Вследствие (4) имеем

$$(VV) = -k^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = k^2((dx, dx)((xy)^2 - 1) - (y, dx)^2).$$

Далее, пусть z — точка прямой $\{x, y\}$, сопряженная точке x , $(z, z) = -1$. Имеем

$$y = \operatorname{ch} \frac{R}{k} x + \operatorname{sh} \frac{R}{k} z,$$

где R — расстояние между точками x и y . Пусть φ — угол между прямыми $\{x, dx\}$ и $\{x, y\}$; тогда

$$\mathbf{v}^2 = k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{R}{k} \sin^2 \varphi dl^2.$$

Функцию f определим из уравнений Максвелла, которые в данном случае принимают вид $\partial_{[k} b_{i]} = 0$. Условие $\nabla_k b^k = 0$ выполняется при любом выборе функции f . Дифференцируя (3) по u^k и альтернируя, найдем

$$ddd \partial_{[k} b_{i]} = \oint_L ((x dx y_{[k} y_{i]}) f + (x y_k)(x dx y y_i) f').$$

Штрихом обозначена производная от f по аргументу. Пусть S — ориентируемая поверхность, натянутая на контур L . Преобразуя интеграл по формуле Стокса, получим

$$\begin{aligned} \partial_{[k} b_{i]} = \iint_S & \left(f(dx \wedge dx y_{[k} y_{i]}) + f'[(dx y) \wedge (x dx y_{[k} y_{i]}) + (dx y_k) \wedge (x dx y y_i) + \right. \\ & \left. + (x y_k)(dx \wedge dx y y_i)] + f'[(x y_k)(dx y) \wedge (x dx y y_i)] \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Воспользуемся тождеством [1]

$$[[xyz]\xi]_{\alpha\beta} = \langle x, \xi \rangle [yz]_{\alpha\beta} + \langle y, \xi \rangle [zx]_{\alpha\beta} + \langle z, \xi \rangle [xy]_{\alpha\beta}.$$

Тогда

$$(dx y) \wedge (x dx y_{[k} y_{i]}) = \frac{1}{2}(xy)(y_{[k} y_{i]} dx \wedge dx), \quad (6)$$

$$(dx y_k) \wedge (x dx y y_i) = \frac{1}{2}(x y_k)(y y_i dx \wedge dx), \quad (7)$$

$$(dx y) \wedge (x dx y y_i) = \frac{1}{2}(xy)(y y_i dx \wedge dx) - \frac{1}{2}(x y_i dx \wedge dx). \quad (8)$$

Подставляя (6)–(8) в (5), найдем

$$\begin{aligned} \partial_{[k} b_{i]} = \iint_S & \left(f(y_{[k} y_{i]} dx \wedge dx) + \right. \\ & + f' \left[\frac{1}{2}(xy)(y_{[k} y_{i]} dx \wedge dx) + \frac{3}{2}(xy_k)(yy_i dx \wedge dx) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2} f'' [(xy_k)(xy)(yy_i dx \wedge dx) - (xy_i dx \wedge dx)] \right). \end{aligned}$$

Пусть n — точка нормали к поверхности S , сопряженная точке x , $(n, n) = -1$. Тогда

$$y = \lambda x + \mu n + \pi^s x_s, \quad y_i = \lambda_i x + \mu_i n + \pi_i^s x_s,$$

где $x_s = \partial x / \partial u^s$, $s = 1, 2$ — точки в касательной плоскости к S , сопряженные точке x . При этом $\lambda = (yx)$, $\mu = (yn)$, $\lambda_i = (y_i x)$, $\mu_i = (y_i n)$. Учитывая эти соотношения, получим

$$\partial_{[k} b_{i]} = \iint_S \left(2f + \frac{5}{2} f' \lambda + \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) f'' \right) \mu_{[i} \lambda_{k]} (xn dx \wedge dx).$$

Поскольку последний интеграл должен обращаться в нуль при любом выборе контура L , то

$$f''(\lambda^2 - 1) + 5\lambda f' + 4f = 0.$$

Это уравнение имеет одним из решений

$$f_1(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1)^{-3/2}.$$

Положим

$$b_i = \frac{I}{c} \oint_L \frac{(xy)(x dx yy_i)}{[(xy)^2 - 1]^{3/2}}. \quad (9)$$

Выбор $f = (I/c)f_1$ определяется тем, что в этом случае, как и в евклидовой магнитостатике,

$$b_i = -\frac{I}{c} \frac{d\Omega}{du^i}, \quad (10)$$

где Ω — телесный угол, под которым виден контур L из точки наблюдения. Действительно,

$$\Omega = \iint_S \frac{\cos \alpha}{k^2 \operatorname{sh} \frac{r}{k}} dS.$$

Здесь α — угол между нормалью к S и прямой $\{x, y\}$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\cos \alpha = -\frac{(n, y)}{[(xy)^2 - 1]^{1/2}}.$$

Далее, $dS = -\frac{1}{2} k^2 (xn dx \wedge dx)$. Отсюда

$$\Omega = \frac{1}{2} \iint_S \frac{(y, n)(xn dx \wedge dx)}{[(xy)^2 - 1]^{3/2}}.$$

Взяв производную от этого выражения и преобразуя интеграл (9) по формуле Стокса, обнаружим совпадение полученных выражений.

Из (10), в частности, сразу следует, что замкнутый линейный ток эквивалентен магнитному листку мощности I/c , так как скалярный потенциал равномерно распределенного дипольного момента пропорционален телесному углу, под которым видна поверхность из точки наблюдения. В качестве примера применения формулы (9) найдем магнитное поле на оси кругового тока

радиуса R на расстоянии h от его плоскости. Возьмем плоскость тока за $\{e_1, e_2, e_4\}$ автополярного тетраэдра, поместив вершину e_4 в центр круга. Тогда в цилиндрических координатах

$$(x_\alpha) = \left(\operatorname{sh} \frac{R}{k} \cos \varphi, \operatorname{sh} \frac{R}{k} \sin \varphi, 0, \operatorname{ch} \frac{R}{k} \right), \quad (y_\alpha) = \left(0, 0, \operatorname{sh} \frac{h}{k}, \operatorname{ch} \frac{h}{k} \right),$$

$$(dx_\alpha) = \left(-\operatorname{sh} \frac{R}{k} \sin \varphi, \operatorname{sh} \frac{R}{k} \cos \varphi, 0, 0 \right) d\varphi,$$

найдем

$$\tilde{B}_\alpha = \frac{I}{c} \oint_L [x dx y]_\alpha \frac{(x, y)}{[(xy)^2 - 1]^{3/2}} = \frac{2\pi I}{c} \frac{\operatorname{ch} \frac{h}{k} \operatorname{sh}^2 \frac{R}{k} \operatorname{ch} \frac{R}{k}}{[\operatorname{ch}^2 \frac{h}{k} \operatorname{ch}^2 \frac{R}{k} - 1]^{3/2}} \left(0, 0, -\operatorname{ch} \frac{h}{k}, \operatorname{sh} \frac{h}{k} \right).$$

Ковектор $\tilde{B}_\alpha$ изображает вектор магнитной индукции. В локальных координатах будем иметь

$$\mathbf{b} = \frac{2\pi I}{ck^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{h}{k} \operatorname{sh}^2 \frac{R}{k} \operatorname{ch} \frac{R}{k}}{[\operatorname{ch}^2 \frac{h}{k} \operatorname{ch}^2 \frac{R}{k} - 1]^{3/2}} \frac{\partial}{\partial h}.$$

Отметим, что магнитное поле кругового тока бесконечно большого радиуса, в противоположность евклидову случаю, не исчезает.

Положим, что силовой винт, который определяет действие магнитного поля, изображаемого ковектором $\tilde{B}_\alpha$, на элемент тока $(I/c)dy$, задается формулой

$$dF_{\alpha\beta} = \frac{Ik}{c} (\tilde{B}_\alpha d\tilde{y}_\beta - \tilde{B}_\beta d\tilde{y}_\alpha); \quad (11)$$

$dF_{\alpha\beta}$ соответствует векторному произведению векторов $\mathbf{b}$ и $(I/c)d\mathbf{l}$. В силу (8) винт, определяющий взаимодействие двух контуров с токами I_1 и I_2 , имеет вид

$$F_{\alpha\beta}^{12} = k \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \left((x dy)[dx y]_{\alpha\beta} + (dx dy)[y x]_{\alpha\beta} \right) \frac{(xy)}{[(xy)^2 - 1]^{3/2}}, \quad (12)$$

где $x \in L_1$, $y \in L_2$. Определение (12) удовлетворяет закону равенства действия и противодействия.

Найдем силу взаимодействия магнитного поля с движущимся зарядом (силу Лоренца). Элемент тока будет иметь вид

$$I d\mathbf{l} = dQ \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{v} \rho d\Omega = \mathbf{J} d\Omega.$$

Здесь $\mathbf{J}$ — плотность тока, $\mathbf{v}$ — скорость заряда, ρ — плотность заряда, $d\Omega$ — элемент объема. Перепишем формулу (11) в виде

$$F_{\alpha\beta} = \frac{k}{c} (\tilde{B}_\alpha \tilde{V}_\beta - \tilde{B}_\beta \tilde{V}_\alpha) dQ,$$

где V — точка, изображающая вектор $\mathbf{v}$. Она совпадает с точкой J , изображающей вектор $\mathbf{J}$ и отличается от нее нормированием.

Рассмотрим случай, когда имеется как электрическое, так и магнитное поле. Тогда силовой винт, действующий на элементарный заряженный объем $d\Omega$, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, будет выглядеть следующим образом:

$$F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}^E + F_{\alpha\beta}^M = \rho \left(-[Ey]_{\alpha\beta} + \frac{k}{c} [\tilde{B}\tilde{V}]_{\alpha\beta} \right) d\Omega$$

или

$$F_{\alpha\beta} = Q \left(-[Ey]_{\alpha\beta} + \frac{k}{c} [\tilde{B}\tilde{V}]_{\alpha\beta} \right).$$

Найдем работу, совершаемую над зарядом Q при элементарном перемещении, задаваемом кинематическим винтом $v^{\alpha\beta} \delta t$ электромагнитным полем (см. [2]):

$$\delta A = -\frac{k^2}{2} F^{\alpha\beta} \tilde{v}_{\alpha\beta} \delta t = -k^2 Q (E, dy).$$

Таким образом, работа совершается только электрическим полем.

Если система стационарна, то вся совершенная работа должна рассеиваться в виде тепла. Плотность выделяемой мощности

$$q = -k^2(EJ) = (\mathbf{E}, \mathbf{J}).$$

Отсюда, как и в евклидовом случае, применением уравнений Максвелла получается теорема Пойнтинга:

$$q = -\frac{\partial W}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{S},$$

где

$$W = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{B}]$$

— плотность энергии электромагнитного поля и плотность потока электромагнитной энергии соответственно.

Рассмотрим теперь задачу о движении заряда в магнитном поле, задаваемым во всех точках плоскости в пространстве Лобачевского одним и тем же вектором B^α , перпендикулярным плоскости. Предположим, что начальный вектор скорости частицы лежит в плоскости. Поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости, то в качестве траектории частицы естественно рассмотреть ортогональные траектории пучка прямых, и таких пучков будет три. Система уравнений, описывающая движение частицы, имеет вид

$$\frac{\delta u^i}{dt} = f^i = g^{il} \varepsilon_{lsk} u^s b^k.$$

Решая эту систему в орициклических, полярных и декартовых (эквидистантных) координатах, найдем: если $b = \frac{mv}{kq}$, то движение происходит по орициклу, если $b > \frac{mv}{kq}$ — по окружности, и если $b < \frac{mv}{kq}$ — по эквидистанте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Широков П. А. Преобразование винтовых интегралов в пространствах постоянной кривизны // In memoriam N. I. Lobatschevskii. — 1927. — 2. — С. 119–134.
2. Широков А. П. Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского // Уч. зап. Казан. ун-та. — 1963. — 123, № 1. — С. 196–207.

Трепалин Александр Михайлович
Марийский государственный университет, Йошкар-Ола
E-mail: trefa50@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 128–137
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-128-137

УДК 519.6

КЛАСС СИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ ДЛЯ МОДЕЛИ ГИДРИДНОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

© 2023 г. И. А. ЧЕРНОВ

Аннотация. Рассматривается класс трехмерных форм, допускающих некоторую группу симметрий и аналогичных трубчатым областям. Краевые задачи в инвариантной форме в таких областях могут сводиться к задачам с одной пространственной переменной в специально подобранной координатной системе. Предложен класс форм, доказаны их свойства и приведены примеры.

Ключевые слова: пространственная симметрия, группа симметрий, гидридный фазовый переход.

CLASS OF SYMMETRIC FORM FOR A MODEL OF THE HYDRIDE PHASE TRANSITION

© 2023 I. A. CHERNOV

ABSTRACT. We consider a class of three-dimensional forms that admit a certain group of symmetries and are similar to tubular regions. Boundary-value problems in the invariant form in such domains can be reduced to problems with one spatial variable in a special coordinate system. A class of forms is proposed, their properties are proved, and examples are given.

Keywords and phrases: spatial symmetry, symmetry group, hydride phase transition.

AMS Subject Classification: 53Z05, 35K51

1. Введение. Водород является перспективным экологически чистым и возобновляемым топливом для транспортных средств, а гидриды металлов могут накапливать большое количество водорода при относительно низком давлении и близкой к комнатной температуре [1]. Гидриды металлов обычно представляют собой мелкие порошки (из-за резкого изменения плотности при гидрировании). Таким образом, для математического моделирования кинетики образования и разложения гидридов описание формы частиц порошка необходимо. Однако детальное описание этих форм затруднительно и редко целесообразно. Кроме того, трехмерные краевые задачи для уравнений в частных производных довольно сложны, и, учитывая большое количество частиц, трудоемкость решения может не быть адекватна повышению точности моделирования. По этой причине форму частицы обычно аппроксимируют некоторой симметричной областью, например, шаром, и полагаются на статистическое усреднение по ансамблю частиц порошка. Кроме того, если присутствует изменение фазы, граница фазы зависит от времени и *a priori* неизвестна. Свободные границы представляют дополнительную сложность. Модели образования и разложения гидридов построены в [2], где также приведен обзор исследований в этой области.

В большинстве работ, где диффузионные модели применяются для объяснения экспериментальных результатов кинетики формирования или разложения гидридной фазы, авторы либо

Работа выполнена по плану НИР ИПМИ КарНЦ РАН..

выбирают шар в качестве аппроксимации формы, либо рассматривают ограниченный набор форм (назовем их «тривиальными»: это шар, цилиндр и плоская пластина, т.е. прямое произведение множества на плоскости на отрезок); например, [3, 4].

Мы изучаем класс фигур с пространственной симметрией, аналогичный трубчатым областям в $\mathbb{R}^3$. Свойства симметрии позволяют сводить краевые задачи, заданные в области из этого класса, к одной пространственной переменной, если начальные и граничные условия также симметричны. Это актуально, например, для моделирования формирования и разложения порошков гидридов металлов. Массоперенос описывается в терминах потоков и количеств вещества, поэтому математически он моделируется через интегралы скаляров по областям, градиенты, дивергенции, скалярные произведения и другие координатно-инвариантные операции над скалярными и векторными полями. Построенный класс фигур обладает специальной системой координат и позволяет записывать все эти операции через производные по единственной пространственной переменной с определенным физическим смыслом: глубиной погружения в тело.

Может быть несколько причин для расширения класса доступных областей для моделирования образования и разложения гидридов металлов. Во-первых, фотографии порошковой сканирующей электронной микроскопии показывают, что форма частиц часто далека от сферической, поэтому желательно иметь возможность выбрать более адекватную форму. Кроме того, если форма описывается несколькими параметрами, они могут служить дополнительными константами модели и улучшить аппроксимацию экспериментальных данных. Наконец, порошок состоит из частиц различной формы и размера и необходимо решить математическую задачу для разных областей несколько раз. Однако, как будет показано, некоторые порошки могут быть эффективно описаны одной особой формой: как одна несвязная частица.

2. Наводящие соображения. Рассмотрим упрощенные модели разложения частицы порошка гидрида, чтобы проследить влияние формы, эффект усреднения по ансамблю частиц и использование симметрии. Пусть лимитирует десорбция, т.е. динамику процесса определяет выделение водорода с поверхности частицы. Частица состоит из области гидрида и окутывающей ее области металлической фазы. Если концентрации водорода в двух фазах постоянны, c_h и c_m , то закон сохранения вещества приводит к уравнению

$$c_h dV_h + c_m dV_m = J \frac{S}{V} dt,$$

где V_h и V_m — относительные объемы соответствующих фаз ($V_h + V_m = 1$), J — плотность потока десорбции водорода, S — площадь поверхности, t — время, V — объем частицы порошка. Понятно, что в таком простейшем случае уравнение позволяет определить динамику изменения объема фаз, если известно отношение S/V и начальное разделение объема между фазами. Если частицы в порошке все идентичные, то уравнение остается справедливым и для макровеличин объемов и поверхности.

Однако пусть частицы все подобны геометрически, но имеют различные размеры. Тогда левая часть уравнения для отдельной частицы не изменится, а в правой будет зависящий от размера частицы масштабный множитель $\alpha = S/V$. При усреднении по ансамблю частиц с данным распределением по размерам, уравнение для макровеличин будет отличаться от данного только множителем в левой части: средним по распределению фактором α .

Таким образом, вместо расчета порошка можно рассмотреть одну частицу «среднего» размера, причем средний размер не обязательно совпадает со средним по распределению размером: это тот размер, при котором фактор α совпадает со средним.

Предположение о лимитирующей десорбции не всегда оправданно. В данной модели поток водорода по существу задан, а не вычисляется, т.е. процессы внутри частицы не влияют на него, а ведь одна из целей моделирования — понять именно влияние физико-химических процессов на кинетику. Если же ввести в модель реакцию разложения гидрида, необходимо будет явно описать границу раздела фаз, т.е. форму области V_h . Здесь потребуются дополнительные предположения.

Разумно предположить, что маленькие частицы обладают определенной симметрией в том смысле, что условия для разложения гидрида одинаковы для точек поверхности. Тогда можно

предположить, что граница раздела фаз смещается за одно и то же время на одно и то же расстояние. Приходим к идее параллельности границы раздела фаз самой себе в различные моменты времени. Для симметричных форм, таких как шары, модели строятся без труда. И объем гидридной фазы, и площадь поверхности раздела фаз выражаются через одну пространственную переменную: радиус r в сферических координатах, либо, эквивалентно, через дополнение радиуса, $h = L - r$, который имеет смысл «заглубления», так как L есть радиус шара. Аналогичны построения для других тривиальных форм. Целью настоящей статьи является обобщение класса симметричных форм, позволяющих описывать кинетику пространственно-одномерной моделью как в одночастичном приближении, так и для порошков (в предположении, что все частицы имеют один размер или геометрически подобны).

3. Основные результаты. Симметричной формой назовем компактное множество $V \subset \mathbb{R}^3$ со внутренними точками, со следующими свойствами:

1. Существует подмножество $C \subset V$ с пустой внутренностью, такое, что $V \setminus C$ является объединением непересекающихся двусторонних гладких поверхностей конечной площади; обозначим множество этих поверхностей через Π .
2. Одна из поверхностей из Π является границей V или частью границы (в последнем случае остальная часть границы обозначается через $\bar{\Pi}(L)$).
3. Существует множество гладких кривых P , которые принадлежат V ; каждая кривая пересекает каждую поверхность из Π ровно один раз и ортогональна поверхности в точке пересечения; для любой точки любой поверхности из Π существует единственная кривая из P , которая проходит через эту точку.
4. Пусть r — естественный параметр кривой $\gamma(r) \in P$; тогда множество $\gamma(0)$ для всех $\gamma \in P$ совпадает с C ; также $\gamma(r) \notin C$ для $r > 0$ для всех $\gamma \in P$.
5. Точки пересечения кривых из P с заданной поверхностью из Π соответствуют одному и тому же значению параметра r , поэтому это значение зависит только от поверхности.
6. Если две кривые из P пересекаются, их общая точка принадлежит C .

Класс таких областей обозначается через Γ . Область $V \in \Gamma$ не обязательно связна, хотя частицу порошка представляем себе связной. Несвязная область V соответствует порошку: это позволяет моделировать порошок частиц разных форм (но одинакового размера) как одну несвязную область.

Согласно сделанным предположениям, любая $V \in \Gamma$ расслаивается на эквидистантные (при условии, что расстояние измеряется вдоль кривых из P) поверхности из Π , описываемые значениями r . Поверхность из Π , соответствующая данному значению r , обозначается как $\Pi(r)$. Тогда $C = \Pi(0)$ также называется центральным множеством (по сути, это каустика). Поверхность тела соответствует некоторому $r = L$, называемому размером тела.

В дальнейшем обозначаем тело и его объем одним и тем же символом, когда не возникает двусмысленности, то же самое справедливо для поверхностей и их областей.

Вектор нормали к поверхности $\Pi(L)$ в точке считается положительным, если он направлен внутрь V . Для $\Pi(r)$ нормаль положительна в точке A , если ее направление совпадает с положительной нормалью к $\Pi(L)$ в точке, лежащей на той же кривой, что и проходящая из P через A .

Касательная плоскость разделяет пространство на положительное и отрицательное подпространства. Основная кривизна положительна, если ее центр лежит в положительном подпространстве.

Рассмотрим любые ортогональные координаты на (двумерных) $\Pi(L)$. Они индуцируют ортогональные координаты в V следующим образом: точки $V \setminus C$ однозначно определяются парой координат поверхности (φ, ψ) и параметром $r > 0$; точки C соответствуют $r = 0$.

Область V инвариантна относительно невырожденных однозначных изометрических отображений координат поверхности (φ, ψ) ; поэтому называем эти формы симметричными. При моделировании частиц порошка выбираем их форму из Γ . Более того, все фазовые области, межфазные границы и так далее ограничены, каждая, поверхностью из Π (полностью) и поверхностями из $\bar{\Pi}$.

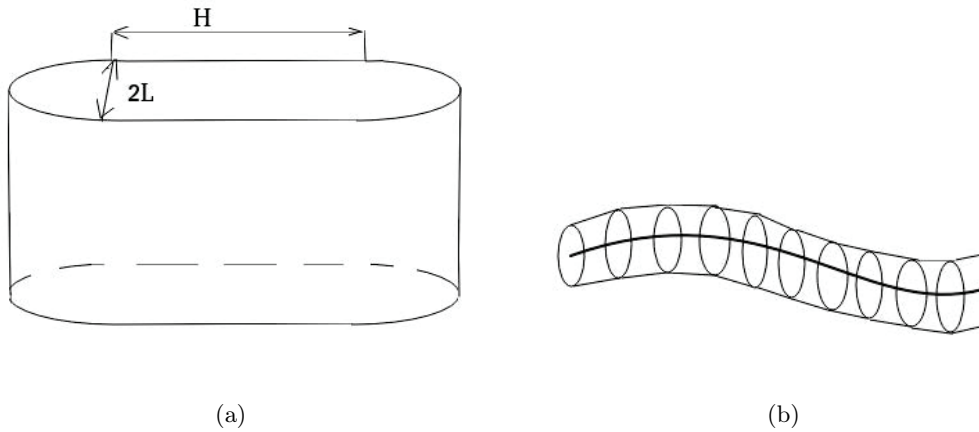


Рис. 1. Два примера форм из класса Γ : переходная форма между цилиндром и плоской (если $H \gg L$, то в пределе получится плоская пластина, а при $H = 0$ имеем цилиндр) (a) и трубка (b).

4. Симметричные формы. Класс Γ не пуст: он содержит шары (центр C , Π — концентрические сферы, P — радиусы), конечные цилиндры (C — ось, $\Pi(r)$ — коаксиальные цилиндры радиусов $r \leq L$, P содержит радиусы ортогональных сечений цилиндра, $\bar{\Pi}$ — это торцы), плоские пластины, т.е. цилиндрические тела, полученные как декартово произведение любой плоской области $F = \Pi(L)$ с гладкой границей на отрезок $[-L, L]$ (P содержит отрезки, ортогональные к $\Pi(L)$, боковая поверхность есть $\bar{\Pi}$, множество $F \times 0$ — это C).

Назовем это подмножество Γ тривиальным; нетривиальные формы также существуют. Вот несколько примеров.

Во-первых, тор принадлежит Γ . Вращая окружность радиуса L вокруг линии в той же плоскости (расстояние между центром окружности и линией равно $\ell > L$), получим тор; C — это орбита вращения центра, Π состоит из торов меньших радиусов, P содержит отрезки, которые ортогонально связывают C с поверхностью тора. Площадь тора составляет $4\pi L\ell$ и совпадает с площадью цилиндра радиуса L и высоты $2\pi\ell$. Аналогичное утверждение справедливо для сегмента тора, полученного вращением круга на угол менее 2π . Обратите внимание, что торы представляют собой пример форм с основными кривизнами разных знаков.

Выпуклая оболочка тора также принадлежит Γ . Площадь поверхности этого тела равна

$$\Pi(L) = 2\pi(\ell^2 + 2L^2 + \pi L\ell).$$

Следующий пример — цилиндр высотой ℓ и радиусом L с двумя полусферами одинакового радиуса, прикрепленными к его торцам («круглый цилиндр»). Его площадь равна $\Pi(L) = 4\pi L^2 + 2\pi L\ell$ (рис. 1(a)).

Практически важным подклассом Γ является множество нормальных трубок: C — произвольная гладкая кривая с не слишком большой кривизной. Декартово произведение C на отрезок $[0, r]$ дает поверхность из Π (рис. 1(b)). Ограничение на кривизну C следует из того факта, что отрезки из P не должны пересекаться; поэтому радиус кривизны не может быть меньше L . Тор является частным случаем трубки.

Еще один пример — телесный угол, пересекаемый парой концентрических сфер радиусов $T \pm L$. Это поверхность $\Pi(L)$; C — часть концентрической сферы радиуса T ; радиусы образуют P . Части $\Pi(L)$ имеют кривизну разных знаков.

Докажем некоторые свойства построенного класса.

Теорема 1. *Кривые из P — отрезки прямых.*

Доказательство. Выберем любую поверхность $\Pi(r)$ и на ней точки $A_1(r)$ и $A_2(r)$. Рассмотрим кривые R_1 и R_2 от P , которые проходят через эти точки и сместимся вдоль них на одинаковое расстояние dr в одном и том же направлении. Результирующие точки B_1, B_2 принадлежат одной

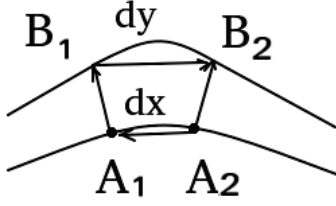


Рис. 2. К доказательству теоремы 1.

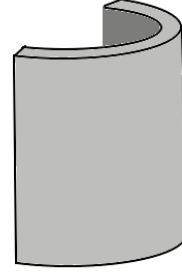


Рис. 3. Цилиндрический слой, исчерпывающий все случаи с нулевой кривизной.

и той же поверхности $\Pi(r + dr)$ по определению (рис. 2). Обозначим геодезическое расстояние между A_1 и A_2 через dx , а для другой пары — через dy . Сумма векторов A_1B_1 , B_1B_2 , B_2A_2 , A_2A_1 равна нулю:

$$A_1B_1 - A_2B_2 + B_1B_2 - A_1A_2 = 0.$$

Заменим вектор A_1B_1 на касательный вектор $\zeta_1 dr$ к кривой R_1 в A_1 ($|\zeta_1| = 1$) и перенесем бесконечно малую ошибку $o(dr)$ в правую часть. Повторим то же самое для A_2B_2 , заменив этот вектор касательным вектором $\zeta_2 dr$ к кривой R_2 в A_2 (аналогично и $|\zeta_2| = 1$). Наконец, заменим оставшуюся пару векторов касательными векторами $\psi_A dx$, $\psi_B dy$ к геодезическим на поверхностях в точках A_1 , B_1 (ψ_A и ψ_B — единичные векторы):

$$(\zeta_1 - \zeta_2)dr + \psi_A dx - \psi_B dy = o(dx + dy + dr).$$

Поскольку поверхность $\Pi(r)$ гладкая, выражение в скобках можно переписать как $\partial\zeta_1 dx + o(dx)$ (здесь ∂ обозначает производную единичного касательного вектора к кривым из P вдоль выбранной геодезической A_1A_2 : это вектор, ортогональный к ζ_1), в частности, порядок малости dy такой же, как у dx .

Вектор ψ_B ортогонален кривой R_1 в B_1 , т.е. касательному вектору к кривой в точке; таким образом, его можно получить, повернув этот вектор до 90° (умножив на некоторую ортогональную матрицу C). Кроме того, из-за гладкости кривой это можно выразить как $\zeta_1 + \zeta_1' dr + o(dr)$; здесь ζ_1' обозначает дифференцирование единичного касательного вектора к кривой вдоль нее в точке A . Теперь равенство выглядит так:

$$\partial\zeta_1 dx dr + \psi_A dx - C\zeta_1 dy - C\zeta_1' dr dy = o(dx + dy + dr).$$

Умножая на вектор ζ_1 :

$$0 + 0 - 0 - (C\zeta_1')\zeta_1 dr dy = o(dy + dr).$$

Сравнивая левую и правую части, убеждаемся, что либо $\zeta_1' = 0$, что означает, что кривая из P является прямой, или векторы $C\zeta_1'$ и ζ_1 ортогональны. Но в последнем случае достаточно выбрать другую точку A_2 и, следовательно, другую C , чтобы получить тот же вывод: $\zeta_1' = 0$. $\square$

Этот результат показывает, что поверхности $\Pi(r)$ взаимно параллельны [5], т.е. каждая образована концами векторов одной и той же длины, ортогональных к первой в различных ее точках. Формулы (73.14) из [5] связывают гауссову и среднюю кривизны параллельных поверхностей:

$$\bar{K} = \frac{K}{1 - 2hH + h^2K}, \quad \bar{H} = \frac{H - hK}{1 - 2hH + h^2K}. \quad (1)$$

Здесь H и K — средняя и гауссова кривизны одной поверхности, $\bar{H}$ и $\bar{K}$ — другой, h — расстояние между поверхностями.

Корнями квадратного уравнения

$$(1 - 2hH + h^2K)x^2 - 2(H - hK)x + K = 0$$

являются кривизны поверхности $\Pi(L - h)$ в данной точке. Радиусы $R_{1,2}$ этих кривизн равны $1/x_{1,2}$; легко проверить, что $R_{1,2}(L - h) = R_{1,2}(L) - h$. Сначала перепишем уравнение в виде

$$(1 - 2hH + h^2K) - 2(H - hK)x^{-1} + Kx^{-2} = 0,$$

затем подставим $x^{-1} = R(L) - h$ и получим

$$1 - 2HR(L) + KR^2(L) = 0,$$

потому что H и K являются средней и гауссовой кривизнами поверхности $\Pi(L) = \Pi(L - 0)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Радиусы главных кривизн поверхности $\Pi(L - h)$ есть*

$$R_{1,2}(L - h) = R_{1,2}(L) - h.$$

Если $R_2(L) \geq R_1(L) = \rho > 0$, кривизна становится бесконечной на поверхности $\Pi(L - \rho)$, и поэтому эта поверхность не может быть гладкой, и должна быть C ; итак, $L = \rho$ в этом случае. Это также следует из знаменателя формул (1): у него есть корни, совпадающие с радиусами основных кривизн. Рассуждение справедливо также для поверхностей с одной или обеими нулевыми главными кривизнами.

Форма $V \in \Gamma$ определяется своей граничной поверхностью $\Pi(L)$; однако не любая поверхность попадает в Γ .

Теорема 3. *Достаточным условием поверхности S для генерации симметричной формы, являющейся ее $\Pi(L)$, является постоянная положительная главная кривизна R_1^{-1} при условии, что она больше: $R_1 < R_2$; тогда $L = R_1$.*

Доказательство. Меньший радиус кривизны R_1 одинаков во всех точках $\Pi(L - h)$ и уменьшается относительно h до тех пор, пока не станет равным нулю при $h = R_1$. Большой радиус остается неотрицательным. Линии кривизны — это круги, C состоит из их центров и не имеет внутренних точек. Итак, $L = R_1$. $\square$

Однако условие не является необходимым, поскольку обе кривизны могут быть равны нулю или кривизна может быть отрицательной.

Теорема 4. *Площадь любой поверхности $\Pi(r)$, $r = L - h$, может быть выражена через площадь $\Pi(L)$:*

$$\Pi(L - h) = \Pi(L) - 2h \int_{\Pi(L)} H dS + h^2 \int_{\Pi(L)} K dS.$$

Доказательство. Рассмотрим бесконечно малый касательный вектор к $\Pi(L)$ в направлении главной кривизны $R_{1,2}^{-1}$ в некоторой точке; смещенный вдоль кривой от P в той же точке, он отображается в параллельный вектор, который также касается поверхности $\Pi(L - h)$, только его длина умножается на коэффициент $1 - h/R_{1,2}$. Скалярное произведение пары этих векторов — это элемент площади. Таким образом, площадь выражается, используя формулы (1), как

$$\begin{aligned} \Pi(r) &= \int_{\Pi(L)} \left(1 - \frac{h}{R_1}\right) \left(1 - \frac{h}{R_2}\right) dS = \int_{\Pi(L)} (1 - 2Hh + h^2K) dS = \\ &= \Pi(L) - 2h \int_{\Pi(L)} H dS + h^2 \int_{\Pi(L)} K dS. \quad \square \end{aligned}$$

Отметим, что этот результат также следует из формулы Вейля [6].

В случае неотрицательных кривизн имеем монотонность: площадь $\Pi(r)$ неубывающая функция r , если обе главные кривизны всюду неотрицательны на $\Pi(L)$. В самом деле, касательные векторы вдоль направлений главных кривизн уменьшаются по длине (или остаются неизменными) по мере роста r , так что их скалярное произведение также уменьшается; таким образом, оно не убывает по отношению к $r = L - h$.

Если большая из кривизн положительна, площадь C равна нулю. В самом деле, элемент площади $\Pi(r)$ — это $(1 - h/R_1)(1 - h/R_2)dS$, где dS — элемент площади $\Pi(L)$, а $R_{1,2}$ — радиусы кривизны, $h = L - r$. Так как $L = \min(R_1, R_2)$, получаем нулевую площадь $C = \Pi(0)$.

Отметим, что согласно теореме Гаусса—Бонне, старший коэффициент может быть выражен через эйлерову характеристику поверхности χ и геодезическую кривизну k_γ края γ :

$$\int_{\Pi(L)} K dS = 2\pi\chi(\Pi(L)) - \int_{\gamma} k_\gamma ds.$$

В частности, все поверхности, топологически эквивалентные сфере, имеют один и тот же старший коэффициент, равный 4π . Тор, цилиндр и трубки имеют $\chi = 0$, а край, если есть, является геодезической; поэтому для них старший коэффициент равен нулю.

Вопрос о возможности отрицательного старшего коэффициента оставим открытым.

Функция $\Pi(r)$ является многочленом степени не выше второй от $h = L - r$ (и, следовательно, также от r):

$$\Pi(r) = \left(\Pi(L) - 2L \int_{\Pi(L)} H dS + L^2 \int_{\Pi(L)} K dS \right) + 2r \left(\int_{\Pi(L)} H dS - L \int_{\Pi(L)} K dS \right) + r^2 \int_{\Pi(L)} K dS. \quad (2)$$

Объем такого тела — многочлен степени не выше третьей, равный нулю при $r = 0$:

$$V(r) = \int_0^r \Pi(r) dr.$$

Справедливы следующие оценки.

Теорема 5. Пусть $\Pi(r)$ не убывает. Тогда

$$2L \int_{\Pi(L)} H dS \leq \Pi(L) + L^2 \int_{\Pi(L)} K dS, \quad L \int_{\Pi(L)} K dS \leq \int_{\Pi(L)} H dS, \quad 0 \leq \int_{\Pi(L)} H dS \leq \frac{\Pi(L)}{L}.$$

Доказательство. Заметим, что $\Pi(0) \geq 0$, поэтому

$$\Pi(L) - 2L \int_{\Pi(L)} H dS + L^2 \int_{\Pi(L)} K dS \geq 0.$$

Также $\Pi(r)$ не убывает при $r \geq 0$; поэтому

$$\int_{\Pi(L)} H dS \geq L \int_{\Pi(L)} K dS$$

при $r = 0$, и неравенство можно усилить:

$$\int_{\Pi(L)} H dS \leq \frac{\Pi(L)}{L}.$$

При $r = L$ имеем

$$\int_{\Pi(L)} H dS \geq 0,$$

и получим оценку для объема:

$$V(r) \geq \frac{r^3}{3} \int_{\Pi(L)} K dS.$$

□

Рассмотрим плоский случай: поверхности с нулевой полной гауссовой кривизной; это цилиндры, торы, трубки. Многочлен (2) становится многочленом первой степени и может быть однозначно выражен через площади областей $\Pi(L)$ и центрального множества $C = \Pi(0)$:

$$\Pi(r) = \Pi(0) + \frac{r}{L}(\Pi(L) - \Pi(0)).$$

Все такие двучлены могут быть получены для некоторого цилиндра (если $\Pi(0) = 0$) или цилиндрического слоя (рис. 3). Важно, что из всех характеристик цилиндрического слоя значение имеет только отношение внутреннего радиуса ко внешнему.

Это может быть важно для приложений. Форма частиц порошка часто описывается как «проволока» (wires), цилиндр, спираль, «чешуйки» и тому подобное; при предложенной симметрии все эти формы имеют одинаковое математическое описание.

5. Дифференциальные операции. Все скалярные и векторные поля в любой физической модели из рассматриваемой области предполагаются симметричными, т.е. независимыми от поверхностных координат φ, ψ . Рассмотрим скалярную концентрацию $c(r)$ в $V \in \Gamma$. Количество вещества в бесконечно малом слое между r и $r + dr$ равно $\Pi(r)c(r)dr + o(dr)$. Градиент сводится к производной по r : $\nabla c(r) = (0, 0, c'(r))$ и направлен вдоль линий из P . Нормальная производная по поверхности $\Pi(r)$ также является этой компонентой градиента, с точностью до знака, который зависит от направления нормали.

Теперь рассмотрим векторное поле $\vec{f}(r)$ в V . Из-за симметрии все векторы параллельны линиям из R и поэтому полностью описываются длиной со знаком (проекцией на положительное направление R), которая равна $f_3(r)$, если вектор записан в симметричных координатах. Другие компоненты равны нулю. Такое поле имеет нулевой ротор. Чтобы получить дивергенцию для выбранного r , запишем поток через границу бесконечно малого слоя между r и $r + dr$ относительно объема этого слоя при $dr \rightarrow 0$:

$$\operatorname{div} \vec{f}(r) = \frac{(\Pi(r)f_3(r))'}{\Pi(r)}.$$

Далее, легко записать лапласиан, часто используемый в математической физике:

$$\Delta c = \frac{(\Pi(r)c'(r))'}{\Pi(r)} = c''(r) + \frac{\Pi'(r)}{\Pi(r)}c'(r).$$

Теперь у нас есть все инструменты, необходимые для преобразования любой краевой задачи в симметричную форму, при условии, что все исходные данные симметричны.

Предположим, что область ограничена поверхностями $\Pi(L)$, $\Pi(\rho)$ для некоторого $0 < \rho < L$ (это может быть положение свободной границы), и, возможно, отрезков из R . На последних не требуются граничные условия из-за симметрии.

Следует отметить, что часто рассматриваются стационарные (т.е. не зависящие от времени) уравнения, решения или исходные данные. Решения уравнения Пуассона $\Delta c = 0$ в симметричной форме являются решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$c''(r) + \frac{\Pi'(r)}{\Pi(r)}c'(r) = 0,$$

которое сводится к квадратуре

$$c(r) = A + B \int \frac{dr}{\Pi(r)}.$$

Значения A и B определяются из граничных условий при $\Pi(L)$, $\Pi(\rho)$.

6. Пример краевой задачи. Рассмотрим модель образования гидридов [2]. Частица порошка гидроксида металла представляет собой сферу радиуса L ; сферический слой толщиной $h = L - \rho$ является оболочкой гидридной фазы: он состоит из гидроксида (например, UH_3) и может содержать некоторое избыточное количество диффундирующего водорода с концентрацией c . Остальная часть частицы представляет собой ядро металлической фазы, которое также содержит некоторое количество водорода. Диффузия водорода как в ядре, так и в корке, описывается уравнением диффузии Фика с существенно разными коэффициентами диффузии. Однако, поскольку

диффузия в металлической фазе происходит намного быстрее, можно предположить, что концентрация c_m там пространственно постоянна, т.е. можно пренебречь градиентом концентрации (хотя диффузионный поток учитывается). Поток на наружной, обращенной к газу, поверхности корки определяется химическими процессами на поверхности: десорбцией, адсорбцией и т. д. Они нелинейным образом зависят от концентрации вблизи поверхности, давления газа и температуры. Таким образом, выражаем нормальную производную на поверхности через значение решения в той же точке. При угловой симметрии в сферических координатах получаем граничное условие

$$D\partial_r c(t, L) = G(t, c(L)).$$

Аналогичное условие выполняется на границе раздела фаз, но теперь нелинейная функция описывает химические процессы образования гидридов. Локальный закон сохранения дает условие типа Стефана

$$(c(t, \rho) - c_m)\dot{\rho} = -D\partial_r c(t, \rho).$$

Здесь ρ — положение свободной границы, которая является концентрической сферой и описывается одним параметром: радиусом. Смысл условия: отсутствие накопления на границе и консервативность: смещение свободной границы освобождает вещество (разность концентраций), которое должно быть удалено диффузионным потоком. Исходные данные стационарны: $c(0, r) = A + B/r$ со значениями A и B , полученными из граничных условий. Также задано $\rho(0) = \rho_0$, определяемое начальной толщиной корки h_0 . В предположении симметрии уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(Dr^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right).$$

Сфера в этой модели может быть заменена симметричной формой, предложенной выше, с заменой r^2 на соответствующий $\Pi(r)$. Изменения коснутся только уравнения диффузии и начального распределения.

Отметим, что при моделировании физических явлений приходится пренебрегать поверхностью $\bar{\Pi}(L)$, поэтому она должна иметь достаточно малую площадь. Это находит свое отражение в словах «длинный тонкий цилиндр»: процессы на торцах вносят пренебрежимо малый вклад.

7. Порошок и переходные формы. Для приложений важно вывести переходные формы между тривиальными. Мы установили, что единственное, что зависит от формы в дифференциальных операциях — это $\Pi'(r)/\Pi(r)$. Для тривиальных форм этот множитель равен σ/r с σ , равным 2 для сфер, 1 для цилиндров и 0 для плоских пластин, а сама площадь поверхности, с точностью до постоянного множителя, равна r^σ . Переходные формы характеризуются параметром ℓ , таким, что при $\ell = 0$ они совпадают с одной формой, а при $\ell \rightarrow \infty$ — с другой (асимптотически).

Рассмотренный выше «круглый цилиндр» (цилиндр конечной высоты ℓ и радиуса L , к торцам которого приклеены полусферы того же радиуса L) является переходным между сферой и цилиндром. Площадь такой поверхности равна $\Pi(L) = 2\pi\ell L + 4\pi L^2$: она совпадает с площадью сферы при $\ell = 0$ и стремится к площади цилиндра при $\ell \rightarrow \infty$; точнее, отношение площади этой поверхности к площади конечного цилиндра с той же высотой и тем же радиусом стремится к 1:

$$\frac{\Pi'(L)}{\Pi(L)} = \frac{2\pi\ell + 8\pi L}{2\pi\ell L + 4\pi L^2} \rightarrow \frac{1}{L}.$$

Выпуклая оболочка тора радиусов L и $\ell > L$ является переходной между сферой и плоской пластиной. Действительно, $\Pi(L) = 2\pi(\ell^2 + 2L^2 + \pi L\ell)$, что совпадает со сферой, если $\ell = 0$; тогда как при $\ell \rightarrow \infty$ имеем $\Pi'(L)/\Pi(L) \rightarrow 0$, что является случаем плоской пластины.

Наконец, разрежем цилиндр конечной высоты ℓ плоскостью, проходящей через ось цилиндра, раздвинем эти части и добавим две общие касательные плоскости к обеим частям. Эта форма, которую можно назвать «плоским цилиндром», является переходной между цилиндром и плоской пластиной: $\Pi(L) = 2\pi L\ell + \ell D$, где ℓ — высота цилиндра и D — расстояние между осями двух частей цилиндра. Для $D = 0$ это цилиндр, а для $D \rightarrow \infty$ — плоская форма.

Теперь рассмотрим порошок частиц одинакового размера, т.е. несвязной формы. Предположим, что у нас есть только сферы, цилиндры и плоские пластины одинакового размера L . Общее количество частиц (связных компонентов) составляет N . Доли каждой формы: α_i , $i = 0, 1, 2$

(здесь i — это σ -фактор для каждой фигуры). Тогда $\Pi(L)$ — произвольный квадратный полином с неотрицательными коэффициентами с точностью до постоянного множителя:

Теорема 6. *Для любого полинома $p(L)$ степени не выше второй с неотрицательными коэффициентами существует порошок $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ с $\Pi(L)$, пропорциональной $p(L)$.*

Доказательство. В самом деле, площадь поверхности несвязной частицы равна сумме площадей отдельных компонент. Для сферы $\Pi(L) = 4\pi L^2$; для цилиндра $\Pi(L) = 2\pi\ell L$; для плоской пластины $\Pi(L) = \text{const}$. Иными словами, площади этих форм пропорциональны L^2 , L и единице. Выбор частиц этих трех форм в подходящих пропорциях позволяет получить произвольный многочлен с неотрицательными коэффициентами, с точностью до постоянного множителя. $\square$

Площадь поверхности $\Pi(L)$ выражается через интегралы по поверхности; они сводятся к интегралам по каждому связному компоненту или к $N\alpha_i$, умноженному на интеграл по каждой из форм. Так как α_i может быть любым распределением, можно предоставить любые коэффициенты, с точностью до постоянного коэффициента.

Это позволяет моделировать хорошо просеянный порошок, состоящий из частиц одинакового размера, одной моделью.

8. Заключение. Построен класс симметричных форм, позволяющих свести к одной пространственной переменной многие краевые задачи математической физики, включая задачи тепломассопереноса со свободными границами. Изучены свойства этого класса и представлен алгоритм упрощения задач. Показано, с одной стороны, что многие формы дают одинаковые результаты в предположении симметрии; с другой стороны, описан ассортимент форм, которые позволяют приблизить некоторые из наблюдаемых форм частиц порошка. Наконец, предложен способ моделировать произвольный порошок частиц одного размера как одну несвязную форму.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hirscher M. et al.* Materials for hydrogen-based energy storage. Past, recent progress and future outlook// J. Alloys Compounds. — 2019. — 827. — 153548.
2. *Gabis I. E., Chernov I. A.* The Kinetics of Binary Metal Hydride Decomposition. — NOVA Science, 2017.
3. *Mintz M. H., Zeiri Y.* Hydriding kinetics of powders// J. Alloys Compounds. — 1994. — 216. — P. 159–175.
4. *Pang Y., Li Q.* A review on kinetic models and corresponding analysis methods for hydrogen storage materials// Int. J. Hydrogen Energy. — 2016. — 41. — P. 18072–18087.
5. *Sokolnikoff I. S.* Tensor Analysis. Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. — New York: Wiley, 1964.
6. *Weyl H.* On the volume of tubes// Am. J. Math. — 1939. — 61. — P. 461–472.

Чернов Илья Александрович
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН, Петрозаводск
E-mail: chernov@krc.karelia.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 138–147
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-138-147

УДК 519.175.3

О ПЕРЕЧИСЛЕНИИ ПОМЕЧЕННЫХ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ БЕЗ МОСТОВ

© 2023 г. В. А. ВОБЛЫЙ

Аннотация. Получены явные формулы и асимптотика для ряда классов помеченных графов без мостов: кактусов, графов блоков, полноблочно-кактусных графов и последовательно-параллельных графов. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей почти все графы из рассматриваемых классов имеют мосты.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, k -циклический граф, блок, мост, граф без мостов, эйлеров граф, последовательно-параллельный граф, асимптотика, случайный граф.

ON ENUMERATION OF LABELED CONNECTED BRIDGELESS GRAPHS

© 2023 V. A. VOBLYI

ABSTRACT. In this paper, we obtain explicit formulas and asymptotics for some classes of bridgeless labeled graphs: cacti, block graphs, block-cactus graphs, and series-parallel graphs. We prove that, under a uniform probability distribution, almost all graphs from the classes considered have bridges.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, k -cyclic graph, block, bridge, bridgeless graph, Eulerian graph, series-parallel graph, asymptotics, random graph.

AMS Subject Classification: 05C30

1. Введение.

Определение 1 (см. [15, с. 55]). *Цикломатическим числом (циклическим рангом)* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин.

Определение 2. *k -Циклический граф* — это граф с цикломатическим числом, равным k .

Определение 3. Для связного графа *точкой сочленения* называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным.

Определение 4. Для связного графа *мостом* называется его ребро, после удаления которого граф становится несвязным.

Определение 5 (см. [15, с. 41]). *Блок* — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения.

Определение 6 (см. [15, с. 45]). *Граф блоков* — это связный граф, у которого все блоки полные графы.

Определение 7 (см. [16, с. 93]). *Кактусом* называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле. Все блоки кактуса — ребра или циклы.

Определение 8 (см. [11]). Связный граф называется *полноблочно-кактусным* (block-cactus graph), если все его блоки или полные графы, или циклы.

Определение 9 (см. [17]). Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит полный граф с 4 вершинами в качестве минора.

Определение 10. *Эйлеров* граф — это связный граф, у которого все вершины имеют четную степень.

Определение 11 (см. [22]). Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу.

Хенлон и Робинсон (см. [20]) получили для производящей функции помеченных графов без мостов несколько функционально-дифференциальных уравнений, а также нелинейное уравнение с частными производными. Однако из этих уравнений не найдены явные формулы и соответствующая асимптотика. В [3] перечислены помеченные бициклические и трициклические графы без мостов. В [7] асимптотически перечислены помеченные связные k -циклические графы без мостов. В [6] найдены число помеченных связных внешнепланарных n -вершинных k -циклических графов без мостов, а также асимптотика для числа таких графов при $n \rightarrow \infty$. В [8] асимптотически перечислены помеченные последовательно-параллельные k -циклических графы без мостов.

Известно, что почти все помеченные связные графы являются блоками (см. [16, с. 243]). Очевидно, что число помеченных связных n -вершинных графов без мостов больше или равно числу помеченных n -вершинных блоков, но меньше или равно числу помеченных связных n -вершинных графов. Следовательно, число помеченных связных n -вершинных графов без мостов при $n \rightarrow \infty$ асимптотически равно числу помеченных связных n -вершинных графов, т.е. почти все связные графы не имеют мостов. В [1] замечено, что почти все помеченные связные внешнепланарные графы имеют мосты. В статье доказано, что в таких классах помеченных графов, как графы блоков, кактусы, полноблочно-кактусные графы и последовательно-параллельные графы почти все связные графы имеют мосты.

2. Кактусы. В [10] для числа Ca_n помеченных кактусов с n вершинами получена формула

$$Ca_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{[(n-1)/2]} \sum_{k=0}^{n-2r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k!r!2^r} \binom{n-k-r-2}{r-1}.$$

Теорема 1. *Почти все помеченные кактусы имеют мосты.*

Доказательство. Для числа Ca_n помеченных кактусов с n вершинами при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотическая формула

$$Ca_n \sim cn^{-5/2}a^n n!, \quad (1)$$

(см. [1]), где $c \approx 0,1201498132$, $a \approx 4,188654598$.

Отметим, что множество кактусов без мостов совпадает с множеством эйлеровых кактусов. Действительно, у кактуса без мостов все блоки являются простыми циклами, т.е. являются эйлеровыми графами и, следовательно, кактус без мостов — эйлеров граф (см. [11]). С другой стороны, эйлеров кактус не имеет мостов (см. [2]).

Пусть $\overline{Ca}_n$ — число помеченных n -вершинных кактусов без мостов (эйлеровых кактусов). В [12] найдена асимптотика

$$\overline{Ca}_n \sim \bar{c}n^{-5/2}\bar{a}^n n!, \quad (2)$$

где $\bar{c} \approx 0,1079436709$, $\bar{a} \approx 2,5424753735$.

С помощью формул (1) и (2) и учитывая, что $\bar{a} < a$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{Ca}_n}{Ca_n} = \left(\frac{\bar{c}}{c}\right) \left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^n = 0,$$

т.е. доля n -вершинных кактусов без мостов среди всех помеченных n -вершинных кактусов при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, что равносильно утверждению теоремы. $\square$

Число $Ca(n, k)$ помеченных n -вершинных k -циклических кактусов при $n \geq 2k+1$ и $k \geq 1$ равно (см. [4])

$$Ca(n, k) = \frac{(n-1)!}{k!2^k} \sum_{i=0}^{n-2k-1} \binom{k+i-1}{k-1} \frac{n^{n-k-i-2}}{(n-2k-i-1)!}.$$

Теорема 2. Почти все помеченные кактусы с фиксированным цикломатическим числом $k \geq 1$ имеют мосты.

Доказательство. Для числа $Ca(n, k)$ помеченных n -вершинных k -циклических кактусов с фиксированным числом $k \geq 1$ при $n \rightarrow \infty$ известна асимптотическая формула (см. [4])

$$Ca(n, k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2} k! \Gamma(\frac{k+1}{2})} n^{n+3k/2-2}. \quad (3)$$

Пусть $\overline{Ca}(n, k)$ — число помеченных n -вершинных k -циклических кактусов без мостов (эйлеровых кактусов). В [2] получена формула

$$\overline{Ca}(n, k) = \frac{(n-1)!n^{k-1}}{k!2^k} \binom{n-k-2}{k-1}.$$

Так как при фиксированном k и $n \rightarrow \infty$ имеем $n!/(n-k)! \sim n^k$, то с учетом асимптотики (3) и формулы Стирлинга для факториала получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{Ca}(n, k)}{Ca(n, k)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{k-2}(n-k-2)!}{k!2^k(k-1)!(n-2k-1)!Ca(n, k)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{2k-3}2^{3k/2}k!\Gamma(\frac{k+1}{2})}{2^k k! (k-1)! \sqrt{\pi} n^{n+(3k-4)/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(k+1)/2} \Gamma(\frac{k+1}{2})}{(k-1)!} n^{(k-1)/2} e^{-n} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, доля n -вершинных k -циклических кактусов без мостов среди всех помеченных n -вершинных k -циклических кактусов при фиксированном k и $n \rightarrow \infty$ равна нулю, а это равносильно утверждению теоремы. $\square$

3. Графы блоков. Обозначим через $P_n(x)$ многочлен Белла одной переменной (см. [18]). Этот многочлен определяется через числа Стирлинга второго рода и имеет следующую производящую функцию:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n S(n, k) x^k, \quad \exp(x(e^z - 1)) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(x) \frac{z^i}{i!}.$$

Для числа H_n помеченных связных n -вершинных графов блоков известна формула (см. [21])

$$H_n = \frac{1}{n} P_{n-1}(n).$$

Теорема 3. Для числа $\bar{H}_n$ помеченных связных n -вершинных графов блоков без мостов при $n \geq 4$ верна формула

$$\bar{H}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^{n-i-1} n^{n-i-2} P_i(n), \quad (4)$$

где $P_i(n)$ — многочлен Белла одной переменной.

Доказательство. Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами, а B_n — число помеченных блоков с n вершинами. Введем экспоненциальные производящие функции

$$C(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{z^n}{n!}, \quad B(z) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Напомним, что ряды для $B(z)$ и $C(z)$ являются формальными степенными рядами, $[z^i]$ — коэффициентный оператор и $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета (см. [13, п. 1.2]). В [1] получена формула

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(nB'(z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n}. \quad (5)$$

Формула (5) верна не только для всего класса связных графов, но и для блочно-устойчивого его подкласса (см. [5]). В дальнейшем под $B(z)$ будем понимать производящую функцию для соответствующего подкласса связных графов.

Известно, что класс графов блоков является блочно-устойчивым классом графов (см. [5]). Так как существует единственный помеченный n -вершинный полный граф, то из формулы (5) для числа H_n помеченных связных n -вершинных графов блоков получим

$$H_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(n(B'(z))) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp\left(n\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\right).$$

Графы без мостов не имеют блоков, состоящих из одного ребра, которым в производящей функции $B(z)$ графов блоков соответствует слагаемое $z^2/2$. Поэтому для числа $\bar{H}_n$ помеченных связных n -вершинных графов блоков без мостов имеем

$$\begin{aligned} \bar{H}_n &= \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(n(B'(z) - z)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp\left(n\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = \\ &= \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(n(e^z - z - 1)) = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(n(e^z - 1)) \exp(-nz) z^{-n}. \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя производящую функцию для многочленов Белла одной переменной и разлагая вторую экспоненту в последнем равенстве (6) в степенной ряд, найдем

$$\begin{aligned} \bar{H}_n &= \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} P_i(n) \frac{z^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-n)^j}{j!} z^{j-n} = \frac{(n-1)!}{n} \sum_{i=0}^{\infty} P_i(n) \frac{(-n)^{n-i-1}}{i!(n-i-1)!} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1}{i} (-1)^{n-i-1} n^{n-i-2} P_i(n). \end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент не равен нулю при $0 \leq i \leq n-1$, завершим доказательство теоремы. $\square$

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Теорема 4 (теорема Флажолле—Седжвика; см. [19, теорема VIII.8]). *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *суммы рядов*

$$a(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j, \quad b(z) = \sum_{j \geq 0} b_j z^j$$

с неотрицательными коэффициентами являются функциями, аналитическими в точке $z = 0$; кроме того, $b(0) \neq 0$;

(ii) $\text{НОД}\{j \mid b_j > 0\} = 1$;

(iii) *если $R \leq \infty$ — радиус сходимости ряда $b(z)$, то радиус сходимости ряда $a(z)$ не меньше R .*

Введем обозначения

$$F(N, n) = [z^N] \{a(z)(b(z))^n\} = \frac{1}{2\pi i} \oint a(z)(b(z))^n \frac{dz}{z^{N+1}},$$

$$T = \lim_{x \rightarrow R-0} \frac{xb'(x)}{b(x)}, \quad \sigma = \frac{d^2}{dr^2} (\ln b(r) - \lambda \ln r),$$

где λ — такое положительное число, что $0 < \lambda < T$, а r — единственный действительный корень уравнения

$$r \frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda. \quad (7)$$

Тогда для целого $N = \lambda n$ при $n \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ верно асимптотическое равенство

$$F(N, n) \sim a(r) \frac{(b(r))^n}{r^{N+1} \sqrt{2\pi n \sigma}}. \quad (8)$$

Теорема 5. Для числа H_n помеченных графов блоков с n вершинами при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотическая формула

$$H_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!, \quad (9)$$

где $c_1 \approx 0,1807375998$, $a_1 \approx 3,782427973$.

Доказательство. В нашем случае в силу формулы (5) имеем

$$H_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^n] z (\exp(e^z - 1))^n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n),$$

где $N = n$, $\lambda = 1$, $a(z) = z$, $b(z) = \exp(e^z - 1)$.

Так как ряд для $b(z)$ сходится при $|z| < \infty$, оператор формального вычета является контурным интегралом. Очевидно, функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитические в точке $z = 0$ и $b(0) = 1$. Функция $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, так как $b(z) = \exp(B(z))$ и $B(z)$ — производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. Поскольку $b_2 > 0$, $b_3 > 0$, имеем $\text{НОД}\{j \mid b_j > 0\} = 1$. Очевидно, ряды $a(z)$ и $b(z)$ имеют бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия (i)–(iii) теоремы Флажолле—Седжвика (теорема 4) выполнены.

Имеем

$$T = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x b'(x)}{b(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty, \quad 0 < \lambda < T.$$

В нашем случае уравнение (7) имеет вид $r e^r = 1$. Решая это уравнение с помощью Maple, видим, что его единственным действительным корнем является число $r \approx 0,5671432904$. Для величины

$$\sigma = \left(\frac{b'(r)}{b(r)} \right)' + \frac{\lambda}{r^2} = e^r + \frac{1}{r^2}$$

находим $\sigma \approx 4,872177598$. Также с помощью Maple получаем

$$c_1 = \frac{a(r)}{r \sqrt{2\pi \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma}} \approx 0,1807375998, \quad a_1 = \frac{b(r)}{r} \approx 3,782427974.$$

Окончательно при $n \rightarrow \infty$ имеем асимптотику

$$H_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma}} n^{-1/2} \left(\frac{b(r)}{r} \right)^n \sim n! c_1 n^{-5/2} a_1^n. \quad \square$$

Теорема 6. Для числа $\bar{H}_n$ помеченных графов n -вершинных графов блоков без мостов верна оценка

$$\bar{H}_n \leq \bar{c}_1 n^{-2} \bar{a}_1^n n!, \quad (10)$$

где $\bar{c}_1 \approx 0,8064659942$, $\bar{a}_1 \approx 1,912871357$.

Доказательство. Используем обозначения теоремы Флажолле—Седжвика (теорема 4). В этом случае в силу формулы (5) получаем

$$\bar{H}_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^n] z (\exp(e^z - z - 1))^n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n),$$

где $N = n$, $\lambda = 1$, $a(z) = z$, $b(z) = \exp(e^z - z - 1)$. Условия (i)–(iii) теоремы Флажолле—Седжвика выполнены. Имеем

$$T = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x b'(x)}{b(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^x - 1) = +\infty, \quad 0 < \lambda < T.$$

С помощью Maple находим, что уравнение (7), в данном случае имеющее вид $r(e^r - 1) = 1$, имеет два действительных корня $r_1 \approx -1,349976485$ и $r_2 \approx 0,8064659942$, из которых один положительный.

В силу [19, предложение VIII.7] имеем оценку

$$F(N, n) \leq a(r_2)(b(r_2))^n r_2^{-n} = r_2 \left(\frac{1}{r_2} \exp(e^{r_2} - r_2 - 1) \right)^n.$$

Обозначив $\bar{c}_1 \approx 0,8064659942$, $\bar{a}_1 = \frac{1}{r_2} \exp(e^{r_2} - r_2 - 1) \approx 1,912871356$, получим оценку (10). $\square$

Теорема 7. Почти все помеченные графы блоков имеют мосты.

Доказательство. С помощью формул (9) и (10), учитывая неравенство $\bar{a}_1 < a_1$, находим

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{H}_n}{H_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{c}_1}{c_1} \right) \sqrt{n} \left(\frac{\bar{a}_1}{a_1} \right)^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{H}_n}{H_n} = 0,$$

т.е. доля n -вершинных графов блоков без мостов среди всех помеченных n -вершинных графов блоков при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, что равносильно утверждению теоремы. $\square$

4. Полноблочно-кактусные графы.

Теорема 8. Для числа $\bar{F}_n$ помеченных n -вершинных полноблочно-кактусных графов без мостов при $n \geq 4$ верна формула

$$\bar{F}_n = \bar{H}_n + (n-1)! \sum_{p=1}^{[(n-1)/3]} \sum_{i=0}^{n-3p-1} \sum_{j=0}^{n-3p-i-1} P_i(n) \frac{(-1)^j n^{j+p-1}}{i! j! 2^l} \binom{n-2p-i-j-2}{p-1},$$

где $\bar{H}_n$ — число помеченных n -вершинных графов блоков без мостов.

Доказательство. Класс полноблочно-кактусных графов является блочно-устойчивым классом графов (см. [5]) и для него верна формула (5). У полноблочно-кактусного графа все блоки являются или полными графами, или циклами. Так как существует единственный помеченный n -вершинный полный граф, а число помеченных циклов с n вершинами равно $(n-1)!/2$, то

$$B(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, \quad B'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2} z^n = e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)}.$$

Следовательно, для числа F_n помеченных n -вершинных полноблочно-кактусных графов из формулы (5) имеем

$$F_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp n \left(e^z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)} \right).$$

Для графов без мостов, вычитая из производящей функции для числа блоков $B(z)$ слагаемое $z^2/2$, соответствующее блоку-ребру, получим

$$\begin{aligned} \bar{F}_n &= \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp n \left(e^z - 1 - z + \frac{z^3}{2(1-z)} \right) = \\ &= \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(n(e^z - 1)) \exp(-nz) \exp n \left(\frac{z^3}{2(1-z)} \right) z^{-n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Применяя производящую функцию для многочленов Белла одной переменной и разлагая вторую и третью экспоненты в последнем равенстве в степенной ряд, найдем

$$\bar{F}_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i(n)}{i!} z^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-n)^j z^j}{j!} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^p z^{3p}}{2^p (1-z)^{p!}} \right) z^{-n}.$$

С помощью известного ряда (см. [14, с. 141])

$$(1-z)^{-p} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+p-1}{p-1} z^m$$

получим

$$\begin{aligned}\bar{F}_n &= \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} P_i(n) \frac{z^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-n)^j}{j!} z^{j-n} + \\ &+ (n-1)! [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i(n)}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-n)^j}{j!} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^{p-1}}{2^p p!} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+p-1}{p-1} z^{3p+i+j+m-n} = \\ &= \frac{(n-1)!}{n} \sum_{i=0}^{\infty} P_i(n) \frac{(-n)^{n-i-1}}{i!(n-i-1)!} + (n-1)! \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P_i(n) n^{j+p-1}}{2^p p! i!} \binom{n-i-2p-2}{p-1}.\end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент не равен нулю при $0 \leq p-1 \leq n-i-j-2p-2$, т.е. $3p \leq n-i-j-1 \leq n-1$, завершим доказательство теоремы. $\square$

Теорема 9. Для числа $\bar{F}_n$ помеченных n -вершинных полноблочно-кактусных графов без мостов при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотическая формула

$$\bar{F}_n \sim \bar{c}_2 n^{-5/2} \bar{a}_2^n n!, \quad (12)$$

где $\bar{c}_2 \approx 0,1076664043$, $\bar{a}_2 \approx 2,617226590$.

Доказательство. Используем обозначения теоремы Флажолле—Седжвика (теорема 4). В этом случае в силу формулы (11) имеем

$$\bar{F}_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^n] z \left(\exp \left(e^z - z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)} \right) \right)^n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n),$$

где

$$N = n, \quad \lambda = 1, \quad a(z) = z, \quad b(z) = \exp \left(e^z - z - 1 + \frac{z^3}{2(1-z)} \right).$$

Так как ряд для $B(z)$ сходится при $|z| < 1$, оператор формального вычета является контурным интегралом. Очевидно, функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитичны в точке $z = 0$ и $b(0) = 1$. Функция $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, так как $b(z) = \exp(B'(z))$ и $B(z)$ — производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. Поскольку $b_3 > 0$, $b_4 > 0$, имеем

$$\text{НОД}\{j \mid b_j > 0\} = 1.$$

Так как $z = 1$ — ближайшая к началу координат особая точка функции $b(z)$, радиус сходимости R соответствующего ряда равен 1. Очевидно, ряд $a(z)$ имеет бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия (i)–(iii) теоремы Флажолле—Седжвика выполнены. Имеем

$$T = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x b'(x)}{b(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} x \left(e^x - 1 + \frac{3x^2 - 2x^3}{2(1-x)^2} \right) = +\infty, \quad 0 < \lambda < T.$$

В нашем случае уравнение (7) имеет вид

$$r \left(e^r - 1 + \frac{3r^2 - 2r^3}{2(1-r)^2} \right) = 1.$$

Решая его с помощью Maple, видим, что его единственным действительным корнем в круге сходимости ряда $b(z)$, т.е. при $|z| < 1$, является число $r \approx 0,5266974160$. Также с помощью Maple находим значение величины

$$\sigma = \left(\frac{b'(r)}{b(r)} \right)' + \frac{\lambda}{r^2} = e^r + \frac{r^3 - 3r^2 + 3r}{(1-r)^3} + \frac{1}{r^2},$$

равное $\sigma \approx 13,72965780$, а также

$$\bar{c}_2 = \frac{a(r)}{r \sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \approx 0,1076664043, \quad \bar{a}_2 = \frac{b(r)}{r} \approx 2,617226590.$$

Окончательно при $n \rightarrow \infty$ имеем асимптотику

$$\bar{F}_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} n^{-1/2} \left(\frac{b(r)}{r} \right)^n \sim n! \bar{c}_2 n^{-5/2} \bar{a}_2^n. \quad \square$$

Теорема 10. Почти все помеченные полноблочно-кактусные графы имеют мосты.

Доказательство. В [11] для числа F_n помеченных n -вершинных полноблочно-кактусных графов найдена асимптотика

$$F_n \sim c_2 n^{-5/2} a_2^n n!, \quad (13)$$

где $c_2 \approx 0,1178070871$, $a_2 \approx 4,261224133$. С помощью формул (12) и (13), учитывая неравенство $\bar{a}_2 < a_2$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_n}{F_n} = \left(\frac{\bar{c}_2}{c_2} \right) \left(\frac{\bar{a}_2}{a_2} \right)^n = 0.$$

Это значит, что доля полноблочно-кактусных графов без мостов среди всех помеченных полноблочно-кактусных графов при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, что равносильно утверждению теоремы. $\square$

5. Последовательно-параллельные графы.

Теорема 11. Для числа $\overline{SP}_n$ помеченных n -вершинных последовательно-параллельных графов без мостов при $n \geq 4$ верна формула

$$\begin{aligned} \overline{SP}_n &= \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}] \exp n(B'(x) - x)x^{-n} = \\ &= \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp \left(n \left[\frac{z+1}{2e^z-1} - \frac{z^2+2}{2(2e^z-z-1)} \right] \right) \times \\ &\quad \times (2e^z-1)^n (2e^z-z-1)^n \left[\frac{2e^z}{(2e^z-1)^2} - \frac{2e^z-1}{(2e^z-z-1)^2} \right] z^{-n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Пусть SP_n — число помеченных n -вершинных последовательно-параллельных графов. В [5] из формулы (5) получены выражения

$$SP_n = \frac{(n-1)!}{n} [x^{-1}] \exp(nB'(x))x^{-n}, \quad B'(x) = \frac{x D_0(2 - x D_0^2)}{2(1 + x D_0)}, \quad \ln \left(\frac{1 + D_0}{2} \right) = \frac{x D_0^2}{1 + x D_0}.$$

После замены $z = \ln((1 + D_0)/2)$ получаем

$$\begin{aligned} D_0 &= 2e^z - 1, \quad x = \frac{z}{D_0(D_0 - z)} = \frac{1}{2e^z - z - 1} - \frac{1}{2e^z - 1}, \\ B'(x) &= \frac{z}{2e^z - 1} - \frac{z^2}{2(2e^z - z - 1)}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{2e^z}{(2e^z - 1)^2} - \frac{2e^z - 1}{(2e^z - z - 1)^2}. \end{aligned}$$

Из этих выражений в [5] получена формула

$$\begin{aligned} SP_n &= \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp \left(n \left[\frac{z}{2e^z - 1} - \frac{z^2}{2(2e^z - z - 1)} \right] \right) \times \\ &\quad \times (2e^z - 1)^n (2e^z - z - 1)^n \left[\frac{2e^z}{(2e^z - 1)^2} - \frac{2e^z - 1}{(2e^z - z - 1)^2} \right] z^{-n}. \end{aligned}$$

Для графов без мостов, вычитая из производящей функции для числа блоков $B(x)$ слагаемое $x^2/2$, соответствующее блоку-ребру, получим формулу (14). $\square$

Теорема 12. Для числа $\overline{SP}_n$ помеченных n -вершинных последовательно-параллельных графов без мостов при $n \rightarrow \infty$ верна оценка

$$\overline{SP}_n \leq \bar{c}_3 n^{-2} \bar{a}_3^n n!, \quad (15)$$

где $\bar{c}_3 \approx 0,002486786009$, $\bar{a}_3 \approx 7,983391665$.

Доказательство. Воспользуемся опять теоремой Флажолле—Седжвика. В этом случае имеем

$$\overline{SP}_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n), \quad N = n, \quad \lambda = 1, \quad a(z) = z \left[\frac{2e^z}{(2e^z - 1)^2} - \frac{2e^z - 1}{(2e^z - z - 1)^2} \right],$$

$$b(z) = (2e^z - 1)(2e^z - z - 1) \exp \left[\frac{z+1}{2e^z - 1} - \frac{z^2 + 2}{2(2e^z - z - 1)} \right].$$

В [9] доказано, что $z = -\ln 2$ — ближайшая к началу координат особая точка функций $a(z)$ и $b(z)$; следовательно, радиус сходимости соответствующих рядов равен $R = \ln 2 \approx 0,69315$.

Очевидно, функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитичны в точке $z = 0$, причем $b(0) = 1$. Имеем

$$a(z) = z \frac{d}{dz} \frac{z}{(1 - 2e^z)(1 - (2e^z - z))} = z \frac{d}{dz} \left(\sum_{p=0}^{\infty} (2e^z)^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} (2e^z - z)^q \right).$$

Ряд для функции $a(z)$ является рядом с положительными коэффициентами, так как в результате перемножения рядов с положительными коэффициентами, а также при возведении в степень или дифференцирования таких рядов получается ряд с положительными коэффициентами.

Ряд для функции $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, так как

$$b(z) = \exp(\bar{B}(z)) (2e^z - 1)(2e^z - z - 1)$$

и $\bar{B}(z)$ — производящая функция для числа помеченных блоков частного вида, а ряды для $(2e^z - 1)$ и $(2e^z - z - 1)$ имеют положительные коэффициенты.

С помощью Maple найдем $b_1 = 3$, $b_2 = 9/2$. Следовательно, $\text{НОД}\{j \mid b_j > 0\} = 1$. Таким образом, условия (i)–(iii) теоремы Флажолле—Седжвика выполнены. Имеем

$$\phi(z) = z \frac{b'(z)}{b(z)} = z (\ln b(z))' = z \left[\frac{4e^z}{2e^z - 1} - \frac{2(z+1)e^z}{(2e^z - 1)^2} + \frac{(z^2 + 2)(2e^z - 1)}{2(2e^z - z - 1)^2} \right],$$

$$T = \lim_{z \rightarrow \ln 2 - 0} \phi(z) = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{9}(\ln 2 + 1) + \frac{3(\ln^2 2 + 2)}{2(3 - \ln 2)^2} \right) \ln 2 \approx 1,8114.$$

Так как $\lambda = 1$ и $0 < \lambda < T$, решая уравнение $\phi(r) = \lambda$ с помощью Maple, найдем, что оно в круге сходимости функций $a(z)$ и $b(z)$ имеет два действительных корня $r_1 \approx -0,5072321027$ и $r_2 \approx 0,3529953286$, из которых один положительный. В силу [19, предложение VIII.7] имеем оценку

$$F(N, n) \leq a(r_2)(b(r_2))^n r_2^{-n} = \bar{c}_3 \bar{a}_3^n,$$

где $\bar{c}_3 = a(r_2) \approx 0,002486786009$, $\bar{a}_3 = b(r_2)/r_2 \approx 7,983391665$. Так как $\overline{SP}_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n)$, получим оценку (15). $\square$

Теорема 13. *Почти все помеченные последовательно-параллельные графы имеют мосты.*

Доказательство. В [17] при $n \rightarrow \infty$ найдена асимптотика

$$SP_n \sim c_3 n^{-5/2} a_3^n n!, \quad (16)$$

где $a_3 \approx 9,0733$. Отметим, что величина константы c_3 , найденной в [17], была уточнена в работе автора [9]. Однако величина константы не имеет значения для доказательства этой теоремы.

С помощью формул (15) и (16), учитывая неравенство $\bar{a}_3 < a_3$, находим

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{SP}_n}{SP_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{c}_3}{c_3} \right) \sqrt{n} \left(\frac{\bar{a}_3}{a_3} \right)^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{SP}_n}{SP_n} = 0,$$

т.е. доля последовательно-параллельных графов без мостов среди всех помеченных последовательно-параллельных графов при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, что равносильно утверждению теоремы. $\square$

В следующей таблице представлены числа $\bar{H}_n$, $\bar{F}_n$ и $\overline{SP}_n$, вычисленные с помощью формул из теорем 3, 8 и 11 (для $n = 3$ непосредственное вычисление).

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\bar{H}_n$	1	1	16	61	911	7169	117307	1454261	27245032
$\bar{F}_n$	1	4	28	301	3581	54209	947899	18990941	430587592
$\overline{SP}_n$	1	9	167	4350	148767	6294176	317381913	18575403930	1237406183975

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воблый В. А. Об одной формуле для числа помеченных связных графов// Дискрет. анализ. иссл. опер. — 2012. — 19, № 4. — С. 48–59.
2. Воблый В. А. Перечисление помеченных эйлеровых кактусов// Мат. XI Междунар. семин. «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 18–23 июня 2012 г.). — М.: МГУ, 2012. — С. 275–277.
3. Воблый В. А. О перечислении помеченных связных бициклических и трициклических графов без мостов// Мат. заметки. — 2012. — 91, № 2. — С. 308–311.
4. Воблый В. А. О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер// Дискр. анализ. иссл. опер. — 2016. — 23, № 2. — С. 5–20.
5. Воблый В. А. Второе соотношение Риддела и следствия из него// Дискр. анализ. иссл. опер. — 2019. — 26, № 1. — С. 20–32.
6. Воблый В. А. О числе помеченных внешнепланарных k -циклических графов без мостов// Дискр. анализ. иссл. опер. — 2020. — 27, № 1. — С. 5–16.
7. Воблый В. А. Об асимптотическом перечислении помеченных связных k -циклических графов без мостов// Мат. заметки. — 2020. — 107, № 2. — С. 304–306.
8. Воблый В. А. Асимптотическое перечисление помеченных последовательно-параллельных k -циклических графов без мостов// Дискр. анализ. иссл. опер. — 2021. — 28, № 4. — С. 61–69.
9. Воблый В. А. Уточнение асимптотики для числа помеченных последовательно-параллельных графов// Мат. заметки. — 2021. — 109, № 6. — С. 944–947.
10. Воблый В. А., Мелешко А. К. Новая формула для числа помеченных кактусов с заданным числом вершин// Тез. докл. Междунар. науч. конф. «Дискретная математика, теория графов и их приложения» (Минск, 11–14 ноября 2013 г.). — Минск, 2013. — С. 9–11.
11. Воблый В. А., Мелешко А. К. Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов// Дискр. анализ. иссл. опер. — 2014. — 21. — С. 24–32.
12. Воблый В. А., Мелешко А. К. Асимптотическое перечисление помеченных эйлеровых кактусов// Мат. XVII Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 16–20 июля 2014 г.). — Казань, 2014. — С. 58–60.
13. Гильден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
14. Прудников А. П. и др. Интегралы и ряды. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
15. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.
16. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
17. Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M. Enumeration and limit laws of series-parallel graphs// Eur. J. Combin. — 2007. — 28, № 8. — P. 2091–2105.
18. Carlitz L. Single variable Bell polynomials// Collect. Math. — 1962. — 14. — P. 13–25.
19. Flajolet P., Sedgewick G. E. Analytic Combinatorics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009.
20. Hanlon P., Robinson R. W. Counting bridgeless graphs// J. Combin. Theory. Ser. B. — 1982. — 33, № 1. — P. 276–305.
21. Leroux P. Enumerative problems inspired by Mayer’s theory of cluster integrals// Electron. J. Combin. — 2004. — 11. — R32.
22. McDiarmid C., Scott A. Random graphs from a block stable class// Eur. J. Combin. — 2016. — 58. — P. 96–106.

Воблый Виталий Антониевич

Всероссийский институт научной и технической информации, Москва

E-mail: vitvobl@yandex.ru

CONTENTS

Action of similarity transformations on families of metric spaces (<i>S. A. Bogatyi, A. A. Tuzhilin</i>)	3
On discrete boundary-value problems in a quarter plane (<i>V. B. Vasilyev, A. A. Khodyreva</i>)	14
Invariance of an almost contact metric structure of a smooth manifold with respect to the characteristic vector (<i>L. A. Ignatochkina, A. V. Nikiforova, M. A. Terpstra</i>)	24
Universality property for spaces that continuously contain topological groups and their mappings (<i>S. D. Iliadis, Yu. V. Sadovnichii</i>)	36
Four-dimensional locally homogeneous pseudo-Riemannian manifolds with a nontrivial isotropy subgroup and an isotropic Schouten–Weil tensor (<i>P. N. Klepikov</i>)	50
Decomposable n -continuous mappings (<i>S. M. Komov</i>)	66
Shadow problem and isometric embeddings of pseudospherical surfaces (<i>A. V. Kostin</i>)	69
Well-posed boundary two-point problems for systems of partial differential equations (<i>A. A. Makarov, I. G. Nikolenko</i>)	79
Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. IV (<i>V. M. Morozov, V. I. Kalenova, M. G. Rak</i>)	84
Deforming Minkowski norms to Euclidean norms (<i>V. Yu. Rovenski</i>)	107
Generalized Bochner technique and its application to the study of projective and conformal mappings (<i>S. E. Stepanov, J. Mikeš, I. I. Tsyganok</i>)	112
On magnetostatics in the Lobachevsky Space (<i>A. M. Trepalin</i>)	123
Class of symmetric form for a model of the hydride phase transition (<i>I. A. Chernov</i>)	128
On enumeration of labeled connected bridgeless graphs (<i>V. A. Voblyi</i>)	138

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНИТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антонинович,
д.ф.-м.-н. (ВИНИТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович