ISSN 2782-4438

ВИНИТИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 221

Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 221 (2023)

Дата публикации 6 марта 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года Выходит 12 раз в год

Редактор-составитель выпуска	Н. И. Гусева
Научный редактор выпуска	А. В. Овчинников
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782–4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 221

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «КЛАССИЧЕСКАЯ И СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ», ПОСВЯЩЕННОЙ 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ПРОФЕССОРА ЛЕВОНА СЕРГЕЕВИЧА АТАНАСЯНА (15 ИЮЛЯ 1921 г. — 5 ИЮЛЯ 1998 г.)
МОСКВА, 1–4 НОЯБРЯ 2021 г.
ЧАСТЬ 2**

Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-3-9

УДК 517.927

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. **Г. Э. АБДУРАГИМОВ**

Аннотация. В настоящей статье рассматривается краевая задача для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка с сильной нелинейностью на отрезке $[0, 1]$ с интегральными граничными условиями. С использованием специальных топологических средств получены достаточные условия существования единственного положительного решения рассматриваемой задачи. Существование положительного решения доказано с помощью известной теоремы о растяжении конуса, единственность установлена на основе принципа единственности для выпуклых операторов. Приведен пример, иллюстрирующий выполнение достаточных условий однозначной разрешимости поставленной задачи.

Ключевые слова: положительное решение, краевая задача, конус, растяжение конуса.

ON THE EXISTENCE OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR SECOND-ORDER FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

© 2023 **G. E. ABDURAGIMOV**

Abstract. In this paper, we consider a boundary-value problem for a second-order nonlinear functional-differential equation with a strong nonlinearity on the interval $[0, 1]$ with integral boundary conditions. Using special topological tools, we obtain sufficient conditions for the existence of a unique positive solution of the problem. The existence of a positive solution is proved by applying the well-known cone dilation theorem, and the uniqueness is established by using the uniqueness principle for convex operators. An example is given, which illustrates the fulfillment of sufficient conditions for the unique solvability of the problem.

Keywords and phrases: positive solution, boundary value problem, cone, cone extension.

AMS Subject Classification: 34K10

1. Введение. Вопросам исследования разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений и систем посвящено достаточно большое количество работ, в которых рассмотрены вопросы существования положительных решений, их поведения, асимптотики и т.д., причем где естественным орудием исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании техники нелинейного анализа, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем эти были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

Краевые задачи с граничными условиями в интегральной форме составляют очень интересный и важный класс граничных задач и возникают в различных областях прикладной математики и физики, в частности в теплопроводности, потоках подземных вод, термоупругости и физике плазмы. Такие задачи для обыкновенных и дробных дифференциальных уравнений рассматривались, в частности, в [5–13]. Однако работ, посвященных единственности положительного решения интегральных краевых задач для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений, относительно немного.

Целью настоящей работы является получение достаточных условий существования и единственности положительного решения задачи для нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка с интегральными граничными условиями. Ранее в [1, 2] автором рассматривались похожие задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. В данной работе предпринята попытка обобщить полученный результат на случай функционально-дифференциального уравнения.

2. Постановка задачи и основные результаты. Обозначим через C пространство $C[0,1]$, через $\mathbb{L}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство $\mathbb{L}_p(0,1)$ и через $\mathbb{W}^2$ — пространство вещественных функций, определенных на $[0,1]$ с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + f(t,(Tx)(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \int_0^1 \alpha(s)x(s)\,ds, \tag{2}$$

где $T : C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, $\alpha \in \mathbb{L}_1$ — неотрицательная на $[0,1]$ функция, причем

$$\int_0^1 s\alpha(s)ds < 1,$$

функция $f(t,u)$ монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot,0) \equiv 0$.

Определение. *Положительным решением* задачи (1)–(2) называется функция $x \in \mathbb{W}^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду на указанном интервале уравнению (1) и граничным условиям (2).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(2) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)\left(s\right)\right)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant, \tag{3}$$

где

$$G(t,s) = H(t,s) + \frac{t}{1-\alpha_*}\int_0^1 H(\tau,s)\alpha(\tau)d\tau,$$

$$H(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t), & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases} \quad \alpha_* = \int_0^1 s\alpha(s)ds.$$

Нетрудно показать, что Функция Грина оператора $-d^2/dx^2$ с граничными условиями (2) обладает следующими свойствами:

(i) $G(t,s) > 0$, $t,s \in (0,1)$;

(ii) $\varphi(t)\varphi(s) \leqslant G(t,s) \leqslant \beta\varphi(s)$, $t,s \in [0,1]$, где

$$\beta = 1 + \frac{1}{\alpha^*}\int\limits_0^1 \alpha(s)\,ds, \quad \alpha^* = 1 - \alpha_*, \quad \varphi(t) = \min\{t, 1-t\}.$$

Предположим, что $f(t,u)$ в области $[0,1]\times[0,\infty)$ удовлетворяет условию

$$f(t,u) \leqslant bu^{p/q}, \quad p,q \in (1,\infty), \quad b > 0. \tag{4}$$

Условие (4) обеспечивает действие оператора Немыцкого $N : \mathbb{L}_p \to \mathbb{L}_q$, определяемого соотношением $(Ny)(t) = f(t, y(t))$ для каждого $y \in \mathbb{L}_p$.

В операторной форме уравнение (3) можно переписать в виде

$$x = GNTx,$$

где

$$G : \mathbb{L}_q \to C, \quad (Gu)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)u(s)\,ds$$

— оператор Грина. Положим

$$A = GNT,$$

где оператор A определен равенством

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f\big(s, (Tx)(s)\big)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Лемма 1. *Монотонный оператор $A : C \to C$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Покажем, что для любого $r > 0$ найдется такое число $R > 0$, что

$$\|Ax\|_C \leqslant R \tag{5}$$

для всех $x \in S_r = \big\{x \in C : \|x\|_C \leqslant r\big\}$. В силу (4) и приведенных выше свойств функции Грина имеем

$$(Ax)(t) \leqslant b\int\limits_0^1 G(t,s)(Tx)^{p/q}(s)\,ds \leqslant \frac{b}{4}\|Tx\|^{p/q}_{\mathbb{L}_p} + \frac{b\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{4\alpha^*}\|Tx\|^{p/q}_{\mathbb{L}_p} \leqslant \frac{b}{4}\gamma^{p/q}r^{p/q} + \frac{b\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{4\alpha^*}\gamma^{p/q}r^{p/q},$$

где γ — норма оператора T. Взяв в качестве R правую часть последнего неравенства, очевидно, очевидно получим искомое соотношение (5).

Покажем теперь что оператор A отображает ограниченные множества в равностепенно непрерывные множества. Пусть $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$. Для $x \in S_r$ имеем

$$\big|(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)\big| \leqslant br^{p/q}\int\limits_0^1 \big|G(t_2,s) - G(t_1,s)\big|(T1)^{p/q}(s)\,ds.$$

Несложно видеть, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $t_2 \to t_1$. Следовательно, $A(S_r)$ является равностепенно непрерывным.

В силу теоремы Асколи—Арцела оператор A является компактным. Непрерывность же A обеспечивает условие Каратеодори на f. Следовательно, оператор A вполне непрерывен. □

Обозначим через $\tilde{K}$ конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$x(t) \geqslant \frac{1}{\beta}\|x\|_C \cdot \varphi(t).$$

Лемма 2. *Оператор A инвариантен относительно конуса $\tilde{K}$.*

Доказательство. В силу вышеприведенных свойств функции Грина имеем

$$(Ax)(t) \geqslant \int\limits_0^1 \varphi(s) f\big(s, (Tx)(s)\big)\, ds \cdot \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

С другой стороны,

$$\|Ax\|_C = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \big|(Ax)(t)\big| \leqslant \beta \int\limits_0^1 \varphi(s) f\big(s, (Tx)(s)\big)\, ds.$$

Объединив оба неравенства, окончательно получим

$$(Ax)(t) \geqslant \frac{1}{\beta} \|Ax\|_C \cdot \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

□

В дальнейшем под полуупорядочиванием $u \prec v$ и $u \overline{\prec} v$ в конусе $\tilde{K}$ пространства C соответственно будем понимать $u(x) \leqslant v(x)$ и $u(x) > v(x)$ при всех $x \in [0, 1]$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены неравенство* (4) *и следующие условия*:

(i) $p > q > 1$;

(ii) $f(t, u) \geqslant \psi(u)$, $t \in [0, 1]$, $u \geqslant 0$, *где* $\psi(u)$ — *такая неотрицательная неубывающая функция, что*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{u} = \infty.$$

Тогда краевая задача (1)–(2) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Покажем, что найдется такое число $r > 0$, что для всех $\varepsilon > 0$ при $x \in \tilde{K}$ и $\|x\|_C \leqslant r$, $x \neq 0$ имеем

$$Ax \overline{\succ} (1 + \varepsilon) x. \tag{6}$$

В силу (4) с учетом соответствующих свойств функции Грина имеем

$$(Ax)(t) \leqslant \beta\varphi(t) \int\limits_0^1 f\big(s, (Tx)(s)\big)\, ds \leqslant \beta\varphi(t) b \int\limits_0^1 (Tx)^{p/q}(s)\, ds \leqslant \beta b \varphi(t) \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{p/q} \leqslant$$

$$\leqslant \beta b \gamma^{p/q} \varphi(t) \|x\|_C^{p/q} \leqslant \beta b \gamma^{p/q} r^{p/q - 1} \varphi(t) \|x\|_C \leqslant \beta^2 b \gamma^{p/q} r^{p/q - 1} \cdot x(t).$$

Отсюда, выбрав $r < \big(\beta^2 b \gamma^{p/q}\big)^{q/(q-p)}$, получим (6).

Оператор B, определенный равенством

$$(Bx)(t) = \int\limits_0^1 G(t, s) \psi\left((Tx)(s)\right) ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

монотонен на конусе $\tilde{K}$ пространства C и является минорантой оператора A. Покажем, что B сильно растет по направлению φ:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\|B(\alpha\varphi)\|_C}{\alpha} = \infty. \tag{7}$$

Действительно, в силу линейности оператора T и условия 2 теоремы имеем

$$\frac{(B\alpha\varphi)(t)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^1 G(t, s) f\big(s, (T\alpha\varphi)(s)\big)\, ds \geqslant \frac{\varphi(t)}{\alpha} \int\limits_0^1 \varphi(s) \psi\big(\alpha (T\varphi)(s)\big)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varphi(t)}{\alpha} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(s) \psi\big(\alpha (T\varphi)(s)\big)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $[\tau_1, \tau_2] \subset [0,1]$. Нормируя последнее неравенство, устремив $\alpha \to \infty$, легко убедиться в справедливости (7).

В силу (6) и выполнения условий теоремы [4, с. 256] оператор A растягивает конус $\tilde{K}$. Тогда на основании теоремы о растяжении конуса (см. [3, с. 157]) с учетом лемм 1 и 2 заключаем, что оператор A имеет в конусе $\tilde{K}$ пространства C по крайней мере одну неподвижную точку, а это равносильно существованию по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(2). □

Теорема 2. *Пусть функция $f(t,u)$ дифференцируема по u, производная $f'_u(t,u)$ монотонно возрастает по второму аргументу. Кроме того, предположим что выполнены условия теоремы 1 и*

$$\left(1 + \frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{\alpha^*}\right)\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\gamma < 2, \quad \theta(t) \equiv f'_u\big(t, \omega(T1)(t)\big), \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1. \tag{8}$$

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение.

Доказательство. В силу приведенных ранее, свойств функции Грина и условия (ii) теоремы 1 имеем

$$x(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f\big(s, (Tx)(s)\big)\, ds \geqslant \int\limits_0^1 \varphi(s)\psi\big((Tx)(s)\big)\, ds \cdot \varphi(t) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^1 \varphi(s)\psi\left(\frac{\|x\|_C}{\beta}(T\varphi)(s)\right)\, ds \cdot \varphi(t).$$

Переходя к максимуму на отрезке $[0,1]$, получим

$$\|x\|_C \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \varphi(s)\psi\left(\frac{\|x\|_C}{\beta}(T\varphi)(s)\right)\, ds.$$

Разрешив это неравенство относительно $\|x\|_C$, получим мажоранту положительного решения задачи (1)–(2):

$$\|x\|_C \leqslant \omega.. \tag{9}$$

Монотонный оператор A является u_0-выпуклым на конусе $\tilde{K}$ (см. [4, с. 219]). В этом легко убедиться, положив в соответствующем определении $u_0 = \varphi$.

Допустим теперь, что уравнение (3) имеет два положительных решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Из принципа единственности для выпуклых операторов (см. [4, с. 220]) следует, что обе разности $x_1(t) - x_2(t)$ и $x_2(t) - x_1(t)$ не являются строго положительными функциями. Без ограничения общности можно считать, что разность $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ обладает следующим свойством: найдутся такие числа t_0 и t_1, что

$$y(t_0) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} y(t) = \|y\|_C, \quad y(t_1) < 0.$$

Отсюда следует, что $\|y - d\|_C \geqslant \frac{1}{2}\|y\|_C$ при любой постоянной d. Из равенств

$$x_i(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f\big(s, (Tx_i)(s)\big)\, ds, \quad i = 1,2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

вытекает, что

$$y(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f'_u\big(s, (T\tilde{x})(s)\big)(Ty)(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где функция $(T\tilde{x})(t)$ принимает значения промежуточные между значениями $(Tx_1)(t)$ и $(Tx_2)(t)$. Взяв $d=0$, в силу монотонности производной $f'_u(t,u)$ и оценки (9), получим

$$\frac{1}{2}\|y\|_C \leqslant \|y\|_C \leqslant \left(\frac{1}{4}+\frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{4\alpha^*}\right)\int\limits_0^1 f'_u\bigl(s,\omega(T1)(s)\bigr)\bigl|(Ty)(s)\bigr|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\left(1+\frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{\alpha^*}\right)\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\|Ty\|_{\mathbb{L}_p} \leqslant \frac{1}{4}\left(1+\frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{\alpha^*}\right)\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\gamma\|y\|_{\mathbb{L}_p},$$

где $\theta(t)\equiv f'_u\bigl(t,\omega(T1)(t)\bigr)$ и $1/p'+1/p=1$. Таким образом,

$$\|y\|_C \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{\alpha^*}\right)\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\gamma\|y\|_{\mathbb{L}_p} \iff \left(1+\frac{\|\alpha\|_{\mathbb{L}_1}}{\alpha^*}\right)\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\gamma \geqslant 2.$$

Если последнее неравенство не выполняется, то уравнение (3), а следовательно, и краевая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение. □

Пример. Приведем пример, иллюстрирующий выполнений условий вышеприведенных теорем. Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t)+\rho\left(\int\limits_0^1 x(s)\,ds\right)^2=0,\quad 0<t<1, \tag{10}$$

$$x(0)=0,\quad x(1)=\int\limits_0^1 sx(s)\,ds, \tag{11}$$

где $\rho\geqslant 1$ — некоторый параметр, границы которого будут уточнены ниже. Здесь $f(t,u)=\rho u^2$. Положив $\psi(u)=\rho^2u^2$, заключаем в силу теоремы 1, что задача (10)–(11) имеет по меньшей мере одно положительное решение.

В условиях теоремы 2 нетрудно проверить, что $\|x\|_C\leqslant\omega=392/\rho^2$ и соответственно $\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}=2\rho\omega=784/\rho$. Следовательно, выбрав ρ достаточно большим, легко обеспечить выполнение неравенства (8), гарантирующего единственность положительного решения рассматриваемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдурагимов Г. Э.* О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2021. — *199*. — С. 3–6.
2. *Абдурагимов Г. Э.* О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с интегральными граничными условиями// Мат. физ. компьют. модел. — 2022. — *25*, № 4. — С. 5–14.
3. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962.
4. *Красносельский М. А., Покорный Ю. В.* Ненулевые решения уравнений с сильными нелинейностями// Мат. заметки. — 1969. — *5*, № 2. — С. 253–260.
5. *Ahmad B., Nieto J. ,J.* Existence results for nonlinear boundary-value problems of fractional integrodifferential equations with integral boundary conditions// Boundary-Value Probl. — 2009. — *2009*. — P. 1–11.
6. *Belarbi A., Benchohra M.* Existence results for nonlinear boundary-value problems with integral boundary conditions// Electron. J. Differ. Equations. — 2005. — *2005*, № 6. — P. 1–10.
7. *Belarbi A., Benchohra M., Quahab A.* Multiple positive solutions for nonlinear boundary-value problems with integral boundary conditions// Arch. Math. — 2008. — *44*, № 1. — P. 1–7.
8. *Benchohra M., Hamani S., Nieto J. J.* The method of upper and lower solution for second order differential inclusions with integral boundary conditions// Rocky Mount. J. Math. — 2010. — *40*, № 1. — P. 13–26.
9. *Cabada A., Iglesias J.* Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions// Boundary-Value Probl. — 2021. — *66*. — P. 1–19.

10. *Infante G.* Nonlocal boundary-value problems with two nonlinear boundary conditions// Commun. Appl. Anal. — 2008. — *12*, № 3. — P. 279–288.
11. *Webb J. R. L.* A unified approach to nonlocal boundary value problems// Dynam. Syst. Appl. — 2008. — *5*. — P. 510–515.
12. *Webb J. R. L.* Positive solutions of some higher order nonlocal boundary-value problems// Electron. J. Qualit. Theory Differ. Equations. — 2009. — *29*. — P. 1–15.
13. *Webb J. R. L., Infante G.* Positive solutions of nonlocal boundary-value problems a unified approach// J. London Math. Soc. — 2006. — *74*, № 3. — P. 673–693.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович
Дагестанский государственный университет, Махачкала
E-mail: gusen_e@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 10–19
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-10-19

УДК 514.113.5

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ГАУССА—АЛЕКСАНДРОВА О ПЛОЩАДИ СФЕРИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ НЕВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННОГО УГЛА БЕЗ ОСОБЕННОСТЕЙ

© 2023 г. **Л. А. АНТИПОВА**

Аннотация. В настоящей работе сформулированы определения сферического изображения, площади сферического изображения и кривизны реализации для класса многогранных углов без особенностей и доказана теорема о равенстве площади сферического изображения и кривизны реализации многогранного угла из выделенного класса.

Ключевые слова: теорема Гаусса, площадь сферического изображения, невыпуклый многогранник, кривизна реализации.

AN ANALOG OF THE GAUSS–ALEKSANDROV THEOREM ABOUT THE AREA OF THE SPHERICAL IMAGE OF A NONCONVEX POLYHEDRAL ANGLE WITHOUT SINGULARITIES

© 2023 **L. A. ANTIPOVA**

Abstract. In this paper, we formulate the definitions of epy spherical image, the area of the spherical image, and the implementation curvature for a class of polyhedral angles without singularities. Also, we prove a theorem on the equality of the area of the spherical image and the implementation curvature of a polyhedral angle from a distinguished class.

Keywords and phrases: Gauss theorem, area of a spherical image, nonconvex polyhedron, implementation curvature.

AMS Subject Classification: 51M20

Исследуя различные классы поверхностей, геометры школы А. Д. Александрова всегда стремились доказать, что для поверхностей изучаемого ими класса выполняется аналог теоремы Гаусса о равенстве интегральных внутренней и внешней кривизн этих поверхностей. Простейший аналог этой теоремы для выпуклого многогранного угла был доказан в монографии [1], а сейчас он доказан даже в школьном учебнике [2]. Эта теорема утверждает, что площадь сферического изображения выпуклого многогранного угла равна кривизне этого угла.

Автор выражает огромную благодарность и признательность Алексею Леонидовичу Вернеру за общее руководство моей научной работой, регулярные, содержательные, наполненные идеями беседы, а также внимательное прочтение и редактирование настоящей статьи.

Объектом нашего изучения являются однородные невыпуклые многогранники, основные свойства которых содержатся в пособии «Строение невыпуклых однородных многогранников с выпуклыми гранями» [3]. Нами были доказаны аналоги теоремы Гаусса для невыпуклых ориентируемых однородных многогранников с выпуклыми гранями и ненулевой кривизной вершин. Также установлен интегральный вариант этой теоремы — полная площадь сферического изображения многогранника равна произведению его плотности и 4π. Эти результаты были представлены 27 сенетября 2021 г. в докладе А. Л. Вернера и Л. А. Антиповой на геометрическом семинаре им. А. Д. Александрова в ПОМИ. При доказательстве этих теорем было важно, что сферические образы граней лежат в вершинах классических сферических сетей. В настоящей работе будут сформулированы определения сферического изображения, площади сферического изображения и кривизны реализации для класса многогранных углов без особенностей и доказана теорема о равенстве площади сферического изображения и кривизны реализации многогранного угла из выделенного класса. Этот класс углов, в частности, содержит углы трех невыпуклых ориентируемых однородных многогранников: большого икосаэдра, большого додекаэдра и большого битригонального икосододекаэдра. В настоящей работе я обобщаю этот результат для более широкого класса многогранных углов.

1. Определим класс многогранных углов, который будет рассмотрен. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве введена декартова система координат x, y, z с базисными ортами $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. Будем считать, что выбранная система координат — правая, координатная плоскость xOy (обозначим ее через α) горизонтальная, а орт $\overline{k}$ оси z направлен вверх.

Пусть L замкнутая ломаная в плоскости α, заданная вершинами $L_1, L_2, \ldots, L_n$, занумерованными в циклическом порядке (рис. 1). Звено L_jL_{j+1} обозначим через g_j.

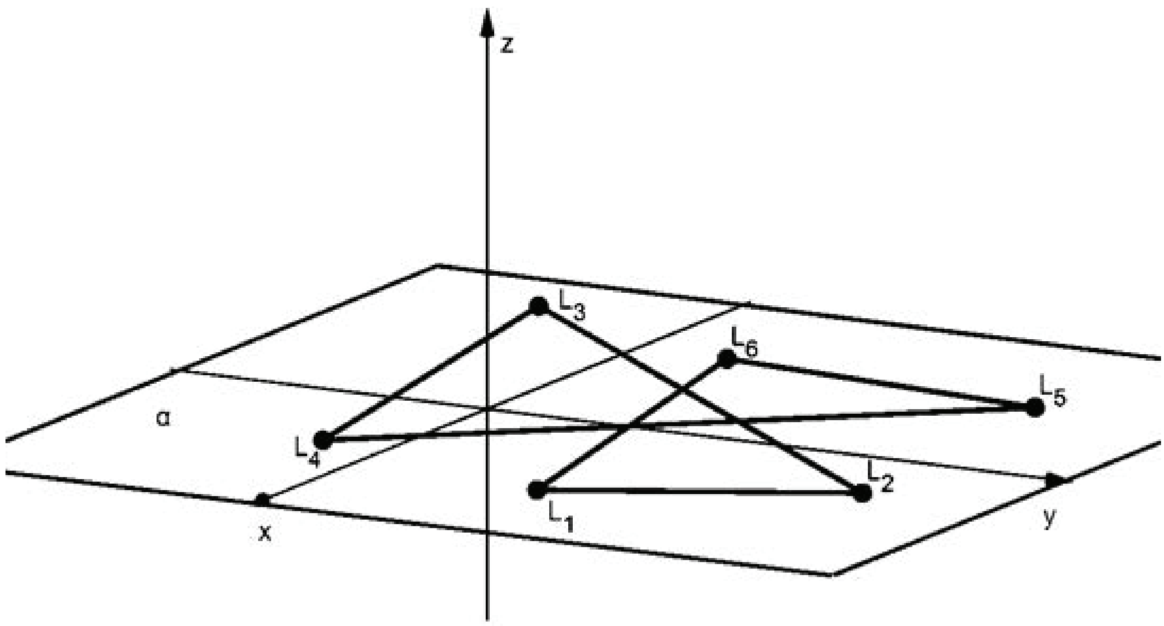


Рис. 1. Замкнутая ломаная $L_1L_2\ldots L_n$ в плоскости.

Пересечение внутренних областей всех плоских углов $\angle L_{j-1}L_jL_{j+1}$ ломаной L обозначим через L^* и назовём *ядром ломаной* L.

Ядро выпуклой плоской ломаной совпадает с выпуклым многоугольником, ограниченным этой ломаной. **Будем рассматривать плоские замкнутые ломаные с непустым ядром**. Назовём их *ломаными без особенностей.*

Сделаем несколько выводов из этого условия.

Заметим, что ядро L^* является выпуклым многоугольником, стороны которого содержатся в звеньях ломаной L, но для ломаных с самопересечением порядок сторон L^* отличен от порядка звеньев ломаной L.

Пусть точка O — центроид вершин ядра L^*. Поскольку ядро является выпуклым множеством, точка O принадлежит ядру (рис. 2).

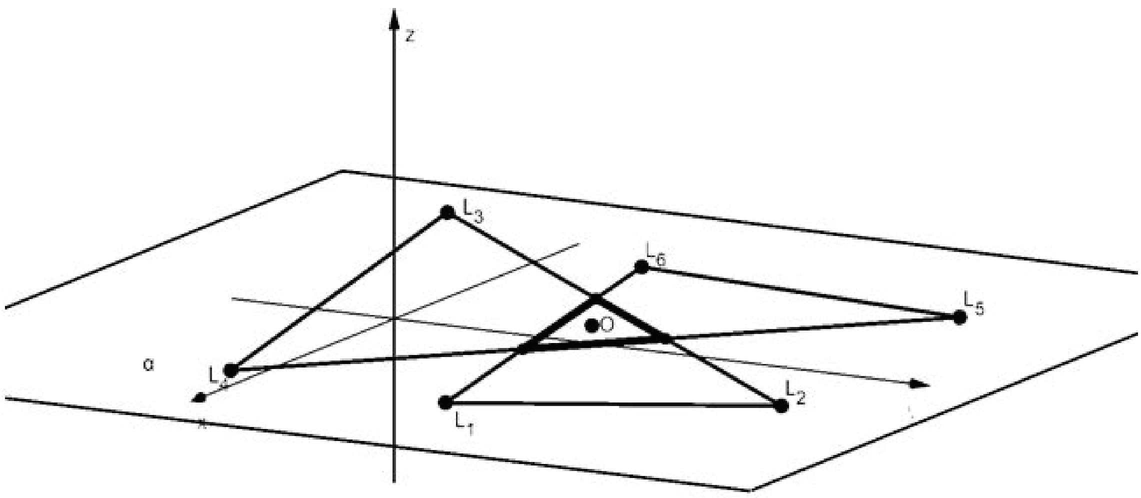


Рис. 2. Точка O — центроид вершин ядра L^* ломаной L.

Обозначим через H_j ортогональную проекцию точки O на прямую звена g_j (рис. 3).

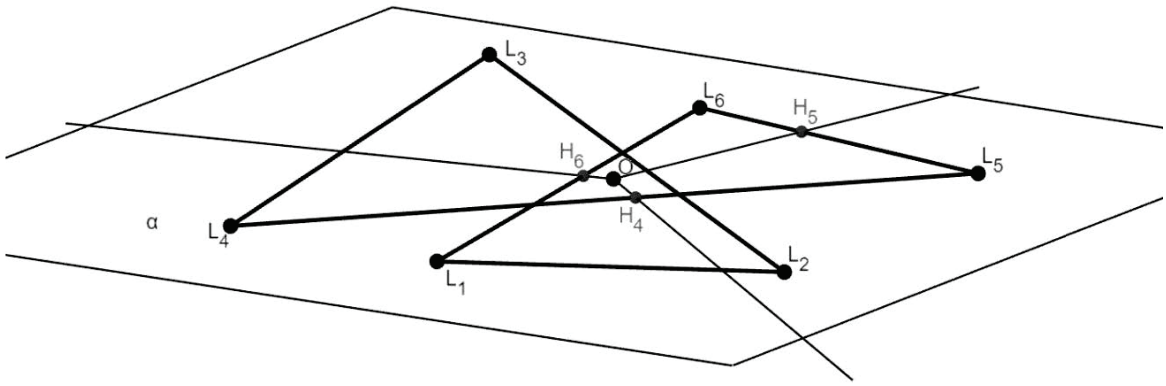


Рис. 3. Проекции точки O на прямые звеньев g_4, g_5 и g_6.

Назовём *тройкой* T_j набор трёх последовательных звеньев g_{j-1}, g_j и g_{j+1}. Звено g_j назовём *серединой тройки* T_j, а два других её звена — *краями тройки* (рис. 6).

Из непустоты ядра L^* следует, что оба звена края каждой тройки T_j лежат по одну сторону от прямой, содержащей звено g_j. Из этого непосредственно следует, что треугольники OH_jH_{j-1} и OH_jH_{j+1} не имеют внутренних общих точек.

Получили последовательность углов $\angle H_1OH_2, \angle H_2OH_3, \angle H_3OH_4, \ldots, \angle H_{n-1}OH_n, \angle H_nOH_1$, которые, прилегая друг к другу по общей стороне, обходят вокруг точки O целое число раз. Сумма данных углов равна

$$\sum_{i-1}^{n} \angle H_iOH_{i+1} = r \cdot 2\pi, \quad \text{где} \quad n+1 = 1.$$

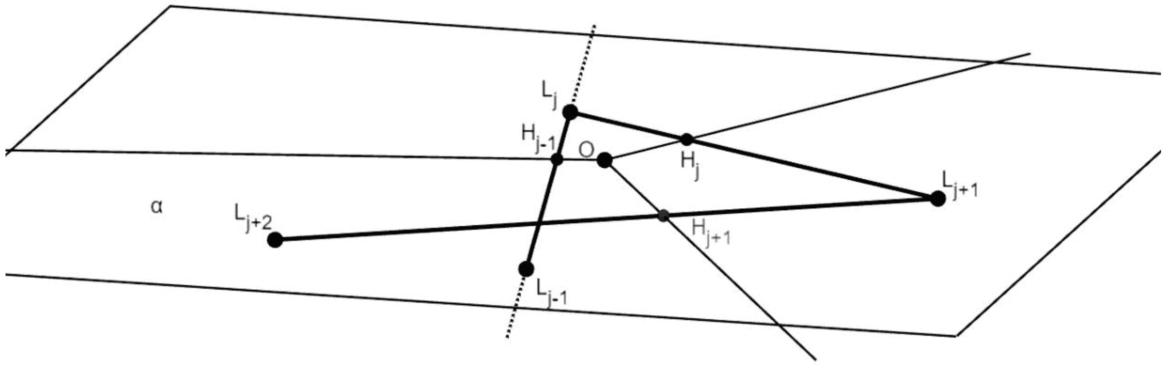


Рис. 4

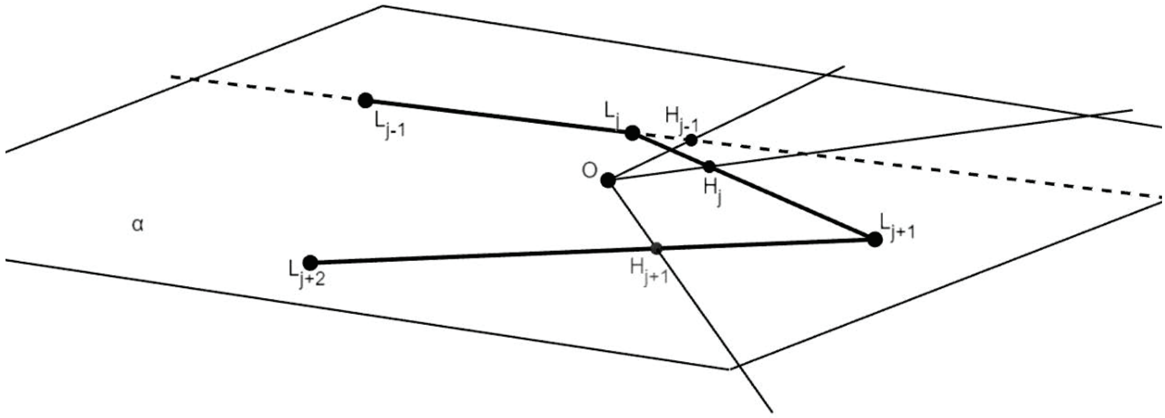


Рис. 5

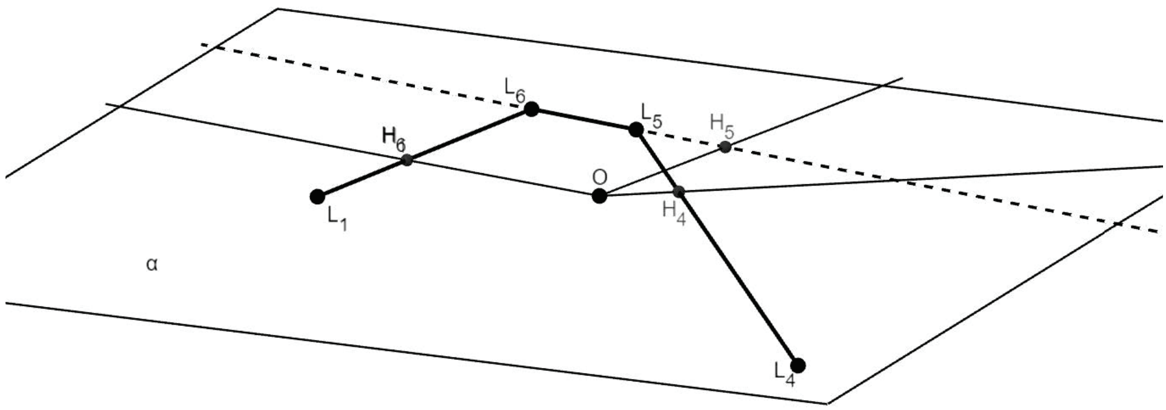


Рис. 6. Три варианта расположения тройки T_i относительно точки O.

Число r назовём *числом обхода ломаной* L вокруг точки O.

Пусть точка A такая, что вектор $\overline{OA}$ равен координатному вектору $\overline{k}$. *Под многогранным углом без особенностей* будем понимать тройку (V, L, O), где V — многогранный угол, определенный как конус с вершиной в точке A над ломанной L без особенностей (рис. 7).

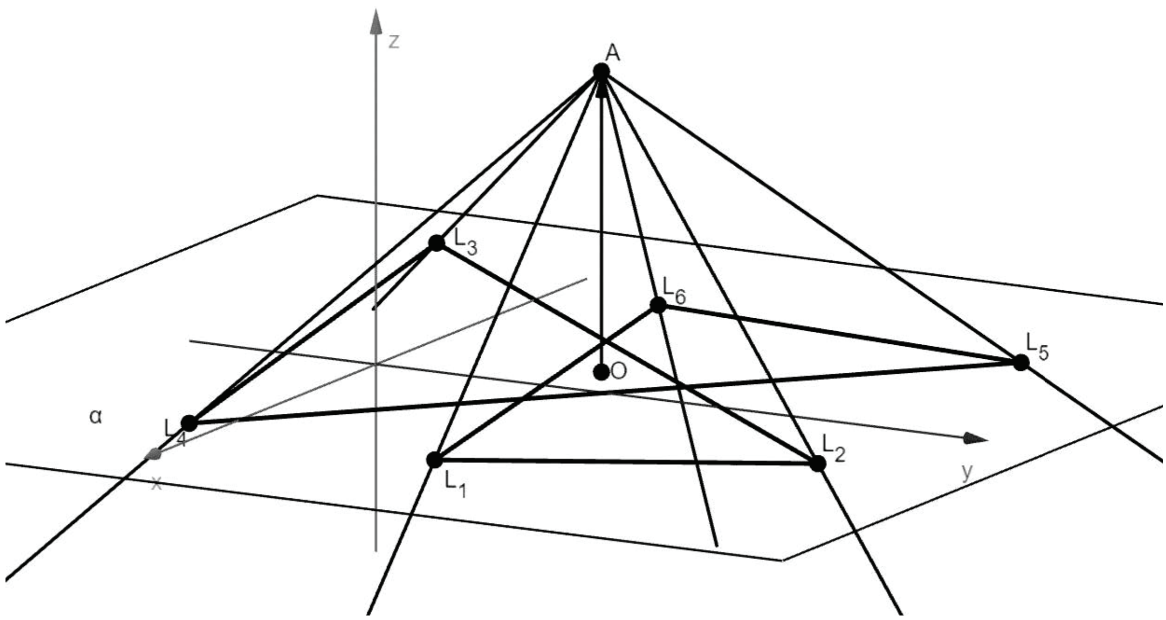


Рис. 7. Многогранный угол без особенностей (V, L, O).

Плоский угол $\angle L_j A L_{j+1}$ назовём *гранью G_j многогранного угла V*, а *луч AL_j — ребром p_j многогоранного угла V*.

Радианные меры плоских углов граней $G_1, G_2, \ldots, G_n$ обозначаем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ соответственно.

Тройкой граней T'_j назовём набор трёх последовательных граней G_{j-1}, G_j и G_{j+1} угла V. Грань G_j назовём *серединой тройки T'_j*, а две другие её грани — *краями тройки*.

Числом оборотов угла (V, L, O) вокруг оси OA назовём число оборотов ломаной L относительно точки O и обозначим это число через $\operatorname{rot}(V, L, O)$.

Пусть S — единичная сфера с центром в точке O.

2. Понятия, необходимые для формулировки теоремы. Опустим из точки O перпендикуляр OC_j на плоскость грани G_j. Обозначим через e_j луч OC_j (рис. 8—10). Лучи $e_1, e_2, \ldots, e_n$ являются ребрами многогранного угла W с вершиной в точке O, грани которого определяются соседними лучами. Обозначим грань, содержащую лучи e_j и e_{j+1}, через Q_j.

Свойства угла W.

1. Грань Q_j перпендикулярна ребру p_j угла V, так как лучи e_j и e_{j+1} ортогональны соответственно граням G_j и G_{j+1} многогранного угла V.
2. Плоскость, содержащая ось OA и ребро e_j, перпендикулярна плоскости α и содержит прямую OH_j.
3. Из второго свойства следует, что проекцией на плоскость α луча e_j будет луч OH_j.

Пусть точка C'_j полюс плоскости грани G_j при полярном преобразовании относительно сферы S. Ясно, что точка C'_j принадлежит лучу e_j. Полюсы всех граней угла V принадлежат касательной плоскости к сфере S, содержащей точку A. Ортогональной проекцией на плоскость α луча AC'_j будет луч OH_j. Следовательно, треугольники $AC'_jC'_{j-1}$ и $AC'_jC'_{j+1}$ не имеют внутренних общих точек и сумма плоских углов равна

$$\sum_{j=1}^{n} \angle C'_j O C'_{j+1} = r \cdot 2\pi,$$

где r — число оборотов угла (V, L, O) вокруг оси OA.

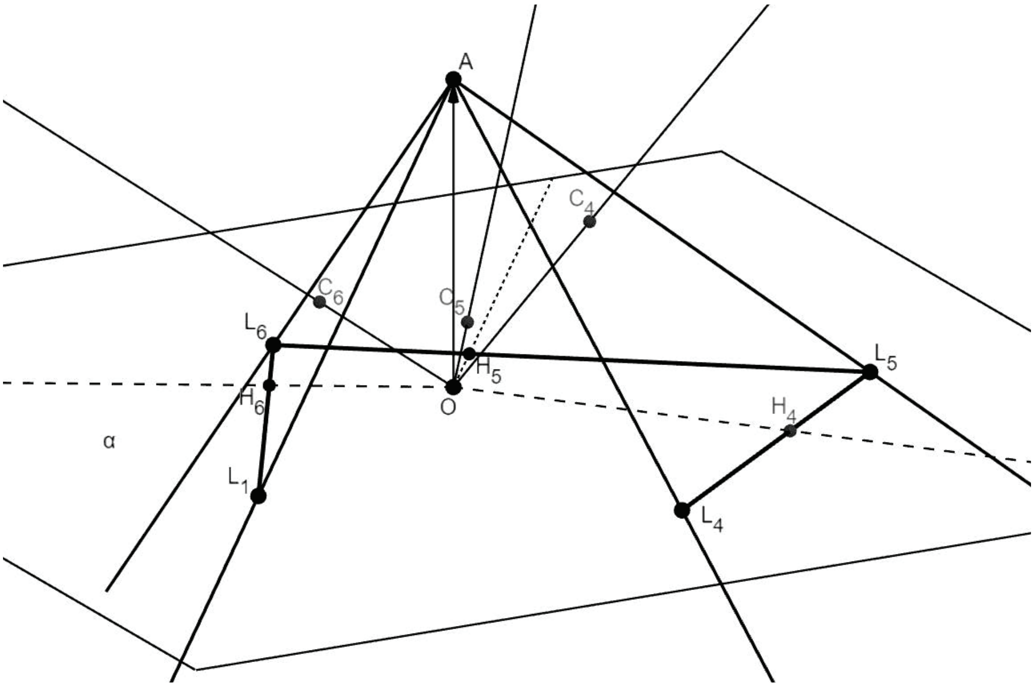


Рис. 8. Проекции точки O на плоскости граней тройки T'_5 принадлежат граням.

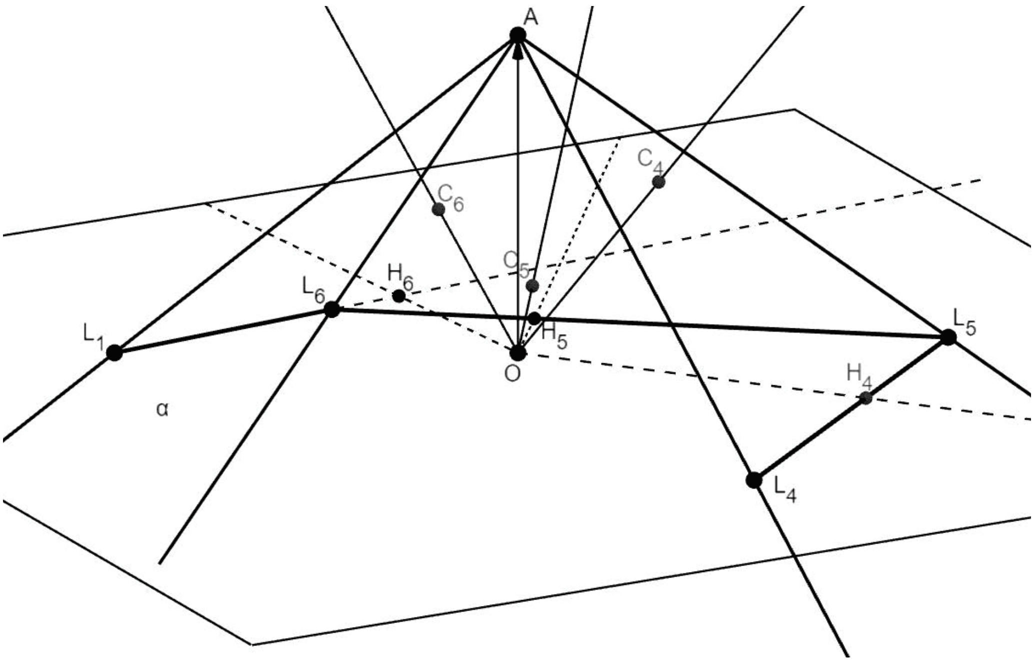


Рис. 9. Проекция точки O на плоскость одного из края тройки T'_5 не принадлежит этой грани.

Полярным изображением многогранного угла V относительно сферы S будет многоугольник $C'_1C'_2\ldots C'_n$, представимый объединением треугольников

$$AC'_2C'_1, AC'_3C'_2, AC'_4C'_3, \ldots, AC'_nC'_{n-1}, AC'_1C'_n.$$

На рисунке 11 представлен полярный образ многогранного угла большого икосаэдра.

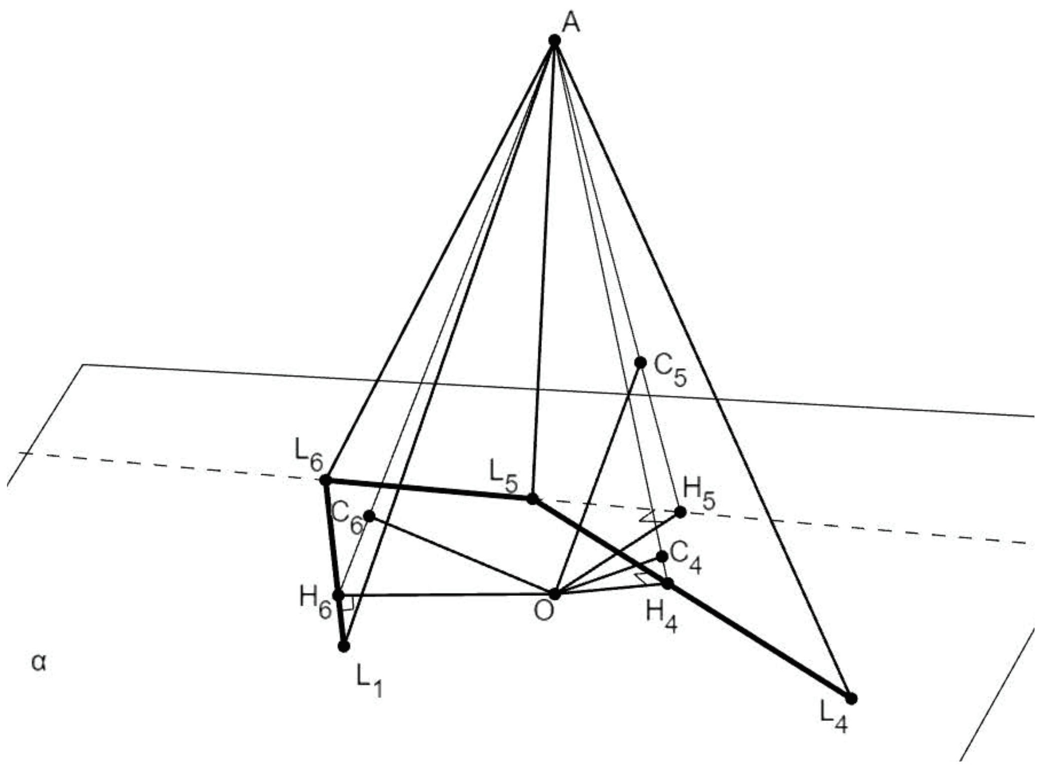


Рис. 10. Проекция точки O на плоскость середины тройки T_5' не принадлежит самой грани.

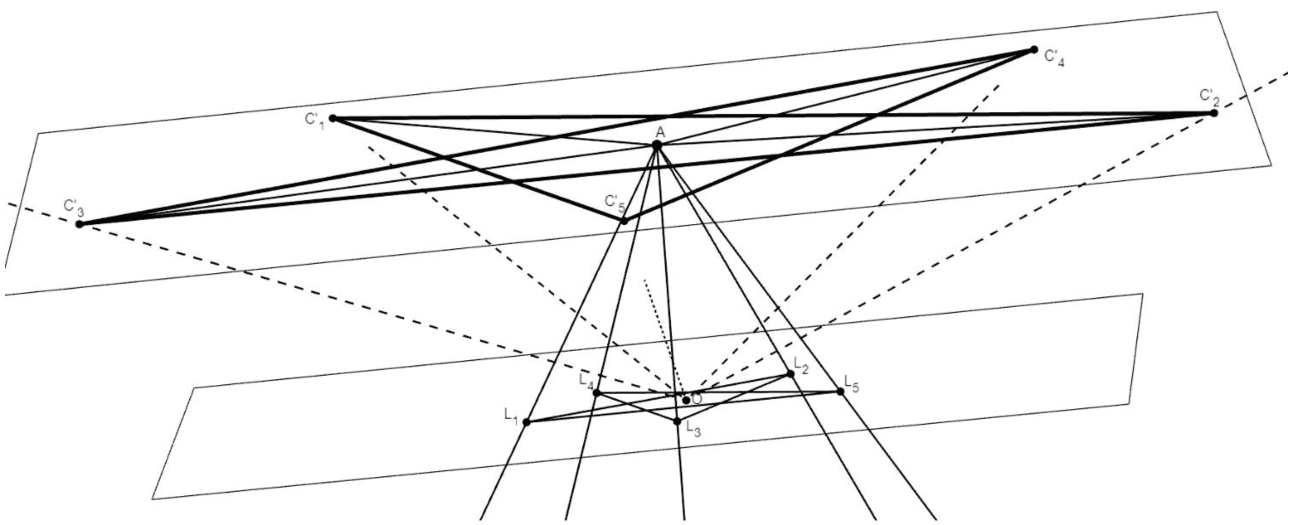


Рис. 11. Полярное изображение многогранного угла в вершине A большого икосаэдра.

Сферическим изображением многогранного угла V *на сферу* S будем называть проекцию $K_1K_2\ldots K_n$ полярного многоугольника $C_1'C_2'\ldots C_n'$ на сферу S при центральном проектировании относительно точки O.

Площадью сферического изображения назовем сумму площадей сферических треугольников $AK_i'K_{i+1}'$.

Заметим, что никакие два смежных сферических треугольника не имеют общих внутренних точек и сумма их углов при вершине A равна $\mathrm{rot}(V; L; O)\cdot 2\pi$.

3. Теорема (аналог теоремы Гаусса). Площадь сферического изображения многогранного угла без особенностей (V, L, O) на сферу S равна числу $2\pi \cdot \mathrm{rot}(V, L, O) - \sum \alpha_i$.

Число $2\pi \cdot \mathrm{rot}(V) - \sum \alpha_i$ называем *кривизной реализации многогранного угла* (V, L, O).

4. Доказательство теоремы. В случае отсутствия особенностей у данного многогранного угла V лучи e_{j-1} и p_{j-1} лежат в одном полупространстве относительно плоскости лучей AO и e_j, а лучи e_{j+1} и p_j лежат в другом полупространстве относительно этой же плоскости.

Пусть плоскости граней Q_j, Q_{j+1} пересекают ребра p_j и p_{j+1} в точках F_j и F_{j+1} соответственно.

Рассмотрим два существенно различных случая взаимного расположения тройки граней относительно точки O.

1. Тройку граней T_j' многогранного угла без особенностей (V, L, O) будем называть *тройкойпервого типа*, если точка C_j принадлежит грани G_j (рис. 12, 13).

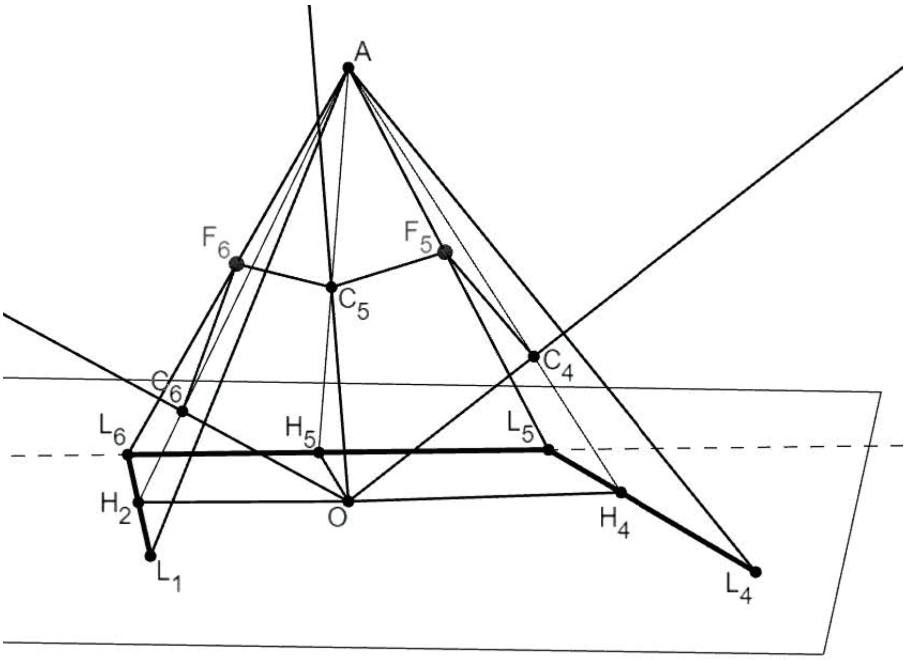


Рис. 12. Проекции точки O на плоскости всех граней тройки T_5' принадлежат соответствующим граням.

2. Тройку граней T_j' многогранного угла без особенностей (V, L, O) будем называть *тройкой второго типа*, если точка C_j не принадлежит грани G_j (рис. 14).

Лемма. *Величина двугранного угла, образованного гранями Q_j и Q_{j+1}, равна $\pi - \alpha_j$, $\angle Q_j Q_{j+1} = \pi - \alpha_j$, где α_j — плоский угол грани G_j угла (V, L, O).*

Для тройки граней первого типа утверждение очевидно, поскольку линейным углом двугранного угла, образованного гранями Q_j и Q_{j+1}, является угол $F_jC_jF_{j+1}$ четырехугольника $AF_jC_jF_{j+1}$. В четырехугольнике углы с вершинами F_j и F_{j+1} — прямые, следовательно, сумма оставшихся двух углов равна π. Доказательство проиллюстрировано на рисунке 15(a), на котором изображена плоскость середины тройки граней.

Для тройки граней T_5' второго типа справедливость утверждения леммы продемонстрирована на рисунке 15(b). Через β_5 обозначен двугранный угол, образованный гранями Q_5 и Q_6, α_5 — плоский угол L_5AL_6 многогранного угла V, C_5 — проекция точки O на плоскость грани G_5, F_5 и F_6 — точки пересечения ребер AL_5 и AL_6 с гранями Q_5 и Q_6 угла W соответственно.

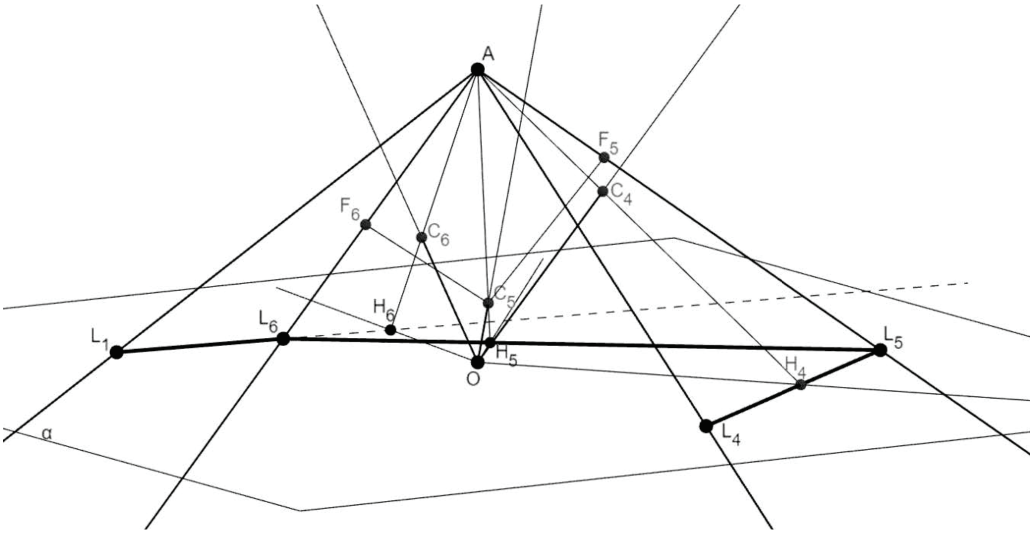


Рис. 13. Проекция точки O на плоскость одного из края тройки T_5' не принадлежит этой грани.

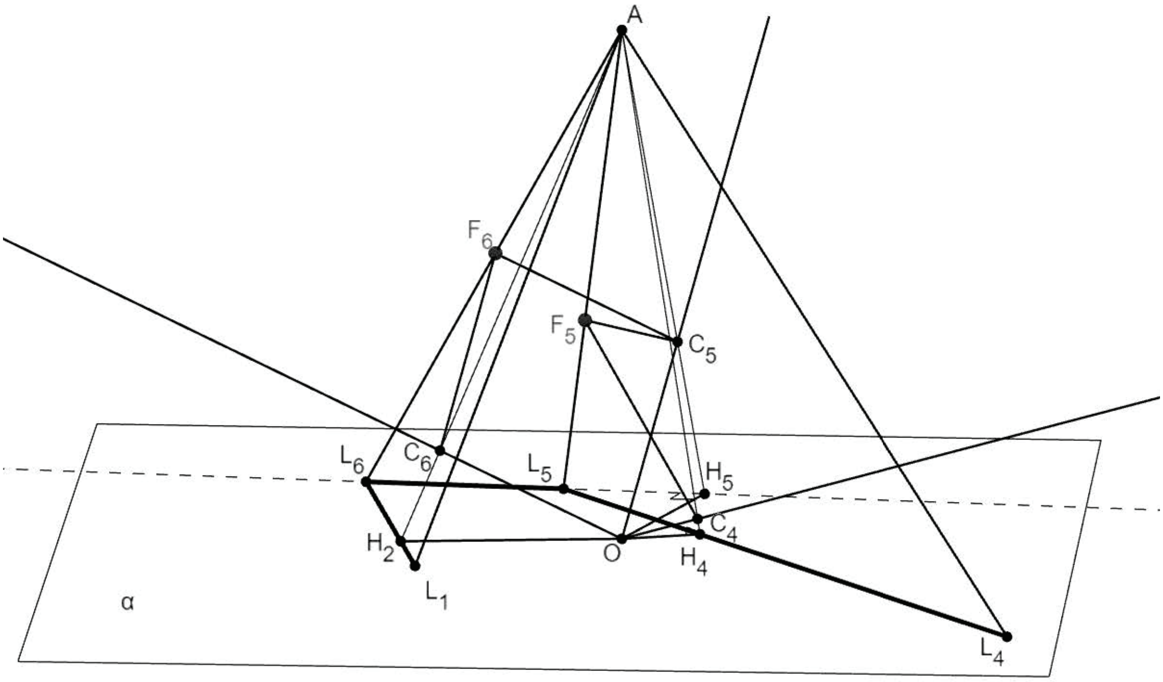
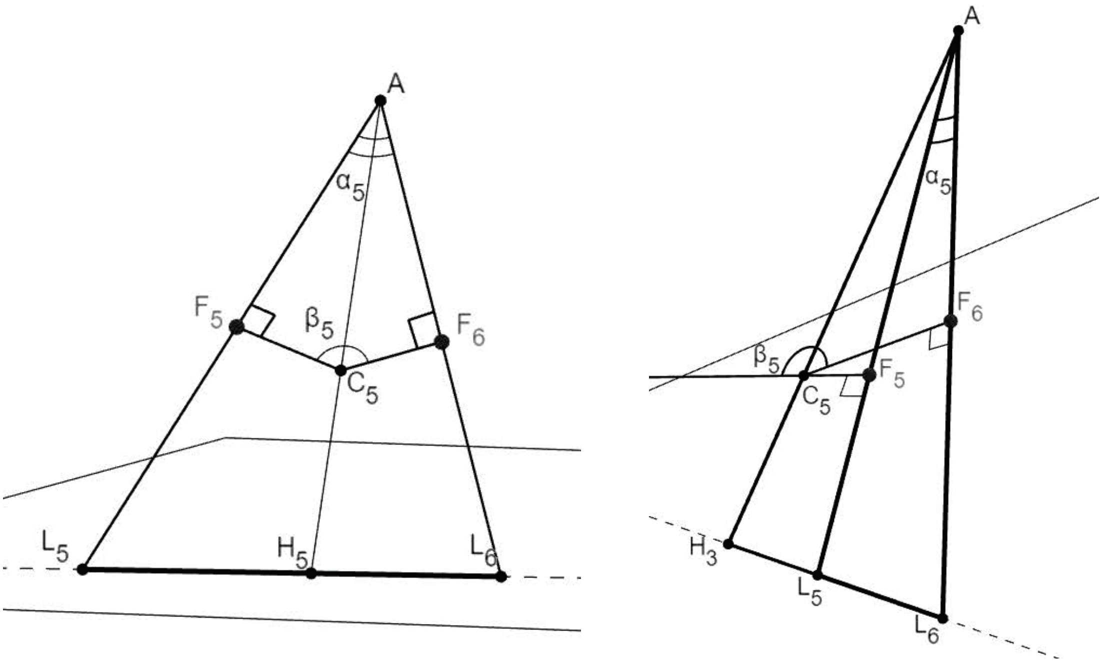


Рис. 14. Тройка граней T_5' многогранного угла без особенностей (V, L, O) второго типа.

На рисунке видны два подобных прямоугольных треугольника, острый угол α_5 одного из которых равен углу, смежному с углом β_5. Получаем требуемое равенство $\angle\beta_5 = \angle Q_5Q_6 = \pi - \alpha_5$. Лемма доказана.

Фигура, полученная объединением двух сферических треугольников $AK_{j+1}K_j$ и AK_jK_{j-1}, является частью сферического изображения рассматриваемого многогранного угла V. Объединение сферических углов $\angle AK_jK_{j+1}$ и $\angle K_{j-1}K_jA$ есть сферический угол $K_{j-1}K_jK_{j+1}$, величина которого равна величине двугранного угла $\angle Q_jQ_{j+1}$. Таким образом,

$$\angle K_{j-1}K_jA + \angle AK_jK_{j+1} = \angle K_{j-1}K_jK_{j+1} = \angle Q_jQ_{j+1} = \pi - \alpha_j.$$



(a) (b)

Рис. 15. Плоскость грани G_5 — середины тройки (a) первого (b)второго типа, где C_5 — проекция на эту плоскость точки O, F_5 и F_6 — точки пересечения ребер AL_5 и AL_6 с гранями Q_5 и Q_6 угла W соответственно.

Площадь $S(V)$ сферического изображения многогранного угла V равна сумме площадей сферических треугольников AK_jK_{j+1}.

$$S(V) = \sum_{j=1}^{n} S(AK_jK_{j+1}) = \sum_{j=1}^{n}(\angle K_jAK_{j+1} + \angle AK_jK_{j+1} + \angle K_jK_{j+1}A - \pi) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \angle K_jAK_{j+1} - \sum_{j=1}^{n}(\pi - \angle K_{j-1}K_jK_{j+1}) = 2\pi \cdot \mathrm{rot}(V) - \sum_{j=1}^{n}(\pi - (\pi - \alpha_j)) = 2\pi \cdot \mathrm{rot}(V) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Д.* Избранные труды. Т. 2. Выпуклые многогранники. — Новосибирск: Наука, 2007.
2. *Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.* Геометрия 11. Учебник для углублённого изучения. — М.: Просвещение, 2000.
3. *Вернер А. Л., Антипова Л. А.* Строение невыпуклых однородных многогранников с выпуклыми гранями. — СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2021.

Антипова Любовь Александровна
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург
E-mail: `pridoroga31@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 20–30
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-20-30

УДК 517.95

О СПЕКТРЕ ИЕРАРХИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ШРЁДИНГЕРА, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КАНТОРОПОДОБНОМ МНОЖЕСТВЕ

© 2023 г. **А. Д. БЕНДИКОВ**

Аннотация. Статья написана в рамках совместного с А. Григорьяном (Университет Билефельда) и С. Молчановым (Университет Северной Каролины) проекта «Спектр иерархических операторов типа Шрёдингера» и продолжает начатые ранее исследования.

Ключевые слова: ультраметрическое пространство, симметричная марковская полугруппа, симметричный марковский генератор, спектральная асимптотика, теория локализации.

ON THE SPECTRUM OF HIERARCHICAL SCHRÖDINGER-TYPE OPERATORS ACTING ON A CANTOR-LIKE SET

© 2023 **A. D. BENDIKOV**

Abstract. This paper is written within the project “On the spectrum of hierarchical Schrödinger-type operators” joint with A. Grigor’yan (Bielefeld University) and S. Molchanov (University of North Carolina at Charlotte) and continues the studies started earlier.

Keywords and phrases: ultrametric space, symmetric Markov semigroup, symmetric Markov generator, spectral asymptotics, localization theory.

AMS Subject Classification: 35P05

1. Введение. Концепция иерархического лапласиана восходит к Н. Н. Боголюбову и его школе; она была использована Ф. Дж. Дайсоном при построении фазового перехода в $1D$-ферромагнитной модели с дальнодействующим взаимодействием (см. [8, 9]). Теория иерархического лапласиана, действующего на общем ультраметрическом пространстве X, была достаточно полно разработана в [1, 3].

В случае $X = \mathbb{Q}_p$, поля p-адических чисел, упомянем тесно связанные работы С. Альбеверио, В. Карвовски, В. С. Владимирова, И. В. Воловича, Е. И. Зеленова, А. Н. Кочубея.

1.1. В качестве простейшего примера рассмотрим диадическую модель Дайсона. В этой модели иерархический оператор типа Шредингера $H = L + V$ реализуется как возмущение самосопряженного интегрального оператора L, действующего в $L^2(0, \infty)$.

1.2. Иерархическая структура. Иерархическая структура определяется семейством разбиений $\{\Pi_r : r \in \mathbb{Z}\}$ множества $X = [0, \infty)$. Каждая часть Π_r состоит из диадических интервалов $I = [(i-1)2^r, i2^r)$. Число r называется рангом разбиения Π_r (соответственно, рангом двоичного интервала I).

Любая точка x принадлежит ровно одному интервалу $I_r(x)$ ранга r, и все множество X является объединением возрастающего семейства диадических интервалов $I_r(x)$ при $r \nearrow \infty$.

Иерархическое расстояние $\mathrm{d}(x,y)$ определяется как мера Лебега $|I|$ минимального диадического интервала I, содержащего x и y.

Легко видеть, что

$$\mathrm{d}(x,y) \leqslant \max\{\mathrm{d}(x,z),\mathrm{d}(z,y)\} \quad \forall x,y,z \in X,$$

т.е. $\mathrm{d}(x,y)$ является *ультраметрикой* на X.

(i) Евклидова метрика $|x-y|$ и введенная ультраметрика $\mathrm{d}(x,y)$ определяют неэквивалентные топологии. Действительно, по определению

$$\mathrm{d}(x,y) \geqslant |x-y| \quad \forall x,y \in X;$$

с другой стороны,

$$\mathrm{d}(1-\varepsilon,1) = 2 \quad \forall \varepsilon \in (0,1].$$

(ii) Пара (X,d) является полным, локально компактным, некомпактным и сепарабельным метрическим пространством. В этом метрическом пространстве множество $\mathcal{B}$ всех открытых шаров совпадает с множеством всех диадических интервалов.

(iii) Каждый открытый шар B в (X,d) является замкнутым компактом, каждая точка $a \in B$ может рассматриваться как его центр, любые два шара либо не пересекаются, либо один является подмножество другого и т. д. Таким образом, (X,d) является собственным вполне несвязным метрическим пространством. В частности, (X,d) гомеоморфно канторову множеству с выколотой точкой.

(iv) Борелевская σ-алгебра, порожденная ультраметрическими шарами, совпадает с классической борелевской σ-алгеброй, порожденной евклидовой метрикой.

1.3. Иерархический лапласиан. Пусть $\mathcal{D}$ — множество всех локально постоянных функций с компактным носителем, $\varkappa \in]0,1[$ — фиксированный параметр.

Иерархический лапласиан L вводится как сумма (минус) марковских образующих L_r чисто скачкообразных процессов[1]

$$(Lf)(x) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \underbrace{(1-\varkappa)\varkappa^r \left(f(x) - \frac{1}{|I_r(x)|} \int\limits_{I_r(x)} f\,dl \right)}_{(L_r f)(x)} \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

Так как каждый *элементарный лапласиан* L_r может быть записан в виде

$$L_r f(x) = \int\limits_0^\infty \big(f(x)-f(y)\big) J_r(x,y)dy, \quad J_r(x,y)dy = \underbrace{(1-\kappa)\kappa^{r-1}}_{\lambda_r(x)} \cdot \underbrace{\mathbf{1}_{I_r(x)}(y)/|I_r(x)|dy}_{\mathcal{U}_r(x,dy)},$$

оператор L может быть представлен в виде гиперсингулярного интегрального оператора:

$$(Lf)(x) = \int\limits_0^\infty \big(f(x)-f(y)\big) J(x,y)dy, \quad J(x,y) = \frac{\kappa^{-1}-1}{1-\kappa/2} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)^{1+\alpha}}, \quad \alpha = \frac{2}{\log_2 1/\varkappa}.$$

[1] Марковский процесс называется чисто скачкообразным, если, начиная с любой точки x, все его выборочные пути, за исключением изолированных скачков, постоянны и непрерывны справа.

Основными данными, определяющими процесс, являются (i) функция $0 < \lambda(x) < \infty$ и (ii) марковское ядро $\mathcal{U}(x,dy)$, удовлетворяющее условию $\mathcal{U}(x,\{x\}) = 0$. Интуитивно, частица, начиная с положения x, остается в этом положении в течение экспоненциально распределенного времени с параметром $\lambda(x)$; за это время она «перескакивает» в новое положение x' в соответствии с распределением $\mathcal{U}(x,\cdot)$ и т. д.

1.4. Спектр оператора L. Каждому диадическому интервалу $I = [(i-1)2^r, i2^r)$ поставим в соответствие функцию Хаара

$$\mathcal{X}_I(x) = \begin{cases} 2^{-r/2} & \text{при } x \in [(i-1)2^r, (i-1/2)2^r), \\ -2^{-r/2} & \text{при } x \in [(i-1/2)2^r, i2^r), \\ 0 & \text{при } x \notin I. \end{cases}$$

Функция Хаара $\mathcal{X}_I$ является собственной функцией оператора L, соответствующей собственному значению $\varkappa^r$:

$$L\mathcal{X}_I = \varkappa^r \mathcal{X}_I.$$

Легко видеть, что каждое собственное значение $\varkappa^r$ имеет бесконечную кратность.

Множество $\{\mathcal{X}_I : I \in \mathcal{B}\}$ является полным ортонормированным базисом в $L^2(0,\infty)$. В частности, L — существенно самосопряженный оператор, имеющий чисто точечный спектр

$$\mathrm{Spec}(L) = \{\varkappa^r : r \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

1.5. Ядро теплопроводности оператора L. Оператор L порождает симметричную марковскую полугруппу $(e^{-tL})_{t>0}$. Полугруппа $(e^{-tL})_{t>0}$ допускает непрерывное ядро теплопроводности $p(t,x,y)$ (фундаментальное решение уравнения $(\partial_t - L)u = v$), которую можно оценить следующим образом:[1]

$$p(t,x,y) \asymp \frac{t}{[t^{1/\alpha} + \mathrm{d}(x,y)]^{1+\alpha}}, \quad \alpha = \frac{2}{\log_2 1/\varkappa}.$$

Функция $p(t,x,x)$ не зависит от x. Полагая $\mathfrak{p}(t) := p(t,x,x)$, по формуле спектрального разрешения получаем

$$\mathfrak{p}(t) = t^{-1/\alpha}\mathcal{A}(\log_2 t),$$

где $\mathcal{A}(\tau)$ — непрерывная непостоянная α-периодическая функция. В частности, в отличие от классического случая (симметричные устойчивые плотности), функция $t \to \mathfrak{p}(t)$ не имеет регулярного изменения.

1.6. Множитель Тэйблсона—Владимирова. Примечательно, что введенный выше иерархический лапласиан L можно отождествить с множителем Тэйблсона—Владимирова $\mathfrak{D}^\alpha$, $\alpha > 0$, действующим в $L^2(\mathbb{Q}_2)$, где $\mathbb{Q}_2$ — поле 2-адических чисел,

$$\widehat{\mathfrak{D}^\alpha f}(\zeta) = \|\zeta\|_2^\alpha \widehat{f}(\zeta).$$

В частности, $-\mathfrak{D}^\alpha$ — симметричный α-стабильный генератор Леви, действующий на абелевой группе $\mathbb{Q}_2$, ядро теплопроводности которого $p_\alpha(t,x,y)$ можно оценить следующим образом:

$$p_\alpha(t,x,y) \asymp \frac{t}{\left[t^{1/\alpha} + \|x-y\|_2\right]^{1+\alpha}}.$$

2. Операторы типа Шрёдингера. В дальнейшем рассмотрим множитель Тэйблсона—Владимирова $\mathfrak{D}^\alpha$, $\alpha > 0$, действующий в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, где $\mathbb{Q}_p$ — кольцо p-адических чисел, снабженное нормированной мерой Хаара. Одно из возможных определений $\mathfrak{D}^\alpha$ очевидно:

$$\widehat{\mathfrak{D}^\alpha f}(\zeta) = \|\zeta\|_p^\alpha \widehat{f}(\zeta).$$

[1] Ядро $p(t,x,y)$ является непрерывной (и даже локально липшицевой) функцией в введенной d-топологии, но разрывной функцией в евклидовой топологии. Этот факт следует из представления

$$p(t,x,y) = t \int_0^{1/d_*(x,y)} e^{-t\tau} N(\tau)\,d\tau,$$

где $d_*(x,y)$ — ультраметрика, определяющая топологию, эквивалентную d-топологии и внутренне связанная с L, а $N(\tau)$ — так называемая спектральная функция распределения, связанная с лапласианом L (см. [7]).

2.1. Случай локально ограниченных потенциалов. Пусть V — локально ограниченная функция и $V : u \to V \cdot u$ — множитель. Оператор $H = \mathfrak{D}^\alpha + V$ с областью определения $\mathcal{D}$ является плотно определенным симметричным оператором, действующим в $L^2(0, \infty)$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Оператор H существенно самосопряжен.*
2. *Если $V(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$, то самосопряженный оператор H имеет компактную резольвенту.* (*Таким образом, его спектр дискретен.*)
3. *Если $V(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то существенный спектр оператора H совпадает со спектром оператора $\mathfrak{D}^\alpha$.* (*Таким образом, спектр оператора H является чисто точечным спектром, отрицательная часть которого состоит из изолированных собственных значений конечной кратности.*)

Замечание 2. Для оператора Шрёдингера $H = -\Delta + V$ в $\mathbb{R}^D$ утверждение о существенной самосопряженности H, вообще говоря, неверно. Действительно, в случае оператора Шрёдингера

$$H\psi = -\psi'' + V \cdot \psi, \quad \psi \in C_c^\infty(0, \infty),$$

где $V(x) = -x^\gamma$, $\gamma > 2$б существует *континуум* самосопряженных расширений оператора H.

Кроме того, согласно С. Котани, спектр оператора H может содержать нетривиальные абсолютно непрерывные и сингулярные непрерывные части.[1]

2.2. Случай потенциалов с локальными особенностями. Если нас интересуют потенциалы с локальными особенностями, такие, как $V(x) = b\|x\|_p^{-\beta}$, $b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Q}_p$, то для того чтобы доказать, что квадратичная форма

$$Q(u, u) := Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(u, u) + Q_V(u, u) \tag{1}$$

определенная на множестве

$$\operatorname{dom}(Q) := \operatorname{dom}(Q_{\mathfrak{D}^\alpha}) \cap \operatorname{dom}(Q_V),$$

является плотно определенной, замкнутой и ограниченной снизу, необходимы некоторые локальные условия на потенциал V; следовательно, она ассоциирована с ограниченным снизу самосопряженным оператором H. Принято писать $H = \mathfrak{D}^\alpha + V$, но следует иметь в виду, что это сумма квадратичных форм, а не сумма операторов, как в предыдущем подразделе.

Теорема 3. *Если $0 \leqslant V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_p)$, то квадратичная форма* (1) *является регулярной формой Дирихле. В частности, это форма неотрицательного самосопряженного оператора H,*

$$Q(u, u) = (H^{1/2}u, H^{1/2}u),$$

а множество $\mathcal{D}$ является ядром формы Q.

Замечание 4. Ясно, что теорема 3 может быть распространена на потенциалы V, ограниченные снизу и лежащие в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ после добавления достаточно большой положительной константы. Если же нас интересуют потенциалы V с отрицательными локальными особенностями, то необходимы более сильные локальные условия на V, чтобы можно было доказать замкнутость формы Q.

Определение 5. Пусть $p \geqslant 1$ — фиксированное число. Говорят, что потенциал V лежит в $L^p + L^\infty$, если $V = V' + V''$, где $V' \in L^p(X, m)$ и $V'' \in L^\infty(X, m)$. Это разложение не единственно, и в некоторых случаях можно добиться того, чтобы $\|V'\|_p$ было сколь угодно малым.

Теорема 6. *Пусть оператор $\mathfrak{D}^\gamma$ действует в $L^p(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ и $Q = Q_{\mathfrak{D}^\gamma} + Q_V$ — квадратичная форма* (1), *где $V \in L^p + L^\infty$ при некотором $p > 1/\gamma$. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1. *квадратичная форма Q плотно определена, замкнута и ограничена снизу*; *следовательно, ей соответствует ограниченный снизу самосопряженный оператор H.*
2. *Если $2 \leqslant 1/\gamma < p$, то* $\operatorname{dom}(H) = \operatorname{dom}(\mathfrak{D}^\gamma)$; *аналогично для $1/\gamma < 2$ и $p = 2$.*

[1]Справедлив ли этот результат в условиях иерархического лапласиана (например, множителя Тэйблсона—Владимирова) — интересный открытый вопрос.

2.3. Положительный спектр. Приведем критерий того, что спектр оператора типа Шрёдингера $H = \mathfrak{D}^\alpha + V$ содержится в интервале $[0,\infty)$. Предполагаем, что квадратичная форма $Q = Q_{\mathfrak{D}^\alpha} + Q_V$ является плотно определенной, замкнутой, ограниченной снизу, имеет ядро $\mathcal{D}$, а H является ограниченным снизу самосопряженным оператором, ассоциированным с Q. Однако заметим, что даже если $\mathrm{Spec}(H)$ содержится в интервале $[0,\infty)$, форма Q не является форма Дирихле, если не выполнено условие $V \geqslant 0$.

С помощью интерполяции оператор $\mathfrak{D}^\alpha : \mathcal{D} \to L^2(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ можно расширить на каждое из банаховых пространств $C_\infty(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ и $L^q(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$, $1 \leqslant q < \infty$, как минус марковский генератор. Для упрощения обозначений по-прежнему будем обозначать расширенный оператор через $\mathfrak{D}^\alpha$, указывая при необходимости его область определения.

Следующее утверждение непосредственно следует из p-адической версии классического неравенства Харди:

$$\frac{(n-2)^2}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^2}{\|x\|^2}dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^2 dx,$$

которое в нашем случае принимает вид

$$\left(\Gamma_p\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\frac{|f(x)|^2}{\|x\|_p^\alpha}dx \leqslant Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(f,f).$$

Здесь $\Gamma_p(z) = (1-p^{z-1})(1-p^{-z})^{-1}$ — p-адическая гамма-функция. Функция $z \to \Gamma_p(z)$ мероморфна в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z) = 1.$$

Теорема 7. *Предположим, что* $0 < \alpha < 1$ *и почти всюду выполняется неравенство*

$$V_-(x) \leqslant \left(\Gamma_p\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2\|x\|_p^{-\alpha}.$$

Тогда

$$\mathrm{Spec}(\mathfrak{D}^\alpha + V) \subseteq [0,\infty).$$

Чтобы обосновать теорему 7, докажем сначала следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть H — ограниченный снизу самосопряженный оператор, ассоциированный с квадратичной формой Q. Предположим, что существует функция* $0 < f \in \mathrm{dom}_{C_\infty(X)}(\mathfrak{D}^\alpha)$, *для которой почти всюду выполняется неравенство*

$$V(x) \geqslant -\frac{\mathfrak{D}^\alpha f(x)}{f(x)}.$$

Тогда форма Q неотрицательно определена; *в частности,* $\mathrm{Spec}(H) \subseteq [0,\infty)$.

Полагая

$$V(x) = -\frac{\mathfrak{D}^\alpha f(x)}{f\,(x)},$$

где $f(x) = \|x\|_p^\beta$ при некотором подходящем β, и применяя тождество

$$\mathfrak{D}^\alpha\|x\|_p^\beta = \frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta+1-\alpha)}\|x\|_p^{\beta-\alpha} \quad \forall\beta\neq\alpha,$$

получаем нужный результат.

2.4. Отрицательный спектр. Далее обсудим несколько результатов, дающих информацию об отрицательной части спектра оператора $H = \mathfrak{D}^\gamma + V$.

Теорема 9. *Пусть $V \in L^p(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ для некоторого $p > 1/\gamma$. Имеют место следующие факты:*

1. *Оператор $H = \mathfrak{D}^\gamma + V$ имеет существенный спектр, совпадающий со спектром оператора $\mathfrak{D}^\gamma$.*
2. *В частности, если H имеет отрицательный спектр, то он состоит из последовательности отрицательных собственных значений конечной кратности. Если эта последовательность бесконечна, то она сходится к нулю.*
3. *Предположим, что существует открытое множество $U \subset X$, на котором потенциал V отрицателен. Если E_λ — инфимум спектра оператора $H_\lambda = \mathfrak{D}^\gamma + \lambda V$, то $E_\lambda \leqslant 0$ для всех $\lambda \geqslant 0$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E_\lambda = -\infty$.*

Доказательство. 1. По теореме 6, если число $c > 0$ достаточно велико, то оператор $H + cI$ неотрицателен и

$$\frac{1}{2}\left\|(\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{1/2}u\right\|_2 \leqslant \left\|(H + cI)^{1/2}u\right\|_2 \leqslant \frac{3}{2}\left\|(\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{1/2}u\right\|_2 \tag{2}$$

для всех $u \in \mathrm{dom}(Q_L)$. Положим $\Delta := (\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{-1} - (H + cI)^{-1}$; тогда

$$\Delta = (\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{-1}V(H + cI)^{-1} = ABCDE,$$

где

$$A = (\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{-1/2}, \quad B = (\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{-1/2}|V|^{1/2}, \quad C = \mathrm{sign}(V)\cdot B^*,$$
$$D = (\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{1/2}(H + cI)^{-1/2}, \quad E = (H + cI)^{-1/2}.$$

Ясно, что A и E — ограниченные операторы в $L^2(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$, B^* и C — компактные операторы в $L^2(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$, а D — ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ согласно (2). Таким образом, являясь произведением компактного и ограниченного операторов, разность двух резольвент Δ является компактным оператором в L^2. Согласно теории возмущений линейных операторов, H и L имеют один и тот же существенный спектр (см., например [2]). Поскольку $\mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{D}^\gamma) = \mathrm{Spec}(\mathfrak{D}^\gamma) \subset [0, \infty]$, любая отрицательная точка спектра оператора H должна быть изолированным собственным значением конечной кратности. Любой предел отрицательных собственных значений лежит в существенном спектре и, следовательно, единственной возможной предельной точкой является нуль.

2. Неравенство $E_\lambda \leqslant 0$ при всех $\lambda \geqslant 0$ вытекает из следующих фактов:

$$\{0\} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{D}^\gamma), \quad \mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{D}^\gamma + \lambda V) = \mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{D}^\gamma).$$

Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что $\mathcal{D}$ является ядром для $Q_{\mathfrak{D}^\gamma} + Q_{\lambda V}$, так что

$$E_\lambda = \inf\Big\{Q_{\mathfrak{D}^\gamma}(u,u) + Q_{\lambda V}(u,u) : u \in \mathcal{D},\ \|u\|_2 = 1\Big\}. \tag{3}$$

Выберем функцию $u \in \mathcal{D}$. носитель которой лежит в множестве U; тогда

$$E_\lambda \leqslant Q_{\mathfrak{D}^\gamma}(u,u) + Q_{\lambda V}(u,u) = Q_{\mathfrak{D}^\gamma}(u,u) - \lambda\int\limits_U |V||u|^2 dm \to -\infty \quad \text{as } \lambda \to \infty. \qquad \square$$

Следующий пример показывает, что решающим вопросом существования отрицательных собственных значений в теореме 9 для всех $\lambda > 0$ является скорость, с которой потенциал $V(x)$ сходится к 0 при $\|x\|_\mathrm{p} \to \infty$.

Пример 10. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $H_\lambda = \mathfrak{D}^\alpha - \lambda V$, где

$$V(x) = \big(\|x\|_\mathrm{p} + 1\big)^{-\beta}$$

для некоторых $0 < \beta < 1$ и $\lambda > 0$.

1. Если $\beta \geqslant \alpha$, то применима теорема 9, так что существует положительный порог существования отрицательных собственных значений оператора H_λ.

2. Если $\beta > \alpha$, то количество отрицательных собственных значений H_λ с учетом их кратностей можно оценить следующим образом:

$$\operatorname{Neg}(H_\lambda) \leqslant c(\alpha, \beta)\lambda^{1/\alpha}.$$

Действительно, применяя результат С. Молчанова и Б. Вайнберга, получаем

$$\operatorname{Neg}(H_\lambda) \leqslant c(\alpha) \int_{\mathbb{Q}_p} (\lambda V)^{1/\alpha} dm = c(\alpha)\lambda^{1/\alpha} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{dm(x)}{(\|x\|_p + 1)^{\beta/\alpha}} = c(\alpha, \beta)\lambda^{1/\alpha}.$$

3. Если $0 < \beta < \alpha$, то получается совершенно иной результат.

Теорема 11. *В обозначениях примера* 10, *предположим, что* $0 < \beta < \alpha$. *Тогда* H_λ *имеет непустой отрицательный спектр для всех* $\lambda > 0$.

Доказательство. Пусть $f := \mathfrak{D}^{-\alpha} 1_B$, где B — шар с центром в нейтральном элементе, который будет указан позже. Пусть

$$f_T = \left(\frac{1_T}{m(T)} - \frac{1_{T'}}{m(T')} \right).$$

Функция f принадлежит $\operatorname{dom}(\mathfrak{D}^\alpha)$ и вычисления по формуле спектрального разрешения дают

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{-\alpha} 1_B/m(B) &= \mathfrak{D}^{-\alpha} \sum_{T: B\subseteq T} f_T = \sum_{T: B\subseteq T} \mathfrak{D}^{-\alpha} f_T = \sum_{T: B\subseteq T} \left(\frac{m(T')}{p} \right)^\alpha f_T = \\ &= \sum_{T: B\subseteq T} m(T)^\alpha \left(\frac{1_T}{m(T)} - \frac{1_{T'}}{m(T')} \right) = m(B)^{\alpha-1} \sum_{T: B\subseteq T} \left(\frac{m(T)}{m(B)} \right)^{\alpha-1} \left(1_T - \frac{1}{p} 1_{T'} \right).\end{aligned}$$

В частности, $W := (\mathfrak{D}^\alpha f)/f$ выражается следующим образом:

$$W = \frac{1_B}{\mathfrak{D}^{-\alpha} 1_B} = \frac{p - p^\alpha}{p - 1} \frac{1_B}{m(B)^\alpha} = \frac{p - p^\alpha}{p - 1} \frac{1_B}{\operatorname{diam}(B)^\alpha}.$$

Если $\lambda > 0$ and $0 < \beta < \alpha$, то существует такой шар B достаточно большого диаметра $\operatorname{diam}(B)$, так что

$$W(x) < \frac{\lambda}{\left(\|x\|_p + 1\right)^\beta} = \lambda V(x)$$

для всех $x \in \mathbb{Q}_p$. Следовательно, поскольку f принадлежит $\operatorname{dom}(\mathfrak{D}^\alpha)$, получаем

$$Q_{H_\lambda}(f, f) = Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(f, f) - Q_{\lambda V}(f, f) < Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(f, f) - Q_W(f, f) = (\mathfrak{D}^\alpha f, f) - (W \cdot f, f) = 0,$$

и требуемый результат следует из формул Рэлея—Ритца. □

3. Лемма о расщеплении. В некоторых случаях спектральные свойства оператора $H = L + V$ могут быть сведены к спектральным свойствам некоторого оператора $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{V}$, определенного на дискретном ультраметрическом пространстве $\mathcal{X}$, например, $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

3.1. Соответствие $L \leftrightarrow \mathcal{L}$. Рассмотрим семейство диадических разбиений $\{\Pi_r\}$ множества $\mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}&\Pi_0 = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\} \text{ — простые точки},\\ &\Pi_1 = \{(0, 1),\ (2, 3),\ (4, 5),\ (6, 7),\ \dots\},\\ &\Pi_2 = \{(0, 1, 2, 3),\ (4, 5, 6, 7), \dots\}, \quad \dots\end{aligned}$$

и определим очевидным образом иерархическую структуру (ультраметрику, множество ультраметрических шаров и т. д.).

Определение 12. Пусть $\mathcal{I}_r = \{(i-1)2^r, \dots, i2^r - 1\}$ и $\mathcal{I}_r(x)$ — единственный ультраметрический шар $\mathcal{I}_r$, содержащий x. Иерархический лапласиан $\mathcal{L}$, ассоциированный с $\mathcal{X}$, определяется следующим образом:

$$(\mathcal{L}f)(x) = \sum_{r=1}^{\infty}(1-\varkappa)\varkappa^r \left(f(x) - \frac{1}{2^r} \sum_{y \in \mathcal{I}_r(x)} f(y) \right).$$

Оператор $\mathcal{L}$ является *ограниченным симметрическим оператором* с собственными значениями $\varkappa^r$, $r = 1, 2, \dots$. Соответствующие собственные функции являются дискретными версиями функций Хаара $\mathcal{X}_I$, определенных в непрерывном случае.

3.2. Соответствие $V \leftrightarrow \mathcal{V}$. Рассмотрим потенциал

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i \mathbf{1}_{[i,i+1)}$$

и определим его дискретную версию

$$\mathcal{V} = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i \delta_i.$$

Ясно, что оператор $\mathcal{V} : f \to \mathcal{V} \cdot f$ можно записать в виде

$$\mathcal{V}f = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i (f, \delta_i) \delta_i.$$

3.3. Соответствие $H \leftrightarrow \mathcal{H}$. Наряду с оператором $Hf = Lf + Vf$ рассмотрим его дискретный аналог, а именно, оператор

$$\mathcal{H}f := \mathcal{L}f + \mathcal{V}f.$$

Для описания соответствия $H \leftrightarrow \mathcal{H}$ определим два подпространства в $L^2(0,\infty)$:

$$L^2_- = \operatorname{span}\{\mathcal{X}_{I_r} : r \leqslant 0\}, \quad L^2_+ = \operatorname{span}\{\mathbf{1}_{I_r} : r \geqslant 0\}.$$

Лемма 13 (лемма о расщеплении). *Во введенных выше обозначениях имеем*:

(i) $L^2(0,\infty) = L^2_- \oplus L^2_+$;
(ii) *пространства* L^2_- *и* L^2_+ *редуцируют оператор* H;
(iii) *если* $I \subset [i, i+1)$ *имеет ранг* r, *то* $H\mathcal{X}_I = (\varkappa^r + \sigma_i)\mathcal{X}_I$;
(iv) *оператор* H, *ограниченный на* L^2_+, *можно отождествить с оператором* $\mathcal{H}$.

4. Возмущения ранга 1. Предположим, что однородное ультраметрическое пространство с мерой (X, d, m) является *счетным.* В этом случае X можно отождествить со счетной абелевой группой G (например, со слабой суммой циклических групп), снабженной последовательностью $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ его малых подгрупп. Каждый шар в G — это множество вида $g + G_n$ для некоторых g и n.

Пусть L — однородный иерархический лапласиан и

$$Hf(x) = Lf(x) - \sigma(f, \delta_a)\delta_a(x),$$

возмущение ранга 1 оператора L.

Напомним теорему Cfqмона—Вольфа о чисто точечном спектре возмущения ранга 1 операторов с простым спектром.

Определение 14. Говорят, что самосопряженный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, имеет простой спектр, если существует такой вектор φ (циклический вектор), что $\{(A-\lambda)^{-1}\varphi \mid \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ — тотальное множество для $\mathcal{H}$.

4.1. Критерий Саймона—Вольфа. Пусть A — самосопряженный оператор с простым спектром в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а φ — циклический вектор. Согласно спектральной теореме пространство $\mathcal{H}$ унитарно эквивалентно пространству $L^2(\mathbb{R},\mu)$, так что A — это умножение на x с циклическим вектор $\varphi\equiv 1$. Пусть $H_\sigma = A-\sigma(\varphi,\cdot)\varphi$ — возмущение ранга 1 оператора A. Положим

$$F(x) := \int (x-y)^{-2} d\mu(y) = \lim_{\epsilon\to 0} \left\|(A-(x+i\epsilon)\mathrm{I})^{-1}\varphi\right\|^2.$$

Теорема 15. *Зафиксируем интервал (a,b). Следующие свойства эквивалентны*:

(i) *H_σ имеет только чисто точечный спектр в (a,b) σ-п.в.*;

(ii) *$F(x)<\infty$ для почти всех $x\in(a,b)$.*

В общем случае $\mathcal{H}_0 := \{(A-\lambda\mathrm{I})^{-1}\varphi \mid \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ — замкнутое подпространство; его ортогональное дополнение $(\mathcal{H}_0)^\perp$ является инвариантным пространством оператора H и $H=A$ на $(\mathcal{H}_0)^\perp$. Таким образом, переход от циклического случая к общему очевиден.

Функция $\varphi=\delta_a$ не является циклическим вектором для L, поскольку оператор L имеет много собственных функций с компактным носителем вне a.

Чтобы показать, что спектр оператора $H_\sigma = L-\sigma\delta_a$ является чисто точечным спектром для всех σ, воспользуемся тождеством типа Крейна

$$\mathcal{R}_V(\lambda,x,y) = \mathcal{R}(\lambda,x,y) + \frac{\sigma\mathcal{R}(\lambda,x,a)\mathcal{R}(\lambda,a,y)}{1-\sigma\mathcal{R}(\lambda,a,a)},$$

где

$$\mathcal{R}(\lambda,x,y) = (L-\lambda I)^{-1}\delta_y(x), \quad \mathcal{R}_V(\lambda,x,y) = (H_\sigma-\lambda I)^{-1}\delta_y(x)$$

резольвентные ядра.

Теорема 16. *Спектр $\operatorname{Spec}(H_\sigma)$ является чисто точечным спектром для всех σ. Он состоит не более чем из одного отрицательного собственного значения и счетного числа положительных собственных значений.*

При $\sigma>0$ оператор H_σ имеет ровно одно отрицательное собственное значение

$$\lambda_-^\sigma < 0 < \dots < \lambda_{k+1} < \lambda_k^\sigma < \lambda_k < \dots < \lambda_2 < \lambda_1^\sigma < \lambda_1$$

тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:

(i) *марковская полугруппа $(e^{-tL})_{t>0}$ рекуррентна, т.е. $\mathcal{R}(0,a,a)=\infty$*;

(ii) *марковская полугруппа $(e^{-tL})_{t>0}$ является переходной, т.е. $\mathcal{R}(0,a,a)<\infty$ и $\mathcal{R}(0,a,a)>1/\sigma$.*

Если $\sigma<0$, то все собственные значения оператора H_σ положительны:

$$0 < \dots < \lambda_{k+1} < \lambda_k^\sigma < \lambda_k < \dots < \lambda_2 < \lambda_1^\sigma < \lambda_1 < \lambda_+^\sigma.$$

Собственные значения λ_k являются собственными значениями оператора L. Все собственные значения λ_k имеют бесконечные кратности и финитные собственные функции — собственные функции оператора L, носители которых не содержат a.

Собственное значение λ_k^σ (соответственно, λ_-^σ, λ_+^σ) является единственным решением уравнения

$$\mathcal{R}(\lambda,a,a) = \frac{1}{\sigma}$$

на интервале $]\lambda_{k+1},\lambda_k[$ (соответственно, $]-\infty,0[$, $]\lambda_1,+\infty[$). Каждое λ_k^σ (соответственно, λ_-^σ, λ_+^σ) имеет кратность 1 и собственную функцию с некомпактным носителем $\psi_k(x)=\mathcal{R}(\lambda_k^\sigma,x,a)$ (соответственно, $\psi_-(x)=\mathcal{R}(\lambda_-^\sigma,x,a)$, $\psi_+(x)=\mathcal{R}(\lambda_+^\sigma,x,a)$).

5. Разреженные потенциалы.

Предположим, что ультраметрическое пространство с мерой (X,d,m) является *счетно бесконечным.* Анализ конечномерных возмущений

$$V=\sum_{i=1}^n \sigma_i\delta_{a_i}$$

показывает, что в случае увеличения расстояний между положениями $\{a_i\}$ всплесков $V_i=-\sigma_i\delta_{a_i}$ их вклад в спектр близок к сумме вкладов отдельных всплесков V_i (каждый всплеск вносит по одному собственному значению в каждую лакуну $(\varkappa^{m+1}, \varkappa^m)$ спектра оператора L). Разработка этой идеи приводит к рассмотрению класса *разреженных потенциалов*

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \delta_{a_i},$$

где расстояния между точками $\{a_i : i = 1, 2, \dots\}$ образуют бесконечно большую последовательность. В классической спектральной теории эта идея восходит к Д. Б. Пирсону, С. Молчанову, А. Киселеву, Дж. Ласту, С. Саймону и Б. Саймону.

Введем следующие обозначения: $\mathcal{I}_*$ — множество предельных точек последовательности $\{\sigma_i\}$,

$$1/\mathcal{I}_* := \{1/\sigma_* : \sigma_* \in \mathcal{I}_*\}, \quad \mathcal{R}^{-1}(1/\mathcal{I}_*) := \{\lambda : \mathcal{R}(\lambda, a, a) \in 1/\mathcal{I}_*\}.$$

Теорема 17. *Предположим, что $\alpha < \sigma_i < \beta$ при некоторых $\alpha, \beta > 0$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i \geqslant n} \sum_{\substack{j \geqslant n: \\ j \neq i}} \frac{1}{\mathrm{d}(a_i, a_j)} = 0. \tag{4}$$

Тогда

$$\mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(H) = \mathrm{Spec}(L) \cup \mathcal{R}^{-1}(1/\mathcal{I}_*). \tag{5}$$

6. Спектральная локализация. Теорема 17 не содержит информации об абсолютно непрерывной $\mathrm{Spec}_{\mathrm{ac}}(H)$ и сингулярно непрерывной $\mathrm{Spec}_{\mathrm{sc}}(H)$ частях спектра $\mathrm{Spec}(H)$. Следующая теорема показывает, что при более строгих предположениях $\mathrm{Spec}_{\mathrm{ac}}(H) = \varnothing$ и $\mathrm{Spec}_{\mathrm{sc}}(H) = \varnothing$, т.е. $\mathrm{Spec}(H)$ является чисто точечным спектром. Более того, собственные функции H экспоненциально затухают на бесконечности в некоторой ультраметрике (это так называемое *свойство спектральной локализации*).

Рассмотрим оператор типа Шрёдингера со случайным потенциалом

$$H^\omega = L + V^\omega, \quad \omega \in (\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Здесь детерминированная часть L оператора H^ω есть иерархический лапласиан и

$$V^\omega = \sum_{a \in \mathcal{I}} \sigma(a, \omega) 1_{B(a)}$$

представляет собой случайный потенциал, определяемый семейством открытых шаров $\{B(a) : a \in \mathcal{I}\}$ и семейством $\{\sigma(a, \omega) : a \in \mathcal{I}\}$ независимых и одинаково распределенных случайных величин. Поскольку множество всех открытых шаров счетно, множество $\mathcal{I}$ местоположений не более чем счетно.

В дальнейшем будем предполагать, что все $B(a)$, $a \in \mathcal{I}$б принадлежат одному и тому же орициклу (т.е. имеют одинаковый диаметр). Тогда лемма о расщеплении сводит исследование множества $\mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(H^\omega)$ к случаю, когда ультраметрическое пространство с мерой (X, d, m) *счетно*, а потенциал V^ω имеет вид

$$V^\omega = \sum_{a \in \mathcal{I}} \sigma(a, \omega) \delta_a.$$

Если $\mathcal{I} = X$, то оператор

$$H^\omega = L + \sum_{a \in X} \sigma(a, \omega) \delta_a$$

имеет чисто точечный спектр для P-почти наверное ω при условии, что функция распределения $\mathcal{F}_\sigma(\tau)$ удовлетворяет некоторым условиям регулярности. Это утверждение (*теорема о спектральной локализации*) впервые появилось в работе Молчанова ($\mathcal{F}_\sigma(\tau)$ — распределение Коши), а затем в более общем виде в двух работах Кричевского. Доказательство по существу основано на *самоподобии* H^ω.

Пусть $\sigma_i(\omega) := \sigma(a_i, \omega)$. Предположим, что функция распределения $\mathcal{F}_\sigma(x)$ абсолютно непрерывна и имеет ограниченную плотность, поддерживаемую конечным интервалом $\mathcal{I}$. Далее предположим, что

$$V^\omega = \sum_i \sigma_i(\omega)\delta_{a_i}$$

является разреженным потенциалом, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\geqslant n} \sum_{\substack{j\geqslant n:\\ j\neq i}} \frac{1}{\mathrm{d}(a_i, a_j)} = 0.$$

Следующая теорема о спектральной локализации дополняет теорему 17 о структуре множества $\mathrm{Spec}(H^\omega)$. Доказательство этой теоремы основано на абстрактной форме теоремы Саймона—Вольфа для чисто точечного спектра, технике дробных моментов, лемме Молчанова о расцеплении и рассуждениях типа Бореля—Кантелли.

Теорема 18. *Спектр* $\mathrm{Spec}(H^\omega)$ *является чисто точечным ω-почти наверное* (*т.е.* $\mathrm{Spec}_{\mathrm{ac}}(H)$ *и* $\mathrm{Spec}_{\mathrm{sc}}(H)$ *пустые множества ω-почти наверное*) *при условии, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\geqslant n} \sum_{\substack{j\geqslant n:\\ j\neq i}} \frac{1}{\mathrm{d}(a_i, a_j)^r} = 0 \tag{6}$$

для некоторого достаточно малого r (*скажем,* $0 < r < 1/3$). *Кроме того,*

$$\mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(H^\omega) = \mathrm{Spec}(L) \cup \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \ldots,$$

где $\mathcal{I}_k$ — интервалы $\{\lambda \in (\lambda_{k+1}, \lambda_k) : \mathcal{R}(\lambda, a, a) \in 1/\mathcal{I}\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендиков А. Д., Григорьян А. А., Питтэ К., Вёсс В.* Изотропные марковские полугруппы на ультраметрических пространствах// Усп. мат. наук. — 2014. — *69*, № 4 (418). — С. 3–102.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
3. *Bendikov A. D.* Heat kernels for isotropic-like Markov generators on ultrametric spaces: A survey// p-Adic Num. Ultrametr. Anal. Appl. — 2018. — *10*, № 1. — P. 1–11.
4. *Bendikov A., Grigor'yan A., Molchanov S.* Hierarchical Schrödinger-type operators: the case of locally bounded potentials// in: Operator Theory and Harmonic Analysis (*Karapetyants A. N. et al.*, eds.). — Springer. — P. 2021.
5. *Bendikov A., Grigor'yan A., Molchanov S.* On the spectrum of the hierarchical Schrödinger-type operators/ `arXiv: 2006.02263v1 [math.SP]`.
6. *Bendikov A., Grigor'yan A., Molchanov S.* On the spectrum of hierarchical Schrödinger-type operators: the case of potentials with local singularities/ `arXiv: 2006.01821v1 [math.SP]`.
7. *Bendikov A., Pittet C., Sauer R.* Spectral distribution and L^2-isoperimetric profile of Laplace operators on groups// Math. Ann. — 2012. — *354*. — P. 43–72.
8. *Dyson F. J.* Existence of a phase-transition in a one-dimensional Ising ferromagnet// Commun. Math. Phys.. — *12*. — P. 1969.
9. *Molchanov S. A.* Hierarchical random matrices and operators. Application to Anderson model// in: Multidimensional Statistical Analysis and Theory of Random Matrices. — Berlin: de Gruyter, 1996. — P. 179–194.

Бендиков Александр Давидович
Institute of Mathematics, Wrocław University, Wrocław, Poland
E-mail: `bendikov@math.uni.wroc.pl`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 31–41
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-31-41

УДК 514.755.5

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P^n, СОДЕРЖАЩИХ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ТОРСОВ И ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХСЯ КОНФИГУРАЦИЕЙ ИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПРЯМЫХ

© 2023 г. **И. В. БУБЯКИН**

Аннотация. Статья посвящена дифференциальной геометрии комплексов двумерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащих конечное число торсов. Найдено необходимое условие, при котором комплекс C^ρ содержит конечное число торсов, изучены свойства комплексов двумерных плоскостей, которые определяются особой конфигурацией характеристических прямых торсов, принадлежащих комплексу, установлено строение и условия существования таких комплексов двумерных плоскостей, а также определена самодвойственность исследуемых комплексов.

Ключевые слова: грассманово многообразие, комплекс многомерных плоскостей, многообразие Сегре.

ON THE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF COMPLEXES OF TWO-DIMENSIONAL PLANES OF THE PROJECTIVE SPACE P^n CONTAINING A FINITE NUMBER OF TORSOS AND CHARACTERIZED BY THE CONFIGURATION OF THEIR CHARACTERISTIC LINES

© 2023 **I. V. BUBYAKIN**

Abstract. This paper is devoted to the differential geometry of complexes of two-dimensional planes in the projective space P^n containing a finite number of torsos. We find a necessary condition under which the complex C^ρ contains a finite number of torsos, examine the properties of complexes of two-dimensional planes, which are determined by a special configuration of characteristic straight torsos belonging to the complex, and establish the structure and conditions for the existence of such complexes. The self-duality of such complexes is determined.

***Keywords and phrases*:** Grassmann manifold, complex of multidimensional planes, Segre manifold.

***AMS Subject Classification*:** 53B10

1. Введение. В монографии [16] М. А. Акивис и В. В. Гольдберг разработали теорию подмногообразий в многомерном проективном пространстве. В частности, рассматриваются подмногообразия грассмановых многообразий. В [2] они изучили многообразия с вырожденным гауссовым отображением, которые являются многомерными аналогами торсов или развертывающихся поверхностей трехмерного евклидова пространства. В последнее время многообразия с вырожденным гауссовым отображением изучаются как с проективной точки зрения, так и с евклидовой. М. А. Акивис и В. В. Гольдберг написали монографию [17] по проективной дифференциальной геометрии, в которой были получены некоторые фундаментальные результаты. Например, что многообразия с вырожденным гауссовым отображением включают в себя не только конусы и торсы, но и достаточно широкий класс гиперповерхностей, которые не являются конусами или торсами. В своих рассуждениях М. А. Акивис и В. В. Гольдберг систематически использовали фокальные образы: фокальные гиперповерхности и фокальные конусы, ассоциированные с многообразием с вырожденным гауссовым отображением. Это позволяет авторам представить геометрию исследуемых многоообразий и провести полную их классификацию.

В фундаментальной монографии [18], наряду с глубоким изучением дифференциальной геометрии конформного и псевдоконформного пространства произвольной размерности и подмногообразий в этих пространствах, М. А. Акивис и В. В. Гольдберг основательно исследовали дифференциальную геометрию грассмановых многообразий, многообразий с грассмановой структурой и многообразий с почти грассмановой структурой. М. А. Акивис рассматривает почти грассманову структуру как расслоение конусов Сегре на многообразии. Результаты, полученные в этой монографии, имеют фундаментальный характер по проективной и конформной дифференциальным геометриям. Эти результаты являются классическими — настолько они глубоки как по содержанию, так и по форме и полноте изложения.

Указанное определение почти грассмановой структуры использовали в дальнейшем И. М. Гельфанд и С. П. Гиндикин в интегральной геометрии Радона—Хелгасона (см. [10]), а также в других своих работах, решая основную задачу интегральной геометрии для n-мерных допустимых комплексов прямых и n-мерных допустимых комплексов m-мерных плоскостей в проективном пространстве P^n. Полученные И. М. Гельфандом и С. П. Гиндикиным формулы обращения лежат в основе компьютерной томографии. Такие задачи были положены в основу послойного изображения внутренней структуры исследуемого объекта. В том числе в этих исследованиях были получены новейшие научные достижения; в 2003 г. за изобретение метода магнитно-резонансной томографии — способа получения томографических послойных изображений для исследования внутренних органов и тканей человека — П. Мэнсфилд и П. Лотербур получили Нобелевскую премию по физиологии и медицине. В 2010 г. была создана четырехмерная электронная томография — техника визуализирования динамики трехмерных объектов во времени. Эта техника позволяет наблюдать за пространственно-временными характеристиками микрообъектов.

Таким образом, М. А. Акивис и В. В. Гольдберг открыли новое поле исследований в проективной дифференциальной геометрии, в частности, дифференциальной геометрии подмногообразий грассманова многообразия, которое успешно развивается и применяется в настоящее время. Актуальность таких исследований заключается в том, что дифференциальная геометрия подмногообразий грассмановых многообразий расширяет теорию грассмановых многообразий [11–14], связана с исследованиями лагранжевых и квантовых грассмановых многообразий [3, 4], а также применяется в теоретической физике [19, 20].

Предметом исследования настоящей статьи является геометрия комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^n, содержащих конечное число торсов и характеризующихся особой конфигурацией их характеристических прямых. Отметим, что некоторые классы допустимых комплексов [10] из изучаемых комплексов двумерных плоскостей исследовались в [5]. Настоящая работа относится к исследованиям в области проективной дифференциальной геометрии на основе метода подвижного репера Э. Картана и метода внешних дифференциальных форм [16]. Эти методы позволяют с единой точки зрения изучать дифференциальную геометрию подмногообразий различных размерностей грассманова многообразия, а также обобщить полученные результаты для конкретных многообразий на более широкие классы многообразий многомерных плоскостей. Основная задача дифференциальной геометрии подмногообразий грассмановых многообразий заключается в проведении единой классификации различных классов таких подмногообразий, выяснения их строения и связанная с этим задача определения произвола их существования, а также изучение свойств подмногообразий различных классов. Данные исследования являются продолжением работ [6–9, 21]. Для изучения таких подмногообразий применяется грассманово отображение многообразия $G(2,n)$ на $3(n-2)$-мерное алгебраическое многообразие $\Omega(2,n)$ пространства P^N, где $N = C^3_{n+1} - 1$. Заметим, что в дифференциальной геометрии подмногообразий грассманова многообразия операцию суммирования будем производить по правилу Эйнштейна, как это принято в тензорном анализе, в частности, в его приложениях к общей теории относительности.

В [1,15] М. А. Акивис отмечает, что пересечение алгебраического многообразия $\Omega(2,n)$ с его касательным пространством $T_l\Omega(2,n)$ представляет собой конус Сегре $C(3,n-2)$. Этот конус имеет размерность n и несет плоские образующие размерностей $n-2$ и 3, пересекающиеся по прямым. Проективизация $PB_l(2)$ этого конуса есть многообразие Сегре $S(2,n-3)$. Многообразие Сегре $S(2,n-3)$ инвариантно при проективных преобразованиях пространства $P^{3(n-2)-1} = PT_l\Omega(2,n)$, являющегося проективизацией с центром в точке l касательного пространства $T_l\Omega(2,n)$ к алгебраическому многообразию $\Omega(2,n)$, и его будем использовать для классификации рассматриваемых подмногообразий грассманова многообразия $G(2,n)$, а также для интерпретации их свойств в терминах проективных алгебраических многообразий. Классификация подмногообразий грассманова многообразия $G(2,n)$ основана на различных конфигурациях плоскости $PT_l\Omega(2,n)$ и многообразия Сегре $S(2,n-3)$.

Так как дифференциальная геометрия грассмановых многообразий далеко еще не изучена, то такой подход к их исследованию представляется актуальным. Дифференциальная геометрия грассмановых многообразий представляет самостоятельный интерес для дифференциальной геометрии, а также одновременно является одним из важных средств построения и изучения других многообразий в проективных пространствах. Одной из наиболее красивых областей дифференциальной геометрии, где во всей полноте проявляются преимущества инвариантных бескоординатных методов исследования, является теория комплексов многомерных плоскостей проективного пространства [5].

2. Отображение и многообразие Сегре. Отображение Сегре определяется как отображение

$$\varphi\colon P^m \times P^n \to P^{(m+1)(n+1)-1},$$

которое переводит упорядоченную пару точек X и Y проективных пространств P^m и P^n в точку Z, однородные координаты которой — попарные произведения однородных координат точек X и Y, записанные в лексикографическом порядке:

$$\varphi\colon (x_0 : x_1 : \ldots : x_m), (y^0 : y^1 : \ldots : y^n) \to (x_0y^0 :, x_0y^1 : \ldots : x_iy^p : .. : x_my^n).$$

Образ этого отображения является проективным алгебраическим многообразием, называемым многообразием Сегре в честь итальянского математика Беньямино Сегре (1903—1977) и обозначается $S(m,n)$. Размерность многообразия Сегре $S(m,n)$ равна $m+n$. Если координаты точки Z в пространстве $P^{(m+1)(n+1)-1}$ обозначить через z^u_a $(a, b = 0, 1, \ldots, m$ и $u, v = 0, 1, \ldots, n)$, то многообразие Сегре $S(m,n)$ представляет собой пересечение квадрик:

$$z^u_a z^v_b - z^v_a z^u_b = 0.$$

Многообразие Сегре $S(m,n)$ — это алгебраическое многообразие порядка C^m_{m+n}. Запишем однородные координаты точки проективного пространства $P^{(m+1)(n+1)-1}$ в виде прямоугольной матрицы (z^u_a) размеров $(m+1)\times(n+1)$. Тогда последняя система уравнений эквивалентна условию вида

$$\operatorname{rang}(z^u_a) = 1.$$

Многообразие Сегре $S(m,n)$ можно определить параметрическими уравнениями

$$z^u_a = x_a y^u$$

(см. $[1, 15]$), где z_a^u — однородные координаты точки проективного пространства $P^{(m+1)(n+1)-1}$. Из этих параметрических уравнений вытекает, что многообразие Сегре $S(m, n)$ является образом прямого произведения двух проективных пространств P^m и P^n размерностей соответственно m и n. Отметим одно важное свойство многообразий Сегре $S(m, n)$, а именно эти многообразия остаются инвариантными при проективных преобразованиях пространства P^N, определяемых уравнениями

$$z_a^{*u} = a_v^u b_a^b z_b^v.$$

Многообразие Сегре $S(m, n)$ несет n-параметрическое семейство m-мерных плоских образующих: α-образующих, для получения параметрических уравнений которых необходимо зафиксировать в последних уравнениях однородные координаты y^u точки проективного пространства P^n, а также m-параметрическое семейство n-мерных плоских образующих: β-образующих, для получения параметрических уравнений которых необходимо зафиксировать в последних уравнениях однородные координаты x_a точки проективного пространства P^m. При этом через каждую точку многообразия Сегре $S(m, n)$ проходит одна плоская образующая одного семейства и одна плоская образующая другого семейства. Любые две плоские образующие различных семейств пересекаются в одной точке, а плоские образующие одного семейства не имеют общих точек.

Многообразие Сегре $S(m, n)$ можно представить как семейство $(m + n - 1)$-мерных алгебраических многообразий Сегре $S_\lambda(m, n - 1)$ для всех гиперплоскостей λ проективного пространства P^n или как семейство $(m + n - 1)$-мерных алгебраических многообразий Сегре $S_\mu(m - 1, n)$ для всех гиперплоскостей μ проективного пространства P^m. Замечая, что пересечение алгебраических многообразий Сегре $S_\lambda(m, n - 1)$ и $S_\mu(m - 1, n)$ для двух фиксированных проективных пространств P^n и P^m представляет собой $(m+n-2)$-мерное алгебраическое многообразие Сегре $S_{\lambda\mu}(m - 1, n - 1)$, можно многообразие Сегре $S(m, n)$ представить как семейство $(m + n - 2)$-мерных алгебраических многообразий Сегре $S_{\lambda\mu}(m - 1, n - 1)$ для всех гиперплоскостей λ и μ проективных пространств P^n и P^m.

Рассмотрим в качестве примера двумерное многообразие Сегре $S(1, 1)$. Многообразие Сегре $S(1, 1)$ представляет собой невырожденную линейчатую квадрику трехмерного проективного пространства, несущую однопараметрическое семейство прямолинейных α-образующих и однопараметрическое семейство прямолинейных β-образующих. Через каждую точку этой квадрики проходит одна α-образующая и одна β-образующая. При этом две прямолинейные образующие, принадлежащие различным семействам, пересекаются, а две прямолинейные образующие, принадлежащие одному семейству, не имееют общих точек. Квадрика Сегре $S(1, 1)$ определятся уравнением

$$z_0^0 z_1^1 - z_0^1 z_1^0 = 0.$$

Многообразие Сегре $S(1, 1)$ можно представить как одномерное многообразие α-образующих и как одномерное многообразие β-образующих. С другой стороны, это многообразие Сегре $S(1, 1)$ образуют прямые, пересекающие три фиксированные прямые общего положения трехмерного проективного пространства. Здесь следует заметить, что в аффинных координатах двумерному многообразию Сегре $S(1, 1)$ соответствуют однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

3. Характеристические прямые и трехмерные характеристические плоскости торсов, принадлежащих комплексу двумерных плоскостей. В настоящей работе продолжаем исследования, начатые в [6–9, 21]. В проективном пространстве P^n рассмотрим ρ-мерные комплексы C^ρ двумерных плоскостей, содержащие конечное число торсов — развертывающихся поверхностей. Условие, при котором комплексы C^ρ содержат конечное число торсов, определяется из следующих рассуждений. Рассмотрим проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(2, n)$ с центром в точке l. Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{3(n-2)-1} = PT_l\Omega(2, n)$. На основании теоремы Грассмана в проективном пространстве должно выполняться следующее равенство:

$$\dim PT_l V^\rho + \dim S_l(2, n-3) = \dim P^{3(n-2)-1} + \dim(PT_l V^\rho \cap S_l(2, n-3)).$$

Если размерность пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(2, n-3)$ равна r, то получим

$$(\rho - 1) + (2 + (n-3)) = 3(n-2) - 1 + r.$$

Отсюда следует, что

$$\rho - 1 = 2(n-3) + r.$$

Утверждение, что комплекс C^ρ двумерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов, означает равенство нулю размерности пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(2, n-3)$, т.е. $r = 0$. Если $r = 0$, то искомую зависимость размерности комплекса C^ρ, его двумерной образующей и проективного пространства P^n, получаем в виде:

$$\rho - 1 = 2(n-3).$$

Таким образом, комплекс C^ρ двумерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов тогда и только тогда, когда размерность комплекса C^ρ, его двумерной образующей и проективного пространства P^n связаны соотношением $\rho - 1 = 2(n-3)$.

Для пятимерных комплексов двумерных плоскостей пятимерного пространства, которые содержат конечное число торсов, обнаруживается инвариантная зависимость их строения от конфигурации характеристических трехмерных плоскостей, касательных к торсам, и характеристических прямых в двумерной образующей L, по которой пересекаются две соседние образующие торсов (5). Отсюда возникает вопрос: имеют ли рассматриваемые комплексы C^ρ двумерных плоскостей, содержащие конечное число торсов, подобную инвариантную зависимость. Комплексу C^ρ при грассмановом отображении [16] соответствует ρ-мерное многообразие V^ρ, лежащее на алгебраическом многообразии $\Omega(2, n)$, являющемся образом многообразия $G(2, n)$ двумерных плоскостей проективного пространства P^n. В каждой своей точке l, соответствующей двумерной плоскости L проективного пространства P^n, многообразие V^ρ имеет ρ-мерную касательную плоскость T_lV^ρ. Проективизация касательной плоскости T_lV^ρ с центром в точке l представляет собой $(\rho-1)$-мерную проективную плоскость PT_lV^ρ. Различным видам взаимного расположения плоскости PT_lV^ρ и инвариантного многообразия Сегре $S_l(2, n-3) = P^2 \times P^{n-3}$, являющимся проективизацией конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка, соответствуют различные классы комплексов $C^\rho \subset G(2, n)$. При этом конус $B_l(2)$ есть конус Сегре $C(3, n-2)$ и представляет собой пересечение алгебраического многообразия $\Omega(2, n)$ и его касательного пространства $T_l\Omega(2, n)$, т.е.

$$B_l(2) = \Omega(2, n) \cap T_l\Omega(2, n).$$

В пространстве P^n рассмотрим семейство точечных реперов A_I $(I, J, K = 0, 1, \dots, n)$ и семейство реперов, образованных гиперплоскостями

$$\alpha^I = (-1)^I (A_0, \dots, A_{I-1}, A_{I+1}, \dots, A_n).$$

Уравнения перемещения этих реперов имеют вид:

$$dA_I = \omega_I^J A_J, \quad d\alpha^I = -\omega_J^I \alpha^J,$$

где ω_I^J — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства P^n:

$$d\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J.$$

Пусть L — двумерная плоскость пространства P^n. Свяжем с этой плоскостью семейство точечных реперов так, чтобы точки A_i, $i = 0, 1, 2$, принадлежали плоскости L. Тогда

$$dA_i = \omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p, \quad dA_p = \omega_p^i A_i + \omega_p^q A_q,$$

где $i, j = 0, 1, 2$ и $p, q = 3, 4, \dots, n$. Отсюда видно, что двумерная плоскость L в пространстве P^n зависит от $3(n-2)$ параметров, линейными комбинациями дифференциалов которых являются формы ω_i^p. На многообразии $\Omega(m, n)$ асимптотические направления второго порядка, выходящие из точки l, определяются условием

$$d^2 l = 0 \ (\mathrm{mod}\ T_l\Omega(m, n)).$$

Отсюда следует, что уравнения конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка имеют вид

$$\omega_i^p \omega_j^q - \omega_i^q \omega_j^p = 0. \tag{1}$$

Из этих уравнений видно, координаты ω_i^p точки конуса $B_l(2)$ допускают параметрическое представление

$$\omega_i^p = a_i x^p. \tag{2}$$

Поэтому конус $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка совпадает с конусом Сегре $C_l(3, n-2)$. Рассмотрим теперь проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(2,n)$ с центром в точке l. Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{3(n-2)-1} = PT_l\Omega(2,n)$, в котором формы ω_i^p являются однородными координатами произвольной точки. При проективизации асимптотическому конусу $B_l(2)$ соответствует многообразие Сегре $S_l(2, n-3)$ проективного пространства $P^{3(n-2)-1}$, определяемое теми же уравнениями (1), что и конус $B_l(2)$ в касательном пространстве $T_l\Omega(2,n)$. Многообразие Сегре $S_l(2, n-3)$ представляет собой $(3(n-2)-1)-2(n-3) = (n-1)$-мерную алгебраическую поверхность порядка $C_{n-1}^2 = C_{n-1}^{n-3}$ (см. [22–24]), несущую два семейства плоских образующих размерностей 2 и $n-3$, зависящих соответственно от $n-3$ и 2 параметров. При этом две образующие, принадлежащие различным семействам, имеют общую точку, а две образующие, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Через каждую его точку проходит по одной образующей из каждого семейства. В пространстве P^n конусу Сегре $S_l(2, n-3)$ соответствует совокупность двумерных плоскостей, пересекающих двумерную плоскость L по прямым. Каждая из этих плоскостей лежит в одной трехмерной плоскости с плоскостью L. Многообразие Сегре $S_l(2, n-3)$ остается инвариантным при проективных преобразованиях пространства $P^{3(n-2)-1}$.

Плоскость PT_lV^ρ в пространстве $P^{3(n-2)-1} = PT_l\Omega(2,n)$ определяется теми же уравнениями, что и касательная плоскость T_lV^ρ в касательном пространстве $T_l\Omega(2,n)$. Поскольку на комплексе C^ρ двумерная плоскость L зависит от ρ параметров, то среди форм ω_i^p лишь ρ линейно независимых. Следовательно, комплекс C^ρ задается $n-1$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$ дифференциальными уравнениями:

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \tag{3}$$

где ω_i^p — линейные дифференциальные формы, обращение в нуль которых фиксирует двумерную плоскость L на комплексе C^ρ.

Рассмотрим однопараметрическое семейство двумерных плоскостей L в пространстве P^n. Такое семейство представляет собой трехмерную поверхность с двумерными плоскими образующими. Эта поверхность называется торсом [16, 17], если она является тангенциально вырожденной поверхностью ранга один. Торсу на алгебраическом многообразии $\Omega(2,n)$ соответствует кривая, касательные к которой служат прямолинейными образующими этого многообразия. Данная кривая является асимптотической линией многообразия $\Omega(2,n)$, поэтому в произвольной точке этой линии выполняются уравнения (1). Следовательно, дифференциальные уравнения торсов в пространстве P^n можно записать в виде

$$\omega_i^p = a_i x^p dt. \tag{4}$$

Каждый торс, проходящий через двумерную плоскость L, определяет на ней характеристическую прямую, которая является пересечением двух бесконечно близких образующих, и характеристическую трехмерную плоскость, касательную плоскость к торсу. Найдем уравнения характеристических образов торсов. Пусть $M = x^i A_i$ $(i = 0, 1, 2)$ — произвольная точка двумерной плоскости L. Дифференциал этой точки, в силу (4), вычисляется следующим образом:

$$dM = (dx^i + x^j \omega_j^i) A_i + (a_i x^i)(x^p A_p) dt,$$

где $p = 3, 4, \ldots, n$. Отсюда видно, что характеристическая прямая в двумерной плоской образующей L комплекса C^ρ определяется уравнением

$$a_i x^i = 0,$$

а характеристическая трехмерная плоскость, содержащая двумерную плоскую образующую L комплекса C^ρ, определяется двумерной плоскостью L и точкой

$$S = x^p A_p.$$

Из уравнений (3), ввиду (4), получим следующую систему уравнений:

$$\Lambda_p^{\alpha i} a_i x^p = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5}$$

Эта система уравнений определяет характеристическую прямую торса, принадлежащего комплексу C^ρ, если выполняется условие

$$\mathrm{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} a_i) = n - 3. \tag{6}$$

Из этого соотношения определяются характеристические прямые в двумерной образующей L комплекса C^ρ. Условие:

$$\mathrm{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} x^p) = 3 \tag{7}$$

определяет точки S пересечения характеристических трехмерных плоскостей с двойственной к двумерной плоскости L в пространстве P^n $(n-2)$-мерной плоскостью. Эти точки вместе с двумерной плоскостью L определяют трехмерные характеристические плоскости торса.

4. К дифференциальной геометрии комплексов C^ρ, определяемых конфигурацией характеристических прямых торсов. В проективном пространстве P^n рассмотрим ρ-мерный комплекс C^ρ $(\rho = 2(n-3)+1)$ двумерных плоскостей L и C^2_{n-1} различных торсов, принадлежащих этому комплексу C^ρ. Комплекс C^ρ назовем специальным, если для каждой его образующей L торса характеристические прямые — прямые пересечения двух бесконечно близких образующих и трехмерные характеристические плоскости — трехмерные касательные плоскости к торсам имеют специальную конфигурацию [5]. Рассмотрим специальные комплексы двумерных плоскостей в проективном пространстве P^n, содержащие конечное число торсов, у которых в каждой образующей L имеются характеристические прямые, проходящие через одну точку. При этом характеристические прямые, принадлежащие одному пучку, различны, а трехмерные характеристические плоскости соответствующих торсов находятся в общем положении. Если число пучков, содержащих характеристические прямые торсов, равно α, то рассматриваемый комплекс двумерных плоскостей обозначим через $C^\rho(\alpha)$.

Строение комплексов $C^\rho(1)$ выясняет следующая теорема.

Теорема 1. *Комплекс C^ρ двумерных плоскостей является комплексом $C^\rho(1)$ тогда и только тогда, когда его образующие касаются тангенциально невырожденной гиперповерхности.*

Доказательство. Предположим, что комплекс C^ρ двумерных плоскостей является комплексом $C^\rho(1)$. Тогда в его образующей $L = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$ имеются характеристические прямые, принадлежащие одному пучку. Свяжем с таким комплексом репер так, чтобы вершина A_0 совпадала с центром пучка прямых. Точки $A_1, A_2, A_1 + \lambda_1 A_2, \ldots, A_1 + \lambda_{n-5} A_2$ поместим на $n-2$ характеристические прямые. Далее расположим в трехмерных характеристических плоскостях, проходящих через плоскость L соответствующих торсов, вершины $A_3, A_4, \ldots, A_n$. Тогда из (5) получим, что

$$\Lambda_3^{\alpha 2} = 0, \quad \Lambda_4^{\alpha 1} = 0, \quad \Lambda_5^{\alpha 1} - \Lambda_5^{\alpha 2} = 0, \tag{8}$$

$$\Lambda_4^{\alpha 1} - \lambda_1 \Lambda_4^{\alpha 2} = 0, \quad \Lambda_n^{\alpha 1} - \lambda_{n-5} \Lambda_n^{\alpha 2} = 0, \tag{9}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $p = 3, 4, \ldots, n$. В силу этих соотношений система уравнений (3), определяющая рассматриваемые комплексы, не содержит линейных дифференциальных форм

$$\omega_2^3, \quad \omega_1^4, \quad \omega_1^5 - \omega_2^5, \quad \omega_1^4 - \lambda_1 \omega_2^4, \quad \ldots, \quad \omega_1^n - \lambda_{n-5} \omega_2^n.$$

Следовательно, все входящие в систему уравнений (3) формы можно выразить через $n-3$ линейно независимые формы θ^r $(r = 1, 2, \ldots, n-3)$, дополняющие до базиса комплекса указанные $n-2$ формы. В частности, линейные формы ω_0^p $(p = 3, 4, \ldots, n)$ выражаются через базисные формы θ^r в виде

$$\omega_0^p = \lambda_r^p \theta^r. \tag{10}$$

Ввиду (10) дифференциал точки A_0 запишется так:

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^k A_k + (\lambda_r^p A_p)\theta^r,$$

где $k = 1, 2$, $p = 3, 4 \ldots, n$, $r = 1, 2, \ldots, n-3$. Отсюда видно, что точка A_0 описывает тангенциально невырожденную гиперповерхность, касательная гиперплоскость в точке A_0 к которой определяется плоскостью L и точками $\lambda_r^p A_p$. Следовательно, образующие L комплекса $C^\rho(1)$ касаются этой тангенциально невырожденной гиперповерхности.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть все образующие L комплекса C^ρ касаются некоторой тангенциально невырожденной гиперповерхности. Совместим вершину A_0 с текущей точкой этой гиперповерхности. В ее касательную гиперплоскость, содержащую плоскость $L = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$, поместим вершины $A_3, A_4, \ldots, A_{n-1}$. Тогда уравнение этой гиперповерхности примет вид

$$\omega_0^n = 0. \tag{11}$$

Формы $\omega_0^3, \omega_0^4, \ldots, \omega_0^{n-1}$, линейно независимые на гиперповерхности (11), будут независимыми и на комплексе C^ρ. Ввиду этого их можно включить в число базисных форм комплекса C^ρ. Дополним их до базиса комплекса C^ρ независимыми формами θ^s, где $s = 1, 2, \ldots, n-2$.

Однопараметрическое семейство плоскостей L, для которых $dA_0 \in L$, определяется уравнениями

$$\omega_0^p = 0, \tag{12}$$

$$\omega_k^p = \lambda_{ks}^p \theta^s, \tag{13}$$

$k = 1, 2$, $p = 3, 4, \ldots, n$ и $s = 1, 2, \ldots, n-2$, где

$$\theta^s = \mu^s dt. \tag{14}$$

Среди этих семейств имеются торсы, которые в силу (4) определяются уравнениями

$$\omega_2^p = \nu \omega_1^p. \tag{15}$$

Согласно (13), (14), (15) получим

$$(\lambda_{2s}^p - \nu \lambda_{1s}^p)\mu^s = 0. \tag{16}$$

Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение относительно μ^s, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\det(\lambda_{2s}^p - \nu \lambda_{1s}^p) = 0. \tag{17}$$

Это условие представляет собой уравнение степени $n-2$ относительно ν. Поэтому оно определяет для каждой образующей комплекса C^ρ в общем случае $n-2$ торса, характеристические прямые которых принадлежат одному пучку с центром в точке A_0.

В силу (13) и (14) дифференциал точки A_k запишется в виде

$$dA_k = \omega_k^0 A_0 + \omega_k^l A_l + (\lambda_{ks}^p \mu^s A_p)dt. \tag{18}$$

Уравнение (17) имеет в общем случае $n-2$ различных корней. Тогда направления, определяемые решениями μ^s системы уравнений (16), соответствующие этим корням, будут линейно независимыми. Ввиду этого из (18) вытекает, что трехмерные характеристические плоскости, касательные к соответствующим торсам, находятся в общем положении.

Найдем уравнения характеристических прямых, проходящих через точку A_0. Дифференциал точки $M = x^i A_i$ двумерной плоскости L имеет вид

$$dM = (dx^i + x^j \omega_j^i)A_i + x^i \omega_i^p A_p. \tag{19}$$

Отсюда видно, что характеристические прямые определяются уравнениями

$$x^i \omega_i^p = 0, \tag{20}$$

где формы ω_i^p удовлетворяют уравнениям (4). Характеристические прямые, проходящие через точку A_0, находятся в силу (12) и (13) из условия

$$x^k \lambda_{ks}^p \mu^s = 0. \tag{21}$$

Ввиду (12) имеем, что уравнения

$$x^1 + \nu x^2 = 0 \tag{22}$$

при различных значениях ν, удовлетворяющих (15), определяют на каждой образующей комплеса C^ρ $n-2$ различных характеристических прямых, принадлежащих пучку с центром в точке A_0. Таким образом, построенный комплекс двумерных плоскостей L является комплексом $C^\rho(1)$. Теорема полностью доказана. □

Рассмотрим теперь комплекс $C^\rho(2)$, в каждой образующей которого имеется два пучка прямых, содержащих $n-2$ характеристические прямые. В силу доказанной теоремы 1 такие комплексы представляют собой комплексы C^ρ двумерных плоскостей L, касающихся двух тангенциально невырожденных гиперповерхностей. Точки касания плоскостей L с этими гиперповерхностями являются центрами указанных выше двух пучков прямых. При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Общие касательные к двум тангенциально невырожденным гиперповерхностям, порождающим комплекс $C^\rho(2)$, являются характеристическими прямыми образующих этого комплекса.*

Доказательство. Совместим вершины A_0 и A_1 с текущими точками двух тангенциально невырожденных гиперповерхностей, касательные гиперплоскости которых содержат образующую L комплекса $C^\rho(2)$. В $(n-2)$-мерную плоскость, по которой пересекаются касательные гиперплоскости, поместим вершины $A_3, A_4, \ldots, A_{n-2}$. Вершины A_4 и A_5 поместим в соответствующие касательные гиперплоскости. Тогда уравнения гиперповерхностей примут вид

$$\omega_0^n = 0, \tag{23}$$

$$\omega_1^{n-1} = 0. \tag{24}$$

Данные уравнения выполняются на комплексе $C^\rho(2)$, а следовательно, совпадают с двумя из $n-1$ уравнений (3), определяющих рассматриваемые комплексы $C^\rho(2)$. Ввиду этого, условию (6), определяющему характеристические прямые на двумерной плоскости L, удовлетворяют тангенциальные координаты прямой $A_0 \wedge A_1$ — общей касательной двух тангенциально невырожденных гиперповерхностей (21) и (22). Следовательно, эта касательная прямая является характеристической прямой образующей L комплекса $C^\rho(2)$. Теорема доказана. □

Из теоремы 2 вытекает, что у комплексов $C^\rho(\alpha)$ в каждой образующей всякие пучки прямых, содержащих $n-2$ характеристических прямых торсов, имеют общую характеристическую прямую. Двумерные плоскости, касающиеся α тангенциально невырожденных гиперповерхностей, образуют комплекс коразмерности α, произвол существования которого равен соответственно одной, двум, …, $n-1$ функциям $n-3$ аргументов. Эти функции определяют тангенциально невырожденные гиперповерхности в пространстве P^n. Поскольку комплексы $C^\rho(\alpha)$ представляют собой сечения общего вида комплексов двумерных плоскостей коразмерности α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$), произвол существования комплексов $C^\rho(1)$ равен $n-2$ функциям $2(n-3)+1$ аргументов, комплексов $C^\rho(2)$ равен $n-3$ функциям $2(n-3)+1$ аргументов, …, комплексов $C^\rho(n-2)$ равен одной функции $2(n-3)+1$ аргументов, комплексов $C^\rho(n-1)$ равен $n-1$ функциям $n-1$ аргументов. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(\alpha)$ тогда и только тогда, когда его образующие L касаются α тангенциально невырожденных гиперповерхностей. При этом комплексы $C^\rho(\alpha-1)$ определяются с произволом $(n-\alpha)-1$ функций $2(n-3)+1$ аргументов, а комплексы $C^\rho(n-1)$ определяются с произволом $n-1$ функций $n-1$ аргументов.*

Комплексы $C^\rho(\alpha)$ являются сомодвойственными. Рассмотрим, например, комплексы $C^\rho(1)$. Образующие этих комплексов касаются некоторой тангенциально невырожденной гиперповерхности. Совместим вершину A_0 с текущей точкой этой гиперповерхности. Поместим вершины $A_3, A_4, \ldots, A_{n-1}$ в касательную гиперплоскость к этой гиперповерхности, проходящую через образующую L комплекса $C^\rho(1)$. Тогда уравнение рассматриваемой гиперповерхности примет вид

$$\omega_0^n = 0. \tag{25}$$

Данное уравнение выполняется на комплексе $C^\rho(1)$. Тогда одно из уравнений (5) запишется следующим образом:

$$a_0 x^n = 0.$$

Рассмотрим характеристические прямые на плоскости L, не принадлежащие пучку прямых с центром в точке A_0. Для таких прямых, ввиду последнего равенства, получим

$$x^n = 0.$$

Это уравнение показывает, что трехмерные характеристические плоскости соответствующих торсов лежат в касательной гиперплоскости к тангенциально невырожденной гиперповерхности (23).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если характеристические прямые $n-2$ проходящих через двумерную плоскость L торсов комплекса $C^\rho(1)$ принадлежат одному пучку γ, то трехмерные касательные плоскости C^2_{n-2} других торсов лежат в одной гиперплоскости — касательной к гиперповерхности, описываемой центром пучка γ и наоборот, если трехмерные характеристические плоскости $n-2$ проходящих через плоскость L торсов комплекса $C^\rho(1)$, принадлежат одной гиперплоскости π, то характеристические прямые C^2_{n-2} других торсов принадлежат одному пучку, центр которого описывает тангенциально невырожденную гиперповерхность, в каждой точке которой касающуюся гиперплоскости π.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акивис М. А.* Ткани и почти грассмановы структуры// Сиб. мат. ж. — 1982. — *23*, № 6. — С. 6–15.
2. *Акивис М. А., Гольдберг В. В.* Многообразия с вырожденным гауссовым отображением с кратными фокусами и скрученные конусы// Изв. вузов. Мат. — 2003. — № 11. — С. 3–14.
3. *Арнольд В. И.* Комплексный лагранжев грассманиан// Функц. анал. прилож. — 2000. — *34*, № 3. — С. 63–65.
4. *Арнольд В. И.* Лагранжев грассманиан кватернионного гиперсимплектического пространства// Функц. анал. прилож. — 2001. — *35*, № 1. — С. 74–77.
5. *Бубякин И. В.* Геометрия пятимерных комплексов двумерных плоскостей. — Новосибирск: Наука, 2001.
6. *Бубякин И. В.* О строении пятимерных комплексов двумерных плоскостей проективного пространства P^5 с единственным торсом// Мат. заметки СВФУ. — 2017. — *24*, № 2. — С. 3–12.
7. *Бубякин И. В.* О строении комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов// Мат. заметки СВФУ. — 2017. — *24*, № 4. — С. 3–16.
8. *Бубякин И. В.* О строении некоторых комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов, I// Мат. заметки СВФУ. — 2019. — *26*, № 2. — С. 1–14.
9. *Бубякин И. В.* О строении некоторых комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов, II// Мат. заметки СВФУ. — 2019. — *26*, № 4. — С. 14–24.
10. *Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.* Избранные задачи интегральной геометрии. — М.: Добросвет, 2007.
11. *Макоха А. Н.* Геометрическая конструкция линейного комплекса плоскостей B_3// Изв. вузов. Мат. — 2018. — № 11. — С. 15–26.
12. *Нерсесян В. А.* Допустимые комплексы трехмерных плоскостей проективного пространства P^6, II// Уч. зап. Ереван. ун-та. Сер. физ. мат. — 2002. — № 1. — С. 34–38.
13. *Нерсесян В. А.* Допустимые комплексы трехмерных плоскостей проективного пространства P^6, II// Уч. зап. Ереван. ун-та. Сер. физ. мат. — 2001. — № 3. — С. 35–39.
14. *Стеганцева П. Г., Гречнева М. А.* Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 2. — С. 65–75.
15. *Akivis M. A.* On the differential geometry of a Grassmann manifold// Tensor. — 1982. — *38*. — P. 273–282.
16. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective Differential Geometry of Submanifolds. — North-Holland, 1993.
17. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Differential Geometry of Varieties with Degenerate Gauss Map. — New York: Springer-Verlag, 2004.
18. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Conformal Differetial Geometry and Its Generalizations. — New York: Wiley, 2011.

19. *Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., Trnka J.* Scattering amplitudes and the positive Grassmannian/ arXiv: 1212.5605 [hep-th].
20. *Arkani-Hamed N., Trnka J.* The Amplituhedron// J. High Energy Phys. — 2014. — *10.* — P. 1–33.
21. *Bubyakin I. V.* To geometry of complexes of m-dimensional planes in projective space P^n containing a finite number of developable surfaces// Мат. Междунар. конф., посв. 100-летию В. Т. Базылева (Москва, 22-25 апреля 2019 г.). — М.: МГПУ, 2019. — С. 17–18.
22. *Hassett B.* Introduction to Algebraic Geometry. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.
23. *Landsberg J. M.* Algebraic Geometry and Projective Differential Geometry. — Seoul: Seoul Natl. Univ., 1997.
24. *Room T. G.* The Geometry of Determinantal Loci. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1938.

Бубякин Игорь Витальевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск
E-mail: bubyakiniv@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 42–50
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-42-50

УДК 514.8

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 г. **М. П. БУРЛАКОВ, Н. И. ГУСЕВА**

Аннотация. В статье рассматривается комплексное пространство-время, реализованное в алгебре бикватернионов. В этом формализме даются уравнения Максвелла и динамические уравнения Лоренца. Доказана теорема о тождестве магнитных монополей и тахионов, несущих электрический заряд.

Ключевые слова: комплексное пространство-время, бикватернионы, условия регулярности, уравнения Максвелла, обобщённая теорема Стокса.

ELECTRODYNAMICS IN COMPLEX SPACE

© 2023 **M. P. BURLAKOV, N. I. GUSEVA**

Abstract. In this paper, we examine the complex space-time realized in the biquaternion algebra and the Maxwell and Lorentz equations in this formalism. Also, we prove a theorem on the identity of magnetic monopoles and tachyons carrying an electric charge.

Keywords and phrases: complex space-time, biquaternions, regularity conditions, Maxwell equations, generalized Stokes theorem.

AMS Subject Classification: 15A66, 15A67, 35Q61

Кватернионы с комплексными координатами рассматривал ещё У. Гамильтон, он и назвал их *бикватернионами.* В двадцатых годах прошлого века эта алгебра (в матричном варианте) была использована П. Дираком для записи уравнений релятивистского электрона. В данной статье будет показано, что уравнения Максвелла также можно записать в алгебре бикватернионов, что позволяет установить идентичность тахионов, несущих электрический заряд, с магнитными монополями.

Алгебру бикватернионов $\mathbf{H}(\mathbb{C})$ можно рассматривать как алгебру *альтернионов* (см. [8]) над трёхмерным (вещественным) евклидовым пространством $\mathbf{E}_3$. Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{E}_3$, то векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, бивекторы $\mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_{31} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, тривектор $\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ и единица образуют базис линейного пространства алгебры альтернионов $\mathbf{Al}(\mathbf{E}_3)$, т.е. произвольным элементом $\mathbf{x}$ алгебры $\mathbf{Al}(\mathbf{E}_3)$ будет

$$\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_{23}\mathbf{e}_{23} + x_{31}\mathbf{e}_{31} + x_{12}\mathbf{e}_{12} + x_{123}\mathbf{e}_{123},$$

а произведение в $\mathbf{Al}(\mathbf{E}_3)$ задаётся структурными тождествами

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_h) + \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_h \tag{1}$$

с дополнительным условием ассоциативности.

Алгебра $\mathbf{Al}(\mathbf{E}_3)$ обладает *внутренней комплексификацией*: так как $\mathbf{e}_{123} \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{123}$, а также $\mathbf{e}_{123}^2 = -1$, то полагают $\mathbf{e}_{123} = i = \sqrt{-1}$. Тогда легко видеть, что $\mathbf{e}_{23} = i\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{31} = i\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_{12} = i\mathbf{e}_3$, т.е. $\mathbf{Al}(\mathbf{E}_3) = \mathbf{H}(\mathbb{C})$, и

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_{23}\mathbf{e}_{23} + x_{31}\mathbf{e}_{31} + x_{12}\mathbf{e}_{12} + x_{123}\mathbf{e}_{123} = \\ &= (x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) + i(x_{123} + x_{23}\mathbf{e}_1 + x_{31}\mathbf{e}_2 + x_{12}\mathbf{e}_3).\end{aligned}$$

При этом для векторов $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 \in \mathbf{E}_3 \subset \mathbf{H}(\mathbb{C})$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = (\mathbf{x},\mathbf{y}) + i\mathbf{x}\times\mathbf{y}. \tag{2}$$

Псевдоевклидово пространство-время Минковского реализуется на линейном вещественном пространстве $\mathbf{M}_4$, натянутом на векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и единицу. А фундаментальная форма на $\mathbf{M}_4$ задаётся произведением элемента $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \in \mathbf{M}_4 \subset \mathbf{H}(\mathbb{C})$ на сопряжённый ему элемент $\overline{\mathbf{x}} = x_0 - x_1\mathbf{e}_1 - x_2\mathbf{e}_2 - x_3\mathbf{e}_3 \in \mathbf{M}_4 \subset \mathbf{H}(\mathbb{C})$, так как $\mathbf{x}\cdot\overline{\mathbf{x}} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Вложение псевдоевклидова пространства Минковского в комплексное пространство алгебры бикватернионов полезно во многих отношениях. В частности, в пространстве бикватернионов единообразно описывается динамика материальных тел, движущихся с любой скоростью.

Пусть движение материальной точки с массой покоя m задано бикватернионом

$$\mathbf{r}(\tau) = t(\tau) + x(\tau)\mathbf{e}_1 + y(\tau)\mathbf{e}_2 + z(\tau)\mathbf{e}_3 \in \mathbf{M}_4 \subset \mathbf{H}(\mathbb{C}),$$

где

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \quad v_1 = \frac{dx}{dt}, \quad v_2 = \frac{dy}{dt}, \quad v_3 = \frac{dz}{dt}$$

и c — скорость света в вакууме. Тогда для импульса $\mathbf{p}$ данной материальной точки получим выражение

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = m\frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

Если $v < c$, то импульс будет вещественным бикватернионом, а если $v > c$, то, как видно из (3), импульс станет чисто мнимым бикватернионом.

Материальные частицы, движущиеся со скоростью большей скорости света, называют *тахионами*, а частицы движущиеся со скоростью меньшей скорости света — *брадионами* [2]. Непосредственно тахионы и брадионы не взаимодействуют, что видно из закона сохранения импульса. Действительно, пусть $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ импульсы двух материальных частиц; после их столкновения они приобретут импульсы $\mathbf{p'}_1$ и $\mathbf{p'}_2$, и по закону сохранения

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2. \tag{4}$$

Если обе частицы брадионы или тахионы, то $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}'_1$, но если одна частица будет тахионом, а другая брадионом, то из равенства (4) следует, что $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1$, а это и означает, что тахионы и брадионы непосредственно не взаимодействуют. Однако их взаимодействие может быть опосредованным, например, через электромагнитные поля.

Чтобы понять характер электромагнитного взаимодействия брадионов и тахионов, запишем уравнения Максвелла в гиперкомплексном формализме.

Теорема 1 (об уравнениях Максвелла)**.** *Пусть*

$$\mathbf{F} = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 + H_1 i\mathbf{e}_1 + H_2 i\mathbf{e}_2 + H_3 i\mathbf{e}_3$$

бикватернионнозначная функция $\mathbf{F}\colon \mathbf{M}_4 \to \mathbf{H}(\mathbb{C})$ *и*

$$\mathbf{D}_4^+ = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_3.$$

Тогда условие левой регулярности функции $\mathbf{F}$ *относительно оператора* $\mathbf{D}_4^+$

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^+\mathbf{F} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_3\right)\mathbf{F} = 0 \tag{5}$$

эквивалентно однородным уравнениям Максвелла для векторов

$$\mathbf{E} = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 \quad \textit{и} \quad \mathbf{H} = H_1\mathbf{e}_1 + H_2\mathbf{e}_2 + H_3\mathbf{e}_3$$

напряжённости электрического и магнитного поля (см. [5]).

Доказательство. Действительно:

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^+\mathbf{F} = \left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}\right) + i\left(\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z}\right) + \\ + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_1}{\partial t}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial E_2}{\partial t}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial E_3}{\partial t}\mathbf{e}_3\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial H_1}{\partial t}i\mathbf{e}_1 + \frac{\partial H_2}{\partial t}i\mathbf{e}_2 + \frac{\partial H_3}{\partial t}i\mathbf{e}_3\right) - \\ - \left(\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x}\right)\mathbf{e}_2 - \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3 + \\ + \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)i\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}\right)i\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right)i\mathbf{e}_3 = 0,$$

Доказательство утверждения сразу получается, если выражение для $\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^+\mathbf{F}$ приравнять нулю и полученные дифференциальные уравнения записать в формализме векторного анализа. В результате получим систему однородных уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \end{cases} \qquad \square$$

В классической электродинамике важную роль играют скалярный и векторный потенциалы ϕ и $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ электромагнитного поля, через которые выражаются векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{6}$$

или в координатах:

$$E_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t}, \quad E_2 = -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t}, \quad E_3 = -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t},$$
$$H_1 = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad H_2 = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \quad H_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}.$$

Потенциал для электромагнитного поля можно ввести и в гиперкомплексном формализме. Для этого возьмём линейный дифференциальный оператор

$$\mathbf{D}_4^- = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_2 - \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_3,$$

сопряжённый оператору $\mathbf{D}_4^+$, и рассмотрим функцию $\mathbf{\Phi} = \phi - \mathbf{A} = \phi - A_1\mathbf{e}_1 - A_2\mathbf{e}_2 - A_3\mathbf{e}_3$. Тогда

$$\mathbf{D}_4^-\Phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{e}_2 - \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_3 - \frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t}\mathbf{e}_3 + \\ + \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_{23} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{e}_{31} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{e}_{12} + \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

Если потребовать для компонент векторного и скалярного потенциалов выполнение калибровочного условия Лоренца:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \tag{7}$$

то получим, что

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^-\mathbf{\Phi} = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 + H_1\mathbf{e}_{23} + H_2\mathbf{e}_{31} + H_3\mathbf{e}_{12} = \mathbf{F}. \tag{8}$$

Из представления (8) функции электромагнитного поля $\mathbf{F}$ немедленно следует, что, если поле $\mathbf{F}$ удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла, то скалярный потенциал $\phi \equiv A_0$ и все компоненты A_k векторного потенциала $\mathbf{A}$ электромагнитного поля $\mathbf{F}$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial t^2} = 0. \tag{9}$$

Это утверждение сразу получается из того, что

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^{+}\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^{-} \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{10}$$

и потому из условия $\overrightarrow{\mathbf{D}}_4\mathbf{F} = 0$ получим

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^{+}\overrightarrow{\mathbf{D}}_4^{-}\mathbf{\Phi} = \overrightarrow{\mathbf{D}}_4^{+}\mathbf{F} = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{\Phi} = 0. \tag{11}$$

Заметим, кстати, что из (8) также следует, что, если напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитного поля $\mathbf{H}$ удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла, то вещественные компоненты E_k и H_k бикватернионнозначной функции электромагнитного поля $\mathbf{F}$ также удовлетворяют волновому уравнению.

Однородные уравнения Максвелла (уравнения Максвелла без токов и зарядов) представляют собой условие регулярности бикватернионнозначной функции напряжённости электромагнитного поля $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z, t)$, т.е. система уравнений Максвелла эквивалентна уравнению (☐). В связи с этим естественно возникает вопрос: как в гиперкомплексном формализме можно записать неоднородные уравнения для электромагнитного поля, порождённого электрическими зарядами и токами?

Для этого введём функцию

$$\mathbf{J} = \rho - \frac{j_1\mathbf{e}_1 + j_2\mathbf{e}_2 + j_3\mathbf{e}_3}{c} \equiv \rho - \frac{\mathbf{j}}{c}, \tag{12}$$

где ρ — плотность электрического заряда, а $\mathbf{j} = j_1\mathbf{e}_1 + j_2\mathbf{e}_2 + j_3\mathbf{e}_3$ — плотность электрического тока. Тогда имеет место следующее утверждение.

Следствие 1 (об уравнениях Максвелла). *Уравнение*

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}\mathbf{F} = 4\pi\mathbf{J} \tag{13}$$

эквивалентно системе неоднородных уравнений Максвелла с электрическими зарядами и токами:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho \\ &\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Запись неоднородных уравнений Максвелла с токами и зарядами в форме *гиперкомплексного дифференциального уравнения* (7) имеет много преимуществ по сравнению с традиционной *векторной записью* этих великих уравнений (подобно тому как векторная форма записи уравнений Максвелла более предпочтительна по сравнению с их координатной записью). Например, запись однородных уравнений Максвелла в форме (☐) позволяет средствами гиперкомплексного анализа получать законы сохранения динамических величин для электромагнитных полей [5]. В частности, справедливое в силу уравнения (5) интегральное тождество *типа Коши*

$$\int\limits_{\partial\Theta} \mathbf{F}^* \cdot \sigma_4 \cdot \mathbf{F} = \int\limits_{\Theta} (\mathbf{F}^*\overleftarrow{\mathbf{D}}_4^{+} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^* \cdot \overrightarrow{\mathbf{D}}_4^{+}\mathbf{F})dV_4 = 0,$$

где $\mathbf{F}^* = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 - H_1 i\mathbf{e}_1 - H_2 i\mathbf{e}_2 - H_3 i\mathbf{e}_3$, а

$$\sigma_4 = -c^{-1}dx \wedge dy \wedge dz + \mathbf{e}_1 dy \wedge dz \wedge dt - \mathbf{e}_2 dz \wedge dx \wedge dt + \mathbf{e}_3 dx \wedge dy \wedge dt$$

представляет собой закон сохранения энергии-импульса электромагнитного поля в пространственно-временной области Θ, а интегральное тождество

$$\int\limits_{\partial\Theta} \mathbf{\Phi} \cdot \sigma_4 \cdot \mathbf{F} = \int\limits_{\Theta} (\mathbf{\Phi}\overleftarrow{\mathbf{D}}_4^{+} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{\Phi} \cdot \overrightarrow{\mathbf{D}}_4^{+}\mathbf{F})dV_4 = 0,$$

где $\mathbf{\Phi} = \varphi + \mathbf{A} \equiv \varphi + A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$, φ — скалярный и $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ — векторный потенциалы электромагнитного поля, является следствием однородных уравнений Максвелла и формул (☐), выражающих напряжённости электрического и магнитного поля из скалярного и векторного потенциала. Оно соответствует закону сохранения некоторой динамической величины для электромагнитного поля.

Чтобы выяснить физический смысл этой динамической величины, возьмём в качестве области интегрирования Θ полосу пространства-времени, ограниченную гиперплоскостями T_1 с уравнением $t = t_1$ и T_2 с уравнением $t = t_2$. Тогда, считая электромагнитное поле достаточно быстро убывающим до нуля на бесконечности, получим следующую интегральную величину

$$\mathbf{S}(T) = \iiint\limits_{T} (\overline{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Phi}) dV_3,$$

которая сохраняет своё значение на всех гиперплоскостях T с уравнением $t = \mathrm{const}$ или, что то же самое, на всём трёхмерном пространстве во все моменты времени. И так как

$$\overline{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Phi} = (\varphi + \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{E} + i\mathbf{H}) + (\mathbf{E} + i\mathbf{H}) \cdot (\varphi - \mathbf{A}) = 2\varphi\mathbf{E} - 2\mathbf{A} \times \mathbf{H} + 2i\varphi\mathbf{H} + 2i\mathbf{A} \times \mathbf{E},$$

то эта величина имеет смысл собственного момента импульса (спина) электромагнитного поля, поскольку в калибровке, при которой скалярный потенциал полагают равным нулю, плотность собственного момента импульса электромагнитного поля равна $s \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{E}$.

Так в самых общих чертах выглядит классическая электродинамика Максвелла в гиперкомплексном формализме.

Такой формализм позволяет нам не только записывать в бескоординатной форме уравнения электродинамики, но и вскрывает глубинную связь этих уравнений с геометрической структурой пространства и времени. И уже поэтому гиперкомплексный подход к описанию электромагнитных полей обладает несомненной ценностью. Но эта ценность многократно увеличивается в связи с тем, что в этом формализме просто решаются некоторые давние проблемы классической электродинамики.

Важно ещё то, что те же методы гиперкомплексного анализа, которые применялись к задачам электродинамики, можно использовать и для исследования других физических полей. В частности, с помощью гиперкомплексного анализа получаем возможность записывать различные уравнения теории поля в инвариантной форме, учитывающей геометрическую структуру пространства-времени.

Но, пожалуй, основным достоинством бикватернионной записи уравнений Максвелла с токами и зарядами является решение одной давней проблемы классической электродинамики при помощи такой формы этих великих уравнений. Речь пойдёт о проблеме магнитных зарядов и о существовании частиц, несущих изолированный магнитный полюс. Из практики известно, что любой магнит всегда имеет два полюса, которые условно называют северным и южным. И если какой-либо магнит разделить на несколько частей, то каждая часть снова будет иметь по два полюса.

А может ли некоторое материальное тело (например, элементарная частица) иметь единственный полюс — северный или южный? Такой изолированный полюс получил название *магнитного заряда*, а частицы, несущие магнитный заряд, стали называть *магнитными монополями*. Гипотезу о магнитных монополях ещё в 1931 году высказал знаменитый физик-теоретик Поль Адриен Морис Дирак в статье «Квантовые сингулярности в электромагнитном поле». Исходя из квантовомеханических соображений, Дирак предположил, что существуют частицы, несущие магнитный заряд и чисто теоретически вывел некоторые свойства этих гипотетических частиц, которые с тех пор получили название монополей Дирака [10].

Авторитет Дирака был настолько велик, а его рассуждения обладали такой безупречной логикой, что большинство физиков были уверены в том, что магнитные монополи вскоре будут обнаружены экспериментально. Но шли годы и десятилетия, а поиск магнитных монополей не приносил результатов. Другие теоретические предсказания Дирака (например, его гипотеза о существовании античастиц) находили блестящее подтверждение в экспериментах. А магнитные монополи упорно ускользали от всех попыток их обнаружить. Так возникла проблема магнитных монополей, решения которой нет до сего дня.

Как должны выглядеть базовые уравнения электродинамики, если предположить, что магнитные заряды существуют? Теория, в которой как электрические, так и магнитные заряды выступают в качестве источников электромагнитного поля, базируется на обобщённых уравнениях

Максвелла, которые в векторном формализме имеют такой вид:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho_\varepsilon\\&\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\varepsilon\end{aligned}\right\};\quad\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{H}=4\pi\rho_\mu\\&\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\mu\end{aligned}\right\}.\tag{15}$$

где ρ_ε — плотность электрических зарядов, ρ_μ — плотность магнитных зарядов, $\mathbf{j}_\varepsilon=j_1^\varepsilon\mathbf{e}_1+j_2^\varepsilon\mathbf{e}_2+j_3^\varepsilon\mathbf{e}_3$ — плотность тока электрических зарядов, а $\mathbf{j}_\mu=j_1^\mu\mathbf{e}_1+j_2^\mu\mathbf{e}_2+j_3^\mu\mathbf{e}_3$ — плотность тока магнитных зарядов [10].

Чтобы записать обобщённые уравнения Максвелла в гиперкомплексном формализме, достаточно в уравнение (13) вместо (12) подставить следующую бикватернионнозначную функцию тока:

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_\varepsilon+\mathbf{J}_\mu\equiv\rho_\varepsilon+\rho_\mu\mathbf{e}_{123}-\frac{\mathbf{j}_\varepsilon}{c}+\frac{\mathbf{j}_\mu}{c},\tag{16}$$

тогда обобщённые уравнения Максвелла с электрическими и магнитными зарядами и токами (15) можно записать в виде (13).

Гиперкомплексная форма записи (13) обобщённых уравнений Максвелла предпочтительнее их традиционной записи (15). Это становится понятным, если положим $\mathbf{e}_{123}=i\equiv\sqrt{-1}$. Тогда плотность электрического тока

$$\mathbf{J}_\varepsilon=\rho_\varepsilon-\frac{\mathbf{j}_\varepsilon}{c}\equiv\rho_\varepsilon-\frac{j_1^\varepsilon\mathbf{e}_1+j_2^\varepsilon\mathbf{e}_2+j_3^\varepsilon\mathbf{e}_3}{c}$$

будет вещественным 4-вектором, а плотность тока магнитных зарядов будет чисто мнимым 4-вектором

$$\mathbf{J}_\mu=i\left(\rho_\mu-\frac{\mathbf{j}_\mu}{c}\right)\equiv i\left(\rho_\mu-\frac{j_1^\mu\mathbf{e}_1+j_2^\mu\mathbf{e}_2+j_3^\mu\mathbf{e}_3}{c}\right).$$

Рассмотрим одиночный электрический заряд ε, движущийся со скоростью

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3.$$

Для него

$$\mathbf{J}=\varepsilon\mathbf{u}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{\varepsilon(v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.\tag{17}$$

Когда $v^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2<c^2$, бикватернион $\mathbf{J}$ будет вещественным, а если $v^2>c^2$, то бикватернион $\mathbf{J}$ станет чисто мнимым. Но поскольку любой электрический ток представляет собой поток электрически заряженных частиц, то можно утверждать, что электрический ток тахионов выражается чисто мнимым бикватенионом. И подставляя

$$\mathbf{J}=i\rho+(j_1i\mathbf{e}_1+j_2i\mathbf{e}_2+j_3i\mathbf{e}_3)\tag{18}$$

в бикватернионное уравнение (7), получим такую систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{div}\mathbf{E}=0,\\\operatorname{rot}\mathbf{H}-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0;\end{cases}\quad\begin{cases}\operatorname{div}\mathbf{H}=4\pi\rho,\\\operatorname{rot}\mathbf{E}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\dfrac{4\pi\rho}{c}\mathbf{j}.\end{cases}\tag{19}$$

Эта система уравнений описывает электромагнитные поля, которые порождаются *магнитными зарядами* и *магнитными токами*. И таким образом получается, что токи электрически заряженных тахионов создают такие же электромагнитные поля, как и токи брадионов, несущих магнитный заряд.

Рассмотрим теперь характер взаимодействия с электромагнитным полем брадионов и тахионов. Для этого запишем в гиперкомплексном формализме *уравнения Лоренца*

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\varepsilon(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{H}/c)\tag{20}$$

для движения в электромагнитном поле частиц с электрическим зарядом ε и массой покоя m. Чтобы это векторное уравнение переписать как бикватернионное уравнение, умножим бикватернион (четырёхмерной) скорости

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{e}_2 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

справа на бивектор электромагнитного поля $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = (E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 + H_1 i\mathbf{e}_1 + H_2 i\mathbf{e}_2 + H_3 i\mathbf{e}_3)\cdot(u_0 + u_1\mathbf{e}_2 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) = \\ = u_0(E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3) + u_0(H_1 i\mathbf{e}_1 + H_2 i\mathbf{e}_2 + H_3 i\mathbf{e}_3) + \\ + (E_1u_1 + E_2u_2 + E_3u_3) + i(H_1u_1 + H_2u_2 + H_3u_3) + \\ + (u_2H_3 - u_3H_2)\mathbf{e}_1 + (u_3H_1 - u_1H_3)\mathbf{e}_2 + (u_1H_2 - u_2H_1)\mathbf{e}_3 + \\ + (u_2E_3 - u_3E_2)i\mathbf{e}_1 + (u_3E_1 - u_1E_3)i\mathbf{e}_2 + (u_1E_2 - u_2E_1)i\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что динамическое уравнение

$$m\frac{d\mathbf{u}(\tau)}{d\tau} = \varepsilon\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}/c \tag{21}$$

в своей вещественной векторной части даст уравнение Лоренца (12). Если взять мнимую векторную часть уравнения (13), то получим динамическое уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} = \varepsilon(\mathbf{H} - \mathbf{v}\times\mathbf{E}/c), \tag{22}$$

которому должно подчиняться движение частиц, несущих магнитный заряд. Но этому же уравнению подчиняется и движение электрически заряженных тахионов. Таким образом, объединяя выводы из уравнений (11) и (14), получаем следующее утверждение, которое сформулируем как теорему.

Теорема 2 (первая теорема о магнитных монополях). *Электромагнитное поле, источником которого являются токи тахионов, несущих электрические заряды, совпадает с электромагнитным полем, порождённым токами брадионов несущих магнитные заряды.*

Доказанная теорема утверждает, что поток электрически заряженных тахионов порождает такое же электромагнитное поле, как и поток магнитно заряженных брадионов. Можно показать и обратное. А именно то, что электрически заряженные тахионы ведут себя в стороннем электромагнитном поле как частицы, несущие магнитный заряд. Другими словами, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 (вторая теорема о магнитных монополях). *Электрически заряженный тахион во внешнем электромагнитном поле движется также как и магнитный монополь.*

Для доказательства этой теоремы запишем в гиперкомплексном формализме уравнение Лоренца (20), которому подчиняется движение заряженных частиц c зарядом e в стороннем электромагнитном поле.

Пусть $\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ 4-*скорость* заряженной материальной частицы. Умножим этот вектор справа на бикватернионнозначную функцию $\mathbf{F} = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3 + H_1\mathbf{e}_{23} + H_2\mathbf{e}_{31} + H_3\mathbf{e}_{12}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = u_0(E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3) + u_0(H_1\mathbf{e}_{23} + H_2\mathbf{e}_{31} + H_3\mathbf{e}_{12}) + \\ + (E_1u_1 + E_2u_2 + E_3u_3) + (H_1u_1 + H_2u_2 + H_3u_3)\mathbf{e}_{123} + \\ + (u_2H_3 - u_3H_2)\mathbf{e}_1 + (u_3H_1 - u_1H_3)\mathbf{e}_2 + (u_1H_2 - u_2H_1)\mathbf{e}_3 - \\ - (u_2E_3 - u_3E_2)\mathbf{e}_{23} - (u_3E_1 - u_1E_3)\mathbf{e}_{31} - (u_1E_2 - u_2E_1)\mathbf{e}_{12}.\end{aligned} \tag{23}$$

Тогда динамическое уравнение

$$m\frac{d\mathbf{u}(\tau)}{d\tau} = e\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}/c \tag{24}$$

в своей векторной части даст нам уравнение Лоренца (20), так как

$$u_0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_1 = \frac{v_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_2 = \frac{v_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_3 = \frac{v_3}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\mathrm{vek}\left(m\frac{d\mathbf{u}(\tau)}{d\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{mv(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Если взять бивекторную часть уравнения (24), то получим такое уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{mv(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = e\left(\mathbf{H} - v\times\frac{\mathbf{E}}{c}\right), \tag{25}$$

которому должно подчиняться движение частиц, несущих магнитный заряд. Но этому же уравнению подчиняется и движение электрически заряженных тахионов, скорость которых даётся чисто мнимым вектором. Это и доказывает вторую теорему о магнитных монополях.

Заметим ещё, что нулевая (скалярная) компонента гиперкомплексного уравнения (24) представляет собой уравнение изменения кинетической энергии движущегося заряженного брадиона:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = v_1E_1 + v_2E_2 + v_3E_3, \tag{26}$$

а тривекторная (псевдоскалярная) компонента уравнения (24) представляет собой уравнение изменения кинетической энергии движущегося заряженного тахиона:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = v_1H_1 + v_2H_2 + v_3H_3. \tag{27}$$

Итак, электромагнитное поле электрически заряженных тахионов совпадает с электромагнитным полем, порождённым токами магнитных зарядов, и движение электрически заряженных тахионов подчиняется динамическому уравнению частиц, несущих магнитный заряд.

Утверждение теорем о магнитных монополях объясняет неудачи экспериментаторов, упорно ищущих частицы, несущие магнитный заряд [5]: пока не будут найдены тахионы, не будут обнаружены и магнитные монополи. С другой стороны, из этой теоремы следует существование магнитного фотоэффекта (возможно, обнаруженного в экспериментах Эренгафта). Он помещал в магнитное поле железные пылинки, которые освещал сильным световым лучом. При этом пылинки изменяли траекторию движения таким образом, как если бы свет выбивал из них магнитные заряды. Позднее опыты Эренгафта воспроизводили другие физики, но разумного объяснения аномальному движению железных пылинок под действием света (эффекта Эренгафта) до сих пор не получено, как и не обнаружено следов выбитых магнитных зарядов.

Разумное объяснение результатам опытов Эренгафта даёт нам отождествление магнитных монополей с электрически заряженными тахионами. В таком случае будем наблюдать взаимодействие железных пылинок со сверхсветовыми электронами, точно такое же, как с магнитными монополями, но сами тахионы, несущие электрический заряд, нашими приборами обнаружены быть не могут. Это сразу следует из гиперкомплексной формы уравнений Максвелла, продолженных в область сверхсветовых скоростей.

Мир брадионов и мир тахионов разделён барьером скорости света. Если скорость некоторого брадиона будет расти, приближаясь к скорости света, то многие его геометрические и физические характеристики будут стремиться к бесконечности. Например, для релятивистской массы M любого материального тела с собственной (инвариантной) массой m будем иметь:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \to \infty,$$

когда $v \to c$. Это же справедливо и для релятивистского импульса, энергии, момента импульса и т. д.

Генрих Герц, открывший электромагнитные волны, как-то сказал об уравнениях Максвелла: «*Нельзя изучать эту удивительную теорию, не испытывая по временам такого чувства, будто математические формулы живут собственной жизнью, обладают собственным разумом — кажется, что эти формулы умнее нас, умнее даже самого автора, как будто они дают нам больше, чем в своё время было в них заложено*» [3]. Это замечательное высказывание выдающегося физика XIX века не раз оправдывалось в прошлом и не раз ещё будет подтверждаться в будущем. Стоит нам чуть более внимательно приглядеться к этим великим уравнениям — и они открывают нам всё новые и новые знания об окружающем мире. И кажется, что все тайны вселенной скрыты в иероглифах формул, о которых Оливер Хевисайд написал после первого с ними знакомства: «*Это было нечто великое, и ещё более великое, и наивеличайшее*».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлаков И. М., Бурлаков М. П.* Введение в гиперкомплексный анализ. — LAMBERT, 2017.
2. *Бурлаков И. М., Бурлаков М. П.* Геометрические структуры линейных алгебр. — LAMBERT, 2017.
3. *Герц Г. Р.* Принципы механики, изложенные в новой связи. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. *Минковский Г.* Пространство и время// Усп. физ. наук. — 1959. — *69*. — С. 303–320.
5. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. — М: Мир, 1987.
6. *Применко Л. А.* Математические идеи О. Хевисайда// в кн.: Из истории развития физико-математических наук. — Киев, 1981. — С. 37–44.
7. *Реками Э.* Теория относительности и её обобщения// в кн.: Астрофизика, кванты и теория относительности. — М.: Мир, 1982. — С. 53–128.
8. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. — М: ГИТТЛ, 1955.
9. *Хунд Ф.* История квантовой теории. — Киев: Наукова думка, 1980.
10. *Dirac P. A. M.* Quantised singularities in the electromagnetic field// Proc. Roy. Soc. Ser. A. — 1931. — *133*, № 821. — P. 60–72.

Бурлаков Михаил Петрович
Московский педагогический государственный университет
E-mail: burlakovmihail@mail.ru

Гусева Надежда Ивановна
Московский педагогический государственный университет;
Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва
E-mail: ngus12@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 51–62
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-51-62

УДК 519.17

ОСТОВНЫЕ ЛЕСА И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

© 2023 г. **Е. И. ДЕЗА**

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы перечисления некоторых графов специального вида. Получен ряд новых результатов о числе остовных лесов графов, играющих важную роль в теории информации. Рассмотрены свойства остовных сходящихся лесов ориентированных графов, участвующих в построении квазиметрики среднего времени первого прохода — обобщенной метрической структуры, тесно связанной с эргодическими однородными цепями Маркова. Изучены характеристики остовных корневых лесов и остовных сходящихся лесов неориентированных и ориентированных графов, необходимых для построения матрицы относительной лесной доступности — одной из мер близости вершин графовых структур. Рассуждения проведены на основе нескольких простейших графовых моделей, в том числе на базе простого пути, простого цикла, графа-гусеницы и их ориентированных аналогов.

Ключевые слова: граф, путь, цикл, граф-гусеница, остовной сходящийся корневой лес ориентированного графа, остовной корневой лес неориентированного графа, цепь Маркова, среднее время первого прохода, матрица относительной лесной доступности.

SPANNING FORESTS AND SPECIAL NUMBERS

© 2023 **E. I. DEZA**

Abstract. In this paper, we discuss enumerating some graphs of a special type. New results on the number of spanning forests of graphs playing an important role in information theory are obtained. We consider properties of convergent spanning forests of directed graphs involved in the construction of the quasi-metric of the mean time of the first pass, which is a generalized metric structure closely related to ergodic homogeneous Markov chains. We examine characteristics of spanning root forests and convergent spanning forests of directed and undirected graphs that are used for constructing the matrix of relative forest availability, which is one of the proximity measures of vertices of graphs. The reasonings are illustrated by several simple graph models, including a simple path, a simple cycle, a caterpillar graph, and their oriented analogs.

Keywords and phrases: graph, path, cycle, caterpillar graph, convergent spanning root forest of a directed graph, spanning root forest of an undirected graph, Markov chain, mean time of the first pass, relative forest accessibility matrix.

AMS Subject Classification: 54E25, 54E35

1. Введение. Вопросы перечисления тех или иных графовых структур (помеченных, непомеченных, ориентированных, неориентированных и др.) представляют собой хорошо разработанную часть классической теории графов. Особое место среди перечислительных проблем занимают утверждения, связанные с подсчетом тех или иных деревьев и, как естественное обобщение, лесов. Так, важное место в прикладных задачах теории информации занимают вопросы, связанные с исследованием обобщенных метрических структур на цепях Маркова.

Исследование количества сходящихся лесов ориентированных графов, используемых для моделирования марковских процессов, является естественной составной частью указанной проблематики [4,7,10–12]. Полученные нами результаты в этой области — доказательство теорем о числе остовных деревьев и остовных 2-деревьевых лесов ориентированных и неориентированных путей, циклов и графов-гусениц — представлены в разделе 3.

Матрица относительной лесной доступности является одной из известных мер близости между вершинами графов и орграфов; особенно часто она используется в приложениях, связанных с различными аспектами алгебраической теории графов [6, 8]. Для проведения соответствующих исследований важна информация о количестве тех или иных типов остовных лесов графов и ориентированных графов, использующихся при решении прикладных задач. Полученные нами результаты в этой области — доказательство теорем о числе остовных лесов ориентированных и неориентированных путей, циклов и графов-гусениц — представлены в разделе 4.

Раздел 2 носит вспомогательный характер. Он содержит базовую информацию о графовых структурах, фигурирующих в исследовании, и числах Фибоначчи, существенно использующихся при доказательстве теорем в случае неориентированных графовых конструкций.

2. Базовые определения. Для формулировки и доказательства основных результатов статьи вспомним базовые понятия теории неориентированных и ориентированных графов [4, 7].

Неориентированный граф (*граф*) G — пара $\langle V, E\rangle$, где $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ — множество, называемое множеством вершин графа G, а $E \subset \{(i, j) \mid i, j \in V,\ i \neq j\}$ — некоторое подмножество множества неупорядоченных пар различных элементов из V, называемое множеством ребер графа G.

Простейшими графами являются *неориентированный путь* $P_n = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$, и *неориентированный цикл* $C_n = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$. Несложное преобразование графа P_n дает нам *граф-гусеницу* $T_n = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 5), \dots, (n-1, n)\}$.

Подграфом графа G называется любой граф, множество вершин которого является подмножеством вершин графа G, а множество ребер является подмножеством множества ребер графа G. Остовной подграф графа G — подграф, содержащий все вершины графа G.

Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин существует соединяющий их путь. Компонентой графа G называется максимальный связный подграф графа G.

Дерево — связный граф, не содержащий циклов. *Корневое дерево* — дерево, в котором выбрана одна вершина, называемая *корнем*. *Корневое остовное дерево* графа G — остовной подграф графа G, являющийся корневым деревом.

Лес — граф, каждая компонента которого является деревом. *Корневой остовной лес* графа G — остовной подграф графа G, все компоненты которого являются корневыми деревьями.

Ориентированный граф (*орграф*) Γ — пара $\langle V, E\rangle$, где $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ — множество, называемое множеством вершин графа G, а $E \subset \{\langle i, j\rangle \mid i, j \in V,\ i \neq j\}$ — некоторое подмножество множества упорядоченных пар различных элементов из V, называемое множеством дуг орграфа Γ. Другими словами, ориентированный граф — это граф, ребрам которого присвоено направление.

Простейшими орграфами являются *ориентированный путь* $\overrightarrow{P_n} = \langle V, E\rangle$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1\rangle, \langle n-1, n-2\rangle, \dots, \langle 2, 1\rangle\}$ и *ориентированный цикл* $\overrightarrow{C_n} = \langle V, E\rangle$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1\rangle, \langle n-1, n-2\rangle, \dots, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, n\rangle\}$. Простейшее преобразование ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$ дает нам *ориентированный граф-гусеницу* $\overrightarrow{T_n} = \langle V, E\rangle$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle n, n-1\rangle, \langle n-1, n-2\rangle, \dots, \langle 5, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$.

Подорграфом орграфа Γ называется любой орграф, множество вершин которого является подмножеством вершин орграфа Γ, а множество дуг является подмножеством множества дуг орграфа Γ. Остовной подорграф графа Γ — подорграф, содержащий все вершины орграфа Γ.

Орграф называется *слабо связным*, если соответствующий неориентированный граф связен. *Слабой компонентой* орграфа называется любой его максимальный слабосвязный подграф.

Сходящееся дерево — слабосвязный орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет нулевое значение для исходящей степени, а оставшиеся вершины имеют для исходящей степени значение 1.

Сходящийся лес орграфа Γ — остовной подорграф орграфа Γ, все слабые компоненты которого являются сходящимися деревьями. Говорят, что сходящийся лес *сходится к корням* его сходящихся деревьев.

Числами Фибоначчи называются элементы рекуррентно задаваемой последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, в то время как $u_1 = u_2 = 1$. Числа Фибоначчи обладают рядом интересных свойств, которые можно найти, например, в [1]. В частности, они удовлетворяют многочисленным тождествам, некоторые из которых будут использованы в нашей работе:

(i) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1$;
(ii) $u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;
(iii) $u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$.

3. Перечисление остовных лесов, связанных с квазиметрикой среднего времени первого прохода. Пусть Γ — взвешенный орграф без петель, вершины которого равны $1, 2, \ldots, n$, а веса дуг равны вероятностям перехода некоторой однородной эргодической цепи Маркова. *Среднее время первого прохода* из состояния i в состояние j в данной цепи Маркова может быть представлено как

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ q, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где f_{ij} — суммарный вес входящих лесов орграфа Γ, состоящих из двух деревьев, и имеющих одно дерево, содержащее i, а другое дерево, сходящееся к j, q_j — суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ, а

$$q = \sum_{k=1}^{n} q_k$$

(см. [2, 4, 7, 10–12]).

Таким образом, для построения матрицы среднего времени первого прохода нам нужна информация о количестве корневых (сходящихся) остовных деревьев и корневых (сходящихся) остовных 2-деревьевых лесов ориентированных и неориентированных графов. В этом разделе представлены доказательства полученных нами результатов для неориентированных и ориентированных путей и графов-гусениц.

Теорема 1. *Для числа корневых остовных деревьев имеют место следующие утверждения*:

(i) *число остовных корневых сходящихся деревьев ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n \geqslant 2$, равно* 1;
(ii) *число остовных корневых сходящихся деревьев ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$, равно* 1;
(iii) *число остовных корневых деревьев неориентированного пути P_n, $n \geqslant 2$, равно n*;
(iv) *число остовных корневых сходящихся деревьев неориентированного графа-гусеницы T_n, $n \geqslant 4$, равно n.*

Доказательство. Для ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$ существует ровно одно остовное корневое дерево: выбирая в качестве корня вершину 1, получаем остовное дерево, сходящееся к 1, которое совпадает с самим графом $\overrightarrow{T_n}$; выбирая в качестве корня любую вершину $i \neq 1$, убеждаемся, что в графе $\overrightarrow{T_n}$ не существует остовного дерева, сходящегося к i.

Рассуждения для ориентированного пути совершенно аналогичны.

Для неориентированного графа-гусеницы T_n существует ровно одно остовное дерево с фиксированным корнем i: оно совпадает с T_n. Выбирая вершину i из n вершин графа T_n, получаем n остовных корневых деревьев графа T_n.

Рассуждения для неориентированного пути совершенно аналогичны. □

Замечание. Для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$ существует n остовных деревьев. Для неориентированного цикла C_n существует n^2 остовных деревьев [3].

Теорема 2. *Для числа 2-деревьевых остовных лесов имеют место следующие утверждения:*

(i) *число остовных 2-деревьевых сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n \geqslant 2$, равно $n-1$;*
(ii) *число остовных 2-деревьевых сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$, равно $n-1$;*
(iii) *число остовных 2-деревьевых корневых лесов неориентированного пути P_n, $n \geqslant 2$, равно $n(n^2-1)/6$;*
(iv) *число остовных 2-деревьевых корневых лесов неориентированного графа-гусеницы T_n, $n \geqslant 4$, равно $n(n^2-7)/6+3$.*

Доказательство. Для подсчета остовных 2-деревьевых сходящихся лесов орграфа $\overrightarrow{T_n}$ рассмотрим две возможности. Сначала предположим, что одно из двух деревьев нашего леса сходится к вершине 1, а другое — к произвольной вершине $j \neq 1$. Нетрудно убедиться, что в этом случае два дерева, образующие лес, определены однозначно; искомый 2-деревьевый сходящийся лес получается уничтожением дуги $\langle j, j-1 \rangle$. При этом $n-1$ возможный выбор j обеспечивает $n-1$ лес. Предположив, что ни одно из двух деревьев 2-деревьевого леса не сходится к 1, т.е. пытаясь найти два дерева с корнями $i \neq 1$, $j \neq 1$, убеждаемся, что такая ситуация невозможна.

Рассуждения для ориентированного пути совершенно аналогичны.

Для подсчета остовных 2-деревьевых корневых лесов графа T_n выберем две вершины i, j в качестве корней соответствующих деревьев. Заметим, что при фиксированных i, j, $4 \leqslant i < j \leqslant n$, получаем ровно $j-i$ остовных 2-деревьевых корневых лесов графа T_n. Каждый из этих лесов может быть получен уничтожением одного из $j-i$ ребер $(i, i+1)$, $(i+1, i+2)$, …, $(j-1, j)$ графа T_n.

Так, существует ровно 1 остовной 2-деревьевый лес, в котором деревья имеют корни 4 и 5: одно дерево представляет собой граф-гусеницу на 4 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4, второе — путь на $n-4$ вершинах $5, 6, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 5. Существует ровно 2 остовных 2-деревьевых леса, в которых деревья имеют корни 4 и 6: в первом случае одно дерево представляет граф-гусеницу на 4 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4, второе — путь на $n-4$ вершинах $5, 6, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 6; во втором случае получаем граф-гусеницу на 5 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4 и путь на $n-5$ вершинах $6, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 6. Существует ровно 3 остовных 2-деревьевых леса, в которых деревья имеют корни 4 и 7: в первом случае одно дерево представляет собой граф-гусеницу на 4 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4, второе — путь на $n-4$ вершине $5, 6, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 7; во втором случае получаем граф-гусеницу на 5 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4 и путь на $n-5$ вершинах $6, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 7; в третьем случае получаем граф-гусеницу на 6 вершинах с выделенной вершиной-корнем 4 и путь на $n-6$ вершинах $7, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем 7. Рассуждения легко продолжить, рассмотрев любую пару вершин i, j, $4 \leqslant i < j \leqslant n$. Существует ровно $j-i$ остовных 2-деревьевых лесов, в которых деревья имеют корни i и j: в первом случае одно дерево представляет собой граф-гусеницу на i вершинах с выделенной вершиной-корнем i, в то время как второе дерево является путем на вершинах $i+1, i+2, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем j; во втором случае получаем граф-гусеницу на $i+1$ вершине с выделенной вершиной-корнем i и путь на вершинах $i+2, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем j; …; в последнем случае получаем граф-гусеницу на $j-1$ вершине с выделенной вершиной-корнем i и путь на вершинах $j, \ldots, n$ с выделенной вершиной-корнем j.

Таким образом, фиксируя вершину $i=4$ и меняя вершину j от 5 до n, получим $1+2+\ldots+(n-4)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; фиксируя вершину $i=5$ и меняя вершину j от 6 до n, получим $1+2+\ldots+(n-5)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; фиксируя вершину $i=6$ и меняя вершину j от 7 до n, получим $1+2+\ldots+(n-6)$ остовных 2-деревьевых корневых лесов; …; наконец, фиксируя вершину $i=n-1$ и вершину $j=n$, получим ровно один остовной 2-деревьевый корневой лес. Непосредственный подсчет позволяет получить для числа 2-деревьевых корневых лесов графа T_n красивую формулу $1 \cdot (n-4) + 2 \cdot (n-5) + 3 \cdot (n-6) + \ldots + (n-4) \cdot 1$:

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + \ldots + (n-6) + (n-5) + (n-4) + \\ 1 + 2 + \ldots + (n-6) + (n-5) + \\ 1 + 2 + \ldots + (n-6) + \\ \qquad\qquad \cdots \\ \underline{1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ = 1 \cdot (n-4) + 2 \cdot (n-5) + 3 \cdot (n-6) + \ldots + (n-4) \cdot 1. \end{array}$$

Для получения явной формулы произведем формальное суммирование. При $k = n-3$ получим:

$$\sum_{i=1}^{k} i(k-i) = \sum_{i=1}^{k}(ik - i^2) = k\sum_{i=1}^{k} i - \sum_{i=1}^{k} i^2 =$$
$$= \frac{k^2(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k(k+1)(k-1)}{6} = \frac{k(k^2-1)}{6}.$$

Другими словами, вклад рассмотренных случаев в общий подсчет равен

$$\frac{(n-3)((n-3)^2-1)}{6}.$$

Фиксируя вершину $i = 1$ и меняя вершину j от 4 до n, получим

$$1 + 2 + \ldots + (n-3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}$$

остовных 2-деревьевых корневых лесов. Фиксируя вершину $i = 2$ и меняя вершину j от 1 до n, исключая 3, получим

$$1 + 2 + \ldots + (n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

остовных 2-деревьевых корневых лесов. То же количество получится при фиксации вершины $i = 3$ и последовательном рассмотрении в качестве вершины j всех вершин от 1 до n, исключая 2.

Наконец, фиксируя в качестве корней вершины 2, 3, получим ровно две возможности, уничтожая либо ребро $(1,2)$, либо ребро $(1,3)$; в каждом из рассмотренных случаев остовной 2-деревьевый лес состоит из изолированной вершины-корня (2 и 3, соответственно), и простого пути, содержащего все остальные верщины графа T_n.

Общий подсчет дает теперь величину

$$\frac{(n-3)((n-3)^2-1)}{6} + \frac{(n-3)(n-2)}{2} + 2 \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 2 =$$
$$= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6} + (n-2)(n-1) + 2 = \frac{(n-2)(n-1)(n+3)}{6} + 2 = \frac{n^3 - 7n + 18}{6}.$$

Рассуждения для неориентированного пути совершенно аналогичны первой части подсчета, проведенного при фиксированных i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, что дает величину $n(n^2-1)/6$. $\square$

Замечание. Для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$ существует $n(n-1)/2$ остовных 2-деревьевых сходящихся лесов. Для неориентированного цикла C_n существует $n^2(n^2-1)/12$ остовных 2-деревьевых корневых лесов (см. [3]).

4. Перечисление лесов, связанных с матрицей относительной лесной доступности. Матрица относительной лесной доступности графа G (орграфа Γ) на n вершинах определяется по закону

$$\frac{((f_{ij}))}{f},$$

где f_{ij} — количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ), в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j, а f — общее количество остовных корневых (сходящихся) лесов графа G (орграфа Γ) [3, 5, 6, 8]. В этом разделе приведены доказательства теорем, дающих формулы для числа соответствующих остовных конструкций в ориентированных и неориентированных путях и графах-гусеницах.

Теорема 3. *Для числа остовных лесов имеют место следующие утверждения*:

(i) *число остовных сходящихся лесов ориентированного пути* $\overrightarrow{P_n}$, $n \geqslant 2$, *равно* 2^{n-1};

(ii) *число остовных сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы* $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$, *равно* 2^{n-1};

(iii) *число остовных корневых лесов неориентированного пути* P_n, $n \geqslant 2$, *равно числу Фибоначчи* u_{2n};

(iv) *число остовных корневых лесов неориентированного графа-гусеницы* T_n, $n \geqslant 4$, *равно* $4u_{2n-3}$.

Доказательство. Для ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$, при получении остовного корневого сходящегося леса достаточно выбрать и уничтожить любое подмножество множества $\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 5,4\rangle, \dots, \langle n,n-1\rangle\}$ всех $n-1$ дуг данного орграфа. Корни сходящихся деревьев, представляющих собой подорграфы в полученном орграфе, будут определены однозначно. Поскольку число подмножеств множества из $n-1$ элемента равно 2^{n-1}, получим ровно 2^{n-1} остовных корневых сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$.

Для ориентированного пути рассуждения соверенно аналогичны.

Для неориентированного графа-гусеницы T_n, $n \geqslant 4$, при получении остовного корневого леса воспользуемся соображениями индукции и представленными выше свойствами чисел Фибоначчи.

Для $n = 4$ имеем ровно 20 (т.е. $4u_5 = 4u_{2\cdot 4-3}$) корневых лесов графа T_n: 4 леса содержат по одному дереву (выбираем только корень из четырех имеющихся вершин 1, 2, 3, 4); 9 лесов содержат по два дерева (одно из которых — изолированная вершина 2, 3 или 4, а другое — путь на остальных трех вершинах; выбор корня дает три возможности для каждого случая изолированной вершины, всего 9 вариантов); 6 лесов содержат по 3 дерева (две изолированные вершины и путь на остальных двух вершинах; сохранение одного из трех ребер даст три варианта, каждый из которых будет дублирован тем или иным выбором корня в пути на двух вершинах); наконец, один лес содержит 4 дерева, каждое из которых представляет собой изолированную вершину.

Для $n = 5$ имеем ровно 52 (т.е. $4u_7 = 4u_{2\cdot 5-3}$) корневых леса графа T_n. Они получаются следующим образом. Изолированная вершина-корень 5 «расширяет» предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_5 = 20$ возможностей. Вершина 5, связанная с корнем 4, еще раз «расширяет» предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_5 = 20$ возможностей. Наконец, вершина 5, рассматриваемая как корень и связанная ребром с вершиной 4, дает еще 12 случаев: уничтожив ребро $(1,4)$, получаем возможность построить 8 лесов, модифицируя полученный путь на вершинах 2, 1, 3 (три леса, состоящие из одного дерева, 4 леса, состоящие из двух деревьев и 1 лес, состоящий из трех деревьев); сохраняя ребро $(1,4)$, получим 4 возможных леса, сохраняя или уничтожая ребра $(1,2)$ и $(3,1)$ (оба сохранены, оба уничтожены, одно их двух сохранено). Замечая, что $8 = 4 \cdot u_3$, в то время как $4 = 4 \cdot u_1$, получаем для $n = 5$ величину $4(u_5 + u_5 + u_3 + u_1)$. Пользуясь свойствами чисел Фибоначчи, можем утверждать, что $u_5 + u_3 + u_1 = u_6$ и, следовательно,

$$4(u_5 + u_5 + u_3 + u_1) = 4(u_5 + u_6) = 4u_7 = 4_{2\cdot 5-3}.$$

Для доказательства общего случая заметим, что

$$u_{2n} = u_{2n-1} + u_{2n-3} + \ldots + u_3 + u_1.$$

Воспользуемся этой формулой. Получая граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n+1$, мы должны рассмотреть следующие возможности.

Если $n+1$ — изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n+1$), то получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n, другими словами, $4u_{2n-3}$.

Если вершина $n+1$ связана с вершиной n ребром и не является корнем, то вновь получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n, другими словами, $4u_{2n-3}$.

Если $n+1$ связана с n ребром и является корнем, то получаем следующие случаи.

Дерево (путь) на вершинах $n+1$, n с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-1$ вершине $n-1,\dots,2,1$ (т.е. любой корневой лес графа T_{n-1}), всего $4u_{2(n-1)-3}$ возможностей. Дерево (путь) на вершинах $n+1$, n, $n-1$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-2$ вершинах $n-2,\dots,2,1$ (т.е. любой корневой лес графа T_{n-2}), всего $4u_{2(n-2)-3}$ возможностей. Дерево (путь) на вершинах $n+1$, n, $n-1$, $n-2$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на $n-3$ вершинах $n-3,\dots,2,1$ (т.е. любой корневой лес графа T_{n-3}), всего $4u_{2(n-3)-3}$ возможностей ... Дерево (путь) на вершинах $n+1,n,n-1,\dots,5$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на 4 вершинах 1, 2, 3, 4 (т.е. любой корневой лес графа T_4), всего $4u_{2\cdot4-3}=4u_5$ возможностей. Дерево (путь) на вершинах $n+1,n,n-1,\dots,5,4$ с корнем $n+1$ и любой корневой лес на вершинах 2, 1, 3 (т.е. любой корневой лес графа P_3), всего $8=4u_3$ возможностей. Наконец, дерево на вершинах $n+1,n,n-1,\dots,5,4,1$ с корнем $n+1$, к которому, возможно, «добавлены» вершины 2 и 3 (обе, одна или не одной; в первом случае получаем лес, состоящий из одного дерева, во втором и третьем — лес из двух деревьев, одно из которых представляет собой изолированную вершину, в последнем — лес из трех деревьев, два из которых представляют собой изолированные вершины 2 и 3), всего $4=4u_1$ возможности.

Данный пересчет дает число $4u_{2(n+1)-3}$ корневых остовных лесов графа T_{n+1}:

$$4u_{2n-3}+4u_{2n-3}+4u_{2(n-1)-3}+\ldots+4u_5+4u_3+4u_1=4(u_{2n-3}+u_{2n-2})=4u_{2n-1}=4u_{2(n+1)-3}.$$

Для неориентированного пути рассуждения аналогичны. Учитывая, что для $n=1$ имеем ровно один (т.е. $u_2=1$) корневой лес графа P_n, в то время как для $n=2$ имеем ровно три (т.е. $u_4=3$) корневых леса графа P_n, построения индукционного шага сводятся к нахождению суммы

$$2u_{2n}+u_{2(n-1)}+\ldots+u_4+u_2+1=u_{2(n+1)}.$$

Теорема полностью доказана. □

Замечание. Для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$ существует 2^n-1 остовных сходящихся лесов. Для неориентированного цикла C_n существует $u_{2n+1}+u_{2n+3}-2$ остовных корневых лесов [3,5].

Теорема 4. *Для числа остовных лесов имеют место следующие утверждения*:

(i) *число f_{ij} остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, $n\geqslant 2$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j, равно*:

$$f_{ii}=\begin{cases}2^{n-1}, & i=1,\\ 2^{n-2}, & 2\leqslant i\leqslant n;\end{cases}\qquad f_{ij}=\begin{cases}2^{n-i}, & j=1,\\ 2^{n-i+j-2}, & 2\leqslant j<i\leqslant n,\\ 0, & 1\leqslant i<j\leqslant n;\end{cases}$$

(ii) *число f_{ij} остовных сходящихся лесов ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$, $n\geqslant 4$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j, равно*:

$$f_{ii}=\begin{cases}2^{n-1}, & i=1,\\ 2^{n-2}, & 2\leqslant i\leqslant n;\end{cases}\qquad f_{ij}=\begin{cases}2^{n-2}, & j=1,\ i=2,3,\\ 2^{n-i+2}, & j=1,\ i=4,\dots,n,\\ 0, & j=2,3,\ i=1,4,\dots,n,\\ 2^{n-i+j-2}, & 4\leqslant j<i\leqslant n,\\ 0, & 1\leqslant i<j\leqslant n;\end{cases}$$

(iii) *число f_{ij} остовных корневых лесов неориентированного пути P_n, $n\geqslant 2$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j, равно $u_{2\min(i,j)-1}\cdot u_{2(n+1-\max(i,j))-1}$, $i,j=1,\dots,n$;*

(iv) *число f_{ij} остовных корневых лесов неориентированного графа-гусеницы T_n, $n\geqslant 4$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем j, равно*:

$$f_{ii}=\begin{cases}4u_{2n-5}, & i=1,\\ u_{2n-1}-u_{2n-6}, & i=2,3,\\ 4u_{2k-4}\cdot u_{2(n-k)+1}, & 4\leqslant i\leqslant n;\end{cases}\qquad f_{ij}=4u_{2\max(i,j)-2}\cdot u_{2(n-\min(i,j))+1},\quad 4\leqslant i\neq j\leqslant n.$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство теоремы для ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$, $n \geqslant 4$.

Рассматривая величину f_{11}, нетрудно убедиться в том, что в любом сходящемся остовном лесе ориентированного графа-гусеницы вершина 1 всегда принадлежит дереву, сходящемуся к вершине 1. Таким образом, f_{11} равно общему числу остовных сходящихся лесов орграфа $\overrightarrow{T_n}$, т.е. 2^{n-1}.

Рассмотрим величину f_{ii}, $i \neq 1$. Чтобы получить дерево, сходящееся к i, нужно обязательно отбросить дугу $\langle i, i-1\rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного графа-гусеницы, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к i, необходимо, после уничтожения дуги $\langle i, i-1\rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества $\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \dots, \langle i-1, i-2\rangle, \langle i+1, i\rangle, \dots, \langle n, n-1\rangle\}$ оставшихся $n-2$ дуг ориентированного графа $\overrightarrow{T_n}$. Это можно сделать 2^{n-2} способами.

Рассмотрим величину f_{i1}, $i \neq 1$. Если $i = 2$, то для получения дерева, содержащего 2 и сходящегося к 1, нужно сохранить дугу $\langle 2,1\rangle$ между 2 и 1. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного графа-гусеницы, в которых вершина 2 принадлежит дереву, сходящемуся к 1, необходимо, сохранив дугу $\langle 2,1\rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества оставшихся $n-2$ дуг ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$; это можно сделать 2^{n-2} способами. Те же рассуждения имеют место, если $i = 3$. Чтобы получить дерево, содержащее i, $4 \leqslant i \leqslant n$, и сходящееся к 1, нужно сохранить все дуги $\langle 4,1\rangle, \langle 5,4\rangle, \dots, \langle i, i-1\rangle$ между 1 и i. Остальные $n-i+2$ дуг можно отбрасывать или оставлять произвольным образом.

Это можно сделать 2^{n-i+2} способами.

Рассмотрим величину f_{ij}, $4 \leqslant j < i \leqslant n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и сходящееся к j, нужно сохранить все дуги $\langle j+1, j\rangle, \langle j+2, j+1\rangle, \dots, \langle i, i-1\rangle$, между j и i. Кроме того, выбор корня j требует уничтожения дуги $\langle j, j-1\rangle$. Остальные дуги можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Таким образом, для получения всех сходящихся остовных лесов ориентированного пути, в которых вершина i принадлежит дереву, сходящемуся к j, $4 \leqslant j < i \leqslant n$, необходимо, сохранив дуги $\langle j+1, j\rangle, \langle j+2, j+1\rangle, \dots, \langle i, i-1\rangle$ и уничтожив дугу $\langle j, j-1\rangle$, выбрать и отбросить любое подмножество множества оставшихся $n-(i-j)-2$ дуг ориентированного графа-гусеницы $\overrightarrow{T_n}$. Это можно сделать $2^{n-(i-j)-2}$ способами.

Рассматривая величину f_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, нетрудно убедиться в том, что она равна нулю: деревьев, содержащих i и сходящихся к j, в данном случае не существует. Аналогичным образом не существует деревьев, содержащих $i = 1, 3, 4, \dots, n$ и сходящихся к 2, как и деревьев, содержащих $i = 1, 2, 4, \dots, n$ и сходящихся к 3.

Рассуждения для ориентированного пути абсолютно аналогичны, если проводить их с учетом более простой структуры рассматриваемого графа.

Рассмотрим доказательство теоремы для неориентированного графа-гусеницы T_n, $n \geqslant 4$.

Рассмотрим величину f_{11}. Чтобы получить дерево, содержащее 1 и имеющее корень 1, ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа.

Для $n = 4$ имеем ровно 8 (т.е. $4u_3 = 4u_{2\cdot 4-5}$) корневых лесов графа T_n, один из корней которого равен 1: рассматривая путь на 3 вершинах 2, 1, 3, получим из него 4 корневых леса, одним из корней которого является 1 (один, содержащий одно дерево, два — содержащих два дерева и один — содержащий три дерева); добавим вершину 4; изолированная вершина-корень 4 «расширяет» предыдущий случай, давая 4 возможности; вершина 4, связанная с корнем 1, еще раз «расширяет» предыдущий случай, давая 4 возможности.

Для $n = 5$ имеем ровно 20 (т.е. $4u_5 = 4u_{2\cdot 5-5}$) корневых лесов графа T_n, один из корней которого равен 1. Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 «расширяет» предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_3 = 8$ возможностей. Вершина 5, связанная с вершиной 4 и не являющаяся корнем, еще раз «расширяет» предыдущий случай $n = 4$, давая $4u_3 = 8$ возможностей. Наконец, вершина 5, рассматриваемая как корень и связанная ребром с вершиной 4, дает еще 4 случая:

уничтожив ребро $(1,4)$, получаем возможность построить 4 леса, одним из корней которого является 1, так, как описано выше.

Для доказательства общего случая заметим, что

$$u_{2n} = u_{2n-1} + u_{2n-3} + \ldots + u_3 + u_1.$$

Воспользуемся этой формулой. Получая граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n+1$, должны рассмотреть следующие возможности.

Если $n+1$ — изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n+1$), то получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n, другими словами, $4u_{2n-5}$.

Если вершина $n+1$ связана с вершиной n ребром и не является корнем, то вновь получаем ровно столько остовных лесов, сколько лесов было найдено для T_n, другими словами, $4u_{2n-5}$.

Если вершина $n+1$ связана с вершиной n ребром и является корнем, то, отбросив ребро $(i, i+1)$, $4 \leqslant i \leqslant n-1$, получим дерево на i вершинах с корнем 1 слева, которое можно превращать в лес любым из u_{2i-5} способов, и путь на $n-i$ вершинах справа с корнем $n+1$. Если слева уберем ребро $(1,4)$, получим слева простой путь на 3 вершинах, который даст нам $4 = 4u_1$ возможности. Пробегая по всем ребрам $(n-1,n), \ldots, (4,5), (1,4)$, получим

$$4(u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2(n-1)-5})$$

возможностей.

Суммируя, получим следующий результат:

$$\begin{aligned} 4(u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2(n-1)-5}) + 4u_{2n-5} + 4u_{2n-5} = \\ = 4(u_1 + u_3 + \ldots + u_5 + u_{2n-5}) + 4u_{2n-5} = 4(u_{2n-4} + u_{2n-5}) = 4u_{2n-3} = 4u_{2(n+1)-5}. \end{aligned}$$

Рассмотрим величину f_{22}. Чтобы получить дерево, содержащее 2 и имеющее корень 2, ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа.

Для $n = 4$ имеем ровно 12 (т.е. $u_7 - u_2$) корневых лесов графа T_n, один из корней которого равен 2: рассматривая путь на 3 вершинах 2, 1, 3, получим из него $5 = u_5$ корневых лесов, один из корней которых равен 2 (один лес, представляющий собой дерево, три леса из двух деревьев и один лес из трех деревьев); добавим вершину 4; изолированная вершина-корень 4 «расширяет» предыдущий случай, давая $5 = u_5$ возможностей; вершина 4, связанная с вершиной 1 и не являющаяся корнем, вновь «расширяет» предыдущий случай, давая $5 = u_5$ возможностей; наконец, вершина-корень 4, связанная с вершиной 1, дает $2 = u_2$ возможности (один лес, содержащий два дерева, и один — содержащий три дерева).

Для $n = 5$ имеем ровно 31 (т.е. $u_9 - u_4$) корневых леса графа T_n, один из корней которого равен 2. Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 дает $12 = u_7 - u_2$ возможностей. Вершина 5, связанная с вершиной 4 и не являющаяся корнем, вновь дает $12 = u_7 - u_2$ возможностей; наконец, вершина-корень 5, связанная с вершиной 4, дает $5 = u_5$ возможностей, если уничтожено ребро $(1,4)$, и $2 = u_2$ возможности, если ребро $(1,4)$ сохранено.

Для доказательства общего случая получим граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n+1$, рассмотрев следующие возможности.

Если $n+1$ — изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n+1$), то получаем ровно столько остовных лесов, сколько их существует для T_n, другими словами, $u_{2n-1} - u_{2n-6}$.

Если вершина $n+1$ связана с вершиной n ребром и не является корнем, то, отбросив ребро $(i, i+1)$, $4 \leqslant i \leqslant n-1$, получим дерево на i вершинах слева, которое можно превращать в лес, содержащий корень 2, любым из $u_{2i-1} - u_{2i-6}$ способов, и путь на $n-i$ вершинах справа с корнем $n+1$. Если уберем ребро $(1,4)$, то получим слева простой путь на 3 вершинах, который даст нам $5 = u_5$ возможностей. Если ребро $(1,4)$ сохранено, то слева получим $2 = u_3$ возможностей, уничтожив ребро $(1,2)$ и произвольным образом обращаясь с ребром $(1,3)$. Пробегая по всем ребрам $(n-1,n), \ldots, (4,5), (1,4)$, получим

$$u_3 + u_5 + (u_7 - u_2) + (u_9 - u_4) + \ldots + (u_{2(n-1)-1} - u_{2(n-1)-6})$$

возможностей.

Суммируя, получим следующий результат:

$$u_3+u_5+(u_7-u_2)+(u_9-u_4)+\ldots+(u_{2(n-1)-1}-u_{2(n-1)-6})+2(u_{2n-1}-u_{2n-6})=$$
$$=(u_3+\ldots+u_{2n-1})-(u_2+u_4+\ldots+u_{2n-6})+u_{2n-1}-u_{2n-6}=$$
$$=u_{2n}-1-(u_{2n-5}-1)+u_{2n-1}-u_{2n-6}=u_{2n}+u_{2n-1}-(u_{2n-5}+u_{2n-6})=$$
$$=u_{2n+1}-u_{2n-4}=u_{2(n+1)-1}-u_{2(n+1)-6}.$$

Для величины f_{33} расссуждения абсолютно аналогичны.

Рассмотрим величину f_{nn}. Чтобы получить дерево, содержащее n и имеющее корень n, ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа.

Для $n=4$ имеем ровно 12 (т.е. $4u_4=4u_{2\cdot4-4}$) корневых лесов графа T_n, один из корней которого равен n: рассматривая путь на 3 вершинах 2, 1, 3, получим из него $8=u_6=u_{2\cdot3}$ корневых лесов; добавим вершину 4; изолированная вершина-корень 4 «расширяет» предыдущий случай, давая 8 возможностей; вершина-корень 4, связанная с вершиной 1, дает 4 возможности (один лес, содержащий одно дерево, два — содержащих два дерева и один — содержащий три дерева).

Для $n=5$ имеем ровно 32 (т.е. $4u_6=4u_{2\cdot5-4}$) корневых леса графа T_n, один из корней которого равен n. Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 дает $20=4u_5=4u_{2\cdot4-3}$ возможностей. Вершина-корень 5, связанная с вершиной 4, не являющейся корнем, дает $8=4u_3$ возможностей, если уничтожено ребро $(1,4)$, и $4=4u_1$ возможности, если ребро $(1,4)$ сохранено.

Для доказательства общего случая заметим, что

$$u_{2n}=u_{2n-1}+u_{2n-3}+\ldots+u_3+u_1.$$

Воспользуемся этой формулой. Получая граф T_{n+1} добавлением к T_n новой вершины $n+1$, должны рассмотреть следующие возможности.

Если $n+1$ — изолированная вершина (и, следовательно, дерево с корнем $n+1$), то получаем ровно столько остовных лесов, сколько их существует для T_n, другими словами, $4u_{2n-3}$.

Если вершина-корень $n+1$ связана с вершиной n ребром, то, отбросив ребро $(i,i+1)$, $4\leqslant i\leqslant n-1$, получим дерево на i вершинах слева, которое можно превращать в лес любым из u_{2i-3} способов, и путь на $n-i$ вершинах справа с корнем $n+1$. Если уберем ребро $(1,4)$, то получим слева простой путь на 3 вершинах, который дает $8=4u_3$ возможностей. Если ребро $(1,4)$ сохранено, то слева получим $4=4u_1$ возможностей, произвольным образом обращаясь с ребрами $(2,1)$ и $(3,1)$.

Пробегая по всем ребрам $(n,n-1),\ldots,(4,5),(1,4)$, получим

$$4(u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2(n-1)-3})$$

возможностей. Суммируя, получим следующий результат:

$$4(u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2(n-1)-3})+4u_{2n-3}=$$
$$=4(u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2(n-1)-3}+u_{2n-3})=4u_{2n-2}=4u_{2(n+1)-4}.$$

Рассмотрим величину f_{kk}, $4\leqslant k\leqslant n-1$. Чтобы получить дерево, содержащее k и имеющее корень k, ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом. Проведем рассуждения индукцией по числу вершин n нашего графа.

Для $n=4$ такого k не существует.

Для $n=5$ имеем $k=4$. В этом случае имеем ровно 24 (т.е. $4u_4u_3$) корневых леса графа T_n, один из корней которого равен 4. Они получаются так. Изолированная вершина-корень 5 дает $12=4u_4$ возможностей. Вершина 5, связанная с вершиной 4 и не являющаяся корнем, также дает $12=4u_4$ возможностей.

Для доказательства общего случая рассмотрим граф T_n. В этом случае $k=4,5,\ldots,n-1$. Зафиксировав $4\leqslant k\leqslant n-1$, рассмотрим следующие возможности.

Отбросив ребро $(k,k+1)$, получим дерево на k вершинах слева, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, и путь на $n-k$ вершинах справа, который можно первращать в лес любым из $u_{2(n-k)}$ способов. Сохранив ребро $(k,k+1)$ и отбросив ребро

$(k+1,k+2)$, получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с «дополнительным» ребром $(k,k+1)$, не влияющим на рассмотрение, и путь на $n-k-1$ вершинах справа, который можно превращать в лес любым из $u_{2(n-k-1)}$ способов. Сохранив ребра $(k,k+1)$, $(k+1,k+2)$ и отбросив ребро $(k+2,k+3)$, получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с «дополнительными» ребрами $(k,k+1)$, $(k+1,k+2)$, не влияющими на рассмотрение, и путь на $n-k-2$ вершинах справа, который можно превращать в лес любым из $u_{2(n-k-2)}$ способов… Сохраняя ребра $(k,k+1),\dots,(n-2,n-1)$ и отбрасывая ребро $(n-1,n)$, получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с «дополнительными» ребрами $(k,k+1),\dots,(n-2,n-1)$, не влияющими на рассмотрение, и путь на одной вершине справа, который можно превратить в лес ровно одним (формально, u_2) способом. Сохраняя все ребра $(k,k+1),\dots,(n-1,n)$, получим слева дерево на k вершинах, которое можно превращать в лес с корнем k любым из $4u_{2k-4}$ способов, с «дополнительными» ребрами $(k,k+1),\dots,(n-1,n)$, не влияющими на рассмотрение. Пробегая таким образом по всем ребрам $(n-1,n),\dots,(k,k+1)$, и учитывая, что числа «правых» и «левых» воозможностей независимы и, следовательно, перемножаются, получим в итоге

$$4u_{2k-4}(1+u_2+\ldots+u_{2(n-k-1)}+u_{2(n-k)})=4u_{2k-4}u_{2(n-k)+1}$$

возможностей.

Рассмотрим величину f_{ij}, $4\leqslant i<j\leqslant n$. Чтобы получить дерево, содержащее i и имеющее корень j, нужно обязательно сохранить все $j-i$ ребер между j и i. Остальные ребра можно отбрасывать или оставлять произвольным образом.

Посмотрим, какие возможности можем получить, отбрасывая те или иные ребра «справа» от вершины j.

Если справа от вершины j ничего не убираем, то в качестве искомого леса получаем дерево с корнем j — путь на вершинах $i,i+1,\dots,j,\dots,n$ с корнем j; единственная возможность, 1. Если справа уберем ребро $(n-1,n)$ и сохраним все ребра $(j,j+1)$, $(j+1,j+2)$,…, $(n-2,n-1)$, получим справа единственное дерево на одной вершине n с корнем n; единственная возможность, $1=u_2$. Если справа уберем ребро $(n-2,n-1)$ и сохраним все ребра $(j,j+1)$, $(j+1,j+2),\dots$, $(n-2,n-1)$, получим справа две вершины $n-1$, n; на них можем построить любые остовные корневые леса, $3=u_{2\cdot 2}$ возможностей. Если, двигаясь по этому пути, уберем ребро $(j,j+1)$, то получим справа $n-j$ вершин $j+1,\dots,n$; на них можем построить любые остовные корневые леса, $u_{2(n-j)}$ возможностей. Таким образом, число «правых» преобразований равно $u_{2(n-j)+1}$:

$$1+u_2+u_4+\ldots+u_{2(n-j)}=u_{2(n-j)+1}.$$

Посмотрим, какие возможности можно получить, отбрасывая те или иные ребра «слева» от вершины i.

Если слева от вершины i ничего не убираем, то в качестве искомого леса получаем дерево с корнем j — граф на j вершинах $1,2,\dots,i,\dots,j$ с корнем j; единственная возможность, 1. Если уберем ребро $(i-1,i)$ и сохраним все ребра $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1),\dots$, $(i-2,i-1)$, то получим слева граф на $i-1$ вершине, на которых можно построить любые остовные корневые леса, $4u_{2(i-1)-3}$ возможностей. Если, двигаясь по указанному пути, уберем ребро $(4,5)$ и сохраним все ребра $(5,6),\dots,(i-1,i)$, получим слева граф на 4 вершинах, из которого можно строить любые корневые леса, всего $4u_5$ возможностей. Если уберем ребро $(1,4)$ и сохраним все ребра $(4,5),\dots,(i-1,i)$, получим слева простой путь на 3 вершинах, на которых можем построить любые остовные корневые леса, всего $u_{2\cdot 3}=4u_3$ возможностей. Если слева ребро $(1,4)$ сохранено, как и все ребра $(4,5),\dots,(i-1,i)$, то получим $4=4u_1$ возможностей, произвольным образом обращаясь с ребрами $(2,1)$ и $(3,1)$.

Таким образом, число «левых» преобразований равно $4u_{2(i-2)}$:

$$4(u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2(i-2)-3}+u_{2(i-1)-3})=4u_{2(i-1)-2}=u_{2(i-2)}.$$

Поскольку «правые» и «левые» операции осуществляются независимо друг от друга, то для получения общего числа остовных деревьев числа таких операций необходимо перемножить, что и даст искомый результат.

Для неориентированного пути рассуждения аналогичны.

Заметим, что аналогичная схема рассуждений позволяет нам получить все возможные значения для величины f_{ij} в случае неориентированного графа-гусеницы, не указанные в формулировке теоремы. Именно,

$$f_{12} = f_{13} = f_{21} = f_{31} = 2u_{2(n-3)+1}, \quad f_{14} = f_{41} = 4u_{2(n-4)+1},$$
$$f_{24} = f_{42} = f_{34} = f_{43} = 2u_{2(n-4)+1}.$$

Мы не рассматриваем доказательства этих утверждений лишь в целях сохранения компактности текста статьи. □

Замечание. Для ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$ имеют место соотношения

$$f_{ij} = 2^{(j-i)-1}, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$
$$f_{ij} = 2^{n-(i-j)-1}, \quad 1 \leqslant j < i \leqslant n.$$

Для неориентированного цикла C_n имеют место соотношения

$$f_{ij} = u_{2|j-i|} + u_{2(n-|j-i|)}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

(см. [3, 5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1978.
2. *Деза Е. И., Мханна Б.* О специальных свойствах некоторых квазиметрик// Чебышев. сб. — 2020. — *21*, № 1. — С. 145–164.
3. *Деза Е. И., Мханна Б.* Вопросы перечисления остовных лесов некоторых графов// Чебышев. сб. — 2021. — *22*, № 3. — С. 77–99.
4. *Chebotarev P.* A graph theoretic interpretation of the mean first passage times/ `arXiv: math/0701359 [math.PR]`.
5. *Chebotarev P.* Spanning forest and the Golden ratio// Discr. Appl. Math. — 2008. — *156*. — P. 813–821.
6. *Chebotarev P., Agaev R.* Forest matrices around the Laplacian matrix// Lin. Alg. Appl. — 2002. — *356*. — P. 253–274.
7. *Chebotarev P., Deza E.* Hitting time quasi-metric and its forest representation// Optim. Lett. — 2020. — *14*. — P. 291–307.
8. *Chebotarev P. Yu., Shamis E. V.* On proximity measures for graph vertices// Automat. Remote Control. — 1998. — *59*. — P. 1443–1459.
9. *Deza M., Deza E., Vidali J.* Cones of weighted and partial metrics// Proc. Int. Conf. on Algebra, 2010. — Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2012. — P. 177–197.
10. *Kirkland S. J., Neumann M.* Group Inverses of M-Matrices and Their Applications. — CRC Press, 2012.
11. *Leighton T., Rivest R. L.* The Markov chain tree theorem. Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249. — Cambridge, Massachusetts: Laboratory of Computer Science, MIT, 1983.
12. *Meyer C. D., Jr.* The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains// SIAM Rev. — 1975. — *17*. — P. 443–464.

Деза Елена Ивановна
Московский педагогический государственный университет
E-mail: `elena.deza@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 63–70
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-63-70

УДК 517.95

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА—ЛЫКОВА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

© 2023 г. **М. А. КЕРЕФОВ, С. Х. ГЕККИЕВА, Б. М. КЕРЕФОВ**

Аннотация. Исследованы краевые задачи для неоднородного уравнения влагопереноса с переменными коэффициентами с дробной по времени производной Капуто. С помощью метода энергетических неравенств получены априорные оценки для решения первой и третьей краевых задач, из которых следует единственность решения рассматриваемых задач и их устойчивость по правой части и начальным данным.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Аллера—Лыкова, априорная оценка, дифференциальное уравнение дробного порядка, регуляризованная дробная производная, производная Капуто.

FIRST BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE ALLER–LYKOV EQUATION WITH THE CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVE

© 2023 **M. A. KEREFOV, S. Kh. GEKKIEVA, B. M. KEREFOV**

Abstract. In this paper, we examine boundary-value problems for the inhomogeneous humidity transport equation with variable coefficients and the Caputo fractional derivative in time. Using the method of energy inequalities, we obtain a priori estimates for solutions of the first and third boundary-value problems, which imply the uniqueness and stability of solutions.

Keywords and phrases: boundary-value problem, Aller–Lykov equation, a priori estimate, fractional differential equation, regularized fractional derivative, Caputo derivative.

AMS Subject Classification: 35Q99

1. Введение. В последние годы в связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления агроэкосистемой, например, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги, существенно повысился интерес к дифференциальным уравнениям дробного порядка [14, 17, 19]. Исследователи при этом концентрируют свое внимание на возможности отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов и т. д. В связи с этим возникает качественно новый класс дифференциальных уравнений состояния и переноса с дробной производной, являющихся основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной структурой и памятью [6, 16, 18, 27]. Начально-краевые задачи в ограниченных областях для диффузионных и диффузионно-волновых уравнений дробного порядка решались методом разделения переменных [5, 22, 26], методами интегральных преобразований [25], с использованием принципов максимума и априорных оценок [3, 8, 12, 21], а также численными методами [7, 23, 24]. Настоящая работа посвящена исследованию уравнения влагопереноса типа Аллера—Лыкова с переменными коэффициентами с дробной производной Капуто

$$A_1\partial_{0t}^{\alpha+1}u + \partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t), \qquad (1)$$

где ∂_{0t}^{γ} — оператор дробного дифференцирования Капуто, $0 < \alpha < 1$, A_1, $A = \mathrm{const} > 0$. Такого рода уравнения с дробными производными Римана—Лиувилля рассматривались в работах авторов и решались методом разделения переменных, методом априорных оценок. Среди последних отметим работы [2, 9, 13], в которых исследовано уравнение влагопереноса Аллера—Лыкова с дробной по времени производной с различного рода граничными условиями. В [4] доказано существование и единственность решения первой краевой задачи для уравнения Аллера—Лыкова с постоянными коэффициентами, в [10] исследована вторая краевая задача. В [11] получены решения системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами, возникающих при использовании метода прямых, также найдены априорные оценки, из которых следует сходимость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами дробного порядка.

2. Вспомогательные сведения. Оператор дробного интегродифференцирования в смысле Римана—Лиувилля D_{0y}^{γ} порядка γ определяется следующим образом (см. [17]):

$$D_{ay}^{\gamma}g(y) = \frac{\operatorname{sign}(y-a)}{\Gamma(-\gamma)}\int\limits_a^y \frac{g(y)\,ds}{|y-s|^{\gamma+1}}, \quad \gamma < 0;$$

при $\gamma \geqslant 0$ оператор D_{0y}^{γ} определяется соотношением

$$D_{ay}^{\gamma}g(y) = \operatorname{sign}(y-a)\frac{d}{dy}D_{0y}^{\gamma-1}g(y), \quad \gamma \geqslant 0.$$

Дробная производная Капуто $\partial_{0t}^{\gamma}g(y)$ порядка γ определяется формулой (см. Kerefov:bib:01)

$$\partial_{ay}^{\gamma}g(y) = \operatorname{sign}^n(y-a)\,D_{0y}^{\gamma-n}g^{(n)}(y), \quad n-1 < \gamma \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и, в частности, связана с производной Римана—Лиувилля соотношением

$$D_{ay}^{\gamma}g(y) = \frac{g(a)(y-a)^{\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} + \partial_{ay}^{\gamma}g(y), \quad g(y) \in L[a,b], \quad \gamma \in (0,1).$$

В дальнейшем нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1 (см. [1]). *Для любой абсолютно непрерывной на $[0,T]$ функции $g(y)$ справедливо неравенство*

$$g(y)\partial_{0y}^{\alpha}g(y) \geqslant \frac{1}{2}\partial_{0y}^{\alpha}g^2(y), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Лемма 2 (см. [1]). *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $g(y)$ удовлетворяет для почти всех y из $[0,T]$ неравенству*

$$\partial_{0y}^{\alpha}g(y) \leqslant c_1 g(y) + c_2(y), \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $c_1 > 0$, $c_2(y)$ — суммируемая на $[0,T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$g(y) \leqslant y(0)E_{\alpha}\big(c_1 y^{\alpha}\big) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}\big(c_1 y^{\alpha}\big)D_{0y}^{-\alpha}c_2(y),$$

где

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}, \quad E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}$$

— функции Миттаг-Леффлера.

Лемма 3 (см. [15, с. 152]). *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0,T]$ неравенству*

$$\frac{dy}{dt} \leqslant c_1(t)y(t) + c_2(t),$$

где $c_i(t)$ — суммируемые на $[0,T]$ неотрицательные функции. Тогда

$$y(t) \leqslant \exp\left\{\int_0^t c_1(\tau)d\tau\right\}\left[y(0) + \int_0^t c_2(\xi)\exp\left(-\int_0^\xi c_1(\tau)d\tau\right)d\xi\right] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\int_0^t c_1(\tau)d\tau\right\}\left[y(0) + \int_0^t c_2(\tau)d\tau\right].$$

В дальнейшем будем предполагать существование решения, рассматриваемой в работе задачи. Далее M_i, $i = 1, 2, \ldots$ положительные постоянные, зависящие исключительно только от входных данных рассматриваемой задачи.

Скалярное произведение и норма определяется следующим образом:

$$(a,b) = \int_0^l a(x)b(x)\,dx, \quad (a,a) = \|a\|_0^2, \quad a,b \in [0,l].$$

Исследование уравнения (1) будем проводить методом априорных оценок.

3. Постановка первой краевой задачи и формулировка результата. В области $\Omega_T = \big\{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\big\}$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1) с краевыми условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_t(x,0) = \nu(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ — заданные функции.

Теорема 1. *Если*

$$k_t(x,t),\ q_t(x,t),\ f(x,t) \in C\big(\overline{\Omega}_T\big), \quad \nu(x) \in C[0,l], \quad \tau(x) \in C^1[0,l],$$
$$0 < c_1 \leqslant k(x,t),\ \eta(x),\ r(x,t),\ q(x,t) \leqslant c_2, \quad \big|k_t(x,t),\ q_t(x,t)\big| \leqslant c_3$$

всюду на $\overline{\Omega}_T$, то для решения задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2 + \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leqslant M\left(\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|\tau(x)\|_{w_2^2(0,l)}^2 + \|\nu(x)\|_0^2\right), \tag{4}$$

где $\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2$.

Доказательство. Для вывода априорной оценки умножим уравнение (1) скалярно на u_t:

$$\big(A_1\partial_{0t}^{\alpha+1}u,\ u_t\big) + \big(\partial_{0t}^{\alpha}u,\ u_t\big) - \big((ku_x)_x,\ u_t\big) - \big(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x,\ u_t\big) - \big(ru_x,\ u_t\big) + \big(qu,\ u_t\big) = \big(f,\ u_t\big). \tag{5}$$

Преобразуем слагаемые тождества (5), учитывая лемму 1 и граничные условия (2):

$$\big(A_1\partial_{0t}^{\alpha+1}u,\ u_t\big) = A_1\int_0^l \frac{u_t}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx = A_1\int_0^l u_t\partial_{0t}^{\alpha}u_t\,dx \geqslant \frac{A_1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u_t\|_0^2,$$

$$\big((ku_x)_x,\ u_t\big)=\int\limits_0^l u_t(ku_x)_x dx = u_t k u_x(x,t)\Big|_0^l-\int\limits_0^l k u_{xt}u_x\,dx=$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l k u_x^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^l k_t u_x^2(x,t)\,dx,$$

$$\big(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x,\ u_t\big)=u_t\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)\Big|_0^l-\int\limits_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x\,dx=-\int\limits_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x\,dx,$$
$$\int\limits_0^l q(x,t)u(x,t)u_t(x,t)dx=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l q(x,t)u^2(x,t)\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^l q_t(x,t)u^2(x,t)\,dx,$$
$$\big(ru_x,\ u_t\big)\leqslant\frac{c_2}{4\varepsilon}\|u_x\|_0^2+c_2\varepsilon\|u_t\|_0^2,\quad \big(f,\ u_t\big)\leqslant\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\varepsilon\|u_t\|_0^2.$$

Последние два неравенства получены при помощи неравенства Коши—Буняковского и ε-неравенства (см. [20]):

$$\big(f,\ u_t\big)\leqslant\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\varepsilon\|u_t\|_0^2,\quad \varepsilon>0.$$

С учетом полученных неравенств из (5) находим

$$\frac{A_1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u_t\|_0^2+\big(\partial_{0t}^{\alpha}u,\ u_t\big)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^l k u_x^2(x,t)dx+\int\limits_0^l q(x,t)u^2(x,t)dx\right)+\int\limits_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{c_2}{4\varepsilon}+\frac{c_3}{2}\right)\|u_x\|_0^2+(c_2\varepsilon+\varepsilon)\|u_t\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\frac{c_3}{2}\|u\|_0^2.\quad (6)$$

Проинтегрируем (6) по τ от 0 до t с учетом (3):

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2+\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l u_t\partial_{0t}^{\alpha}u\,dx+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x\,dx\leqslant$$
$$\leqslant M_1\left(\int\limits_0^t\|f\|_0^2d\tau+\int\limits_0^t\|u_t\|_0^2d\tau+\int\limits_0^t\|u\|_0^2d\tau+\int\limits_0^t\|u_x\|_0^2d\tau+\|\nu(x)\|_0^2+\|\tau'(x)\|_0^2+\|\tau(x)\|_0^2\right),\quad (7)$$

Справедлива следующая оценка:

$$\left|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l u_t\,\partial_{0t}^{\alpha}u\,dx\right|=\left|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l u_\tau(x,\tau)\int\limits_0^\tau\frac{u_\eta(x,\eta)}{(\tau-\eta)^\alpha}d\eta\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^t\|u_\tau(x,\tau)\|_0^2d\tau+\frac{1}{2\Gamma^2(1-\alpha)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l dx\left(\int\limits_0^\tau\frac{u_\eta(x,\eta)}{(\tau-\eta)^\alpha}d\eta\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^t\|u_\tau(x,\tau)\|_0^2d\tau+\frac{1}{2\Gamma^2(2-\alpha)}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^t d\tau\left(\tau^{1-\alpha}\int\limits_0^\tau\frac{u_\eta^2(x,\eta)}{(\tau-\eta)^\alpha}d\eta\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_\tau(x,\tau)\|_0^2 d\tau + \frac{t^{1-\alpha}}{2\Gamma^2(1-\alpha)}\int\limits_0^l dx \int\limits_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} u_\tau^2(x,\tau)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{t^{2-2\alpha}}{2\Gamma^2(2-\alpha)}\right)\int\limits_0^t \|u_\tau(x,\tau)\|_0^2 d\tau. \quad (8)$$

Из (7) с учетом (8) и неравенства

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \eta(x) u_{xt} \partial_{0t}^\alpha u_x \, dx \leqslant c_2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l u_{xt}\, D_{0t}^{\alpha-1} u_{x\tau}\, dx \geqslant 0$$

(см. [17]) получим

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2 + \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_2 \left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \int\limits_0^t \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right) d\tau + \int\limits_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \quad (9)$$

Воспользуемся леммой 3. Отбросив первое слагаемое в левой части неравенства (9) и введя обозначения

$$y(t) = \int\limits_0^t \|u\|^2_{W_2^1(0,l)} d\tau, \quad y'(t) = \|u\|^2_{W_2^1(0,l)}, \quad y(0) = 0,$$

получим оценку

$$\int\limits_0^t \|u\|^2_{W_2^1(0,l)} d\tau \leqslant M_2 \left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \int\limits_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \quad (10)$$

Отбросив в левой части неравенства (9) второе и третье слагаемые, с учетом (10) приходим к неравенству

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2 \leqslant M_4 \left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \int\limits_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \quad (11)$$

На основании леммы 2, где

$$y(t) = \int\limits_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau, \quad \partial_{0t}^\alpha y(t) = D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2, \quad y(0) = 0$$

из (11) находим

$$\int\limits_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau \leqslant M_5 \left(D_{0t}^{-\alpha-1}\|f\|_0^2 + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \quad (12)$$

В силу неравенства

$$D_{0t}^{-\alpha-1}\|f\|_0^2 \leqslant \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau$$

из неравенств (9), (10), (12) получаем искомую априорную оценку (4), которая влечет единственность решения задачи (1)–(3). □

4. Постановка третьей краевой задачи и априорная оценка решения. Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения (1) в области Ω_T, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \Pi(0,t) = \beta_1 u - \mu_1(t), x = 0, \\ -\Pi(l,t) = \beta_2 u - \mu_2(t), x = l, \end{cases} \tag{13}$$

и начальным условиям (3), где

$$\Pi(x,t) = k(x,t)u_x + \partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x).$$

Теорема 2. *Если дополнительно к условиям теоремы* 1 *выполняются соотношения*

$$\beta_i,\ \mu_i \in C[0,T], \quad \beta_i \geqslant c_4 > 0, \quad i = 1,2, \quad \textit{для всех } t \in [0,T],$$

то для решения задачи (1), (13), (3) *справедлива априорная оценка*

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2 + \|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + u^2(l,t) + u^2(0,t) \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2)d\tau + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau(x)\|^2_{w_2^2(0,l)} + \tau^2(l) + \tau^2(0)\right). \tag{14}$$

Доказательство. Повторим те же рассуждения, которые производились при доказательстве теоремы 1. Преобразуя слагаемые (5) с учетом (13), получим:

$$\big((ku_x)_x,\ u_t\big) = \int_0^l u_t(ku_x)_x dx = u_t k u_x(x,t)\Big|_0^l - \int_0^l k u_{xt} u_x dx =$$
$$= ku_x(l,t)u_t(l,\tau) - ku_x(0,t)u_t(0,\tau) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l k u_x^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_0^l k_t u_x^2(x,t)dx,$$

$$\big(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x,\ u_t\big) = u_t\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)\Big|_0^l - \int_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x dx =$$
$$= u_t(l,\tau)\partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(l)u_x(l,\tau)\big) - u_t(0,\tau)\partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(0)u_x(0,\tau)\big) - \int_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x dx.$$

С учетом полученных неравенств из (5) получим

$$\frac{A_1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u_t\|_0^2 + \big(\partial_{0t}^{\alpha}u,\ u_t\big) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^l k u_x^2(x,t)dx + \int_0^l q(x,t)u^2(x,t)dx\right) + \int_0^l \eta(x)u_{xt}\,\partial_{0t}^{\alpha}u_x dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{c_2}{4\varepsilon} + \frac{c_3}{2}\right)\|u_x\|_0^2 + (c_2\varepsilon + \varepsilon)\|u_t\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2 + \frac{c_3}{2}\|u\|_0^2 + \Pi(x,t)u_t(x,t)\Big|_0^l. \tag{15}$$

Оценим последнее слагаемое правой части неравенства (15):

$$\Pi(x,t)u_t(x,t)\Big|_0^l =$$
$$= u_t(l,t)\Big(ku_x(l,t) + \partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(l)u_x(l,\tau)\big)\Big) - u_t(0,t)\Big(ku_x(0,t) + \partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(0)u_x(0,\tau)\big)\Big) =$$
$$= u_t(l,t)\big(\mu_2(t) - \beta_2 u\big) - u_t(0,t)\big(\beta_1 g - \mu_1(t)\big) =$$
$$= u_t(l,t)\mu_2(t) - u_t(l,t)\beta_2 u(l,t) - u_t(0,t)\beta_1 u(0,t) + u_t(0,t)\mu_1(t) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{c_4}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u^2(l,t)+u^2(0,t)\big)+u_t(l,t)\mu_2(t)+u_t(0,t)\mu_1(t). \quad (16)$$

Из (15) с учетом приведенных преобразований (16), а также в силу неравенства

$$\mu_1 u(0,t)+\mu_2 u(l,t)\leqslant \frac{1}{2}(\mu_1^2+\mu_2^2)+\frac{1}{2}\big((u(0,t))^2+(u(l,t))^2\big)\leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(\mu_1^2+\mu_2^2)+\left(\varepsilon\big\|(u(x,t))_x\big\|_0^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\|u(x,t)\|_0^2\right)$$

(см. [15]) приходим к неравенству

$$\frac{A_1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u_t\|_0^2+\big(\partial_{0t}^{\alpha}u,\ u_t\big)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^l k u_x^2(x,t)dx+\int\limits_0^l q(x,t)u^2(x,t)dx\right)+$$
$$+\int\limits_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x dx+\frac{c_4}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u^2(l,t)+u^2(0,t)\big)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{c_2}{4\varepsilon}+\frac{c_3}{2}\right)\|u_x\|_0^2+(c_2\varepsilon+\varepsilon)\,\|u_t\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\frac{c_3}{2}\|u\|_0^2+$$
$$+\frac{1}{2}(\mu_1^2+\mu_2^2)+\left(\varepsilon\big\|(u(x,t))_x\big\|_0^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\|u(x,t)\|_0^2\right). \quad (17)$$

Проинтегрируем (17) по τ от 0 до t с учетом (3):

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2+\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l u_t\,\partial_{0t}^{\alpha}u\,dx+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x dx+u^2(l,t)+u^2(0,t)\leqslant$$
$$\leqslant M_5\Bigg(\int\limits_0^t\Big(\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2\Big)d\tau+\int\limits_0^t\|f\|_0^2 d\tau+\int\limits_0^t(\mu_1^2+\mu_2^2)d\tau+\int\limits_0^t\|u_\tau\|_0^2 d\tau+$$
$$+\|\nu(x)\|_0^2+\|\tau'(x)\|_0^2+\|\tau(x)\|_0^2+\tau^2(l)+\tau^2(0)\Bigg). \quad (18)$$

Аналогично первой краевой задаче, из (18), применяя последовательно леммы 3 и 2, получим априорную оценку (14) доказывающую единственность решения задачи (1), (13), (3). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алиханов А. А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка// Диффер. уравн. — 2010. — *46*, № 5. — С. 658–664.
2. *Геккиева С. Х.* Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова// Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — № 4 (24). — С. 76–86.
3. *Геккиева С. Х., Керефов М. А.* Смешанные краевые задачи для нагруженного уравнения с дробной производной// Мат. III Междунар. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2006). — Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2006. — С. 80–82.
4. *Геккиева С. Х., Керефов М. А.* Первая краевая задача для уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова с дробной по времени производной// Уфим. мат. ж. — 2019. — *11*, № 2. — С. 72–82.
5. *Керефов М. А.* Об одной краевой задаче для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной// Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. — 1999. — *4*, № 1. — С. 12–14.
6. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной в многомерной области// Науч. вед. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2015. — *41*, № 23. — С. 17–23.

7. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Первая краевая задача для неоднородного нелокального волнового уравнения// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2016. — № 1. — С. 76–86.
8. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2017. — № 2. — С. 106–112.
9. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Краевая задача для нелокального уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2019. — *167*. — С. 27–33.
10. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2019. — *23*, № 4. — С. 607–621.
11. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Численно–аналитический метод решения краевой задачи для обобщенных уравнений влагопереноса// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2021. — *31*, № 1. — С. 19–34.
12. *Керефов М. А., Кармоков М. М., Геккиева С. Х.* Об одной краевой задаче для обобщенного уравнения Аллера// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2020. — *26*, № 2. — С. 7–14.
13. *Керефов М. А., Нахушева Ф. М., Геккиева С. Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2018. — *24*, № 3. — С. 23–29.
14. *Кочубей А. Н.* Диффузия дробного порядка// Диффер. уравн. — 1990. — *26*, № 4. — С. 660–670.
15. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
16. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Физматлит, 1995.
17. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
18. *Нахушев А. М.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
19. *Нигматуллин Р. Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация// Теор. мат. физ. — 1992. — *90*, № 3. — С. 354–368.
20. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
21. *Al-Refai M., Luchko Yu.* Maximum principle for the multi-term time-fractional diffusion equations with the Riemann–Liouville fractional derivatives// Appl. Math. Comput. — 2014. — *257*. — P. 40–51.
22. *Daftardar-Gejji V., Bhalekar S.* Boundary-value problems for multi-term fractional differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 2008. — № 345. — P. 754–735.
23. *Li G., Sun C., Jia X., Du D.* Numerical solution to the multi-term time fractional diffusion equation in a finite domain// Numer. Math. Theor. Meth. Appl. — 2016. — *9*, № 3. — P. 337–357.
24. *Liu F., Meerschaert M. M., McGough R. J., Zhuang P., Liu Q.* Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffusion equation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2013. — *16*, № 1. — P. 9–25.
25. *Liu X., Wang J., Wang X., Zhou Y.* Exact solutions of multi-term fractional diffusion-wave equations with Robin type boundary conditions// Appl. Math. Mech. — 2014. — *35*, № 1. — P. 49–62.
26. *Luchko Yu.* Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation// J. Math. Anal. Appl. — 2011. — *374*, № 2. — P. 538–548.
27. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. — New York: Academic Press, 1974.

Керефов Марат Асланбиевич
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик
E-mail: kerefov@mail.ru

Геккиева Сакинат Хасановна
Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, Нальчик
E-mail: Gekkieva_s@mail.ru

Керефов Батыр Маратович
Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, Нальчик;
Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь
E-mail: timur200660@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 71–92
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-71-92

УДК 517.958; 629.7.052

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. II

© 2023 г. В. М. МОРОЗОВ, В. И. КАЛЕНОВА, М. Г. РАК

Аннотация. Рассматриваются задачи стабилизации стационарных движений (положений равновесия и регулярных прецессий) спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях в предположении, что центр масс движется по круговой орбите. Математическими моделями рассматриваемых задач являются системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Представлен строгий аналитический подход к изучению этой проблемы, который позволяет эффективно и корректно строить алгоритмы стабилизации. Метод основан на приводимости нестационарных систем, описывающих указанные задачи, к стационарным системам. Предложены решения ряда задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных систем. Представлены результаты математического моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики. Настоящая статья является второй частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 71–85.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, приводимость, стационарные движения, линеаризованные уравнения движений спутника, стабилизация, управляемость, алгоримы управления.

STABILIZATION OF STATIONARY MOTIONS OF A SATELLITE NEAR THE CENTER OF MASS IN A GEOMAGNETIC FIELD. II

© 2023 V. M. MOROZOV, V. I. KALENOVA, M. G. RAK

Abstract. In this paper, we consider problems of stabilization of stationary motions (equilibrium positions and regular precessions) of a satellite near the center of mass in gravitational and magnetic fields under the assumption that the center of mass moves in a circular orbit. Mathematical models of the problems considered are systems of differential equations with periodic coefficients. We present a rigorous analytical approach to this problem, which allows efficient and correct construction of stabilization algorithms. The method is based on the reducibility of nonstationary systems that describe these problems to stationary systems. Solutions for a number of problems of stabilizing stationary motions of a satellite with the help of magnetic systems are proposed. We present the results of mathematical modeling of the algorithms, which confirm the effectiveness of the developed methodology. This paper is the second part of the work. The first part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 220. — P. 71–85.

Keywords and phrases: linear nonstationary system, reducibility, stationary motions, linearized equations of satellite motions, stabilization, controllability, control algorithms.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 2

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В этой главе кратко изложены подходы к решению задач управления и оценивания линейных нестационарных систем (ЛНС) определенного класса, приводимых к стационарным системам. Более подробно эта теория изложена в [7].

В разделе 2.1 формулируются основные понятия линейной теории управления.

В разделе 2.2 рассмотрен класс ЛНС, содержащих управления и измерения, которые допускают приведение к стационарным системам большего порядка, чем исходная система.

В разделе 2.3 рассматриваются алгоритмы управления и оценивания для приводимых нестационарных систем.

В разделе 2.4 приведены методические примеры, иллюстрирующие представленные теоретические результаты.

2.1. Основные понятия линейной теории управления

Рассматривается динамическая система, поведение которой описывается системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad \sigma = C(t)x. \tag{2.1.1}$$

Здесь $x(t)$ — n-мерный вектор состояния линейной системы; $u(t)$ — r-мерный вектор входных переменных (управляющих воздействий или возмущений); $\sigma(t)$ — -мерный вектор наблюдаемых переменных системы (или измерений); $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — известные матрицы с действительными кусочно-непрерывными элементами размерности $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(l \times n)$ соответственно.

Задачи оценивания и управления, часто возникающие на практике, можно сформулировать следующим образом.

Задача оценивания. По измерениям величин $\sigma(\tau)$ и $u(\tau)$ на отрезке $\tau \in [t_0, t]$ определить к моменту времени t вектор состояния системы (2.1.1).

Задача управления. Пусть заданы начальное $x(t_0)$ и конечное $x(t)$ состояния системы (2.1.1). Требуется сформировать такое управление $u(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, которое переводило бы систему из состояния $x(t_0)$ в состояние $x(t)$.

Одной из задач управления является задача стабилизации, т. е. построение управления в виде обратной связи по состоянию, которое обеспечит асимптотическую устойчивость нулевого решения системы, замкнутой этим управлением.

Совместная задача оценивания и управления.

По измерениям величины $\sigma(\tau)$, на отрезке $\tau \in [t_0, t]$ сформировать такое управление $u(\tau)$ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant t)$, которое переводило бы систему из начального состояния $x(t_0)$ в некоторое заданное состояние $x(t)$.

Очевидно, что приступать к решению указанных задач разумно лишь в случае, когда установлено, что они разрешимы. Разрешимость этих задач математически формализуется при помощи понятий наблюдаемости и управляемости, введенных Р. Е. Калманом [10, 11, 54].

2.1.1. Наблюдаемость. По известному вектору измерений $\sigma(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ требуется определить вектор состояния, считая функцию $u(t)$ известной на интервале $[t_0, t_1]$.

Определение 2.1. Система (2.1.1) называется наблюдаемой в момент времени t, если существует конечный момент $t_0 < t$ такой, что можно определить состояние системы $x(t)$ по вектору измерений $\sigma(\tau)$ при $\tau \in [t_0, t]$.

Система
$$C(t)x(t) = \sigma(t)$$
представляет собой систему l уравнений с n неизвестными. В большинстве практических случаев количество измерений меньше размерности вектора состояния, поэтому $l < n$,

Знание вектора $\sigma(t)$ в фиксированный момент времени t не дает достаточной информации для восстановления вектора состояния x. Для решения поставленной задачи следует учитывать всю имеющуюся информацию $\sigma(\tau)$ о векторе $x(\tau)$ на отрезке времени $\tau \in [t_0, t]$.

Далее при исследовании наблюдаемости рассматривается система
$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad \sigma = C(t)x. \tag{2.1.2}$$
Вектор $\sigma(\tau)$ в момент $\tau \in [t_0, t]$ можно представить в виде
$$\sigma(\tau) = C(\tau)\Phi(\tau, t)x(t), \tag{2.1.3}$$
где $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица, удовлетворяющая уравнению
$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E_n.$$
Уравнение (2.1.3) должно удовлетворяться при единственном значении $x(t)$ для любого $\tau \in [t_0, t]$.

Введем матрицу
$$G(t, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^\top(\tau, t)C^\top(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau. \tag{2.1.4}$$
Очевидно, что матрица $G(t, t_0)$ является симметрической и неотрицательно определенной (это означает, что для любого вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$ квадратичная форма $\eta^\top G\eta \geqslant 0$).

Имеет место следующий общий критерий наблюдаемости системы (2.1.2) [7, 11, 54].

Теорема 2.1. *Система* (2.1.2) *наблюдаема в момент времени* t *тогда и только тогда, когда существует такой момент времени* $t_0 < t$, *что матрица* $G(t, t_0)$ *является положительно определенной.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [11, 54].

Основной недостаток критерия наблюдаемости, даваемого этой теоремой, состоит в том, что фундаментальная матрица $\Phi(t, t_0)$ системы (2.1.2) должна быть известна. Но, за исключением специальных случаев, матрица $\Phi(t, t_0)$ не может быть найдена в замкнутой форме.

Для системы (2.1.2), элементы матриц $A(t)$ и $C(t)$ которой являются непрерывно дифференцируемыми функциями $n-2$ и $n-1$ раз соответственно, существует алгебраический достаточный критерий наблюдаемости, не требующий знания фундаментальной матрицы системы. Имеет место

Теорема 2.2 (см. [7, 13, 43])**.** *Если на отрезке* $[t_0, t]$ *можно указать точку* t_*, *в которой*
$$\begin{gathered}\operatorname{rank}(N(t_*)) = n, \quad N(t_*) = [L_1(t_*), \ldots, L_n(t_*)], \\ L_1(t_*) = C^\top(t_*), \quad L_k(t_*) = A^\top(t_*)L_{k-1}(t_*) + \dot{L}_{k-1}(t_*) \quad (k = 2, \ldots, n),\end{gathered} \tag{2.1.5}$$
то система (2.1.2) *является наблюдаемой в момент* t.

2.1.2. Управляемость. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u. \tag{2.1.6}$$

Определение 2.2. Система (2.1.6) называется управляемой в момент t_0, если для любой пары точек ξ и η в пространстве состояний $\{x\}$ существуют конечный момент $t \geqslant t_0$ и допустимое управление $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, переводящее систему (2.1.6) из состояния $x(t_0) = \xi$ в состояние $x(t) = \eta$.

Управление $u(\tau)$ называется допустимым, если оно ограничено и кусочно-непрерывно на $[t_0, t]$.

Введем симметричную неотрицательно определенную матрицу (Грамиан управляемости)

$$W(t, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) B^\top(\tau) \Phi^\top(t, \tau) d\tau.$$

Теорема 2.3 (см. [7, 11, 54]). *Система* (2.1.6) *управляема в момент* t_0 *тогда и только тогда, когда существует такой конечный момент времени* $t \geqslant t_0$*, для которого матрица* $W(t, t_0)$ *положительно определена.*

Достаточное условие управляемости для класса нестационарных систем (2.1.6), элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ которых являются непрерывно дифференцируемыми функциями соответственно $n-2$ и $n-1$ раз, дается следующей теоремой.

Теорема 2.4 (см. [7, 13, 43]). *Если на отрезке* $[t_0, t]$ *можно указать такую точку* t_**, в которой*

$$\operatorname{rank} U(t_*) = n, \quad U(t_*) = \left[L_1(t_*), \quad \ldots, \quad L_n(t_*)\right],$$
$$L_1(t_*) = B(t_*), \quad L_k(t_*) = A(t_*) L_{k-1}(t_*) - \dot{L}_{k-1}(t_*) \quad (k = 2, \ldots, n),$$

то система (2.1.6) *является управляемой в момент* t_0.

Доказательство теорем из п. 2.1.1 и п. 2.1.2 можно найти в [13, 43].

2.1.3. Принцип двойственности задач наблюдения и управления. Рассмотрим две системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \qquad \sigma = C(t)x, \tag{2.1.7}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -A^\top(t)\xi + C^\top(t)v, \qquad \zeta = B^\top(t)\xi. \tag{2.1.8}$$

Обозначим их переходные матрицы через $\Phi(t, t_0)$ и $\Psi(t, t_0)$

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0), \qquad \Phi(t_0, t_0) = E_n,$$
$$\frac{d\Psi(t, t_0)}{dt} = -A^\top(t)\Psi(t, t_0), \qquad \Psi(t_0, t_0) = E_n.$$

Матрицы управляемости и наблюдаемости систем (2.1.7) и (2.1.8) имеют соответственно вид

$$G_x(t, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^\top(\tau, t) C^\top(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau,$$

$$W_x(t, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) B^\top(\tau) \Phi^\top(t, \tau) d\tau,$$

$$G_\xi(t, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \Psi^\top(\tau, t) C^\top(\tau) C(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau,$$

$$W_\xi(t,t_0)=\int\limits_{t_0}^{t}\Psi(t,\tau)B(\tau)B^\top(\tau)\Psi^\top(t,\tau)d\tau.$$

Из свойств сопряженных систем следует

$$\Phi(t,t_0)\Psi(t,t_0)=E_n \quad \text{или} \quad \Phi^\top(t,t_0)=\Psi(t_0,t),$$

откуда

$$G_x(t,t_0)=W_\xi(t,t_0); \quad W_x(t,t_0)=G_\xi(t,t_0).$$

Это означает, что справедлива

Теорема 2.5 (см. [25, 54]). *Система* (2.1.7) *управляема* (*соответственно наблюдаема*) *тогда и только тогда, когда наблюдаема* (*соответственно управляема*) *сопряженная ей система* (2.1.8).

Содержание теоремы составляет принцип двойственности задач наблюдения и управления.

Двойственность этих задач имеет большое значение и в теоретическом, и в практическом отношении, так как позволяет переносить результаты, полученные в задаче наблюдения (управления) на задачи управления (наблюдения).

В ряде случаев двойственность оказывает существенную помощь при доказательствах. Принцип двойственности может быть эффективен при решении практических задач, так как однотипность математического аппарата позволяет использовать одинаковые вычислительные программы при решении как задач управления (стабилизации), так и оценивания.

2.1.4. Критерии управляемости и наблюдаемости для стационарных систем. Для стационарных систем имеют место эффективные критерии управляемости и наблюдаемости, выраженные через элементы матриц A, B, C.

Теорема 2.6 (см. [2, 7, 13, 25, 54]). *Для наблюдаемости линейной стационарной системы*

$$\frac{dx}{dt}=Ax, \quad \sigma=Cx \tag{2.1.9}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank}N=n$, *где*

$$N=\begin{bmatrix}C\\CA\\\dots\\CA^{n-1}\end{bmatrix}\text{ —}$$

матрица наблюдаемости.

Теорема 2.7 (см. [7, 50]). *Линейная стационарная система* (2.1.9) *наблюдаема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A-\lambda E_n\\C\end{bmatrix}=n \quad \forall\lambda\in\Lambda, \tag{2.1.10}$$

где $\Lambda=\{\lambda:\det(\lambda E_n-A)=0\}$.

Теорема 2.8 (см. [2, 7, 13, 25, 54]). *Для управляемости линейной стационарной системы*

$$\dot x=Ax+Bu \tag{2.1.11}$$

необходимо и достаточно, чтобы ранг

$$\operatorname{rank}U=n,$$

где $U=\begin{bmatrix}B & AB & \dots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$ *— матрица управляемости.*

Замечание 2.1. Если в системе (2.1.11) существует линейный интеграл, не зависящий от управления, то система, очевидно, не является управляемой.

Теорема 2.9 (см. [7, 50]). *Стационарная система* (2.1.11) *управляема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda E_n & B \end{bmatrix} = n \quad \forall\lambda\in\Lambda, \quad \Lambda=\{\lambda : \det(\lambda E_n - A)=0\}. \tag{2.1.12}$$

Критерии наблюдаемости (2.1.10) и управляемости (2.1.12) особенно удобны, если известны собственные значения матрицы системы. С их помощью можно устанавливать и достаточные условия ненаблюдаемости (неуправляемости), т. к. если хотя бы для одного собственного значения матрицы A нарушаются условия (2.1.10), ((2.1.12)), то система ненаблюдаема (неуправляема).

2.1.5. Критерии управляемости и наблюдаемости для стационарных многомерных систем второго порядка. Рассмотрим стационарную систему

$$\begin{gathered} M\ddot{x}+D\dot{x}+Kx=Bu, \\ \sigma=C_1x+C_2\dot{x}. \end{gathered} \tag{2.1.13}$$

Здесь x — вектор $(n\times1)$, M, D, K — постоянные квадратные $(n\times n)$-матрицы, матрица M является положительно определенной, $u(r\times1)$ — вектор управляющих воздействий, B — постоянная $(n\times r)$-матрица, $\sigma(l\times1)$ — вектор измерений, C_1, C_2 — постоянные $(l\times n)$-матрицы.

Теорема 2.10 (см. [7, 55]). *Для управляемости системы* (2.1.13) *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\lambda\in\Lambda$ $\Lambda=\{\lambda : \det(M\lambda^2+D\lambda+K)=0\}$ *выполнялось условие*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} M\lambda^2+D\lambda+K & B \end{bmatrix} = n. \tag{2.1.14}$$

Теорема 2.11 (см. [7, 55]). *Для наблюдаемости системы* (2.1.13) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} M\lambda^2+D\lambda+K \\ C_1+C_2\lambda \end{bmatrix} = n \quad \forall\lambda\in\Lambda, \quad \Lambda=\{\lambda : \det(M\lambda^2+D\lambda+K)=0\}. \tag{2.1.15}$$

Критерии управляемости (2.1.14) и наблюдаемости (2.1.15) особенно удобны для механических систем, так как уравнения движения записываются, как правило, в виде уравнений второго порядка (уравнения Лагранжа 2-го рода).

Критерии управляемости и наблюдаемости для нестационарных систем, сформулированные в этом параграфе, достаточно сложны и не очень конструктивны, в отличие от критериев для стационарных систем, поэтому целесообразно выделить те классы ЛНС, для которых эти критерии будут подобны критериям для стационарных систем. Об этом пойдет речь в разделе 2.2.

2.2. Приведение линейных систем, нестационарных по управлению и наблюдению к стационарным системам

Понятие приводимости, введенное Ляпуновым для линейных однородных нестационарных систем, было распространено на линейные нестационарные системы, содержащие управления и наблюдения [7].

Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\dot{x}=Ax+B(t)u, \quad \sigma=C(t)x, \tag{2.2.1}$$

где $x(n\times1)$ — вектор состояния системы; $u(r\times1)$ — вектор управляющих воздействий; $\sigma(l\times1)$ — вектор измерений; $A(n\times n)=\mathrm{const}$, $B(t)(n\times r)$, $C(t)(l\times n)$ — матрицы, элементы которых непрерывно дифференцируемые функции t, $t\in I$, $I=[0\leqslant t_0\leqslant t<\infty)$.

Нестационарная система (2.2.1) может быть преобразована в полностью стационарную систему того же порядка в очень редких случаях [7]. Более реалистичным и применимым на практике, в частности для тех задач, которые рассматриваются в этой реботе, является случай, когда возможно приведение исходной нестационарной системы к стационарной системе большего порядка.

Далее рассмотрим отдельно приведение к стационарным системам, систем, нестационарных по управлению

$$\dot{x}=Ax+B(t)u \tag{2.2.2}$$

и систем, нестационарных по наблюдению

$$\dot{x}=Ax, \quad \sigma=C(t)x. \tag{2.2.3}$$

2.2.1. Приведение систем, нестационарных по управлению. Рассмотрим линейную систему (2.2.2), нестационарную по управлению.

Пусть матрица $B(t)$ представляется в виде

$$B(t) = \sum_{j=1}^{s} \beta_j(t) B_j, \tag{2.2.4}$$

где $B_j(n \times r)$ — постоянные матрицы; $\beta_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ — линейно независимые непрерывно дифференцируемые функции времени t.

Будем предполагать, что функции $\beta_j(t)$ таковы, что можно ввести вектор $f(t)(m\times 1)$, s компонент которого представляют собой функции $\beta_j(t)$, а остальные компоненты $f_j(t)$ $(j = s+1, \ldots, m)$ выбраны так, чтобы поведение вектора $f(t)$ описывалось некоторой линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot f(t) = Sf(t), \quad S(m \times m) = \text{const}. \tag{2.2.5}$$

Это означает, что к выделенному таким образом классу функций $\beta_j(t)$, входящих в матрицу $B(t)$, относятся такие функции $f_i(t)$ как полиномы, экспоненты, синусы, косинусы произвольных частот и всевозможные комбинации этих функций.

Замечание 2.2. Вектор-функция $\beta(t) = \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_s\end{bmatrix}^\top$ в общем случае не удовлетворяет системе вида (2.2.5) порядка s (пример см. ниже).

Замена переменных

$$x = F^\top(t) y, \quad F^\top(t) = f^\top(t) \otimes E_n \tag{2.2.6}$$

приводит систему (2.2.2) к стационарной системе большей размерности

$$\dot y = Gy + B_y u, \quad y(mn \times 1), \tag{2.2.7}$$

где

$$\underset{(mn\times mn)}{G} = E_m \otimes A - S^\top \otimes E_n, \quad \underset{(r\times mn)}{B_y^\top} = \begin{bmatrix} \underset{(r\times n)}{B_1^\top} & \cdots & \underset{(r\times n)}{B_s^\top} & \underset{(r\times n)}{O} & \cdots & \underset{(r\times n)}{O}\end{bmatrix};$$

$\underset{(r\times n)}{O}$ — нулевая матрица; символом $\otimes$ обозначено кронекеровское произведение [7, 42].

Кронекеровским произведением матриц $\underset{(k\times l)}{P} = \begin{bmatrix}p_{ij}\end{bmatrix}$ и $\underset{(k'\times l')}{Q} = \begin{bmatrix}q_{ij}\end{bmatrix}$ называется — блочная матрица $R = P \otimes Q$ $(kk' \times ll')$, определяемая по формуле $R = \begin{bmatrix}p_{ij} Q\end{bmatrix}$ [42].

Преобразование (2.2.6), в котором вектор y удовлетворяет системе (2.2.7) с начальным условием $y(t_0) = y_0$, дает возможность связать вектор y с вектором состояния x, поведение которого описывается системой (2.2.2) с начальным условием $x(t_0) = F^\top(t_0) y(t_0)$.

2.2.2. Приведение систем, нестационарных по наблюдению. Рассмотрим линейную систему (2.2.3), нестационарную по наблюдению.

Пусть матрица $C(t)$ представима в виде

$$C(t) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j(t) C_j \quad (p \leqslant ln); \quad C_j = \text{const}, \tag{2.2.8}$$

где $\alpha_j(t)$ — линейно независимые функции, являющиеся решениями некоторой системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Обозначим через $f(t)$ вектор $f(t) = \begin{bmatrix}f_1 & f_2 & \ldots & f_m\end{bmatrix}^\top$, первые компонент являются функциями $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_p(t)$, который удовлетворяет уравнению вида (2.2.5) с соответствующей матрицей S.

Замена переменных

$$y = F(t) x, \quad \underset{(mn\times n)}{F(t)} = f(t) \otimes E_n \tag{2.2.9}$$

приводит систему (2.2.3) к стационарной системе большего порядка

$$\dot{y} = Gy, \quad \sigma = C_y y, \tag{2.2.10}$$

где $y(mn \times 1)$ — вектор состояния,

$$\underset{(mn\times mn)}{G} = S \otimes E_n + E_m \otimes A, \qquad \underset{(l\times mn)}{C_y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_p & O & \dots & O \end{bmatrix}.$$

2.2.3. Приведение линейных нестационарных систем второго порядка. Рассмотрим систему второго порядка, нестационарную по управлению

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + Nx = B(t)u, \tag{2.2.11}$$

где $x(n\times 1)$ — вектор состояния системы; $u(r\times 1)$ — вектор управляющих воздействий; $D(n\times n) = \mathrm{const}$, $N(n\times n) = \mathrm{const}$, $B(t)(n\times r)$ — матрица, элементы которой непрерывно дифференцируемые функции t, $t \in I$, $I = [0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty)$.

Матрица $B(t)$ представима в виде (2.2.4):

$$B(t) = \sum_{j=1}^{s} \beta_j(t) B_j, \quad f^\top = \begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_s & f_{s+1} & \dots & f_m \end{bmatrix}, \quad \dot{f}(t) = Sf(t), \tag{2.2.12}$$

где $B_j(n \times r)$, $S(m \times m) = \mathrm{const}$. Нестационарная по управлению система (2.2.10), в которой матрица $B(t)$ удовлетворяет условиям (2.2.11), при помощи преобразования

$$x = F^\top(t)y, \quad F^\top(t) = f^\top(t) \otimes E_n \tag{2.2.13}$$

приводится к стационарной системе с расширенным mn-мерным вектором состояния $y(t)$ [7, 8]

$$\ddot{y} + 2G\dot{y} + My = Qu, \tag{2.2.14}$$

где

$$G = S^\top \otimes E_n + E_m \otimes D, \quad M = (S^\top)^2 \otimes E_n + 2(S^\top \otimes D) + E_m \otimes N,$$

$$\underset{(r\times mn)}{Q}{}^\top = \left[\underset{(r\times n)}{B_1^\top}, \dots \underset{(r\times n)}{B_s^\top}, \underset{(r\times n)}{O}, \dots, \underset{(r\times n)}{O} \right].$$

Отметим, что управляемость и наблюдаемость приводимых ЛНС можно исследовать, как исходя из нестационарных систем, так и анализируя соответствующие приведенные стационарные системы. Как уже указывалось, полученные стационарные системы являются избыточными по отношению к исходным системам. Если приведенная стационарная система управляема (наблюдаема), то управляема (наблюдаема) и исходная нестационарная система. Однако, в силу ее избыточности, неуправляемость (ненаблюдаемость) стационарной системы может и не повлечь неуправляемость (ненаблюдаемость) исходной нестационарной системы.

2.3. Алгоритмы оценивания и управления

Наличие свойств наблюдаемости и управляемости линейных систем позволяет строить алгоритмы оценивания и управления с заранее заданными свойствами.

2.3.1. Алгоритмы оценивания. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + q(t), \tag{2.3.1}$$

$$z(t) = C(t)x + r(t). \tag{2.3.2}$$

Здесь $x(t)$ — n-мерный вектор состояния; $z(t)$ — l-мерный вектор выходных переменных (измерений); $A(t)$, $C(t)$ — известные ограниченные матрицы с действительными кусочно-непрерывными элементами размерности $(n\times n)$, $(l\times n)$ соответственно; функции $q(t)$ — n-мерный вектор погрешностей в системе и $r(t)$ — l-мерный вектор погрешностей измерения, состоящие из систематических и случайных составляющих.

Задача оценивания вектора состояния линейной системы (2.3.1) по данным измерениям (2.3.2) заключается в том, чтобы на некотором интервале времени $t \in [t_0, T]$ найти оценку $\tilde{x}(t)$, в определенном смысле близкую к вектору состояния $x(t)$, при этом критерии малости ошибки оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$ могут быть различными.

Существуют различные типы алгоритмов оценивания вектора состояния, зависящие от моделей погрешностей $q(t)$ и $r(t)$, и выбранного критерия малости ошибок оценки.

Известно, что структура линейного фильтра для нахождения оценок $\tilde{x}$ вектора x имеет вид [2, 7, 54]

$$\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x} + L(t)(z - C(t)\tilde{x}), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0. \tag{2.3.3}$$

Матрица $L(t)(n \times l)$ подлежит выбору. Поведение ошибок оценки описывается уравнением

$$\Delta\dot{x} = [A(t) - L(t)C(t)]\Delta x + q(t) - L(t)r(t), \quad \Delta x(t_0) = \Delta x_0. \tag{2.3.4}$$

Для работоспособности алгоритма оценивания (2.3.3) необходимо, чтобы имела место асимптотическая устойчивость тривиального решения уравнений ошибок оценки (2.3.4) при $q = 0$, $r = 0$. Если система наблюдаема, то выполнение этого условия при наличии наблюдаемости системы можно обеспечить путем соответствующего выбора матрицы $L(t)$.

Если в качестве моделей погрешностей принять случайные процессы типа белого шума с нулевыми средними и заданными корреляционными матрицами

$$M\left[q(t) \quad q^\top(\tau)\right] = Q(t)\delta(t - \tau),$$
$$M\left[r(t) \quad r^\top(\tau)\right] = R(t)\delta(t - \tau)$$

(где $Q(t)(n \times n)$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица, $R(t)(l \times l)$ — симметрическая положительно определенная матрица, $\delta(t-\tau)$ — дельта-функция Дирака), то алгоритм, доставляющий минимум дисперсии ошибок оценки, имеет структуру (2.3.3), в которой матрица $L(t)$ определяется из соотношений [2, 7, 54]

$$L(t) = P(t)C^\top(t)R^{-1}C(t), \tag{2.3.5}$$

где $P(t)$ — решение матричного уравнения Риккати

$$\dot{P} = A(t)P + PA^\top(t) - PC^\top(t)R^{-1}(t)(t)P + Q(t), \quad P(t_0) = P_0. \tag{2.3.6}$$

Здесь $P(t) = M\left[\Delta x(t)\Delta x^\top(t)\right]$ — ковариационная матрица ошибок оценки; P_0 — заданная неотрицательно определенная матрица. Алгоритм, описываемый уравнениями (2.3.3), (2.3.5), (2.3.6) называется оптимальным фильтром Калмана—Бьюси [2, 7, 11, 25].

2.3.2. Алгоритмы управления. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + q(t), \tag{2.3.7}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор состояния; $u(t)$ — r-мерный вектор входных переменных; $q(t)$ — вектор возмущений; $A(t)$, $B(t)$ — известные ограниченные при всех $t \geqslant t_0$ матрицы с действительными кусочно-непрерывными элементами размерности $(n \times n)$, $(n \times r)$ соответственно.

Цель задачи управления — сконструировать такой закон управления, чтобы вектор состояния соответствующей замкнутой системы обладал желаемыми свойствами.

Рассмотрим линейный закон управления в предположении, что измеряются все компоненты вектора $x(t)$. Сформируем закон управления в виде

$$u(t) = -K(t)x(t), \tag{2.3.8}$$

где $K(t)(r \times n)$ — некоторая матрица, подлежащая выбору. Система, замкнутая управлением (2.3.8), имеет вид

$$\dot{x} = [A(t) - B(t)K(t)]x + q(t). \tag{2.3.9}$$

Одна из задач управления состоит в выборе $u(t)$, переводящего систему (2.3.7) из произвольного состояния $x(t_0)$ в начало координат за конечное время $t_1 - t_0 > 0$ при $q = 0$. Другая задача (задача стабилизации) состоит в том, чтобы построить такое управление (2.3.8), при котором замкнутая система (2.3.9) при $q = 0$ была бы асимптотически устойчива в смысле Ляпунова. В этом случае говорят, что система (2.3.7) стабилизируема при помощи стабилизирующей обратной связи (2.3.8).

Предположим теперь, что при формировании закона управления измерению доступны не все компоненты вектора состояния x, а лишь их l линейных комбинаций (2.3.2). Тогда, если пара $(A(t), C(t))$ наблюдаема, то справедлива оценка $\tilde{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$, определяемая уравнением

$$\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x} + B(t)u(t) + L(t)(\sigma - C(t)\tilde{x}), \tag{2.3.10}$$

при этом уравнение ошибок оценки будет асимптотически устойчивым (при $q = 0$, $r = 0$).

Далее построим закон управления в форме обратной связи по оценке

$$u(t) = -K(t)\tilde{x}(t). \tag{2.3.11}$$

Подставив выражение (2.3.11) в систему (2.3.7) и (2.3.10), будем иметь замкнутую систему размерности $2n$ относительно переменных x и $\tilde{x}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x - B(t)K(t)\tilde{x} + q(t), \\ \dot{\tilde{x}} &= [A(t) - B(t)K(t) - L(t)C(t)]\tilde{x} + L(t)C(t)x + L(t)r(t). \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Введя ошибку оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$, преобразуем систему (2.3.12) к виду

$$\Delta\dot{x} = [A(t) - L(t)C(t)]\Delta x + q(t) - L(t)r(t), \tag{2.3.13}$$

$$\dot{x} = [A(t) - B(t)K(t)]x + B(t)K(t)\Delta x + q(t). \tag{2.3.14}$$

Поведение решений уравнений (2.3.13), (2.3.14) определяется свойствами матриц $A(t)-L(t)C(t)$ и $A(t) - B(t)K(t)$, в которых матрицы $L(t)$ и $K(t)$ при сформулированных выше условиях могут быть независимо выбраны так, что при $q = 0$, $r = 0$ уравнения (2.3.13), (2.3.14) будут асимптотически устойчивы.

2.3.3. Алгоритмы управления и оценивания для стационарных систем. Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \sigma = Cx. \tag{2.3.15}$$

Здесь $x(t)(n \times 1)$ — вектор состояния; $u(r \times 1)$ — вектор управляющих воздействий, $\sigma(l \times 1)$ — вектор измерений (наблюдений); $A(n \times n)$, $B(n \times r)$, $C(l \times n)$ — постоянные матрицы.

Будем предполагать, что система (2.3.15) управляема и наблюдаема. Тогда для нее можно строить как оптимальные, так и асимптотические алгоритмы управления и оценивания.

Предположим, что вектор состояния $x(t)$ доступен точному измерению в любой момент времени. Тогда можно реализовать закон управления в виде линейной обратной связи

$$u(t) = -Kx(t), \tag{2.3.16}$$

где $K(r \times n)$ — постоянная матрица коэффициентов усиления.

Система (2.3.15), замкнутая управлением (2.3.16), имеет вид

$$\dot{x} = (A - BK)x. \tag{2.3.17}$$

При наличии измерения $\sigma(t)$ оценку $\tilde{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$ можно строить согласно алгоритму

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu(t) + L(\sigma - C\tilde{x}), \quad L(n \times l) = \text{const}. \tag{2.3.18}$$

Уравнения ошибок оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$ имеют вид

$$\Delta\dot{x} = (A - LC)\Delta x. \tag{2.3.19}$$

Постоянные матрицы K и L в асимптотических алгоритмах управления (2.3.16) и оценивания (2.3.18) могут быть выбраны на основании следующих утверждений [2, 7, 54].

Тогда постоянную матрицу K в законе управления (2.3.16) можно выбрать так, чтобы характеристический многочлен замкнутой системы (2.3.17) совпадал с любым наперед заданным многочленом n-ой степени с действительными коэффициентами.

В уравнениях (2.3.18) постоянную матрицу L можно выбрать так, чтобы характеристический многочлен уравнений ошибок оценки (2.3.19) совпадал с любым наперед заданным многочленом n-ой степени с действительными коэффициентами.

На основании этих утверждений матрицы K и L можно выбрать так, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость уравнений (2.3.17) и (2.3.19), т. е. так, чтобы $x(t) \to 0$ и $\Delta x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ с любой скоростью сходимости.

Другой вариант выбора коэффициентов управления в системе (2.3.15) — выбор из условия минимума квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty [x^\top(t) W x(t) + u^\top(t) W_u u(t)] dt.$$

Здесь $W(n\times n)$, $W_u(r\times r)$ — неотрицательно и положительно определенные постоянные матрицы соответственно.

Если система (2.3.15) управляема, то оптимальное управление имеет вид [2, 7, 54]

$$u(t) = -Kx(t), \quad K = W_u^{-1} B^\top P.$$

Матрица P размерности $n \times n$ является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PA + A^\top P - PBW_u^{-1} B^\top P + W = 0.$$

Система (2.3.15), замкнутая этим управлением, будет асимптотически устойчива.

2.3.4. Управление и оценивание нестационарных приводимых систем. Для приводимых нестационарных систем, описанных в разделе 2.2, решение задачи управления состоит из следующих этапов:

1. приведение данной нестационарной системы к стационарной системе большего порядка;
2. анализ управляемости (наблюдаемости) для полученной стационарной системы;
3. построение алгоритмов управления (оценивания) для полученной стационарной системы;
4. обратный переход к соответствующим исходным переменным.

Рассмотрим построение закона управления в системе

$$\dot{x} = Ax + B(t)u, \tag{2.3.20}$$

матрица $B(t)$ которой удовлетворяет условиям (2.2.4), (2.2.5).

Система (2.3.20), нестационарная по управлению, приводится к стационарной системе вида (2.2.7) к стационарной системе большего порядка

$$\dot{y} = Gy + B_y u, \quad y(mn\times 1), \tag{2.3.21}$$

где

$$\underset{(mn\times mn)}{G} = E_m \otimes A - S^\top \otimes E_n, \qquad \underset{(r\times mn)}{B_y^\top} = \left[\underset{(r\times n)}{B_1^\top} \dots \underset{(r\times n)}{B_s^\top} \underset{(r\times n)}{O} \dots \underset{(r\times n)}{O}\right];$$

при помощи замены переменных (2.2.6)

$$x = F^\top(t) y, \quad F^\top(t) = f^\top(t) \otimes E_n. \tag{2.3.22}$$

Будем предполагать, что система (2.3.21) управляема. Тогда закон управления в виде обратной связи имеет вид

$$u(t) = -Ky(t), \quad (mn\times 1)y(t), \quad \underset{(r\times mn)}{K} = \text{const}. \tag{2.3.23}$$

Матрицу K можно выбрать так, чтобы обеспечить любую степень затухания замкнутой системы

$$\dot{y} = G_k y, \quad G_k = G - B_y K. \tag{2.3.24}$$

Тогда при указанном выборе элементов матрицы K вектор $\underset{t\to\infty}{y(t)} \to 0$ и удовлетворяет неравенству

$$\|y(t)\| \leqslant r_1 e^{-\gamma_1 t}, \quad t \geqslant 0.$$

Здесь $r_1 = \mathrm{const} > 0$, $\gamma_1 > 0$ — заданная величина.

Вектор $x(t)$ согласно (2.3.22) подчиняется неравенству

$$\|x(t)\| \leqslant \|F^\top(t)\| \cdot \|y(t)\|, \quad t \geqslant 0. \tag{2.3.25}$$

Элементы $f_{ij}(t)$ матрицы $F(t)$ есть решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2.2.5) ($\dot f = Sf$), поэтому

$$\|F^\top(t)\| \leqslant r_2 e^{\gamma_2 t}, \quad t \geqslant 0, \quad r_2 = \mathrm{const} > 0,$$

где γ_2 — некоторая постоянная величина.

Неравенство (2.3.25) можно переписать в виде

$$\|x(t)\| \leqslant r_1 r_2 e^{(\gamma_1+\gamma_2)t}, \quad t \geqslant 0.$$

Выбирая γ_1 таким образом, чтобы $\gamma_1 + \gamma_2 \leqslant -\gamma_0 < 0$, где γ_0 — желаемая степень затухания переменных $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получаем

$$\|x(t)\| \leqslant r_3 e^{-\gamma_0 t}, \quad t \geqslant 0.$$

Таким образом, управление (2.3.23) обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (2.3.24).

Если в законе управления (2.3.23) матрица K выбирается из условия оптимизации функционала

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty [y^\top(t) W_y y(t) + u^\top(t) W_u u(t)]dt$$

(здесь $W_y(mn \times mn)$, $W_u(r \times r)$ — неотрицательно и положительно определенные постоянные матрицы соответственно), тогда $K = W_u^{-1} B_y^\top P$.

Матрица P размерности $mn \times mn$ является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PG + G^\top P - PB_y W_u^{-1} B_y^\top P + W_y = 0.$$

В таком случае γ_* — степень затухания $y(t)$ уже не является задаваемой, а определяется видом функционала.

Тогда

$$\|y(t)\| \leqslant r_{10} e^{-\gamma_* t}, \quad t \geqslant 0, \quad r_{10} = \mathrm{const} > 0.$$

Элементы $f_{ij}(t)$ матрицы $F(t)$ ограничены, поэтому

$$\|F^\top(t)\| \leqslant r_{20}, \quad t \geqslant 0, \quad r_{20} = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда для оценки вектора состояния исходной системы $x(t)$ имеет место неравенство

$$\|x(t)\| \leqslant r_{10} r_{20} e^{\gamma_* t}, \quad t \geqslant 0.$$

Таким образом, и в этом случае управление (2.3.23) обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (2.3.24).

Синтезированное на основе расширенной стационарной системы управляющее воздействие $u = -Ky$ необходимо вводить непосредственно в исходную систему.

Введем mn-мерный вектор

$$X = \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix},$$

первые n компонент которого представляют собой вектор x, а дополнительный вектор x_d имеет размерность $(mn - n) \times 1$.

Выберем матрицу $F_d^\top(t)$ размерности $((mn - n) \times mn)$ таким образом, чтобы квадратная матрица

$$T(t) = \begin{bmatrix} \underset{(n \times mn)}{F^\top(t)} \\ \underset{((mn-n)\times mn)}{F_d^\top(t)} \end{bmatrix},$$

первые n строк которой составляет матрица $F^\top(t)$, была невырожденной.

Представим обратную матрицу $T^{-1}(t)$ в блочной форме

$$T^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \underset{(mn\times n)}{L_1(t)} & \underset{(mn\times(mn-n))}{L_2(t)} \end{bmatrix}.$$

Из соотношения $T(t)T^{-1}(t) = E_{mn}$ следуют условия для матриц $F(t)$, $F_d(t)$, $L_1(t)$, $L_2(t)$, а именно

$$F^\top L_1 = E_n, \quad F^\top L_2 = O_n, \quad F_d^\top L_1 = O_n, \quad F_d^\top L_2 = E_{mn-n}. \tag{2.3.26}$$

Рассмотрим невырожденное преобразование

$$X = T(t)y, \quad y = T^{-1}(t)X \tag{2.3.27}$$

или

$$x = F^\top(t)y, \quad x_d = F_d^\top(t)y, \quad y = L_1(t)x + L_2(t)x_d. \tag{2.3.28}$$

Учитывая, что

$$\dot F^\top = F^\top H, \quad H = (S^\top \otimes E_n), \tag{2.3.29}$$

можно считать, что матрица $F_d^\top(t)$ подчиняется уравнению

$$\dot F_d^\top = F_d^\top H. \tag{2.3.30}$$

Дифференцируя соотношения (2.3.28), используя уравнения (2.3.29), (2.3.30) и свойства кронекеровского произведения, получим $F^\top(E_m \otimes A) = (f^\top \otimes E_n)(E_m \otimes A) = A(f^\top \otimes E_n) = AF^\top$, $F^\top(t)Q = B(t)$.

Тогда система уравнений, содержащая исходную нестационарную систему и уравнения для дополнительных переменных, имеет вид

$$\begin{gathered} \dot x = Ax + B(t)u, \\ \dot x_d = F_d^\top(t)(E_m \otimes A)(L_1(t)x + L_2(t)x_d) + B_d(t)u, \quad B_d(t) = F_d^\top(t)Q. \end{gathered} \tag{2.3.31}$$

Уравнения относительно компонент x, x_d системы, замкнутой управлением

$$u = -Ky = -K(L_1(t)x + L_2(t)x_d), \tag{2.3.32}$$

в которой матрица K выбрана из условий асимптотической устойчивости стационарной системы (2.3.24), имеют вид:

$$\begin{gathered} \dot x = Ax - B(t)K(L_1(t)x + L_2(t)x_d), \\ \dot x_d = F_d^\top(t)[E_m \otimes A - B_yK](L_1(t)x + L_2(t)x_d). \end{gathered} \tag{2.3.33}$$

Решения $x(t)$, $x_d(t)$ этой системы стремятся к нулю при $t \to \infty$, причем с заданной степенью затухания, в силу выбора матрицы K, так как компоненты векторов $x(t)$, $x_d(t)$ связаны с компонентами вектора y преобразованием (2.3.28). В самом деле, матрица $T(t)$ допускает в силу (2.3.29), (2.3.30) оценку $\|T(t)\| \leqslant \delta e^{\kappa t}$, а вектор $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$ с любой наперед заданной степенью затухания.

Замечание 2.3. Следует отметить, что если $m = 2$, матрицу $F_d^\top(t)$ можно представить в виде, аналогичном (2.2.8), $F_d^\top(t) = f_d^\top(t) \otimes E_n$ ($f_d(t)$ — двумерный вектор). В этом случае система уравнений (2.3.31) упрощается и принимает вид

$$\begin{gathered} \dot x = Ax + B(t)u, \\ \dot x_d = Ax_d + B_d(t)u. \end{gathered} \tag{2.3.34}$$

Рассмотрим вопрос о построении оценки вектора состояния системы

$$\dot x = Ax, \quad \sigma = C(t)x, \quad A(n\times n) = \mathrm{const}, \tag{2.3.35}$$

где матрица $\underset{(l\times n)}{C(t)}$ удовлетворяет условиям

$$C(t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(t)C_i, \quad f = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_p & f_{p+1} & \ldots & f_m \end{bmatrix}^\top, \quad \dot f = Sf. \tag{2.3.36}$$

Здесь $\underset{(l\times n)}{C_i}$ $(i=1,2,\ldots,p)$, $\underset{(m\times m)}{S_i}$ — постоянные матрицы. Система (2.3.35) при помощи преобразования (2.2.8)

$$y = F(t)x, \quad F(t) = (f(t)\otimes E_n)x \tag{2.3.37}$$

приводится к стационарной системе

$$\dot{y} = Gy, \quad \sigma = C_y y, \tag{2.3.38}$$

где $y(mn\times 1)$ — вектор состояния,

$$\underset{(mn\times mn)}{G} = S\otimes E_n + E_m\otimes A, \qquad \underset{(l\times mn)}{C_y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_p & O & \ldots & O\end{bmatrix}.$$

Будем предполагать, что стационарная система (2.3.38) является наблюдаемой. Алгоритм оценивания строится на основании стационарной системы (2.3.38)

$$\dot{\tilde{y}} = G\tilde{y} + L(\sigma - C_y\dot{\tilde{y}}), \quad \sigma = C_y y, \quad \tilde{y}(t_0) = 0. \tag{2.3.39}$$

Постоянную матрицу $L(mn\times l)$ можно выбирать из условий асимптотической устойчивости с любой степенью затухания ошибки оценки Δy

$$\Delta\dot{y} = (G - LC_y)\Delta y, \quad \Delta y(t_0) = y(t_0). \tag{2.3.40}$$

Ошибка оценки Δy удовлетворяет неравенству

$$\|\Delta y(t)\| \leqslant M_1\exp(\gamma_1 t),$$

где $M_1 = \mathrm{const} > 0$, а $\gamma_1 < 0$ — любое наперед заданное число.

Покажем, что выбор матрицы L можно осуществить так, чтобы обеспечить любую степень затухания ошибки оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$ вектора состояния исходной системы. Оценки векторов $x(t)$ и соответствующие им ошибки оценок $\Delta x(t)$ связаны с $\tilde{y}$, $\Delta y(t)$, согласно (2.3.37), соотношениями

$$\tilde{y} = F(t)\tilde{x}, \quad \Delta y = F(t)\Delta x. \tag{2.3.41}$$

Системы (2.3.41) представляют собой переопределенные системы линейных алгебраических уравнений относительно компонент векторов $\tilde{x}$, Δx. Из соотношений (2.3.41) выразим $\tilde{x}$, Δx

$$\tilde{x} = D(t)\tilde{y}, \quad \Delta x = D(t)\Delta y, \tag{2.3.42}$$

где $D(t)$ — матрица, удовлетворяющая уравнению $D(t)F(t) = E_n$.

В частности,

$$D(t) = [F^\top(t)F(t)]^{-1}F^\top(t). \tag{2.3.43}$$

Элементы матрицы $F(t)$ являются решениями линейной системы с постоянными коэффициентами (2.2.5). Учитывая соотношение (2.3.43), будем иметь

$$\|D(t)\| \leqslant M_2\exp(\gamma_2 t),$$

где $M_2 = \mathrm{const} > 0$, а γ_2 — некоторое число.

Тогда

$$\|\Delta x(t)\| \leqslant \|D(t)\|\cdot\|\Delta z(t)\| \leqslant M_1M_2\exp((\gamma_1+\gamma_2)t).$$

Выбирая $\gamma_1 < -\gamma_0 - \gamma_2$, можно добиться любой наперед заданной степени затухания $\gamma_0 > 0$ ошибки оценки $\Delta x(t)$.

Алгоритм оценивания исходной системы размерности n включает в себя:

1. алгоритм оценивания стационарной системы (2.3.39),
2. вычисление матрицы $D(t)$ (в том числе обращение матрицы $F^\top F$ размерности $n\times n$),
3. переход от оценок $\tilde{y}$ к оценкам $\tilde{x}$ по формулам (2.3.42).

2.4. Методические примеры

Рассмотрим простую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u \sin \omega t, \\ \dot{x}_2 &= u \cos \omega t. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Запишем ее в матричном виде

$$\dot{X} = b(t)u, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

Вектор $b(t)$ представим в виде (2.2.4)

$$b(t) = \sin \omega t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos \omega t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (r = 1, \ s = 2).$$

Очевидно, этот вектор удовлетворяет уравнению (2.2.5)

$$\dot{b} = Sb, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$$

и может быть записан в виде

$$b(t) = e^{St} b(0), \quad b(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Замена переменных (2.2.6)

$$X = e^{St} Y \tag{2.4.2}$$

приводит систему (2.4.1) к стационарной системе

$$\dot{Y} = -S^\top Y + b(0)u$$

или в скалярной форме

$$\dot{y}_1 = -\omega y_2, \quad \dot{y}_2 = \omega y_1 + u. \tag{2.4.3}$$

Система (2.4.3), очевидно, управляема.

Управление с виде обратной связи имеет вид

$$u = -K_y^\top Y, \quad K_y^\top = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}.$$

Замкнутая этим управлением система (2.4.3):

$$\dot{y}_1 = -\omega y_2, \quad \dot{y}_2 = (\omega - k)_1 y_1 - k_2 y_2. \tag{2.4.4}$$

Параметры k_1, k_2 могут быть выбраны из условия асимптотической устойчивости системы (2.4.4).

Управление, которое следует вводить в исходную систему, имеет вид

$$u(t) = -K_y^\top e^{-St} X(t). \tag{2.4.5}$$

Нестационарная система (2.4.1), замкнутая этим управлением, может быть записана в форме

$$\dot{X} = N(t)X, \quad N(t) = -e^{St} b(0) K_y^\top e^{-St} X \tag{2.4.6}$$

или в скалярном виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -[(k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t) x_1 + (-k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t) x_2] \sin \omega t, \\ \dot{x}_2 &= -[(k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t) x_1 + (-k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t) x_2] \cos \omega t. \end{aligned}$$

Однородная нестационарная система (2.4.6) асимптотически устойчива, так как стационарная система (2.4.4) в соответствии с выбором k_1, k_2 асимптотически устойчива, а преобразование (2.4.2) ограничено.

Замечание 2.4. Матрица N удовлетворяет уравнению

$$\dot{N} = SN - NS,$$

т. е. система (2.4.6) относится к классу приводимых однородных систем [7].

Теперь рассмотрим другой пример:
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \\ \dot{x}_2 &= u\cos\omega t \end{aligned} \tag{2.4.7}$$
или
$$\dot{X} = b(t)u,$$
где
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\omega t \end{bmatrix}.$$
Вектор $b(t)$ представляется в виде (2.2.4)
$$b(t) = 1{,}0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos\omega t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В представлении (2.2.4) $r = 1$, $s = 2$. Но в этом случае вектор-функция $b(t)$ не удовлетворяет уравнению вида (2.2.5), поэтому добавим функцию $\sin\omega t$ и рассмотрим вектор-функцию
$$\underset{(3\times1)}{f(t)} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\omega t & \sin\omega t \end{bmatrix}^\top,$$
которая удовлетворяет уравнению (2.2.5) с матрицей
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Замена переменных (2.2.6) ($n = 2$, $m = 3$) в данном случае имеет вид
$$\underset{(2\times1)}{x} = \underset{(2\times6)}{F^\top(t)}\underset{(6\times1)}{Y}$$
или
$$x_1 = y_1 + \cos\omega t y_3 + \sin\omega t y_5, \quad x_2 = y_2 + \cos\omega t y_4 + \sin\omega t y_6. \tag{2.4.8}$$
Дифференцируя выражения (2.4.8), подставляя их в систему (2.4.7) и приравнивая коэффициенты при функциях: 1, $\cos\omega t$, $\sin\omega t$, получим стационарную систему уравнений
$$\dot{Y} = GY + Qu. \tag{2.4.9}$$

Матрица системы уравнений (2.4.7) в данном случае равна нулю ($A = 0$), поэтому матрицы стационарной системы (2.4.9), согласно (2.2.7) имеют вид
$$\underset{(6\times6)}{G} = -S^\top \otimes E_2 = \begin{bmatrix} O_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & -\omega E_2 \\ O_2 & \omega E_2 & O_2 \end{bmatrix}, \quad \underset{(1\times6)}{Q}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4.10}$$

В скалярном виде система (2.4.9)
$$\dot{y}_1 = u, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \dot{y}_3 = -\omega y_5, \quad \dot{y}_4 = -\omega y_6 + u, \quad \dot{y}_5 = \omega y_3, \quad \dot{y}_6 = \omega y_4. \tag{2.4.11}$$

Применяя критерий Красовского (см. п. 2.1) легко получить, что исходная нестационарная система (2.4.7) 2-го порядка управляема. Стационарная система 6-го порядка (2.4.10) расщепляется на две подсистемы
$$\dot{y}_1 = u, \quad \dot{y}_4 = -\omega y_6 + u, \quad \dot{y}_6 = \omega y_4, \tag{2.4.12}$$
$$\dot{y}_2 = 0, \quad \dot{y}_3 = -\omega y_5, \quad \dot{y}_5 = \omega y_3. \tag{2.4.13}$$

Однородная система (2.4.12) относительно переменных y_2, y_3, y_5, очевидно, неуправляема. Подсистема (2.4.11) относительно переменных $Y_1 = [y_1 y_4 y_6]^\top$ имеет вид
$$\dot{Y}_1 = G_1 Y_1 + Q_1 u, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4.14}$$

Эта система управляема, при этом вектор $Y_1 = [y_1 y_4 y_6]^\top$ содержит информацию о всех компонентах исходного вектора состояния x_1, x_2, поэтому переменные y_2, y_3, y_5 можно положить тождественно равными нулю. В таком случае замена переменных (2.4.2) примет вид

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_4 \cos\omega t + y_6 \sin\omega t. \tag{2.4.15}$$

Для системы (2.4.13) можно построить управление в виде обратной связи

$$u = -K_y^\top Y, \quad K_y^\top = [k_1 k_2 k_3], \quad (k_i = \mathrm{const})$$

или

$$u = -k_1 y_1 - k_2 y_4 - k_3 y_6, \tag{2.4.16}$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы:

$$\dot{Y}_1 = G_k Y_1, \quad G_k = G_1 - QK_y^\top. \tag{2.4.17}$$

Чтобы ввести управление (2.4.15) в исходную нестационарную систему (2.4.7), выразим переменные y_1, y_4, y_6 через исходные переменные x_1, x_2 и дополнительную переменную, введенную так, чтобы преобразование от переменных x_1, x_2, x_d к переменным y_1, y_4, y_6 было невырожденным. Дополнительную переменную представим в виде $x_d = -\sin\omega t y_4 + \cos\omega t y_6$. Эта переменная подчиняется уравнению

$$\dot{x}_d = -u \sin\omega t. \tag{2.4.18}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$Y = e^{St} X, \quad y_1 = x_1, \quad y_4 = x_2 \cos\omega t - x_d \sin\omega t, \quad y_6 = x_2 \sin\omega t + x_d \cos\omega t. \tag{2.4.19}$$

Выразим управление, построенное для стационарной системы (2.4.16), при помощи обратного преобразования (2.4.18) через переменные x_1, x_2, x_d

$$u = -k_1 x_1 - (k_2 \cos\omega t + k_3 \sin\omega t) x_2 + (k_2 \sin\omega t - k_3 \cos\omega t) x_d. \tag{2.4.20}$$

Управление (2.4.19) вводится в расширенную нестационарную систему (соответствующую системе (2.3.19)), содержащую исходную систему (2.4.7) и уравнение (2.4.17). Это управление обеспечит асимптотическую устойчивость системы (2.4.7), (2.4.17) замкнутой управлением (2.4.19).

Замечание 2.5. Система (2.4.7), (2.4.17) имеет вид

$$\dot{X} = N(t)u, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_d \end{bmatrix}^\top, \quad N(t) = \begin{bmatrix} 1 & \cos\omega t & -\sin\omega t \end{bmatrix}^\top. \tag{2.4.21}$$

Система, замкнутая управлением (2.4.15), введенным при помощи преобразования (2.4.18), представляется в виде

$$\dot{X} = N_k(t) X, \quad N_k = -e^{-St} N_0 k^\top e^{St}, \quad N_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top. \tag{2.4.22}$$

Матрица системы (2.4.21) удовлетворяет уравнению

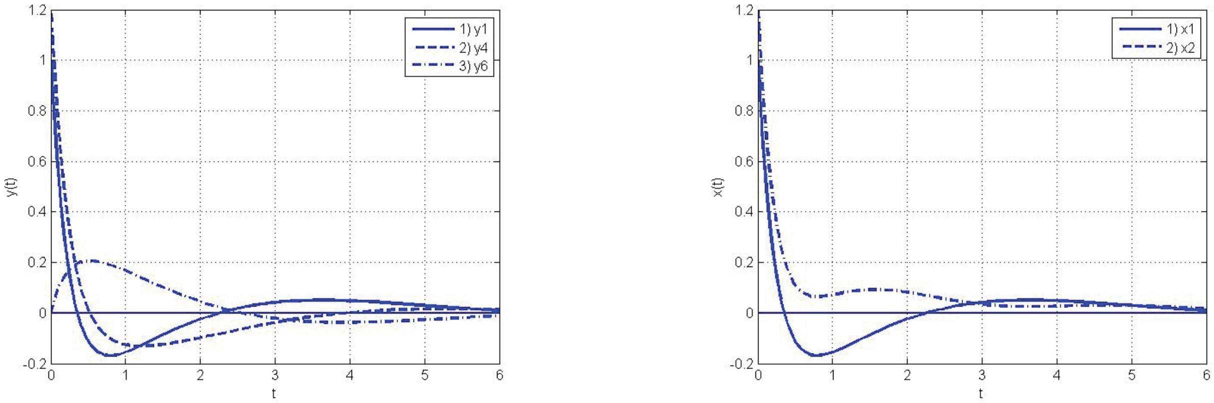
$$\dot{N}_k = SN_k - N_k S.$$

Это означает, что однородная нестационарная система уравнений (2.4.21) относится к классу приводимых однородных систем, описанному в [7].

Проводилось моделирование двух вариантов стабилизации: оптимальный алгоритм стабилизации, основанный на линейно-квадратичном функционале J; алгоритм стабилизации, при котором постоянные коэффициенты управления выбираются так, чтобы характеристический многочлен уравнений замкнутой системы (2.4.16) совпадал с любым наперед заданным многочленом с действительными коэффициентами.

Значения параметров задачи: $\omega = 1{,}0$; начальные условия $x_1(0) = 1{,}0$; $x_2(0) = 0{,}0$; $x_d(0) = 0{,}0$. Параметры функционала J: $W = wE_3$; $w = 1{,}0$; $R = 0{,}1$.

Поведение переменных $y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ — компонент вектора состояния стационарной системы (2.4.11) и переменных $x_i(t)$, $(i = 1, 2)$ — вектора состояния исходной нестационарной системы (2.4.7) при введении управления, построенного на основании оптимального алгоритма показано на рисунке 2.1.



(a) $y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ (b) $x_i(t)$ $(i = 1, 2)$

Рис. 2.1. Поведение переменных $y_i(t)$, $x_i(t)$ $(i = 1, 2)$ при использовании оптимального алгоритма.

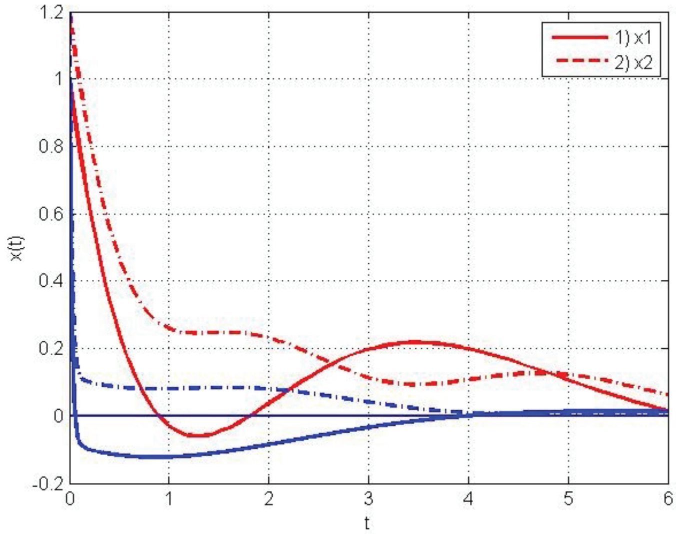


Рис. 2.2. Поведение переменных $x_i(t)$ $(i = 1, 2)$ при различных значениях параметра R (красные кривые $R = 1{,}0$, синие $R = 0{,}001$).

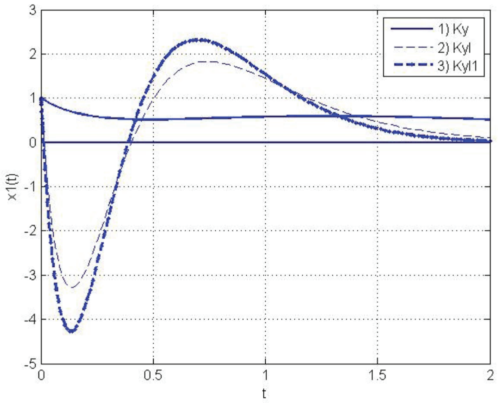
Влияние параметра R в функционале на поведение компонент вектора состояния можно видеть на рисунке 2.2.

Коэффициенты управления для стационарной системы, вычисленные по стандартной программе LQR при $R = 0{,}1$, имеют вид $K_y^\top = \begin{bmatrix} 3{,}1623 & 2{,}1177 & 3{,}9390 \end{bmatrix}$.

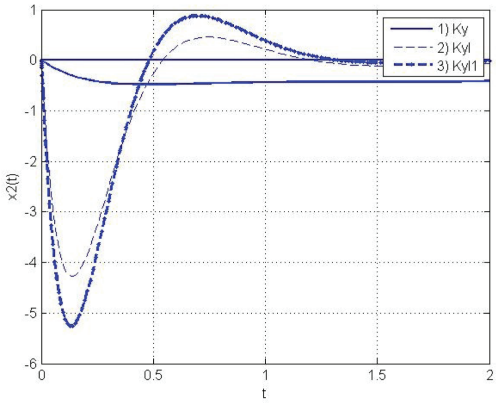
Корни характеристического уравнения системы, замкнутой этим управлением, имеют следующие значения $\lambda_1 = -4{,}3029$, $\lambda_{2,3} = -0{,}48 \pm 0{,}7045i$.

При втором способе стабилизации коэффициенты управления выбираются так, чтобы характеристический многочлен уравнений замкнутой системы (2.4.10) совпадал с любым наперед заданным многочленом

Величину затухания можно выбирать из тех или иных соображений, например, в соответствии с ограничениями на время затухания или на величину перерегулирования в процессах затухания.



(a) $x_1(t)$



(b) $x_2(t)$

Рис. 2.3. Поведение переменных $x_i(t)$ $(i = 1, 2)$ при различных значениях λ_i.

При $\gamma = -4{,}3$ постоянные коэффициенты k_i в управлении $u = -K_y^\top y$ (2.4.9) имеют вид

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \gamma, \quad K_y^\top = \begin{bmatrix} 79{,}5070 & -66{,}6070 & 54{,}4700 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_1 = \gamma, \quad \lambda_{2,3} = \gamma \pm 2{,}15i, \quad K_y^\top = \begin{bmatrix} 99{,}3837 & -86{,}4837 & 59{,}0925 \end{bmatrix}.$$

Сравнение поведения процессов стабилизации, проведенных при использовании указанных способов выбора коэффициентов управления, представлено на рисунке 2.3.

Здесь введены обозначения: Ky — коэффициенты управления, построенные согласно оптимальному алгоритму; Kyl — коэффициенты выбраны по второму способу при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \gamma$; $Kyl1$ — коэффициенты выбраны по второму способу при $\bar\lambda_1 = \gamma$, $\bar\lambda_{2,3} = \gamma \pm \beta i$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Ю., Тихонов А. А.* Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат// Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Астрон. — 2012. — № 2. — С. 79–90.
2. *Александров В. В, Лемак С. С., Парусников Н. А.* Лекции по механике управляемых систем. — М.: Курс, 2018.
3. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
4. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
5. *Белецкий В. В., Хентов А. А.* Вращательное движение намагниченного спутника. — М.: Наука, 1985.
6. *Дубошин Г. Н.* О вращательном движении искусственных небесных тел// Бюлл. ИТА АН СССР. — 1960. — *7*, № 7. — С. 511–520.
7. *Каленова В. И., Морозов В. М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — М.: Физматлит, 2010.
8. *Каленова В. И., Морозов В. М.* Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением// Прикл. мат. мех. — 2012. — *76*, № 4. — С. 576–588.
9. *Каленова В. И., Морозов В. М.* Об управлении линейными нестационарными системами специального вида// Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 3. — С. 6–15.
10. *Калман Р. Е.* Об общей теории систем управления// в кн.: Тр. Конгр. ИФАК. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 521–547.
11. *Калман Р. Е., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
12. *Кондурарь В. Т.* Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара// Прикл. мех. техн. физ/ — 1960. — *36*, № 5. — С. 890–901.
13. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.

14. *Лурье А. А.* Аналитическая механика. — М.: ГИФМЛ, 1961.
15. *Морозов В. М.* Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов// Космич. исслед. — 1967. — *5*, № 5. — С. 727–732.
16. *Морозов В. М.* Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов// Космич. исслед. — 1969. — *7*, № 3. — С. 395–401.
17. *Морозов В. М.* Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. Мех. — 1968. — № 6. — С. 109–111.
18. *Морозов В. М.* Устойчивость движения космических аппаратов// в кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНИТИ, 1971. — С. 1–83.
19. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации// Космич. исслед. — 2020. — *58*, № 3. — С. 199–207.
20. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов// Космич. исслед. — 2021. — *59*, № 5. — С. 393–407.
21. *Морозов В. М., Каленова В. И., Рак М. Г.* О стабилизации регулярныз прецессий спутника при помощи магнитных моментов// Прикл. мат. мех. — 2021. — *85*, № 4. — С. 436–453.
22. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил// Космич. исслед. — 2022. — *60*, № 3. — С. 246–253.
23. *Овчинников М. Ю., Пеньков В. И., Ролдугин Д. С., Иванов Д. С.* Магнитные системы ориентации малых спутников. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.
24. *Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С.* Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников// Космические аппараты и технологии. — 2019. — *3*, № 2 (28). — С. 73–86.
25. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
26. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967.
27. *Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю.* Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты// Космич. исслед. — 2000. — *38*, № 3. — С. 296–306.
28. *Сарычев В. А.* Вопросы ориентации искусственных спутников// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. — М.: ВИНИТИ, 1978.
29. *Сарычев В. А.* Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов// в кн.: Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. — М.: Физматлит, 2009. — С. 111–126.
30. *Сарычев В. А., Овчинников М. Ю.* Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 23. — М.: ВИНИТТИ, 1985.
31. *Тихонов А. А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле// Космич. исслед. — 2003. — *41*, № 1. — С. 69–79.
32. *Хентов А. А.* Движение около центра масс экваториального спутника на круговой орбите при взаимодействии магнитного и гравитационного полей Земли// 31 — 1967. — С. 947–950.
33. *Хентов А. А.* Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс// Космич. исслед. — 1968. — *6*, № 5. — С. 793–795.
34. *Черноусько Ф. Л.* Об устойчивости регулярных прецессий спутника// Прикл. мат. мех. — 1964. — *28*, № 1. — С. 155–157.
35. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system// Adv. Space Res. — 2018. — *62*. — P. 142–151.
36. *Aleksandrov A. Yu, Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A.* Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the König frame// Nonlinear Dyn. — 2015. — *82*. — P. 1493–1505.
37. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite// Aerospace Sci. Techn. — 2020. — № 3. — P. 1–12.
38. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay// IEEE Access. — 2021. — *9*. — 132623–132630.
39. *Antipov K. A., Tikchonov A. A.* Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the Nth approximation// Geomagnetizm and Aeronomy. — 2013. — *53*, № 2. — P. 271–281.
40. *Antipov K. A., Tikhonov A. A.* On satellite electrodynamic attitude stabilization// Aerospace Sci. Techn. — 2014. — *33*. — P. 92–99.

41. *Bin Zhou* Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with application to spacecraft magnetic attitude control// Automatica. — 2015. — *60.* — P. 145–154.
42. *Brewer J. W.* Kronecker Products and Matrix calculus in system Theory// IEEE Trans. Circ. Syst. — 1978. — *CAS-25*, № 9. — P. 772–781.
43. *Chang A.* An algebraic characterization of controllability// IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — *AC-10*, № 1. — P. 112–113.
44. *Cubas J., de Ruiter A.* Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft// Acta Astronaut. — 2020. — *169.* — P. 108–123.
45. *Cubas J., Farrahi A., Pindado S.* Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits// J. Guid. Control Dynam. — 2015. — *38.* — P. 1947–1958.
46. *Frik M. A.* Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques// AIAA J. — 1970. — *8*, № 10. — P. 1780–1785.
47. *Giri D. K., Mukherjee B. K., Sinha M.* Three-axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-axis global magnetic attitude control// Asian J. Control. — 2017. — *19*, № 6. — P. 2028–2041.
48. *Giri D. K. and Sinha M.* Magneto-Coulombic attitude control of Earth-pointing satellites// J. Guid. Control Dynam. — 2014. — *37*, № 6. — P. 1946–1960.
49. *Giri D. K., Sinha M.* Lorentz Force Based Satellite Attitude Control// J. Inst. Eng. India. Ser. C. — 2016. — *97.* — P. 279–290.
50. *Hautus M. L. J.* Controllability and observability conditions of linear autonomous systems// Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. — 1969. — *72.* — P. 443–448.
51. *Huang X., Yan Y.* Fully actuated spacecraft attitude control via the hybrid magnetocoulombic and magnetic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2017. — *40*, № 12. — P. 1–8.
52. *Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Doronin D. M., Ovchinnikov A. V.* Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties// Acta Astronaut. — 2017. — *132.* — P. 103–110.
53. *Kalenova V. I., Morozov V. M.* Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces// Aerospace. Sci. Technol. — 2020. — *106.* — 106105.
54. *Kalman R. E.* Lectures on Controllability and Observability. — Bologna, Italy: C.I.M.E., 1969.
55. *Laub A. J., Arnold W. F.* Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models// IEEE Trans. Automat. Control. — 1984. — *29*, № 2. — P. 163–165.
56. *Likins P. W.* Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame// J. Astronaut. Sci. — 1965. — *12*, № 1. — P. 18–24.
57. *Morozov V. M., Kalenova V. I.* Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959.* — 020003.
58. *Mostaza-Prieto D., Roberts P. C. E.* Methodology to analyze attitude stability of satellites subjected to aerodynamic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2016. — *39.* — P. 437–449.
59. *Nababi M., Barati M.* Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application// Appl. Math. Model. — 2017. — *46.* — P. 365–381.
60. *Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V.* Geomagnetic field models for satellite angular motion studies// Acta Astronaut. — 2018. — *144.* — P. 171–180.
61. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites// Progr. Aerospace Sci. — 2019. — *109.* — 100546.
62. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study// Acta Astronaut. — 2015. — *110.* — P. 279–286.
63. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Ivanov D. S., Penkov V. I.* Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame// Acta Astronaut. — 2015. — *116.* — P. 74–68.
64. *Psiaki M.* Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation// J. Guid. Control Dynam. — 2001. — *24*, № 2. — P. 386–394.
65. *Psiaki M. L.* Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing// J. Guid. Control Dynam. — 2004. — *27.* — P. 347–355.
66. *Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K.* Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data// J. Guid. Control Dynam. — 1990. — *13*, № 3. — P. 506–514.

67. *Psiaki M. L., Oshman Y.* Spacecraft attitude rate estimation from geomagnetic fiend measurements// J. Guid. Control Dynam. — 2003. — *26*, № 2. — P. 244–252.
68. *Sarychev V. A., Mirer S. A.* Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// Celestial Mech. Dynam. Astronom. — 2000. — *76*, № 1. — P. 55–68.
69. *Sarychev V. A., Mirer S. A., Degtyarev A. A., Duarte E. K.* Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// Celestial Mech. Dynam. Astronom. — 2007. — *97*, № 4. — P. 267–287.
70. *Searcy J. D., Pernicka H. J.* Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach// J. Guid. Control Dynam. — 2012. — *35*, № 6. — P. 1693–1701.
71. *Silani E., Lovera M.* Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results// Control Eng. Pract. — 2005. — *13.* — P. 357–371.
72. *Sofyal A., Jafarov E. M., Wisniewski R.* Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode// Aerospace Sci. Technol. — 2018. — *76.* — P. 91–104.
73. *Sukhov E.* Numerical approach for bifurcation and orbital stability analysis of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1925.* — 012013.
74. *Sutherland R., Kolmanovsky I. K., Girard A. R.* Attitude control of a 2U cubesat by magnetic and air drag torques// IEEE Trans. Control Syst. Techn. — 2018. — *27*, № 3. — P. 1047–1059.
75. *Tortora P., Oshman Y., Santoni F.* Spacecraft angular rate estimation from magnetometer data on using and analytic predictor// J. Guid. Control Dynam. — 2004. — *27*, № 3. — P. 365–373.
76. *Wertz J.* Spacecraft Attitude Determination and Control. — Dordrecht: D. Reidel, 1978.
77. *Yang Y.* Controllability of spacecraft using only magnetic torques// IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst. — 2016. — *52*, № 2. — P. 955–962.
78. *Zhou K., Huang H., Wang X., Sun L.* Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient// Aerospace Sci. Techn. — 2017. — *60.* — P. 115–123.

Морозов Виктор Михайлович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: moroz@imec.msu.ru

Каленова Вера Ильинична
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: kalenova44@mail.ru

Рак Михаил Геннадьевич
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: mihailrak@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 93–103
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-93-103

УДК 514.76

ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

© 2023 г. **Л. РЫПАРОВА, Й. МИКЕШ, П. ПЕШКА**

Аннотация. В статье изложены некоторые результаты, полученные для почти геодезических кривых, геодезических отображений и преобразований. Доказано, что отображение или преобразование, при котором все почти геодезические кривые переходят в почти геодезические кривые, являются геодезическими. При геодезических отображениях и преобразованиях сохраняются почти геодезические кривые.

Ключевые слова: почти геодезическая кривая, геодезическое отображение, проективное преобразование.

ALMOST GEODESIC CURVES AND GEODESIC MAPPINGS

© 2023 **L. RYPAROVA, J. MIKEŠ, P. PEŠKA**

Abstract. In this paper, we present some results obtained for almost geodesic curves and geodesic mappings and transformations. We prove that a mapping under which all almost geodesic curves pass to almost geodesic curves is geodesic. Under geodesic mappings and transformations, almost geodesic curves are preserved.

***Keywords and phrases*:** almost geodesic curve, geodesic mapping, projective transformation.

***AMS Subject Classification*:** 53B05, 53A05

1. Введение. Как известно, геодезические линии играют большую роль не только в математике, но и в ее приложениях, особенно в механике и физике. Их история связана с именами классиков как Бернулли, Эйлер и Лагранж. Особенную роль нашли в римановой и псевдо-римановой геометрии, а также в теории пространств аффинной связности и их обобщений.

Обобщением геодезических линий являются многие классы кривых, введенных в рассмотрение с различных точек зрения. С точки зрения математического моделирования физических полей ввел в рассмотрение квазигеодезические линии А. З. Петров [96]. Обобщением являются магнетические траектории, например, [46]. Геометрическим обобщением являются F-планарные кривые, введенные Й. Микешем и Н. С. Синюковым [23]. Другим направлением, которое исходило от понятия параллельности, являлось введение Н. С. Синюковым [31] почти геодезических кривых.

С выше введенными классами кривых связаны многие типы отображений, сохраняющие те или другие свойства. Геодезические отображения сохраняют геодезические линии. Их исследование началось в работах Э. Бельтрами [52, 53]. Т. Леви-Чивита [81] поставил и решил в специальной системе координат задачу о нахождении римановых пространств с общими геодезическими. Примечательно, что она была связана с изучением уравнений динамики механических систем. Затем теория геодезических отображений римановых, псевдо-риманновых и пространств аффинной связности без кручения развивалась в работах Т. Томаса [119,120], Ж. Томаса [118], Г. Вейля [126],

Работа выполнена при поддержке гранта «Алгебраические и геометрические структуры» университета им. Ф. Палацкого (проект IGA PrF 2022017).

Л. П. Эйзенхарта [43, 74, 75], П. А. Широкова [42], А. С. Солодовникова [37–39], Н. С. Синюкова [27–30, 32, 34, 35], А. В. Аминовой [2, 45], Й. Микеша [11–18, 34, 76, 77, 82–84, 92, 93, 100, 102, 107] и других.

Вопросы, поднятые при изучении геодезических отображений, были развиты В. Ф. Каганом [10], Г. Врэнчану [125], Я. Л. Шапиро [41], Д. В. Веденяпиным [9] и др. Перечисленными авторами найдены специальные классы $(n-2)$-проективных пространств.

А. З. Петровым [96] было введено понятие квазигеодезических отображений, при которых геодезические линии отображаются на квазигеодезические линии и выполняются дополнительные условия, имеющие физикальную сущность. Специальными квазигеодезическими отображениями, в частности, являются голоморфно-проективные отображения келеровых пространств, рассмотренные Т. Оцуки, Я Тасиро, М. Прванович, Й. Микешем и др. [34, 35, 47, 49–51, 78, 84, 93].

Естественным обобщением этих классов отображений являются почти геодезические отображения, введенные в рассмотрение Н. С. Синюковым (см. [31, 33–35]). Им же выделены три типа почти геодезических отображений π_1, π_2, π_3. Вопрос о том, полна ли данная классификация почти геодезических отображений, долгое время оставался открытым. Полнота этой классификации установлена в работе В. Е. Березовского, Й. Микеша [61, 62].

Затем теория почти геодезических отображений развивалась, например, в работах В. С. Собчука [36, 108], В. С. Шадного [40], Н. Я. Яблонской [44], В. Е. Березовского, Й. Микеша [3, 5–8, 54–57, 59–64, 64–67, 69, 69–71, 84, 89, 93]. Приложения найдены и в теоретической физике [79].

Исследования геодезических и почти геодезических отображений обобщенно римановых пространств и пространств аффинной связности с кручением продолжили Н. О. Весич, А. М. Велимирович, Л. М. Велимирович, И. Гинтерлейтнер, М. Л. Златанович, С. М. Минчич, М. С. Найданович (Чирич), М. З. Петрович и М. С. Станкович [73, 94, 97–99, 109–114, 121–124, 127–132] и др.

Заметим, что наглядным примером геодезических отображений являются центральные проекции плоскостей и гномоническая проекция полусферы на плоскость, а также построенное отображение сферы на себя, см. [18, 83, 93]. В работе [21] при помощи параллельных и центральных проекций плоскости или сферы на сферу построены наглядные примеры почти геодезических отображений «в целом». Подобный результат получен для поворотных отображений [20].

Другие исследования в этом направлении можно найти, например, в работах [1, 4, 19, 20, 22, 46, 58, 67, 68, 72, 80, 85–88, 90–93, 95, 101, 103–106, 115–117].

В данной работе показано, что отображение или преобразование является геодезическим тогда и только тогда, когда все почти геодезические кривые переходят в почти геодезические кривые.

2. Геодезические линии и почти геодезические кривые в пространствах аффинной связности. Рассмотрим пространство аффинной связности A_n с объектом аффинной связности без кручения ∇, отнесенное к локальной системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. В этой системе координат ∇ определяются компонентами $\Gamma^h_{ij}(x)$, которые симметричны по нижним индексам, т.е. имеет место $\Gamma^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ji}(x)$.

Определение 1. Кривая ℓ пространства аффинной связности A_n называется *геодезической линией*, если ее касательный вектор вдоль нее параллелен.

Из этого определения вытекает, что кривая $\ell(t)$ является геодезической тогда и только тогда, когда ее касательный вектор $\lambda(t) = d\ell(t)/dt$ удовлетворяет уравнению $\nabla_{\lambda(t)}\lambda(t) = \rho(t)\cdot\lambda(t)$, где ρ — некоторая функция параметра t.

В локальных координатах основные уравнения геодезической линии $\ell(t)$: $x^h = x^h(t)$ можно записать в следующем виде

$$\lambda^h_1(t) = \rho(t)\cdot\lambda^h(t), \tag{1}$$

где λ^h и λ^h_1 — компоненты касательного вектора $\lambda(t)$ и вектора $\nabla_{\lambda(t)}\lambda(t)$, как известно

$$\lambda^h_1 \equiv \lambda^h_{,\alpha}\lambda^\alpha \equiv \frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}(x(t))\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t), \tag{2}$$

символ «,» обозначает ковариантную производную по связности ∇ пространства A_n и Γ^h_{ij} — компоненты связности ∇.

Это определение геодезических и их основные уравнения (1) в согласии с класическими исследованиями, например, Т. Леви-Чивиты [81], Л. П. Эйзенхарта [43, 74], А. П. Нордена [24], А. З. Петрова [25], П. Рашевского [26], Н. С. Синюкова [34] и других.

Известно, что на геодезической линии можно выбрать параметр t так, что функция $\rho(t) \equiv 0$. Этот параметр — *канонический* или *аффинный*. См. [24, 25, 34, 43, 74, 93]. Часто именно уравнение геодезических линий с каноническим параметром ($\nabla_\lambda \lambda = 0$) бывает представляемо в качестве определения геодезической, что на наш взгляд неправильно, так как понятие геодезических не должно зависеть от изменения параметра. Детально этот вопрос обсуждается в [93].

Как известно, точкой в данном направлении проходит единственная геодезическая. Но это верно в случае, когда функции $\Gamma^h_{ij}(x)$ удовлетворяют условиям Лифшица, в частности, когда эти функции дифференцируемы. В работах [103, 104, 106] найдены бифуркации геодезических линий, т.е. случаи, когда точкой в данном направлении проходят как минимум две геодезические динии. В этих исследованиях компоненты $\Gamma^h_{ij}(x)$ непрерывны.

Пример, который изложен в [93], говорит о том, что обратное утвержнение вообще не верно — здесь компоненты объектов связности не являются дифференцируемыми, а геодезические имеют обычные свойства, так как пространство является плоским, а в нем прямые имеют привычные свщйства и не допускают бифуркаций.

В 1963 г. Н. С. Синюков [31] ввел в рассмотрение следующее обобщение геодезических линий, см. [35, 71, 84], [34, с. 156–170], [93, с. 456]:

Определение 2. Кривая ℓ пространства аффинной связности A_n называется *почти геодезической линией*, если ее касательный вектор лежит в двумерной площадке, параллельной вдоль нее.

Кривая ℓ: $x^h = x^h(t)$ пространства аффинной связности A_n ($n > 2$) является почти геодезической линией, если ее касательный вектор $\lambda^h(t) = dx^h(t)/dt$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^h_2(t) = a(t) \cdot \lambda^h(t) + b(t) \cdot \lambda^h_1(t), \tag{3}$$

где

$$\lambda^h_2 \equiv \lambda^h_{1,\alpha}\lambda^\alpha \equiv \frac{d\lambda^h_1(t)}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}(x(t))\lambda^\alpha_1(t)\lambda^\beta(t), \tag{4}$$

$a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции указанного аргумента.

С учетом формул (2) и (4) получим уравнения (3) в следующей форме

$$\frac{d^2\lambda^h}{dt^2} + 3\Gamma^h_{\alpha\beta}\frac{d\lambda^\alpha}{dt}\lambda^\beta + (\partial_\gamma\Gamma^h_{\alpha\beta} + \Gamma^h_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma})\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = a(t) \cdot \lambda^h + b(t) \cdot \left(\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta\right). \tag{5}$$

Подобно тому как для геодезических, можно для почти геодезической кривой найти параметр t так, что либо функция $a(t) \equiv 0$ либо функция $b(t) \equiv 0$, см. [34, с. 162]. Здесь на основании этого факта доказано, что количество почти геодезических кривых существенно зависит только от одной функции $a(t)$ или функции $b(t)$ (другая при этом нулевая), начальной точки x_0, направления $\lambda(x_0)$ и «ускорения» $\lambda_1(x_0)$.

Несмотря на то, что в системе уравнений (5) фигурируют первые производные объектов связности, для существования почти геодезических линий это требование несущественно. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть компоненты $\Gamma^h_{ij}(x)$ в координатной области удовлетворяют условиям Лифшица, тогда для наперед заданных непрерывных функций $a(t)$ и $b(t)$ существует единственная почти геодезическая кривая, которая проходит заданной точкой, в заданном направлении и заданном «ускорении».*

Доказательство. Вытекает из того, что основные уравнения почти геодезической линии, согласно формулам (3) и (4), можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $x^h(t)$, $\lambda^h(t)$, $\lambda^h_1(t)$

$$\begin{aligned}
&dx^h(t)/dt = \lambda^h(t);\\
&d\lambda^h(t)/dt = -\Gamma^h_{ij}(x(t))\lambda^i(t)\lambda^j(t) + \lambda^h_1(t);\\
&d\lambda^h_1(t)/dt = -\Gamma^h_{ij}(x(t))\lambda^i_1(t)\lambda^j(t) + a(t)\cdot\lambda^h(t) + b(t)\cdot\lambda^h_1(t).
\end{aligned}\tag{6}$$

Для начальных значений Коши

$$x^h(t_0) = x^h_0, \quad \lambda^h(t_0) = \lambda^h_0, \quad \lambda^h_1(t_0) = \lambda^h_{1|0},$$

система (6) для заданных непрерывных функций $a(t)$ и $b(t)$ (одна из этих функций может быть априори обнулена, как уже было отмечено ранее), при условии, что компоненты $\Gamma^h_{ij}(x)$ удовлетворяют условиям Лифшица, имеет единственное решение. □

3. Геодезические и почти геодезические отображения. Напомним классическое определение геодезических отображений.

Определение 3. Отображение $f\colon A_n \to \overline{A}_n$ называют *геодезическим*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.

Н. С. Синюков [34] ввел в рассмотрение более общий класс отображений.

Определение 4. Отображение $f\colon A_n \to \overline{A}_n$ называют *почти геодезическим*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.

Предположим, что пространство аффинной связности A_n допускает отображение f на пространство аффинной связности $\overline{A}_n$ и эти пространства отнесены к общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. *Тензором деформации* связностей отображения f называют тензор

$$P^h_{ij}(x) = \overline{\Gamma}^h_{ij}(x) - \Gamma^h_{ij}(x), \tag{7}$$

где $\Gamma^h_{ij}(x)$ и $\overline{\Gamma}^h_{ij}(x)$ — компоненты объектов аффинной связности пространств A_n и $\overline{A}_n$, соответственно, в указанной системе координат.

Известно [2, 24, 25, 34, 43, 45, 74, 81, 93], что для того, чтобы отображение пространства A_n на пространство $\overline{A}_n$ было геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ тензор деформации связностей $P^h_{ij}(x)$ удовлетворял условиям (*уравнения Леви-Чивиты*)

$$P^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\delta^h_j + \psi_j(x)\delta^h_i, \tag{8}$$

где ψ_i — произвольный вектор и δ^h_i — символы Кронекера.

Известно [31, 33–35], что для того, чтобы отображение пространства A_n на пространство $\overline{A}_n$ было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ тензор деформации связностей $P^h_{ij}(x)$ удовлетворял условиям

$$A^h_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = a\cdot P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + b\cdot\lambda^h,$$

где λ^h — произвольный вектор, a и b — некоторые функции переменных $x^1, x^2, \dots, x^n$ и $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$, а тензор A^h_{ijk} определен следующим образом

$$A^h_{ijk} = P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k}.$$

Почти геодезические отображения пространств аффинной связности введены в расмотрение Н. С. Синюковым [31, 33–35]. Им, в соответствии с характером зависимости функций a и b от координат $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ вектора λ, были выделены три типа почти геодезических отображений π_1, π_2 и π_3.

Отображения π_1, π_2 и π_3 характеризуются соответственно условиями:

$$\begin{aligned}
&\pi_1 : P^h_{(ij,k)} + P^h_{\alpha(i}P^\alpha_{jk)} = \delta^h_{(i}a_{jk)} + b_{(i}P^h_{jk)};\\
&\pi_2 : P^h_{ij} = \delta^h_{(i}\psi_{j)} + F^h_{(i}\varphi_{j)}; \quad F^h_{(i,j)} - F^h_\alpha F^\alpha_{(i}\varphi_{j)} = \delta^h_{(i}\mu_{j)} + F^h_{(i}\rho_{j)};\\
&\pi_3 : P^h_{ij} = \delta^h_{(i}\psi_{j)} + \varphi^h a_{ij}; \quad \varphi^h_{,i} = \varphi^h\theta_i + \rho\delta^h_i,
\end{aligned}$$

где φ_i, ψ_i, b_i, a_{ij}, φ^h, θ_i, ρ, F^h_i — тензоры соответствующих валентностей.

Заметим, что геодезические отображения можно рассматривать как тривиальные случаи почти геодезических отображений всех типов, например, π_2 при $\varphi_i = 0$ и π_3 при $a_{ij} = 0$.

В. Е. Березовский и Й. Микеш доказали полноту этой классификации (см. [61, 62]). Вопросы пересечения типов почти геодезических отображений изучены в [61].

4. Геодезические отображения и почти геодезические линии.

Теорема 2. *При геодезическом отображении $f\colon A_n \to \overline{A}_n$ $(n \geqslant 3)$ сохраняются почти геодезические линии.*

Доказательство. Пусть пространство аффинной связности A_n допускает геодезическое отображение f на пространство $\overline{A}_n$ и эти пространства отнесены к общей по отображению f системе координат x. Рассмотрим кривую ℓ и ее образ $\bar\ell = f(\ell)$, которые характеризуются общими уравнениями $x^h = x^h(t)$.

Далее предположим, что ℓ — почти геодезическая линия в пространстве A_n. Тогда выполняются уравнения (3), которые запишем в более развернутой форме

$$\lambda^h_2 \equiv \nabla_t\lambda^h_1 \equiv d\lambda^h_1(t)/dt + \Gamma^h_{ij}(x(t))\lambda^i_1(t)\lambda^j(t) = a(t)\lambda^h(t) + b(t)\lambda^h_1(t), \tag{9}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции параметра t,

$$\lambda^h = dx^h(t)/dt \quad \text{и} \quad \lambda^h_1 = \nabla_t\lambda^h = d\lambda^h(t)/dt + \Gamma^h_{ij}(x(t))\lambda^i(t)\lambda^j(t). \tag{10}$$

Напомним классическую запись уравнений Леви-Чивиты

$$\bar\Gamma^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \delta^h_i\psi_j + \delta^h_j\psi_i. \tag{11}$$

Учитывая определение тензора деформации (7) они равносильны условиям (8).

Вычислим соответствующие аналогические объекты пространства $\overline{A}_n$:

$$\bar\lambda^h, \quad \bar\lambda^h_1 = d\bar\lambda^h(t)/dt + \bar\Gamma^h_{ij}(x(t))\bar\lambda^i(t)\bar\lambda^j(t), \quad \bar\lambda^h_2 = d\bar\lambda^h_1(t)/dt + \bar\Gamma^h_{ij}(x(t))\bar\lambda^i_1(t)\bar\lambda^j(t).$$

Исключая $\bar\Gamma^h_{ij}$ при помощи (11) и учитывая формулы (10), получим

$$\bar\lambda^h = \lambda^h, \quad \bar\lambda^h_1 = \lambda^h_1 + 2\psi_i\lambda^i \cdot \lambda^h, \quad \bar\lambda^h_2 = \lambda^h_2 + 2\psi_i\lambda^i \cdot \lambda^h_1 + 2d(\psi_i\lambda^i)/dt \cdot \lambda^h.$$

После несложных вычислений на основании формул (9) убедимся, что

$$\bar\lambda^h_2 = \bar a(t)\bar\lambda^h(t) + \bar b(t)\bar\lambda^h_1(t),$$

где $\bar a(t)$ и $\bar b(t)$ — некоторые функции параметра t. Эти формулы — основные уравнения почти геодезических линий (3) в пространстве $\bar A_n$. Следовательно, кривая $\bar\ell$ — почти геодезическая в пространстве $\bar A_n$. □

5. Отображения, сохраняющие почти геодезические линии.

Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Отображение $f\colon A_n \to \overline{A}_n$ $(n \geqslant 3)$ является геодезическим тогда и только тогда, когда при этом отображении все почти геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Предположим, что при отображении $f\colon A_n \to \overline{A}_n$ все почти геодезические линии ℓ пространства A_n переходят в почти геодезические линии $\bar{\ell} = f(\ell)$ пространства $\overline{A}_n$.

Пространства A_n и $\overline{A}_n$ отнесены к общей по отображению f системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. В этом случае почти геодезические линии $\ell \subset A_n$ и $\bar{\ell} \subset \overline{A}_n$ определяются идентичными уравнениями $x^h = x^h(t)$.

Для почти геодезической линии ℓ пространства A_n выполняются уравнения (9) и (10):

$$\lambda_2^h \equiv \nabla_t \lambda_1^h \equiv \frac{d\lambda_1^h(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^h(x(t))\lambda_1^i(t)\lambda^j(t) = a(t)\lambda^h(t) + b(t)\lambda_1^h(t),$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции параметра t,

$$\lambda^h = \frac{dx^h(t)}{dt}, \quad \lambda_1^h = \nabla_t \lambda^h = \frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^h(x(t))\lambda^i(t)\lambda^j(t).$$

Используя формулу

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + P_{ij}^h,$$

которая вытекает из уравнений (7), вычислим

$$\bar{\lambda}^h, \quad \bar{\lambda}_1^h = \frac{d\bar{\lambda}^h(t)}{dt} + \bar{\Gamma}_{ij}^h(x(t))\bar{\lambda}^i(t)\bar{\lambda}^j(t), \quad \bar{\lambda}_2^h = \frac{d\bar{\lambda}_1^h(t)}{dt} + \bar{\Gamma}_{ij}^h(x(t))\bar{\lambda}_1^i(t)\bar{\lambda}^j(t).$$

Принимая во внимание формулы (9) и (10), получим

$$\bar{\lambda}^h = \lambda^h, \quad \bar{\lambda}_1^h = \lambda_1^h + P_{ij}^h\lambda^i\lambda^j, \quad \bar{\lambda}_2^h = \bar{\nabla}_{\bar{\lambda}}(\bar{\lambda}_1^h) = \nabla_\lambda(\lambda_1^h + P_{\alpha\beta}^h\lambda^\alpha\lambda^\beta) + P_{ij}^h(\lambda_1^i + P_{\alpha\beta}^i\lambda^\alpha\lambda^\beta)\lambda^j.$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$\bar{\lambda}_2^h = \lambda_2^h + 3P_{\alpha\beta}^h y^\alpha\lambda^\beta + (\nabla_\gamma P_{\alpha\beta}^h + P_{\alpha\delta}^h P_{\beta\gamma}^\delta)\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma. \tag{12}$$

Если линии ℓ и $\bar{\ell} = f(\ell)$ являются почти геодезическими, то имеют место уравнение (9) и аналогичное уравнение

$$\bar{\lambda}_2^h = \bar{a}(t)\bar{\lambda}^h(t) + \bar{b}(t)\bar{\lambda}_1^h(t),$$

где $\bar{a}(t)$ и $\bar{b}(t)$ — некоторые функции параметра t.

Исключая из (12) векторы λ_2^h и $\bar{\lambda}_2^h$, получим

$$3P_{\alpha\beta}^h y^\alpha\lambda^\beta + (\nabla_\gamma P_{\alpha\beta}^h + P_{\alpha\delta}^h P_{\beta\gamma}^\delta)\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = \tilde{a}\cdot\lambda^h + \tilde{b}\cdot y^h + \tilde{c}\cdot P_{\alpha\beta}^h\lambda^\alpha\lambda^\beta, \tag{13}$$

где $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ — некоторые функции $x^1, \dots, x^n$, $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ и $y^1, \dots, y^n$. Здесь $y^h = \lambda_1^h$.

Формула (13) выполняется тождественно в любой фиксированной точке $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ для произвольных значений переменных $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ и $y^1, \dots, y^n$.

Легко показать, что функции $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ — дифференцируемы и если их разложить по первым степеням $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ и $y^1, \dots, y^n$, то сравнением коэффициентов этого полинома при этих переменных легко убедиться, что имеют место уравнения Леви-Чивиты (7) и отображение — геодезическое.

Детально различные методики доказательства изложены в работе [78] для установления основных уравнений геодезических и F-планарных отображений новыми методами. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность, очевидно, вытекает из теоремы 2. Этим теорема полностью доказана. □

6. Преобразования, сохраняющие почти геодезические линии. Аналогичным способом можно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Преобразование пространства аффинной связности A_n ($n \geqslant 3$) является проективным тогда и только тогда, когда при этом преобразовании все почти геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.*

Напомним, что преобразование назывется *проективным*, если при нем сохраняются геодезические линии, см. [2, 34, 45, 75, 93]. Эти преобразования характеризуются выполнением обобщенных уравнений Киллинга

$$L_\xi \Gamma^h_{ij} = \psi_i \delta^h_j + \psi_j \delta^h_i,$$

где L_ξ — производная Ли вдоль векторного поля ξ, которое называется *проективным.*

Легко показать, что теоремы 2, 3 и 4 имеют место для пространств аффинной связности с кручением. Это вытекает из факта, что геодезические линии не зависят от кручения аффинной связности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аббасси М. Т. К., Микеш Й., Ванжурова А., Бежан К. Л., Белова О. О.* Ушел из жизни профессор Олдржих Ковальский// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2021. — *52.* — С. 5–16.
2. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
3. *Березовский В. Е., Гусева Н. И., Микеш Й.* О частном случае почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при котором сохраняется некоторый тензор// Мат. заметки. — 2015. — *98*, № 3. — С. 463–466.
4. *Березовский В. Е., Гусева Н. И., Микеш Й.* Геодезические отображения эквиаффинных и Риччи-симметрических пространств// Мат. заметки. — 2021. — *110*, № 2. — С. 309–312.
5. *Березовский В. Е., Микеш Й.* Почти геодезические отображения типа π_1 на обобщенно риччи-симметрические пространства// Уч. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — *151*, № 4. — С. 9–14.
6. *Березовский В. Е., Микеш Й.* О канонических почти геодезических отображениях первого типа пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 2014. — № 2. — С. 3–8.
7. *Березовский В. Е., Микеш Й., Худа Г., Чепурная Е. Е.* Канонические почти геодезические отображения, сохраняющие тензор проективной кривизны// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 6. — С. 3–8.
8. *Ваврженикова Х., Микеш Й., Покорна О., Старко Г.* Об основных уравнениях почти геодезических отображений $\pi_2(e)$// Изв. вузов. Мат. — 2007. — № 1. — С. 10–15.
9. *Веденяпин Д. В.* Об $(n-2)$-проективном пространстве// Науч. докл. высш. школы. Физ.-мат. науки. — 1959. — *6.* — С. 119–126.
10. *Каган В. Ф.* Субпроективные пространства. — М., 1961.
11. *Микеш Й.* Геодезические отображения полусимметрических римановых пространств. — Деп. в ВИНИТИ. — No. 3924-76, 1976.
12. *Микеш Й.* О некоторых классах римановых пространств, замкнутых соответственно на геодезические отображения// VII Всесоюз. конф. «Современная дифференциальная геометрия». — Минск, 1979. — С. 126.
13. *Микеш Й.* О геодезических отображениях Риччи 2-симметрических римановых пространств// Мат. заметки. — 1980. — *28*, № 2. — С. 313–317.
14. *Микеш Й.* О геодезических отображениях пространств Эйнштейна// Мат. заметки. — 1980. — *28*, № 6. — С. 935–938.
15. *Микеш Й.* Проективно-симметричные и проективно-рекуррентные пространства аффинной связности// Тр. геом. семин. — 1981. — *13.* — С. 61–62.
16. *Микеш Й.* Об эквидистантных келеровых пространствах// Мат. заметки. — 1985. — *38*, № 4. — С. 627–633.
17. *Микеш Й.* О сасакиевых и эквидистантных келеровых пространствах// Докл. АН СССР. — 1986. — *291*, № 1. — С. 33–36.
18. *Микеш Й.* О существовании n-мерных компактных римановых пространств, допускающих нетривиальные проективные преобразования «в целом»// Докл. АН СССР. — 1989. — *305*, № 3. — С. 534–536.
19. *Микеш Й., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И.* Геодезические отображения «в целом» Риччи-плоских пространств с n полными геодезическими линиями// Мат. заметки. — 2020. — *108*, № 2. — С. 306–310.
20. *Микеш Й., Гусева Н. И., Пешка П., Рыпарова Л.* Поворотные отображения и проекции сферы// Мат. заметки. — 2021. — *110*, № 1. — С. 151–154.
21. *Микеш Й., Гусева Н. И., Пешка П., Рыпарова Л.* Почти геодезические отображения и проекции сферы// Мат. заметки. — 2022. — *111*, № 3. — С. 476–480.

22. *Микеш Й., Рыпарова Л., Худа Г.* К теории поворотных отображений// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 4. — С. 637–640.
23. *Микеш Й., Синюков Н. С.* О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 1983. — № 1. — С. 55–61.
24. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
25. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966.
26. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1964.
27. *Синюков Н. С.* О геодезических отображениях римановых многообразий на симметрические пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — *98*. — С. 21–23.
28. *Синюков Н. С.* Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*. — С. 766–767.
29. *Синюков Н. С.* Об эквидистантных пространствах// Вестн. Одесск. ун-та. — 1957. — С. 133–135.
30. *Синюков Н. С.* Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 6. — С. 1312–1314.
31. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффиносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 4. — С. 781–782.
32. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — *169*, № 4. — С. 770–772.
33. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения пространств аффинной связности и e-структуры// Мат. заметки. — 1970. — *7*, № 4. — С. 449–459.
34. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
35. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств// Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1982. — *13*. — С. 3–26.
36. *Собчук В. С.* Почти геодезическое отображение римановых пространств на симметрические римановы пространства// Мат. заметки. — 1975. — *17*, № 5. — С. 757–763.
37. *Solodovnikov A. S.* Projective transformations of Riemannian spaces// Usp. Mat. Nauk. — 1956. — *11*, № 4. — С. 45–116.
38. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — *11*. — С. 43–102.
39. *Солодовников А. С.* Геометрическое описание всех возможных представлений римановой метрики в форме Леви-Чивиты// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — *12*. — С. 131–173.
40. *Шадный В. С.* Почти геодезическое отображение римановых пространств на пространства постоянной кривизны// Мат. заметки. — 1979. — *25*, № 2. — С. 293–298.
41. *Шапиро Я. Л.* О квазигеодезическом отображении// Изв. вузов. Мат. — 1980. — № 9. — С. 53–55.
42. *П. А. Широков* Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966.
43. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
44. *Яблонская Н. В.* О специальных группах почти геодезических преобразований пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 1986. — № 1. — С. 78–80.
45. *Aminova A. V.* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — *113*, № 3. — P. 367–470.
46. *Bejan C.-L., Druţă-Romaniuc S.-L.* Walker manifolds and Killing magnetic curves// Differ. Geom. Appl. — 2014. — *35, Suppl.*. — P. 106–116.
47. *Belova O., Mikeš J.* Almost geodesics and special affine connection// Res. Math. — 2020. — *75*, № 3. — 127.
48. *Belova O., Mikeš J., Sherkuziyev M., Sherkuziyeva N.* An analytical inflexibility of surfaces attached along a curve to a surface regarding a point and plane// Res. Math. — 2021. — *76*, № 2. — 56.
49. *Belova O., Mikeš J., Strambach K.* Complex curves as lines of geometries// Res. Math. — 2017. — *71*, № 1-2. — P. 145–165.
50. *Belova O., Mikeš J., Strambach K.* Geodesics and almost geodesics curves// Res. Math. — 2018. — *73*, № 4. — 154.
51. *Belova O. et al.* Our friend and mathematician Karl Strambach// Res. Math. — 2020. — *75*, № 2. — 69.
52. *Beltrami E.* Risoluzione del problema: riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentante da linee rette// Ann. Mat. — 1865. — *1*, № 7. — P. 185–204.
53. *Beltrami E.* Teoria fondamentale degli spazi di curvatura constante// Ann. Mat. — 1868. — *2*, № 2. — P. 232–255.

54. *Berezovski V., Bácsó S., Mikeš J.* Almost geodesic mappings of affinely connected spaces that preserve the Riemannian curvature// Ann. Math. Inf. — 2015. — *45.* — P. 3–10.
55. *Berezovski V. E., Cherevko Y., Hinterleitner I., Mikeš J.* Canonical almost geodesic mappings of the first type onto generalized Ricci symmetric spaces// Filomat. — 2022. — *36*, № 4. — P. 1089–1097.
56. *Berezovski V. E., Cherevko Y., Leshchenko S., Mikeš J.* Canonical almost geodesic mappings of the first type of spaces with affine connection onto generalized 2-Ricci-symmetric spaces// Geom. Integr. Quant. — 2021. — *22.* — P. 78–87.
57. *Berezovski V. E., Cherevko Y., Mikeš J., Rýparová L.* Canonical almost geodesic mappings of the first type of spaces with affine connections onto generalized m-Ricci-symmetric spaces// Mathematics. — 2021. — *9*, № 4. — 437.
58. *Berezovski V. E., Cherevko Y., Rýparová L.* Conformal and geodesic mappings onto some special spaces// Mathematics. — 2019. — *7*, № 8. — 664.
59. *Berezovski V. E., Jukl M., Juklová L.* Almost geodesic mappings of the first type onto symmetric spaces// Proc. 16th Conf. APLIMAT 2017. — Bratislava, 2017. — P. 126–131.
60. *Berezovski V. E., Kuzmina I. A., Mikeš J.* Canonical F-planar mappings of spaces with affine connection to two symmetric spaces// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 3. — P. 533–538.
61. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On the classification of almost geodesic mappings of affine-connected spaces// Proc. Conf. "Differential Geometry and Applications" (Dubrovnik, 1988). — 1989. — P. 41–48.
62. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On a classification of almost geodesic mappings of affine connection spaces// Acta Univ. Palacki. Olomuc. Math. — 1996. — *35.* — P. 21–24.
63. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On almost geodesic mappings of the type π_1 of Riemannian spaces preserving a system of n-orthogonal hypersurfaces// Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1999. — *59.* — P. 103–108.
64. *Berezovski V. E., Mikeš J.* Almost geodesic mappings of spaces with affine connection// J. Math. Sci. — 2015. — *207*, № 3. — P. 389–409.
65. *Berezovski V. E., Mikeš J., Peška P., Rýparová L.* On canonical f-planar mappings of spaces with affine connection// Filomat. — 2019. — *33*, № 4. — P. 1273–1278.
66. *Berezovski V. E., Mikeš J., Radulović Ž.* Almost geodesic mappings of type π_1^* of spaces with affine connection// Math. Montisnigri. — 2021. — *52.* — P. 30–36.
67. *Berezovski V. E., Mikeš J., Rýparová L.* Geodesic mappings of spaces with affine connnection onto generalized Ricci symmetric spaces// Filomat. — 2019. — *33*, № 14. — P. 4475–4480.
68. *Berezovskii V., Mikeš J., Rýparová L.* Conformal and geodesic mappings onto Ricci symmetric spaces// Proc. 19th Conf. APLIMAT 2020 — 2020. — *20.* — P. 65–72.
69. *Berezovskii V. E., Mikeš J., Rýparová L., Sabykanov A.* On canonical almost geodesic mappings of type $\pi_2(e)$// Mathematics. — 2020. — *8*, № 1. — 54.
70. *Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A.* Almost geodesic mappings onto generalized Ricci-symmetric manifolds// Acta Math. Acad. Paedag. Nyiregyhaziensis. — 2010. — *26.* — P. 221–230.
71. *Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A.* Fundamental PDE's of the canonical almost geodesic mappings of type π_1// Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2014. — *37.* — P. 647–659.
72. *Chudá H., Mikeš J.* Conformally geodesic mappings satisfying a certain initial condition// Arch. Math. — 2011. — *47*, № 5. — P. 389–394.
73. *Ćirić M. S., Zlatanović M. Lj., Stanković M. S., Velimirović Lj. S.* On geodesic mappings of equidistant generalized Riemannian spaces// Appl. Math. Comput. — 2012. — *218*, № 12. — P. 6648–6655.
74. *Eisenhart L. P.* Non-Riemannian Geometry. — Mineola, NY: Dover, 2005.
75. *Eisenhart L. P.* Continuous Groups of Transformations. — New York: Dover, 1961.
76. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Fundamental equations of geodesic mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 2011. — *174*, № 5. — P. 537–554.
77. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Geodesic mappings of (pseudo-) Riemannian manifolds preserve class of differentiability// Miskolc. Math. Notes. — 2013. — *14*, № 2. — P. 575–582.
78. *Hinterleitner I., Mikeš J., Peška P.* Fundamental equations of F-planar mappings// Lobachevskii J. Math. — 2017. — *38*, № 4. — P. 653–659.
79. *Kozak A., Borowiec A.* Palatini frames in scalar-tensor theories of gravity// Eur. Phys. J. — 2019. — *79.* — 335.
80. *Křížek J., Mikeš J., Peška P., Rýparová L.* Extremals and isoperimetric extremals of the rotations in the plane// Geom. Integr. Quant. — 2021. — *22.* — P. 136–141.
81. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni dello equazioni dinamiche// Ann. Mat. — 1896. — *24.* — P. 252–300.

82. *Mikeš J.* Geodesic mappings of special Riemannian spaces// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. — 1988. — *46.* — P. 793–813.
83. *Mikeš J.* Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces// J. Math. Sci. — 1996. — *78*, № 3. — P. 311–333.
84. *Mikeš J.* Holomorphically projective mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 1998. — *89*, № 3. — P. 1334–1353.
85. *Mikeš J., Berezovski V. E., Stepanova E., Chudá H.* Geodesic mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 2016. — *217*, № 5. — P. 607–623.
86. *Mikeš J., Chudá H., Hinterleitner I.* Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition// Int. J. Geom. Meth. Modern Phys. — 2014. — *11*, № 5. — 1450044.
87. *Mikeš J., Jukl M., Juklová L.* Some results on traceless decomposition of tensors// J. Math. Sci. — 2011. — *174*, № 5. — P. 627–640.
88. *Mikeš J., Peška P., Rýparová L.* Isoperimetric extremals of rotation on sphere// Geom. Integr. Quant. — 2020. — *21.* — P. 181–185.
89. *Mikeš J., Pokorná O., Starko G. A., Vavříková H.* On almost geodesic mappings $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$// Proc. Conf. APLIMAT. — Bratislava, 2005. — P. 315–321.
90. *Mikeš J., Rýparová L.* Rotary mappings of spaces with affine connection// Filomat. — 2019. — *33*, № 4. — P. 1147–1152.
91. *Mikeš J., Strambach K.* Differentiable structures on elementary geometries// Res. Math. — 2009. — *53*, № 1-2. — P. 153–172.
92. *Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I.* Geodesic Mappings and Some Generalizations. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2009.
93. *Mikeš J. et al.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015.
94. *Najdanović M. S., Zlatanović M. Lj., Hinterleitner I.* Conformal and geodesic mappings of generalized equidistant spaces// Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. — 2015. — *98 (112).* — P. 71–84.
95. *Peška P., Mikeš J., Rýparová L.* Almost geodesic curves as intersections of n-dimensional spheres// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 3. — P. 687–690.
96. *Petrov A. Z.* Modeling of physical fields// Gravit. Gen. Relat. — 1968. — *4.* — P. 7–21.
97. *Petrović M. Z.* Canonical almost geodesic mappings of type ${}_\theta\pi_2(0, F)$, $\theta \in \{1, 2\}$ between generalized parabolic Kähler manifolds// Miskolc. Math. Notes. — 2018. — *19.* — P. 469–482.
98. *Petrović M. Z.* Special almost geodesic mappings of the second type between generalized Riemannian spaces// Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2019. — *42.* — P. 707–727.
99. *Petrović M. Z., Stanković M. S.* Special almost geodesic mappings of the first type of non-symmetric affine connection spaces// Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2017. — *40.* — P. 1353–1362.
100. *Radulovich Zh., Mikeš J., Gavril'chenko M. L.* Geodesic Mappings and Deformations of Riemannian Spaces. — Podgorica: CID, 1997.
101. *Rýparová L., Křížek J., Mike ˇ s J.* On fundamental equations of rotary vector fields// Proc. 18th Conf. Appl. Math. APLIMAT 2019, 2019. — P. 1031–1035.
102. *Rýparová L., Mikeš J.* On global geodesic mappings of quadrics of revolution// Proc. 16th Conf. Appl. Math. APLIMAT 2017, 2017. — P. 1342–1348.
103. *Rýparová L., Mikeš J.* On geodesic bifurcations// Geom. Integr. Quant. — 2017. — *18.* — P. 217–224.
104. *Rýparová L., Mikeš J.* Bifurcation of closed geodesiscs// Geom. Integr. Quant. — 2018. — *19.* — P. 188–192.
105. *Rýparová L., Mikeš J.* Infinitesimal rotary transformation// Filomat. — 2019. — *33*, № 4. — P. 1153–1157.
106. *Rýparová L., Mikeš J., Sabykanov A.* On geodesic bifurcations of product spaces// J. Math. Sci. — 2019. — *239*, № 1. — P. 86–91.
107. *Shandra I. G., Mikeš J.* Geodesic mappings of semi-Riemannian manifolds with a degenerate metric// Mathematics. — 2022. — *10*, № 1. — 154.
108. *Sobchuk V. S., Mikeš J., Pokorná O.* On almost geodesic mappings π_2 between semisymmetric Riemannian spaces// Novi Sad J. Math. — 1999. — *9.* — P. 309–312.
109. *Stanković M. S.* On canonic almost geodesic mappings of the second type of affine spaces// Filomat. — 1999. — *13.* — P. 105–144.
110. *Stanković M. S., Ćirić M. S., Zlatanović M. Lj.* Geodesic mappings of equiaffine and anti-equiaffine general affine connection spaces preserving torsion// Filomat. — 2012. — *26*, № 3. — P. 439–451.

111. *Stanković M. S., Minčić S. M., Zlatanović M. Lj., Velimirović Lj. S.* On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 2010. — *124.* — P. 77–90.
112. *Stanković M. S., Zlatanović M. Lj., Velimirović Lj. S.* Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the second kind// Int. Electron. J. Geom. — 2010. — *3*, № 2. — P. 26–39.
113. *Stanković M. S., Zlatanović M. L., Vesić N. O.* Basic equations of G-almost geodesic mappings of the second type, which have the property of reciprocity// Czech. Math. J. — 2015. — *65.* — P. 787–799.
114. *Stanković M. S., Zlatanović M. L., Vesić N. O.* Basic equations of G-almost geodesic mappings of the second type, which have the property of reciprocity// Czech. Math. J. — 2015. — *65.* — P. 787–799.
115. *Stepanov S. E., Mikeš J.* Betti and Tachibana numbers of compact Riemannian manifolds// Differ. Geom. Appl. — 2013. — *31*, № 4. — P. 486–495.
116. *Stepanov S., Mikeš J.* Application of the Hopf maximum principle to the theory of geodesic mappings// Kragujevac J. Math. — 2021. — *45*, № 5. — P. 781–786.
117. *Stepanov S., Mikeš J.* What is the Bochner technique and where is it applied?// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 3. — P. 709–719.
118. *Thomas J. M.* Asymmetric displacement of a vector// Trans. Am. Math. Soc. — 1926. — *28*, № 4. — P. 658–670.
119. *Thomas T. Y.* On projective and equiprojective geometries of paths// Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1925. — *11.* — P. 198–203.
120. *Thomas T. Y.* Note on the projective geometry of paths// Bull. Am. Math. Soc. — 1925. — *31.* — P. 318–322.
121. *Vesić N. O., Stanković M. S.* Invariants of special second-type almost geodesic mappings of generalized Riemannian space// Mediterr. J. Math. — 2018. — *15*, № 60.
122. *Vesić N. O., Velimirović L. S., Stanković M. S.* Some invariants of equitorsion third type almost geodesic mappings// Mediterr. J. Math. — 2016. — *13.* — P. 4581–4590.
123. *Vesić N. O., Zlatanović M. Lj.* Invariants for geodesic and F-planar mappings of generalized Riemannian spaces// Quaest. Math. — 2021. — *44*, № 7. — P. 983–996.
124. *Vesić N. O., Zlatanović M. Lj., Velimirović A. M.* Projective invariants for equitorsion geodesic mappings of semi-symmetric affine connection spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *472*, № 2. — P. 1571–1580.
125. *Vrançeanu G.* Proprietati globale ale spatiilor bui Riemann cu conexiune abina constanta// Stud. Cerc. Mat. Acad. RPR. — 1963. — *14*, № 1. — P. 7–22.
126. *Weyl H.* Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung// Göttinger Nachrichten. — 1921. — P. 99–112.
127. *Zlatanović M. Lj.* On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces onto generalized Riemannian spaces// Appl. Math. Lett. — 2011. — *24*, № 5. — P. 665–671.
128. *Zlatanović M. Lj.* New projective tensors for equitorsion geodesic mappings// Appl. Math. Lett. — 2012. — *25*, № 5. — P. 890–897.
129. *Zlatanović M. Lj., Hinterleitner I., Najdanović M.* On equitorsion concircular tensors of generalized Riemannian spaces// Filomat. — 2014. — *28*, № 3. — P. 463–471.
130. *Zlatanović M. Lj., Hinterleitner I., Najdanović M.* Geodesic mapping onto Kählerian spaces of the first kind// Czech. Math. J. — 2014. — *64*, № 4. — P. 1113–1122.
131. *Zlatanović M. Lj., Stanković V.* Geodesic mapping onto Kählerian space of the third kind// J. Math. Anal. Appl. — 2017. — *450*, № 1. — P. 480–489.
132. *Zlatanović M. Lj., Velimirović Lj. S., Stanković M. S.* Necessary and sufficient conditions for equitorsion geodesic mapping// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *435*, № 1. — P. 578–592.

Ryparova Lenka
Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия
E-mail: `lenka.ryparova01@upol.cz`

Mikeš Josef
Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия
E-mail: `josef.mikes@upol.cz`

Peška Patrik
Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия
E-mail: `patrik.peska@upol.cz`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 104–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-104-114

УДК 514.172.45

О НЕСОСТАВНЫХ RR-МНОГОГРАННИКАХ ВТОРОГО ТИПА

© 2023 г. **В. И. СУББОТИН**

Аннотация. Рассмотрена задача существования одного класса замкнутых выпуклых многогранников в E^3 — так называемых несоставных RR-многогранников. Проверка существования заключается в нахождении уравнения, из которого следует не только существование многогранника, но и вычисляется угол ромбов ромбической вершины.

Ключевые слова: RR-многогранник второго типа, ромбическая вершина, звезда вершины, несоставной RR-многогранник.

ON NONCOMPOSITE RR-POLYHEDRA OF THE SECOND TYPE

© 2023 **V. I. SUBBOTIN**

Abstract. The problem of the existence of one class of closed convex polyhedra in E^3—the so-called noncomposite RR-polyhedra—is examined. The existence test consists of finding an equation which implies the existence of a polyhedron and allows one to find the angle of rhombuses at a rhombic vertex.

Keywords and phrases: RR-polyhedron of the second type, rhombic vertex, vertex star, noncomposite RR-polyhedron.

AMS Subject Classification: 52B15

1. Введение. Вопрос о существовании и перечислении классов многогранников с заданными комбинаторными или метрическими свойствами — один из важных вопросов классической и современной геометрии многогранников, (см. [1, 2, 9–15, 17–19]). Ответ на этот вопрос для каждого конкретного класса многогранников может быть двояким: либо класс многогранников является метрически определённым (как, например, класс правильных или архимедовых многогранников), либо заданные свойства определяют класс многогранников с некоторым метрическим или даже комбинаторным произволом.

Представляют интерес те классы многогранников, которые могут быть вполне перечислены путём задания условий симметрии. При этом те условия, которые позволяют полностью перечислить класс многогранников с точностью до подобия каждого представителя этого класса, даже если этот класс содержит бесконечные серии многогранников, будем называть *жёсткими*. А те условия, задание которых даёт по крайней мере комбинаторное перечисление класса многогранников, будем называть *сильными*.

Например, класс правильногранных замкнутых выпуклых многогранников в E^3, изученный в [2] и [15], определяется жёсткими условиями симметрии — условием правильности граней. Сильные условия симметрии можно найти, например, в работе автора [3], в которой найдены все многогранники в E^3, *сильно симметричные относительно вращения граней*.

В работе автора [4] вводится класс так называемых RR-многогранников в E^3 (от слов «rombic» и «regular»). В классе RR помимо условия симметрии — наличия правильных граней, есть и условие симметрии на звёзды некоторых вершин — существование в многограннике так называемых *симметричных ромбических вершин.* Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению этого класса многогранников.

Напомним основные определения.

Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется RR-многогранником (от слов «rombic» и «regular»), если у него существуют симметричные ромбические вершины, а все грани, не принадлежащие звёздам этих вершин, являются правильными многоугольниками.

Таким образом, замкнутый выпуклый многогранник в E^3 является *RR-многогранником*, если множество всех его граней можно разбить на два непустых непересекающихся класса — класс граней, образующих гранные звёзды симметричных ромбических вершин и класс правильных граней.

Если правильные грани RR-многогранника одного типа, то он называется RR-многогранником *первого типа.* RR-многогранник относится ко *второму типу*, если его правильные грани различного типа. Вершина V при этом называется *ромбической*, если её гранная звезда $\mathrm{Star}(V)$ состоит из равных и одинаково расположенных, т.е. сходящихся в вершине V либо своими острыми, либо тупыми углами ромбов (не квадратов).

Вершина V называется *симметричной n-ромбической вершиной*, если она расположена на оси вращения звезды $\mathrm{Star}(V)$ и порядок оси совпадает с числом n ромбов звезды; для краткости вершину V в этом случае будем называть *n-ромбической.* Случай квадратов в $\mathrm{Star}(V)$ исключается, так как в этом случае получаем класс многогранников Джонсона—Залгаллера.

Свободными углами ромбической звезды будем называть углы с вершинами, совпадающими с общей вершиной двух тупых углов двух соседних ромбов.

Если поместить в свободные углы n-ромбической звезды правильные треугольные грани, то получим многогранную поверхность — ромбическую шапочку. Приклеивая к границе шапочки правильный n-угольник, получим выпуклый многогранник, который удобно назвать *n-ромбической пирамидой.*

Несоставным будем называть такой RR-многогранник второго типа, который нельзя разбить плоскостями на части, представляющие собой ромбические пирамиды и выпуклые многогранники с правильными гранями.

Ранее автором были найдены двадцать три RR-многогранника первого типа и доказана полнота списка таких многогранников [5–7], а в работе [8] найдены пятьдесят четыре составных RR-многогранника второго типа и также доказана полнота этого списка. При этом условия симметрии для RR-многогранников первого типа и составных RR-многогранников второго типа являются жёсткими.

В настоящей работе рассматриваются некоторые несоставные RR-многогранники второго типа. Дан подробный вывод так называемых *характеристических уравнений* двух RR-многогранников второго типа. С помощью характеристических уравнений вычисляется угол ромбов при ромбической вершине и из этих уравнений следует существование и единственность рассматриваемых многогранников.

2. Основные результаты. Докажем две теоремы о существовании двух несоставных RR-многогранников.

Теорема 1. *Существует несоставной RR-многогранник с одной тупоугольной ромбической вершиной с тридцать одной гранью, принадлежащий ко второму типу.*

Доказательство. К правильному плоскому 6-угольнику присоединим ось L его вращения, перпендикулярную плоскости 6-угольника. Рассмотрим совокупность правильных треугольников и квадрата, показанных на рис. 1 и отмеченных жирной линией. Отмеченные фигуры совместно с третьей частью 6-угольника, отмеченной жирным пунктиром, будут являться фундаментальной областью для группы C_{3v} относительно оси L. При действии этой группы получим многогранную поверхность с краем Г. Далее для нас будет основной задачей доказать возможность присоединения тупоугольной ромбической звезды $\mathrm{Star}(V)$ к краю Г таким образом, чтобы 3-ромбическая вершина V принадлежала оси L и чтобы L являлась осью вращения полученного этим построением RR-многогранника.

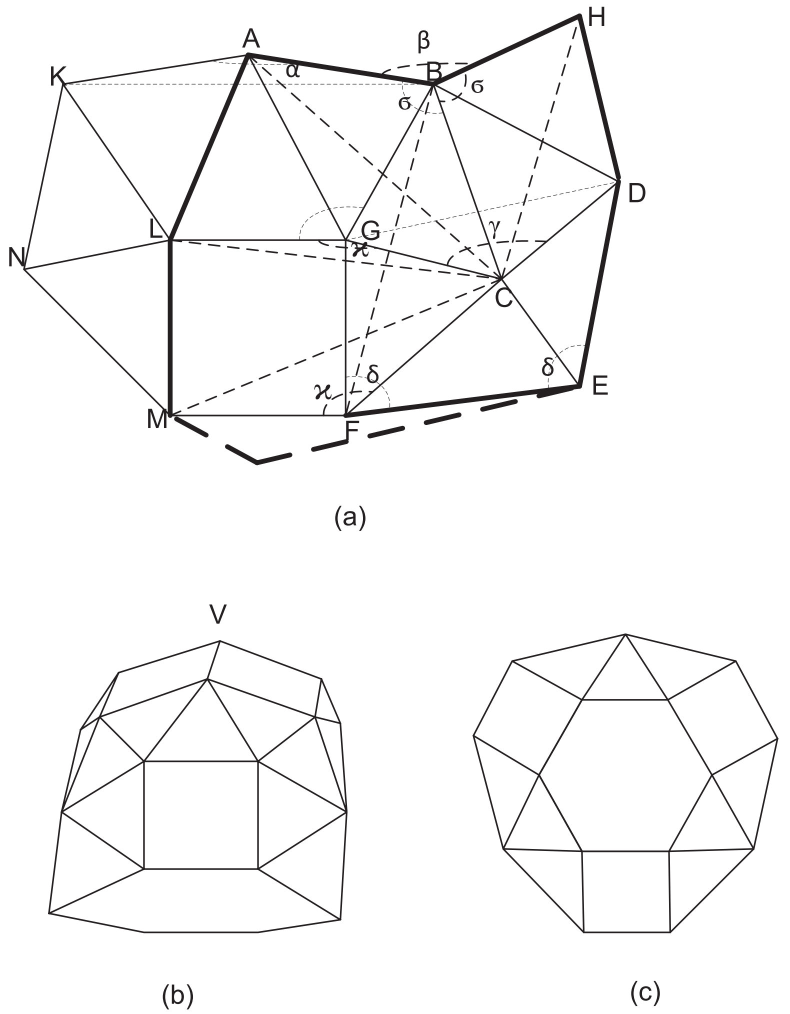


Рис. 1. К доказательству теоремы 1.

Очевидно, для возможной симметричной 3-ромбической вершины V углы KAB (обозначим его α) и ABH (обозначим β) должны быть равны. Идея доказательства состоит в том, чтобы выразить оба эти угла как функции одного и того же угла (γ) многогранника и приравнять их. Из полученного уравнения затем найти величины $\alpha = \beta$ и затем величины углов ромбов ромбической вершины.

Пусть $(3,6)'$ — двугранный угол с ребром FE между плоскостью $FGDE$ и плоскостью 6-угольного основания многогранника, γ — угол GCD, а δ — равные тупые углы равнобедренной (в силу симметрии многогранника) трапеции $FGDE$. Рассмотрим трёхгранный угол $FMGE$ с вершиной F (см. рис. 1(a)). Так как

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\delta\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\delta\sin\frac{2\pi}{3}\cos(3,6)',$$

то, подставляя в это равенство значение

$$\cos\delta = \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin\frac{\gamma}{2}\right), \tag{1}$$

которое следует из равнобедренности трапеции $FGDE$, получим выражение для $\cos(3,6)'$:

$$\cos(3,6)' = \frac{1 - 2\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3 + 4\sin\frac{\gamma}{2} - 4\sin^2\frac{\gamma}{2}}}. \tag{2}$$

Пусть $(3,6)''$ — двугранный угол с ребром FE между плоскостью грани FCE и плоскостью $FGDE$. Тогда, рассматривая трёхгранный угол $FGCE$, из равенства

$$\cos\frac{\pi}{3}=\cos\delta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\delta\sin\frac{\pi}{3}\cos(3,6)''$$

с учётом (1) найдём:

$$\cos(3,6)''=\frac{1+2\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3+4\sin\frac{\gamma}{2}-4\sin^2\frac{\gamma}{2}}}. \tag{3}$$

Так как $(3,6)'+(3,6)''=(3,6)$, где $(3,6)$ — двугранный угол с ребром FE между гранью FCE и плоскостью 6-угольного основания, то из (2) и (3) следует:

$$\cos(3,6)=\cos\left(\arccos\left(\frac{1-2\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3+4\sin\frac{\gamma}{2}-4\sin^2\frac{\gamma}{2}}}\right)+\arccos\left(\frac{1+2\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3+4\sin\frac{\gamma}{2}-4\sin^2\frac{\gamma}{2}}}\right)\right). \tag{4}$$

Обозначим через κ плоский угол MFC. Тогда из равенства

$$\cos\kappa=\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\cos(3,6)$$

получим:

$$\cos\kappa=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos(3,6). \tag{5}$$

С другой стороны, обозначая $(4,3)$ двугранный угол с ребром FG, из равенства

$$\cos\kappa=\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}\cos(4,3),$$

используя (5), получим:

$$\cos(4,3)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(3,6), \tag{6}$$

где $\cos(3,6)$ определяется из (4).

Пусть λ — тупой угол BGL равнобедренной трапеции $KBGL$, μ — равные углы BGF и BCF, $(4,3)'$ — двугранный угол с ребром FG плоскости FGB с плоскостью квадратной грани $LGFM$. Тогда из равенства $\cos\lambda=\cos(\pi/2)\cos\mu+\sin(\pi/2)\sin\mu\cos(4,3)'$ находим:

$$\cos\lambda=\sin\mu\cos(4,3)'. \tag{7}$$

Очевидно,

$$(4,3)'=(4,3)-\omega, \tag{8}$$

где ω — двугранный угол с ребром FG трёхгранного угла $FGBC$. Из равенства

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\mu}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\mu}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\mu}{2}\right)\cos\omega$$

находим:

$$\cos\omega=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}. \tag{9}$$

Равенство (7) с учётом (8), (6), (9) принимает вид:

$$\cos\lambda=\sin\mu\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(3,6)\right)-\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}\right). \tag{10}$$

Далее найдём $\cos\mu$ как функцию угла γ. Из равенства

$$\cos\mu=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{\mu},$$

где $\widehat{\mu}$ — двугранный угол с ребром GC трёхгранного угла $GBCF$, находим:

$$\cos\mu=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\widehat{\mu}. \tag{11}$$

Угол $\widehat{\mu} = \widehat{\mu}' + \widehat{\mu}''$, где $\widehat{\mu}'$ — двугранный угол с ребром GC трёхгранного угла $CEGD$, а $\widehat{\mu}''$ — двугранный угол с ребром GC трёхгранного угла $CGBD$. Из равенства

$$\cos\delta = \cos\frac{\pi}{3}\cos\gamma + \sin\frac{\pi}{3}\sin\gamma\cos\widehat{\mu}'$$

с учётом (1) получим:

$$\cos\widehat{\mu}' = \frac{1 - 2\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\gamma}{\sqrt{3}\sin\gamma}. \tag{12}$$

Аналогично из равенства

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\gamma + \sin\frac{\pi}{3}\sin\gamma\cos\widehat{\mu}''$$

найдём:

$$\cos\widehat{\mu}'' = \frac{1 - \cos\gamma}{\sqrt{3}\sin\gamma}. \tag{13}$$

Подставив из (12) и (13) сумму $\widehat{\mu} = \widehat{\mu}' + \widehat{\mu}''$ в (11), получим:

$$\cos\mu = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\left(\arccos\frac{1 - 2\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\gamma}{\sqrt{3}\sin\gamma} + \arccos\frac{1 - \cos\gamma}{\sqrt{3}\sin\gamma}\right). \tag{14}$$

В силу равнобедренности трапеции $KBGL$, аналогично равенству (1) найдём

$$1 - 2\sin\frac{\alpha}{2} = 2\cos\lambda,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{1 + 4\cos\lambda - 4\cos^2\lambda}{2}. \tag{15}$$

Равенство (15) представляет $\cos\alpha$ как функцию угла γ, что можно видеть из (10), если принять во внимание (14) и (4).

Нашей целью будет теперь найти выражение для β как функции угла γ.

Пусть σ — угол ABC и в силу симметрии равный ему угол CBH. Из симметричного трёхгранного угла $CABH$ находим:

$$\cos\beta = \cos^2\sigma + (1 - \cos^2\sigma)\cos\widehat{a}, \tag{16}$$

где $\widehat{a}$ — двугранный угол при ребре BC.

Пусть $\widehat{\sigma}$ — двугранный угол с ребром BG между гранями ABG и CBG. Имеем $\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}' + \widehat{\sigma}''$. Здесь: $\widehat{\sigma}'$ — двугранный угол с ребром BG между гранью ABG и плоскостью трапеции $KBGL$, а $\widehat{\sigma}''$ — двугранный угол с ребром BG трёхгранного угла $GLBC$. Для $\widehat{\sigma}'$ и $\widehat{\sigma}''$ имеем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\phi + \sin\frac{\pi}{3}\sin\phi\cos\widehat{\sigma}', \tag{17}$$

где ϕ — острый угол KBG трапеции $KBGL$, для которого

$$\cos\phi = \frac{1}{2}\left(2\sin(\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

в силу равнобедренности трапеции;

$$\cos\kappa = \cos\frac{\pi}{3}\cos\lambda + \sin\frac{\pi}{3}\sin\lambda\cos\widehat{\sigma}''. \tag{18}$$

Из (17) и (18) соответственно находим:

$$\cos\widehat{\sigma}' = \frac{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3 + 4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}, \quad \cos\widehat{\sigma}'' = \frac{4\cos\kappa - 1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3 + 4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}. \tag{19}$$

Таким образом,

$$\cos\widehat{\sigma} = \cos\left(\arccos\left(\frac{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3 + 4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\right) + \arccos\left(\frac{4\cos\kappa - 1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3 + 4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\right)\right), \tag{20}$$

где $\cos\kappa$ в силу (5) и (4), а $\sin\frac{\alpha}{2}$ — в силу (15), являются функциями γ. Таким образом, $\cos\widehat{\sigma}$ является функцией γ.

Из трёхгранного угла $BAGC$ находим

$$\cos\sigma = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\widehat{\sigma},$$

или, пользуясь (20),

$$\cos\sigma = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\left(\arccos\left(\frac{1+2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\right) + \arccos\left(\frac{4\cos\kappa - 1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\right)\right). \quad (21)$$

Рассмотрим трёхгранный угол $CABH$ с двугранным углом $\widehat{a}$ при ребре BC, входящим в равенство (16). Очевидно, что $\widehat{a} = \bar{a} - 2\widehat{\rho}$, где $\bar{a}$ — двугранный угол с ребром BC между гранями CGB и DCB, а $\widehat{\rho}$ — двугранный угол с ребром BC в симметричном трёхгранном угле $BAGC$. Для последнего угла из равенства

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\sigma + \sin\frac{\pi}{3}\sin\sigma\cos\widehat{\rho}$$

найдём

$$\cos\widehat{\rho} = \arccos\left(\frac{1-\cos\sigma}{\sqrt{3}\sin\sigma}\right). \quad (22)$$

Двугранный угол $\bar{a}$ найдём из равенства

$$\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{3}\cos\sigma + \sin\frac{\pi}{3}\sin\sigma\cos\bar{a}$$

следующим образом:

$$\cos\bar{a} = \frac{4\cos\gamma - 1}{3}. \quad (23)$$

Подставляя (22) и (23) в равенство $\widehat{a} = \bar{a} - 2\widehat{\rho}$, получим

$$\widehat{a} = \arccos\left(\frac{4\cos\gamma-1}{3}\right) - 2\arccos\left(\frac{1-\cos\sigma}{\sqrt{3}\sin\sigma}\right). \quad (24)$$

Подставляя $\widehat{a}$ из (24) в равенство (16), получим

$$\cos\beta = \cos^2\sigma + (1-\cos^2\sigma)\cos\left(\arccos\left(\frac{4\cos\gamma-1}{3}\right) - 2\arccos\left(\frac{1-\cos\sigma}{\sqrt{3}\sin\sigma}\right)\right), \quad (25)$$

где $\cos\sigma$ определяется из (21). В равенстве (21) $\cos\kappa$ находится как функция γ из (5) и (4), а угол α выражается из (15) как функция λ; λ, в свою очередь, является функцией γ, как легко видеть из (10), учитывая (14) и (4).

Таким образом, $\cos\beta$ и $\cos\alpha$ являются функциями γ. Так как для треугольной ромбической вершины V должно выполняться равенство $\beta = \alpha$, то из (15) и (25) находим основное уравнение для RR-многогранника:

$$\frac{1+4\cos\lambda-4\cos^2\lambda}{2} = \cos^2\sigma + \sin^2\sigma\cos\left(\arccos\left(\frac{4\cos\gamma-1}{3}\right) - 2\arccos\left(\frac{1-\cos\sigma}{\sqrt{3}\sin\sigma}\right)\right). \quad (26)$$

Здесь левая часть есть $\cos\alpha$, а правая равна $\cos\beta$.

Численное решение уравнения (26) даёт единственный корень $\gamma = 2{,}01\ldots$, или $\gamma = 115{,}31^\circ\ldots$. Следовательно, тупые углы ромбов при вершине V равны $\alpha = \beta = 112{,}17^\circ\ldots$. Заметим, что когда α уменьшается от значения, близкого к π, то γ увеличивается от значения, близкого к 108°, достигая найденного значения $\gamma = 115{,}31^\circ\ldots$.

Таким образом, искомый RR-многогранник построен, (см. рис. 1(b)). На рис. 1(c) показан его вид со стороны 6-угольной грани. Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Существует несоставной RR-многогранник с одной ромбической вершиной степени 4 и с двадцатью пятью гранями, принадлежащий ко второму типу.*

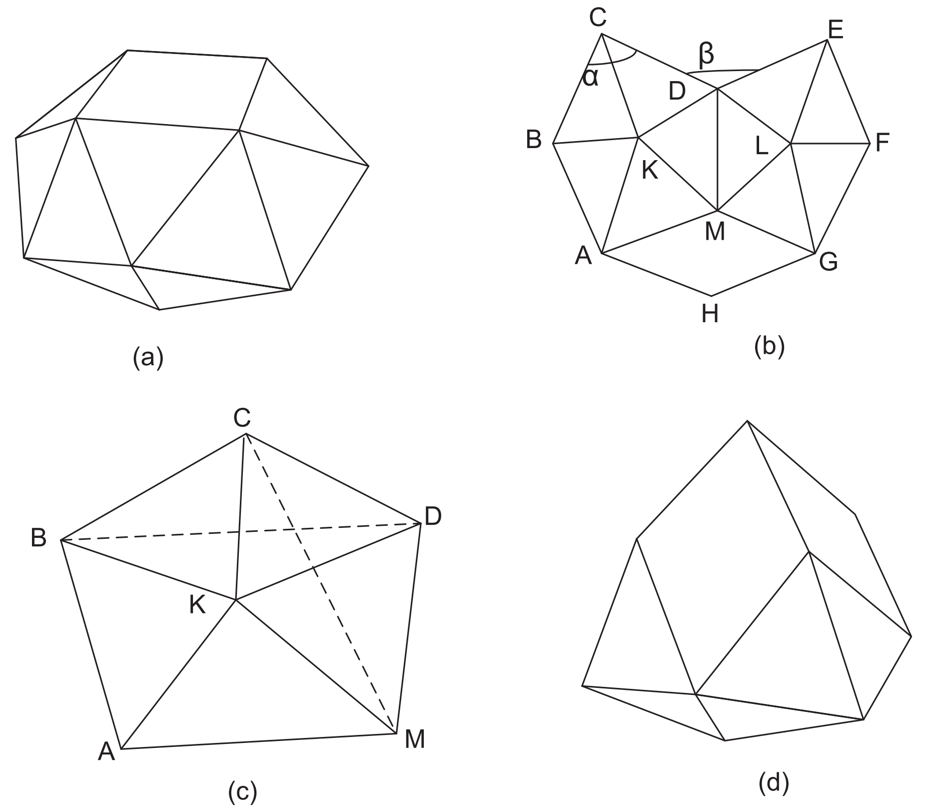


Рис. 2. (a) — плосконосая квадратная антипризма; (b) — к доказательству теоремы 2; (d) — ромбическая плосконосая квадратная «антипризма».

Доказательство. RR-многогранник, существование которого здесь будет доказано, является в некотором смысле «родственным» построенному в теореме 1.

Рассмотрим один из многогранников Джонсона — $J85$ — плосконосую квадратную антипризму, рис. 2(a). Удалим четыре треугольных грани, смежные по ребру верхней квадратной грани, и саму квадратную грань. Получим многогранную поверхность M с треугольными и одной квадратной гранью. Многогранник M ограничен пространственной ломаной, часть $BCDEF$ которой показана на схематичном рисунке 2(b). Нашей целью будет присоединение к краю $\ldots BCDEF\ldots$ этой поверхности симметричной 4-ромбической звезды. Для этого будет дан вывод характеристического уравнения, аналогичный выводу характеристического уравнения для многогранника, связанного с икосаэдром (см. [7]).

Обозначим Γ граничную ломаную $\ldots BCDEF\ldots$. Плоский угол между рёбрами CB и CD ломаной Γ, а также все такие углы, которые эквивалентны ему относительно оси вращения 4-го порядка, перпендикулярной оставшейся квадратной грани, обозначим α. Плоский угол между рёбрами CD и ED и между рёбрами, им эквивалентными, обозначим β, (см. рис. 2(b)).

Рассмотрим трёхгранный угол $MCDE$ с вершиной M. Обозначим θ равные в силу симметрии M плоские углы $\widehat{CDM}$ и $\widehat{CKM}$. Пусть Φ — двугранный угол с ребром MD трёхгранного угла $MCDE$. Справедливо равенство

$$\cos\beta = \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\Phi. \tag{27}$$

В силу симметрии многогранника M четырёхугольник $ABDM$ является равнобедренной трапецией: $BD \parallel AM$, $AB = MD$; равные тупые углы $\widehat{BAM}$ и $\widehat{DMA}$ обозначим γ.

Так как $\widehat{BCD} = \widehat{BKD} = \alpha$, то, считая рёбра многогранника M единичными, получаем, что длина отрезка $BD = 2\sin\frac{\alpha}{2}$. Поэтому

$$\cos\gamma = \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right). \tag{28}$$

Пусть угол φ — двугранный угол при ребре MD трёхгранного угла $MADC$. Тогда, учитывая, что $\widehat{AMG} = \frac{\pi}{2}$, для φ имеем соотношение:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cos\varphi,$$

т.е., учитывая (28):

$$0 = \left(\frac{1-2\sin\frac{\alpha}{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{1-2\sin\frac{\alpha}{2}}{2}\right)^2\right)\cos\varphi. \tag{29}$$

Из (29) находим:

$$\varphi = \arccos\frac{-1+4\sin\frac{\beta}{2} - 4\sin^2\frac{\beta}{2}}{3+4\sin\frac{\beta}{2} - 4\sin^2\frac{\beta}{2}}. \tag{30}$$

Двугранный угол Φ можно представить в виде:

$$\Phi = \varphi - 2\varkappa, \tag{31}$$

где $\varkappa$ — двугранный угол между плоскостями CDM и плоскостью трапеции $ABDM$.

Пусть λ — острый угол плоскости треугольника MKD с плоскостью трапеции $ABDM$. Тогда для трёхгранного угла $MAKD$ получим

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\gamma + \sin\frac{\pi}{3}\sin\gamma\cos\lambda,$$

откуда

$$\cos\lambda = \frac{1+2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}. \tag{32}$$

Пусть μ — угол между плоскостью треугольника MKD с плоскостью MDC. Тогда, рассматривая трёхгранный угол $MKCD$, имеем уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\pi}{3} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\pi}{3}\cos\mu,$$

из которого находим:

$$\cos\mu = \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}}. \tag{33}$$

Учитывая (32) и (33), получим выражение для двугранного угла $\varkappa$:

$$\varkappa = \arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{3}\frac{\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\right). \tag{34}$$

Подставляя выражения φ из (30) и $\varkappa$ из (34) в (31), получим:

$$\Phi = \arccos\frac{-1+4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3+4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}}\right) + 2\arccos\left(\frac{1}{3}\frac{\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\right). \tag{35}$$

Теперь осталось найти только выражение угла θ через α. Для этого представим двугранный угол ω с ребром KD как сумму двух двугранных углов, угла ω_1 между плоскостями BKD и CKD и угла ω_2 между плоскостями BKD и KDM. Для трёхгранного угла $KBCD$ имеем выражение

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\cos\omega_1,$$

из которого находим

$$\cos\omega_1 = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}. \tag{36}$$

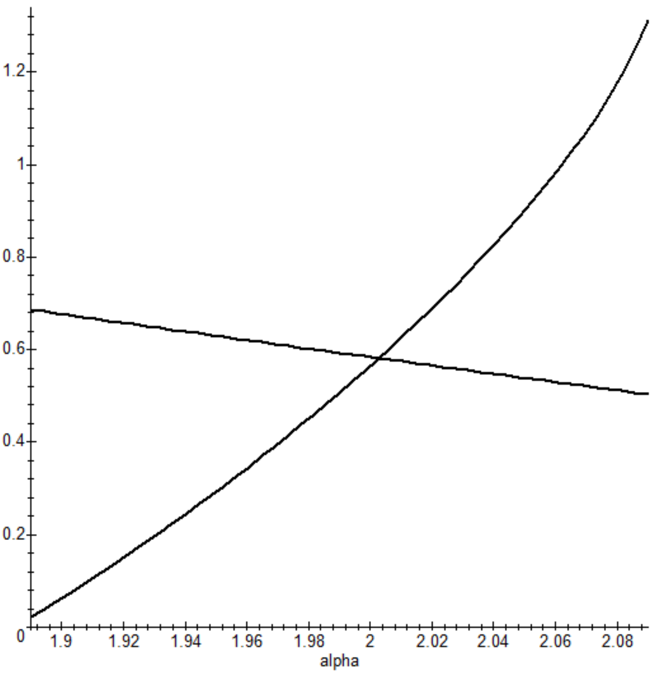


Рис. 3. Решение уравнения (42).

Аналогично из выражения для трёхгранного угла $DBKM$

$$\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\omega_2$$

находим

$$\cos\omega_2=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{37}$$

Из трёхгранного угла $DCKM$ находим:

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{3}\cos\omega,\quad \cos\theta=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\omega. \tag{38}$$

Так как $\omega=\omega_1+\omega_2$, то, принимая во внимание (36) и (37), из (38) получим

$$\cos\theta=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\left(\arccos\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}+\arccos\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}\right). \tag{39}$$

Можно показать, что углы α и β для остроугольной ромбической вершины связаны соотношением, вывод которого приведён в [5]. В обозначениях настоящей работы это соотношение имеет вид

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\pi(n-2)}{2n}}, \tag{40}$$

где n — степень ромбической вершины. Заметим, что для доказательства (40) достаточно сравнить два выражения для двугранного угла между двумя соседними ромбами ромбической вершины. В частности, при $n=4$ формула (40) принимает вид

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}\iff\cos\beta=\cos^2\frac{\alpha}{2}. \tag{41}$$

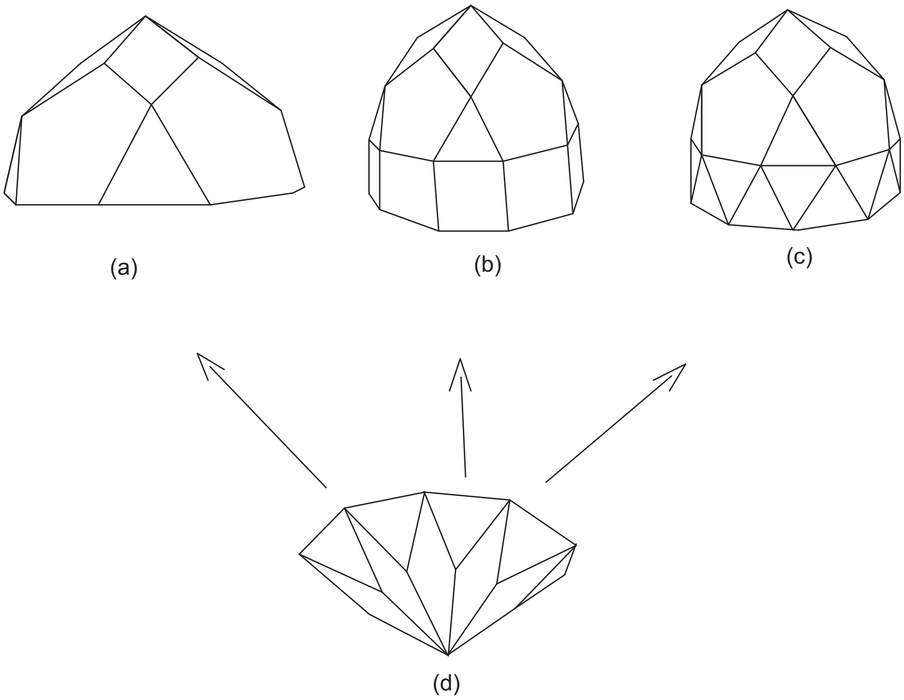


Рис. 4. К замечанию 1: (a) — удлинённая 5-угольная ротонда; (b), (c) — многогранники на основе удлинённой 5-угольной ротонды; (d) — 10-ромбическая пирамида.

С другой стороны, имеем для угла β соотношение (27). С учетом (41), (35) и (39) уравнение (27) принимает вид

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\left(2\arccos\left(\frac{1}{3}\frac{\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\right) - 2\arccos\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}} + \right.$$
$$\left. + \arccos\frac{-1+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right), \quad (42)$$

где

$$\cos\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\left(\arccos\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}} + \arccos\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right). \quad (43)$$

□

С помощью компьютерного вычисления корня уравнения (42) получаем единственный корень: $\alpha = 114{,}75^\circ\ldots$, и острый угол ромбов ромбической вершины $\beta = 73{,}10^\circ\ldots$.

На рис. 3 показано пересечение графиков левой и правой частей уравнения (42).

Таким образом, из решения видим, что искомый многогранник существует и является единственным с точностью до подобия. Искомый многогранник представлен на рис. 2(d).

Замечание 1. При перечислении несоставных RR-многогранников второго типа мы не учитываем известные многогранники с правильными гранями и с условными рёбрами, имеющие симметричные ромбические вершины, (см. [19]). Напомним, что условные рёбра в списке работы [19] — это диагонали ромбических граней, разбивающие ромб на два *правильных* треугольника.

Укажем ещё три несоставных RR-многогранника второго типа, у которых существуют ромбические вершины как с углами ромбов, равными $\pi/3$, так и такие вершины, в которых углы ромбов отличны от $\pi/3$. Такие многогранники получаются присоединением 10-ромбической пирамиды (d) на рис. 4 к 5-угольной удлинённой ротонде рис. 4(a) и к двум другим многогранникам, изображённым на рис. 4(b)-(c).

Таким образом, в отличие от RR-многогранников первого типа, многогранники второго типа могут содержать такие симметричные ромбические вершины, что ромбы одной из них не равны ромбам другой вершины.

Замечание 2. Из вышеизложенных результатов следует, что RR-многогранники можно рассматривать как обобщение класса правильногранных многогранников с условными рёбрами, приведённого в [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Деза М., Гришухин В. П., Штогрин А. И.* Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. — М.: МЦНМО, 2007.
2. *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями// Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1967. — *2*. — С. 1–220.
3. *Субботин В. И.* Об одном классе сильно симметричных многогранников// Чебышев. сб. — 2016. — № 4. — С. 132–140.
4. *Субботин В. И.* О двух классах многогранников с ромбическими вершинами// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2018. — *476*. — С. 153–164.
5. *Субботин В. И.* О полноте списка выпуклых RR-многогранников// Чебышев. сб. — 2020. — *21*, № 1. — С. 297–309.
6. *Субботин В. И.* Существование и полнота перечисления трёхмерных RR-многогранников// в кн.: Геометрические методы в теории управления и математической физике. — Рязань: Изд-во Рязан. гос. ун-та, 2021. — С. 15.
7. *Субботин В. И.* О существовании RR-многогранников, связанных с икосаэдром// Чебышев. сб. — 2021. — *22*, № 4. — С. 253–264.
8. *Субботин В. И.* О составных RR-многогранниках второго типа// Владикавказ. мат. ж. — 2022. — *24*, № 1. — С. 100–108.
9. *Berman M.* Regular-faced convex polyhedra// J. Franklin Inst. — 1971. — *291*, № 5. — P. 329–352.
10. *Bokowski J., Wills J. M.* Regular polyhedra with hidden symmetries// Math. Intel. — 1988. — *10*. — P. 27–32.
11. *Coxeter H. S. M.* Regular Polytopes. — New York: Dover, 1973.
12. *Coxeter H. S. M.* Regular and semi-regular polytopes, III// Math. Z. — 1988. — *200*, № 21. — P. 3–45.
13. *Cromwell P. R.* Polyhedra. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
14. *Grunbaum B.* Regular polyhedra: Old and new// Aequat. Math. — 1977. — *16*, № 1-2. — P. 1–20.
15. *Johnson N. W.* Convex polyhedra with regular faces// Can. J. Math. — 1966. — *18*, № 1. — P. 169–200.
16. *McMullen P.* Geometric Regular Polytopes. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2020.
17. *Schulte E.* Symmetry of polytopes and polyhedra// in: Handbook of Discrete and Computational Geometry (*Goodman J. E., O'Rourke J., Toth C. D.*, eds.). — CRC Press, 2017.
18. *Schulte E., Wills J. M.* On Coxeter's regular skew polyhedra// Discr. Math. — 1986. — *60*. — P. 253–262.
19. *Tupelo-Schneck R.* Convex regular-faced polyhedra with conditional edges// `http://tupelo-schneck.org/polyhedra/`.

Субботин Владимир Иванович
Южно-Российский государственный политехнический университет
имени М. И. Платова, Новочеркасск;
Донской государственный аграрный университет, пос. Персиановский, Ростовская область
E-mail: `geometry@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 115–127
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-115-127

УДК 519.6

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. **Д. УТЕБАЕВ, Г. Х. УТЕПБЕРГЕНОВА, М. М. КАЗЫМБЕТОВА**

Аннотация. На основе метода конечных элементов с кусочно-кубической интерполяцией построены и исследованы трехпараметрические разностные схемы повышенной точности для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Доказана устойчивость и сходимость рассмотренных разностных схем и на их основе получена оценки точности. С помощью вычислительного эксперимента проведено тестирование схем, а также проведен их сравнительный анализ.

Ключевые слова: нестационарное уравнение, метод конечных разностей, метод конечных элементов, разностная схема, устойчивость, сходимость, точность.

DIFFERENCE SCHEMES OF THE FINITE ELEMENT METHOD OF INCREASED ACCURACY FOR SOLVING NONSTATIONARY EQUATIONS

© 2023 **D. UTEBAEV, G. Kh. UTEPBERGENOVA, M. M. KAZYMBETOVA**

Abstract. Based on the finite element method with piecewise-cubic interpolation, we construct and examine three-parameter difference schemes of increased accuracy for a second-order ordinary differential equation. Stability and convergence of difference schemes are proved and accuracy estimates are obtained. The schemes proposed are tested and compared in computing experiments.

Keywords and phrases: nonstationary equations, finite difference method, finite element method, difference scheme, stability, convergence, accuracy.

AMS Subject Classification: 65N12, 65N30

1. Введение. В последнее время при численном решении нестационарных уравнений в частных производных чаще используются полудискретные методы, где дифференциальные операторы по пространственным переменным аппроксимируются методом конечных разностей или методом конечных элементов, а временная переменная сохраняются в дифференциальной форме. В результате получается системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Приведем некоторые примеры.

1.1. Аппроксимация начально-краевых задач для уравнения в частных производных параболического типа по пространственным переменным приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$D\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0. \tag{1}$$

Здесь $\dot{u} = du/dt$, D, A — некоторые операторы (матрицы). В виде (1) записываются также нестационарные задачи переноса, конвекции-диффузии, задачи плановой фильтрации в многопластовых системах, динамики несжимаемой жидкости, процессы тепломассообмена, псевдопараболические уравнения соболевского типа и многие другие, когда аппроксимируются только пространственные переменные. При этом система (1) может оказаться жесткой. Кроме того, жесткие задачи часто возникают при математическом моделировании кинетики химических реакции, расчете электронных схем, в исследовании работы ядерных реакторов, в теории мелкой воды и т. д. Для решения полученной жесткой полудискретной задачи требуются специальные численные методы, где в основном возникают проблемы численной устойчивости. В настоящее время достигнут значительный прогресс в исследовании методов решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако проблема численного решения жестких систем уравнений по сей день остается актуальной. Жесткие задачи исследованы во многих работах, в частности, [5, 14, 15, 17].

1.2. Аппроксимация гиперболических уравнений (задачи акустики, динамической теории упругости, теории внутренних волн, геомеханики, и т.д.) в частных производных по пространственным переменным приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$D\ddot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1, \tag{2}$$

а также многие начально-краевые задачи для неклассических уравнений соболевского типа высокого порядка тоже приводит к решению системы уравнений (2). Например, основное уравнение динамики идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости имеет следующий вид (см. [3]):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big[\Delta_3 u - \rho^2 u\big] + \omega_0^2 \Delta_2 u + \theta^2\big[\Delta_1 u - \rho^2 u\big] = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3}$$

где

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

ω_0 — частота Вяйсяля—Брента; ρ, θ — положительные константы,

$$\Omega = \big\{0 < x_k < l_k, \ k = 1,2,3\big\}, \quad Q_T = \big\{(x,t) : x \in \Omega, \ t \in (0,T]\big\}.$$

Аппроксимация пространственных переменных в (3) приводит к системе (2).

1.3. Большое значение в приложении имеет уравнение колебания с диссипацией

$$D\ddot{u}(t) + B\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1. \tag{4}$$

К решению (4) приводит пространственная аппроксимация многочисленных нестационарных начально-краевых задач теории волн, задачи диформирования вязкоупругих сред, уравнения соболевского типа, нагруженные уравнения и т.п. (см. [1,3,12,13,16]). Например, нестационарное уравнение влагопереноса Аллера—Лыкова (см. [8])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_1 u + \sigma\frac{\partial}{\partial t}(L_2 u) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \big\{x \in \Omega, \ 0 < t \leqslant T\big\} \tag{5}$$

или уравнения Буссинеска—Лява (см. [6]

$$(\lambda + \Delta)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu(\Delta - \overline{\lambda})\frac{\partial u}{\partial t} + \theta(\Delta - \overline{\overline{\lambda}})u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T. \tag{6}$$

Здесь

$$L_q u = \sum_{\alpha=1}^{p_m} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^q(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad x \in \Omega, \quad p_m = 1,2,\ldots, \quad 0 < k_{0q} \leqslant k_\alpha^q(x) \leqslant k_{1q}, \quad q = 1,2,$$

σ, k_{01}, k_{02}, k_{11}, k_{12} — положительные постоянные, Δ — оператор Лапласа, μ, θ, λ, $\overline{\lambda}$, $\overline{\overline{\lambda}}$ — постоянные.

Для численного решения одной из этих задач (1), (2), (4) используется, как правило, весовая аппроксимация, которая приводит к схемам первого или второго порядков точности по времени и более высокого порядка точности по пространству. Идея построения схем метода конечных элементов повышенной точности используется для аппроксимации и по временной переменной (см. [7,10,11,19,20,22,23,26]). Отметим, что методика построения схем на основе метода конечных элементов для нестационарных задач по пространственным переменным и временной переменной дает новое качество в исследовании сложных математических объектов. Она позволяет получить схемы более высокого порядка точности и по пространственным переменным (достаточно хорошо изученная теория), и по временной переменной. Кроме того, эта методика играет особую роль для задач с обобщенными решениями, так как схемы повышенной точности лучше сглаживают осцилляции решений дифференциальных задач (см. [9]). К разностным схемам, помимо классических требований аппроксимации, устойчивости и сходимости, предъявляют требование хорошей передачи основных особенностей исходной дифференциальной задачи на достаточно грубых сетках. Хорошо известно, что для решения одной и той же задачи можно предложить большое количество разностных схем. Встает вопрос о критериях отбора схем, удовлетворяющих всем упомянутым выше требованиям.

Определенное значение имеет краевые условия для рассматриваемых нестационарных уравнений. В частности, кроме локальных краевых условий можно рассмотреть и нелокальные краевые условия, где вместе классических краевых условий задана определенная связь значений искомой функции на границе области и/или внутри нее. Общие вопросы однозначной разрешимости и аналитические свойства таких задач исследованы в [12, 13] и др.

В данной работе для общего обыкновенного дифференциального уравнения (4) (при $D \equiv 0$ получим (1), а при $B \equiv 0$ получим (2)) построены и исследованы разностные схемы повышенной точности на основе метода конечных элементов с кусочно-кубической интерполяцией (см. [7]). Получена условия устойчивости и приведена теорема о точности схемы. Исследованы дисперсионные свойства построенных разностных схем в случае $B \equiv 0$. На основе дисперсионного анализа из множества разностных схем одинакового порядка точности отобраны схемы, наилучшие в смысле передачи основных свойств дифференциальной задачи. Показано, что схемы повышенного порядка точности дают качественное сеточное решение, что подтверждается численными примерами. Доказана A-устойчивость схемы в случае $D \equiv 0$. В работе используется обозначения из [18].

2. Построение схемы. Рассмотрим задачу (4), где $u = u(t)$, $t \in [0, T]$ — абстрактная функция со значениями в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением и нормой

$$(u, \vartheta) = \int_0^T u\vartheta\, dt, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Пусть D, B, A — постоянные (не зависящие от t) линейные операторы из H в H и $f(t) \in H$. В случае, когда D, B, A — матрицы размерности $N \times N$, $H \in E^N$, $u(t) = \big(u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_N(t)\big)$ — вектор-функция, то (4) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обобщенное решение задачи (4) определим как функцию $u(t) \in C^1[0, T]$, удовлетворяющую для любого интервала $(t_n, t_{n+1}) \in [0, T]$ тождеству

$$\begin{aligned} &\int_{t_n}^{t_{n+1}} \big(-D\dot{u}\dot{\vartheta} + B\dot{u}\vartheta + Au\vartheta\big)dt + D\dot{u}\vartheta\Big|_{t_n}^{t_{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\vartheta(t)\, dt \quad \forall \vartheta(t) \in C^1[0, T], \\ &u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $\omega_\tau = \big\{t_n,\ \tau = t_{n+1} - t_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\big\}$ — сетка на отрезке $t \in [0, T]$. Приближенное решение задачи (4) ищем в виде эрмитова сплайна третьей степени

$$y(t) = y^n \phi^n_{00}(t) + \dot{y}^n \phi^n_{10}(t) + y^{n+1} \phi^n_{01}(t) + \dot{y}^{n+1} \phi^n_{11}(t), \tag{8}$$

где

$$y^n = y(t_n), \quad \dot{y}^n = \frac{dy(t_n)}{dt}, \quad \xi = \frac{t - t_n}{\tau},$$
$$\phi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad \phi_{01}^n(t) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad \phi_{10}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi), \quad \phi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - \xi^2).$$

Выбирая весовые функции $\vartheta(t)$ в виде линейных комбинаций интерполяционных функций и подставляя их в (7), получим следующую трехпараметрическую разностную схему:

$$D_\gamma \dot{y}_t + B y_t + A y^{(0.5)} = \phi_1, \quad D_\alpha y_t - \frac{\tau^2}{12} B \dot{y}_t - D_\beta \dot{y}^{(0.5)} = \phi_2, \tag{9}$$

$$y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = u_1. \tag{10}$$

Здесь

$$D_m = D - m\tau^2 A, \quad m = \alpha, \beta, \gamma, \quad \phi_k = \int\limits_0^1 f(t_n + \tau\xi)\vartheta_k(\xi)d\xi, \quad k = 1, 2, \quad \xi = \frac{t - t_n}{\tau},$$
$$\vartheta_1(\xi) = p_1\vartheta_1^{(1)}(\xi) + p_2\vartheta_1^{(2)}(\xi), \quad \vartheta_1^{(1)}(\xi) = 1, \quad \vartheta_1^{(2)}(\xi) = \xi^2 - \xi, \quad p_1 = 6 - 60\gamma, \quad p_2 = 30 - 360\gamma,$$
$$\vartheta_2(\xi) = s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi) + s_2\vartheta_2^{(2)}(\xi), \quad \vartheta_2^{(1)}(\xi) = \tau\left(\xi - \frac{1}{2}\right), \quad \vartheta_2^{(2)}(\xi) = \tau\left(\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi\right),$$
$$s_1 = 180\beta - 40\alpha, \quad s_2 = 1680\beta - 280\alpha,$$

H_h — конечномерное пространство для любого момента времени t; операторы D, B, A действуют из H_h в H_h. Параметры α, β, γ подчиняются условию четвертого порядка аппроксимации

$$\alpha + \gamma = \beta + \frac{1}{6}. \tag{11}$$

При изучении уравнений соболевского типа операторы D, B, A может оказаться вырожденными. Для устранения проблемы вырождения операторов $D = D^*$, $B = B^*$, $A = A^*$ применим принцип регуляризации, который для самосопряженных операторов позволяет применить сдвиг по спектру:

$$\widetilde{D} = D + \varepsilon E, \quad \widetilde{B} = B + \varepsilon E, \quad \widetilde{A} = A + \varepsilon E.$$

Здесь ε — малый параметр, задающий величину сдвига операторов по спектру.

3. Устойчивость и сходимость схемы. Проанализируем устойчивости и точности схемы (9), (10). В [11] для доказательства сходимости она записана в виде трехслойных разностных схем отдельно для y и производной $\dot{y}$. Далее получена оценка точности

$$\big\|u_h(t) - u(t)\big\|_A + \big\|\dot{u}_h(t) - \dot{u}(t)\big\|_D \leqslant M\tau^4,$$

при взаимной перестановочности операторов A, B, D, т.е. $AD = DA$, $AB = BA$, $BD = DB$. Для освобождения этого условия вместо y, $\dot{y}$ введем $w = D^{1/2}y$, $\dot{w} = D^{1/2}\dot{y}$. Отметим, что $(D^{1/2})^* = D^{1/2} > 0$ и существует обратный оператор $D^{-1/2} = (D^{-1/2})^* > 0$. После очевидных преобразований из (9), (10) получим

$$\tilde{D}_\gamma \dot{w}_t + \tilde{B} w_t + \tilde{A} w^{(0.5)} = \tilde{\phi}_1, \quad \tilde{D}_\alpha w_t - \frac{\tau^2}{12}\tilde{B}\dot{w}_t - \tilde{D}_\beta \dot{w}^{(0.5)} = \tilde{\phi}_2, \tag{12}$$

$$w^0 = D^{1/2}u_0, \quad \dot{w}^0 = D^{1/2}u_1, \tag{13}$$

где

$$\tilde{\phi}_1 = D^{-1/2}\phi_1, \quad \tilde{\phi}_2 = D^{-1/2}\phi_2, \quad \tilde{D} = E, \quad \tilde{B} = D^{-1/2}BD^{-1/2}, \quad \tilde{A} = D^{-1/2}AD^{-1/2}.$$

Ясно, что

$$\tilde{D} = \tilde{D}^* > 0, \quad \tilde{B} = \tilde{B}^* > 0, \quad \tilde{A} = \tilde{A}^* > 0, \quad \tilde{D}\tilde{A} = \tilde{A}\tilde{D}, \quad \tilde{D}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{D}, \quad \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}.$$

Следовательно, нет необходимости взаимной перестановочности операторов A, B, D. Условие устойчивости схемы имеет вид

$$\tilde{D}_\omega = \tilde{D} - \omega\tau^2\tilde{A} \geqslant \delta\tilde{D}, \quad 0 < \delta < 1, \quad \omega = \max\bigl[\alpha, \beta, \gamma, 1/4\bigr]. \tag{14}$$

Далее, поступая как в [11] с учетом взаимной перестановочности операторов установим справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* > 0$, $B = B^* \geqslant 0$, $D = D^* \geqslant 0$ *и выполнены условия* (11), (14). *Тогда решение схемы* (12), (13) *сходится к достаточно гладкому решению задачи* (4) *и имеют место оценки точности*

$$\bigl\|y(t) - u(t)\bigr\|_{\tilde{A}} \leqslant M\tau^4 \max_t \left\|\frac{d^6u}{dt^6}(t)\right\|, \quad \bigl\|\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\bigr\|_{\tilde{D}} \leqslant M\tau^4 \max_t \left\|\frac{d^6u}{dt^6}(t)\right\| \quad \forall t \in [0, T].$$

4. Алгоритм реализации схемы. Для реализации схемы (12), (13) необходимо решить систему двух уравнений относительно неизвестных $\widehat{w}$, $\widehat{\dot{w}}$:

$$m_{11}\widehat{\dot{w}} + m_{12}\widehat{w} = \Phi_1, \quad m_{21}\widehat{\dot{w}} + m_{22}\widehat{w} = \Phi_2, \tag{15}$$

где

$$m_{11} = \tilde{D} - \gamma\tau^2\tilde{A}, \quad m_{12} = \tilde{B} + 0.5\tau\tilde{A}, \quad m_{21} = -\left[\frac{\tau^2}{12}\tilde{B} + \frac{\tau}{2}(\tilde{D} - \beta\tau^2\tilde{A})\right], \quad m_{22} = \tilde{D} - \alpha\tau^2\tilde{A},$$

$$\Phi_1 = \tau\tilde{\phi}_1 + \left(\tilde{B} - \frac{1}{2}\tau\tilde{A}\right)w + (\tilde{D} - \tau^2\gamma\tilde{A})\dot{w},$$

$$\Phi_2 = \tau\tilde{\phi}_2 + (\tilde{D} - \alpha\tau^2\tilde{A})w - \frac{\tau^2}{12}\tilde{B}\dot{w} + \frac{1}{2}\tau(\tilde{D} - \beta\tau^2\tilde{A})\dot{w}.$$

Интегралы в $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_2$ вычисляются по формуле Симпсона.

Исключая из (15) $\widehat{\dot{w}}$, получим уравнение для нахождения $\widehat{w}$:

$$C\widehat{w} = F, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} C &= m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} = \\ &= \tilde{D}^2 - \left(\alpha - \frac{1}{6}\right)\tau^2\tilde{A}\tilde{D} + \left(\alpha\gamma - \frac{\beta}{4}\right)\tau^4\tilde{A}^2 + \tau^2\gamma\tilde{B}^2 + \frac{\tau}{2}\tilde{B}\tilde{D} + \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\tau^3\tilde{A}\tilde{B}, \end{aligned}$$

и $F = m_{12}\Phi_2 - m_{22}\Phi_1$.

Алгоритм реализации схемы(12), (13) состоит в непосредственном решении уравнения (16), а затем вычисления $\widehat{\dot{w}}$ из уравнения

$$(\tilde{D} - \tau^2\gamma\tilde{A})\widehat{\dot{w}} = \Phi_1 - \left(\tilde{B} + \frac{1}{2}\tau\tilde{A}\right)\widehat{w}.$$

Второй алгоритм базируется на факторизации оператора C:

$$C = C_1C_2 = \bigl(\tilde{D} - \omega_1\tau^2\tilde{A} + \nu_1\tau\tilde{B}\bigr)\bigl(\tilde{D} - \omega_2\tau^2\tilde{A} + \nu_2\tau\tilde{B}\bigr).$$

Сравнивая это с (16), получим условия, связывающие параметры ω_1, ω_2, ν_1, ν_2, α, β, γ:

$$\omega_1 + \omega_2 = \alpha - \frac{1}{6}, \quad \omega_1 \cdot \omega_2 = \alpha\gamma - \frac{\beta}{4}, \quad \nu_1 + \nu_2 = \frac{1}{2}, \quad \nu_1 \cdot \nu_2 = \gamma, \quad \omega_1\nu_2 + \omega_2\nu_1 = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

Эти условия замыкаются условием четвертого порядка аппроксимации (11). Решения этой системы зависит от выбора параметров α, β, γ. Реализация уравнения (16) осуществляется в два этапа: сначала решаем уравнение $C_1g = F$, а затем уравнение $C_2\widehat{y} = g$. После этого из уравнения (15) находим $\widehat{\dot{y}}$. При выполнении условия $\alpha\gamma = \beta/4$ схема становится экономичной.

5. Дисперсионный анализ. Исследуем дисперсионные свойства разностных схем (12), (13) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (случай $B \equiv 0$)

$$D_\gamma \dot{y}_t + Ay^{(0.5)} = \phi_1, \quad D_\alpha y_t - D_\beta \dot{y}^{(0.5)} = \phi_2, \quad y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = u_1. \tag{17}$$

Для простоты исследования точности схемы предположим, что A, D — числа, а уравнение (2) — однородное ($f(t) \equiv 0$) обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (тестовое уравнение), имеющее точное решение

$$u(t) = a_1 \cos \lambda t + a_2 \sin \lambda t, \quad \lambda = \sqrt{A/D}. \tag{18}$$

Постоянные параметры a_1, a_2 определяются начальными условиями.

Решение однородных разностных уравнений (17) ($\phi_1 = \phi_2 = 0$) будем искать в виде

$$y = y^n = Yq^n, \quad \dot{y} = \dot{y}^n = \dot{Y}q^n, \tag{19}$$

с амплитудами Y и $\dot{Y}$. Подставляя (19) в (17), получим однородную систему относительно Y и $\dot{Y}$, для которой условие наличия нетривиальных решений (равенство нулю определителя) имеет вид:

$$(1-\alpha z^2)(1-\gamma z^2)(q-1)^2 + \frac{z^2}{4}(1-\beta z^2)(q+1)^2 = 0, \quad z = \tau\lambda.$$

Последнее уравнение позволяет определить модуль перехода схемы q:

$$q_{1,2} = \frac{(1-\alpha z^2)(1-\gamma z^2) - (z^2/4)(1-\beta z^2) \pm \sqrt{d}}{(1-\alpha z^2)(1-\gamma z^2) + (z^2/4)(1-\beta z^2)}, \tag{20}$$

где $d = -z^2(1-\alpha z^2)(1-\beta z^2)(1-\gamma z^2)$.

Условие устойчивости схемы (17) имеет вид

$$(D - \alpha\tau^2 A)(D - \beta\tau^2 A)(D - \gamma\tau^2 A) \geqslant 0.$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$\tau^2 \leqslant \frac{D}{mA}, \quad m = \max\{\alpha, \beta, \gamma\} > 0.$$

При этом $d \leqslant 0$ и $|q| = 1$, так что можно q представить в виде

$$q_{1,2} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi. \tag{21}$$

Сравнивая (20) и (21), получим уравнение для определения ϕ:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{(z^2/2)(1-\beta z^2)}{(1-\alpha z^2)(1-\gamma z^2) + (z^2/4)(1-\beta z^2)}.$$

Отсюда

$$\varphi = 2 \arcsin\left[\frac{z}{2}\sqrt{\frac{(1-\beta z^2)}{(1-\alpha z^2)(1-\gamma z^2) + (z^2/4)(1-\beta z^2)}}\right].$$

Из (19), (21) находим

$$y = y^n = b_1 \cos\frac{\varphi t_n}{\tau} + b_2 \sin\frac{\varphi t_n}{\tau}. \tag{22}$$

Различие ϑ точного и приближенного решений характеризуется величиной $\vartheta = \varphi/(\tau\lambda)$. Чем ближе ϑ к 1, тем точнее приближенное решение.

Разложим ϑ в ряд по степеням z^2:

$$\vartheta = 1 + r_1 z^2 + r_2 z^4 + O(z^6),$$

где

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \gamma - \beta - \frac{1}{6}\right), \quad r_2 = \frac{1}{12}\left(\beta - 6\alpha\gamma + \frac{1}{40}\right) + \left(\alpha + \gamma - \beta - \frac{1}{6}\right)\bar{r}_2.$$

Минимизируя $|r_1|$ и $|r_2|$, можно улучшать качество приближенного решения. От всех рассматриваемых далее схем будем требовать выполнения условия $r_1 = 0$. Отсюда получаем условие (11). При этом

$$\vartheta = 1 + r_2\lambda^4\tau^4 + O(\tau^6), \quad r_2 = \frac{1}{12}\left(\beta - 6\beta\alpha + \frac{1}{40}\right).$$

В этом случае можно говорить о совпадении скорости распространения гармоники дифференциального уравнения и разностной схемы с точностью до величин четвертого порядка по шагу τ.

Для получения схем шестого порядка точности потребуем выполнения (11) и условия $r_2 = 0$, т.е.

$$\beta - 6\alpha\gamma + \frac{1}{40} = 0. \tag{23}$$

Рассмотрим примеры схем, удовлетворяющих требованиям точности (11), (23) и экономичности $\alpha\gamma = \beta/4$.

Схема 1. Схема с параметрами $\gamma = 1/12$, $\alpha = 1/10$, $\beta = 1/60$ имеет порядок точности 4 (выполнено условие (11)). Дискриминант квадратного уравнения отрицателен и, следовательно, реализация этой схемы в поле действительных чисел по указанному алгоритму невозможна (естественно, эту схему можно реализовывать, обращая на каждом временном шаге оператор Δ). Условие устойчивости схемы $\tau^2 \leqslant 10/\lambda^2$.

Схема 2. Выбирая $\gamma = 1/12$ и удовлетворяя (11) и условию экономичности $\alpha\gamma = \beta/4$, получим схему порядка 4 с $\beta = 1/24$, $\alpha = 1/8$, что совпадает с одной из схем в [10]. Корни уравнения

$$\omega^2 - \left(\alpha + \gamma - \frac{1}{4}\right)\omega + \left(\alpha\gamma - \frac{\beta}{4}\right) = 0$$

равны $\omega_1 = -1/24$, $\omega_2 = 0$. Условие устойчивости схемы $\tau^2 \leqslant 8/\lambda^2$.

Схема 3. Приведем новую схему четвертого порядка точности. Уникальность ее состоит в том, что для ее реализации по алгоритму необходимо «обращать» только один оператор D, так как $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Выбор параметров подчиним условию (11) и условию экономичности $\alpha\gamma = \beta/4$. Отсюда $\beta = 1/12$, $\alpha+\gamma = 1/4$, а γ, α являются корнями квадратного уравнения $x^2 - x/4 + 1/48 = 0$. Поэтому можно выбрать $\gamma = x_1$, $\alpha = x_2$, либо $\alpha = x_1$, $\gamma = x_2$, где $x_{1,2} = 1/8 \pm i\sqrt{3}/24$. Таким образом, параметры схемы α, γ комплексные.

Схема 4. Рассмотрим теперь схему порядка 6, которая бы удовлетворяла условию экономичности $\alpha\gamma = \beta/4$. Параметры ее определяются из системы

$$\alpha + \gamma = \beta + \frac{1}{6}, \quad \beta - 6\alpha\gamma + \frac{1}{40} = 0, \quad \alpha\gamma - \frac{\beta}{4} = 0$$

и равны $\beta = 1/20$, $\alpha + \gamma = 13/60$, $\alpha\gamma = 1/80$. Корни уравнения относительно α и γ комплексные. Схема может быть реализована в поле комплексных чисел.

Схема 5. Укажем еще одну схему 6-го порядка точности: $\alpha = 7/60$, $\beta = 1/30$, $\gamma = 1/12$. Для этих значений параметров выполнены условия (11), (23), причем $\omega_{1,2} = -1/40 \pm i\sqrt{11}/120$. Условие устойчивости схемы $\tau^2 \leqslant 12/\lambda^2$.

6. A-устойчивость. Исследуем A-устойчивость схемы (9), (10) в случае $D \equiv 0$:

$$By_t - \tau^2\gamma A\dot{y}_t + Ay^{(0.5)} = \varphi_1, \quad \tau^2\gamma B\dot{y}_t + \tau^2\alpha Ay_t - \tau^2\beta A\dot{y}^{(0.5)} = -\varphi_2, \tag{24}$$

$$y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = D^{-1}(f^0 - Au_0), \tag{25}$$

где $\gamma = 1/12$. При этом из (11) получим $\alpha = \beta + 1/12$, однопараметрическое (параметр β) семейство схем. Эта схема для тестового уравнения $du/dt = \lambda u$ имеет вид

$$\tilde{B}Y_t + \tilde{A}Y = 0, \quad Y^0 = (y^0, \dot{y}^0), \tag{26}$$

где

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 - \tau\lambda/2 & \tau^2\gamma\lambda \\ -\alpha\lambda & \gamma - \tau\beta\lambda/2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\beta\lambda \end{pmatrix}.$$

Перепишем эту схему в виде разностного уравнения

$$\widetilde{Y} = S_n Y, \quad Y(0) = Y^0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Здесь $S_n = E - \tau B^{-1} A$ — оператор перехода. Составим характеристическое уравнение для S_n:

$$a_0 \mu^2 + a_1 \mu + a_2 = 0, \tag{27}$$

где

$$a_0 = \Delta^2 = \left[\left(\gamma + \frac{\beta z}{2}\right)\left(1 + \frac{z}{2}\right) + \alpha\gamma z^2\right]^2, \quad a_1 = -z\Delta(\beta + \gamma - \beta z) - 2\Delta^2,$$
$$a_2 = \Delta^2 + \Delta(\beta + \gamma)z, \quad \Delta = \left(1 + \frac{z}{2}\right)\left(\gamma + \frac{\beta z}{2}\right) + \alpha\gamma z^2, \quad z = \tau\lambda.$$

Когда z — комплексное число, непосредственное исследование корней уравнения (27) затруднительно. Поэтому сделаем замену

$$\mu = \frac{W + 1}{W - 1}$$

(преобразование Кэли, см. [2, 4]); после которого уравнение (27) примет вид

$$W^2 + cW + d = 0, \tag{28}$$

где

$$c = \frac{\gamma + \beta}{\beta z}, \quad d = \frac{4\gamma}{\beta z^2} + \frac{\alpha}{3\beta}, \quad z = z_0 + iz_1.$$

При этом условие A-устойчивости схемы (26) выполнено, если $\operatorname{Re} W < 0$. Пусть W_1 и W_2 — корни уравнения (28); тогда по теореме Виета

$$W_1 + W_2 = c, \quad W_1 \cdot W_2 = d. \tag{29}$$

Здесь

$$W_1 = a_0 + ia_1, \quad W_2 = b_0 + ib_1, \quad c = c_0 + ic_1, \quad d = d_0 + id_1.$$

Для того, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Re} W_k < 0$, $k = 1, 2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $a_0 + b_0 < 0$, $a_0 \cdot b_0 > 0$, т.е. $a_0 < 0$, $b_0 < 0$. Из конкретного вида (29) получаем уравнение

$$(a_0 b_0)^2 - p a_0 b_0 + q = 0,$$

где $p = c_0^2 + 4d_1 + c_1^2$, $q = d_0 c_0^2 + c_0 c_1 d_1 + d_1^2$. Отсюда $a_0 \cdot b_0 > 0$, если $p > 0$ и $q > 0$. Непосредственное вычисление показывает, что p и q положительны, если выполняется неравенство $\gamma^2 - 14\gamma\beta + \beta^2 \geqslant 0$. С учетом условия аппроксимации четвертого порядка увидим, что это условие будет выполнено, если

$$\alpha > 0, \quad 0 < \beta \leqslant \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right). \tag{30}$$

Условие $a_0 \cdot b_0 > 0$ означает, что a_0 и b_0 имеют одинаковый знак. Из конкретного вида W_1 и W_2 и неравенства $\operatorname{Re}\lambda < 0$ заключаем, что $a_0 < 0$, $b_0 < 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (30)*, то схема* (26) *A-устойчива.*

Замечание 1. Непосредственным вычислением корней уравнения (26) можно показать, что:

(a) если $\operatorname{Re} z = 0$ ($z = iz_1$), то схема (26) A-устойчива при тех же условиях (30);

(b) если $\operatorname{Im} z = 0$ ($z = z_0$), то схема (26) A-устойчива при условиях $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\lambda > 0$.

7. Применение к уравнению в частных производных. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения колебаний мембраны, являющегося простейшим представителем уравнений гиперболического типа второго порядка, которому присущи все характерные особенности этих уравнений. Поэтому проверка качества численных методов на этом уравнений является необходимым условием применения их к более сложным уравнениям.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \big\{x \in \Omega,\ t \in (0,T]\big\},\\
&u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega = \big\{0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1,2\big\},\\
&u = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad 0 < t \leqslant T.
\end{aligned} \tag{31}$$

Задаче (31) соответствует следующая слабая постановка:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \vartheta\right) + a\,(u,\vartheta) = (f,\vartheta) \quad \forall \vartheta \in V,$$

где

$$V = \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l), \quad (u,\vartheta) = \int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2} u\vartheta\,dx, \quad a(u,\vartheta) = \int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2.$$

Система базисных функций для этой задачи на каждом прямоугольном конечном элементе выбрана в виде произведения базисных функций для одномерной задачи. Для двумерной задачи более экономным является базис, построенный по -сплайнам, так как количество неизвестных коэффициентов в этом случае в четыре раза меньше, чем при выборе системы на основе эрмитовых сплайнов.

Введем разбиение области Ω на N_1N_2 прямоугольников:

$$\Omega_{ij} = \Big\{(i-1)h_1 \leqslant x_1 \leqslant ih_1,\ (j-1)h_2 \leqslant x_2 \leqslant jh_2\Big\}, \quad i = \overline{1,N_1}, \quad j = \overline{1,N_2}.$$

Выберем систему базисных функций $\Phi_{ij}(x_1,x_2) = \phi_i(x_1)\phi_j(x_2)$, $i = \overline{1,N_1-1}$, $j = \overline{1,N_2-1}$, где $\phi_i(x)$ — базисная функция для одномерной задачи, построенная на основе B_3-сплайна.

Приближенное решение тогда представимо в виде

$$u_h(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} a_{ij}(t)\phi_i(x_1)\phi_j(x_2).$$

По построению

$$V_h = \big\{u_h(x) : u_h(x) = 0,\ x = (x_1,x_2) \in \Gamma\big\}.$$

Графики функций $\Phi_{ij}(x_1,x_2) = \phi_i(x_1)\phi_j(x_2)$ при $N_1 = N_2 = 8$ и разных значениях i, j представлены на рис. 1.

Введем вектор

$$u_h(t) = \vec{u}(t) = \Big(a_{11}(t),\ a_{21}(t),\ \ldots, a_{N_1-2,N_2-1}(t),\ a_{N_1-1,N_2-1}(t)\Big)^T,$$

что соответствует нумерации неизвестных коэффициентов $a_k = a_{ij}$ в последовательности «строка-столбец»: $k = i + (j-1)(N_1-1)$. Матрица жесткости, соответствующая вектору $\vec{u}(t)$, вычисляется так:

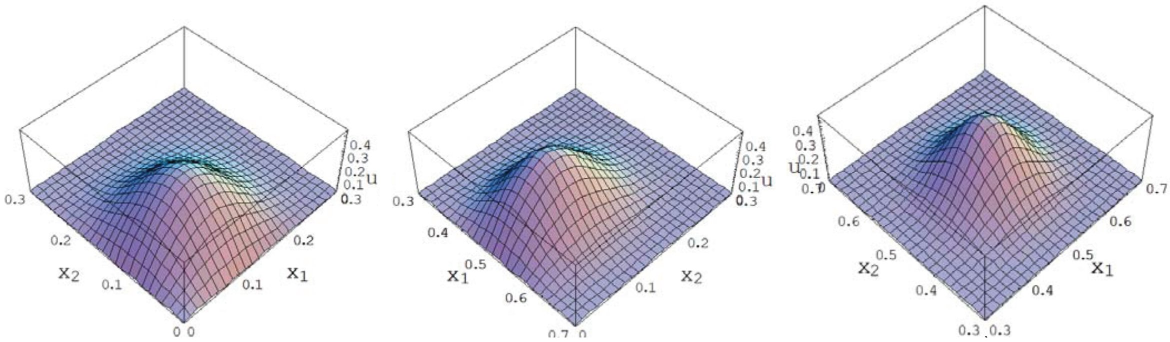
$$G = \Big\{a\big(\Phi_k(x_1,x_2), \Phi_m(x_1,x_2)\big)\Big\}_{k,m=1}^N,$$

где

$$N = (N_1-1)(N_2-1), \quad k = i + (j-1)(N_1-1), \quad m = p + (q-1)(N_1-1),$$

$i,p = \overline{1,N_1-1}$, $j,q = \overline{1,N_2-1}$. Аналогично вычисляется матрица массы:

$$M = \Big\{\big(\Phi_k(x_1,x_2), \Phi_m(x_1,x_2)\big)\Big\}_{k,m=1}^N.$$



(a) $i=1$, $j=1$ (b) $i=5$, $j=1$ (c) $i=5$, $j=5$

Рис. 1. Сплайн-функция $\Phi_{ij}(x_1,x_2)=\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)$.

8. Вычислительный эксперимент.

Пример 1. Рассмотрим следующую тестовую задачу для (31):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad t>0, \quad x\in\Omega, \quad \Omega=\big\{0<x_\alpha<1,\ \alpha=1,2\big\},\\
&u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\\
&x_1=0: u=x_2(1-x_2), \quad u=0, \quad x\in\Gamma\setminus(x_1=0).
\end{aligned} \tag{32}
$$

Введением новой искомой функции $v(x,t)$, $u=v+(1-x_1)x_2(1-x_2)$. Тогда задача (32) сводится к задаче с однородными краевыми условиями. Решение задачи (32), полученное методом разделения переменных, имеет вид:

$$
\begin{aligned}
u(x_1,x_2,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{16}{\pi^4 k(2p-1)}\Bigg[\bigg(\frac{-1}{(2p-1)^2}+\frac{1}{k^2+(2p-1)^2}\bigg)\cos\Big(\pi\sqrt{k^2+(2p-1)^2}t\Big)-\\
-\frac{1}{k^2+(2p-1)^2}\Bigg]\sin(\pi k x_1)\sin(\pi p x_2)\Bigg\}+(1-x_1)x_2(1-x_2).
\end{aligned}
$$

При вычислении решения бесконечная сумма заменяется конечной по индексу k до M_1, по индексу p до M_2. На рис. 2–4 представлены результаты расчетов в виде 3D графиков решения задачи (32). Явно видно преимущество схемы метода конечных элементов (схема 5) в сравнении с явной схемой второго порядка аппроксимации по времени и по пространству [18]. Заметим, что сетка для схемы метода конечных элементов значительно более грубая, чем сетка для разностной схемы второго порядка точности.

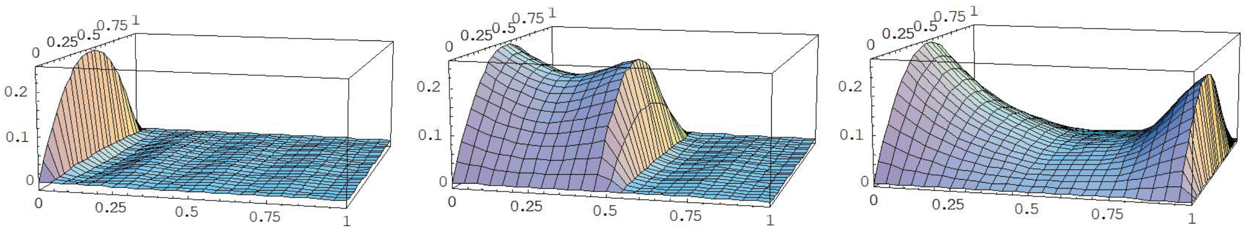
Пример 2. Пусть в (6) $n=1$, $\lambda=\overline{\lambda}=-1$, $\overline{\overline{\lambda}}=0$, $\mu=\theta=1$, $f(x,t)=2(1-6\pi^2)\sin(2\pi x)e^t$, $l=1$. Тогда получим задачу

$$
\begin{aligned}
&(1+\Delta)\ddot{u}+(1+\Delta)\dot{u}+\Delta u=-f(x,t), && x\in(0,1), \quad t\in(0,T],\\
&u(0,t)=0, \qquad u(1,t)=0, && 0<t\leqslant T,\\
&u(x,0)=\sin(2\pi x), \quad \dot{u}(x,0)=\sin(2\pi x), && 0<x<1.
\end{aligned}
$$

Пространственную переменную аппроксимируем методом конечных разностей с погрешностью аппроксимации h^2.

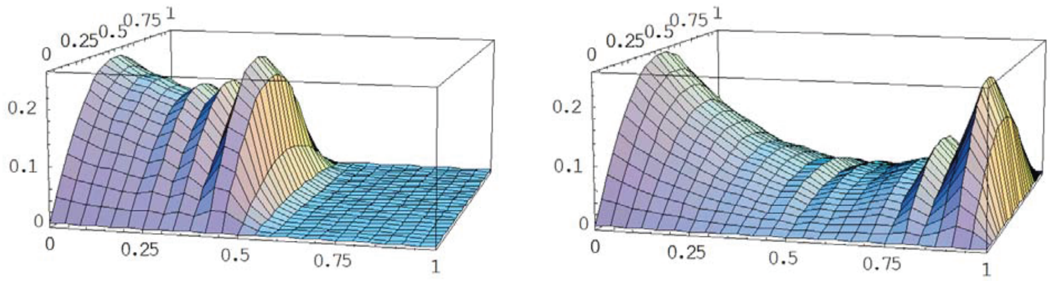
Точное решение имеет вид $u(x,t)=\sin(2\pi x)e^t$. Рассмотрены точные и приближенные решения схемы (12), (13) с параметрами $\alpha=1/8$, $\beta=1/24$, $\gamma=1/12$:

$$
\omega_1=0, \quad \omega_2=-0{,}0416667, \quad \nu_1=0{,}25+i0{,}144338, \quad \nu_2=0{,}25-i0{,}144338.
$$



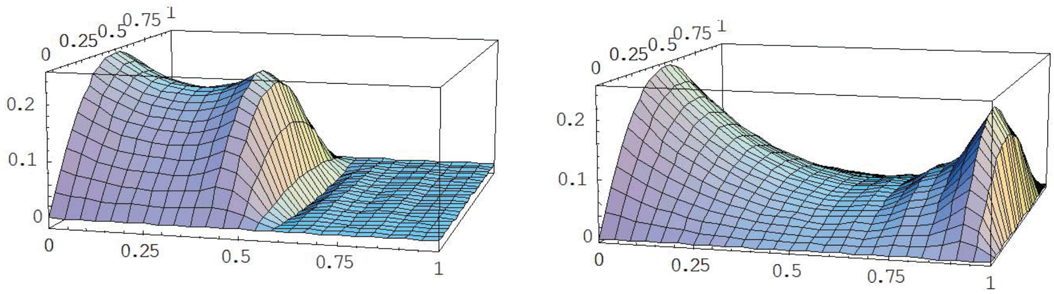
(a) $t = 0$ (b) $t = 0{,}5$ (c) $t = 1{,}0$

Рис. 2. Точное решение при $M_1 = 40$, $M_2 = 20$.



(a) $t = 0{,}5$ (b) $t = 1{,}0$

Рис. 3. Численное решение, полученное по явной схеме, при $N_1 = N_2 = 40$, $h_1 = h_2 = 0{,}025$, $\tau = 0{,}0125$.



(a) $t = 0{,}5$ (b) $t = 1{,}0$

Рис. 4. Численное решение, полученное по схеме метода конечных элементов, при $N_1 = N_2 = 16$, $h_1 = h_2 = 0{,}0625$, $\tau = 0{,}02$.

Теперь определим скорости сходимости вдоль пространственного и временного направления по формулам $\log(z(2h,\tau)/z(h,\tau))$ и $\log(z(h,2\tau)/z(h,\tau))$. Результаты по схеме с параметрами $\gamma = 1/12$, $\alpha = 1/8$, $\beta = 1/24$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = -0{,}0416667$ отражены в таблицах 1 и 2.

При таком выборе параметров получаем, что $\bar{\omega} = 1/4$. Пусть $\delta = 1/2$. Тогда условия устойчивости (14) с учетом наибольшего собственного значение оператора Лапласа принимает вид $\tau^2 \leqslant 3(4 + h^2)/2$.

Оценки скорости сходимости и точности разностных схем метода конечных элементов для уравнения (3) в классах обобщенных решений получены в [21]. В [24, 25] на основе вычислительного эксперимента проведено тестирование схем, а также проведено их сравнительный анализ.

Таблица 1. Скорости сходимости по пространственному направлению

Шаг по пространству	Шаг по времени	Погрешность	Сходимость
$h = 0{,}01$	$\tau = 0{,}01$	$2{,}31 \cdot 10^{-08}$	
$h = 0{,}005$	$\tau = 0{,}01$	$5{,}68 \cdot 10^{-09}$	2,02393
$h = 0{,}0025$	$\tau = 0{,}01$	$1{,}42 \cdot 10^{-09}$	2
$h = 0{,}00125$	$\tau = 0{,}01$	$3{,}53 \cdot 10^{-10}$	2,008151

Таблица 2. Скорости сходимости по временному направлению

Шаг по пространству	Шаг по времени	Погрешность	Сходимость
$h = 0{,}01$	$\tau = 0{,}01$	$2{,}31 \cdot 10^{-08}$	
$h = 0{,}01$	$\tau = 0{,}005$	$1{,}44 \cdot 10^{-09}$	4,006259
$h = 0{,}01$	$\tau = 0{,}0025$	$9{,}00 \cdot 10^{-11}$	3,997493
$h = 0{,}01$	$\tau = 0{,}00125$	$5{,}61 \cdot 10^{-12}$	4,004013

Оценки скорости сходимости и точности разностных схем метода конечных элементов для уравнения (5) в классах обобщенных решений в случае $\rho \equiv 0$ (уравнение Аллера) получены в [27]. Получению оценки скорости сходимости и точности разностных схем метода конечных элементов для обобщенного уравнения Аллера—Лыкова (5) в классах обобщенных решений и численному моделированию будут посвящены отдельные работы.

9. Выводы. Построен новый класс многопараметрических разностных схем высокого порядка точности для абстрактной задачи Коши для уравнений перового и второго порядков. Наличие параметров в схеме позволяет произвести регуляризацию схем с целью оптимизации алгоритма реализации и точности схемы. Доказана устойчивость и сходимость рассмотренных разностных схем и на их основе получена оценка точности. С помощью вычислительного эксперимента проведено тестирование схем, а также проведен их сравнительный анализ. Полученные результаты могут найти дальнейшие применение при исследовании других аналогичных начально-краевых задач, в том числе задач с нелокальными краевыми условиями. Схемы имеют определенные преимущества перед другими схемами: схемы высокого порядка точности (выше двух); кроме самого решения, одновременно находится и её производная (скорость) с той же точностью. В практических задачах, например, волновых движениях в сплошных средах, эта производная соответствует скоростям движения; используя интерполяционное представление решения (8), при необходимости можно получить решение и его производную в любой момент времени; поскольку схемы двухслойные, можно без потери точности использовать переменный шаг; схема условно устойчивая и требует в четыре раза больше арифметических операции, чем обычные, но эта схема для достижения определенной точности позволяет выбрать большие шаги по времени. Численное моделирование различных задач показали, что для достижения необходимой точности решения нестационарных задач существенной вклад вносить шаг по времени, что оправдывают построения схемы высокого порядка точности по времени [18–26].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.
2. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.
3. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. — М.: Наука, 1990.
4. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.

5. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге—Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1988.
6. *Замышляева А. А.* Об алгоритме численного моделирования волн Буссинеска—Лява// Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Компьют. тех. Управл. Радиоэл. — 2013. — *13*, № 4. — С. ы 24–29.
7. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.
8. *Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышекова Р. В.* Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова с нелокальным условием// Владикавказ. мат. ж. — 2017. — *19*, № 1. — С. 50–58.
9. *Москальков М. Н.* Об одном свойстве схемы повышенного порядка точности для одномерного волнового уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1975. — *15*, № 1. — С. 254–260.
10. *Москальков М. Н.* Схема метода конечных элементов повышенной точности для решения нестационарных уравнений второго порядка// Диффер. уравн. — 1980. — *16*, № 1. — С. 1283–1292.
11. *Москальков М. Н., Утебаев Д.* Численное моделирование нестационарных процессов механики сплошной среды. — Фан ва технология: Ташкент, 2012.
12. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
13. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012.
14. *Новиков Е. А.* Явные методы для жестких систем. — Новосибирск: Наука, 1997.
15. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. — М.: Наука, 1979.
16. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007.
17. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1979.
18. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.
19. *Утебаев Д.* Разностные схемы для гиперболических систем уравнений с обобщенными решениями. — Ташкент: Фан ва технология, 2017.
20. *Aripov M., Utebaev D., Nurullaev Zh.* Convergence of high-precision finite element method schemes for the two-temperature plasma equation// AIP Conf. Proc. — 2021. — *2325*. — 020059.
21. *Moskalkov M. N., Utebaev D.* Finite element method for the gravity-gyroscopic wave equation// J. Comput. Appl. Math. — 2010. — № 2 (101). — P. 97–104.
22. *Moskalkov M. N., Utebaev D.* Convergence of the finite element scheme for the equation of internal waves// Cybern. Syst. Anal. — 2011. — *47*, № 3. — P. 459–465.
23. *Moskalkov M. N., Utebaev D.* Comparison of some methods for solving the internal wave propagation problem in a weakly stratified fluid// Math. Mod. Comp. Simul. — 2012. — *3*, № 2. — P. 264–271.
24. *Moskalkov M. N., Utebaev D.* Finite element solution of a problem for gravity-gyroscopic wave equation in the time domain// Appl. Math. — 2014. — *5*, № 8. — P. 1200–1212.
25. *Moskalkov M. N., Utebaev D.* Solution of the Neumann problem with respect to the eqation for gravity-gyroscopic waves by the finite element method// J. Adv. Appl. Math. — 2016. — *1*, № 2. — P. 107–119.
26. *Utebaev D., Utebaev B.* Comparison of some numerical methods of solution of wave equations with strong dispersion// AIP Conf. Proc. — 2021. — *2365*. — 020009.
27. *Utebaev D., Utepbergenova G. X., Tileuov K. O.* On convergence of schemes of finite element method of high accuracy for the equation of heat and moisture transfer// Bull. Karaganda Univ. — 2021. — № 2 (101). — P. 29–43.

Утебаев Даулетбай
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
E-mail: dutebaev_56@mail.ru

Утепбергенова Гулзира Хабибуллаевна
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
E-mail: utepbergenovagu@gmail.com

Казымбетова Мухаббад Махсетбаевна
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
E-mail: q.muxabbat-1511@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 128–147
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-128-147

УДК 519.2:531/534

СПОНТАННАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ В МАРКОВСКИХ ЦЕПЯХ. II. МЕЗОФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

© 2023 г. **В. В. УЧАЙКИН**

Аннотация. Вторая часть обзора демонстрирует применение теоретических положений, развитых в первой части, к анализу статистических характеристик процесса кластеризации наблюдаемого распределения галактик в видимой части Вселенной. В отличие от стандартного подхода к решению динамической задачи о кластеризации гравитационной плазмы, в качестве исходных уравнений принимается не система дифференциальных уравнений, описывающая плазму как непрерывную среду, а интегральное уравнение Орнштейна—Цернике для системы случайно распределенных точек, взаимодействие между которыми учитывается не введением гравитационного потенциала, а подходящим выбором ядра уравнения Орнштейна—Цернике для двухчастичной корреляционной функции. В рамках этой модели случайной среды, названной автором мезофрактальной, найдено 4-параметрическое представление спектра мощности флуктуаций, позволяющее определить статистические параметры такой среды на основе наблюдаемых данных. Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — *220*. — С. 125–144.

Ключевые слова: гравитационная плазма, галактики, уравнение Орнштейна—Цернике, мезофрактальная модель, корреляции, спектр мощности.

SPONTANEOUS CLUSTERING IN MARKOV CHAINS. II. MESOFRACTAL MODEL

© 2023 **V. V. UCHAIKIN**

Abstract. In the second part of the review, we apply theoretical principles developed in the first part to analysing statistical characteristics of clustering the observed distribution of galaxies in the visible part of the Universe. In contrast to the standard approach to solving the dynamic problem of clustering gravitational plasma based on systems of differential equations that describe the plasma as a continuous medium, we use the Ornstein–Zernike integral equation for a system of randomly distributed points whose interaction is described by an appropriate choice of the kernel of the Ornstein–Zernike equation for the two-particle correlation function. Within the framework of this "mesofractal" model, we find a 4-parameter representation of the spectrum of fluctuation power, which allows one to determine statistical parameters of the medium from the observed data. The first part of this work: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — **220**. — P. 125–144.

Keywords and phrases: gravitation plasma, galaxies, Ornstein–Zernike equation, mesofractal model, correlations, power spectrum.

AMS Subject Classification: 65P40

1. Вселенная как фрактальная пыль.

1.1. Фрактальная астростатистика. Нет нагляднее образа точечного распределения, чем звездное небо в безлунную ночь. Накопленные к настоящему времени базы данных астрономических наблюдений распределения видимой материи во Вселенной сосредоточены в обзорах, содержащих разнообразную информацию о миллионах и миллионах космических объектов — планет, звёзд, галактик, скоплений галактик, скоплений скоплений галактик, объектов специальных типов — квазаров, пульсаров, радиогалактик и др. Строго говоря, современная космология (наука о возникновении и эволюции Вселенной) должна опираться на всю эту информацию, однако это представляется сегодня невозможным, как невозможен учет всех индивидуальных координат и скоростей молекул газа или жидкости, заключённых в сосуде. Вместо этого в статистической физике используется сжатие информации и представление её в виде некоторой последовательности функций с возрастающим числом аргументов. Функция с нулевым числом аргументов (то есть просто число) ρ представляет собой плотность массы (или плотность числа молекул), функция одной переменной $\xi(r)$ — корреляционную функцию и т. д [3]. Подобный подход широко используется и при описании вещества в космических масштабах (космографии). В известной серии первоначальных работ по статистике гравитационного поля, порождаемого случайным распределением звезд, Чандрасекар и фон Нейман (1941—1943) представляли их распределение однородным пуассоновским ансамблем, заимствовав эту модель из работы Хольтсмарка (1919), изучавшего флуктуации электрического поля в плазме. Вследствие экранирования усредненные корреляции быстро спадали с расстоянием, и Хольтсмарк пренебрег ими, приняв распределение источников поля пуассоновским. Гравитационные поля не подвержены экранированию, и у Чандрасекара с Нейманом было меньше оснований пренебречь корреляциями. Позднее, когда внимание астрономов переключилось со звезд на галактики, выяснилось, что корреляционная функция распределения галактик в широком диапазоне расстояний имеет степенной вид

$$\xi(r) = (r/r_0)^{-\gamma},$$

где $\gamma = 1{,}77 \pm 0{,}04$ и r_0 — *корреляционная длина.* Оказалось также, что скопления галактик (кластеры) и крупномасштабного распределения галактик (КРГ), скопления скоплений (суперкластеры), рассматриваемые как точечные объекты, положения которых определяются координатами центров масс, характеризуются корреляциями того же самого степенного типа.

При этом для галактик r_0 оказывается равным $5h^{-1}$ Мпс, тогда как для кластеров $r_0 \simeq 25h^{-1}$ Мпс и значительно больше для суперкластеров. Это озадачивает: кластеры представляются более коррелированными структурами, чем галактики, из которых они состоят! Другими словами, распределение галактик можно ожидать близким к однородному на расстояниях 10-$15h^{-1}$ Мпс, тогда как кластеры и суперкластеры наблюдаются на существенно больших расстояниях [25, 30]. Кроме того, kорреляционная длина возрастает с размером выборки (глубиной обзора) [12,13]. Тогда как обзоры [17,31] не свидетельствуют о достижении однородности, а скорее всего наводят на мысль о самоподобии наблюдаемых распределений.

Концепция самоподобия и была реализована Б. Мандельбротом в его фрактальной модели распределения галактик, основанной на блужданиях Леви [21, 22]. Используя в качестве определяющего свойство масштабной инвариантности (самоподобия), можно сказать, что *фрактал — это геометрическая структура, которая всегда выглядит одинаково* (по крайней мере, в статистическом смысле), *независимо от разрешения, с каким она наблюдается* [8, с. 49].

Более формальное определение фрактального множества, данное Мандельбротом (см. [22]), таково: это *математический объект, фрактальная* (*хаусдорфова*) *размерность* D_H *которого строго больше, чем его топологическая размерность* D_T. Таким образом, для фрактального точечного распределения в d-мерном пространстве, названного Мандельбротом *фрактальной пылью*, $D_T = 0$ и $0 < D_H \leqslant d$. Фрактальная размерность $D_H = d$ характеризует однородное распределение, заполняющее пространство. В качестве примера последнего можно рассмотреть однородный пуассоновский ансамбль, для которого

$$\langle N(R)\rangle = \frac{4}{3}\pi\rho R^3, \quad \xi(\boldsymbol{r}) = 0,$$

а среднее число локальных объектов (частиц, галактик) в единице объема (концентрация) $n(\boldsymbol{r})$ не зависит ни от точки наблюдения $\boldsymbol{r}$, ни от выбора начала системы координат в пространстве. В случае фрактального распределения началом координат выбирается точка, принадлежащая фрактальному множеству, скажем, точка $\boldsymbol{r}_0$. Концентрацию же объектов в точке наблюдения $\boldsymbol{r}$ будем обозначать $g(\boldsymbol{r}_0 \to \boldsymbol{r})$ и называть концентрацией соседей (не обязательно ближайших, если все-таки, ближайших, то это специально оговаривают). Интеграл

$$\int\limits_{U_R} g(\boldsymbol{r}_0 \to \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \langle N(\boldsymbol{r}_0 \to U_R) \rangle$$

по шару U_R радиусом R с центром в точке $\boldsymbol{r}_0$ дает среднее число объектов в этом шаре (объект в точке $\boldsymbol{r}_0$ не входит в это число). В вероятностной терминологии это — условное математическое ожидание. Поведение этого числа с увеличением радиуса шара, представленное в виде степенной функции

$$\langle N(\boldsymbol{r}_0 \to U_R) \rangle \simeq R^D, \quad R \to \infty, \quad 0 < D \leqslant d, \tag{1}$$

как раз и свидетельствует о том, что распределение, с которым мы имеем дело, является фрактальным с фрактальной размерностью D. Очевидно, есть некоторые проблемы в интерпретации этой модели применительно к распределению галактик. Во-первых, даже если игнорировать различие в массах, как это первоначально сделал Мандельброт, мы тут же вынуждены будем ограничиться относительно малыми размерами шара, ибо с увеличением его размера в занимаемую им область войдут новые галактики со своими соседями и тем самым изменят чисто степенное поведение условной плотности. Если же распространить фрактальный признак (1) на все возможные расстояния, то уже в случае трех произвольно расположенных галактик мы сталкиваемся с неопределенностью: концентрация галактик в любой из этих точек зависит от того, какую из двух оставшихся мы выберем в качестве r_0. Еще одно обстоятельство, требующее выяснения, связано с выполнением космологического принципа — гипотезы о том, что Вселенная пространственно однородна и изотропна [1].

Заметим, что в этом случае не имеет значения, помещается ли центр сферы, в которой производится подсчёт, в любую точку множества или в любую другую точку пространства.

Это значит, что переменив точку, взятую в качестве начала координат, мы должны вновь получить изотропное относительно нового начала координат распределение с плотностью числа окружающих её галактик, убывающей относительно неё по тому же степенному закону. Возможно ли это? Нет, если речь идёт о «застывшем» детерминированном распределении: центр симметрии останется на прежнем месте, не совпадающим с новым началом координат. Да, если под плотностью понимать *среднюю плотность*, то есть плотность, усреднённую по статистическому ансамблю таких распределений, а космологический принцип заменить его *слабой формой: усреднённое таким образом распределение вещества во Вселенной должно выглядеть одинаково в любой системе координат, центр которой совпадает с одной из галактик.* Введённый Б. Мандельбротом слабый космологический принцип [21] восстановил (в ограниченном виде) идею равноправия различных систем координат ценой нарушения эквивалентности пустых и занятых веществом точек Вселенной.

1.2. Интегральное уравнение для плотности соседей. Для исследования структуры таких стохастических фракталов мы применили аппарат производящих функционалов [35] (см. также первую часть обзора [3]). Производящий функционал случайного точечного распределения $\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \ldots\}$, генерируемого частицей, рождённой в точке $\boldsymbol{r}$, определяется соотношением

$$G(\boldsymbol{r} \to u(\cdot)) = \langle u(\mathbf{X}_1) u(\boldsymbol{X}_2) u(\boldsymbol{X}_3) \ldots \rangle,$$

где $u(\boldsymbol{r}) \leqslant 1$ — пробная функция. Для дальнейших преобразований удобно представить это функционал с помощью интеграла по случайной мере $N(\boldsymbol{r} \to d\boldsymbol{x})$, равной случайному числу точек в $d\boldsymbol{x}$, образованных частицей, рождённой в точке $\boldsymbol{r}$:

$$G(\boldsymbol{r} \to u(\cdot)) = \left\langle \exp\left\{ \int N(\boldsymbol{r} \to d\boldsymbol{x}) \ln u(\boldsymbol{x}) \right\} \right\rangle.$$

Интегрирование здесь ведётся по всему пространству, но функция $u(\boldsymbol{x})$ отлична от 1 лишь в ограниченной области пространства, так что интеграл предполагается сходящимся (в вероятностном смысле).

Очевидно,

$$G(\boldsymbol{r} \to 1) = 1.$$

Первая функциональная производная при $u(\boldsymbol{x}) = 1$ даёт условную плотность числа галактик в точке $\boldsymbol{x}_1$, порожденных траекторией с началом в точке $\boldsymbol{r}$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta G(\boldsymbol{r} \to u(\cdot))}{\delta u(\boldsymbol{x}_1)}\right|_{u=1} &= \left\langle \exp\left\{\int N(\boldsymbol{r} \to d\boldsymbol{x}) \ln u(\boldsymbol{x})\right\} \frac{\delta}{\delta u(\boldsymbol{x}_1)} \left\{\int N(\boldsymbol{r} \to d\boldsymbol{x}) \ln u(\boldsymbol{x})\right\}\right\rangle_{u=1} = \\ &= \left\langle \exp\left\{\int N(\boldsymbol{r} \to d\boldsymbol{x}) \ln u(\boldsymbol{x})\right\} \left\{\int N(\boldsymbol{r} \to d\boldsymbol{x}) \frac{\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1)}{u(\boldsymbol{x})}\right\}\right\rangle_{u=1} = \\ &= \frac{N(\boldsymbol{r} \to d\boldsymbol{x}_1)}{d\boldsymbol{x}_1} \equiv g_1(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{x}_1).\end{aligned}$$

Функциональная производная порядка n даёт плотность n-го факториального момента:

$$D_u^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) G(r \to u(\cdot))\big|_{u=1} \equiv \left.\frac{\delta^n G(\boldsymbol{r} \to u(\cdot))}{\delta u(\boldsymbol{x}_1) \ldots \delta u(\boldsymbol{x}_n)}\right|_{u=1} = g_n(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n).$$

Напомним, что факториальным моментом случайного числа точек в измеримой области называют величину

$$\langle N^{[n]}(A)\rangle \equiv \Big\langle N(A)\big[N(A) - 1\big] \ldots \big[N(A) - n + 1\big]\Big\rangle,$$

так что

$$\begin{aligned}&\int\limits_A \ldots \int\limits_A g_n(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) d\boldsymbol{x}_1 \ldots d\boldsymbol{x}_n = \\ &\qquad = \Big\langle N(\boldsymbol{r} \to A)\big[N(\boldsymbol{r} \to A) - 1\big] \ldots \big[N(\boldsymbol{r} \to A) - n + 1\big]\Big\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.\end{aligned}$$

Обозначив через $p(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r})$ плотность перехода блуждающей частицы, запишем уравнение для производящего функционала необрывающегося процесса:

$$G(\boldsymbol{r} \to u(\cdot)) = \int d\boldsymbol{x} p(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x} \to u(\cdot)).$$

Выполнив функциональное дифференцирование по u и положив $u = 1$, получим интегральное уравнение для плотности числа галактик в точке $\boldsymbol{x}$ относительно начала траектории блуждающей частицы:

$$g(\boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{y} p(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{y}) + p(\boldsymbol{x}).$$

Формальное его решение представляет собой бесконечную сумму многократных свёрток переходных плотностей

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} p^{\star j}(\boldsymbol{x}).$$

Каждое слагаемое здесь даёт распределение координат блуждающей частицы после соответствующего перехода. Собственно движение нас в данном случае не интересует, мы рассматриваем лишь *след*, оставленный частицей в виде бесконечного множества точек в пространстве — тех самых точек, где воображаемая частица испытала столкновения. Образ блуждающей частицы просто позволяет лучше представить себе общую картину корреляций в этом множестве случайных точек и воспользоваться готовым математическим аппаратом теории многократного рассеяния [2].

Из предыдущего должно быть ясно, что $g(\boldsymbol{x})$ характеризует плотность числа частиц (в данном случае, галактик) в точке $\boldsymbol{x}$ при условии, что начало координат выбрано в одной из галактик. Наглядности ради, называют ее *плотностью соседей*, хотя это не означает, что они находятся близко от этой «нулевой» галактики. Точнее говоря, $g(\boldsymbol{x})$ есть плотность числа галактик в точке $\boldsymbol{x}$

при условии, что начало координат выбрано в одной из других галактик (в отсутствие корреляций эта плотность не зависела бы от выбора начала координат даже в случае неоднородной среды).

1.3. Моменты соседей галактики. Чтобы найти высшие моменты случайного числа $N(R)$, характеризующие его флуктуации свойства, возьмем n-ю функциональную производную от обеих частей уравнения для производящего функционала,

$$D_u^{(n)}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)G(\boldsymbol{r}\to u(\cdot)) = \int d\boldsymbol{x} p(\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{x})D_u^{(n)}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)[u(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x}\to u(\cdot))].$$

Производная от произведения двух сомножителей, стоящая под интегралом в правой части, запишется в виде (напомним: символ s означает симметризацию по всем n переменным правой части):

$$D_u^{(n)}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)[u(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x}\to u(\cdot))] \overset{s}{=}$$
$$\overset{s}{=} u(\boldsymbol{x})G^{(n)}(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n,u(\cdot)) + n\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)G^{(n-1)}(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n,u(\cdot)).$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение, полагая $u=1$ и используя свойство дельта-функции при интегрировании по $\boldsymbol{x}$ во втором слагаемом, приходим к интегральному уравнению относительно плотности n-го факториального момента:

$$g^{[n]}(\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = \int d\boldsymbol{x} p(\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{x})g^{[n]}(\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) + np(\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{x}_1)g^{[n-1]}(\boldsymbol{x}_1\to\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n).$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что этой системе уравнений удовлетворяют решения

$$g^{[n]}(\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) \overset{s}{=} n!g(\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{x}_1)g(\boldsymbol{x}_1\to\boldsymbol{x}_2)\ldots g(\boldsymbol{x}_{n-1}\to\boldsymbol{x}_n).$$

Факториальные моменты случайного числа узлов траектории, начинающейся в начале координат, в шаре U_R радиуса R с центром в начале координат, запишутся в виде

$$\langle N^{[n]}\rangle = n!\int\limits_{U_R}\ldots\int\limits_{U_R} g(0\to\boldsymbol{x}_1)\ldots g(\boldsymbol{x}_{n-1}-\boldsymbol{x}_n)d\boldsymbol{x}_1\ldots d\boldsymbol{x}_n \sim n!(4\pi A/3)^n R^{\alpha n}K_n(\alpha), \quad R\to\infty,$$

где

$$K_0(\alpha)=1, \quad K_1(\alpha) = (3/4\pi)\int\limits_{U_1} r^{-3+\alpha}d\boldsymbol{x},$$

$$K_n(\alpha) = (3/4\pi)^n\int\limits_{U_1}\ldots\int\limits_{U_1}(r_1r_{1,2}\ldots r_{n-1,n})^{-3+\alpha}d\boldsymbol{x}_1d\boldsymbol{x}_2\ldots d\boldsymbol{x}_n, \quad r_{ij}=|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|, \quad n>1.$$

Для вычисления входящих в это выражение кратных интегралов введем систему функций [34]

$$v_n^{(\alpha)}(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{U_1}\ldots\int\limits_{U_1}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|r_{1,2}\ldots r_{n-1,n})^{-3+\alpha}d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2\ldots d\boldsymbol{r}_n,$$

так что

$$K_n(\alpha) = (3/4\pi)^n v_n^{(\alpha)}(0).$$

Функции эти связаны друг с другом реккурентным образом:

$$v_n^{(\alpha)}(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{U_1} F^{(\alpha)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')v_{n-1}^{(\alpha)}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}', \quad F^{(\alpha)}(\boldsymbol{r}) = r^{-3+\alpha}, \quad v_0^{(\alpha)}(\boldsymbol{r})=1.$$

Учитывая сферическую симметрию функций $F^{(\alpha)}$ и $v_n^{(\alpha)}$, мы можем представить это соотношение в виде

$$w_n^{(\alpha)}(r) = \int\limits_0^1 F^{(\alpha)}(r,r')w_{n-1}^{(\alpha)}(r')dr', \quad w_n^{(\alpha)}(r) = rv_n^{(\alpha)}(\boldsymbol{r}),$$

где

$$F^{(\alpha)}(r,r') = \frac{2\pi}{\alpha-1}[(r+r')^{\alpha-1} - |r-r'|^{\alpha-1}], \quad \alpha \neq 1,$$
$$F^{(1)}(r,r') = 2\pi[\ln(r+r') - \ln|r-r'|].$$

Легко видеть, что $K_n(\alpha)$ выражается через $w_n^{(\alpha)}$ следующим образом:

$$K_n(\alpha) = \left(\frac{3}{4}\pi\right)^n \left[\frac{dw_n^{(\alpha)}(r)}{dr}\right]_{r=0}.$$

Это представление удобно для последовательного вычисления $K_n(\alpha)$ для $\alpha > 1$ с использованием стандартной техники численного интегрирования. Ситуация упрощается в случае α=1:

$$v_n^{(1)}(r) = \frac{2\pi}{r}\int\limits_0^1 \ln\frac{|r'+r|}{|r'-r|} v_{n-1}^{(1)}(r')dr',$$
$$v_1^{(1)}(r) = \frac{2\pi}{r}\left\{r + \frac{1}{2}(1-r^2)\ln\frac{|1+r|}{|1-r|}\right\}.$$

Разлагая $v_n^{(1)}(r)$ в степенной ряд, можно найти следующее рекуррентное соотношение

$$v_n^{(1)}(r) = 2\pi v_{n-1}^{(1)}(0)\left(2 - \sum i = 1^\infty r^{2i}\left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right)\right) - (4\pi)^2 v_{n-2}^{(1)}(0)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)^2},$$

откуда

$$v_n^{(1)}(0) = 4\pi v_{n-1}^{(1)}(0) - (4\pi)^2 v_{n-2}^{(1)}(0)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)^2},$$
$$v_0^{(1)}(0) = 1, \quad v_1^{(1)}(0) = 4\pi.$$

При $\alpha \leqslant 1$ подынтегральная функция имеет сингулярность в точке $r' = r$, вызывающую рост ошибки при численном интегрировании. Чтобы избежать этой проблемы, мы преобразуем рекуррентное соотношение к виду

$$\int\limits_0^r w_n^{(\alpha)}(r')dr' = W_n^{(\alpha)}(r) - \frac{4\pi}{\alpha(\alpha-1)}\int\limits_0^1 r'^{\alpha} w_{n-1}^{(\alpha)}(r')dr',$$

где

$$W_n^{(\alpha)}(r) = \frac{2\pi}{\alpha(\alpha-1)}\int\limits_0^1 [(r+r')^{\alpha} - (r-r')|r-r'|^{\alpha-1}] w_{n-1}^{(\alpha)}(r')dr',$$

так что

$$K_n(\alpha) = (3/4\pi)^n [d^2 W_n^{(\alpha)}(r)/dr^2]_{r=0}.$$

Результаты всех этих вычислений представлены в Таблице 1.

2. Мезофрактальная модель КРГ.

2.1. Спаренные траектории Леви—Мандельброта. Рассматриваемая здесь схема построения случайных распределений точек в пространстве не должна ассоциироваться с какими-то физическими процессами во Вселенной и с её эволюцией. Схема марковских блужданий является лишь *способом описания наблюдаемых корреляций*, а вовсе не объяснением их происхождения и эволюции. Но для количественной теории развития крупномасштабной структуры необходимо сжатие имеющейся наблюдательной информации, и схема блужданий может рассматриваться как один из возможных инструментов такого сжатия. Это — модель, содержащая всего два параметра — α и A. Далекая от моделей, описывающих динамику Вселенной, она выражает высшие корреляционные функции через низшую (двухчастичную), то есть обладает свойством, наблюдаемым

Таблица 1. Коэффициенты $K_n(\alpha)$ для единичной траектории. Значения в скобках взяты из [27] (звёздочкой отмечены значения для $\alpha = 1{,}23$).

K_n	α							
	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
K_1	12,0	6,00	4,00	3,00	2,40	2,00	1,71	1,50
K_2	140	34,0	14,6	7,80	4,88	3,31	2,42	1,88
		(34,0)		(7,82)	(5,02)*	(3,31)		(1,88)
K_3	$163 \cdot 10$	185	50,4	19,1	9,38	5,22	3,30	2,29
					(9,5)*			
K_4	$188 \cdot 10^2$	985	168	45,8	17,7	8,13	4,46	2,78
K_5	$215 \cdot 10^3$	$516 \cdot 10$	554	108	33,2	12,6	6,03	3,38

(приближенно) в эксперименте. Однако, вытекающие из этой модели относительные флуктуации числа галактик $N(R)$ оказываются существенно выше наблюдаемых значений.

Следующие соображения позволяют уменьшить модельные флуктуации, сохранив остальные свойства модели (эта модификация была предложена и развита в работах [4, 34]). Предположим, что строим случайное распределение точек на оси, организуя блуждание из начала координат только в одном (положительном) направлении. Вторая половина оси при этом остаётся пустой. Естественный способ заполнить всю ось — это построить аналогичным образом левую часть фрактала, двигаясь от начала координат влево. Построение это не просто завершает фрактал, оно придаёт равноправие всем его атомам: теперь слева и справа от *каждого атома* есть соседи, и расстояние до каждого из них является случайной величиной с одним и тем же законом распределения. Можно интерпретировать полученный фрактал как результат блуждания не двух (гипотетических) частиц в противоположных направлениях, а одной частицы в одном из направлений, то есть, считать, например, что она всё время двигалась в положительном направлении оси x, придя из $-\infty$ и уйдя в ∞. У такой траектории и построенного на её основе фрактала нет ни начала, ни конца, нарушающих симметрию, все его точки в статистическом смысле равноправны.

Перенесём теперь этот прямолинейный фрактал в трёхмерное пространство, совместив один из атомов с началом координат, а направление каждого из отрезков, соединяющих пару соседних атомов, заменим на случайное, выбранное из изотропного распределения независимо от длины отрезка и его номера. Полученное множество случайных точек $\{\ldots, \boldsymbol{X}_{-3}, \boldsymbol{X}_{-2}, \boldsymbol{X}_{-1}, 0, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \ldots\}$ может рассматриваться как след бесконечной траектории, изотропно блуждающей из бесконечности в бесконечность, но технически (при моделировании и аналитических вычислениях) удобнее рассматривать его как след двух независимых траекторий с общим началом в начале координат. Переход от одиночной траектории к спаренной сразу уменьшает относительные флуктуации модели

$$\delta_{N(R)} = \frac{\sigma_{N(R)}}{\langle N(R)\rangle} = \sqrt{\langle N^{[2]}(R)\rangle / \langle N(R)\rangle^2 - 1 + 1/\langle N(R)\rangle}$$

в $\sqrt{2}$ раз, существенно приближая их к наблюдаемым значениям.

При больших радиусах обзоров R числа N велики, и факториальные моменты в асимптотике совпадают с обычными, так что следует ожидать выполнения соотношения

$$\langle N_p^{[n]}\rangle \approx \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle N^{[k]}\rangle \langle N^{[n-k]}\rangle \sim \left(\frac{4}{3}\pi A\right)^n R^{\alpha n} Q_n(\alpha), \quad R \to \infty,$$

Таблица 2. Моменты $\langle Z^n \rangle$ для спаренной траектории. Нижние значения относятся к результатам моделирования методом Монте-Карло.

$\langle Z^n \rangle$	α						
	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75
Z_2	1,49	1,44	1,41	1,37	1,35	1,33	1,33
		1,51 $\pm$0,07		1,40 $\pm$ 0,06		1,36 $\pm$ 0,06	
Z_3	2,93	2,70	2,55	2,36	2,29	2,22	2,22
		3,04 $\pm$ 0,25		2,52 $\pm$ 0,21		2,38 $\pm$ 0,21	
Z_4	7,18	6,18	5,59	4,95	4,71	4,51	4,54
		7,5 $\pm$ 1,0		5,7 $\pm$ 0,8		5,3 $\pm$ 0,9	
Z_5	21,0	16,7	14,4	12,2	11,4	10,8	11,0
		22 $\pm$ 4		16 $\pm$ 3		15 $\pm$ 5	

где $N_p^{[n]}$ — случайное число точек, от пары траекторий, а

$$Q_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} K_k(\alpha) K_{n-k}(\alpha).$$

В этом приближении моменты нормированной случайной величины

$$Z = \frac{N_{\boldsymbol{p}}(R)}{\langle N_{\boldsymbol{p}}(R) \rangle}$$

не зависят от радиуса R

$$\langle Z^n \rangle \sim n! \frac{Q_n(\alpha)}{(Q_1(\alpha))^n}, \quad R \to \infty.$$

Еще одно обстоятельство, зафиксированное при анализе результатов моделирования рассматриваемых цепей методом Монте-Карло: вследствие негауссовости Леви-статистики, которой подчиняются расстояния между узлами траектории, возникает эффект перемежаемости, аналогичный одномерным траекториям, рассмотренным в I части обзора. Эффект состоит в том, что вследствие степенного характера асимптотики переходных плотностей распределение узлов вдоль траектории цепи крайне неравномерно, длинные отрезки сменяются группами коротких (тоже изотропно распределенных), а соединяющие их узлы образуют кластеры. Вот к этим-то узлам и относится введенная выше Z-статистика, демонстрирующая их фрактальный характер. Кластеры эти образуют своего рода облака (в космологии — скопления), хаотически разбросанные в пространстве. Общая картина распределения такого типа является следствием конкуренции трех длин: короткой, характеризующей размеры кластеров, промежуточной, характеризующей расстояния между ними, и длинной, характеризующей размеры цепи в целом. С изменением масштаба изображения кластеров превращаются в точечно-подобные объекты, образующие в целом картину, подобную либо пуассоновскому распределению затравочных объектов (если в данном масштабе объектами стали скопления узлов независимых реализаций), либо фрактальному распределению узлов отдельной реализации цепи. Это и есть то, что мы называем мезофракталом. Нетривиальность этого понятия в том, что речь идет не о том, что часть системы, находящаяся на малых расстояниях от начала координат, выглядит неоднородной, а удаленная от нее — однородной: в этом нет ничего особенного, такое бывает «сплошь и рядом». Речь идет об одной и той же системе, рассматриваемой, скажем, оптическим прибором с фиксированным разрешением. По мере увеличения изображения мы видим превращение нечетко локализованных объектов в структурные образования и начинаем различать составляющие их конституенты, в обратном процессе мы увидим слияние их в скопления, превращающихся снова в точечные объекты. Таким образом, на оси масштабов мезофрактала мы имеем две зоны: фрактальную и однородную.

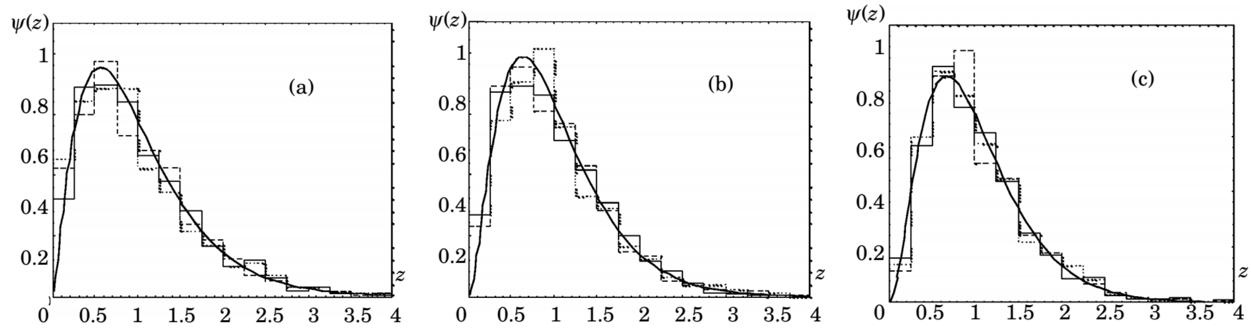


Рис. 1. Плотность распределения скейлинговой характеристики $Z = N(R)/\langle N(R)\rangle$ для кластеров: (a) $\alpha = 0{,}5$; (b) $\alpha = 1{,}0$; (c) $\alpha = 1{,}5$. Гистограммы — результаты моделирования 1000 реализаций с помощью метода Монте-Карло ($a = 10^{-3}$): для $R = 0{,}05$ — сплошная линия, для $R = 0{,}1$ — пунктир, $R = 0{,}2$ — точки. Гладкие сплошные кривые показывают гамма-распределение $\Psi_\alpha(z)$.

Не совсем тривиальна и идея использовать ансамбль независимых реализаций траекторий (Мандельброт использовал лишь одну реализацию. Имея дело с таким ансамблем и выбирая наугад какой-нибудь узел в качестве положения референтной галактики, мы тем самым выбираем и всю эту траекторию, и именно множество ее реализаций при фиксированном положении узла обеспечивает нужный закон спада корреляций, остальные траектории не зависят от его положения и участия в усреднении не принимают. Именно в этом причина разделения мезофрактала на две фазы — фрактальную и однородную.

В табл. 2 представлены результаты вычислений по этим формулам и по методу Монте-Карло. Оказалось, что для моментов $\langle Z^n\rangle$ выполняется следующее соотношение

$$\langle Z^n\rangle = (A(\alpha)n + B(\alpha))\langle Z^{n-1}\rangle.$$

Такое соотношение является характерным свойством гамма-распределения

$$\Psi_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\lambda^\lambda z^{\lambda-1}e^{-\lambda z}$$

с моментами

$$\langle Z^n\rangle = \left(\frac{n}{\lambda} + 1 - \frac{1}{\lambda}\right)\langle Z^{n-1}\rangle.$$

Параметр $\lambda(\alpha)$ выражается через квадрат относительных флуктуаций $\delta^2_{N(R)} \equiv \sigma^2_N/\langle N\rangle^2$ соотношением:

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{\delta^2_{N(R)}}.$$

На рис. 1 показано, что гамма-аппроксимация $\Psi_\alpha(z)$ удовлетворительно согласуется с данными наблюдений [11], и, что очень важно, прямые расчеты методом Монте-Карло подтвердили предположение о слабой (почти, не проявляющейся) зависимости перенормированной множественности Z от радиуса сферы при двадцатикратном его изменении.

2.2. Условная статистика КРГ. Теперь возникает два вопроса:

1. Можно ли построить случайное точечное распределение, которое являлось бы фрактальным на малых масштабах и однородным на больших?
2. Можно ли построить такие распределения с фрактальной размерностью $2 < D < 3$, которые наблюдаются, например, в задачах турбулентности [32]?

Начнём с первого вопроса. П. Колман (P. Coleman) и Л. Пьетронеро (L. Pietronero) пишут, в приложении к моделированию Вселенной: «Выборка, которая является фрактальной на малых масштабах и однородной на больших строится следующим образом: в большом объёме случайным образом выбирается некоторое число точек (положений). Поскольку точки распределены по закону Пуассона, то средние расстояния между ними $\lambda_0 \ldots$ Каждая из этих точек является стартовой точкой для построения фрактала, который обладает масштабами длин вплоть до некоторого предельного значения λ_0» [10, p. 334].

Вообще говоря, этот большой объём должен быть бесконечным, иначе будут наблюдаться граничные эффекты. Однако, если объём бесконечен, то возможны только два случая: либо $c < 1$ и тогда $g'(r) \propto r^{-3-\alpha}$, либо $c = 1$ и тогда $g'(r) \propto r^{-3+\alpha}$, но

$$\int g'(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = \infty.$$

Первый случай не является фракталом *на всех масштабах*, во втором случае мы не можем использовать стандартный корреляционный анализ из-за расходимости множителя

$$\rho = \frac{\rho_0}{1-c} \to \infty, \quad c \to 1.$$

Чтобы исследовать эту проблему подробнее, были выполнены численные расчёты для $g'(r)$ при значениях c, близких к 1 (см. [35]). В качестве ядра $p(r)$ были использованы сферически симметричные устойчивые распределения. Эти расчёты показывают (см. рис. 2–4), что существует некоторая конечная область, внутри которой функция $g'(r;c)$ численно совпадает с $g'(r;1)$ при c, достаточно близком к 1. Таким образом, наблюдается весьма примечательный факт: чем больше среднее число шагов на траектории $(1-c)^{-1}$, тем больше область, где может приближенно применяться асимптотическая формула $g'(r,1)$ для бесконечной траектории. Другими словами, если вероятность выживания c близка к 1, то играет роль *промежуточной асимптотики*, интервал применимости которой тем больше, чем ближе c к 1. Таким образом, конечная траектория может рассматриваться, как обладающая, в некоторой области, свойствами бесконечной, то есть возможно построить случайные точечные распределения с фрактальными свойствами на больших масштабах и с конечной средней плотностью частиц $\rho = \rho_0(1-c)^{-1}$.

На рис. 5(a)–5(c) приведены статистические реализации двумерной проекции пуассоновского (5(a)), фрактального (5(b)) и мезофрактального (5(c)) точечных распределений. На рис. 5(b) показан увеличенный в размерах кластер, выделенный кружком на рис. 5(c), изображающем мезофрактал.

Ответ на второй вопрос также положительный. Чтобы показать это, необходимо вернуться к рассмотрению ветвящихся каскадов. Выберем $k^{[2]}(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ в виде

$$k^{[2]}(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = c_2 k(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r})k(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r})$$

и двухчастичная функция принимает вид

$$\theta_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \rho\left\{g'(\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2) + g'(\boldsymbol{r}_2 \to \boldsymbol{r}_1) + c_2\int g'(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_1)g'(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}\right\} = 2\rho g'(\boldsymbol{r}_{12}) + c_2\rho g'^{[2]}(\boldsymbol{r}_{12}),$$

где использована симметрия функции $g'(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = g'(r_{12})$. При $c = 1$ и устойчивом распределении $p(\boldsymbol{r})$ с характеристической функцией e^{-k^α}, преобразование Фурье функции $g'(\boldsymbol{r})$ имеет вид

$$\tilde{g}'(\boldsymbol{k}) = \frac{e^{-k^\alpha}}{1 - e^{-k^\alpha}}.$$

Свёртка

$$g'^{(2)}(\boldsymbol{r}_{12}) = \int g'(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_1)g'(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}$$

выглядит как квадрат преобразования Фурье:

$$\tilde{g}'^{(2)}(\boldsymbol{k}) = \frac{e^{-2k^\alpha}}{(1 - e^{-k^\alpha})^2} \sim k^{-2\alpha}e^{-2k^\alpha}, \quad k \to 0.$$

Таким образом, для больших r мы получим

$$g'^{(2)}(\boldsymbol{r}) \sim \frac{2}{(2\pi)^2 r^2}\int\limits_0^\infty \sin kr e^{-2k^\alpha}k^{1-2\alpha}dk = \frac{1}{2\pi^2}\Gamma(2(1-\alpha))\sin(\alpha\pi)r^{2\alpha-3}, \quad r \to \infty.$$

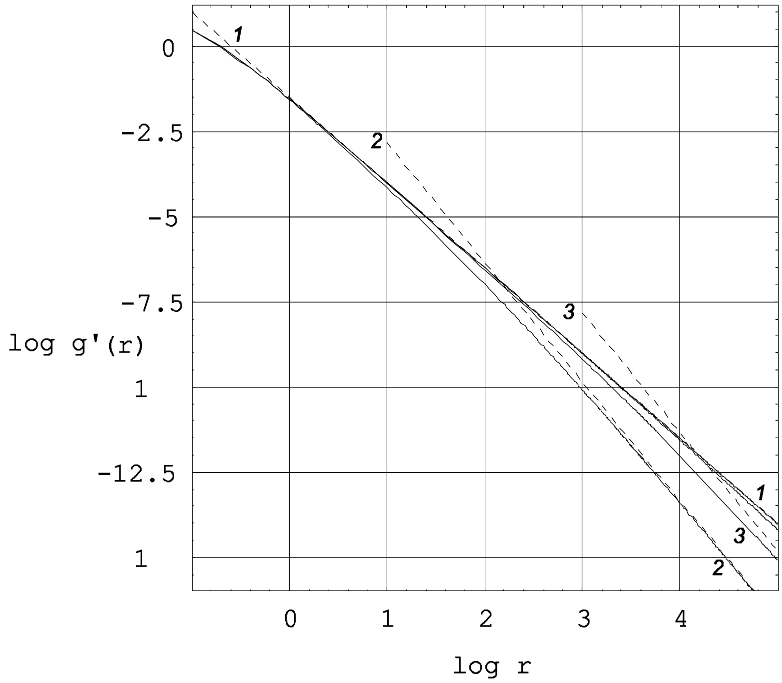


Рис. 2. Функция $g'_c(r)$ (сплошные кривые) и её основной асимптотический член (пунктир) для $\alpha = 0{,}5$ и следующих значений c: (1) $c = 1$; (2) $c = 0{,}9$; (3) $c = 0{,}99$. Эти графики можно интерпретировать как усредненные по ансамблю профили кластеров, образуемых каскадом с указанными параметрами α и c.

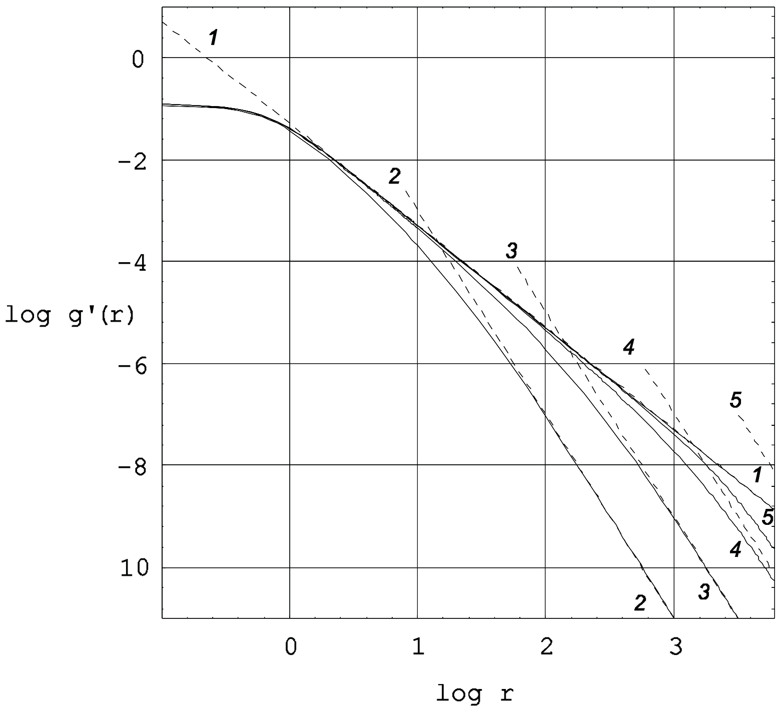


Рис. 3. То же, что на рис. 2, для $\alpha = 1$ и следующих значений c: (1) $c = 1$; (2) $c = 1 - 10^{-1}$; (3) $c = 1 - 10^{-2}$; (4) $c = 1 - 10^{-3}$; (5) $c = 1 - 10^{-4}$.

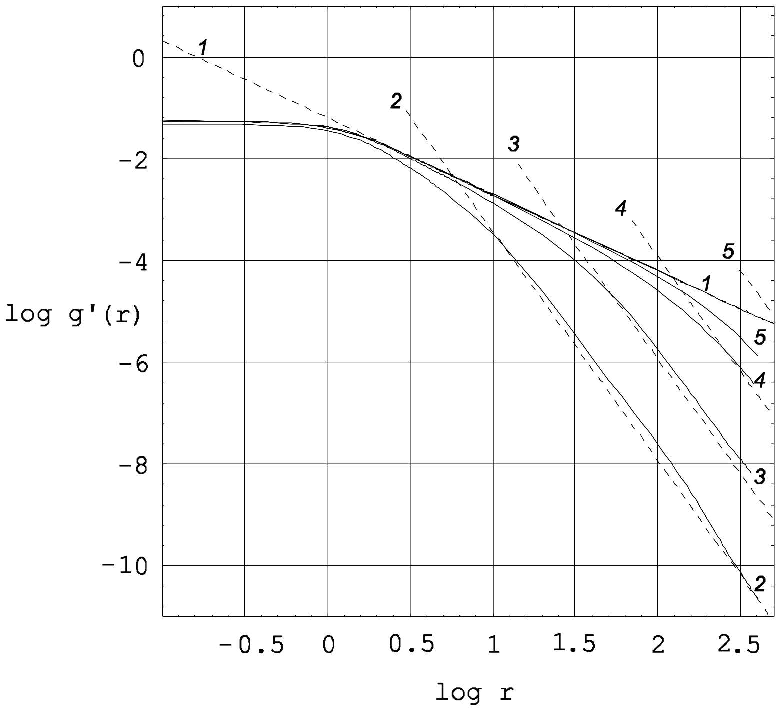
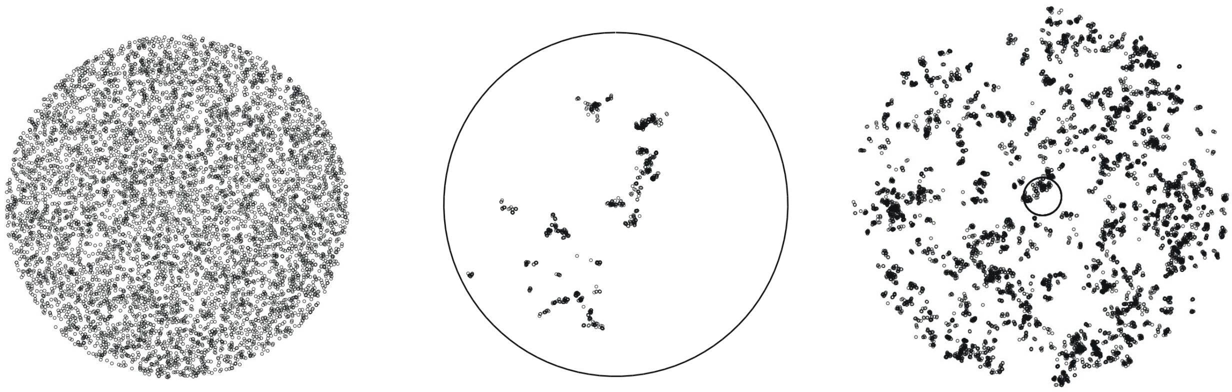


Рис. 4. То же, что на рис. 3, для $\alpha = 1{,}5$.



(a) (b) (c)

Рис. 5. (a) Двумерное однородное пуассоновское распределение. (b) Двумерное фрактальное распределение ($\alpha = 1$) один из членов кластерного ансамбля. (c)Двумерное мезофрактальное распределение ($\alpha = 1$), представляющее наложение независимых кластеров, равномерно распределенных на плоскости. Кружком выделена фрактальная часть, увеличенное изображение которой показано на рис. 5(b).

Здесь α, как и ранее, принадлежит интервалу $(0, 2)$, и в случае $\alpha \in (1, 3/2)$ мы получим фрактальную размерность $D = 2\alpha \in (2, 3)$.

Таким образом, для *построения случайных точечных распределений с фрактальной размерностью* $D > 2$ *необходимо использовать ветвящийся процесс Леви с* $\alpha = D/2$.

2.3. Корреляции и спектр мощности. Важной статистической характеристикой крупномасштабной структуры Вселенной является двухчастичная корреляционная функция [27], определяющая совместную вероятность

$$\delta \mathsf{P} = \bar{n}^2[1+\xi(r)]\delta V_1 \delta V_2$$

найти по одной галактике в объемах δV_1 и δV_2, находящихся на расстоянии $r = |\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1|$, и $\bar{n}$) друг от друга (n — среднее число галактик в единице объема, т. е. концентрация).

Согласно предположению об однородности и изотропии распределения материи во Вселенной, средняя плотность галактик n не должна зависеть от координат, а $\xi(r)$ зависит только от расстояния между выбранными точками. Вместо функции $\xi(r)$ часто используется её преобразование Фурье $P(k)$, называемое *спектром мощности.*

$$P(\boldsymbol{k}) = V^{-1} \int \xi(r) \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d^3\boldsymbol{x},$$
$$\xi(r) = (V/8\pi^3) \int P(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d^3\boldsymbol{k}.$$

Существует несколько аппроксимаций спектра мощности. Простейшая из них — спектр Гаррисона—Зельдовича

$$P(\boldsymbol{k}) = Ak^n, \quad n \in (-3, 0), \quad k = |\boldsymbol{k}|,$$

полученный в рамках канонического инфляционного сценария [19, 20].

Как показано Пиблсом, HZ-спектр генерирует корреляционную функцию асимптотически степенного вида

$$\xi(r) \sim r^{-\alpha},$$

Хотя общепринятой оценкой индекса α считается 1,8, в аппроксимациях разных каталогов его значение варьируется от 1,15 до 2,99 (см. колонку D_2 табл. 1 обзора [15]).

Вариации индекса в разных обзорах могут быть вызваны несоответствием теоретической модели реальной Вселенной, неточной интерпретацией наблюдаемых событий, погрешностями математической обработки данных. Наиболее важные из допущений, используемых в ряде обработок алгоритмов, является пуассоновским типом пространственного распределения галактик. С математической точки зрения, распределение Пуассона предполагает независимость непересекающихся областей, но в случае единственной выборки, каковой является наблюдаемая Вселенная, мы не можем проверить независимость наблюдаемых областей и, строго говоря, не имеем оснований применять предельные теоремы теории вероятностей. Этим мотивируются дальнейшие исследования в этом направлении.

На рис. 7 изображен важнейший участок расстояний, вокруг которого велись оживленные споры на протяжении нескольких десятилетий, в которых в свое время принимал участие и Эйнштейн (см. [7, 9]). В настоящее время показанное поведение корреляционной функции интерпретируется как переход от фрактальной зоны масштабов к однородной. В [33] такие точечные распределения предложено называть мезофракталами. Следует подчеркнуть, что мезофрактал представляет собой однородную (в статистическом смысле) структуру, свойства которой не зависят от выбора начала системы координат (требуется только, чтобы оно совпадало с одной из галактик).

2.4. Уравнение Орнштейна—Цернике. Очевидно, простой спектр Гаррисона—Зельдовича более или менее согласуется с наблюдательными данными лишь в ограниченной области волновых чисел и по этой причине было предложено несколько модификаций. Одной из последних является аппроксимация Золотарева—Учайкина, предложенная в книге [37]. Она имеет вид

$$P(\boldsymbol{k}) = A \frac{e^{-(bk)^\alpha}}{1 - ce^{-(bk)^\alpha}}, \tag{2}$$

где постоянные $A, b > 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$ и $0 < c < 1$ определяются по наблюдательным данным.

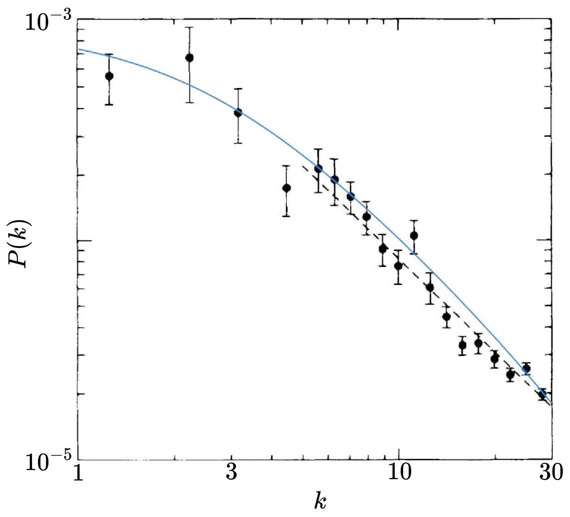


Рис. 6. Спектр мощности каталога Ликской обсерватории (штриховая линия — HZ-спектр с $n = -1{,}41$; см. [14]).

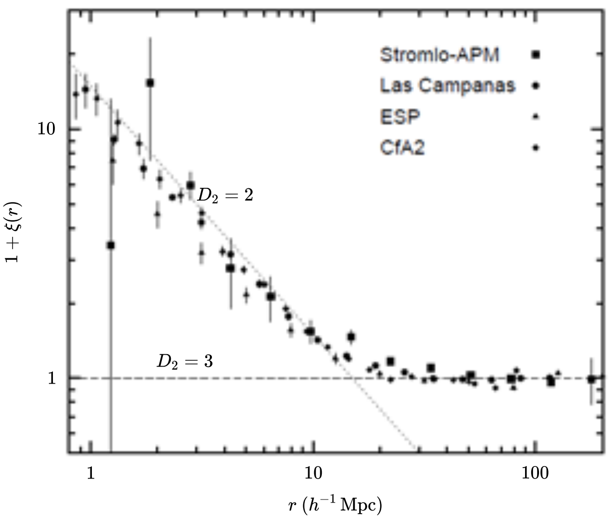


Рис. 7. Структурная функция по разным каталогам. Ясно видно разделение на две зоны: фрактальную (слева) и однородную (справа) (см. [15]).

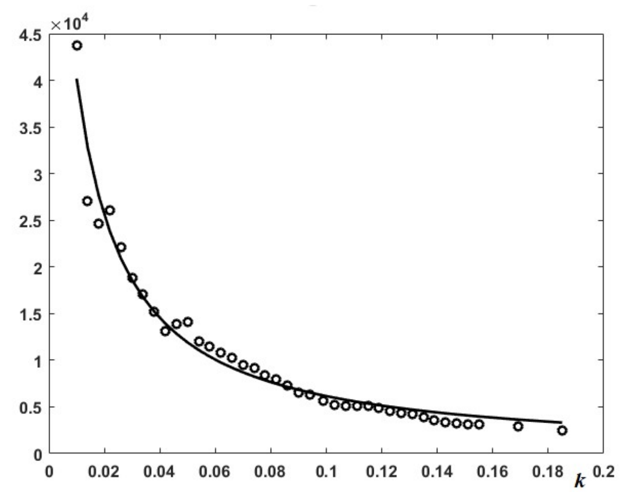


Рис. 8. Аппроксимация спектра мощности каталога 2dFGRS (см. [9]) (точки) формулой 2 (кривая 2 с параметрами $A = 17{,}1$, $b = 0{,}036$, $c = 0{,}9998$, $q = 0{,}99980$, α=1,06).

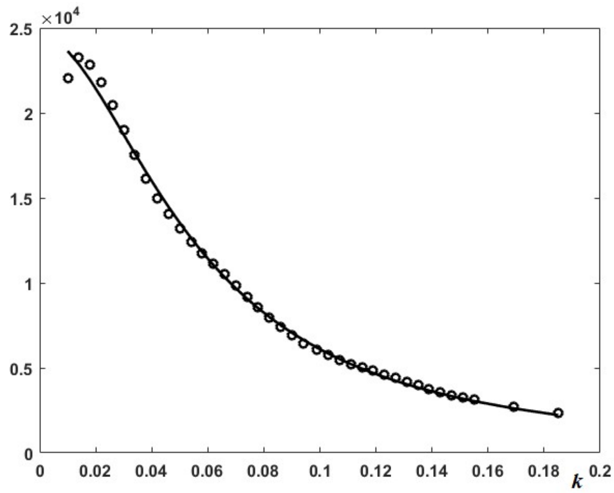


Рис. 9. Аппроксимация сглаженного спектра того же обзора, взятого из той же работы. Параметры кривой $A = 39{,}1$, $b = 1{,}94$, $c = 0{,}984$, $\alpha = 1{,}87$.

Чтобы понять происхождение этого анзаца, достаточно умножить обе части уравнения 2 на знаменатель в его правой части и выполнить обратное преобразование Фурье. В результате мы придем к выведенному в первой части обзора уравнению Орнштейна—Цернике для $\xi(r)$

$$\xi(r) = Ap(\boldsymbol{x}/b)/b^3 + (c/b^3)\int \xi(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|)p(\boldsymbol{x}'/b)d\boldsymbol{x}'$$

с ядром

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{8\pi^3}\int \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - k^\alpha} d\boldsymbol{k},$$

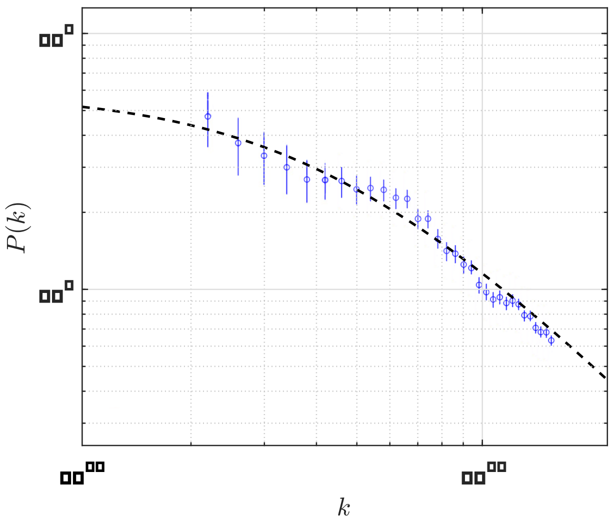


Рис. 10. Аппроксимация спектра мощности каталога 2dFGRS [28] формулой 2 с параметрами $A = 586$, $b = 1{,}23$, $c = 0{,}99$, $\alpha = 1{,}53$.

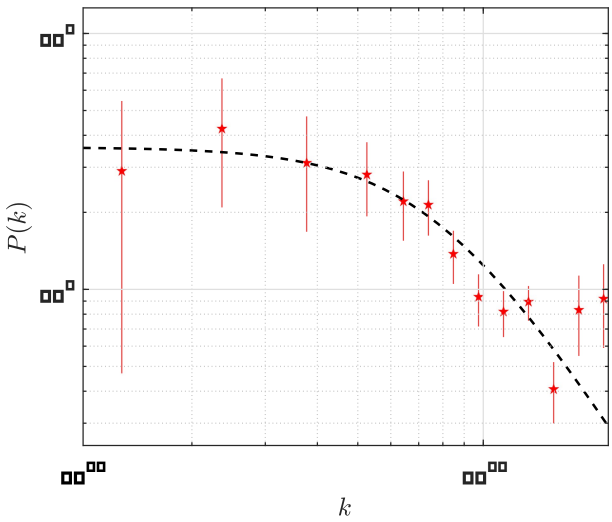


Рис. 11. Аппроксимация спектра мощности того же каталога, сглаженного методом сферических гармоник [29] (параметры $A = 35{,}9$, $b = 0{,}88$, $c = 0{,}999$, $\alpha = 2.58$).

являющимся плотностью трехмерного устойчивого изотропного распределения Леви—Фельдгейма. Уравнение это можно рассматривать как полуэмпирическую модификацию соответствующего уравнения (1) для гравитационной плазмы [5].

Четыре параметра, содержащиеся в новом анзаце, делают его не только гибким инструментом для более тонкой настройки модели, но и (своей связью с интегральным уравнением, легко интерпретируемым в терминах теории случайных блужданий) дают основу для статистического моделирования таких ансамблей. Полезно иметь в виду, что материальные параметры A и b относятся к масштабным характеристикам неоднородностей, тогда как безразмерные α и c определяют фрактальную размерность фрактальной зоны мезофрактала и (вкупе с b) размер этой зоны. Преимущество УЗ-аппроксимации перед ГЗ-аналогом демонстрирует рис. 6. Рисунки 8—11 дают убедительную картину высокой адаптивности УЗ-аппроксимации.

Численное исследование этой аппроксимации спектра мощности выполнено в нашей статье [36] на реальных спектрах мощности. Входящие в аппроксимацию постоянные определялись путем минимизации функционала

$$\Phi(c, q, \alpha) = A^2 \sum_i p_i^2 - 2A \sum_i P_i p_i + \sum_i P_i^2$$

по этим параметрам. Поскольку

$$\sum_i p_i^2 > 0,$$

графики $P(k)$ представляются частями U-параболы, значения параметров указаны в подрисуночных подписях.

3. Мультифракталы. Чтобы избежать смешения понятия мезофрактал с родственным ему по смыслу и звучанию термином мультифрактал, остановимся кратко на последнем.

3.1. Метод ячеек и статсумма. Рассмотрим множество изолированных точек, представляющих положения галактик в трехмерном евклидовом пространстве. Основное положение метода ячеек заключается в разбиении пространства на N ячеек одинаковых размеров $\epsilon \times \epsilon \times \epsilon$, покрывающих в совокупности заданную систему n точек (галактик). Ячейке с номером j приписывается вероятностная мера

$$\bar{p}_j(\epsilon) = n_j/n, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, N,$$

где n_j — число галактик в этой ячейке,

$$\sum_{j=1}^{N} n_j = n.$$

Если бы речь шла о сосуде с идеальным газом, все ячейки были бы заполнены его молекулами почти (с точностью до пуассоновых флуктуаций) одинаково. Однако наблюдаемое распределение галактик имеет иной вид: часть из них группируется в скопления (кластеры) разных размеров, перемежаемые большими полостями (войдами) с пониженными концентрациями материи. В процессе измельчения сети ячеек (т. е. при $\epsilon \to 0$) все большая часть из них оказывается пустой. Обозначим число занятых ячеек при уровне измельчения ϵ через $M(\epsilon)$ и введем в рассмотрение фрактальный аналог статистической суммы

$$Z(q,\epsilon) = \sum_{j=1}^{N} [\bar{p}_j(\epsilon)]^q = \sum_{j=1}^{M} [\bar{p}_j(\epsilon)]^{q-1} \bar{p}_j(\epsilon).$$

Введем новую зависимую переменную $\tau = \tau(q)$, определив ее через показатель масштабного множителя статсуммы в формуле

$$\Gamma_1(q,\tau,\epsilon) = \epsilon^{-\tau} Z(q,\epsilon) = \epsilon^{-\tau} \sum_{j=1}^{M} [\bar{p}_j(\epsilon)]^q. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что при измельчении ячеек

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Gamma_1(q,\tau,\epsilon) = \begin{cases} \infty, & \tau > \tau(q), \\ C, & \tau = \tau(q), \\ 0, & \tau < \tau(q), \end{cases} \tag{4}$$

где $C \neq 0$ — конечное число. Таким образом, операция (4) определяет новую функцию $\tau(q)$, для которой (точнее, для выражения Γ_1, содержащего эту функцию) указанный предел конечен. Поскольку соответствующие значения

$$D_q = (q-1)^{-1} \tau(q)$$

фактически обобщают понятие размерности, предложенного Хаусдорфом в 1919 г. для множеств, явно не являющихся однородными фракталами, эти величины называются *обобщенными размерностями.* В частности, значения D_1 и D_2 называются *информационной* и *корреляционной* размерностями.

3.2. Мультифрактальная мера. В методе ячеек только небольшая область r имеет значение при вычислении суммы разбиений (3) из-за дискретности выборки. Если r слишком мало, на ячейку приходится только точка; если r слишком велико, представляющие галактики точки распределены по ячейке почти равномерно, статистика плохая. Эти соображения привели к поиску других алгоритмов, одним из которых является корреляционный [18]. Для каждой галактики с индексом i подсчитывается число галактик $n_i(r)$, находящихся в сфере радиусом r вокруг этой галактики и определяется отношение

$$p_i(r) = \frac{n_i(r)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} 1_+(r_{ij} - r),$$

где N — полное число галактик в выборке, $r_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$, а $1_+(x)$ — ступенчатая функция Хэвисайда. Совокупность чисел p_i показывает относительную заселенность ячеек: чем меньше ее размер, тем меньше её заселенность. Для самоподобных множеств зависимость p_i от размера ячейки r имеет степенной характер,

$$p_i(r) \approx r^{\alpha_i},$$

где α_i — показатели степени (разные, вообще говоря, для разных ячеек). Для однородного фрактала все они одинаковы и равны фрактальной размерности D (по этой причине он часто называется *монофракталом*). Статсумма монофрактала

$$Z(q,r) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[p_i(r)]^{q-1}.$$

Если эти моменты зависят степенным образом от r, такую меру называют *мультифрактальной*, ее статсумма

$$Z(q,r) = r^{\tau(q)} Z_0(q),$$

а

$$\tau(q) = \frac{d\ln Z(q,r)}{d\ln r}.$$

В аналитическом отношении удобно показатели α_i в выражении $p_i(r) = r^{\alpha_i}$. Представляя эти значения плотно распределенными, Grassberger et al.1988 ввели α-спектр $f(\alpha)$, определяемый соотношением

$$N(\alpha_i \in (\alpha, \alpha + d\alpha)) \sim N|\ln r|^{1/2} r^{\alpha - f(\alpha)} d\alpha.$$

3.3. Мультифрактальные спектры и обобщенные размерности. Статистические свойства широкого класса фрактальных точечных множеств с равным успехом могут быть описаны как с помощью спектральной функции $f(\alpha)$, так и с применением обобщенных размерностей D_q. В случае однородного фрактала спектр $f(\alpha)$ вырождается в изолированную точку $\alpha_0 = f(\alpha_0) = D_0$. Чтобы убедиться в этом, представим статсумму в виде интеграла

$$Z(q,r) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[p_i(r)]^{q-1} = \frac{1}{N}\int r^{(q-1)\alpha} n(\alpha) d\alpha = \int |\ln r|^{1/2} r^{\alpha q - f(\alpha)} d\alpha.$$

Вычисление интеграла методом перевала дает

$$r^{\alpha(q)q - f(\alpha(q))}\left(\frac{\pi}{2f''[\alpha(q)]}\right)^{1/2},$$

где α и τ связаны условием перевала

$$\tau(q) = \alpha q - f''(\alpha), \quad \alpha(q) = d\tau/dq, \tag{5}$$

откуда

$$\alpha(q) = \frac{d\tau}{dq}.$$

Два последних уравнения связывают пары переменных (q,τ) и (α, f) преобразованием Лежандра, что обеспечивает эквивалентность представляемой ими информации о системе. Функция $f(\alpha)$ выпуклая и имеет единственный максимум в точке α_0, представляющей наиболее часто встречаемое значение показателя автомодельности (скейлинга). Из уравнений (4) и (5) следует, что это случается при $q = 0$, где $f(\alpha_0) = -\tau(0) = D_0$. Предельные же значения показателя α определяются соотношениями

$$\alpha_{\min} = \lim_{q\to\infty} D_q, \quad \alpha_{\max} = \lim_{q\to-\infty} D_q.$$

Важная информация о степени неоднородности точечного распределения содержится во второй производной $f(\alpha)$

$$\frac{d^2 f}{d\alpha^2} = \left(\frac{d^2\tau}{dq^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\tau''}.$$

Кривизна графика $\tau(q)$ является мерой его отклонения от линейного закона, соответствующего однородному фракталу. Если $\tau''(q) = 0$, распределение точек является простым фракталом, а $|\tau''(q)|$ является мерой разнообразия структур, наблюдаемых в мультифрактальном множестве. Согласно [23] спектральная функция $f(\alpha)$ содержит исчерпывающую информацию о подробностях точечного распределения и может стать эффективным инструментом для статистического анализа распределения галактик в пространстве. В цитируемой статье приведено несколько поучительных примеров, демонстрирующих это подход в действии.

При моделировании точечных распределения часто используют мультифракталы с дискретным спектром. Мультифрактал, спектр которого характеризуется одним значением, называют textitмонофракталом. К их числу относятся модели фрактальной пыли и дробного пуассоновского процесса, рассмотренные в первой части обзора. Во второй части мы ввели мезофрактал — точечное распределение, состоящее из непрерывно перемешанных двух зон: фрактальной с показателем α, и однородной, которой естественно приписать показатель $\alpha = 3$. Таким образом, наш мезофрактал оказался частным случаем мультифрактала, спектр которого состоит из двух значений. Такие мультифракталы естественно назвать *бифракталами*. Математический анализ бифрактальной модели проведен в работах [6, 16] и др.

4. Заключение. В завершение обзора приведем несколько соображений по этой теме, высказанных в тематическом издании [24].

Существование фрактальной зоны в распределении галактик, по-видимому, не подвергается сомнению, хотя некоторые авторы предпочитают использовать такие термины, как «самоподобная зона» или «зона скейлинга», которые имеют то же значение, но звучат менее определенно. Другие авторы говорят, что у них есть доказательства того, что фрактальная модель не работает, но они умышленно ограничивают область применения «фрактальной модели» «чисто математическим» случаем бесконечных фракталов. Доказательства в пользу фракталов в основном следующие. С одной стороны, модели Мандельброта поразительно легко адаптируются не только к наблюдаемым корреляционным свойствам, но и к визуальным образам, доставляемым астрономическими средствами. С другой стороны, предположим, что геометрическая модель распределения не может быть фракталом. Может ли она соответствовать наблюдаемым степенным функциям корреляции и иметь правильный внешний вид, воспроизводимый с помощью лишь небольшого числа параметров? Вряд ли можно найти математическое доказательство утверждения того, что это невозможно, но неизвестны, однако, и его опровержения. По этой причине исследователю крупномасштабных структур полезно помнить о свойствах фракталов, стремиться узнать больше о поразительно богатом разнообразии паттернов, появляющихся в простых фрактальных построениях, и ближе познакомиться с основами фрактального анализа. Частые ссылки на фракталы могут создать впечатление, что фрактальная геометрия сводится к нескольким простым примерам автомодельности структур, но это далеко не так: негауссова статистика и нелокальные процессы, сейсмодинамика и турбулентная диффузия, системы с памятью и термодинамика фуллеренов, кинетические процессы в живых тканях и космологии в пространствах дробных размерностей — вот далеко не полный перечень направлений, в которых мы можем встретить эффективные приложения фрактального, как и некоторых его модификаций типа мезофракталов, рассмотренных в настоящем обзоре.

И еще два замечания из статьи [26], авторы которой тяготеют к парадигме безграничного самоподобия фрактальной Вселенной, и даже допуская противное, признают актуальность нетрадиционных методов статистического анализа, которым посвящен настоящий обзор.

Нельзя пока исключить, что распределение видимой материи действительно становятся однородными начиная с какого-то крупного масштаба, который еще не наблюдается. Однако, даже если это окажется и так, лучший способ определить возможный кроссовер — использовать методы, которые мы описали, а не обычные. С теоретической точки зрения диапазон фрактальных флуктуаций, простирающийся не менее чем на три порядка, в любом случае следует рассматривать с помощью новых теоретических концепций. Затем следует изучить (возможный) переход к однородности как дополнительную проблему. На данный момент, однако, нет явных экспериментальных данных, однозначно указывающих на существование кроссовера, и в теоретическом плане допустимо пользоваться монофрактальной моделью, по крайней мере, для светящейся материи.

Второе замечание касается более фундаментальной проблемы — темной материи. Предыдущие рассуждения относятся к светящейся материи, и было бы очень хорошо, если бы новая картина видимой Вселенной могла в какой-то степени прояснить значение темной материи в эволюции этой структуры. Пока ситуация остается неясной. Есть, впрочем, два возможных варианта.

(i) Темная материя существенно связана со светящейся материей. Это не обязательно означает отсутствие расширения или большого взрыва. Это означает, однако, что эти явления должны описываться более сложными моделями, нежели FRW.

(ii) Если же темная материя является однородной, а светящаяся материя — монофракталом, то в больших масштабах темная материя будет доминировать над гравитационным полем и метрика FRW снова становится оправданной.

Однако видимая материя остается самоподобной. и неаналитический, и ее анализ по-прежнему требует новых теоретических методов, излагаемых в настоящем обзоре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975.
2. *Кольчужкин А. И., Учайкин В. В.* Введение в теорию прохождения частиц через вещество. — М.: Атомиздат, 1978.
3. *Учайкин В. В.* Спонтанная кластеризация в марковских цепях I. Фрактальная пыль// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2023. — *220.* — С. 125–144.
4. *Учайкин В. В., Коробко Д. А., Гисмятов И. Ф.* Модифицированный алгоритм Мандельброта стохастического моделирования распределения галактик фрактального типа// Изв. вузов. Физ. — 1997. — *8.* — С. 7–13.
5. *Altenberger A. R., Dahler J. S.* On the galactic pair correlation function for a gravitational plasma// Astrophys. J. — 1994. — *421.* — P. L9–L12.
6. *Balian R., Schaeffer R.* Scale-invariant matter distribution in the Universe// Astron. Astrophys. — 1989. — *226.* — P. 373–414.
7. *Baryshev Y. V., Labini F., Montuori M., Pietronero L.* Facts and ideas in modern cosmology// Vistas Astron. — 1994. — *38.* — P. 419–500.
8. *Borgani S.* Scaling in the Universe// Phys. Rep. — 1995. — *251.* — P. 1–152.
9. *Cole S., Percival W. J., et al.* The 2dF Galaxy Redshift Survey: Power-spectrum analysis of the final dataset and cosmological implications// Month. Not. Roy. Astron. Soc. — 2005. — *362.* — P. 505–534.
10. *Coleman P. H., Pietronero L.* Fractal structure of the Universe// Phys. Rep. — 1992. — *213.* — P. 311–389.
11. *Coles P., Moscardini L., Plionis M. et al.* Topology in 2D. IV. CDM Models with Non-Gaussian Initial conditions// Month. Not. Roy. Astron. Soc. — 1993. — *260.* — P. 572.
12. *Davis M., Meiksin A., Strauss M. et al.* On the universality of the two-point galaxy correlation function// Astron. J. — 1988. — *333.* — P. L9–L12.
13. *Einasto J., Klypin A. A., Saar E.* Structure ofsuperclusters and supercluster formation. V. Spatial correlation and voids// Month. Not. Roy. Astron. Soc. — 1986. — *219.* — P. 457–478.
14. *Fry J. N.* Gravity, bias, and the Galaxy three-point correlation function// Phys. Rev. Lett. — 1994. — *73*, № 2. — P. 215–219.
15. *Jones B. J., Martinez V. J., Saar E., Trimble V.* Scaling laws in the distribution of galaxies// Rev. Mod. Phys. — 2005. — *76.* — P. 1211–1266.
16. *Gaite J.* Halos and voids in a multifractal model of cosmic structure// Astrophys. J. — 2007. — *658.* — P. 11–24.
17. *Geller M.* The large-scale distribution of galaxies// in: Astronomy, Cosmology and Fundamental Physics (*Caffo M., Fanti R., Giacomelli G., Renzini A.*, eds.). — Dordrecht: Springer, 1989. — P. 83–103.
18. *Grassberger P., Procaccia I.* Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal// Phys. Rev. A. — 1983. — *28*, № 4. — P. 2591–2593.
19. *Guth A.* Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems// Phys. Rev. D. — 1981. — *23.* — P. 347–356.
20. *Linde A.* The inflationary Universe// Rep. Prog. Phys. — 1984. — *47.* — P. 925–986.
21. *Mandelbrot B. B.* Fonctions aléatoires pluri-temporelles: approximation poissonienne du cas brownien et généralisations// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. — 1975. — *280.* — P. 1075–1078.
22. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. — New York: W. H. Freeman, 1983.

23. *Martinez V. J., Jones B. J. T., Dominguez-Tenreir R.* Clustering paradigms and multifractal measures// Astrophys. J. — 1990. — *357.* — P. 50–61.
24. *Mezzetti M. et al.* Large Scale Structure and Motions in the Universe. — Dordrecht: Springer, 1989.
25. *Pietronero L.* The fractal structure of the universe: Correlations of galaxies and clusters and the average mass density// Physica A. — 1987. — *144*, № 2-3. — P. 257–284.
26. *Pietronero L., Montuori M., Sylos Labini F.* On the fractal structure of the visible universe/ `arXiv: astro-ph/9611197.`
27. *Peebles P. J. E.* The Large-Scale Structure of the Universe. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1980.
28. *Percival W. J. et al.* The 2dF Galaxy Redshift Survey: the power spectrum and the matter content of the Universe// Month. Not. Roy. Astron. Soc. — 2001. — *327*, № 4. — P. 1297–1306.
29. *Percival W. J. et al.* The 2dF Galaxy Redshift Survey: Spherical harmonics analysis of fluctuations in the final catalogue// Month. Not. Roy. Astron. Soc. — 2004. — *353*, № 4. — P. 1201–1220.
30. *Ribeiro M. B., Miguelote A. Y.* Fractals and the distribution of galaxies// Brazil. J. Phys. — 1998. — *28*, № 2. — P. 132-160.
31. *Saunders W. et al.* The density field of the local Universe// Nature. — 1991. — *349.* — P. 32–38.
32. *Takayasu H.* Stable distribution and Lévy process in fractal turbulence// Progr. Theor. Phys. — 1984. — *72.* — P. 471–478.
33. *Uchaikin V. V.* The mesofractal universe driven by Rayleigh–Levy walk// Gen. Relat. Grav. — 2004. — *36*, № 7. — P. 1689–1718.
34. *Uchaikin V., Gismjatov I., Gusarov G., Svetukhin V.* Paired Lévy–Mandelbrot trajectory as a homogeneous fractal// Int. J. Bifurcation Chaos. — 1998. — *8*, № 5. — P. 977–984.
35. *Uchaikin V. V., Gusarov G. G.* Levy flight applied to random media problems// J. Math. Phys. — 1997. — *38.* — P. 2453–2464.
36. *Uchaikin V. V., Litvinov V. A., Kozhemyakina E. V., Kozhemyakin I. I.* A random walk model for spatial galaxy distribution// Mathematics. — 2021. — *9*, № 1. — P. 1–17.
37. *Uchaikin V. V., Zolotarev V. M.* Chance and stability. Stable distributions and their applications. — Utrecht, The Netherlands: VSP, 1999.

Учайкин Владимир Васильевич
Ульяновский государственный университет
E-mail: `vuchaikin@gmail.com`

CONTENTS

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.