ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 219

Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 219 (2023)

Дата публикации 16 января 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года Выходит 12 раз в год

Редактор-составитель выпуска	А. А. Туганбаев
Научный редактор выпуска	С. С. Акбаров
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782–4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 219

АЛГЕБРА

Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 3–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-3-15

УДК 512.541

УМНОЖЕНИЯ НА ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

© 2023 г. **Е. И. КОМПАНЦЕВА, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Умножением на абелевой группе G называется любой гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$. Множество $\operatorname{Mult} G$ всех умножений на абелевой группе G само является абелевой группой относительно сложения. В работе описаны группы умножений групп из класса $\mathcal{A}_0$ всех абелевых блочно-жестких почти вполне разложимых групп кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Показано, что для любой группы G из класса $\mathcal{A}_0$ группа $\operatorname{Mult} G$ также принадлежит этому классу. Описаны ранг, регулятор, регуляторный индекс, инварианты почти изоморфизма, главное разложение и стандартное представление группы $\operatorname{Mult} G$ для $G\in\mathcal{A}_0$.

Ключевые слова: абелева группа, почти вполне разложимая абелева группа, кольцо на абелевой группе, группа умножений абелевой группы.

MULTIPLICATIONS ON TORSION-FREE GROUPS OF FINITE RANK

© 2023 **E. I. KOMPANTSEVA, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. A multiplication on an Abelian group G is an arbitrary homomorphism $\mu\colon G\otimes G\to G$. The set $\operatorname{Mult} G$ of all multiplications on an Abelian group G is itself an Abelian group with respect to addition. In this paper, we discuss the multiplication groups of groups from the class $\mathcal{A}_0$ of all Abelian block-rigid, almost completely decomposable groups of ring type with cyclic regulatory factors. We show that for any group G from the class $\mathcal{A}_0$, the group $\operatorname{Mult} G$ also belongs to this class. The rank, regulator, regulator index, almost isomorphism invariants, principal decomposition, and standard representation of the group $\operatorname{Mult} G$ for $G\in\mathcal{A}_0$ are described.

Keywords and phrases: Abelian group, almost completely decomposable Abelian group, ring on an Abelian group, multiplication group of an Abelian group.

AMS Subject Classification: 20K30, 20K99, 16B99

1. Введение. *Умножением* на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$. Множество всех умножений на абелевой группе G само является абелевой группой относительно сложения и обозначается $\operatorname{Mult} G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на группе G. Проблема изучения взаимосвязи между строением абелевой группы и свойствами кольцевых структур на ней весьма многогранна и имеет долгую историю в алгебре; см. [1, 2, 6, 7, 10, 11, 13, 14].

В настоящей работе рассматриваются только аддитивно записанные абелевы группы и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа».

Работа посвящена изучению групп умножений почти вполне разложимых абелевых групп.

Группа без кручения G конечного ранга называется *почти вполне разложимой* группой (ACD-*группой*) если G содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса. ACD-группы изучались в [3–5, 12, 18, 19] и других работах. Достигнутый уровень развития теории ACD-групп зафиксирован в книге [19].

Любая ACD-группа G содержит особую однозначно определенную вполне разложимую (см. [9]) подгруппу $\operatorname{Reg} G$ конечного индекса, которая является ее вполне инвариантной подгруппой и называется *регулятором* группы G. Регулятор ACD-группы можно определить как пересечение всех ее вполне разложимых подгрупп наименьшего индекса [4]. Фактор-группа $G/\operatorname{Reg} G$ называется *регуляторным фактором* группы G, а индекс подгруппы $\operatorname{Reg} G$ в группе G называется *регуляторным индексом* и обозначается $n(G)$. ACD-группы с циклическим регуляторным фактором часто называют *CRQ-группами*.

Пусть G — почти вполне разложимая группа. Тогда группа $\operatorname{Reg} G$ однозначно, с точностью до изоморфизма, представима в виде прямой суммы групп без кручения ранга 1 (см. [8, Proposition 86.1]). Для каждого типа τ обозначим через $\operatorname{Reg}_\tau G$ сумму прямых слагаемых ранга 1 и типа τ в прямом разложении группы $\operatorname{Reg} G$. Множество типов

$$T(G) = T(\operatorname{Reg} G) = \Big\{\tau\text{-тип} \mid \operatorname{Reg}_\tau G \neq 0\Big\}$$

называется *множеством критических типов* групп G и $\operatorname{Reg} G$. Если $T(G)$ состоит из попарно не сравнимых типов, то группы G и $\operatorname{Reg} G$ называются *блочно-жесткими* группами. Если, к тому же, для любого $\tau \in T(G)$ группа $\operatorname{Reg}_\tau G$ имеет ранг 1, то G и $\operatorname{Reg} G$ называются *жесткими* группами. Если все типы из $T(G)$ идемпотентны, то G называется группой *кольцевого типа*.

Отметим, что блочно-жесткая ACD-группа либо делима, либо редуцирована. Группа умножений делимой группы без кручения описана в [8, Sec. 121], поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только редуцированные группы.

Обозначим через $\mathcal{A}_0$ класс всех редуцированных блочно-жестких CRQ-групп кольцевого типа. В разделе 2 описана группа $\operatorname{Mult} G$ для $G \in \mathcal{A}_0$ (теорема 2.8). Цель раздела 3 — изучить свойства групп умножений групп из класса $\mathcal{A}_0$. Доказано (теорема 3.3), что если G — блочно-жесткая CRQ-группа кольцевого типа, то $\operatorname{Mult} G$ — также блочно-жесткая CRQ-группа кольцевого типа. Описаны ранг, регулятор, регуляторный индекс, инварианты почти изоморфизма, главное разложение и стандартное представление группы $\operatorname{Mult} G$ для $G \in \mathcal{A}_0$.

Умножение $\mu\colon G \otimes G \to G$ часто обозначается знаком $\times$, т.е. $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Умножение $\times$ на группе G задает кольцо на этой группе, которое обозначается $(G, \times)$. Пусть G — группа и $g \in G$. Характеристика и порядок элемента g обозначаются $\chi(g)$ и $o(g)$ соответственно. Через $r(G)$ обозначается ранг группы G, $\tilde{G}$ — делимая оболочка группы G. Если $S \subseteq G$, то $|S|$ — мощность множества S, $\langle S\rangle$ подгруппа группы G, порожденная множеством S. Если H — подгруппа группы G, то $[G : H]$ — индекс подгруппы H в G. Элемент прямого произведения $\prod\limits_{i\in I} G_i$ групп будем записывать в виде $(g_i)_{i\in I}$. Если $I_1 \subseteq I$, то для простоты подгруппу

$$\left\{(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i \mid g_i = 0 \text{ при всех } i \notin I_1\right\}$$

группы $\prod\limits_{i\in I} G_i$ будем отождествлять с группой $\prod\limits_{i\in I_1} G_i$, а ее элементы записывать в виде $(g_i)_{i\in I_1}$.

Как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ — множества натуральных и всех простых чисел соответственно, $\mathbb{Z}$ — группа (кольцо) целых чисел, $\mathbb{Q}$ — группа (поле) рациональных чисел. Если R — кольцо с 1, то Re — циклический модуль над R, порожденный элементом e. Если S — конечное подмножество в $\mathbb{Z}$, то $\gcd(S)$ — наибольший общий делитель всех чисел из S, $\operatorname{lcm}(S)$ — наименьшее общее кратное чисел из S. Если $P_1 \subseteq \mathbb{P}$, то *P_1-числом* мы будем называть целое число, любой простой делитель которого (если он существует) содержится в P_1. Из определения следует, что 1 является P_1-числом при любом $P_1 \subseteq \mathbb{P}$.

Для любого типа τ обозначим

$$P_\infty(\tau) = \big\{p \in \mathbb{P} \mid \tau(p) = \infty\big\}, \quad P_0(\tau) = \mathbb{P} \setminus P_\infty(\tau).$$

За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к книгам [8, 9, 17].

2. Группа умножений блочно-жесткой CRQ-группы кольцевого типа. *Везде в этом разделе G — редуцированная блочно-жесткая CRQ-группа кольцевого типа с регулятором A, регуляторным фактором $G/A = \langle d+A\rangle$, регуляторным индексом n и множеством критических типов $T(G) = T(A)$.*

Обозначив $\mathrm{Reg}_\tau G = A_\tau$, группу A можно представить в виде

$$A = \bigoplus_{\tau\in T(G)} A_\tau.$$

Согласно [19, Proposition 2.4.11], такое разложение вполне разложимой группы однозначно в точности тогда, когда A — блочно-жесткая группа. Для делимых оболочек $\tilde{G}$, $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_\tau$ групп G, A и A_τ соответственно имеют место равенства

$$\tilde{G} = \tilde{A} = \bigoplus_{\tau\in T(G)} \tilde{A}_\tau.$$

Для $\tau \in T(G)$ обозначим через π_τ проекцию группы $\tilde{G}$ на $\tilde{A}_\tau$.

В [5] определены натуральные числа $m_\tau = m_\tau(G)$ $(\tau \in T(G))$, которые являются инвариантами почти изоморфизма группы G и не зависят от выбора элемента d, удовлетворяющего условию $\langle d + A\rangle = G/A$. Числа m_τ $(\tau \in T(G)$ можно определить следующим образом. Возьмем элемент $d \in G/A$, для которого $\langle d+A\rangle = G/A$. Пусть $d_\tau = \pi_\tau(d) \in \tilde{A}_\tau$, положим $m_\tau = o(d_\tau + A)$ — порядок элемента $d_\tau + A$ в периодической группе $\tilde{A}/A$. Отметим, что $n = o(d + A) = \mathrm{lcm}\{m_\tau \mid \tau \in T(G)\}$.

Замечание 2.1. Пусть T — конечное множество попарно не сравнимых типов, $\{m_\tau \mid \tau \in T\}$ — некоторое множество натуральных чисел. Будем говорить, что множество $\{m_\tau \mid \tau \in T\}$ удовлетворяет *условию* (m), если для любых $p \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{N}$, $\tau \in T$ из того, что p^k делит m_τ, следует, что p^k делит m_σ при некотором $\sigma \in T \setminus \{\tau\}$. Отметим, что множество $\{m_\tau \mid \tau \in T\}$ удовлетворяет условию (m) в точности тогда, когда условию (m) удовлетворяет множество $\{m_\tau \mid \tau \in T,\, m_\tau > 1\}$.

Согласно [19, Theorem 13.1.2], множество $\{m_\tau \mid \tau \in T\}$ является системой инвариантов почти изоморфизма некоторой блочно-жесткой CRQ-группы G с $T(G) = T$ в точности тогда, когда это множество удовлетворяет условию (m) и m_τ являются $P_0(\tau)$-числами при всех $\tau \in T$. $\rhd$

В [3, Theorem 3.5] показано, что для любой группы $G \in \mathcal{A}_0$ существует прямое разложение

$$G = G_1 \oplus C, \tag{1}$$

где C — вполне разложимая группа, G_1 — жесткая CRQ-группа, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\tau \in T(G_1) \text{ в точности тогда, когда } m_\tau(G) > 1, \tag{$1'$}$$

$$m_\tau(G_1) = m_\tau(G) \text{ для всех } \tau \in T(G_1). \tag{$1''$}$$

Разложение (1), удовлетворяющее условиям $(1')$ и $(1'')$, называется *главным разложением* группы G. Группа G_1 в главном разложении группы G не содержит вполне разложимых прямых слагаемых; такие группы называются *усеченными*. Отметим, что главное разложение CRQ - группы определяется неоднозначно, так как оно зависит от выбора элемента d, участвующего в задании группы. Далее везде считаем главное разложение группы G фиксированным. Положим $T_0(G) = \{\tau \in T(G) \mid m_\tau > 1\}$. Тогда $T_0(G)$ — множество критических типов усеченного прямого слагаемого в любом главном разложении группы G.

Введем обозначение

$$D = \{d \in G_1 \mid G/A = \langle d + A\rangle\}.$$

Пусть B — регулятор группы G_1; тогда $T(G_1) = T(B) = T_0(G)$ и $\tilde{G}_1 = \tilde{B}$. Пусть $d \in D$; тогда существует такая система

$$E_0 = \{e_0^{(\tau)} \in B_\tau \mid \tau \in T(B)\},$$

что

$$B = \bigoplus_{\tau\in T(B)} R_\tau e_0^{(\tau)}, \tag{2}$$

где R_τ — унитарное подкольцо поля рациональных чисел, тип аддитивной группы которого равен τ, характеристики $\chi(e_0^{(\tau)}) \in \tau$ содержат только нули и символы ∞ ($\tau \in T(B)$), при этом элемент $d \in \tilde{B}$ можно представить в виде

$$d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{r_\tau} e_0^{(\tau)},$$

где $s_\tau \in \mathbb{Z}$, $r_\tau \in \mathbb{N}$, $\gcd(s_\tau, r_\tau) = 1$. Без потери общности можно считать, что s_τ, r_τ являются $P_0(\tau)$-числами (в противном случае можно заменить систему E_0).

Пусть $\tau \in T(B)$. Так как по определению числа m_τ в группе $\tilde{A}/A$ выполняется соотношение

$$o\left(\frac{s_\tau}{r_\tau} e_0^{(\tau)} + A\right) = m_\tau,$$

r_τ — $P_0(\tau)$-число и $\gcd(s_\tau, r_\tau) = 1$, то $r_\tau = m_\tau$. Следовательно, элемент d в группе $\tilde{A}$ имеет вид

$$d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}, \tag{3}$$

и числа n, m_τ и s_τ удовлетворяют следующим условиям:

$$n = \operatorname{lcm}\{m_\tau \mid \tau \in T(B)\}, \tag{3$'$}$$

$$\gcd(s_\tau, m_\tau) = 1 \text{ для всех } \tau \in T(B), \tag{3$''$}$$

$$s_\tau \text{ и } m_\tau \text{ являются } P_0(\tau)\text{-числами при любом } \tau \in T(B). \tag{3$'''$}$$

Система $E_0 = \{e_0^{(\tau)} \in B_\tau \mid \tau \in T(B)\}$, удовлетворяющая условиям (2) и (3), называется *B-базисом* группы G, определяемым элементом d. Отметим, что пара (d, E_0) однозначно определяет числа s_τ ($\tau \in T(B)$). Равенство (3) называется *стандартным представлением* блочно-жесткой CRQ-группы G, связанным с парой (d, E_0).

Замечание 2.2. Отметим, что B-базис E_0 может определяться не одним элементом $d \in D$.

Действительно, пусть задано стандартное представление (3) группы G. Пусть γ — целое число, взаимно простое с регуляторным индексом n, $d_1 = \gamma d \in G_1$. Тогда $G/A = \langle d + A\rangle = \langle d_1 + A\rangle$, т.е. $d_1 \in D$. При этом

$$d_1 = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{\gamma s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}. \tag{4}$$

Если γ является $P_0(\tau)$-числом, то равенство (4) — стандартное представление группы G. Следовательно, B-базис E_0 определяется каждым из элементов d и d_1.

Отметим, что если γ не является $P_0(\tau)$-числом, то равенство (4) не является стандартным представлением группы G.

Для B-базиса E_0 введем обозначение

$$D(E_0) = \{d \in D \mid B\text{-базис } E_0 \text{ определяется элементом } d\}.$$

Из определения B-базиса следует, что $D(E_0) \neq \varnothing$, а из замечания 2.2 следует, что $D(E_0)$ может содержать более одного элемента.

При подходящем выборе элементов $e_i^{(\tau)} \in C_\tau$ ($i = 0, 1, \ldots, k_\tau$) группа C может быть записана в виде

$$C = \bigoplus_{\tau \in T(C)} C_\tau = \bigoplus_{\tau \in T(C)} \bigoplus_{i=1,\ldots,k_\tau} R_\tau e_i^{(\tau)},$$

где R_τ — унитарное подкольцо поля рациональных чисел, тип аддитивной группы которого равен τ, и характеристики $\chi(e_i^{(\tau)}) \in \tau$ содержат только нули и символы ∞.

Для $\tau \in T(G)$ определим следующие множества:

$$I_\tau(B) = \begin{cases} \{0\} & \text{при } \tau \in T(B), \\ \emptyset & \text{при } \tau \notin T(B), \end{cases} \qquad I_\tau(C) = \begin{cases} \{1, \ldots, k_\tau\} & \text{при } \tau \in T(C),\ k_\tau \in \mathbb{N}, \\ \emptyset & \text{при } \tau \notin T(C), \end{cases}$$

$$I_\tau = I_\tau(B) \cup I_\tau(C).$$

Тогда $A_\tau = \bigoplus\limits_{i\in I_\tau} R_\tau e_i^{(\tau)}$ при любом $\tau \in T(G)$ и

$$A = \bigoplus_{\tau\in T(G)} \bigoplus_{\tau\in I_\tau} R_\tau e_i^{(\tau)}. \tag{5}$$

Система $E = \left\{e_i^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G), i \in I_\tau\right\}$ называется *A-базисом* группы G, если E удовлетворяет (5) и ее подсистема $E_0 = \left\{e_0^{(\tau)} \in B_\tau \mid \tau \in T(B)\right\}$ является B-базисом.

Пусть $(G, \times)$ — кольцо на группе $G \in \mathcal{A}_0$. Так как A — вполне инвариантная подгруппа группы G, то A — идеал кольца $(G, \times)$, являющийся прямой суммой идеалов A_τ ($\tau \in T(G)$). Таким образом, каждое умножение на G индуцирует умножение на A, откуда $\operatorname{Mult} G \subseteq \operatorname{Mult} A$, однако обратное не верно.

Пусть $E = \left\{e_i^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G), i \in I_\tau\right\}$ — A-базис группы G. Тогда для любого множества $\left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i,j \in I_\tau\right\}$ существует единственное кольцо $(A, \times)$, в котором $e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)} = u_{ij}^{(\tau)}$ для всех $\tau \in T(G)$ и $i,j \in I_\tau$. Умножение $\times$ единственным образом продолжается до умножения на $\tilde{A} = \tilde{G}$, где оно определяется следующим образом:

$$\sum_{i\in I_\tau} r_i e_i^{(\tau)} \times \sum_{i\in I_\tau} r_i' e_i^{(\tau)} = \sum_{i,j\in I_\tau} r_i r_j' (e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)}) \tag{6}$$

для всех $\tau \in T(G)$, $r_i, r_j' \in \mathbb{Q}$; и $\tilde{A}_\tau \times \tilde{A}_\sigma = 0$ при $\tau \neq \sigma$. Однако G не обязательно является подкольцом кольца $(\tilde{A}, \times)$. Другими словами, существует такое множество

$$\left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i,j \in I_\tau\right\},$$

что в любом кольце $(G, \times)$ при некоторых $\tau \in T(G)$, $i,j \in I_\tau$ выполняется $e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)} \neq u_{ij}^{(\tau)}$. Будем говорить, что множество $\left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i,j \in I_\tau\right\}$ *определяет умножение* на G относительно A-базиса E, если существует кольцо $(G, \times)$, в котором $e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)} = u_{ij}^{(\tau)}$ для всех $\tau \in T(G)$ и $i,j \in I_\tau$. Отметим, что любое множество $\left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i,j \in I_\tau\right\}$ определяет умножение на группе G относительно A-базиса E не более, чем одним способом.

Пусть $G \in \mathcal{A}_0$, для описания множеств, задающих умножения на группе G, определим следующие группы.

Для любого $\tau \in T(G)$ обозначим $n_\tau = |I_\tau|$, $M_\tau^{(0)} = M_{n_\tau}(A_\tau)$ — аддитивная группа квадратных матриц порядка n_τ с элементами из A_τ,

$$M_\tau^{(1)} = \begin{bmatrix} m_\tau A_\tau & m_\tau A_\tau & \dots & m_\tau A_\tau \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \end{bmatrix},$$

где запись $[\dots]$ означает множество матриц определенной формы, m_τ — инварианты почти изоморфизма группы G,

$$M_\tau^{(2)} = \begin{bmatrix} m_\tau^2 A_\tau & m_\tau A_\tau & \dots & m_\tau A_\tau \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \end{bmatrix} \subseteq M_\tau^{(1)}.$$

Положим

$$M^{(0)} = \prod_{\tau\in T(G)} M_\tau^{(0)}, \quad M^{(1)} = \prod_{\tau\in T(G)} M_\tau^{(1)}, \quad M^{(2)} = \prod_{\tau\in T(G)} M_\tau^{(2)}.$$

Тогда

$$M^{(2)} \subseteq M^{(1)} \subseteq M^{(0)}, \quad M^{(2)} \cong M^{(1)} \cong M^{(0)} \cong \operatorname{Mult} A.$$

Для стандартного представления (3) группы G, связанного с парой (d, E_0), и каждого $\tau \in T(G)$ рассмотрим элементы

$$X^{(\tau)} = X^{(\tau)}(d, E_0) = \begin{pmatrix} m_\tau s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_\tau^{(1)}, \quad \text{если } \tau \in T(B),$$

где s_τ^{-1} — целое число, обратное к s_τ по модулю m_τ,

$$X^{(\tau)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_\tau^{(1)}, \quad \text{если } \tau \notin T(B).$$

Положим

$$X = X(d, E_0) = \left(X^{(\tau)}\right)_{\tau \in T(G)} = \left(X^{(\tau)}\right)_{\tau \in T(B)} \in M^{(1)}, \quad M(d, E_0) = \langle X, M^{(2)} \rangle \subseteq M^{(1)}.$$

Отметим, что целые решения сравнения $s_\tau x \equiv 1 \pmod{m}_\tau$ образуют класс вычетов по модулю m_τ. Поэтому множество $M(d, E_0)$ не зависит от выбора чисел s_τ^{-1} при определении X.

Также отметим, что если $\tau \in T(C) \setminus T(B)$, то $m_\tau = 1$ в силу $(1')$. Поэтому в этом случае

$$M_\tau^{(2)} = M_\tau^{(1)} = M_\tau^{(0)}.$$

Для каждого множества $U = \left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\right\}$ и каждого $\tau \in T(G)$ рассмотрим матрицу

$$U^{(\tau)} = \begin{pmatrix} u_{i_1,i_1}^{(\tau)} & u_{i_1,i_2}^{(\tau)} & \dots & u_{i_1,i_{n_\tau}}^{(\tau)} \\ u_{i_2,i_1}^{(\tau)} & u_{i_2,i_2}^{(\tau)} & \dots & u_{i_2,i_{n_\tau}}^{(\tau)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{i_{n_\tau},i_1}^{(\tau)} & u_{i_{n_\tau},i_2}^{(\tau)} & \dots & u_{i_{n_\tau},i_{n_\tau}}^{(\tau)} \end{pmatrix} \in M_\tau^{(0)},$$

где $i_k \in I_\tau$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n_\tau}$. Положим $\overline{U} = \left(U^{(\tau)}\right)_{\tau \in T(G)} \in M^{(0)}$.

Замечание 2.3. Пусть $G \in \mathcal{A}_0$, $G = G_1 \oplus C$ — главное разложение группы G, $\operatorname{Reg} G = A$, $\operatorname{Reg} G_1 = B$. В [12] доказано, что при любом умножении $\times$ на группе G имеем

$$B_\tau \times A \subseteq m_\tau A_\tau \quad \text{и} \quad A \times B_\tau \subseteq m_\tau A_\tau \quad \text{для всех} \ \ \tau \in T(B).$$

Теорема 2.4. *Пусть G — блочно-жесткая CRQ-группа кольцевого типа с A-базисом E, содержащим B-базис E_0. Пусть $U = \left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\right\}$. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *U задает умножение на G относительно A-базиса E*;
(2) *$\overline{U} \in M(d, E_0)$ при любом $d \in D(E_0)$*;
(3) *$\overline{U} \in M(d, E_0)$ при некотором $d \in D(E_0)$.*

Доказательство. (1) ⇒ (2). Пусть задано стандартное представление (3) группы G и пусть множество

$$U = \left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\right\}$$

задает умножение $\times$ на G относительно A-базиса

$$E = \left\{e_i^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i \in I_\tau\right\}.$$

В силу замечания 2.3 имеем $u_{0i}^{(\tau)}, u_{i0}^{(\tau)} \in m_\tau A_\tau$ и $u_{00}^{(\tau)} = m_\tau v_{00}^{(\tau)}$ $(v_{00}^{(\tau)} \in A_\tau)$ при всех $\tau \in T(B)$, $i \in I_\tau$.

Пусть $d \in D(E_0)$ и стандартное представление, связанное с парой (d, E_0), имеет вид

$$d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}.$$

Так как $d \times d \in G$, то $d \times d = \alpha d + a$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $a \in A$. Тогда

$$d \times d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{\alpha s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} + a. \tag{7}$$

С другой стороны, из (6) вытекает, что

$$d \times d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} \times \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau^2}{m_\tau^2} u_{00}^{(\tau)} = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau^2}{m_\tau} v_{00}^{(\tau)}. \tag{8}$$

Пусть $\tau \in T(B)$. Из (7) и (8) получаем

$$\pi_\tau(d \times d) = \frac{s_\tau^2}{m_\tau} v_{00}^{(\tau)} = \frac{\alpha s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} + a_\tau, \text{ где } a_\tau = \pi_\tau(a) \in A_\tau.$$

Следовательно, $s_\tau^2 v_{00}^{(\tau)} = \alpha s_\tau e_0^{(\tau)} + m_\tau a_\tau$, откуда $v_{00}^{(\tau)} = \alpha s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} + m_\tau a'_\tau$ для некоторого $a'_\tau \in A_\tau$, где s_τ^{-1} — целое число, обратное к s_τ по модулю m_τ. Значит,

$$u_{00}^{(\tau)} = m_\tau v_{00}^{(\tau)} = \alpha m_\tau s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} + m_\tau^2 a'_\tau.$$

Следовательно, $\overline{U} \in \alpha X + M^{(2)} \subseteq M(d, E_0)$.

Импликация (2) ⇒ (3) очевидна.

(3) ⇒ (1). Пусть $\overline{U} \in M(d, E_0)$ при некотором $d \in D(E_0)$. Тогда $\overline{U} = \alpha X + Y$ при некоторых $\alpha \in \mathbb{Z}$, $Y \in M^{(2)}$. Отсюда для всех $\tau \in T(B)$ и $i \in I_\tau$ имеем

$$u_{0i}^{(\tau)} = m_\tau v_{0i}^{(\tau)}, \quad u_{i0}^{(\tau)} = m_\tau v_{i0}^{(\tau)}, \quad u_{00}^{(\tau)} = \alpha m_\tau s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} + m_\tau^2 a_\tau,$$

где $v_{0i}^{(\tau)}, v_{i0}^{(\tau)}, a_\tau \in A_\tau$ и целые числа s_τ^{-1} удовлетворяют условиям $s_\tau s_\tau^{-1} = 1 + m_\tau x_\tau$ при некоторых $x_\tau \in \mathbb{Z}$.

Существует кольцо $(A, \times)$, в котором $e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)} = u_{ij}^{(\tau)}$ для всех $\tau \in T(G)$, $i, j \in I_\tau$; и $A_\tau \times A_\sigma = 0$ при $\tau \neq \sigma$. Это умножение продолжается до умножения на делимой оболочке $\tilde{A} = \tilde{G}$ группы A. Покажем, что G — подкольцо кольца $(\tilde{A}, \times)$.

Пусть стандартное представление, связанное с (d, E_0), имеет вид

$$d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}.$$

Тогда из (6) вытекает, что

$$\begin{aligned} d \times d &= \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau^2}{m_\tau^2} u_{00}^{(\tau)} = \alpha \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau^2 s_\tau^{-1}}{m_\tau} e_0^{(\tau)} + \sum_{\tau \in T(B)} s_\tau^2 a_\tau = \alpha \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau}(1 + m_\tau x_\tau) e_0^{(\tau)} + \sum_{\tau \in T(B)} s_\tau^2 a_\tau = \\ &= \alpha \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} + \sum_{\tau \in T(B)} (\alpha s_\tau x_\tau) e_0^{(\tau)} + \sum_{\tau \in T(B)} s_\tau^2 a_\tau = \alpha d + \sum_{\tau \in T(B)} (\alpha s_\tau x_\tau e_0^{(\tau)} + s_\tau^2 a_\tau) \in G. \end{aligned}$$

Кроме того, если $\sigma \in T(B)$ и $i \in I_\sigma$, то

$$d \times e_i^{(\sigma)} = \left(\sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} \right) \times e_i^{(\sigma)} = \frac{s_\sigma}{m_\sigma} u_{0i}^{(\sigma)} = \frac{s_\sigma}{m_\sigma} m_\sigma v_{0i}^{(\sigma)} = s_\sigma v_{0i}^{(\sigma)} \in A.$$

Аналогично имеем $e_i^{(\sigma)} \times d \in A$.

Если $\sigma \notin T(B)$, то $d \times e_i^{(\sigma)} = e_i^{(\sigma)} \times d = 0$ при любом $i \in I_\sigma$. Так как $G = \langle d, A \rangle$, то G — подкольцо кольца $(\tilde{A}, \times)$. Значит, множество U определяет умножение на G. □

Из теоремы 2.4 следует, что группа $M(d, E_0)$ не зависит от выбора элемента $d \in D(E_0)$. В следующем утверждении рассмотрим связь между элементами групп $M(d_1, E_0)$ и $M(d_2, E_0)$ при $d_1, d_2 \in D(E_0)$. Заметим, что если $d_1, d_2 \in D$, то $\langle d_1 + A \rangle = \langle d_2 + A \rangle = G/A$, откуда $d_1 = \gamma d_2 + b$ при некотором целом γ, взаимно простом с n, и некотором $b \in B$.

Предложение 2.5. *Пусть G — группа из $\mathcal{A}_0$ с главным разложением* (1), *B-базисом E_0 и регуляторным индексом n. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $M(d_1, E_0) = M(d_2, E_0)$ *при любых* $d_1, d_2 \in D(E_0)$;

(2) *если* $d_1, d_2 \in D(E_0)$ *и* $d_1 = \gamma d_2 + b$, *где* $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{lcd}(\gamma, n) = 1$, $b \in B$, $X_1 = X(d_1, E_0) \in M(d_1, E_0)$, $X_2 = X(d_2, E_0) \in M(d_2, E_0)$, *то* $X_1 + M^{(2)} = \gamma^{-1}X_2 + M^{(2)}$, *где* γ^{-1} — *целое число, обратное к* γ *по модулю* n.

Доказательство. Пусть $d_1, d_2 \in D(E_0)$, $d_1 = \gamma d_2 + b$, где $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{lcd}(\gamma, n) = 1$ и $b = \sum\limits_{\tau \in T(B)} b_\tau e_0^{(\tau)}$ $(b_\tau \in R_\tau)$. Пусть

$$d_1 = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}, \quad d_2 = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{t_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}$$

— стандартные представления группы G, связанных с (d_1, E_0) и (d_2, E_0) соответственно. В делимой оболочке $\tilde{G}$ группы G верны соотношения

$$\sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} = d_1 = \gamma d_2 + b = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{\gamma t_\tau + m_\tau b_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)},$$

откуда

$$s_\tau = \gamma t_\tau + m_\tau b_\tau \quad \text{при всех} \quad \tau \in T(B). \tag{9}$$

Пусть $\tau \in T(B)$, γ^{-1} — целое число, обратное к γ по модулю n, t_τ^{-1} — целое число, обратное к t_τ по модулю m_τ. Тогда число γ^{-1} обратно к γ по модулю m_τ в силу ($3'$), откуда следует, что число $\gamma^{-1}t_\tau^{-1}$ обратно к s_τ по модулю m_τ в силу (9).

Пусть $a_\tau \in A_\tau$. Тогда

$$s_\tau^{-1} m_\tau e_0^{(\tau)} + m_\tau^2 a_\tau = \gamma^{-1} t_\tau^{-1} m_\tau e_0^{(\tau)} + m_\tau^2 a'_\tau, \text{ где } a'_\tau \in A_\tau.$$

Следовательно,

$$X_1 + M^{(2)} \subseteq \gamma^{-1} X_2 + M^{(2)}. \tag{10}$$

Так как $d_2 = \gamma^{-1} d_1 + b'_1$, где $b'_1 \in B$, то

$$\gamma^{-1} X_2 + M^{(2)} \subseteq \gamma^{-1}(\gamma X_1 + M^{(2)}) + M^{(2)} = X_1 + M^{(2)}$$

в силу (10). □

В силу предложения 2.5 можем обозначать $M(d, E_0) = M(E_0)$, однако часто будем писать $M(d, E_0)$, если хотим указать, какое стандартное представление мы используем в определении группы $M(d, E_0)$.

Замечание 2.6. Пусть для множества $U = \{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\}$ имеем $\overline{U} \in M^{(2)}$. Из теоремы 2.4 следует, что относительно любого A-базиса E группы G множество U определяет умножение $\times_{U,E}$ на G, при этом $G \times_{U,E} G \subseteq A$. Такое умножение будем называть *регуляторным*.

Пример 2.7. Множество $U = \{u_{ij}^{(\tau)} \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\}$ может определять умножение на G относительно одного A-базиса и не определять ни одного умножения на G относительно другого A-базиса даже при неизменном главном разложении. Более того, возможна ситуация, когда существуют два A-базиса E и F такие, что любое множество U, определяющее не регуляторное умножение относительно E, не определяет ни одного умножения относительно F. Это значит, что

$$M(E_0) \cap M(F_0) = M^{(2)}.$$

Пусть s_1 и s_2 — взаимно простые целые числа, $s_1 > 1$ и $s_2 > 1$, и пусть m — простое число, не делящее ни одно из чисел s_1, s_2, $s_1^2 - s_2^2$.

Пусть τ_i — такой идемпотентный тип, что $P_0(\tau_i)$ — множество всех простых делителей чисел m и s_i соответственно $(i = 1, 2)$. Тогда типы τ_1 и τ_2 не сравнимы.

Рассмотрим группу $B = R_1 e_1 \oplus R_2 e_2$, где R_1 и R_2 — подкольца с единицей поля $\mathbb{Q}$, аддитивные группы которых имеют типы τ_1 и τ_2 соответственно.

В силу замечания 2.1 существует CRQ-группа $G = \langle d, B\rangle$ с регулятором B и инвариантами квазиизоморфизма $m_{\tau_1} = m_{\tau_2} = m$. Группу G можно выбрать так, что ее стандартное представление имеет вид

$$d = \frac{s_1}{m}e_1 + \frac{s_2}{m}e_2.$$

Тогда система $E_0 = \{e_1, e_2\}$ является B-базисом группы G, определяемым элементом d (в данном случае B-базис совпадает с A-базисом).

Введем обозначения

$$B_1 = B_{\tau_1} = R_1e_1, \quad B_2 = B_{\tau_2} = R_2e_2.$$

Рассмотрим $d_1 = d + (e_1 + e_2) \in G$. Тогда $d_1 \in D$, и в $\tilde{G}$ имеем

$$d_1 = \frac{s_1 + m}{m}e_1 + \frac{s_2 + m}{m}e_2. \tag{11}$$

Так как $s_i + m$ взаимно просто с каждым из чисел s_i и m, то $s_i + m$ является $P_\infty(\tau_i)$-числом при $i = 1, 2$. Следовательно, (11) не является стандартным представлением группы G. Положим $f_1 = (s_1+m)e_1$ и $f_2 = (s_2+m)e_2$. Тогда система $F_0 = \{f_1, f_2\}$ является B-базисом, определяемым элементом d_1. Стандартное представление группы G, связанное с парой (d_1, F_0), имеет вид

$$d_1 = \frac{1}{m}f_1 + \frac{1}{m}f_2.$$

Пу сть множество $U = \{u_i \in B_i \mid i = 1, 2\}$ определяет не регуляторное умножение на G относительно B-базиса $E_0 = \{e_1, e_2\}$. Тогда по теореме 2.4 имеем $(u_1, u_2) \in M(d, E_0) \setminus M^{(2)}$. Следовательно,

$$u_1 \in \alpha m s_1^{-1}e_1 + m^2B_1, \quad u_2 \in \alpha m s_2^{-1}e_2 + m^2B_2, \tag{12}$$

при некотором целом числе α, не делящемся на простое число m.

Допустим, что множество U определяет умножение относительно B-базиса $F_0 = \{f_1, f_2\}$. Тогда в силу теоремы 2.4 при некотором $\beta \in \mathbb{Z}$ имеем

$$u_1 \in \beta m f_1 + m^2B_1, \quad u_2 \in \beta m f_2 + m^2B_2. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем

$$\alpha m s_1^{-1}e_1 \in \beta m f_1 + m^2B_1 = \beta m s_1 e_1 + m^2B_1,$$
$$\alpha m s_2^{-1}e_2 \in \beta m f_2 + m^2B_2 = \beta m s_2 e_2 + m^2B_2,$$

откуда

$$\alpha = \beta s_1^2 + m x_1, \quad \alpha = \beta s_2^2 + m x_2 \tag{14}$$

при некоторых $x_1 \in R_1$, $x_2 \in R_2$. Так как

$$x_i = \frac{\alpha - \beta s_i^2}{m} \in R_i$$

и m является $P_0(\tau_i)$-числом, то $x_i \in \mathbb{Z}$ при $i = 1, 2$. Следовательно, из (14) получаем

$$\beta(s_1^2 - s_2^2) = my \quad \text{при} \quad y = x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}.$$

Так как простое число m не делит $s_1^2 - s_2^2$, то m делит β, откуда m делит α в силу (14). Это противоречит тому, что $(u_1, u_2) \notin M^{(2)}$. Следовательно, множество $U = \{u_1, u_2\}$ не определяет ни одного умножения относительно B-базиса F_0.

Пусть $\times$ — умножение на группе $G \in \mathcal{A}_0$, $E = \{e_i^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i \in I_\tau\}$ — A-базис группы G,

$$U_\times = U_\times(E) = \Big\{u_{ij}^{(\tau)} = e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\Big\}.$$

Нетрудно видеть, что в силу теоремы 2.4 соответствие $\times \mapsto \overline{U}_\times$ определяет изоморфизм группы $\operatorname{Mult} G$ на $M(E_0)$.

Теорема 2.8. *Если $G \in \mathcal{A}_0$ и E_0 — B-базис группы G, то* $\operatorname{Mult} G \cong M(E_0)$.

Отметим, что из теоремы 2.8 следует, что с точностью до изоморфизма группа $M(E_0)$ не зависит от выбора B-базиса E_0.

Замечание 2.9. Пусть $G = \langle d, A\rangle \in \mathcal{A}_0$, E — A-базис группы G, содержащий B-базис E_0.

1. В силу теоремы 2.8 будем отождествлять группу $\operatorname{Mult} G$ с группой $M(E_0) = \langle X, M^{(2)}\rangle$, а умножение $\times$ отождествлять с $\overline{U}_\times \in M(E_0)$.
2. Пусть $\overline{U}_\times = \overline{U}_\times(E) \in \operatorname{Mult} G = M(E_0)$, $X = X(d, E_0) \in M(E_0)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Из доказательства теоремы 2.4 следует, что $\overline{U}_\times \in \alpha X + M^{(2)}$ в точности тогда, когда $d \times d \in \alpha d + A$.
3. Из п. 2 следует, что $\overline{U}_\times \in M^{(2)}$ в точности тогда, когда $G \times G \subseteq A$. Это значит, что в группе $\operatorname{Mult} G$ подгруппа $\operatorname{Hom}(G \otimes G, A)$ всех регуляторных умножений совпадает с группой $M^{(2)}$.

3. Свойства групп умножения блочно-жестких CRQ-групп кольцевого типа. Цель этого раздела — показать, что для любой группы G из класса $\mathcal{A}_0$ группа $\operatorname{Mult} G$ тоже принадлежит этому классу. Мы также опишем ранг, множество критических типов, инварианты почти изоморфизма, регулятор, главное разложение и стандартного представления группы $\operatorname{Mult} G$, где $G \in \mathcal{A}_0$.

Замечание 3.1. Пусть A — вполне разложимая блочно-жесткая группа конечного ранга и $G = \langle d, A\rangle$, где $d \in \tilde{A}$. Пусть в группе $\tilde{A}/A$ имеем $o(d_\tau + A) = m_\tau$, где $d_\tau = \pi_\tau(d)$ при $\tau \in T(A)$. Тогда множество $\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\}$ удовлетворяет условию (m) (см. замечание 2.1) в точности тогда, когда при любом $\tau \in T(A)$ подгруппа A_τ сервантна в G.

Действительно, пусть множество $\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\}$ удовлетворяет условию (m), $\sigma \in T(A)$, $a \in A_\sigma$ и $a = k(td + x)$ при некоторых $k, t \in \mathbb{Z}$ и $x \in A$. Пусть $\tau \neq \sigma$, тогда

$$ktd_\tau + kx_\tau = 0, \ \text{ где } x_\tau = \pi_\tau(x) \in A_\tau.$$

Отсюда $td_\tau \in A_\tau$ и, значит, m_τ делит t. Так как множество $\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\}$ удовлетворяет условию (m), то

$$\operatorname{lcm}\Big\{m_\tau \mid \tau \in T(A), \tau \neq \sigma\Big\} = \operatorname{lcm}\Big\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\Big\} = n.$$

Следовательно, n делит t, откуда $td + x \in A$. Так как тип элемента $td + x$ равен σ, то $td + x \in A_\sigma$.

Обратно, пусть подгруппа A_τ сервантна в G при любом $\tau \in T(A)$. Допустим, что множество $\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\}$ не удовлетворяет условию (m). Тогда найдется тип $\sigma \in T(A)$ такой, что m_σ не делит $n_1 = \operatorname{lcm}\{m_\tau \mid \tau \in T(A), \tau \neq \sigma\}$. Следовательно, для $n = \operatorname{lcm}\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\}$ выполняется $n = n_1 n_2$ при некотором натуральном числе $n_2 > 1$. Следовательно, $n_1 d_\sigma \notin A_\sigma$ и $n_2(n_1 d_\sigma) \in A_\sigma$. Значит, подгруппа A_σ не сервантна в G.

Замечание 3.2. Пусть A — редуцированная блочно-жесткая (жесткая) вполне разложимая группа конечного ранга, $d \in \tilde{A} \setminus A$ и $G = \langle d, A\rangle$. Тогда A — подгруппа конечного индекса группы G, и $T(G) = T(A)$. Значит, по определению G является блочно-жесткой (жесткой) ACD-группой. Отметим, что если A — группа кольцевого типа, то и G — группа кольцевого типа. Так как $G/A = \langle d + A\rangle$ — циклическая группа, то, согласно [3, Sec. 2], G является CRQ-группой. При этом $A = \operatorname{Reg} G$ в точности тогда, когда подгруппа A_τ сервантна в G при любом $\tau \in T(G)$ (см. [3, Sec. 2]).

Пусть $G \in \mathcal{A}_0$, в следующей теореме описаны свойства группы $\operatorname{Mult} G$. Далее везде $G \in \mathcal{A}_0$, $T(G) = T$, $T_0(G) = T_0$, $m_\tau(G) = m_\tau$ $(\tau \in T)$, $n(G) = n$, $G = G_1 \oplus C$ — главное разложение группы G, $\operatorname{Reg} G_1 = B$, $\operatorname{Reg} G = A = B \oplus C$, $G = \langle d, A\rangle$ и стандартное представление группы G имеет вид

$$d = \sum_{\tau \in T_0} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)},$$

где s_τ^{-1} — целое число, обратное к s_τ по модулю m_τ. Отметим, что во множестве целых решений сравнения $s_\tau x \equiv 1 \pmod{m}_\tau$ всегда есть $P_0(\tau)$-число $s_\tau^{\varphi(m_\tau)-1}$, где $\varphi(x)$ — функция Эйлера. Поэтому в качестве целого числа s_τ^{-1}, обратного к s_τ по модулю m_τ, всегда можно взять это $P_0(\tau)$-число.

Теорема 3.3. *Пусть $G \in \mathcal{A}_0$. Тогда для группы $\operatorname{Mult} G$ выполняются следующие условия.*

1. *Группа* $\operatorname{Mult} G$ *является блочно-жесткой* CRQ*-группой кольцевого типа с регулятором* $M^{(2)} = \operatorname{Hom}(G \otimes G, A)$.
2. $T(\operatorname{Mult} G) = T(G)$ *и, как следствие,* $T_0(\operatorname{Mult} G) = T_0(G)$.
3. $m_\tau(\operatorname{Mult} G) = m_\tau(G)$ *для любого* $\tau \in T(G)$, $\quad n(\operatorname{Mult} G) = n(G)$.
4. $r(\operatorname{Reg}_\tau(\operatorname{Mult} G)) = (r(\operatorname{Reg}_\tau G))^3$ *для любого* $\tau \in T(G)$.
5. *Одно из главных разложений группы* $\operatorname{Mult} G$ *имеет вид* $\operatorname{Mult} G = M' \oplus M''$, *где*

$$M' = \langle X, K \rangle, \quad K = \prod_{\tau \in T_0(G)} K_\tau, \quad K_\tau = \begin{bmatrix} m_\tau^2 B_\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \subseteq M_\tau^{(2)},$$

$$X = \left(X^{(\tau)}\right)_{\tau \in T_0(G)}, \quad X^{(\tau)} = \begin{pmatrix} m_\tau s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_\tau^{(1)} \text{ при } \tau \in T_0(G),$$

$$M'' = \prod_{\tau \in T(G)} M''_\tau, \quad M''_\tau = \begin{bmatrix} m_\tau^2 C_\tau & m_\tau A_\tau & \dots & m_\tau A_\tau \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \end{bmatrix} \subseteq M_\tau^{(2)}.$$

При этом $T(M') = T_0(G)$, $\operatorname{Reg} M' = K$.
6. *Для каждого* $\tau \in T_0(G)$ *через* s_τ^{-1} *обозначим* $P_0(\tau)$*-число, обратное к* s_τ *по модулю* m_τ,

$$E_0^{(\tau)} = \begin{pmatrix} m_\tau^2 e_0^{(\tau)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in K_\tau.$$

Тогда система $\left\{E_0^{(\tau)} \mid \tau \in T_0(G)\right\}$ *является одним из* B*-базисов группы* $\operatorname{Mult} G$. *Одно из стандартных представлений группы* $\operatorname{Mult} G$ *имеет вид*

$$X = \left(\frac{s_\tau^{-1}}{m_\tau} E_0^{(\tau)}\right)_{\tau \in T_0(G)}.$$

Доказательство. 1. В силу теоремы 2.8 имеем $\operatorname{Mult} G = \langle X, M^{(2)} \rangle$, где

$$X = \left(X^{(\tau)}\right)_{\tau \in T_0}, \quad X^{(\tau)} = \begin{pmatrix} m_\tau s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M^{(1)} \quad \text{при } \tau \in T_0.$$

Так как $\gcd(s_\tau^{-1}, m_\tau) = 1$ при $\tau \in T_0$, то в группе $\tilde{M}^{(2)}/M^{(2)}$ имеем $o(X_\tau + M^{(2)}) = m_\tau$.

Согласно замечанию 2.1 множество $\{m_\tau \mid \tau \in T\}$ удовлетворяет условию (m). Поэтому в силу замечания 3.1 подгруппы $M_\tau^{(2)}$ сервантны в $\operatorname{Mult} G$ при любом $\tau \in T$. Так как $M^{(2)}$ — блочно-жесткая вполне разложимая группа кольцевого типа, то $\operatorname{Mult} G$ — блочно-жесткая CRQ-группа кольцевого типа с регулятором $M^{(2)}$ по замечанию 3.2. В силу замечания 2.9(3) имеем

$$M^{(2)} = \operatorname{Hom}(G \otimes G, A).$$

2. В силу п. 1 и определения группы $M^{(2)}$ имеем

$$T(\operatorname{Mult} G) = T(M^{(2)}) = T(G) = T.$$

3. Имеем $\operatorname{Mult} G = \langle X, M^{(2)} \rangle$ и $\operatorname{Reg}(\operatorname{Mult} G) = M^{(2)}$ в силу п. 1. Пусть $\tau \in T$; тогда

$$m_\tau(\operatorname{Mult} G) = o(X_\tau + M^{(2)}) = m_\tau = m_\tau(G).$$

Значит, $n(\operatorname{Mult} G) = \operatorname{lcm}\{m_\tau \mid \tau \in T\} = n(G)$.

4. Пусть $\tau \in T$. В силу п. 1 имеем

$$\mathrm{Reg}_\tau(\mathrm{Mult}\, G) = M_\tau^{(2)} = \begin{bmatrix} m_\tau^2 A_\tau & m_\tau A_\tau & \ldots & m_\tau A_\tau \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \ldots & A_\tau \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \ldots & A_\tau \end{bmatrix} \cong M_{n_\tau}(A_\tau),$$

где $n_\tau = r(A_\tau)$. Следовательно,

$$r(\mathrm{Reg}_\tau(\mathrm{Mult}\, G)) = n_\tau^3 = (r(\mathrm{Reg}_\tau\ G))^3.$$

5. В разложении $\mathrm{Mult}\, G \cong M' \oplus M''$ группа M'' вполне разложима, а $M' = \langle X, K\rangle$. По определению группы K имеем $T(K) = T(M') = T_0$. Как нетрудно видеть, в группе $\widetilde{K}/K$ выполняется $o(X^{(\tau)} + K) = m_\tau$ при всех $\tau \in T_0$. Так как $\left\{m_\tau \mid \tau \in T_0\right\}$ удовлетворяет условию (m) по замечанию 2.1 и K — жесткая вполне разложимая группа, то M' является жесткой группой из $\mathcal{A}_0$ с $\mathrm{Reg}\, M' = K$ в силу замечаний 3.1 и 3.2.

Так как $T(M') = T_0$, то $\tau \in T(M')$ в точности тогда, когда $m_\tau(\mathrm{Mult}\, G) = m_\tau > 1$. При этом

$$m_\tau(M') = o(X^{(\tau)} + K) = m_\tau = m_\tau(\mathrm{Mult}\, G)$$

в силу п. 3. Из $(1')$, $(1'')$ получаем, что разложение $\mathrm{Mult}\, G = M' \oplus M''$ является главным разложением группы $\mathrm{Mult}\, G$.

6. Пусть $\tau \in T_0$, s_τ^{-1} — $P_0(\tau)$-число, обратное к s_τ по модулю m_τ,

$$E_0^{(\tau)} = \begin{pmatrix} m_\tau^2 e_0^{(\tau)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in K_\tau.$$

Тогда $K = \prod\limits_{\tau \in T_0} R_\tau E_0^{(\tau)}$. При этом

$$X = \left(\frac{s_\tau^{-1}}{m_\tau} E_0^{(\tau)}\right)_{\tau \in T_0}. \tag{15}$$

Так как s_τ^{-1} ($\tau \in T_0$) является $P_0(\tau)$-числом, то равенство (15) — стандартное представление группы $\mathrm{Mult}\, G$. Значит, $\left\{E_0^{(\tau)} \mid \tau \in T_0(G)\right\}$ — B-базис группы $\mathrm{Mult}\, G$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andruszkiewicz R. R., Woronowicz M.* On additive groups of associative and commutative rings// Quaest. Math. — 2017. — *40*, № 4. — P. 527–537.
2. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Torsion-free rings// Ill. J. Math. — 1961. — *5*. — P. 61–98.
3. *Blagoveshchenskaya E. A., Mader A.* Decompositions of almost completely decomposable groups// Contemp. Math. Am. Math. Soc. — 1994. — *171*. — P. 21–36.
4. *Burkhardt R.* On a special class of almost completely decomposable groups// CISM Courses Lect. Notes. — 1984. — *287*. — P. 141–150.
5. *Dugas M., Oxford E.* Near isomorphism invariants for a class of almost completely decomposable groups// Proc. Curacao Conf. “Abelian Groups-1991”. — Marcel Dekker, 1993. — P. 129–150.
6. *Feigelstock S.* Additive groups of rings whose subrings are ideals// Bull. Austr. Math. Soc. — 1997. — *55*. — P. 477–481.
7. *Feigelstock S.* Additive groups of commutative rings// Quaest. Math. — 2000. — *23*. — P. 241–245.
8. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. Vol. 2. — New York–London: Academic Press, 1973.
9. *Fuchs L.* Abelian Groups. — Springer, 2015.
10. *Gardner B. J.* Rings on completely decomposable torsion-free Abelian groups// Comment. Math. Univ. Carol. — 1974. — *15*, № 3. — P. 381–392.
11. *Jackett D. R.* Rings on certain mixed Abelian groups// Pac. J. Math. — 1982. — *98*, № 2. — P. 365–373.
12. *Kompantseva E. I.* Rings on almost completely decomposable abelian groups// J. Math. Sci. — 2009. — *163*, № 6. — P. 688–693.
13. *Kompantseva E. I.* Torsion-free rings// J. Math. Sci. — 2010. — *171*, № 2. — P. 213–247.

14. *Kompantseva E. I.* Abelian *dqt*-groups and rings on them// J. Math. Sci. — 2015. — *206*, № 5. — P. 494–504.
15. *Kompantseva E. I., Tuganbaev A. A.* Rings on Abelian torsion-free groups of finite rank// Beitr. Algebra Geom. — 2022. — *63*. — P. 267–285.
16. *Kompantseva E. I., Tuganbaev A. A.* Absolute ideals of Murley groups// Beitr. Algebra Geom. — 2022. — *63*. — P. 853–866.
17. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht—Boston—London: Springer, 2003.
18. *Lady E. L.* Almost completely decomposable torsion-free abelian groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1974. — *45*. — P. 41–47.
19. *Mader A.* Almost Completely Decomposable Abelian Groups. — Amsterdam: Gordon and Breach, 2000.

Компанцева Екатерина Игоревна
Московский педагогический государственный университет;
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: kompantseva@yandex.ru

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва
E-mail: tuganbaev@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 16–38
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-16-38

УДК 512.552

АВТОМОРФИЗМЫ МАТРИЧНЫХ КОЛЕЦ

© 2023 г. **П. А. КРЫЛОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Исследуются группы автоморфизмов алгебр формальных матриц. Также рассматриваются автоморфизмы обычных алгебр матриц (в частности, алгебр треугольных матриц).

Ключевые слова: алгебра формальных матриц, алгебра треугольных матриц, автоморфизм.

AUTOMORPHISMS OF MATRIX RINGS

© 2023 **P. A. KRYLOV, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. We examine the automorphism groups of algebras of formal matrices. We also consider automorphisms of ordinary matrix algebras (in particular, algebras of triangular matrices).

Keywords and phrases: algebra of formal matrices, algebra of triangular matrices, automorphism.

AMS Subject Classification: 16R99, 16D10

1. Введение. Автоморфизмы и изоморфизмы различных колец матриц изучались во многих статьях; см., например, [1, 4–11, 17–21, 25].

Исследовались также и некоторые другие отображения матричных колец; в частности, коммутирующие и централизующие отображения (см., например, [27]).

Работа авторов [25] посвящена автоморфизмам и гомоморфизмам алгебр формальных матриц. Сначала в ней рассматриваются автоморфизмы алгебры $S = L \oplus M$, где L — некоторая подалгебра, M — нильпотентный идеал. В таком случае говорят, что S — *расщепляющееся расширение* идеала M с помощью подалгебры L. Затем в [25] результаты о группе $\operatorname{Aut} S$ применяются к алгебрам формальных матриц. При этом часть утверждений не записана в полном виде.

В настоящей статье значительно усиливаются некоторые результаты из [25] и приводится много новых результатов об автоморфизмах колец формальных матриц. Исследуются также автоморфизмы обычных колец матриц, в частности, треугольных.

Отметим, что работы [10] и [11] содержат интересные результаты и подходы к нахождению строения автоморфизмов колец формальных треугольных матриц. Мы почерпнули и использовали некоторые идеи из этих статей [10] и [11].

Мы рассматриваем только ассоциативные кольца, являющиеся унитальными алгебрами над некоторым коммутативным унитальным кольцом T. Однако само кольцо T явно почти не присутствует. Иногда мы пишем «алгебра», иногда «кольцо».

Пусть K — некоторая алгебра. Тогда $\operatorname{Aut} K$ — группа автоморфизмов, $\operatorname{In}(\operatorname{Aut} K)$ — подгруппа внутренних автоморфизмов и $\operatorname{Out} K$ — группа внешних автоморфизмов алгебры K, т. е. фактор-группа $\operatorname{Aut} K/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} K)$.

Если S — некоторое кольцо, то $U(S)$ — его группа обратимых элементов, а $P(S)$ — первичный радикал кольца S. Через $\operatorname{Aut}_S M$ обозначаем группу автоморфизмов S-S-бимодуля M.

Пусть R, S — кольца, A — R-S-бимодуль и α, γ — автоморфизмы колец R и S соответственно.

Можно задать новую структуру бимодуля на A, положив

$$x \circ a = \alpha(x)a, \quad a \circ y = a\gamma(y) \quad \text{для всех} \quad x \in R, \ y \in S, \ a \in A.$$

Обычно этот бимодуль обозначается через ${}_{\alpha}A_{\gamma}$, а исходный бимодуль может быть обозначен через ${}_1A_1$.

Полупрямое произведение групп A и B обозначается через $A \leftthreetimes B$. Такое обозначение носит условный характер, но оно удобно. Запись $G \cong A \leftthreetimes B$ подразумевает, что группа G содержит нормальную подгруппу H и подгруппу E, для которых

$$G = H \cdot E, \quad H \cap E = \langle e \rangle, \quad A \cong H, \quad B \cong E \cong G/H.$$

2. Группа $\operatorname{Aut} K$, где K — кольцо формальных матриц с нулевыми идеалами следа. Кольцам формальных матриц посвящена книга [24]. Можно также говорить об алгебрах формальных матриц.

Зафиксируем натуральное число $n \geqslant 2$. Пусть $R_1, \ldots, R_n$ — кольца и M_{ij} — R_i-R_j-бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \ldots, n$. Предположим, что для любых таких индексов $i, j, k = 1, \ldots, n$, что $i \neq j$, $j \neq k$, задан R_i-R_k-бимодульный гомоморфизм $\varphi_{ijk} \colon M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$. Обозначим через φ_{iik} и φ_{ikk} канонические изоморфизмы

$$R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \to M_{ik}, \quad M_{ik} \otimes_{R_k} R_k \to M_{ik}$$

соответственно, $i, k = 1, \ldots, n$. Вместо $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ просто пишем ab. Допустим также, что в этих обозначениях $(ab)c = a(bc)$ для всех элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$, $c \in M_{k\ell}$ и индексов i, j, k, ℓ.

Обозначим через K множество всех квадратных матриц (a_{ij}) порядка n со значениями в бимодулях M_{ij}. Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения K образует кольцо. Его можно записать в следующем виде:

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \ldots & M_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & R_n \end{pmatrix}.$$

Кольцо K называется *кольцом формальных* (или *обобщенных*) *матриц* порядка n. Если $M_{ij} = 0$ для всех i, j, удовлетворяющих неравенству $i > j$, то K — *кольцо формальных (верхних) треугольных матриц*.

Для каждого $k = 1, \ldots, n$ положим

$$I_k = \sum_{i \neq k} \operatorname{Im}(\varphi_{kik}), \quad \text{или, по-другому,} \quad I_k = \sum_{i \neq k} M_{ki}M_{ik}.$$

Здесь $M_{ki}M_{ik}$ — множество всех конечных сумм элементов вида ab, $a \in M_{ki}$, $b \in M_{ik}$. Тогда I_k — идеал кольца R_k. Говорят, что $I_1, \ldots, I_n$ — *идеалы следа* кольца K.

Как обычно, мы будем отождествлять некоторые матрицы с соответствующими элементами. Например, матрицу вида

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

можно отождествить с элементом r и т. п. Аналогичные соглашения действуют и для множеств матриц.

Пусть K — некоторая алгебра формальных матриц. Обозначим через L подкольцо всех диагональных матриц, а через M подгруппу всех матриц с нулями на главной диагонали. Можно записать прямую сумму $K = L \oplus M$ абелевых групп. Подгруппа M будет идеалом в точности тогда, когда все идеалы следа кольца K равны нулю. В этом случае говорят, что K кольцо *с нулевыми идеалами следа*. К таким кольцам относятся все кольца треугольных матриц.

Пусть K — кольцо формальных матриц с нулевыми идеалами следа. Имеем расщепляющееся расширение $K = L \oplus M$, причем M — нильпотентный идеал степени нильпотентности $\leqslant n$ и L-L-бимодуль. В [25] автоморфизмы такого кольца K представляются определенными матрицами порядка 2. Делается это так. Произвольному автоморфизму φ алгебры K стандартным способом можно сопоставить матрицу

$$\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \delta & \beta\end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\alpha\colon L\to L,\quad \beta\colon M\to M,\quad \gamma\colon M\to L,\quad \delta\colon L\to M$$

— T-модульные гомоморфизмы и

$$\varphi(x+y)=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \delta & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(\alpha(x)+\gamma(y))+(\delta(x)+\beta(y))$$

для всех $x\in L$ и $y\in M$. Как и в [25] мы будем в основном рассматривать (за исключением раздела 10) только «треугольный» случай; имеется в виду, что $\gamma=0$ для любого автоморфизма φ. В дальнейшем мы не будем различать автоморфизм φ и соответствующую ему матрицу. Иногда для краткости мы пишем «треугольный автоморфизм φ», если

$$\varphi=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \delta & \beta\end{pmatrix},$$

и «диагональный автоморфизм φ», если

$$\varphi=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\varphi=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \delta & \beta\end{pmatrix}$$

— некоторый автоморфизм алгебры K. В таком случае α, δ, β удовлетворяют равенствам раздела 3 статьи [25]. В частности, α — автоморфизм алгебры L, а β — автоморфизм алгебры M (как неунитальной алгебры). Если $M^2=0$, то δ является дифференцированием алгебры L со значениями в бимодуле ${}_\alpha M_\alpha$, а β — изоморфизм L-L-бимодулей $M\to {}_\alpha M_\alpha$.

Договоримся через $\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,K)$ (соотв., $\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,K)$) обозначать подгруппу внутренних автоморфизмов алгебры K, определяемых обратимыми элементами вида $1+y$, $y\in M$, (соотв., обратимыми элементами алгебры L). Первая подгруппа является нормальной в $\mathrm{Aut}\,K$ и имеет место полупрямое разложение

$$\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\,K)=\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,K)\leftthreetimes\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,K)$$

(см. [25, Section 4]).

Определим один гомоморфизм и несколько групп (см. [25, Section 3]).

Пусть $f\colon\ \mathrm{Aut}\,K\to\mathrm{Aut}\,L$ — такой гомоморфизм, что $f(\varphi)=\alpha$ для каждого автоморфизма

$$\varphi=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \delta & \beta\end{pmatrix}.$$

Пусть, далее, Λ — подгруппа диагональных автоморфизмов, а Ψ — подгруппа, состоящая из автоморфизмов вида

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}.$$

Кроме того, обозначим через Ω образ гомоморфизма f. Затем, пусть Φ — нормальная подгруппа

$$\left\{\varphi\in\mathrm{Aut}\,K : \varphi=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix},\ \alpha\in\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\,L)\right\}$$

группы $\mathrm{Aut}\,K$. Информация о введенных группах очень важна для понимания строения группы $\mathrm{Aut}\,K$.

Пусть $e_1,\ldots,e_n$ — единичные элементы колец $R_1,\ldots,R_n$ соответственно. В соответствии с принятым соглашением отождествляем их с соответствующими матричными единицами.

Сформулируем два условия на алгебру K (см. [25, Section 9]).

I. Для любого $\varphi \in \operatorname{Aut} K$ верно равенство $\varphi M = M$, т. е. любой автоморфизм является треугольным.

II. Для любого $\varphi \in \operatorname{Aut} K$ и каждого $i = 1, \ldots, n$ справедливо включение $\varphi(e_i) \in e_k + M$ для некоторого k.

Из выполнения условия II *вытекает выполнение условия* I.

Сформулируем подробно и в более полном виде основные результаты из разделов 8 и 9 работы [25] о группе $\operatorname{Aut} K$, где K — алгебра формальных матриц с нрулевыми идеалами следа.

Сначала запишем несколько полезных равенств и изоморфизмов:

$$\Psi \cap \operatorname{Aut} K = \Psi \cap \operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K) = \Psi_0; \tag{1}$$

$$\Lambda/(\operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi) \cong \Omega/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} L); \tag{2}$$

$$\Phi/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K)/\Psi_0 \cong \operatorname{In}(\operatorname{Aut} L); \tag{3}$$

$$\Phi/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} K) \cong \Psi/\Psi_0. \tag{4}$$

Группа Ψ_0 — это подгруппа внутренних автоморфизмов алгебры K, определяемых центральными элементами алгебры L (введена в [25, Section 4]).

В следующей теореме собрана основная информация о группе $\operatorname{Aut} K$.

Теорема 1. *Пусть K — алгебра формальных матриц с нулевыми идеалами следа и выполнено условие* I. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) *Имеют место равенства*

$$\operatorname{Aut} K = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \rtimes \Lambda; \tag{5}$$

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \rtimes \Psi; \tag{6}$$

$$\Phi = \operatorname{In}(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \rtimes \operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi. \tag{7}$$

(b) *Верны изоморфизмы*

$$\operatorname{Aut} K/\operatorname{Ker} f \cong \Omega \cong \Lambda/\Psi; \tag{8}$$

$$\operatorname{Aut} K/\Phi \cong \Omega/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} L). \tag{9}$$

(c) *В* $\operatorname{Out} K$ *есть нормальная подгруппа, изоморфная* Ψ/Ψ_0, *а факторгруппа по ней изоморфна* $\Omega/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} L)$.

(d) *Если выполнено равенство* $\Omega = \operatorname{In}(\operatorname{Aut} L)$, *то верны соотношения*

$$\operatorname{Aut} K = \Phi = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \rtimes (\operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi); \tag{10}$$

$$\operatorname{Out} K \cong \Psi/\Psi_0. \tag{11}$$

(e) *Если справедливо равенство* $\Psi = \Psi_0$, *то*

$$\Phi = \operatorname{In}(\operatorname{Aut} K), \quad \operatorname{Out} K \cong \Omega/\operatorname{In}(\operatorname{Aut} L).$$

Можно сделать вывод о том, что если удастся найти строение групп Ψ и Ω, то строение групп $\operatorname{Aut} K$ и $\operatorname{Out} K$ будет в определенном смысле известно.

В работе [25] для алгебры K над коиммутативным неразложимым кольцом при некоторых условиях вычисляются группы Ψ и Ω. В разделах 7 и 8 эти результаты получают значительное развитие, а сами указанные алгебры определяются в разделе 5.

Кольцо R называется *неразложимым*, если 1 — единственный его ненулевой центральный идемпотент.

Следствие 1. *Пусть все факторкольца $R_1/P(R_1), \ldots, R_n/P(R_n)$ неразложимы. Тогда для алгебры K выполняются условия* II *и* I *и, следовательно, справедливы утверждения теоремы* 1.

Как мы договорились, мы отождествляем кольцо R_i с кольцом e_iKe_i, а бимодуль M_{ij} с бимодулем e_iKe_j.

Пример из [20], приведенный также в [25], говорит о том, что автоморфизмы могут «перемешивать» кольца R_i и бимодули M_{ij}. В [25] выделены некоторые условия, препятствующие такому перемешиванию. Учитывая теорему 1 можно при этом ограничиваться диагональными автоморфизмами.

Теорема 2. *Предположим, что все факторкольца $R_1/P(R_1), \ldots, R_n/P(R_n)$ неразложимы. Пусть*

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

— диагональный автоморфизм алгебры K. Тогда автоморфизм α алгебры L переставляет кольца $R_1, \ldots, R_n$, а автоморфизм β L-L-бимодуля M переставляет бимодули M_{ij} в соответствии с некоторой подстановкой τ степени n. Кроме того, сужение β на M_{ij} является изоморфизмом бимодулей $M_{ij} \to M_{\tau(i)\tau(j)}$ (относительно изоморфизмов колец $\alpha|_{R_i}\colon R_i \to R_{\tau(i)}$, $\alpha|_{R_j}\colon R_j \to R_{\tau(j)}$).

3. Кольца формальных треугольных матриц. В работе [25] кольца формальных треугольных матриц специально не рассматривались. Они обладают определенной спецификой, которая позволяет более глубоко проникнуть в строение как самих колец, так и их групп автоморфизмов.

Напоминаем, что, как указано в разделе 1, все наши кольца являются T-алгебрами.

Для кольца K приведем одно условие на кольца $R_1, \ldots, R_n$, более слабое по сравнению с условием из следствия 1 и теоремы 2; это условие гарантирует выполнение условия I.

Определение 1 (см. [11])**.** Идемпотент e кольца R называется *полуцентральным*, если $(1-e)Re = 0$.

Кольцо R называется *сильно неразложимым*, если 1 — единственный его полуцентральный идемпотент.

Соберем вместе следующие условия на кольцо R:

(1) R — неразложимое кольцо;
(2) R — сильно неразложимое кольцо;
(3) факторкольцо $R/P(R)$ неразложимо;
(4) для любого идемпотента e кольца R из равенства $(1-e)Re = 0$ следует равенство $eR(1-e) = 0$.

Между этими условиями имеются такие соотношения:

$$(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1), \quad (2) \Rightarrow (4).$$

К условиям I и II из раздела 2 для кольца формальных матриц K добавим еще одно условие:

III. Каждое из колец $R_1, \ldots, R_n$ удовлетворяет приведенному выше условию (4).

В разделе 2 отмечено, что условие II влечет условие I. Ниже мы покажем, что в «треугольном» случае условие III также влечет условие I.

Запишем один раз в полном виде кольцо K формальных треугольных матриц порядка n:

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ 0 & R_2 & \ldots & M_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & R_n \end{pmatrix}.$$

Предложение 1. *Пусть K — алгебра формальных треугольных матриц, причем все кольца $R_1, \ldots, R_n$ удовлетворяют условию* (4)*. Тогда K удовлетворяет условию* I*, т.е. любой автоморфизм алгебры K является треугольным.*

Доказательство. Как и в разделе 2, обозначим через $e_1, \ldots, e_n$ единичные элементы колец $R_1, \ldots, R_n$ соответственно. Запишем расщепляющееся расширение: $K = L \oplus M$.

Допустим напротив, что существует автоморфизм φ алгебры K, не являющийся треугольным. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ имеем равенство

$$\varphi(e_i) = g_i + y_i, \quad \text{где} \quad g_i \in L,\ y_i \in M.$$

Здесь $g_1, \ldots, g_n$ полная ортогональная система идемпотентов в L. Запишем их относительно разложения $L = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$:

$$\begin{aligned} &g_1 = g_1^{(1)} + \ldots + g_n^{(1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_n = g_1^{(n)} + \ldots + g_n^{(n)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Все первые слагаемые в равенствах (12) образуют полную ортогональную систему идемпотентов в кольце R_1 и т. д. Можно заключить, что $e_i K e_j = 0$ для любых i, j с условием $i > j$. Далее имеем, что $\varphi(e_i) K \varphi(e_j) = 0$ и $g_i L g_j = 0$ для любых i, j с условием $i > j$.

Учитывая равенства (12), получаем следующую серию равенств:

$$\begin{gathered} \left(g_1^{(n)} + g_1^{(n-1)} + \ldots + g_1^{(2)}\right) R_1 g_1^{(1)} = 0, \\ \left(g_2^{(n)} + g_2^{(n-1)} + \ldots + g_2^{(3)}\right) R_2 \left(g_2^{(1)} + g_2^{(2)}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n^{(n)} R_n \left(g_n^{(1)} + g_n^{(2)} + \ldots + g_n^{(n-1)}\right) = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Учитывая условия на кольца $R_1, \ldots, R_n$, можно далее записать такие равенства:

$$\begin{gathered} g_1^{(1)} R_1 \left(g_1^{(n)} + g_1^{(n-1)} + \ldots + g_1^{(2)}\right) = 0, \\ \left(g_2^{(1)} + g_2^{(2)}\right) R_2 \left(g_2^{(n)} + g_2^{(n-1)} + \ldots + g_2^{(3)}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(g_n^{(1)} + g_n^{(2)} + \ldots + g_n^{(n-1)}\right) R_n g_n^{(n)} = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Из равенств (14) получаем, что

$$g_k^{(i)} R_k g_k^{(j)} = 0 \tag{15}$$

для всех $i, j, k = 1, \ldots, n$ со свойством $i < j$.

Так как автоморфизм φ не является треугольным, то существуют индексы i и j $(i < j)$, для которых φM_{ij} не содержится в M. Поэтому из равенства $\varphi M_{ij} = (g_i + y_i)(L \oplus M)(g_j + y_j)$ получаем, что $g_i L g_j \neq 0$. Отсюда следует, что

$$g_1^{(i)} R_1 g_1^{(j)} \oplus \ldots \oplus g_n^{(i)} R_n g_n^{(j)} \neq 0.$$

Поэтому $g_k^{(i)} R_k g_k^{(j)} \neq 0$ для некоторого k. Это противоречит (15). Следовательно, утверждение предложения верно. □

Ситуация, когда кольцо формальных треугольных матриц удовлетворяет условию III, довольно распространенная. Это подтверждается следующим результатом.

Лемма 1. *Если кольцо S либо полупервично, либо нормально (например, коммутативно), либо сильно неразложимо, то S удовлетворяет условию* (4).

Доказательство. Для нормального или сильно неразложимого кольца утверждение очевидно.

Допустим, что кольцо S полупервично, но не удовлетворяет условию (4). Тогда S содержит такой идемпотент e, что $(1-e)Se = 0$, но $eS(1-e) \neq 0$. Кольцо S можно отождествить с кольцом формальных матриц вида

$$\begin{pmatrix} eSe & eS(1-e) \\ 0 & (1-e)S(1-e) \end{pmatrix}.$$

В этом кольце $eS(1-e)$ — ненулевой нильпотентный идеал; это приводит к противоречию. Следовательно, S удовлетворяет условию (4). □

Следующий результат усиливает [25, Corollary 9.9(2)].

Следствие 2. *Пусть K — такая алгебра формальных треугольных матриц, что каждое из колец $R_1, \ldots, R_n$ удовлетворяет условию* (15)*. Тогда для K справедливы утверждения теоремы 1.*

Приведем один частный случай следствия 2.

Следствие 3. *Предположим, что K — такая алгебра формальных треугольных матриц, что $R_1, \ldots, R_n$ — коммутативные кольца и $\Omega = \langle 1 \rangle$. Например, пусть $R_1 = \ldots = R_n = T$, где T — коммутативное неразложимое кольцо и $M_{ij} \neq 0$ для всех i, j с условием $i < j$. Тогда верно равенство* $\operatorname{Aut} K = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \leftthreetimes \Psi$.

Доказательство. Из равенства $\Omega = \langle 1 \rangle$ вытекает равенство $\operatorname{Aut} K = \operatorname{Ker} f$. Поэтому указанные в следствии равенства вытекают из следствия 2 и теоремы 1.

Перейдем к частному случаю. Из утверждений 1, 1 и 1 вытекает равенство $\operatorname{Aut} K = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \leftthreetimes \Lambda$. Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Lambda.$$

Автоморфизм β переставляет бимодули M_{ij} в соответствии с некоторой подстановкой τ (теорема 2). Поскольку все бимодули M_{ij} отличны от нуля, то τ — тождественная подстановка. Поэтому из равенств $R_1 = \ldots = R_n = T$ следует, что $\alpha = 1$, и затем мы получаем равенство $\Omega = \langle 1 \rangle$. $\square$

Специализируем теорему 2 на случай кольца K формальных треугольных матриц.

Следствие 4. *Пусть K — такая алгебра формальных треугольных матриц, что выполняется условие* I *и факторкольца $R_1/P(R_1), \ldots, R_n/P(R_n)$ неразложимы. Например, пусть кольца $R_1, \ldots, R_n$ сильно неразложимы. Кроме того, пусть $M_{ij} \neq 0$ для всех i, j с условием $i < j$. Тогда любой диагональный автоморфизм*

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры K оставляет каждое из колец $R_1, \ldots, R_n$ на месте, а сужение $\beta|_{M_{ij}}$ является изоморфизмом R_i-R_j-бимодулей $M_{ij} \to {}_{R_i}(M_{ij})_{R_j}$ для всех i, j с условием $i < j$.

Доказательство. Автоморфизмы α и β переставляют кольца $R_1, \ldots, R_n$ и бимодули M_{ij} в соответствии с некоторой подстановкой τ. Как и в доказательстве следствия 3 τ — тождественная подстановка. $\square$

4. Подгруппа Ψ и внутренние автоморфизмы. В начале раздела K обозначает некоторую алгебру формальных матриц с нулевыми идеалами следа.

В разделе 3 статьи [25] сформулирована задача вычисления подгруппы Ψ. Важная роль этой подгруппы в проблеме описания группы автоморфизмов алгебры K уже видна из теоремы 1. Приведем несколько замечаний о подгруппе Ψ. Все сказанное ниже верно для любой алгебры K (т. е. не предполагается, что каждый ее автоморфизм является треугольным).

Возьмем произвольный автоморфизм

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi.$$

Известно, что β — автоморфизм алгебры M (как неунитальной алгебры) и автоморфизм L-L-бимодуля M. И обратно, если отображение β имеет указанные свойства, то

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

— автоморфизм алгебры K, принадлежащий Ψ. Это наблюдение уточним следующим образом.

Автоморфизм β индуцирует автоморфизм β_{ij} на каждом R_i-R_j-бимодуле M_{ij}. При этом для любых попарно различных индексов i, j, k и элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$ должно выполняться равенство

$$\beta_{ik}(a \cdot b) = \beta_{ij}(a) \cdot \beta_{jk}(b). \tag{16}$$

Пусть теперь для каждой пары индексов i, j дан автоморфизм β_{ij} бимодуля M_{ij}, причем верно равенство (16) для всех значений входящих в него символов. Полагая

$$\beta = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} \beta_{ij},$$

приходим к автоморфизму

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

который принадлежит подгруппе Ψ.

Мы получим вложение групп

$$\Psi \to \mathrm{Aut}_L M = \prod_{i,j=1,i\neq j}^{n} \mathrm{Aut}_L M_{ij},$$

если поставим в соответствие автоморфизму

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

из подгруппы Ψ набор ограничений $\beta|_{M_{ij}}$. Если алгебра K обладает тем свойством, что $M^2 = 0$, то соответствие

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \to \beta$$

определяет изоморфизм групп $\Psi \cong \mathrm{Aut}_L M$.

Есть еще одна ситуация, когда тоже можно указать строение подгруппы Ψ. Чтобы раскрыть эту ситуацию, наложим дополнительное условие на кольцо K. Именно, для любых индексов i, j, k с условием $i < j < k$ мы полагаем, что R_i-R_k-бимодульные гомоморфизмы $\varphi_{ijk}\colon M_{ij}\otimes M_{jk} \to M_{ik}$, используемые в определении умножения в K, являются изоморфизмами.

Напомним, что в разделе 2 мы договорились вместо $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ писать ab; кроме того, символ $M_{ij} \cdot M_{jk}$ обозначает множество всех конечных сумм элементов вида ab, где $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$. Иными словами, $M_{ij} \cdot M_{jk}$ — образ гомоморфизма φ_{ijk}. Ясно также, что мы будем понимать под произведением нескольких бимодулей M_{ij}. Итак, при $i < j < k$ или $i > j > k$ можно написать равенство $M_{ij} \cdot M_{jk} = M_{ik}$. Также верны равенства

$$M_{ik} = M_{i,i+1} \cdot M_{i+1,i+2} \cdot \ldots \cdot M_{k-1,k},$$
$$M_{ik} = M_{i,i-1} \cdot M_{i-1,i-2} \cdot \ldots \cdot M_{k+1,k},$$

соответственно при $i < k$ и $i > k$.

Далее получаем следующее. Пусть для каждого $i = 1, \ldots, n-1$ имеется автоморфизм $\beta_{i,i+1}$ бимодуля $M_{i,i+1}$. Эти автоморфизмы индуцируют однозначно определенный автоморфизм β_{ik} бимодуля M_{ik} для всех i, k с условием $i < k$. Аналогично, набор автоморфизмов $\beta_{i,i-1}$ бимодулей $M_{i,i-1}$ при $i = 2, \ldots, n$ индуцирует автоморфизм β_{ik} бимодуля M_{ik} для всех i, k с условием $i > k$. При этом верно равенство (16). Таким образом, автоморфизмы $\beta_{i,i+1}$ ($i = 1, \ldots, n-1$) и $\beta_{i,i-1}$ ($i = 2, \ldots, n$) индуцируют однозначно определенный автоморфизм β алгебры M и L-L-бимодуля M. Значит, автоморфизм

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

лежат в подгруппе Ψ. Можно записать следующий результат.

Следствие 5. *В описанной выше ситуации имеет место изоморфизм*

$$\Psi \cong \prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{Aut}(M_{i,i+1}) \times \prod_{i=2}^{n} \mathrm{Aut}(M_{i,i-1}).$$

Если K — кольцо треугольных матриц, то второй множитель в правой части отсутствует.

Во второй половине раздела коснемся следующего известного вопроса: когда все автоморфизмы алгебры K будут внутренними? Он рассматривался в [25, Section 10] для алгебр треугольных матриц. Здесь многое зависит от подгруппы Ψ.

До конца раздела мы предполагаем, что алгебра K формальных матриц с нулевыми идеалами следа удовлетворяет условию I, записанному в разделе 2.

Следующие факты вытекают из теоремы 1, с и равенств (12) перед этой теоремой.

Следствие 6.

1. *Каждый автоморфизм алгебры K является внутренним в точности тогда, когда справедливы равенства*
$$\Psi = \Psi_0 \quad \text{и} \quad \Omega = \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L).$$
2. *Включение $\Psi \subseteq \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, K)$ равносильно равенству $\Psi = \Psi_0$.*

Приведем ряд замечаний, касающихся выполнения равенства $\Psi = \Psi_0$. Вряд ли возможно найти критерии выполнения этого равенства без дополнительной информации о кольцах R_i и бимодулях M_{ij}.

А что можно сказать об автоморфизмах из Ψ_0? Пусть автоморфизм
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$
принадлежит Ψ_0 и определяется обратимой центральной матрицей $v = \mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_n) \in L$, где
$$L = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i.$$
Для любых не совпадающих индексов i, j и любого $y \in M_{ij}$ имеем равенства
$$\varphi(y) = \beta(y) = v^{-1} y v = v_i^{-1} y v_j;$$
это вся имеющаяся информация о φ.

Ниже считаем, что кольца $R_1, \ldots, R_n$ имеют попарно изоморфные центры. Мы отождествляем эти центры и говорим «общий центр». Обозначим его буквой C.

Предположим, что группа автоморфизмов каждого R_i-R_j-бимодуля M_{ij} состоит из умножений на обратимые элемент из центра C, т. е. $\mathrm{Aut}(M_{ij}) = U(C)$. Возьмем
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi.$$
Пусть c_{ij} — тот обратимый элемент кольца C, для которого выполняется равенство $\beta(y) = c_{ij} y$, $y \in M_{ij}$. Тогда для автоморфизма φ равенство (16) приобретает вид
$$c_{ik} ab = c_{ij} c_{jk} ab \quad \text{или} \tag{17}$$
$$(c_{ik} - c_{ij} c_{jk}) M_{ij} M_{jk} = 0. \tag{18}$$
Получается, что автоморфизму φ можно поставить в соответствие систему обратимых элементов c_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, где мы считаем, что $c_{ii} = 1$. Для этих элементов верны формулы (17) и (18).

Указанное выше вложение групп $\Psi \to \mathrm{Aut}_L\, M$ превращается во вложение
$$\Psi \to \prod_{n^2 - n} U(S).$$
Найти его образ затруднительно. В разделе 7 это делается для кольца матриц над заданным кольцом R.

Предложение 2. *Пусть K — такая алгебра, как в теореме 1. Дополнительно считаем, что все кольца R_i имеют общий центр C и $cm = mc$ для всех $c \in C$ и $m \in M$. При таких предположениях равенство $\Psi = \Psi_0$ справедливо в точности тогда, когда для любого автоморфизма*
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi$$

существуют такие обратимые элементы $c_{ij} \in C$, $i, j = 1, \dots, n$, *что* $c_{ii} = 1$,

(a) $\varphi(y) = c_{ij}y$ *для любых* i, j *и* $y \in M_{ij}$;

(b) $c_{ij} \cdot c_{jk} = c_{ik}$ *для всех* i, j, k.

Доказательство. Предположим, что равенство $\Psi = \Psi_0$ справедливо и

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi.$$

Продолжая равенства (1), мы получаем $\varphi(y) = v_i^{-1}v_jy$. Положим

$$c_{ij} = v_i^{-1}v_j \quad \text{и} \quad c_{ii} = 1 \quad \text{для всех } i, j.$$

Элементы c_{ij} удовлетворяют (a) и (b).

Обратно, пусть для всякого автоморфизма $\varphi \in \Psi$ существуют элементы c_{ij} с указанными в (a) и (b) свойствами. Выберем некоторый обратимый элемент v_1 в C и положим $v_2 = v_1c_{12}, \dots, v_n = v_1c_{1n}$. Тогда $v_i^{-1}v_j = c_{ij}$ для всех i, j. Кроме того, сопряжение матрицей $\operatorname{diag}(v_1, \dots, v_n)$ совпадает с автоморфизмом φ. Следовательно, $\varphi \in \Psi_0$ и $\Psi = \Psi_0$. $\square$

Следствие 7. *Добавим к условиям предложения 2 еще одно условие:* $M_{ij}M_{jk}$ *— точный* C*-модуль для всех* i, j, k. *Тогда п.* (b) *предложения можно исключить.*

Что касается равенства $\Omega = \operatorname{In}(\operatorname{Aut} L)$, то в разделе 8 получены различные сведения о группе Ω для кольца формальных матриц над данным кольцом R.

5. Кольца формальных матриц над данным кольцом. Есть один интересный вид колец формальных матриц. Они указаны в названии раздела. Такие кольца рассматриваются в книге [24].

Именно, пусть R — некоторое кольцо. Если K — такое кольцо формальных матриц, что $R_1 = \ldots = R_n = R$ и $M_{ij} = R$ для всех не совпадающих индексов i и j, то говорят, что K — *кольцо формальных матриц над кольцом* R или *кольцо формальных матриц со значениями в кольце* R.

Обозначим через e_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ матричные единицы кольца K. Тогда для всех значений индексов i, j, k имеем $e_{ij}e_{jk} = s_{ijk}e_k$ для каких-то центральных элементов s_{ijk} кольца R. При умножении матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ из K нужно принимать во внимание равенство

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj}a_{ik}b_{kj}, \tag{19}$$

где $A \cdot B = C = (c_{ij})$. Элементы s_{ijk} удовлетворяют тождествам

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ik\ell} = s_{ij\ell} \cdot s_{jk\ell}. \tag{20}$$

Пусть теперь $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — некоторое множество центральных элементов кольца R, удовлетворяющих тождествам (20). Если определить умножение матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ с помощью равенства (19), то получим кольцо формальных матриц над кольцом R. Поэтому два приведенных определения эквивалентны.

Пусть K — некоторое кольцо формальных матриц над кольцом R и $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — соответствующая система центральных элементов. Множество Σ называется *системой множителей*, а его элементы называются *множителями* кольца K. Вместо «множители» также говорят «мультипликативные коэффициенты»; см., например, [7]. Кольцо K можно обозначить $M(n, R, \Sigma)$. Если все s_{ijk} равны 1, то получаем обычное кольцо матриц $M(n, R)$.

Пусть τ — подстановка степени n. Для любой матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n полагаем $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$, т. е. мы берем сопряжение матрицы A матрицей подстановки τ. Далее, если $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ — некоторая система множителей, то положим $t_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$. Тогда $\{t_{ijk}\}$ — тоже система множителей, поскольку она удовлетворяет тождествам (12). Обозначим ее через $\tau\Sigma$. Следовательно, существует кольцо формальных матриц $M(n, R, \tau\Sigma)$. Кольца $M(n, R, \Sigma)$ и $M(n, R, \tau\Sigma)$ изоморфны при соответствии $A \to \tau A$.

До конца раздела мы считаем, что K — кольцо формальных матриц над данным кольцом R, являющимся T-алгеброй. Также мы считаем, что каждый множитель s_{ijk} равен 1 или 0.

В [25] показано, что при таком предположении найдется подстановка τ с тем свойством, что кольцо τK можно представить как кольцо формальных блочных матриц с нулевыми идеалами следа. Кратко напомним этот материал.

Рассматривая тождества (12), нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть индексы i, j, k попарно различны. Тогда для элементов s_{iji}, s_{jkj} s_{kik} имеет место одна из следующих возможностей*:

(i) *все три элемента — единицы*;
(ii) *какие-то два из этих трех элементов — нули, а третий элемент — единица*;
(iii) *все три элемента — нули.*

Введем на множестве чисел $\{1, \dots, n\}$ бинарное отношение $\sim$, полагая $i \sim j \Leftrightarrow s_{iji}$ — единица.

Лемма 3. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.*

Симметрическая матрица $S = (s_{iji})$ называется *матрицей множителей* кольца K.

Составим подстановку τ следующим образом. В верхней строке поставим натуральные числа от 1 до n в естественном порядке. Нижняя строка состоит из классов эквивалентности относительно отношения $\sim$, расположенных в произвольном порядке. Внутри классов числа также располагаются в произвольном порядке. Тогда в матрице τS на главной диагонали стоят блоки, состоящие из единиц. Есть взаимно однозначное соответствие между этими блоками и классами эквивалентности относительно отношения $\sim$. Порядок данного блока равен числу элементов соответствующего класса эквивалентности. Все позиции в матрице τS вне рассматриваемых блоков заняты нулями.

Как замечено выше, кольца K и τK изоморфны при соответствии $A \to \tau A$, $A \in K$. Для упрощения записей условимся, что матрица множителей S кольца K уже имеет указанный выше блочный вид. Пусть число блоков на главной диагонали матрицы S равно m.

На главной диагонали всякой матрицы A из K выделим блоки $A_1, \dots, A_m$ того же порядка и в той же последовательности, что и на главной диагонали матрицы S. Тогда блоки A_ℓ для фиксированного ℓ всех матриц из K образуют обычное кольцо матриц $M(k_\ell, R)$ для некоторого k_ℓ. Обозначим его R_ℓ. Блоки $A_1, \dots, A_m$ задают блочное разложение матрицы A очевидным образом.

Буква L будет обозначать прямую сумму колец $R_1 \oplus \ldots \oplus R_m$. Обозначим через M множество всех матриц $A \in K$, для которых соответствующие блоки $A_1, \dots, A_m$ состоят из нулей. Ясно, что M — L-L-бимодуль.

Разложение $L = R_1 \oplus \ldots \oplus R_m$ индуцирует то же блочное разложение каждой матрицы, о котором говорилось выше. Именно, запишем $1 = e_1 + \ldots + e_m$, где e_i — единичный элемент кольца R_i. Теперь положим $M_{ij} = e_i M e_j$, M_{ij} — подбимодуль в M. Действие кольца L на подбимодуле M_{ij} сводится к действию колец R_i и R_j слева и справа соответственно. Справедливо бимодульное прямое разложение

$$M = \bigoplus_{i,j=1}^{m} M_{ij},$$

где $i \neq j$. Как и в разделе 2 имеем прямую сумму $K = L \oplus M$.

Кольцо K является кольцом формальных (блочных) матриц, построенным из колец $R_1, \dots, R_m$ и бимодулей M_{ij} в соответствии с изложенной в разделе 2 процедурой; см. [24, Section 2.3]. В основном мы будем рассматривать кольцо K как кольцо блочных матриц.

Как кольцо блочных матриц алгебра K имеет нулевые идеалы следа. Значит, мы попадаем в ситуацию раздела 2.

Если факторкольцо $R/P(R)$ неразложимо, то все факторкольца $R_i/P(R_i)$ $(i = 1, \dots, m)$ также неразложимы. Учитывая следствие 1, можно записать такой результат.

Следствие 8. *Пусть кольцо $R/P(R)$ неразложимо. Тогда алгебра K удовлетворяет условиям* II *и* I; *следовательно, для группы* $\operatorname{Aut} K$ *верны теоремы* 1 *и* 2.

Замечание 1. Для коммутативного кольца R неразложимость кольца $R/P(R)$ равносильна неразложимости кольца R. Поэтому, если R — неразложимое коммутативное кольцо, то для группы автоморфизмов R-алгебры K верны теоремы 1 и 2.

6. Случай $M^2 = 0$. Мы сохраняем все обозначения и соглашения, принятые в предыдущем разделе. Таким образом, K — алгебра формальных матриц над данным кольцом R и $K = L \oplus M$, где буквы L и M имеют прежний смысл. Мы рассматриваем K как кольцо формальных блочных матриц в соответствии с разделом 5. Для алгебры K с условием $M^2 = 0$ в [25] уточнены некоторые факты и получена дополнительная информация о группе $\operatorname{Aut} K$.

Мы напомним этот материал. Но сначала кратко повторим некоторые соображения общего характера из [25, Section 9]. Справедлив следующий факт; см. [25, Lemma 9.6].

Лемма 4. *Пусть даны неразложимые кольца $R_1, \dots, R_n$, $L = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ и $\alpha \in \operatorname{Aut} L$. Тогда для каждого индекса $i = 1, \dots, n$ найдется такой индекс j, что $\alpha R_i = R_j$.*

Затем в [25] на основании леммы 4 определяется некоторая группа подстановок Σ степени n, действующая на кольце L. При этом подстановка σ из Σ отождествляется с соответствующим автоморфизмом α_σ кольца L. Также вводится нормальная подгруппа Γ автоморфизмов кольца L, оставляющая все R_i на месте. Тогда

$$\Gamma \cap \Sigma = \langle 1 \rangle \quad \text{и} \quad \operatorname{Aut} L = \Gamma \leftthreetimes \Sigma.$$

Вернемся к алгебрам формальных матриц K над R, где R — некоторое кольцо. Как и в разделе 2 пишем

$$K = L \oplus M, \quad \text{где} \quad L = R_1 \oplus \dots \oplus R_m$$

и каждое R_i — обычное кольцо матриц $M(k_i, R)$ для некоторого $k_i \geqslant 1$.

Наложим на кольцо R те же ограничения, что и в разделе 5. Именно, считаем, что кольцо $R/P(R)$ неразложимо. Тогда все кольца $R_i/P(R_i)$ также неразложимы. Следовательно, кольцо K удовлетворяет условию II. Кроме того, все кольца R_i также неразложимы. Поэтому можно применить лемму 4 к L. Можно записать $\operatorname{Aut} L = \Gamma \leftthreetimes \Sigma$, где Γ и Σ — такие подгруппы, как указано после леммы 4.

Пусть $h\colon \operatorname{Aut} L \to \Sigma$ — канонический гомоморфизм и $g = hf\colon \operatorname{Aut} L \to \Sigma$. Тогда имеем

$$\operatorname{Ker} g = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} : \alpha R_i = R_i,\ i = 1, \dots, m \right\}.$$

С помощью равенств (20) раздела 5 нетрудно проверить следующий факт.

Лемма 5. *Для данной алгебры K равенство $M^2 = 0$ справедливо в точности тогда, когда выполняется следующее условие: для любых попарно различных индексов i, j, k из равенств $s_{iji} = s_{jkj} = s_{kik} = 0$ следует равенство $s_{ijk} = 0$.*

В [25, Section 3] определена подгруппа Δ. Она состоит из автоморфизмов вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нашей алгебры K имеем соотношения

$$\Delta = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \quad \text{и} \quad \Delta \cong 1 + M.$$

Согласно теореме 1 имеет место равенство $\operatorname{Aut} K = \Delta \leftthreetimes \Lambda$. Можно также записать разложение $\operatorname{Ker} g = \Delta \leftthreetimes C$, где C обозначает

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \alpha R_i = R_i \text{ для всех } i = 1, \dots, m \right\}.$$

Теперь с учетом теоремы 1 можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть R — кольцо с неразложимым факторкольцом $R/P(R)$, K — алгебра формальных матриц над R, причем $M^2 = 0$.*

1. *Справедливы равенства*

$$\operatorname{Aut} K = \Delta \leftthreetimes \Lambda, \quad \operatorname{Aut} K = \Delta \leftthreetimes C \leftthreetimes \Sigma, \quad \Phi = \Delta \leftthreetimes (\mathrm{In}_0(\operatorname{Aut} K)) \cdot \Psi.$$

2. *Если все автоморфизмы каждой алгебры $R_1, \ldots, R_m$ являются внутренними, то имеют место соотношения*

$$\operatorname{Aut} K = \Delta \leftthreetimes (\mathrm{In}_0(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi)\Delta \leftthreetimes \Sigma, \quad \operatorname{Out} K \cong \Psi/\Psi_0 \leftthreetimes \Sigma.$$

Замечания о пункте 2: при выполнении условий этого пункта верно равенство $\operatorname{Ker} g = \Phi$, причем

$$\operatorname{Aut} K = \operatorname{Ker} g \leftthreetimes \Sigma = \Phi \leftthreetimes \Sigma = \Delta \leftthreetimes (\mathrm{In}_0(\operatorname{Aut} K) \cdot \Psi) \leftthreetimes \Sigma.$$

Известно строение подгрупп Δ, $\mathrm{In}_0(\operatorname{Aut} K)$, Ψ и Σ, входящих в теорему 3 (см. разделы 7 и 8). Поэтому известно строение всей группы $\operatorname{Aut} K$ из этого пункта. Условие на автоморфизмы алгебр $R_1, \ldots, R_m$ выполняется, например, для коммутативного кольца R, являющегося областью с однозначной факторизацией или локальным кольцом.

7. Подгруппа Ψ и внутренние автоморфизмы, II. Раздел 4 содержит некоторую информацию о подгруппе Ψ для алгебры формальных матриц с нулевыми идеалами следа. В разделе 7 мы вычислим эту подгруппу для кольца формальных матриц со значениями в произвольном кольце R. Таким образом, мы продолжаем линию разделов 5 и 6. При этом мы разовьем результаты из [25, Section 13]. Все обозначения и термины разделов 5 и 6 сохраняются. Кроме того, мы считаем, что $C(U(R))$ — центр группы $U(R)$.

Пусть K — алгебра формальных матриц со значениями в кольце R. Согласно разделу 4 существует вложение групп

$$\Psi \to \operatorname{Aut}_L M = \prod_{i,j=1, i\neq j}^{m} \operatorname{Aut}_L M_{ij}.$$

В силу [25, Proposition 13.2], автоморфизмы R_i-R_j-бимодуля M_{ij} совпадают с умножениями на обратимые центральные элементы кольца R. Поэтому можно писать $\operatorname{Aut}_L M_{ij} = C(U(R))$.

Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Psi.$$

Имеем систему обратимых центральных элементов c_{ij} $(i, j = 1, \ldots, m)$ кольца R, где полагаем $c_{ii} = 1$, удовлетворяющих равенствам (17) и (18) из раздела 4 для всех значений индексов i, j, k. Мы покажем, что для нашей алгебры K можно ограничиться в определенном смысле меньшим количеством элементов c_{ij}. А также мы точно укажем образ вложения

$$\Psi \to \prod_{m^2-m} C(U(R)).$$

С этой целью проведем некоторые рассуждения.

Зафиксируем индекс i, где $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Пусть k_i — такой индекс, что

$$i < k_i \leqslant m, \quad M_{i,i+1} \cdots M_{k_i-1,k_i} \neq 0,$$

причем k_i — максимальное число с таким свойством (смысл записанного произведения бимодулей поясняется в разделе 4). Тогда $M_{ij} \cdot M_{jk} \neq 0$ для любых k и j таких, что $i < k \leqslant k_i$ и $i < j < k$. Из равенства (18) раздела 4 следует, что $c_{ik} = c_{ij}c_{jk}$ (надо учесть, что множители s_{ijk} принимают значения только 0 или 1).

А если существуют индексы ℓ такие, что $k_i < \ell \leqslant m$, то элементы $c_{i\ell}$ и $c_{ij}c_{j\ell}$ $(i < j < \ell)$ могут быть никак не связаны, поскольку $M_{ij}M_{j\ell} = 0$. И соответственно элемент $c_{i\ell}$ не зависит от элементов $c_{i,i+1}, \ldots, c_{\ell-1,\ell}$.

Выберем некоторые позиции. Прежде всего возьмем позиции $(1, 2), \ldots, (m-1, m)$. Затем для каждого i, где $1 \leqslant i \leqslant m-1$ и $k_i < m$, выбираем позиции

$$(i, k_i + 1), \ldots, (i, m). \tag{21}$$

Теперь то же самое проделаем относительно позиций (i,j), где $i>j$, для всех индексов j таких, что $1\leqslant j\leqslant m-1$. И далее фиксируем позиции $(2,1),\dots,(m,m-1)$. А также для всякого j, где $1\leqslant j\leqslant m-1$ и $k_j<m$, выбираем позиции

$$(k_j+1,j),\dots,(m,j), \tag{22}$$

где k_j — максимальное число со свойством $M_{k_j,k_j-1}\cdots M_{j+1,j}\neq 0$. И приходим к соответствующим фактам об элементах c_{ij} для $i>j$.

После проведенной работы можно сформулировать следующее утверждение.

Предложение 3.

1. *Существует изоморфизм*

$$\Psi\cong\prod_{(i,j)}C(U(R)),$$

где пары (i,j) пробегают все выделенные выше позиции. Или, точнее,

$$\Psi\cong\prod_{p}C(U(R)),$$

где

$$p=2(m-1)+q,\quad q=\sum_{i=1}^{m-1}s_i+\sum_{j=2}^{m}t_j$$

и s_i (соотв., t_j) — число выделенных позиций в (21) (соотв., (22)).

2. *Справедливы изоморфизмы*

$$\Psi_0\cong\prod_{m-1}C(U(R))\quad\text{и}\quad\Psi/\Psi_0\cong\prod_{(m-1)+q}C(U(R)).$$

Доказательство. Докажем утверждение 1. Вложение

$$\Psi\to\prod_{m^2-m}C(U(R))$$

ставит в соответствие автоморфизму $\beta\in\Psi$ систему обратимых центральных элементов

$$\{c_{ij}\mid i,j=1,\dots,m,\ i\neq j\}$$

кольца R, где $\beta(y)=c_{ij}y$, $y\in M_{ij}$ (см. раздел 4 и написанное выше). Из текста перед предложением следует, что при этом можно ограничиться элементами c_{ij} для пар (i,j), пробегающих лишь указанные там позиции.

Докажем утверждение 2. Пусть $\beta\in\Psi_0$ и c_{ij} — те же элементы, что и в 1. Для всех $i,j,k=1,\dots,m$ верны равенства $c_{ik}=c_{ij}\cdot c_{jk}$ (см. предложение 2 и его доказательство). Отсюда получаем, что элементы c_{ij} с условием $i<j$ являются произведениями элементов вида $c_{k,k+1}$. Принимая во внимание, что $1=c_{11}=c_{ij}c_{ji}$, получаем $c_{ji}=c_{ij}^{-1}$, откуда элементы c_{ji} с условием $i<j$ выражаются через элементы, обратные к элементам $c_{k,k+1}$. Эти соображения и приводят к первому изоморфизму из 2. Второй изоморфизм вытекает из первого изоморфизма и 1. □

Следствие 9 (см. [25])**.** *Если $M^2=0$, то имеют место изоморфизмы*

$$\Psi\cong\prod_{m^2-m}C(U(R)),\quad\Psi_0\cong\prod_{m-1}C(U(R)),\quad\Psi/\Psi_0\cong\prod_{(m-1)^2}C(U(R)).$$

Из предложения 2, следствия 7 и материала данного раздела можно сформулировать, когда автоморфизм из Ψ является внутренним. Заметим, что автоморфизмы, принадлежащие Ψ, можно называть *мультипликативными.*

Следствие 10. *Пусть K — алгебра формальных матриц над кольцом R с неразложимым факторкольцом $R/P(R)$. Мультипликативный автоморфизм φ является внутренним в точности тогда, когда соответствующая ему система элементов $c_{ij}\in C(U(R))$ $(i,j=1,\dots,m)$ удовлетворяет равенствам $c_{ij}\cdot c_{jk}=c_{ik}$ для всех $i,j,k=1,\dots,m$.*

Следствие 11. *Если к условиям следствия 10 добавить условие*

$$M_{ij} \cdot M_{jk} \neq 0 \quad \text{для всех } i, j, k,$$

то верно равенство $\Psi = \Psi_0$, т. е. всякий мультипликативный автоморфизм будет внутренним.

Доказательство. Имеем, что R-модуль $M_{ij} \cdot M_{jk}$ точен. (Это уже использовалось в начале раздела.) Отсюда вытекают равенства $c_{ij} \cdot c_{jk} = c_{ik}$. □

8. Группы Ω и Ω_1. По-прежнему K — алгебра формальных матриц над кольцом R. В начале раздела 2 была введена группа Ω, являющаяся образом гомоморфизма $f\colon \operatorname{Aut} K \to \operatorname{Aut} L$. Данный раздел посвящен группе Ω в ситуации кольца K. О роли этой группы и группы Ψ уже говорилось в разделе 2 (особенно см. окончание раздела 2). Мы также введем группу Ω_1 — образ сужения гомоморфизма f на $\operatorname{Ker} g$.

Вернемся к разложению $\operatorname{Aut} L = \Gamma \leftthreetimes \Sigma$ из раздела 6 и гомоморфизму $g\colon \operatorname{Aut} K \to \Sigma$. Напомним о разложении $K = L \oplus M$. Если $M^2 = 0$, то $\operatorname{Aut} K = \operatorname{Ker} g \leftthreetimes \Sigma$ [25, Theorem 13.3]. Далее, имеем полупрямое разложение $\Omega = \Omega_1 \leftthreetimes \Sigma$ (см. начало раздела 14 в [25]). Если же $M^2 \neq 0$, то можно лишь говорить, что Ω_1 — нормальная подгруппа в Ω, а факторгруппа Ω/Ω_1 изоморфно вкладывается в группу подстановок Σ. Мы обратим внимание именно на подгруппу Ω_1.

Мы запишем несколько вопросов о строении группы Ω_1.

1. Какие автоморфизмы из Γ принадлежат Ω_1?
2. Какое строение имеет группа Ω_1?

Далее мы считаем, что факторкольцо $R/P(R)$ неразложимо. Мы ответим на первый вопрос и, в одном случае, на второй вопрос. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Ввиду теоремы 1 и следствия 8 мы имеем равенство

$$\operatorname{Aut} K = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \leftthreetimes \Lambda.$$

Отсюда следует равенство $\operatorname{Ker} g = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} K) \leftthreetimes C$, где

$$C = \operatorname{Ker} g \cap \Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \alpha R_i = R_i,\ i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Теперь можно утверждать, что автоморфизм α из Γ лежит в Ω_1 в точности тогда, когда найдется преобразование β алгебры M, которое одновременно является ее автоморфизмом и изоморфизмом L-L-бимодулей $M \to {}_\alpha M_\alpha$. Последнее свойство равносильно тому, что матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

определяет автоморфизм алгебры K, принадлежащий $\operatorname{Ker} g$.

Пусть $\alpha \in \Omega_1$,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

— соответствующий автоморфизм алгебры K. Для любых $i, j = 1, \ldots, m$ справедливы равенства

$$\beta M_{ij} = \beta(e_i M e_j) = \alpha(e_i)\beta(M)\alpha(e_j) = e_i M e_j = M_{ij}.$$

Обозначим $\beta_{ij} = \beta|_{M_{ij}}$ и $\alpha_i = \alpha|_{R_i}$. Тогда $\beta_{ij}\colon M_{ij} \to {}_{\alpha_i}(M_{ij})_{\alpha_j}$ — изоморфизм R_i-R_j-бимодулей (бимодули вида ${}_\alpha A_\gamma$ определены в разделе 1). Можно придать следующую форму вопросу о том, какие элементы из Γ входят в Ω_1. Для каких автоморфизмов $\alpha_i \in \operatorname{Aut} R_i$ и $\alpha_j \in \operatorname{Aut} R_j$ существуют изоморфизмы между R_i-R_j-бимодулями M_{ij} и как они устроены?

Докажем один факт общего характера. Он обобщает следующий результат (см. [13, Chapter 2, Proposition 5.2]): пусть H — некоторая алгебра и α, γ — ее автоморфизмы. Изоморфизм H-H-бимодулей $H \to {}_\alpha H_\gamma$ существует в точности тогда, когда $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм.

Пусть k, ℓ — натуральные числа и $c = \text{НОК}(k, \ell)$. Обозначим

$$P = M(k, R), \quad Q = M(\ell, R), \quad H = M(c, R), \quad V = M(k \times \ell, R), \quad \ell' = \frac{c}{k}, \quad k' = \frac{c}{\ell}.$$

Кольцо H можно представить в виде кольца блочных матриц двумя способами: как кольцо блочных матриц над P порядка ℓ' и как кольцо блочных матриц над Q порядка k'. Оно также является P-Q-бимодулем блочных матриц над V размера $\ell' \times k'$.

Пусть α и γ — автоморфизмы алгебр P и Q соответственно. Они индуцируют автоморфизмы алгебры H, которые можно называть *кольцевыми.* Мы оставляем за ними обозначения α и γ соответственно. Это соглашение действует и в следующем предложении.

Предложение 4. *Если $\alpha \in \operatorname{Aut} P$ и $\gamma \in \operatorname{Aut} Q$, то изоморфизм P-Q-бимодулей $V \to {}_\alpha V_\gamma$ существует в точности тогда, когда $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм алгебры H.*

Доказательство. Пусть дан изоморфизм P-Q-бимодулей $\beta\colon V \to {}_\alpha V_\gamma$. Изоморфизм β индуцирует изоморфизм H-H-бимодулей

$$\overline{\beta}\colon H \to {}_\alpha H_\gamma, \quad \overline{\beta}(A) = (\beta(A_{ij}))$$

для каждой матрицы $A = (A_{ij})$ из H. Подразумевается, что матрица A представлена в указанном выше блочном виде, т. е. A_{ij} — блоки размера $\ell' \times k'$. Следовательно, $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм алгебры H.

Теперь допустим, что $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм алгебры H. Значит, существует изоморфизм H-H-бимодулей $\beta\colon H \to {}_\alpha H_\gamma$.

Возьмем алгебру треугольных матриц

$$S = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

Обозначим через ψ автоморфизм алгебры S, переводящий матрицу

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

в матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha(a) & \beta(c) \\ 0 & \gamma(b) \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\psi = \begin{pmatrix} (\alpha, \gamma) & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

в принятой нами матричной форме записи автоморфизмов.

Пусть $e_1, \ldots, e_{\ell'}$ и $f_1, \ldots, f_{k'}$ — диагональные матричные единицы, соответствующие двум блочным разбиениям матриц из H. Справедливы равенства

$$\alpha(e_i) = e_i, \quad i = 1, \ldots, \ell', \quad \gamma(f_j) = f_j, \quad j = 1, \ldots, k'.$$

Отсюда вытекает, что ψ индуцирует автоморфизм алгебры треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} e_iHe_i & e_iHf_j \\ 0 & f_jHf_j \end{pmatrix};$$

фактически, это означает, что ψ индуцирует автоморфизм алгебры

$$\begin{pmatrix} P & V \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\beta|_V$ является изоморфизмом P-Q-бимодулей $V \to {}_\alpha V_\gamma$. □

Пусть n_i — порядок матриц из кольца R_i, $i = 1, \ldots, m$. Положим $c_{ij} = \text{НОК}(n_i, n_j)$ для всех попарно различных $i, j = 1, \ldots, m$. Через H_{ij} обозначим кольцо матриц $M(c_{ij}, R)$. Оно является кольцом блочных матриц над R_i и над R_j, а также R_i-R_j-бимодулем блочных матриц над M_{ij}. Мы считаем, что автоморфизмы колец R_i и R_j являются кольцевыми автоморфизмами алгебры H_{ij}.

Теорема 4. *Автоморфизм $\alpha = (\alpha_i)$ алгебры*

$$L = \bigoplus_{i=1}^{m} R_i$$

принадлежит группе Ω_1 в точности тогда, когда $\alpha_i^{-1}\alpha_j$ — внутренний автоморфизм алгебры H_{ij} для всех различных индексов i и j.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\alpha \in \Omega_1$. Значит, существует изоморфизм

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры K, где β — автоморфизм L-L-бимодулей $M \to {}_{\alpha}M_{\alpha}$. Ограничение β на M_{ij} является изоморфизмом R_i-R_j-бимодулей $M_{ij} \to {}_{\alpha_i}(M_{ij})_{\alpha_j}$. Согласно предложению 4 $\alpha_i^{-1}\alpha_j \in \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, H_{ij})$.

Достаточность. По предложению 4 имеется изоморфизм R_i-R_j-бимодулей $\beta_{ij} \colon M_{ij} \to {}_{\alpha_i}(M_{ij})_{\alpha_j}$, $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$. Пусть

$$\beta = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{m} \beta_{ij}.$$

Тогда β — изоморфизм L-L-бимодулей $M \to {}_{\alpha}M_{\alpha}$. Чтобы преобразование

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

алгебры K было ее автоморфизмом, достаточно проверить, что выполняется равенство

$$\beta_{ik}(ab) = \beta_{ij}(a)\beta_{jk}(b) \tag{23}$$

для любых элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$ и всех попарно различных индексов i, j, k.

Зафиксируем три указанных индекса i, j, k. Введем еще одно кольцо матриц. Положим $H = M(d, R)$, где $d = \text{НОК}(n_i, n_j, n_k)$. Это кольцо H является кольцом блочных матриц над каждым из бимодулей M_{ij}, M_{jk}, M_{ik}.

Мы считаем автоморфизмы α_i, α_j, α_k кольцевыми автоморфизмами алгебры H. Мы рассматриваем изоморфизмы β_{ij}, β_{jk}, β_{ik} как бимодульные изоморфизмы

$$H \to {}_{\alpha_i}H_{\alpha_j}, \quad H \to {}_{\alpha_j}H_{\alpha_k}, \quad H \to {}_{\alpha_i}H_{\alpha_k}$$

соответственно. При этом произведения $\alpha_i^{-1}\alpha_j$, $\alpha_j^{-1}\alpha_k$, $\alpha_i^{-1}\alpha_k$ являются внутренними автоморфизмами алгебры H. Они индуцируют те же бимодульные изоморфизмы β_{ij}, β_{jk} и β_{ik}, что и записанные выше.

Эти бимодульные изоморфизмы действуют следующим образом (см. [25, Section 2]). Существуют обратимые элементы $u, v, w \in H$ такие, что справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\beta_{ij}(x) &= \alpha_i(x)\alpha_i(u) = \alpha_i(u)\alpha_j(x), \\
\beta_{jk}(y) &= \alpha_j(y)\alpha_j(v) = \alpha_j(v)\alpha_k(y), \\
\beta_{ik}(z) &= \alpha_i(z)\alpha_i(w) = \alpha_i(w)\alpha_k(z)
\end{aligned}$$

при всех $x, y, z \in H$.

Проверим, что равенство

$$\beta_{ik}(xy) = \beta_{ij}(x)\beta_{jk}(y) \tag{24}$$

выполняется в H для любых $x, y \in H$. Из равенства

$$\alpha_i^{-1}\alpha_k = \alpha_i^{-1}\alpha_j\alpha_j^{-1}\alpha_k$$

вытекает равенство $w = vu$ (нужно еще принять во внимание то, что элементы u, v, w определяются с точностью до обратимых центральных элементов). Теперь имеем равенства

$$\beta_{ik}(xy) = \alpha_i(xy)\alpha_i(w) = \alpha_i(x)\alpha_i(y)\alpha_i(v)\alpha_i(u).$$

Также справедливы равенства

$$\begin{aligned}\beta_{ij}(x)\beta_{jk}(y) &= \alpha_i(x)\alpha_i(u)\alpha_j(y)\alpha_j(v) = \\ &= \alpha_i(x)\alpha_i(y)\alpha_i(u)\alpha_j(v) = \\ &= \alpha_i(x)\alpha_i(y)\alpha_i(v)\alpha_i(u).\end{aligned}$$

Итак, равенство (24) доказано. В нем умножение матриц выполняется в блочном виде. Отсюда вытекает равенство (23). □

В оставшейся части раздела затронем проблему строения группы Ω_1. Эта проблема кажется довольно сложной. Мы найдем строение группы Ω_1 при одном условии на числа n_i. Напомним, что n_i — это порядок матриц из кольца R_i.

Пусть n_s — наименьшее среди чисел $n_1, \ldots, n_m$. Далее считаем, что алгебра K удовлетворяет следующему свойству: n_s делит каждое из чисел n_i. При таком предположении всякое кольцо R_i является кольцом блочных матриц над R_s порядка n_i/n_s. Поэтому всякий автоморфизм α_s алгебры R_s продолжается до кольцевого автоморфизма α_i алгебры R_i. Мы будем называть *скалярным автоморфизмом* получающийся автоморфизм $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ алгебры L. Также мы будем записывать его в виде $(\alpha_s, \alpha_s, \ldots, \alpha_s)$, т. е. мы отождествляем α_i с α_s.

Обозначим через D подгруппу всех скалярных автоморфизмов алгебры L. Следующий результат расширяет [25, Corollary 14.3].

Следствие 12.

1. *Выполняется равенство* $\Omega_1 = \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L) \cdot D$.
2. *Существует изоморфизм* $\Omega_1/\,\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L) \cong \mathrm{Out}\, R_s$.

Доказательство.
1. Пусть $\alpha = (\alpha_i) \in \Omega_1$. Для каждого $j = 1, \ldots, m$ обозначим через μ_j автоморфизм $\alpha_j\alpha_s^{-1}$ алгебры R_j. Из теоремы 4 вытекает, что μ_j — внутренний автоморфизм алгебры R_j. Теперь из равенств $\alpha_j = \mu_j\alpha_s$ $(j = 1, \ldots, m)$ вытекает, что

$$\alpha = (\mu_1, \ldots, \mu_m)(\alpha_s, \ldots, \alpha_s) = \mu\gamma \in \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L) \cdot D.$$

Включение $\Omega_1 \subseteq \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L) \cdot D$ доказано.

Докажем обратное включение. Включение $\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, L) \subseteq \Omega_1$ верно всегда. Теперь возьмем произвольный автоморфизм $\gamma = (\alpha, \ldots, \alpha)$ из D, где $\alpha \in R_s$. Включение $\gamma \in \Omega_1$ вытекает из теоремы 4.
2. Утверждение вытекает из утверждения 1. □

9. Автоморфизмы кольца треугольных матриц. В этом разделе R — произвольная алгебра на некотором коммутативным кольцом T. Кольцо (верхних) треугольных матриц над R обозначается через $T(n, R)$. Обозначим это матричное кольцо буквой K. Представим кольцо K в виде расщепляющегося расширения: $T(n, R) = K = L \oplus M$, где буквы L и M имеют прежний смысл. Также удобно считать, что кольцо L является суммой $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$, а L-L-бимодуль M равен

$$\bigoplus_{i,j=1, i<j}^{n} M_{ij}.$$

Всякий автоморфизм α алгебры R индуцирует автоморфизм $\overline{\alpha}$ алгебры K, где

$$\overline{\alpha}(a_{ij}) = (\alpha(a_{ij})), \quad (a_{ij}) \in K.$$

Автоморфизм $\overline{\alpha}$ называется *кольцевым автоморфизмом, индуцированным* α. Такие автоморфизмы уже рассматривались в предыдущем разделе.

Записанная ниже теорема представляет собой другую формулировку и доказательство одной из теорем статьи [23].

Теорема 5. *Всякий треугольный автоморфизм алгебры $T(n, R)$ является произведением внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма.*

Доказательство. Пусть φ — некоторый треугольный автоморфизм алгебры K. Он представим в виде произведения внутреннего и диагонального автоморфизмов, так как теорема 1, а верна для подгруппы треугольных автоморфизмов. Поэтому можно считать, что φ — диагональный автоморфизм. Итак,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

где α — автоморфизм алгебры L, β — автоморфизм алгебры M и изоморфизм L-L-бимодулей $M \to {}_{\alpha}M_{\alpha}$.

Так как $e_1, \ldots, e_n$ — полная ортогональная система центральных идемпотентов кольца L, то система $\alpha(e_1), \ldots, \alpha(e_n)$ обладает такими же свойствами. Для каждого i запишем

$$\alpha(e_i) = f_1^{(i)} + f_2^{(i)} + \ldots + f_n^{(i)}, \tag{25}$$

где $f_k^{(i)} \in R_k$, $k = 1, \ldots, n$. Элементы $f_k^{(1)}, f_k^{(2)} \ldots, f_k^{(n)}$ образуют полную ортогональную систему центральных идемпотентов кольца R_k.

Существуют включения

$$M \supset M^2 \supset \ldots \supset M^{n-1} \supset M^n = 0,$$

причем $M^{n-1} = M_{1n}$. Поэтому верно равенство $\varphi M_{1n} = M_{1n}$. Из равенства $e_1 K e_n = M_{1n}$ вытекают равенства

$$\varphi(e_1 K e_n) = \alpha(e_1) K \alpha(e_n) = \varphi M_{1n} = M_{1n} = R.$$

Далее можно записать равенства

$$\alpha(e_1) K \alpha(e_n) = \alpha(e_1)(L \oplus M)\alpha(e_n) = f_1^{(1)} M f_n^{(n)}.$$

Таким образом, $f_1^{(1)} M f_n^{(n)} = R$. Следовательно, $f_1^{(1)} = 1$ (т. е. e_1), $f_n^{(n)} = 1$ (т. е. e_n) и

$$f_1^{(2)} = \ldots = f_1^{(n)} = 0, \quad f_n^{(1)} = \ldots = f_n^{(n-1)} = 0.$$

Индукцией по n покажем, что $\alpha(e_i) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Это уже доказано для $n = 2$. Пусть $n \geqslant 3$. Представим кольцо K в виде кольца блочных треугольных матриц порядка 2:

$$K = \begin{pmatrix} S & N \\ 0 & R_n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad S = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \ldots & M_{1,n-1} \\ 0 & R_2 & \ldots & M_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & R_{n-1} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} M_{1n} \\ M_{2n} \\ \ldots \\ M_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

Проверим, что $\varphi S = S$, т. е. φ индуцирует автоморфизм кольца S. Во-первых, из равенств (25) вытекает, что

$$\varphi(R_1), \ldots, \varphi(R_{n-1}) \subseteq R_1 \oplus \ldots \oplus R_{n-1}.$$

Пусть M_{ik} — произвольный бимодуль, причем $i < k$ и $k \neq n$. Поскольку элемент $\alpha(e_k)$ имеет нулевую компоненту в R_n, то последний столбец всех матриц из $\alpha(e_i) M \alpha(e_k)$ состоит из нулей. Поэтому $\varphi(M_{ik}) \subseteq S$ и $\varphi(S) \subseteq S$. Аналогично получаем $\varphi^{-1}(S) \subseteq S$.

Пусть

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

— матрицы автоморфизмов φ и φ^{-1} соответственно относительно разложения $K = L_1 \oplus N$, где $L_1 = S \oplus R_n$. Тогда $\alpha_1\alpha_2 = 1 = \alpha_2\alpha_1$, т. е. $\alpha_1 = \varphi|_S$ — автоморфизм алгебры S. По предположению индукции имеем $f_2^{(2)} = \ldots = f_{n-1}^{(n-1)} = 1$, а все «остальные» $f_i^{(j)}$ равны нулю. Доказано, что

$$\alpha(e_1) = e_1, \ldots, \alpha(e_n) = e_n.$$

Вернемся к исходному представлению кольца K; а именно к записи $K = L \oplus M$. Возьмем произвольный индекс i и элемент $x \in R_i$. Тогда

$$x = xe_i, \quad \varphi(x) = \varphi(x)\varphi(e_i) = \varphi(x)e_i \in L \cap Ke_i = R_i.$$

Поэтому $\alpha R_i = R_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Обозначим через α_i ограничение α на R_i $(i = 1, \dots, n)$. Тогда α_i — автоморфизм кольца R_i. Также имеем равенства

$$\beta M_{ij} = \beta(e_i M e_j) = \alpha(e_i) M \alpha(e_j) = e_i M e_j = M_{ij}.$$

Обозначим через β_{ij} сужение $\beta|_{M_{ij}}$. Так как $\beta_{ij}(xyz) = \alpha_i(x)\beta(y)\alpha_j(z)$ для любых $x \in R_i$, $z \in R_j$, $y \in M_{ij}$, то β_{ij} — изоморфизм L-L-бимодулей M_{ij} и ${}_{\alpha_i}(M_{ij})_{\alpha_j}$. В таком случае $\alpha_i \alpha_j^{-1}$ — внутренний автоморфизм алгебры R [13, Part 2, Proposition 5.2]. Для каждого $i = 1, \dots, n$ положим $\mu_i = \alpha_i \alpha_1^{-1}$. Тогда

$$\alpha_i = \mu_i \alpha_1, \quad \alpha = (\mu_1, \dots, \mu_n)(\alpha_1, \dots, \alpha_1),$$

где $\mu_1, \dots, \mu_n$ — внутренние автоморфизмы кольца R. Более кратко, $\alpha = \mu\gamma$, где μ — внутренний автоморфизм и γ — кольцевой автоморфизм кольца L.

Автоморфизмы μ и γ индуцируют внутренний автоморфизм и кольцевой автоморфизм кольца K. Сохраним за ними обозначения μ и γ соответственно. Положим $\zeta = (\mu\gamma)^{-1}\varphi$ и покажем, что ζ — внутренний автоморфизм. Его матрица относительно разложения $K = L \oplus M$ имеет вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix},$$

где ρ — автоморфизм алгебры M и автоморфизм L-L-бимодуля M. Положим $\rho_{ij} = \rho|_{M_{ij}}$ для всех i, j с условием $i < j$. Тогда ρ_{ij} — автоморфизм R-R-бимодуля M_{ij}, т. е. ρ_{ij} — автоморфизм R-R-бимодуля R, поскольку

$$\rho M_{ij} = \rho(e_i M e_j) = e_i M e_j = M_{ij}.$$

Следовательно, ρ_{ij} действует на M_{ij} как умножение на некоторый обратимый центральный элемент c_{ij} кольца R.

Итак, автоморфизм ζ определяет систему обратимых центральных элементов c_{ij}, $(i, j = 1, \dots, n,\ i < j)$. При этом верны равенства $c_{ij} \cdot c_{jk} = c_{ik}$ для всех $i, j, k = 1, \dots, n$ таких, что $i < j < k$. Чтобы убедиться в том, что ζ — внутренний автоморфизм, можно использовать рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства предложения 2.

В итоге мы получили равенство $\varphi = \mu\gamma\zeta$, в котором μ, ζ — внутренние автоморфизмы и γ — кольцевой автоморфизм. Переформулируя, мы получим равенство $\varphi = \mu\zeta'\gamma$, где $\zeta' = \gamma\zeta\gamma^{-1}$ — внутренний автоморфизм. Итак, автоморфизм φ равен произведению внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма, что и требовалось. $\square$

Из доказанной теоремы, предложения 1 и леммы 1 непосредственно вытекают следствия 13 и 14.

Следствие 13. *Любой автоморфизм алгебры $T(n, R)$ является произведением внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма в каждом из следующих случаев:*

1. R — *сильно неразложимая алгебра;*
2. R — *полупервичная или нормальная алгебра* [20].

Следствие 14 (см. [21])**.** *Если R — коммутативное кольцо, то все автоморфизмы R-алгебры $T(n, R)$ являются внутренними.*

10. Группа $\operatorname{Aut} K$, где $K = M(n, R)$. Как и в предыдущем разделе, R — алгебра над коммутативным кольцом T. Приведем некоторые замечания об автоморфизмах T-алгебры $K = M(n, R)$.

В предыдущих разделах использовалась техника, основанная на расщепляющихся расширениях. Однако она не применима к алгебре $M(n, R)$. Один из возможных подходов к изучению алгебры $\operatorname{Aut} K$ основан на связи этой группы с группой Пикара кольца R. Такой подход используется в [28] для сеперабельных алгебр и в [18] для T-алгебры $M(n, T)$.

Группа Пикара $\operatorname{Pic} S$ T-алгебры S определяется как группа классов $[P]$ изоморфных обратимых S-S-бимодулей P с операцией $[P] \cdot [Q] = [P \otimes_S Q]$; см. [13].

Как обычно, мы называем конечно порожденные проективные образующие модули *прообразующими.* Прямая сумма n копий модуля A обозначается через A^n. Мы используем следующий факт [13, Part 2, Proposition 5.2]. Пусть A — R-R-бимодуль и существует изоморфизм $A \cong R$ левых R-модулей. Тогда для некоторого $\alpha \in \operatorname{Aut} R$ существует изоморфизм R-R-бимодулей $A \cong {}_1R_\alpha$.

Приведем один известный результат [13, Part 2, Proposition 5.3].

Предложение 5. *Пусть Q — левый прообразующий R-модуль и кольцо эндоморфизмов $S = \operatorname{End}_R Q$ рассматривается как T-алгебра. Тогда имеет место точная последовательность групп*

$$1 \to \operatorname{In}(\operatorname{Aut}_T S) \to \operatorname{Aut}_T S \xrightarrow{\eta_Q} \operatorname{Pic} R,$$

где $\operatorname{Im} \eta_Q = \{[P] \in \operatorname{Pic} R \mid P \otimes_R Q \cong Q$ *как левые* R-*модули*$\}$.

Применим предложение 5 к алгебре $K = M(n, R)$. Возьмем R^n в качестве модуля Q. Тогда можно отождествить алгебру S с K. Далее, если $[P] \in \operatorname{Pic} R$, то изоморфизм левых R-модулей $P \otimes_R Q \cong Q$ существует в точности тогда, когда левые R-модули P^n и R^n изоморфны. Можно записать следующий результат.

Предложение 6. *Существует точная последовательность групп*

$$1 \to \operatorname{In}(\operatorname{Aut} K) \to \operatorname{Aut} K \xrightarrow{\eta} \operatorname{Pic} R, \tag{1}$$

где $\operatorname{Im} \eta = \{[P] \in \operatorname{Pic} R \mid P^n \cong R^n$ *как левые* R-*модули*$\}$.

Гомоморфизм η является композицией гомоморфизмов

$$\operatorname{Aut} K \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Pic} K \xrightarrow{\theta} \operatorname{Pic} R.$$

Здесь $\zeta\colon \varphi \to [{}_1K_\varphi]$; кроме того, θ — канонический изоморфизм, который существует в силу того, что категории K-mod и R-mod эквивалентны. Более точно. Отождествим R^n с модулем вектор-строк длины n и обозначим R-K-бимодуль R^n через M. Также обозначим K-R-бимодуль вектор-столбцов R^n через N. Тогда

$$\theta\colon [Q] \to [M \otimes_K Q \otimes_K N], \quad \theta^{-1}\colon [P] \to [N \otimes_R P \otimes_R M].$$

Таким образом, имеем

$$\eta\colon \varphi \to [M \otimes_K {}_1K_\varphi \otimes_K N] = [M_\varphi \otimes_K N].$$

Предложение 7. *Следующие два утверждения эквивалентны*:

(i) *каждый автоморфизм алгебры $K = M(n, R)$ является произведением внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма*;

(ii) *если $[P] \in \operatorname{Pic} R$ и левые R-модули P^n и R^n изоморфны, то левые R-модули P и R изоморфны.*

Доказательство. (i) ⇒ (ii). Пусть $[P] \in \operatorname{Pic} R$ и левые R-модули P^n и R^n изоморфны. Согласно предложению 6 $[P] \in \operatorname{Im} \eta$. Выберем $\varphi \in \operatorname{Aut} K$, для которого $\eta(\varphi) = [P]$. На основании (i) имеем $\varphi = \mu\psi$, где μ — внутренний автоморфизм и ψ — кольцевой автоморфизм. Поэтому $\eta(\varphi) = \eta(\psi) = [P]$. Пусть ψ определяется автоморфизмом $\alpha \in \operatorname{Aut} R$. Тогда справедливы изоморфизмы

$$P \cong M_\psi \otimes_K N \cong {}_1R_\alpha.$$

(ii) ⇒ (i). Если φ — произвольный автоморфизм алгебры K, то $\eta(\varphi) = [P] \in \operatorname{Pic} R$, $P^n \cong R^n$ как левые R-модули.

Согласно (ii) существует изоморфизм ${}_RP \cong {}_RR$. Следовательно, ${}_1P_1 \cong {}_1P_\alpha$ для какого-то $\alpha \in \operatorname{Aut} R$. Также имеем следующие равенства в группе $\operatorname{Pic} K$:

$$[N \otimes_R {}_1R_R \otimes_R M] = [N_\alpha \otimes_R M] = [{}_1K_{\overline{\alpha}}].$$

Теперь можно записать такие равенства:

$$\begin{aligned}\varphi = \eta^{-1}([P]) = \eta^{-1}([{}_1R_\alpha]) &= \\ = \zeta^{-1}\theta^{-1}([{}_1R_\alpha]) &= \\ = \zeta^{-1}([N \otimes_R {}_1R_\alpha \otimes_R M]) &= \\ = \zeta^{-1}([{}_1K_{\overline{\alpha}}]).&\end{aligned}$$

Иными словами, $\zeta(\varphi) = [{}_1K_{\overline{\alpha}}] = \zeta(\overline{\alpha})$, где $\overline{\alpha}$ — автоморфизм, индуцированный α. Значит, $\varphi = \mu\overline{\alpha}$, где μ — некоторый внутренний автоморфизм алгебры K. □

Следствие 15. *Пусть кольцо R не имеет нетривиальных идемпотентов и всякий прообразующий левый R-модуль обладает свойством изоморфизма прямых разложений. Тогда любой автоморфизм алгебры $M(n,R)$ равен произведению внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма.*

Доказательство. Пусть $[P] \in \operatorname{Pic} R$ и левые R-модули P^n, R^n изоморфны. Из изоморфизма $\operatorname{End}_R P \cong R$ вытекает, что ${}_RP$ — неразложимый модуль. Поэтому ${}_RP \cong {}_RR$ и можно использовать предложение 7. □

Следствие 16. *Если R — локальное кольцо или область главных левых идеалов, то любой автоморфизм алгебры $M(n,R)$ равен произведению внутреннего автоморфизма и кольцевого автоморфизма.*

Доказательство. Пусть левые R-модули P^n и R^n изоморфны. Тогда $\operatorname{End}_R P \cong R$. Если кольцо R локально, то сразу получаем ${}_RP \cong {}_RR$. Если R — область главных левых идеалов, то модуль ${}_RP$ изоморфен прямой сумме левых идеалов кольца R. Поэтому ${}_RP \cong {}_RR$ и можно использовать предложение 7. □

Замечание 2. В условиях следствий 15 и 16 имеет место изоморфизм $\operatorname{Out} K \cong \operatorname{Out} R$.

Замечание 3. Можно доказать следствие 15 без использования группы Пикара. При этом можно использовать рассуждения, похожие на рассуждения из доказательства теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* Кольца формальных матриц и их изоморфизмы// Сиб. мат. ж. — 2015. — *56*, № 6. — С. 1199–1214.
2. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* О некоторых классах колец формальных матриц// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 3. — С. 3–14.
3. *Крылов П. А.* Афинные группы модулей и их автоморфизмы// Алгебра и логика. — 2001. — *40*, № 1. — С. 60–82.
4. *Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д.* Автоморфизмы алгебр формальных матриц// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 5. — С. 1116–1127.
5. *Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д.* Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2018. — № 53. — С. 16–21.
6. *Левчук В. М.* Автоморфизмы некоторых нильпотентных матричных групп и колец// Докл. АН СССР. — 1975. — *222*, № 6. — С. 1279–1282.
7. *Тапкин Д. Т.* Кольца формальных матриц и обобщение алгебры инцидентности// Чебышев. сб. — 2015. — *16*, № 3. — С. 442–449.
8. *Тапкин Д. Т.* Изоморфизмы колец инцидентности формальных матриц// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 12. — С. 84–91.
9. *Тапкин Д. Т.* Изоморфизмы колец формальных матриц с нулевыми идеалами следа// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 3. — С. 659–675.
10. *Ánh P. N., van Wyk L.* Automorphism groups of generalized triangular matrix rings// Lin. Algebra Appl. — 2011. — *434*, № 4. — P. 1018–1026.
11. *Ánh P. N., van Wyk L.* Isomorphisms between strongly triangular matrix rings// Lin. Algebra Appl. — 2013. — *438*, № 11. — P. 4374–4381.
12. *Barker G. P.* Automorphism groups of algebras of triangular matrices// Lin. Algebra Appl. — 1989. — *121*, № C. — P. 207–215.
13. *Bass H.* Algebraic K-Theory. — New York, 1968.
14. *Birkenmeier G. F., Heatherly H. E., Kim J. Y., Park J. K.* Triangular Matrix Representations// J. Algebra. — 2000. — *230*, № 2. — P. 558–595.
15. *Boboc C., Dăscălescu S., van Wyk L.* Isomorphisms between Morita context rings// Lin. Multilin. Algebra. — 2012. — *60*, № 5. — P. 545–563.
16. *Faith C. C.* Algebra: Rings, Modules and Categories. — Berlin: Springer-Verlag, 1973.

17. *Haefner J., HolcombT.* The Picard group of a structural matrix algebra// Lin. Algebra Appl. — 2000. — *304*, № 1-3. — P. 69–101.
18. *Isaacs I. M.* Automorphisms of matrix algebras over commutative rings// Lin. Algebra Appl. — 1980. — *31C*. — P. 215–231.
19. *Jøndrup S.* The group of automorphisms of certain subalgebras of matrix algebras// J. Algebra. — 1991. — *141*. — P. 106–114.
20. *Jøndrup S.* Automorphisms and derivations of upper triangular matrix rings// Lin. Algebra Appl. — 1995. — *221C*. — P. 205–218.
21. *Kezlan T. P.* A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings// Lin. Algebra Appl. — 1990. — *135C*. — P. 181–184.
22. *Khazal R., Dăscălescu S., van Wyk L.* Isomorphism of generalized triangular matrix-rings and recovery of tiles// Int. J. Math. Math. Sci. — 2003. — *2003*, № 9. — P. 533–538.
23. *Koppinen M.* Three automorphism theorems for triangular matrix algebras// Lin. Algebra Appl. — 1996. — *245*. — P. 295–304.
24. *Krylov P., Tuganbaev A.* Formal Matrices. — Berlin: Springer-Verlag, 2017.
25. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Automorphism groups of formal matrix rings// J. Math. Sci. — 2021. — *258*, № 2. — P. 222–249.
26. *Li Y., Wei F.* Semi-centralizing maps of generalized matrix algebras// Lin. Algebra Appl. — 2012. — *436*, № 5. — P. 1122–1153.
27. *Li Y., Wei F., Fošner A.* k-commuting mappings of generalized matrix algebras// Period. Math. Hungar. — 2019. — *79*, № 1. — P. 50–77.
28. *Rosenberg A., Zelinsky D.* Automorphisms of separable algebras// Pac. J. Math. — 1961. — *11*, № 3. — P. 1109–1117.
29. *Xiao Z., Wei F.* Commuting mappings of generalized matrix algebras// Lin. Algebra Appl. — 2010. — *433*, № 11-12. — P. 2178–2197.
30. *Xiao Z., Wei F.* Commuting traces and Lie isomorphisms on generalized matrix algebras// Operators Matr. — 2014. — *8*, № 3. — P. 821–847.

Крылов Петр Андреевич
Национальный исследовательский Томский государственный университет
E-mail: krylov@math.tsu.ru

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва
E-mail: tuganbaev@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 39–43
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-39-43

УДК 512.552

О ЗАДАЧАХ РЕАЛИЗАЦИИ И ИЗОМОРФИЗМА ДЛЯ КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

© 2023 г. **П. А. КРЫЛОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Для колец формальных матриц над данным кольцом рассматриваются задачи реализации и изоморфизма. Важную роль при этом играют главные матрицы множителей таких колец.

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, главная матрица множителей.

ON REALIZATION AND ISOMORPHISM PROBLEMS FOR FORMAL MATRIX RINGS

© 2023 **P. A. KRYLOV, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. We consider realization and isomorphism problems for formal matrix rings over a given ring. Principal multiplier matrices of such rings play an important role in this case.

Keywords and phrases: formal matrix ring, principal multiplier matrix.

AMS Subject Classification: 16R99, 16D10

1. Введение. Кольца формальных (или обобщенных) матриц над данным кольцом привлекают большое внимание специалистов. Это естественно, поскольку такие кольца регулярно появляются в теории колец и модулей. В частности, они играют важную роль при изучении ряда классов артиновых колец и алгебр (см. [8, 9]). Они также служат источником разнообразных примеров для общей теории колец и модулей. Ряд аспектов теории колец формальных матриц представлен в книге [11].

Есть один интересный вид колец формальных матриц. В случае 2×2 матриц они появились в [3]; в случае $n \times n$ матриц они появились в [13]. Мы имеем в виду кольца формальных матриц над данным кольцом R (или говорят — «со значениями в R»). Это означает, что конкретное кольцо формальных матриц содержит на всех позициях одно и то же кольцо R. Класс таких колец является непосредственным расширением обычного кольца $n \times n$ матриц $M(n, R)$. Однако свойства колец формальных матриц над кольцом R могут сильно отличаться от свойств кольца $M(n, R)$. Глава 3 книги [11] содержит изложение некоторых вопросов о кольцах формальных матриц над кольцом R, а в начале этой главы сформулированы три задачи о кольцах формальных матриц. Затем в главах 18—20 эти задачи решаются для некоторых видов колец формальных матриц над кольцом R. Данная статья посвящена двум из трех указанных задач. Именно, задаче реализации I и проблеме изоморфизма III. Эти задачи рассматриваются в [1, 2, 6, 7, 10].

В данной статье мы рассматриваем только ассоциативные кольца с ненулевой единицей. Если R — кольцо, то $M(n, R)$ — обычное кольцо всех $n \times n$ матриц со значениями в кольце R. Первичный радикал произвольного кольца S обозначается через $P(S)$.

Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00052).

2. Кольца формальных матриц над данным кольцом. Кратко напомним определение кольца формальных матриц. Зафиксируем натуральное число $n \geqslant 2$. Пусть $R_1, \dots, R_n$ — кольца и M_{ij} — R_i-R_j-бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \dots, n$. Предположим, что для любых индексов $i, j, k = 1, \dots, n$ задан R_i-R_k-бимодульный гомоморфизм $M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$. Обозначим через K множество всех $n \times n$ матриц со значениями в бимодулях M_{ij}. Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения K образует кольцо. Матрицы умножаются посредством применения упомянутых выше бимодульных гомоморфизмов. Кольцо K называется *кольцом формальных* (или *обобщенных*) *матриц* порядка n. Его можно записать в следующем виде:

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix}.$$

Пусть R — некоторое кольцо. Если K — такое кольцо формальных матриц, что $M_{ij} = R$ для всех i и j, то его называют *кольцом формальных матриц над кольцом* R или *кольцом формальных матриц со значениями в кольце* R. Такие кольца можно определить непосредственно. Именно, пусть $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — некоторое множество центральных элементов кольца R, удовлетворяющих тождествам

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ik\ell} = s_{ij\ell} \cdot s_{jk\ell} \tag{1}$$

для всех индексов $i, j, k, \ell = 1, \dots, n$. Для произвольных $n \times n$ матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ со значениями в R определим новое умножение, полагая

$$AB = C = (c_{ij}), \quad \text{где} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj} a_{ik} b_{kj}.$$

В результате получаем кольцо, которое обозначим через K или $M(n, R, \Sigma)$, где Σ — множество всех s_{ijk}. Множество Σ называется *системой множителей*, а его элементы называются *множителями* кольца K. Если все s_{ijk} равны 1, то получаем обычное кольцо матриц $M(n, R)$.

Пусть τ — подстановка степени n. Если $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ — некоторая система множителей, то положим $t_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$. Тогда $\{t_{ijk}\}$ — тоже система множителей, поскольку она удовлетворяет тождествам (1). Обозначим ее через $\tau\Sigma$. Следовательно, существует кольцо формальных матриц $M(n, R, \tau\Sigma)$. Кольца $M(n, R, \Sigma)$ и $M(n, R, \tau\Sigma)$ изоморфны при соответствии $A \to \tau A$, где $A = (a_{ij})$ и $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$.

С данным кольцом $M(n, R, \Sigma)$ можно ассоциировать несколько матриц. Положим $S = (s_{iji})$ и $S_k = (s_{ikj})$ для каждого $k = 1, \dots, n$. Эти матрицы называются *матрицами множителей* кольца $M(n, R, \Sigma)$. Матрица S является симметрической. Следуя [10], будем называть ее *главной матрицей множителей*. В [10] также используются матрицы (s_{ijk}) и (s_{kij}) для $k = 1, \dots, n$. Понятно, что соответствующими матрицами множителей для кольца $M(n, R, \tau\Sigma)$ будут матрицы τS и τS_k.

До конца статьи считаем, что K — кольцо формальных матриц над данным кольцом R. Кроме того, за исключением теоремы 3, каждый множитель s_{ijk} равен 0 или 1. Таким образом, все матрицы множителей такого кольца суть (01)-матрицы. Для краткости будем называть кольцо K (01)-кольцом формальных матриц.

Из тождеств (1) нетрудно вывести следующий результат.

Лемма 1. *Для множителей s_{iji}, s_{jkj}, s_{kik}, где $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$, некоторого (01)-кольца формальных матриц имеет место одна из следующих возможностей:*

1. *все три элемента являются единицами;*
2. *какие-то два из этих трех элементов являются нулями, а третий элемент — единица;*
3. *все три элемента являются нулями.*

Полезно ввести понятие абстрактной матрицы множителей. Пусть $T = (t_{ij})$ — симметрическая (01)-матрица размера $n \times n$ над кольцом R, у которой главная диагональ состоит из единиц и для любых трех элементов t_{ij}, t_{jk}, t_{ki} с попарно различными индексами верно одно из утверждений 1—1 леммы 1. Назовем такую матрицу T *главной матрицей множителей.*

Лемма 2 (см. [4], [5, раздел 12]). *Для любой главной $n \times n$ матрицы множителей T существует такая подстановка σ степени n, что матрица σT имеет канонический вид.*

Под *каноническим видом* подразумевается, что матрица σT может быть представлена в таком блочном виде, что на главной диагонали стоят блоки из единиц, а на всех остальных позициях стоят нули.

В ситуации леммы 2 будем говорить, что матрица T *приведена к каноническому виду.* Ввиду леммы 1 получается, что главная матрица множителей всякого (01)-кольца формальных матриц приводима к каноническому виду.

Замечание 1. Уточним, что канонический вид, конечно, определяется с точностью до перестановки блоков на главной диагонали и соответствующей перестановки оставшихся блоков.

3. Задача реализации для (01)-колец формальных матриц. О задаче реализации написано в разделе 1. Она направлена на описание матриц множителей как абстрактных матриц.

Теорема 1. *Пусть T — некоторая главная матрица множителей. Существует (01)-кольцо формальных матриц, у которого главная матрица множителей совпадает с T.*

Доказательство. На основании леммы 2 считаем, что матрица T имеет канонический вид. Для каждых индексов $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ определим элемент s_{ijk} кольца R, полагая $s_{ijk} = 1$, если одна из пар (i, j) или (j, k) занимает позицию в каком-либо из блоков на главной диагонали матрицы T. В противном случае считаем, что $s_{ijk} = 0$. Множество Σ всех таких s_{ijk} удовлетворяет тождествам (1). Поэтому кольцо $M(n, R, \Sigma)$ существует. Матрица T является главной матрицей множителей кольца $M(n, R, \Sigma)$. $\square$

Множители кольца $M(n, R, \Sigma)$, построенного в доказательстве теоремы 1, удовлетворяют следующему условию:

Условие 1. $s_{ijk} = 0$ для любых таких попарно различных индексов i, j, k, что $s_{iji} = 0 = s_{jkj}$.

Будем говорить, что некоторое (01)-кольцо формальных матриц является кольцом *вида K_0*, если его множители удовлетворяют приведенному выше условию 1. По главной матрице множителей такого кольца можно однозначно восстановить все остальные матрицы множителей.

Отметим, что работы [4, 5, 12] содержат различный материал о группах автоморфизмов (01)-колец формальных матриц.

4. Проблема изоморфизма для колец формальных матриц. В [11, раздел 16] записана проблема изоморфизма III для колец формальных матриц:

Проблема 1. Когда две системы множителей определяют изоморфные кольца формальных матриц?

Рассмотрим эту проблему для (01)-колец формальных матриц.

Будем говорить, что некоторое кольцо R *удовлетворяет (n, m)-условию*, если для любых натуральных чисел n и m из изоморфизма колец $M(n, R)$ и $M(m, R)$ вытекает равенство $m = n$. Например, (n, m)-условие выполняется, когда кольцо R коммутативно, или локально, или является областью главных левых (правых) идеалов.

Кольцо S называется *неразложимым*, если 0 и 1 — единственные его центральные идемпотенты.

Теорема 2. *Предположим, что фактор-кольцо $R/P(R)$ неразложимо и удовлетворяет (n, m)-условию, а K_1 и K_2 — (01)-кольца формальных матриц с главными матрицами множителей S и T соответственно. Верны следующие утверждения.*

1. *Если кольца K_1 и K_2 изоморфны, то матрицы S и T обладают одинаковыми каноническими видами.*

2. *Если K_1 и K_2 — (01)-кольца формальных матриц вида K_0 и канонические виды матриц S и T совпадают, то кольца K_1 и K_2 изоморфны.*

Доказательство.
1. Ввиду леммы 2 можно считать, что матрицы S и T представлены в каноническом виде. Допустим, что $K_1 \cong K_2$. Тогда существует некоторый изоморфизм колец
$$\gamma\colon K_1/P(K_1) \to K_2/P(K_2).$$
Строение первичных радикалов $P(K_1)$ и $P(K_2)$ известно (см. [11, следствие 17.1] и абзац после него). Нам также дано блочное строение матриц S и T. Используя эту информацию, мы можем записать равенства
$$K_1/P(K_1) = P_1 \times \ldots \times P_k \quad \text{и} \quad K_2/P(K_2) = Q_1 \times \ldots \times Q_\ell,$$
где k (соотв., ℓ) — число блоков на главной диагонали матрицы S (соотв., T). При этом все P_i и Q_j — полные кольца матриц некоторых порядков. Так как кольцо $R/P(R)$ неразложимо, то все кольца $P_i/P(P_i)$ и $Q_j/P(Q_j)$ неразложимы.

В этом месте заметим, что верен аналог леммы 9.6 из [5] (или леммы 6.1 из [12]) об автоморфизмах прямых произведений неразложимых колец для изоморфизмов между прямыми произведениями неразложимых колец. Поэтому $k = \ell$ и найдется такая подстановка τ степени k, что ограничение γ на P_i является изоморфизмом $P_i \to Q_{\tau(i)}$, $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, канонические виды матриц S и T совпадают.
2. Пусть $\{s_{ijk}\}$ (соотв., $\{t_{ijk}\}$) — множество всех множителей кольца K_1 (соотв., кольца K_2). Как уже отмечалось, множители вида s_{iji}, т. е. элементы главной матрицы множителей S, определяют все остальные множители s_{ijk}; то же самое верно для множителей кольца K_2. Таким образом, $s_{ijk} = t_{ijk}$ для всех i, j, k. Поэтому можно записать равенство $K_1 = K_2$. □

Следствие 1. *Факторкольца $K_1/P(K_1)$ и $K_2/P(K_2)$ изоморфны в точности тогда, когда матрицы S и T имеют один и тот же канонический вид.*

Введем еще один класс колец формальных матриц над данным кольцом и докажем для таких колец одну теорему, касающуюся проблемы изоморфизма.

Зафиксируем некоторый центральный элемент s кольца R со свойством $s^2 \neq 1$, $s^2 \neq s$. Кроме того, пусть K — такое кольцо формальных матриц над R, что каждый его множитель равен 1 или s. Обозначим введенное кольцо через $M(n, R, s)$ и договоримся называть его $(s1)$-*кольцом формальных матриц*. Кольца $M(n, R, s)$ изучаются в разделах 18—19 книги [11]. Известны связи колец $M(n, R, s)$ с кольцами скрещенных матриц (см. [9]). В [10, лемма 4.7] доказано, что главная матрица множителей кольца $M(n, R, s)$ определяет все другие матрицы множителей. Для (01)-колец формальных матриц подобное утверждение, по-видимому, не верно.

Пусть S — главная матрица множителей некоторого кольца $M(n, R, s)$. Согласно [11, лемма 18.2] найдется такая подстановка τ степени n, что матрица τS имеет канонический вид. Это означает, что матрица τS представима в таком блочном виде, что на главной диагонали расположены блоки, состоящие из единиц, а на всех остальных местах стоит элемент s.

Теорема 3. *Пусть факторкольцо $R/P(R)$ неразложимо и удовлетворяет (n, m)-условию. Для $(s1)$-колец формальных матриц K_1 и K_2 над R, где $s \in P(R)$, верно следующее утверждение: Кольца K_1 и K_2 изоморфны в точности тогда, когда канонические виды главных матриц множителей для колец K_1 и K_2 совпадают.*

Доказательство. Считаем, что главные матрицы множителей для колец K_1 и K_2 уже имеют канонический вид.

Необходимость. Если учесть, что $s \in P(R)$, то фактически можно повторить доказательство теоремы 2(1).

Достаточность. Главные матрицы множителей для колец K_1 и K_2 однозначно определяют все оставшиеся матрицы, см. [10, лемма 4.7]. Поэтому можно повторить рассуждения из доказательства теоремы 2(2). □

Замечание 2. Для артинова слева кольца R результат, аналогичный теореме 3, доказан в [10, теорема 4.12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* Кольца формальных матриц и их изоморфизмы// Сиб. мат. ж. — 2015. — *56*, № 6. — С. 1199–1214.
2. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* О некоторых классах колец формальных матриц// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 3. — С. 3–14.
3. *Крылов П. А.* Об изоморфизме колец обобщённых матриц// Алгебра и логика. — 2008. — *47*, № 4. — С. 456–463.
4. *Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д.* Автоморфизмы алгебр формальных матриц// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 5. — С. 1116–1127.
5. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Группы автоморфизмов колец формальных матриц// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *164*. — С. 96–124.
6. *Тапкин Д. Т.* Кольца формальных матриц и обобщение алгебры инцидентности// Чебышев. сб. — 2015. — *16*, № 3. — С. 442–449.
7. *Тапкин Д. Т.* Изоморфизмы колец инцидентности формальных матриц// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 12. — С. 84–91.
8. *Auslander M., Reiten I., Smalø S. O.* Representation Theory of Artin Algebras. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
9. *Baba Y., Oshiro K.* Classical Artinian Rings and Related Topics. — New Jersey–London–Singapore: World Scientific, 2009.
10. *Chen W., Deng G., Su H.* On the binary system of factors of formal matrix rings// Czech. Math. J. — 2020. — *70*. — P. 693–709.
11. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Formal Matrices. — Berlin: Springer-Verlag, 2017.
12. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Automorphisms of formal matrix rings/ `arXiv:arXiv:2204.13332 [math.RA]`.
13. *Tang G., Zhou Y.* A class of formal matrix rings// Lin. Algebra Appl. — 2013. — *438*, № 12. — P. 4672–4688.

Крылов Петр Андреевич
Национальный исследовательский Томский государственный университет
E-mail: `krylov@math.tsu.ru`

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `tuganbaev@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 44–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-44-49

УДК 512.541

ЦЕНТРАЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫЕ ПОЛУКОЛЬЦА

© 2023 г. **О. В. ЛЮБИМЦЕВ, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Полукольцо называется центрально существенным, если для каждого ненулевого элемента x существуют такие ненулевые центральные элементы y, z, что $xy = z$. Мы приводим несколько примеров некоммутативных центрально существенных полуколец и описываем некоторые свойства аддитивно сократимых центрально существенных полуколец.

Ключевые слова: центрально существенное полукольцо, аддитивно сократимое полукольцо.

CENTRALLY ESSENTIAL SEMIRINGS

© 2023 **O. V. LYUBIMTSEV, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. A semiring is said to be centrally essential if, for every nonzero element x, there exist nonzero central elements y and z such that $xy = z$. We give several examples of noncommutative centrally essential semirings and describe some properties of additively cancellative, centrally essential semirings.

Keywords and phrases: centrally essential semiring, additively cancellative semiring.

AMS Subject Classification: 16R99, 16D10

1. Введение. Под *полукольцом* мы понимаем структуру, отличающуюся от ассоциативного кольца, возможно, необратимостью аддитивной операции. Нуль полукольца S мультипликативен по определению: для любого $s \in S$ имеем $0s = s0 = 0$. В нашей работе будут рассматриваться только полукольца с единицей, отличной от нуля. *Центр* полукольца S есть множество $C(S) = \{s \in S : ss' = s's \text{ для всех } s' \in S\}$. Это множество непусто, так как содержит 0 и 1, и является подполукольцом в S. Полукольцо называется *центрально существенным*, если для каждого ненулевого элемента x существуют такие ненулевые центральные элементы y, z, что $xy = z$.

Центрально существенные кольца с ненулевой единицей изучались, например, в работах [1, 10–13]. Каждое центрально существенное полупервичное кольцо с $1 \neq 0$ коммутативно; см. [10, Proposition 3.3]. Если F — поле из двух элементов и Q_8 — группа кватернионов порядка 8, то групповая алгебра FQ_8 является конечным некоммутативным центрально существенным кольцом; см. [10]. В работе [13] построено центрально существенное кольцо R, такое, что факторкольцо $R/J(R)$ по радикалу Джекобсона не является PI-кольцом (в частности, кольцо $R/J(R)$ не коммутативно). Матричные центрально существенные алгебры изучались в [8]. Абелевы группы с центрально существенными кольцами эндоморфизмов рассматривались в работах [7] и [9].

Пример 1. Рассмотрим полугруппу $(M, \cdot)$, заданную таблицей умножения:

Работа О. В. Любимцева выполнена в рамках государственного проекта FSWR-2023-0034. Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00052).

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	a	a	c
b	b	b	b	c
c	c	c	c	c

Для быстрой проверки ассоциативности удобно использовать тест ассоциативности по Лайту; см. [3].

Множество $S = \mathrm{Sub}(M)$ всех подмножеств в M вместе с операциями $A + B = A \cup B$ и $AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$, где $A, B \in S$, образует полукольцо с нулем $\emptyset$ и единицей $1 = \{1_M\}$; см. [4, Example 1.10]. Имеем $|S| = 2^4 = 16$. Заметим, что S свободно от нулевых сумм, т. е. из $A+B = \emptyset$ следует, что $A = B = \emptyset$. Кроме этого, S аддитивно и мультипликативно идемпотентно. Запишем центр $C(S)$:

$$C(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{c\}, \{1, c\}\}.$$

Если $A \in S \setminus C(S)$, то $\emptyset \neq A \cdot \{c\} \in C(S)$. Следовательно, S — некоммутативное центрально существенное полукольцо.

Полукольцо S называется *редуцированным*, если для любых $x, y \in S$ выполняется $x = y$, как только $x^2 + y^2 = xy + yx$; см. [2]. В случае колец это определение дает в точности класс редуцированных колец, т. е. колец без ненулевых нильпотентных элементов. Полукольцо S называется *аддитивно сократимым*, если $x+z = y+z \Rightarrow x = y$ для любых $x, y, z \in S$. Кольцо $D(S)$ называется *кольцом разностей* полукольца S, если S есть подполукольцо в $D(S)$ и каждый элемент $a \in D(S)$ является разностью некоторых элементов $x, y \in S$: $a = x - y$. Класс аддитивно сократимых полуколец содержит все кольца. Кольцо разностей единственно с точностью до изоморфизма над S; подробнее см. [6, Chapter II]. Ненулевой элемент a полукольца R называется *левым делителем нуля*, если выполнено $ab = 0$ для некоторого $0 \neq b \in S$. Так же как в работе [12, Lemma 2.2] можно доказать, что в центрально существенном полукольце односторонние делители нуля являются двусторонними. Другие теоретико-полукольцевые понятия и обозначения могут быть найдены в [4, 6].

В статье изучаются свойства аддитивно сократимых центрально существенных полуколец. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Существует некоммутативное аддитивно сократимое редуцированное центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Аддитивно сократимое редуцированное полукольцо коммутативно тогда и только тогда, когда его кольцо разностей является центрально существенным кольцом.*

2. Аддитивно вычисляемые центрально существенные полукольца. Полукольцо называется *полупервичным*, если оно не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Полукольцо S называется *полувычитаемым*, если для любых $a, b \in S$, $a \neq b$, найдется $x \in S$, такой, что $a+x = b$ или $b + x = a$.

Предложение 1. *Пусть S — аддитивно сократимое полувычитаемое центрально существенное полукольцо с центром C. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *S — полупервичное полукольцо;*
2. *C — полупервичное полукольцо;*
3. *S не имеет ненулевых нильпотентных элементов;*
4. *S — коммутативное полукольцо без ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. Хорошо известно, что полукольцо S вложимо в кольцо разностей $D(S)$ тогда и только тогда, когда S является аддитивно сократимым. Кроме этого, равенство $D(S) = -S \cup S$ выполнено в точности тогда, когда S — полувычитаемое полукольцо; см. [6, Chapter II, Remark 5.12]. Тогда утверждение следует из [11, Proposition 2.8]. ☐

Замечание 1. Пример 1 показывает, что предложение 1 перестает быть верным без предположения аддитивной сократимости и полувычитаемости. В примере 4 (см. ниже) построено некоммутативное центрально существенное полукольцо без делителей нуля, которое аддитивно сократимо, но не является полувычитаемым.

Известно, что всякий идемпотент центрально существенного кольца является центральным; см. [10, Lemma 2.3]. Для полуколец это уже не так (см. пример 1). Идемпотент e полукольца S назовем *дополняемым*, если существует идемпотент $f \in S$, такой что $e + f = 1$.

Предложение 2. *В аддитивно сократимом центрально существенном полукольце S любой дополняемый идемпотент является центральным.*

Доказательство. Пусть $e^2 = e$ и $e + f = 1$ для некоторого $f \in S$. Так как S — аддитивно сократимое полукольцо, то из $e = e + fe$ следует $fe = 0$. Аналогично находим $ef = 0$. Пусть $x \in S$. Тогда $x = ex + fx$ и $xe = exe + fxe$.

Предположим сначала, что $fxe = 0$, т. е. $xe = exe$. Так как $x = xe+xf$, то $ex = exe+exf$. Если $exf \neq 0$, то существуют такие $c, d \in C(S)$, что $(exf)c = d \neq 0$. Так как $d = (exf)c$ — центральный элемент и e — идемпотент, то $ed = d = de$. Тогда

$$0 \neq d = ed = de = (exfc)e = (exc)fe = 0,$$

что приводит к противоречию. Следовательно, $exf = 0$ и $ex = xe = exe$.

Пусть теперь $fxe \neq 0$. Тогда $0 \neq (fxe)c = d$ для некоторых ненулевых $c, d \in C(S)$. В этом случае

$$0 \neq d = de = ed = ef(xec) = 0.$$

Вновь получено противоречие. □

Следствие 1. *Если S — аддитивно сократимое полукольцо, то полукольцо $M_n(S)$ всех матриц и полукольцо $T_n(S)$ верхнетреугольных матриц над S при $n \geqslant 2$ не являются центрально существенными.*

Доказательство. Для единичной матрицы указанных полуколец имеем: $E = E_{11} + \ldots + E_{nn}$, где $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ — матричные единицы. Из [4, Example 4.19] следует, что $M_n(S)$ является аддитивно сократимым полукольцом. Идемпотенты $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ дополняемы и не центральны. Следовательно, полукольца $M_n(S)$ и $T_n(S)$ не являются центрально существенными. □

Как было отмечено выше, аддитивно сократимое полукольцо S, и только оно, вложимо в кольцо разностей $D(S)$, элементы которого имеют вид $x - y$, где $x, y \in S$.

Пример 2. Рассмотрим полукольцо S, порожденное матрицами

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \alpha & c \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha, a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ таковы, что $a_{12} = b_{23} = a$, $b_{12} = a_{23} = c$, $a \neq c$, а остальные компоненты совпадают. Тогда $AB \neq BA$, т. е. S — некоммутативное полукольцо. Непосредственно проверяется, что центр $C(S)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & b \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha, b \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Так как $0 \neq AD \in C(S)$, где $0 \neq A \in S \setminus C(S)$, $0 \neq D \in C(S)$ с $\alpha = 0$, то S — некоммутативное центрально существенное полукольцо. Однако кольцо разностей $D(S) = M_3(\mathbb{Z})$ не является центрально существенным кольцом, так как имеет нецентральные идемпотенты. Более того, в [8] доказано, что любая центрально существенная подалгебра в локальной треугольной матричной алгебре 3×3 коммутативна.

Приведем пример центрально существенного кольца, которое служит кольцом разностей для двух своих собственных полуколец S_1 и S_2, одно из которых является центрально существенным полукольцом, а другое — нет.

Пример 3. Пусть кольцо R состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{1}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел. В работе [8] доказано, что R — некоммутативное центрально существенное кольцо.

Пусть S_1 — полукольцо, порожденное матрицами вида (1) над $\mathbb{Z}^+$ и скалярными матрицами с $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ и нулями на остальных местах. Так как $C(S_1)$ состоит из скалярных матриц, то S_1 не является центрально существенным полукольцом. Заметим, что S_1 — полукольцо без делителей нуля. В тоже время полукольцо S_2 матриц вида (1) над полукольцом $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ является центрально существенным полукольцом.

Лемма 1 (см. [6, Chapter II, Theorem 5.13]). *Центральный элемент полукольца S принадлежит центру $C(D(S))$ его кольца разностей.*

Предложение 3. *Пусть S — центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Если кольцо $D(S)$ не содержит делителей нуля, то полукольцо S — коммутативно.*

Доказательство. Пусть $0 \neq a = x - y \in D(S)$. По условию $0 \neq xc = d$, $0 \neq yf = g$ для некоторых $c, d, f, g \in C(S)$. Тогда

$$a(cf) = (x - y)cf = (xc)f - (yf)c = df - gc.$$

Из леммы 1 следует, что $c, d, f, g \in C(D(S))$ и $ac' \in C(D(S))$, где $c' = cf$. Кроме того, $ac' \neq 0$, поскольку $D(S)$ не содержит делителей нуля. Тогда $D(S)$ — коммутативное кольцо; см. [10, Proposition 3.3]. $\square$

3. Доказательство теоремы 1.

Напомним, что для группы G *верхний центральный ряд* есть цепь подгрупп

$$\{e\} = C_0(G) \subseteq C_1(G) \subseteq \dots,$$

где $C_i(G)/C_{i-1}(G)$ есть центр группы $G/C_{i-1}(G)$, $i \geqslant 1$. *Класс нильпотентности* группы G — наименьшее положительное целое n, такое, что $C_n(G) = G$ (если такое n существует).

Предложение 4 (Сравни [10, Proposition 2.6]). *Пусть G — конечная группа класса нильпотентности $n \leqslant 2$, S — коммутативное полукольцо без делителей нуля и свободное от нулевых сумм. Тогда SG — центрально существенное групповое полукольцо.*

Доказательство. Если $n = 1$, то группа G абелева и SG — центрально существенное групповое полукольцо; см. [10, Lemma 2.2].

Пусть $n = 2$. Так же, как в групповых кольцах (см., например, [14, Part 2]) центр $C(SG)$ есть свободный S-полумодуль с базисом

$$\left\{ \sum_K : K \text{ — класс сопряженных элементов в группе } G \right\}.$$

Достаточно проверить, что

$$SG \sum_{C(G)} \subseteq C(SG),$$

где $C(G)$ — центр группы G. Действительно, если $g, h \in G$, то

$$(gh)^{-1}hg \sum_{C(G)} = \sum_{C(G)},$$

так как $h^{-1}g^{-1}hg \in G' \subseteq C(G)$. $\square$

Приведем пример некоммутативного аддитивно сократимого редуцированного центрально существенного полукольца без делителей нуля.

Пример 4. Пусть Q_8 — группа кватернионов, т. е. группа с двумя образующими a, b и определяющими соотношениями $a^4 = 1$, $a^2 = b^2$ и $aba^{-1} = b^{-1}$; см., например, [5, Section 4.4]. Имеем:

$$Q_8 = \{e, a, a^2, b, ab, a^3, a^2b, a^3b\},$$

с классами сопряженности

$$K_e = \{e\}, \quad K_{a^2} = \{a^2\}, \quad K_a = \{a, a^3\}, \quad K_b = \{b, a^2b\}, \quad K_{ab} = \{ab, a^3b\}$$

и центром $C(Q_8) = \{e, a^2\}$. Рассмотрим групповое полукольцо SQ_8, где $S = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. Так как Q_8 — группа класса нильпотентности 2, то по предложению 4 SQ_8 — центрально существенное групповое полукольцо. Проиллюстрируем вышесказанное:

$$a \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_a}, \quad b \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_b}, \quad ab \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_{ab}}, \quad a^3 \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_a}, \quad a^2b \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_b}, \quad a^3b \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_{ab}}.$$

Групповое кольцо разностей $\mathbb{Q}Q_8$ является редуцированным кольцом; см. [15, Theorem 3.5]. Тогда SQ_8 — редуцированное полукольцо. Действительно, если $x^2 + y^2 = xy + yx$ и $x \neq y$, то $x^2 + y^2 - xy - yx = (x - y)^2 = 0$ в кольце $\mathbb{Q}Q_8$, что не так. Таким образом, SQ_8 — некоммутативное редуцированное центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Заметим, что $\mathbb{Q}Q_8$ не является центрально существенным кольцом, поскольку центрально существенные редуцированные кольца коммутативны.

3.1. Окончание доказательства теоремы 1. Существование некоммутативного аддитивно сократимого редуцированного центрально существенного полукольца без делителей нуля следует из примера 4.

Если полукольцо S коммутативно, то $D(S)$ — коммутативное кольцо, т. е. является центрально существенным. Обратно, пусть $D(S)$ — центрально существенное кольцо. Так как S — редуцированное полукольцо, то $D(S)$ — редуцированное кольцо. Действительно, пусть $0 \neq a = x - y \in D(S)$. Если $a^2 = 0$, то $x^2 + y^2 = xy + yx$. Откуда $x = y$ и $a = 0$. Противоречие. Тогда кольцо $D(S)$ коммутативно как редуцированное центрально существенное кольцо. Следовательно, S также коммутативное полукольцо.

4. Замечания и открытые вопросы. Элемент x полукольца S называется *мультипликативно сократимым слева (справа)*, если импликация $xy = xz (yx = zx) \Rightarrow y = z$ выполнена для всех $y, z \in S$. Полукольцо S называется *мультипликативно сократимым слева (справа)*, если каждый $x \in S \setminus \{0\}$ мультипликативно сократим слева (справа). Мультипликативно сократимое слева и справа полукольцо называется *мультипликативно сократимым*; см., например. [6, Chapter I].

Замечание 2. Мультипликативно сократимое слева (справа) центрально существенное полукольцо коммутативно.

Действительно, пусть a и b — ненулевые элементы полукольца S. Так как S — центрально существенное полукольцо, то существует такой $c \in C(S)$, что $0 \neq ac \in C(S)$. Мультипликативно сократимое слева полукольцо не содержит левых делителей нуля; см. [6, Chapter I, Theorem 4.4]. Поэтому $acb \neq 0$. Тогда

$$(ac)b = c(ab) = (ca)b = b(ca) = c(ba),$$

откуда $ab = ba$. Аналогичные рассуждения проходят в случае мультипликативно сократимых справа полуколец.

Полукольцо с делением, не являющееся кольцом, называется *полутелом*. Коммутативное полутело называется *полуполем*. Из замечания 2 следует, что центрально существенное полутело является полуполем. В самом деле, из [6, Chapter I, Theorem 5.5] следует, что полутело, содержащее не менее двух элементов, мультипликативно сократимо.

Открытый вопрос 1. Существуют ли некоммутативные полувычитаемые центрально существенные полукольца без ненулевых нильпотентных элементов (см. предложение 1)?

Открытый вопрос 2. Существуют ли некоммутативные центрально существенные групповые полукольца без делителей нуля для групп класса нильпотентности $n > 2$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марков В. Т., Туганбаев А. А.* Центрально существенные кольца// Дискр. мат. — 2018. — *30*, № 2. — С. 55–61.
2. *Чермных В. В.* Пучковые представления полуколец// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 5 (293). — С. 185–186.
3. *Clifford A. H., Prieston G. B.* The Algebraic Theory of Semigroups. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1961.
4. *Golan J. S.* Semirings and Their Applications. — Dordrecht–Boston–London: Springer, 1999.
5. *Hall M.* The Theory of Groups. — New York: MacMillan, 1959.
6. *Hebisch U., Weinert H. J.* Semirings: Algebraic Theory and Application in Computer Science. — Singapore: World Scientific.
7. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential endomorphism rings of abelian groups// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 3. — P. 1249–1256.
8. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Local centrally essential subalgebras of triangular algebras// Lin. Multilin. Algebra. — 2022. — *70*, № 13. — P. 2415–2424.
9. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential torsion-free rings of finite rank// Beitr. Algebra Geom. — 2021. — *62*, № 3. — P. 615–622.
10. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras// J. Algebra. — 2018. — *512*, № 15. — P. 109–118.
11. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Rings essential over their centers// Commun. Algebra. — 2019. — *47*, № 4. — P. 1642–1649.
12. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Uniserial Noetherian centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 1. — P. 149–153.
13. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Constructions of centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 1. — P. 198–203.
14. *Passman D. S.* The Algebraic Structure of Group Rings. — New York: Wiley, 1977.
15. *Sehgal S. K.* Nilpotent elements in group rings// Manuscr. Math. — 1975. — *15*, № 1. — P. 65–80.

Любимцев Олег Владимирович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: `oleg_lyubimcev@mail.ru`

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `tuganbaev@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 50–53
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-50-53

УДК 512.5

МАКСИМАЛЬНЫЕ И МИНИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ ЦЕНТРАЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫХ КОЛЕЦ

© 2023 г. **О. В. ЛЮБИМЦЕВ, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Показано, что кольцо R с центром $Z(R)$ такое, что модуль $R_{Z(R)}$ является существенным расширением модуля $Z(R)_{Z(R)}$, не обязано быть квазиинвариантным справа, т. е. не все максимальные правые идеалы кольца R являются идеалами. В терминах центральной существенности получены достаточные условия того, что все максимальные правые идеалы являются идеалами.

Ключевые слова: центрально существенное кольцо, максимальный правый идеал, минимальный правый идеал.

MAXIMAL AND MINIMAL IDEALS OF CENTRALLY ESSENTIAL RINGS

© 2023 **O. V. LYUBIMTSEV, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. We show that a ring R with center $Z(R)$ such that the module $R_{Z(R)}$ is an essential extension of the module $Z(R)_{Z(R)}$ need not be right quasi-invariant, i.e., not all maximal right ideals of the ring R are ideals. In terms of the central essentiality property, we obtain sufficient conditions for the fact that all maximal right ideals are ideals.

Keywords and phrases: centrally essential ring, maximal right ideal, minimal right ideal.

AMS Subject Classification: 16D25, 16R99

1. Введение. Мы рассматриваем только ассоциативные унитальные ненулевые кольца. Кольцо A называется *центрально существенным*, если либо A коммутативно, либо для каждого его нецентрального элемента a существуют такие ненулевые центральные элементы x, y, что $ax = y$. Ясно, что кольцо A с центром $Z(A)$ центрально существенно в точности тогда, когда модуль $A_{Z(A)}$ является существенным расширением модуля $Z(A)_{Z(A)}$. Кроме того, любое коммутативное кольцо является центрально существенным.

Радикал Джекобсона кольца A обозначается через $J(A)$.

Замечание 1. Если A — кольцо и факторкольцо $A/J(A)$ центрально существенно, то кольцо $A/J(A)$ коммутативно, а кольцо A квазиинвариантно справа и слева.

Доказательство. Так как $A/J(A)$ — центрально существенное полупервичное кольцо, то кольцо $A/J(A)$ коммутативно [1, Proposition 3.3.]. В частности, все максимальные правые (левые) идеалы кольца $A/J(A)$ являются идеалами. Поэтому кольцо A квазиинвариантно справа и слева. $\square$

Работа О. В. Любимцева выполнена в рамках государственного проекта FSWR-2023-0034. Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00052).

Замечание 2. Все полуартиновы справа или полусовершенные центрально существенные кольца являются квазиинвариантными справа.

Замечание 2 вытекает из замечания 1 и того, что факторкольцо $A/J(A)$ центрально существенного кольца A коммутативно, если кольцо A полусовершенно или полуартиново справа; см. [2, Proposition 3.4] и [4, Theorem 1.5].

Замечание 3. Если A — центрально существенное кольцо и факторкольцо $A/J(A)$ коммутативно, то любой минимальный правый идеал S кольца A лежит в $Z(A)$. В частности, все минимальные правые идеалы кольца A являются идеалами и $\operatorname{Soc} A_A$ лежит в центре кольца A.

Доказательство. Простой A-модуль S_A является циклическим модулем с ненулевым образующим $s \in S$. Обозначим $K = S \cap Z(A)$. По условию существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in Z(A)$, что $0 \neq sx = y \in S$. Тогда $S = yA$ и $y \in K \neq 0$. Так как $J(A)$ — пересечение аннуляторов всех простых правых A-модулей, то $SJ(A) = 0$. Так как кольцо $A/J(A)$ коммутативно, то $ab - ba \in J(A)$ для любых элементов $a, b \in A$. Кроме того, $k(ab - ba) = 0$ для любого $k \in K$. Поскольку $k \in Z(A)$, то $(ka)b = kba = b(ka)$. Отсюда получаем, что $ka \in Z(A)$. Далее, из $ka \in S$ следует, что K — правый идеал кольца A. Так как S — минимальный правый идеал, то $S = K \subseteq Z(A)$. □

В связи с замечаниями 1, 2 и 3 мы докажем теорему 1, которая является основным результатом данной работы.

Теорема 1.

(a) *Существуют центрально существенные кольца, в которых не все максимальные правые идеалы являются идеалами.*
(b) *Существуют центрально существенные кольца, в которых не все замкнутые*[1] *правые идеалы являются идеалами.*

В связи с теоремой 1 мы сформулируем открытый вопрос.

Открытый вопрос 1. Существуют ли центрально существенные кольца, в которых не все минимальные правые идеалы являются идеалами?

2. Доказательство теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть A — кольцо, $R = A[x]$ — кольцо многочленов и M — максимальный правый идеал кольца A.*

(a) *$MR + xR$ — максимальный правый идеал кольца R.*
(b) *Если $MR + xR$ — идеал кольца R, то M — идеал кольца A, факторкольца A/M и $R/(MR + xR)$ являются изоморфными телами, $(A/M)[x]$ — область главных односторонних идеалов, и имеется изоморфизм $\alpha\colon R/(MR + xR) \to A/M$, при котором $\alpha(f + (MR + xR)) = f_0 + M$, где f_0 — свободный член многочлена $f \in R$.*
(c) *Если A — тело и кольцо многочленов R квазиинвариантно справа, то кольцо A является полем.*
(d) *Если кольцо многочленов R квазиинвариантно справа, то факторкольцо $A/J(A)$ коммутативно, см.* [3, Theorem 7].

Доказательство.
а. Пусть многочлен $f = f_0 + xg \in R$ не принадлежит правому идеалу $MR + xR$ кольца R, где $f_0 \in A$ и $g \in R$. Тогда $f_0 \notin M$, поскольку в противном случае $f = f_0 + xg \in MR + xR$. Поэтому существуют такие элементы $d \in A$ и $m' \in M$, что

$$1 = f_0 d + m' = (f - xg)d + m' = fd - xgd + m' \in fR + xR + MR = fR + MR + xR.$$

Поэтому $MR + xR$ — максимальный правый идеал в R.

[1]Подмодуль X модуля M называется *замкнутым*, если $X = Y$ для любого подмодуля Y в M, являющегося существенным расширением модуля X.

b. Утверждения проверяются непосредственно и хорошо известны.
c. Пусть a и b — ненулевые элементы тела A. Так как A — тело, то в области R имеется алгоритм Евклида, и поэтому $(a+x)R$ — максимальный правый идеал квазиинвариантной справа области R. Тогда $(a+x)R$ — идеал в R. Поэтому $b(a+x) \in (a+x)R$ и $ba+bx = ac+xc$ для некоторого $c \in A$, откуда $bx = xc$ и $ba = ac$. Тогда $b = c$ и $ba = ab$.
d. В силу утверждения b кольцо A — квазиинвариантно справа. Поэтому

$$J(A) = \bigcap_{i \in I} M_i,$$

где $\{M_i\}_{i \in I}$ — множество всех таких идеалов кольца A, что A/M_i — тело. Непосредственно проверяется, что любое факторкольцо квазиинвариантного справа кольца квазиинвариантно справа. Кроме того, каждое кольцо $(A/M_i)[x]$ изоморфно факторкольцу квазиинвариантного справа кольца R. Поэтому каждое кольцо $(A/M_i)[x]$ квазиинвариантно справа. В силу утверждения c каждое факторкольцо A/M_i коммутативно. Поэтому факторкольцо $A/J(A)$ коммутативно. ☐

Лемма 2. *Пусть A — центрально существенное кольцо.*

(a) *Кольцо $A[x]$ — центрально существенно.*
(b) *Если факторкольцо $A/J(A)$ некоммутативно, то $A[x]$ — центрально существенное кольцо, не являющееся квазиинвариантным справа (слева).*

Доказательство.
a. Утверждение доказано в [1, Lemma 2.2].
b. Утверждение следует из утверждения a и леммы 1, d. ☐

2.1. Окончание доказательства теоремы 1.
a. В работе [5, Theorem 1.5] построен пример такого центрально существенного кольца A, что факторкольцо $A/J(A)$ не является PI-кольцом. В частности, кольцо $A/J(A)$ некоммутативно. Теперь утверждение следует из леммы 2, b.
b. Пусть $\mathbb{F}$ — поле и $\mathcal{A}$ — подалгебра $\mathbb{F}$-алгебры всех матриц размера 7×7, состоящей из матриц A вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Пусть для $A' \in \mathcal{A}$ имеем $a' = a+1$, а остальные компоненты совпадают с соответствующими компонентами матрицы A. Тогда $AA' \neq A'A$, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Таким образом, алгебра $\mathcal{A}$ некоммутативна. Нетрудно видеть, что в $Z(\mathcal{A})$ лежат матрицы C вида

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Пусть $A \in \mathcal{A}$, причем $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Выберем матрицу $B \in Z(\mathcal{A})$ с $d = a$, $e = b$ и нулями на остальных местах. Тогда $0 \neq AB \in Z(\mathcal{A})$. Следовательно, $\mathcal{A}$ — центрально существенная алгебра.

Рассмотрим правый идеал I в $\mathcal{A}$, состоящий из матриц вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что I не является идеалом в $\mathcal{A}$. Кроме того, I — замкнутый правый идеал. В самом деле, идеал в $\mathcal{A}$, имеющий только элемент c в качестве ненулевой компоненты, есть $\cap$-дополнение к I.

В то же время замкнутый левый идеал J в $\mathcal{A}$, элементами которого являются матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

не является идеалом. Идеал, имеющий только элемент c в качестве ненулевой компоненты, является $\cap$-дополнением также и для J.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras// J. Algebra. — 2018. — *512*, № 15. — P. 109–118.
2. *Марков В. Т., Туганбаев А. А.* Центрально существенные кольца// Дискр. мат. — 2018. — *30*, № 2. — С. 55–61.
3. *Huh C., Jang S.-H., Kim C.-O., Lee Y.* Rings whose maximal one-sided ideals are two-sided// Bull. Korean Math. Soc. — 2002. — *39*, № 3. — P. 411–422.
4. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Rings essential over their centers// Commun. Algebra. — 2019. — *47*, № 4. — P. 1642–1649.
5. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Constructions of centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 1. — P. 198–203.

Любимцев Олег Владимирович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: `oleg_lyubimcev@mail.ru`

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `tuganbaev@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 54–59
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-54-59

УДК 512.5

ЦЕНТРАЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫЕ ПОЛУГРУППОВЫЕ АЛГЕБРЫ

© 2023 г. **О. В. ЛЮБИМЦЕВ, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Для полугруппы S с сокращением и поля F доказано, что полугрупповая алгебра FS является центрально существенной в точности тогда, когда существует группа частных G_S полугруппы S и групповая алгебра FG_S группы G_S является центрально существенной групповой алгеброй. Полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением является центрально существенной в точности тогда, когда она обладает классическим правым кольцом частных, которое является центрально существенным кольцом. Существуют некоммутативные центрально существенные полугрупповые алгебры над полями нулевой характеристики (при этом известно, что центрально существенные групповые алгебры над полями характеристики 0 коммутативны).

Ключевые слова: полугруппа с сокращением, полугрупповое кольцо, центрально существенное кольцо.

CENTRALLY ESSENTIAL SEMIGROUP ALGEBRAS

© 2023 **O. V. LYUBIMTSEV, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. For a cancellative semigroup S and a field F, we prove that the semigroup algebra FS is centrally essential if and only if the group of fractions G_S of the semigroup S exists and the group algebra FG_S of G_S is centrally essential. The semigroup algebra of a cancellative semigroup is centrally essential if and only if it has the classical right ring of fractions, which is a centrally essential ring. There exist noncommutative, centrally essential semigroup algebras over fields of zero characteristic (this contrasts with the known fact that centrally essential group algebras over fields of zero characteristic are commutative).

Keywords and phrases: cancellative semigroup, semigroup ring, centrally essential ring.

AMS Subject Classification: 16R99, 20K30

1. Введение. Мы рассматриваем только ассоциативные, не обязательно унитальные кольца. Ассоциативное кольцо R называется *центрально существенным*, если R либо коммутативно, либо для каждого нецентрального элемента a существуют такие ненулевые центральные элементы x, y, что $ax = y$. Если кольцо R с центром $Z(R)$ имеет ненулевую единицу, то R центрально существенно в точности тогда, когда модуль $R_{Z(R)}$ является существенным расширением модуля $Z(R)_{Z(R)}$. Ясно, что любое коммутативное кольцо является центрально существенным. Каждое полупервичное или несингулярное справа центрально существенное кольцо коммутативно; см. [6, Theorem 1.5]. В [6, Proposition 2.4] доказано, что в центрально существенном кольце все идемпотенты центральны. Центрально существенные групповые алгебры над полями характеристики 0 коммутативны; см. [5, Remark 1.2]. Однако центрально существенное кольцо может быть некоммутативным. Например, существуют конечные некоммутативные центрально существенные групповые алгебры над полями простой характеристики; см. [5]. Кроме того, существуют

Работа О. В. Любимцева выполнена в рамках государственного проекта FSWR-2023-0034. Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00052).

такие абелевы группы без кручения, что их кольца эндоморфизмов являются некоммутативными центрально существенными кольцами; см. [2]. В работе [4, Theorem 1] доказано, что групповая алгебра является центрально существенной в точности тогда, когда она обладает классическим правым кольцом частных, которое является центрально существенным кольцом.

В данной статье изучаются центрально существенные полугрупповые алгебры. Основным результатами работы являются теоремы 1 и 2.

Теорема 1.

1. *Пусть S — полугруппа с сокращением и F — поле. Полугрупповая алгебра FS над полем F является центрально существенной тогда и только тогда, когда существует группа частных G_S полугруппы S и групповая алгебра FG_S группы G_S является центрально существенной групповой алгеброй.*
2. *Существуют некоммутативные центрально существенные полугрупповые алгебры над полями нулевой характеристики (при этом известно, что центрально существенные групповые алгебры над полями характеристики 0 коммутативны).*

Следующая теорема распространяет результат [4, Theorem 1] на полугрупповые алгебры полугрупп с сокращением.

Теорема 2. *Полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением является центрально существенной в точности тогда, когда она обладает классическим правым кольцом частных, которое является центрально существенным кольцом.*

Всюду далее F означает поле, S — полугруппу, FS — полугрупповую алгебру полугруппы S над полем F. Центр полугруппы S и полугрупповой алгебры FS обозначаются через $Z(S)$ и $Z(FS)$ соответственно. Если

$$a = \sum \alpha_s s \in FS,$$

то $\operatorname{supp}(a) = \{s \in S \mid \alpha_s \neq 0\}$. Для двух элементов a и b кольца обозначим $[a,b] = ab - ba$. Приведем некоторые используемые в работе определения.

Полугруппа S называется *полугруппой с левым сокращением*, если для любых $a, b, c \in S$ из $ca = cb$ следует $a = b$. Двойственно определяется *полугруппа с правым сокращением*. Полугруппа с левым и правым сокращением называется *полугруппой с сокращением*. Хорошо известно, что периодическая полугруппа с сокращением является группой; см., например, [1]. Полугруппа с сокращением вкладывается в группу правых частных в точности тогда, когда непусто пересечение любых двух главных правых идеалов полугруппы S, т. е. $sS \cap tS \neq \emptyset$ для всех $s, t \in S$ (правое условие Оре). Если S удовлетворяет и левому условию Оре, определяемом симметрично, то группа $G_S = SS^{-1} = S^{-1}S$ называется *группой частных* полугруппы S. Любой элемент группы G_S записывается как в виде $a^{-1}b$, так и в виде cd^{-1}; $a, b, c, d \in S$.

Если G — группа, то обозначим, как принято,

$$\Delta(G) = \{x \in G \mid |x^G| < \infty\} = \{x \in G \mid |G : C_G(x)| < \infty\}.$$

$\Delta(G)$ является характеристической подгруппой группы G. В работе [5, Lemma 2.1] доказано, что если групповое кольцо RG центрально существенно, то группа G является FC-группой, т. е. $G = \Delta(G)$.

Пусть S — полугруппа с сокращением и $s \in S$. Если для некоторого $x \in S$ существует такой $t \in S$, что $xs = tx$, то элемент t определен однозначно и обозначается s^x. Тогда $\Delta(S)$ — множество элементов $s \in S$, для которых элементы s^x определены для всех $x \in S$ и множество $\{s^x \mid x \in S\}$ конечно. Если $s \in \Delta(S)$, то полагают $D_S(s) = \{s^x \mid x \in S\}$. Ясно, что если S вкладывается в группу частных G_S, то для $s \in \Delta(S)$, множество $D_S(s)$ вкладывается во множество сопряженных элементов для s в G_S. Если S — полугруппа с сокращением, то $Z(FS)$ является F-подпространством в FS, порожденным элементами вида

$$\sum_{t \in D_S(s)} t,$$

где $s \in \Delta(S)$; см. [8, Theorem 9.10].

Элемент r кольца R называется *регулярным справа* или *левым неделителем нуля*, если из $rx = 0$ следует $x = 0$ для любого $x \in R$. Заметим, что в центрально существенном кольце односторонние делители нуля являются двусторонними; см. [7, Lemma 2.2]. Кольцо R имеет *правое (соотв., левое) классическое кольцо частных* $Q_{cl}(R_r)$ (соотв., $Q_{cl}(R_l)$) в точности тогда, когда для любых элементов $a, b \in R$, где b регулярен, существуют такие элементы $c, d \in R$, где d регулярен, что $bc = ad$ (соотв., $cb = da$). Если кольца $Q_{cl}(R_r)$ и $Q_{cl}(R_l)$ существуют, то они изоморфны над R. В этом случае говорят о существовании двустороннего классического кольца частных $Q_{cl}(R)$. Хорошо известно, что каждое коммутативное кольцо обладает коммутативным классическим кольцом частных.

2. Доказательство теоремы 1.1.

Предложение 1. *Пусть S — полугруппа с сокращением. Если полугрупповая алгебра FS является центрально существенным кольцом, то $S = \Delta(S)$.*

Доказательство. По условию для $s \in S$ имеем $0 \neq cs = d$, для некоторых $c, d \in Z(FS)$. Тогда для любого $y \in \operatorname{supp}(d)$ найдется такой $x \in \operatorname{supp}(c)$, что $xs = y$. Из [8, Proposition 9.2(iii)] следует, что $x, y \in \Delta(S)$. Кроме того, $\Delta(S)$ является правым и левым множеством Оре в S и $G_{\Delta(S)} = \Delta(S)^{-1}\Delta(S) = \Delta(S)\Delta(S)^{-1}$ — FC-группа; см. [8, Corollary 9.6, Proposition 9.8(iii)]. Следовательно, $s = x^{-1}y$, где $x^{-1} \in \Delta(S)^{-1}$, $y \in \Delta(S)$. Для любого $t \in S$ имеем $x^t \in \Delta(S)$. Таким образом, из $tx = x^t t$ следует $(x^t)^{-1}t = tx^{-1}$, т. е. $(x^t)^{-1} = (x^{-1})^t$ в группе $G_{\Delta(S)}$. Тогда элемент $s^t = (x^{-1}y)^t = (x^{-1})^t y^t$ существует для любого $t \in S$; см. [8, Basic property (a), P. 108]. Далее,

$$\begin{aligned}\{s^t \mid t \in S\} &= \{(x^{-1}y)^t \mid t \in S\} = \\ &= \{(x^{-1})^t \mid t \in S\} \cdot \{y^t \mid t \in S\} = \\ &= \{(x^t)^{-1} \mid t \in S\} \cdot \{y^t \mid t \in S\}.\end{aligned}$$

Первое множество конечно, так как конечно множество $\{x^t \mid t \in S\}$. Из $y \in \Delta(S)$ следует конечность второго множества. Таким образом, множество $D_S(s)$ конечно и $s \in \Delta(S)$. □

Следствие 1. *Если FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением, то S имеет группу частных G_S.*

Доказательство. По предложению 1 имеем $S = \Delta(S)$. Так как $\Delta(S)$ является правым и левым множеством Оре, то S имеет группу частных G_S. □

В силу следствия 1 при изучении центрально существенных полугрупповых алгебр полугрупп с сокращением достаточно ограничиться рассмотрением полугрупп S, которые имеют группу частных G_S.

Следствие 2. *Пусть F — поле и $\operatorname{char} F = 0$. Тогда любая центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением над F коммутативна.*

Доказательство. Алгебра FS полупервична в точности тогда, когда полупервична алгебра FG_S; см. [8, Theorem 7.19]. Хорошо известно, что групповая алгебра над полем характеристики 0 полупервична; см., например, [9, Theorem 4.2.12]. В работе [5, Proposition 3.4] доказано, что центрально существенные полупервичные кольца коммутативны. □

Пример 1. Рассмотрим подкольцо $\mathcal{R}$ в кольце $M_7(F)$ всех матриц порядка 7 над полем F характеристики 0, состоящее из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathcal{R}$ — некоммутативное центрально существенное кольцо; см. [3, Example 2.4]. Пусть $e_\alpha = E_7$, e_a, e_b, e_c, e_d, e_e, e_f — матрицы, у которых ненулевые позиции имеют значение 1 на местах α, a, b, c, d, e, f соответственно. Рассмотрим полугруппу $S = \{e_\alpha, e_a, e_b, e_c, e_d, e_e, e_f\} \cup \{\theta\}$, где $\{\theta\}$ действует как нуль. Тогда $\mathcal{R} \cong F_0S$, где F_0S — сжатая полугрупповая алгебра полугруппы S над полем F. Так как $FS \cong F \oplus F_0S$ (см., например, [8, Corollary 4.9]), то FS — центрально существенная полугрупповая алгебра как прямая сумма центрально существенных алгебр.

2.1. Окончание доказательства теоремы 1.
1. Пусть FS — центрально существенное кольцо и $0 \neq a \in FG_S$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i,$$

где $\alpha_i \in F$, $g_i \in G_S$. Известно, что $G_S = SZ(S)^{-1}$; см. [8, Proposition 9.8(iv)]. Тогда

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i t_i^{-1}$$

для некоторых $s_i \in S, t_i \in Z(S)$, $i = 1, \dots, n$. Положим $a' = \alpha_1 s_1 t_2 \dots t_n + \dots + \alpha_n s_n t_1 \dots t_{n-1} \in FS$. Заметим, что $a' \neq 0$. Для этого достаточно проверить, что $s_1 t_2 \dots t_n, \dots, s_n t_1 \dots t_{n-1}$ — различные элементы в FS. Действительно, если $s_i t_1 \dots \widehat{t_i} \dots t_n = s_j t_1 \dots \widehat{t_j} \dots t_n$ для $i \neq j$, то, умножив это равенство на $(t_1 \dots t_n)^{-1}$, получим $s_i t_i^{-1} = s_j t_j^{-1}$, т. е. $g_i = g_j$. Противоречие. По условию $0 \neq a'c' = d'$ для некоторых $c', d' \in Z(FS)$. Тогда $0 \neq ac'' = d'$, где $c'' = t_1 \dots t_n c'$ и d' — центральные элементы в FS, которые остаются центральными в FG_S; см. [8, Corollary 9.11(i)].

Обратно, пусть $0 \neq a \in FS$,

$$a = \sum \alpha_i s_i,$$

где $\alpha_i \in F$, $s_i \in S$. По условию $0 \neq ac = d$ для некоторых $c, d \in Z(FG_S)$,

$$c = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i, \quad d = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j h_j,$$

где $g_i, h_j \in G_S$. Пусть $g_i = x_i y_i^{-1}$, $h_j = z_j t_j^{-1}$ и $x_i, z_j \in S$, $y_i, t_j \in Z(S)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Обозначим $y = y_1 \dots y_n$, $t = t_1 \dots t_m$. Положим $c' = cyt \in Z(FS)$. Тогда

$$ac' = (ac)yt = dyt \in Z(FS).$$

Осталось проверить, что $ac' \neq 0$. Имеем:

$$dyt = \gamma_1 z_1 y t_2 \dots t_m + \dots + \gamma_m z_m y t_1 \dots t_{m-1}.$$

Если $i \neq j$ и $z_i y t_1 \dots \widehat{t_i} \dots t_m = z_j y t_1 \dots \widehat{t_j} \dots t_m$, то $z_i t_i^{-1} = z_j t_j^{-1}$ и $g_i = g_j$, что приводит к противоречию.
2. Утверждение следует из примера 1.

Пример 2. Пусть $S = \langle x, y, z \mid z \in Z(S),\ z^2 = e,\ xy = zyx \rangle$. Непосредственно проверяется, что S — полугруппа с сокращением, имеющая группу частных $G_S = \langle x, y, z \mid z \in Z(G_S),\ z^2 = e,\ x^{-1}y^{-1}xy = z \rangle$. Так как z — центральная инволюция, $x^2, y^2 \in Z(G_S)$, то единственный нетривиальный коммутатор в G_S есть $x^{-1}y^{-1}xy$. Поэтому коммутант $G'_S = \langle z \rangle$. Имеем $Z(G_S) = \langle x^2, y^2, z \rangle$. Пусть $H = G'_S = \{e, z\}$, $\operatorname{char} F = 2$ и $\hat{H} = e + z$. Проверим, что для $0 \neq \alpha \in FG_S$ выполнено $\alpha \hat{H} = \beta \in Z(FG_S)$. Действительно, если

$$\alpha = \sum_{g \in \operatorname{supp}(\alpha)} a_g g,$$

то

$$\beta = \sum_{g \in \operatorname{supp}(\alpha)} a_g g \hat{H}.$$

Тогда для любого $x \in G_S$, $g \in \mathrm{supp}(\alpha)$ получим

$$[x, g\hat{H}] = [x, g]\hat{H} = xg(1 - g^{-1}x^{-1}gx)\hat{H} = 0,$$

так как $g^{-1}x^{-1}gx \in G' \subseteq Z(G_S)$. Если $\alpha\hat{H} = 0$, то $\alpha \in FG_S\hat{H}$; см. [9, Lemma 3.1.2]. В этом случае $\alpha \in Z(FG_S)$. Следовательно, групповая алгебра FG_S центрально существенна. По теореме 1 полугрупповая алгебра FS также является центрально существенной.

Пример 3. Пусть $S = \langle x, y, z \mid z \in Z(S),\ xy = zyx\rangle$. Полугруппа S имеет группу частных G_S, которая является свободной нильпотентной группой класса нильпотентности 2; см. [8, Example 21]. Известно, что если группа не содержит элементов порядка p, то центрально существенная групповая алгебра коммутативна; см. [4, Proposition 1]. Значит, групповая алгебра FG_S не является центрально существенной. По теореме 1 полугрупповая алгебра FS также не является центрально существенной.

3. Доказательство теоремы 2.

Лемма 1 (см. [4, Proposition 3])**.** *Пусть R — кольцо. Если для любого регулярного элемента b существует такой регулярный элемент x, что $bx \in Z(R)$, то R имеет правое кольцо частных.*

Лемма 2. *Пусть FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением. Тогда для каждого регулярного элемента $b \in FS$ существует такой регулярный элемент $z \in FS$, что $bz \in Z(FS)$.*

Доказательство. Из [9, Lemma 4.4.4] следует, что найдется такой регулярный элемент $x \in FG_S$, что $bx = y \in Z(FG_S)$. Если

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i t_i^{-1},$$

где $\alpha_i \in F$, $s_i \in FS$, $t_i \in Z(FS)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то элемент $z = xt_1 \ldots t_n$ регулярен в FS и $bz \in Z(FS)$. □

Замечание 1. Утверждения лемм 1 и 2 верны и для левых классических колец частных. В этом случае для регулярного элемента b найдется такой регулярный элемент x, что xb — центральный элемент.

Предложение 2. *Если FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением, то FS имеет классическое кольцо частных.*

Доказательство. Следует из лемм 1, 2 и замечания 1. □

3.1. Окончание доказательства теоремы 2. Пусть FS — центрально существенное кольцо и $0 \neq as^{-1} \in Q_{cl}(FS)$, где s регулярен в FS. Пусть регулярный элемент $\gamma \in FS$ таков, что $s\gamma = t \in Z(FS)$. Тогда $s^{-1} = \gamma t^{-1}$ в кольце $Q_{cl}(FS)$. По условию для элемента $a\gamma \in FS$ существуют такие ненулевые элементы $c, d \in Z(FS)$, что $0 \neq (a\gamma)c = d \in Z(FS)$. Тогда

$$(as^{-1})c = (a\gamma t^{-1})c = (a\gamma c)t^{-1} = dt^{-1} \neq 0,$$

где $dt^{-1} \in Z(Q_{cl}(FS))$. Следовательно, $Q_{cl}(FS)$ — центрально существенное кольцо.

Обратно, пусть $0 \neq s \in FS$. По условию найдутся такие элементы $t, r \in Z(Q_{cl}(FS))$, что $0 \neq st = r$. Заметим, что $Z(Q_{cl}(FS)) \subseteq Q_{cl}(Z(FS))$; сравни [9, Theorem 4.4.5]. Действительно, пусть $\rho \in Z(Q_{cl}(FS))$, $\rho = \alpha\beta^{-1}$, где $\alpha, \beta \in FS$ и β регулярен. Тогда $\alpha\beta = \beta\alpha$ и $\alpha\beta^{-1} = \beta^{-1}\alpha$. По лемме 2 существует такой регулярный элемент $\gamma \in FS$, что $\beta\gamma \in Z(FS)$. Обозначив $\epsilon = \beta\gamma$, $\eta = \alpha\gamma$, получим:

$$\eta\epsilon^{-1} = \alpha\gamma\gamma^{-1}\beta^{-1} = \alpha\beta^{-1} = \rho.$$

При этом $\epsilon, \eta \in Z(Q_{cl}(FS))$. С учетом сказанного, имеем $t = cd^{-1}$, $r = mn^{-1}$ для некоторых $c, d, m, n \in Z(FS)$. Тогда

$$s(cn) = (sc)n = (mn^{-1}d)n = md \in Z(FS),$$

и $md \neq 0$, так как d регулярен в FS.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Clifford A. H., Prieston G. B.* The Algebraic Theory of Semigroups. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1961.
2. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential endomorphism rings of abelian groups// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 3. — P. 1249–1256.
3. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential torsion-free rings of finite rank// Beitr. Algebra Geom. — 2021. — *62*, № 3. — P. 615–622.
4. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras and classical rings of fractions// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 12. — P. 2890–2894.
5. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras// J. Algebra. — 2018. — *512*, № 15. — P. 109–118.
6. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Rings essential over their centers// Commun. Algebra. — 2019. — *47*, № 4. — P. 1642–1649.
7. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Uniserial Noetherian centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 1. — P. 149–153.
8. *Okniński J.* Semigroup Algebras. — New York–Basel: Marcel Dekker, 1991.
9. *Passman D. S.* The Algebraic Structure of Group Rings. — New York: Wiley, 1977.

Любимцев Олег Владимирович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: tuganbaev@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 60–130
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-60-130

УДК 512.5

ЦЕНТРАЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫЕ КОЛЬЦА И ПОЛУКОЛЬЦА

© 2023 г. **А. А. ТУГАНБАЕВ**

Памяти Виктора Тимофеевича Маркова

Аннотация. В данном обзоре систематически изучаются кольца и полукольца, которые либо коммутативны, либо в которых для любого нецентрального элемента a существуют такие ненулевые центральные элементы x и y, что $ax = y$.

Ключевые слова: кольцо, ассоциативное кольцо, коммутативное кольцо, центрально существенное кольцо, групповая алгебра, модуль, идеал.

CENTRALLY ESSENTIAL RINGS AND SEMIRINGS

© 2023 **A. A. TUGANBAEV**

Abstract. In this survey, we systematically examine rings and semirings that are either commutative or satisfy the following condition: for any noncentral element a, there exist nonzero central elements x and y such that $ax = y$.

Keywords and phrases: ring, associative ring, commutative ring, centrally essential ring, group algebra, module, ideal.

AMS Subject Classification: 16R99, 20K30

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 22-11-00052.
Автор благодарен А. Н. Абызову и О. В. Любимцеву за участие в редактировании рукописи.

Введение

Во введении и главах 1—5 слово *кольцо* означает *ассоциативное кольцо*. По умолчанию предполагается, что кольцо обладает ненулевой единицей; случай не обязательно унитальных колец оговаривается особо. В главе 6 слово *кольцо* означает *не обязательно ассоциативное кольцо*.

Не обязательно унитальное кольцо A называется *центрально существенным* или *ЦС кольцом*, если либо A коммутативно, либо для любого нецентрального элемента $a \in A$ существуют такие ненулевые центральные элементы x и y, что $ax = y$.

Ясно, что любое коммутативное кольцо является центрально существенным. Унитальное кольцо A с центром $Z(A)$ центрально существенно в точности тогда, когда $Z(A)$-модуль A — существенное расширение $Z(A)$-модуля $Z(A)$.

Глядя на определение центрально существенного кольца A, может показаться, что такое кольцо, возможно, коммутативно. Действительно, A обладает многими свойствами коммутативных колец; перечислим некоторые из них.

1. Все идемпотенты кольца A центральны (см. 1.1.4 ниже).
2. Если кольцо A полупервично, то кольцо A коммутативно (см. теорему 1.2.2 ниже).
3. Если A — центрально существенное локальное кольцо, то кольцо $A/J(A)$ — поле и поэтому коммутативно; см. 1.3.2.
4. Если A — полуартиново справа или слева, центрально существенное кольцо, то фактор-кольцо $A/J(A)$ коммутативно; см. теорему 1.4.5.

Однако центрально существенное кольцо A может быть весьма далеким от коммутативного кольца. Например:

1. факторкольцо $A/J(A)$ кольца A по первичному радикалу может не быть центрально существенным и, в частности, полупервичное кольцо $A/J(A)$ может не быть коммутативным (см. теорему 3.5.3);
2. факторкольца кольца A по идеалам, порожденным центральными идемпотентами, не обязательно центрально существенны (см. пример 2.2.5);
3. факторкольца кольца A не обязательно центрально существенны (см. два предыдущих пункта);
4. существуют конечные некоммутативные центрально существенные групповые алгебры; пример 1 ниже;
5. существуют конечные некоммутативные центрально существенные внешние алгебры (см. пример 2 ниже);

6. существуют такие абелевы группы G без кручения конечного ранга, что их кольца эндоморфизмов являются некоммутативными центрально существенными кольцами (см. теорему 3.7.13, c).

Пример 1. Пусть F — поле порядка 2 и $G = Q_8$ — группа кватернионов порядка 8, т. е. G — группа с двумя образующими a, b и определяющими соотношениями $a^4 = 1$, $a^2 = b^2$ и $aba^{-1} = b^{-1}$; см. [29, Sec. 4.4]. Тогда групповая алгебра FG — некоммутативное конечное локальное центрально существенное кольцо, состоящее из 256 элементов (это следует из предложения 3.2.4 ниже).

Приведем некоторые необходимые понятия. Для кольца A обозначим через $Z(A)$ (или $C(A)$), $J(A)$, $N(A)$ и $K(A)$ центр, радикал Джекобсона, первичный радикал и радикал Кёте (т. е. сумму всех ниль-идеалов, которая является наибольшим ниль-идеалом) соответственно. Мы также положим $[a, b] = ab - ba$ для любых двух элементов a, b кольца A. Для группы или полугруппы X через $Z(X)$ (или $C(X)$) обозначается ее центр.

Пример 2. Приведем еще один пример некоммутативного конечного центрально существенного кольца. Пусть F — поле из трех элементов, V — векторное F-пространство с базисом e_1, e_2, e_3, и пусть $\Lambda(V)$ — внешняя алгебра (см. 2.2.1) для V. Так как $e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = e_3 \wedge e_3 = 0$ и любое произведение образующих равно $\pm$произведению образующих с возрастающими индексами, $\Lambda(V)$ — конечная 8-мерная F-алгебра с базисом

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\},$$
$$|\Lambda(V)| = 3^8, \quad e_k \wedge e_i \wedge e_j = -e_i \wedge e_k \wedge e_j = e_i \wedge e_j \wedge e_k.$$

Поэтому, если

$$x = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \alpha_1^3 e_3 + \alpha_2^1 e_1 \wedge e_2 + \alpha_2^2 e_1 \wedge e_3 + \alpha_2^3 e_2 \wedge e_3 + \alpha_3 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

то

$$[e_1, x] = 2\alpha_1^2 e_1 \wedge e_2 + 2\alpha_1^3 e_1 \wedge e_3,$$
$$[e_2, x] = -2\alpha_1^1 e_1 \wedge e_2 + 2\alpha_1^3 e_2 \wedge e_3,$$
$$[e_3, x] = -2\alpha_1^1 e_1 \wedge e_3 - 2\alpha_1^2 e_2 \wedge e_3.$$

Поэтому x лежит в центре $Z(\Lambda(V))$ алгебры $\Lambda(V)$ в точности тогда, когда $\alpha_1^1 = \alpha_1^2 = \alpha_1^3 = 0$, откуда центр алгебры $\Lambda(V)$ имеет размерность 5. При этом, если $\alpha_1^1 \neq 0$, то

$$x \wedge (e_2 \wedge e_3) = \alpha_0 e_2 \wedge e_3 + \alpha_1^1 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \in Z(\Lambda(V)) \setminus \{0\}.$$

Кроме того, $e_2 \wedge e_3 \in Z(\Lambda(V))$. Аналогично рассуждаем, если $\alpha_1^2 \neq 0$ или $\alpha_1^3 \neq 0$. Поэтому $\Lambda(V)$ — конечное центрально существенное некоммутативное кольцо.

Пример 3. Этот пример, утверждение 1 и его доказательство принадлежат рецензенту статьи [47], любезно предоставившему примеры некоммутативных центрально существенных колец, возникающих из конструкции, описанной в [33].

Предложение 1. *Если B — такой идеал кольца A, что $B \subseteq Z(A)$ и A/B — поле, то A — центрально существенное кольцо.*

Доказательство. Допустим, что A некоммутативно и a — нецентральный элемент в A. Если $aB \neq 0$ то ясно, что $Z(A) \cap aZ(A) \neq 0$. Допустим противное, т. е. $aB = 0$. Так как $a \notin B$ и A/B — поле, то элемент a обратим по модулю B, т. е. $sa = 1 - x$ для некоторых $s \in A$ и $x \in B$. Для любого $y \in B$ имеем $0 = say = y - xy$, откуда $xB = B = xA$, x — центральный идемпотент, и A имеет пирсовское разложение $A = Ax \oplus A(1 - x)$, где оба слагаемых $Ax = B$ и $A(1 - x) \cong A/B$ коммутативны. Поэтому A коммутативно. Это противоречит выбору A, и 1 верно.

Остается рассмотреть простейший случай конструкции, приведенной в [33, Proposition 7] (мы сохраняем обозначения этой статьи). Пусть $F = \mathbb{Q}(x, y)$ — поле рациональных функций. Рассмотрим две частные производные $d_1 = \partial/\partial x$ и $d_2 = \partial/\partial x$. Тогда кольцо $A = T(F, F)$ матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} f & d_1(f) & g \\ 0 & f & d_2(f) \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} : f, g \in F \right\}$$

и его идеал

$$B = \hat{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : g \in F \right\}$$

удовлетворяют условиям утверждения 1. □

Приведем некоторые определения.

Для модуля M *цоколем* $\operatorname{Soc} M$ называется сумма всех простых подмодулей в M; если M не содержит простых подмодулей, то $\operatorname{Soc} M = 0$ по определению. Модуль M называется *конечномерным* (в смысле Голди), если M не содержит подмодуля, который является бесконечной прямой суммой ненулевых подмодулей. Модуль M называется *нетеровым* (соотв., *артиновым*), если M не содержит бесконечную строго возрастающую (соотв., строго убывающую) цепь подмодулей. Прямые слагаемые свободных модулей называются *проективными* модулями. Модуль M называется *наследственным*, если все подмодули модуля M проективны. Модуль M называется *дистрибутивным* (соотв., *цепным*), если решетка подмодулей модуля M дистрибутивна (соотв., является цепью). Напомним, что модуль X называется *существенным расширением* подмодуля Y модуля X, если $Y \cap Z \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля Z в X. В этом случае Y называется *существенным подмодулем* модуля X. Подмодуль Y модуля X называется *замкнутым* (в X), если $Y = Y'$ для любого подмодуля Y' модуля X, являющегося существенным расширением модуля Y.

Кольцо A называется *областью*, если A не имеет ненулевых делителей нуля. Коммутативная область A называется *дедекиндовой* областью, если A — коммутативная наследственная нётерова область. Если A — кольцо, то собственный идеал B кольца A называется *вполне первичным*, если факторкольцо A/B — область. Кольцо A называется *инвариантным справа* (соотв., *инвариантным слева*), если все правые (соотв., левые) идеалы кольца A являются идеалами. Кольцо R называется *полупервичным* (соотв., *первичным*), если R не имеет нильпотентных ненулевых идеалов (соотв., произведение любых двух ненулевых идеалов кольца R не равно нулю). Кольцо R называется *арифметическим*, если решетка его двусторонних идеалов дистрибутивна, т. е. $X \cap (Y + Z) = X \cap Y + X \cap Z$ для любых трех идеалов X, Y, Z кольца R. Ясно, что коммутативное кольцо дистрибутивно справа (соотв., слева) в точности тогда, когда кольцо арифметично. Элемент r кольца R называется *левым неделителем нуля* или *регулярным справа* элементом, если из соотношения $rx = 0$ следует соотношение $x = 0$ для любого $x \in R$. Заметим, что односторонние делители нуля являются двусторонними делителями нуля в центрально существенном кольце; см. 1.1.2, а. Кольцо R имеет *правое (соотв., левое) классическое кольцо частных* $Q_{cl}(R_r)$ (соотв., $Q_{cl}(R_l)$) в точности тогда, когда для любых таких двух элементов $a, b \in R$, что b — неделитель нуля, существуют такие элементы $c, d \in R$, что d — неделитель нуля и $bc = ad$ (соотв., $cb = da$). Если кольца $Q_{cl}(R_r)$ и $Q_{cl}(R_l)$ существуют, то они изоморфны друг другу над R. В этом случае говорят, что существует двустороннее кольцо частных $Q_{cl}(R)$.

Для кольца R и подмножества S в R обозначим через $\ell_R(S)$ *левый аннулятор* $\{r \in R \mid rS = 0\}$ множества S. Правый аннулятор $r_R(S)$ определяется аналогично. Для правого (соотв., левого) R-модуля M его вполне инвариантный подмодуль, образованный всеми элементами, аннуляторы которых являются существенными правыми (соотв., левыми) идеалами в R, называется *сингулярным подмодулем* для M и обозначается через $\operatorname{Sing} M$. При $M = R_R$ (соотв., $M = {}_R R$) идеал $\operatorname{Sing} M$ называется *правым* (соотв., *левым*) *сингулярным идеалом* кольца R.

Необходимая информация по теории колец содержится в [11, 31, 37, 38, 63, 69]. Информацию об абелевых группах см. в [25] и [36].

1. Полупервичные, локальные, совершенные и полуартиновы кольца

В главе 1 слово *кольцо* означает *ассоциативное кольцо*. По умолчанию предполагается, что кольцо обладает ненулевой единицей; случай не обязательно унитальных колец оговаривается особо.

1.1. Общие свойства.

1.1.1. Замечание. Если A — кольцо, в котором множество B всех левых делителей нуля является идеалом, то B — вполне первичный идеал.

Доказательство. Пусть $a, b \in A$ и $ab \in B$. Тогда существует такой элемент $x \in A \setminus \{0\}$, что $abx = 0$. Если $bx = 0$, то $b \in B$. В противном случае из соотношения $a(bx) = 0$ следует, что $a \in B$. □

1.1.2. Неделители нуля в ЦС кольцах. Пусть A — центрально существенное кольцо.

(a) Каждый левый (соотв., правый) неделитель нуля a кольца A — правый (соотв., левый) неделитель нуля кольца A.
(b) Кольцо A равномерно[1] слева в точности тогда, когда A равномерно справа.
(c) Если кольцо A равномерно справа и $B = \operatorname{Sing} A_A$, то B — множество всех (левых или правых) делителей нуля кольца A и B — вполне первичный идеал кольца A.
(d) Если кольцо A имеет собственный идеал B, содержащий все левые делители нуля кольца A, то факторкольцо A/B коммутативно.
(e) Если идеал B кольца A содержит все центральные делители нуля кольца A, то $\ell.\operatorname{Ann}_A(B) \subseteq Z(A)$.

Доказательство. (a) Рассмотрим только случай, где a — левый неделитель нуля. Можно считать, что a — центральный элемент кольца A. Допустим противное. Тогда $ba = 0$ для некоторого ненулевого элемента b кольца A. Так как $b \neq 0$, то существуют такие ненулевые центральные элементы x, y кольца A, что $bx = y \neq 0$. Тогда $ya = bxa = bax = 0$. Получено противоречие.

(b) Допустим, что кольцо A равномерно справа и a_1, a_2 — ненулевые элементы кольца A. Существуют такие ненулевые центральные элементы x_1, x_2, y_1, y_2 кольца A, что $a_1x_1 = y_1$, $a_2x_2 = y_2$. Тогда

$$Aa_1 \cap Aa_2 \supseteq Ax_1a_1 \cap Ax_2a_2 = a_1x_1A \cap a_2x_2A = y_1A \cap y_2A \neq 0.$$

(c) По определению правого сингулярного идеала все его элементы являются левыми делителями нуля. Наоборот, пусть a — левый или правый делитель нуля кольца A. Тогда $r(a) \neq 0$ в силу первого утверждения леммы; в равномерном справа кольце это означает, что $r(a)$ — существенный правый идеал, т. е. $a \in B$. Теперь используем замечание 1.1.1.

(d) Пусть $a, b \in A \setminus B$. Существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in A$, что $bx = y$. Тогда $[a, b]x = [a, bx] = 0$, т. е. $[a, b]$ — левый делитель нуля. Поэтому $[a, b] \in B$.

(e) Пусть $r \in \ell.\operatorname{Ann}_A(B)$. Существуют такие ненулевые центральные элементы x, y кольца A, что $rx = y$. Ясно, что $x \notin B$, откуда x не является делителем нуля. Поэтому для каждого элемента $a \in A$ из соотношений $0 = [a, y] = [a, rx] = [a, r]x$ следует, что $[a, r] = 0$. □

1.1.3. Замкнутые правые идеалы. Пусть кольцо A центрально существенно и B — его правый идеал.

(a) Если правый идеал B не является существенным (это так, например, если B — собственный замкнутый правый идеал), то существует такой ненулевой центральный элемент y кольца A, что $B \cap yA = 0$ и, следовательно, $yB = By = 0$. В частности, все элементы правого идеала B являются делителями нуля.
(b) Существует центрально существенная конечномерная алгебра над полем, которая имеет замкнутый правый идеал, не являющийся идеалом.

[1] Модуль M называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение.

Доказательство. (a) Так как B не является существенным, то $B \cap dA = 0$ для некоторого ненулевого $d \in A$. Поскольку A центрально существенно, то $dx = y$ для некоторых ненулевых центральных элементов $x, y \in A$. Тогда $B \cap yA = 0$.

(b) См. пример 3.6.8. □

1.1.4. Центральные идемпотенты. Если не обязательно унитальное кольцо A центрально существенно, то каждый идемпотент $e \in A$ лежит в центре $Z(A)$.

Доказательство. Можно считать, что A не коммутативно. Пусть $a \in A$. Надо доказать, что $ae = ea = eae$. Сначала мы докажем соотношение $e(a-ae) = 0$. Допустим противное, $e(a-ae) \neq 0$. Так как кольцо A центрально существенно, то найдутся такие $x, y \in Z(A)$, что

$$xe(a - ae) = y = ey = ye \neq 0.$$

Тогда

$$0 \neq y = ye = xe(a - ae)e = x(eae - eae) = 0.$$

Получено противоречие. Поэтому $e(a - ae) = 0$. Аналогично имеем $(a - ea)e = 0$. Поэтому идемпотент e централен. □

1.1.5. (см. [43]). Пусть кольцо A центрально существенное (не обязательно унитально), $e = e^2 \in A$, $a, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in A$ и

$$\begin{cases} x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = e, \\ x_1aey_1 + \ldots + x_naey_n = 0. \end{cases}.$$

Тогда $ae = 0$.

Доказательство. Допустим, что $ae \neq 0$. Если элемент ae централен, то

$$ae = ae^2 = ae(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) = x_1aey_1 + \ldots + x_naey_n = 0,$$

и получаем противоречие.

Теперь допустим, что элемент ae не централен. Так как кольцо A центрально существенно и $ae \neq 0$, то существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in A$, что $xae = y$. Заметим, что $y = ye$. Поэтому

$$0 \neq y = ye = y(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) = x(x_1yey_1 + \ldots + x_naey_n) = 0,$$

и получаем противоречие. Поэтому $ae = 0$. □

1.1.6. Максимальные правые идеалы. Если A — центрально существенное кольцо с $1 \neq 0$ и M — максимальный правый идеал кольца A, то либо M — идеал, либо существует ненулевой центральный элемент

$$x \in \left(\bigcap_{n \geqslant 1} M^n \right).$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют такие ненулевые элементы $m \in M$ и $a \in A$, что $am \notin M$. Так как M — максимальный правый идеал, то существуют такие элементы $b \in A$ и $m' \in M$, что $1 = amb + m'$. Поскольку кольцо A центрально существенно, то существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in A$, что $ax = y$. Тогда

$$x = (amb + m')x = (ax)mb + m'x = mby + m'x \in M,$$

причем $(ax)mb \in M^2$ и $m'x \in M^2$. Поэтому $x = (ax)mb + m'x \in M^2$, причем $(ax)mb, m'x \in M^3$. Тогда $x \in M^3$. Повторяя аналогичные рассуждения, получаем, что

$$0 \neq x \in \left(\bigcap_{n \geqslant 1} M^n \right).$$

□

1.1.7. Предложение. *Пусть R — кольцо и A — такое подкольцо в R, что существует базис модуля R_A, содержащийся в $Z(R)$. Если кольцо A центрально существенно, то кольцо R также центрально существенно.*

Доказательство. Пусть B — базис модуля R_A и $B \subseteq Z(R)$. Каждый элемент $r \in R \setminus \{0\}$ имеет единственное разложение вида

$$r = \sum_{i=1}^{n} b_i s_i, \quad \text{где} \quad b_1 \dots b_n \in B \quad \text{и} \quad s_1 \dots s_n \in R \setminus \{0\}. \tag{1.1.7.1}$$

Определим функцию $k\colon R \to \mathbb{Z}$, приравнивая $k(r)$ числу коэффициентов s_i в приведенном выше разложении (1.1.7.1), принадлежащих $Z(A)$ при $r \neq 0$ и $k(0) = 0$. Ясно, что $r \in Z(A)$ в точности тогда, когда $k(r) = 0$. Теперь пусть $x \in R \setminus \{0\}$. Во множестве $xZ(A) \setminus \{0\}$ возьмем такой элемент r, что целое число $k(r)$ минимально. Покажем, что $k(r) = 0$. Допустим противное. Тогда можно считать, что $s_1 \in Z(A)$ в (1.1.7.1). Так как кольцо A центрально существенно, то существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in Z(A)$, что $xs_1 = y$. Тогда $xr \in xZ(A)$, $xr \neq 0$ и $k(xr) < k(r)$; это противоречит выбору элемента r. Получаем, что $0 \neq r \in xZ(A) \cap Z(R) \subseteq xZ(R) \cap Z(R)$. □

1.1.8. Предложение. *Пусть F — поле и R — центрально существенная F-алгебра. Тогда для любой коммутативной F-алгебры A алгебра $A \otimes_F R$ центрально существенна.*

Доказательство. Если B — F-базис коммутативной алгебры A, то $\{b \otimes 1 \mid b \in B\}$ — базис свободного модуля $(A \otimes R)_R$, удовлетворяющий условиям предложения 1.1.7. □

1.1.9. Замечание. Если A — центрально существенное кольцо с центром $C = Z(A)$, то каждый его правый идеал B является существенным расширением идеала

$$M = \bigoplus_{i \in I} c_i A, \quad c_i \in C,$$

порожденного центральными элементами.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — непустое множество всех идеалов кольца A, лежащих в B и являющихся прямой суммой главных идеалов, порожденных центральным элементом. Зададим на $\mathcal{M}$ частичный порядок так, что $M_1 \leqslant M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1 \oplus X$, $X \in \mathcal{M}$. По лемме Цорна $\mathcal{M}$ содержит максимальный элемент M. Допустим, что B_A не является существенным расширением M_A. Тогда существует такой ненулевой элемент $b \in B$, что $M \cap bA = 0$. Так как A — цс кольцо, то $bc = d$ для некоторых ненулевых центральных элементов $c, d \in A$. Тогда $M \cap dA = 0$ и $M \oplus dA$ — элемент множества $\mathcal{M}$, который строго больше максимального элемента M. Получено противоречие. □

1.1.10. Замечание. Непосредственно проверяется, что любое фильтрованное произведение центрально существенных колец — центрально существенное кольцо. В частности, ультрастепень центрально существенного кольца — центрально существенное кольцо.

1.1.11. Открытый вопрос. Верно ли, что любое тензорное произведение центрально существенных алгебр центрально существенно?

1.2. Полупервичные и несингулярные кольца. Напомним, что кольцо A называется *полупервичным*, если A не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Кольцо A с ненулевой 1 *несингулярно справа*, если правый идеал $r_A(a)$ любого ненулевого $a \in A$ не является существенным.

1.2.1. Лемма. *Пусть A — центрально существенное кольцо с центром $C = Z(A)$ и a — ненулевой элемент кольца A. Если $a^n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, то существует такой ненулевой центральный элемент y кольца A, что $y \in (aC) \cap (Ca)$, $(AyA)^n = 0$ и $(yC)^n = 0$. Следовательно, если хотя бы одно из колец A, C полупервично, то A не имеет ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. Так как $a \neq 0$ и кольцо A центрально существенно, то $ax = xa = y$ для некоторых ненулевых центральных элементов x и y кольца A. Тогда

$$(AyA)^n = y^n A^n = (ax)^n A^n = a^n x^n A^n = 0.$$

□

1.2.2. Теорема (см. [47, Theorem 1.3(a)]). *Пусть A — центрально существенное кольцо. Если хотя бы одно из колец A и $Z(A)$ полупервично, то A — коммутативное кольцо без ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. По лемме 1.2.1 кольцо A не имеет ненулевых нильпотентных элементов. Допустим, что кольцо A не коммутативно. Тогда $ab-ba \neq 0$ для некоторых $a, b \in A$. Пусть $C = Z(A)$ — центр кольца A и $E = \{c \in C \mid ac \in C\}$. Имеем, что E — идеал кольца C. Возьмем любой элемент $d \in C$ с условием $dE = 0$. Если $xd \neq 0$, то $xdz \in C \setminus \{0\}$ для некоторого $z \in C$. Поэтому $dz \in E$, откуда $d(dz) = 0$ и $(dz)^2 = 0$. Таким образом, $dz = 0$ и $xdz = 0$; получено противоречие. Поэтому $xd = 0$, откуда $d \in E$. Поэтому $d^2 = 0$ и $d = 0$. Тогда получаем, что $\mathrm{Ann}_C(E) = 0$. Для любого $i \in E$ имеем $xi = ix \in C$, откуда

$$[x, y]i = (xy - yx)i = x(yi) - y(xi) = xiy - xiy = 0$$

и $[x, y]E = 0$. Но $c_1[x, y] = c_2$ для некоторых $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$, откуда $c_2E = 0$ и поэтому $\mathrm{Ann}_C(E) \neq 0$; получено противоречие. Поэтому кольцо A коммутативно. □

1.2.3. Замечание. В связи с теоремой 1.2.2 заметим, что кольцо A с полупервичным центром $Z(A)$ не обязательно коммутативно. Соответствующий пример — это кольцо A всех 2×2 матриц над $\mathbb{R}$; центр кольца A состоит из скалярных матриц.

1.2.4. Следствие. *Если кольцо A центрально существенно и несингулярно справа, то A коммутативно и без ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2.2 достаточно доказать, что A — кольцо без ненулевых нильпотентных элементов. Допустим противное. Существует такой ненулевой элемент a кольца A, что $a^2 = 0$. Так как A центрально существенно, то существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in A$, что $ax = y$. Из леммы Цорна следует существование такого правого идеала B кольца A, что $B \cap yA = 0$ и правый идеал $B \oplus yA$ является существенным. Так как $yB = By \subseteq B \cap yA = 0$ и $y^2 = a^2x^2 = 0$, имеем $y(B \oplus yA) = 0$. Так как правый идеал $B \oplus yA$ является существенным, $y = 0$; получено противоречие. □

В связи с теоремой 1.2.2 мы докажем следующее предложение.

1.2.5. Предложение (см. [43]). *Если A — не обязательно унитальное центрально существенное кольцо и его центр является полупервичным кольцом, то кольцо A коммутативно.*

Доказательство. Допустим, что кольцо A не коммутативно, т. е. существуют такие элементы $a, b \in A$, что $ab - ba \neq 0$. Так как кольцо A центрально существенно, то существуют такие ненулевые центральные элементы x и y, что $(ab - ba)x = y$. Заметим, что $ay \neq 0$; в противном случае

$$y^2 = (ab - ba)xy = ((ay)b - b(ay))x = 0,$$

что невозможно, так как $y \neq 0$.

Если $ay \notin Z(A)$, то существуют такие ненулевые центральные элементы $z, t \in A$, что $ayz = t$. Рассмотрим множество $W = \{w \in Z(A) \mid aw \in Z(A)\}$. Ясно, что $yz \in W$. Теперь допустим, что $yW = 0$. Тогда $y(yz) = 0$, $(yz)^2 = 0$ и $yz = 0$; получено противоречие. Поэтому $yw \neq 0$ для некоторого $w \in W$. Однако

$$yw = (ab - ba)yw = ((wa)b - b(wa))x = 0,$$

и также получено противоречие.

Таким образом, имеем $0 \neq ay \in Z(A)$.

Допустим, что $at \in Z(A)$. Тогда $ayb \neq 0$; в противном случае

$$y^2 = (ayb - bay)x = -bayx = aybx = 0.$$

Кроме того, $(ab)y = (ba)y$. Поэтому $(ab - ba)y = 0$. Однако $y^2 = (ab - ba)xy = 0$; получено противоречие. Таким образом, кольцо R коммутативно. □

1.2.6. Замечание. Если A — кольцо и факторкольцо $A/J(A)$ центрально существенно, то все максимальные правые идеалы кольца A являются идеалами.

Доказательство. Так как $A/J(A)$ — центрально существенное полупервичное кольцо, то по теореме 1.2.2 кольцо $A/J(A)$ коммутативно. В частности, все максимальные правые идеалы кольца $A/J(A)$ являются идеалами. Тогда все максимальные правые идеалы кольца A являются идеалами. □

1.3. Локальные и полусовершенные кольца. Пусть A кольцо с радикалом Джекобсона $J(A)$. Кольцо A называется *локальным*, если факторкольцо $A/J(A)$ — тело. Кольцо A называется *полусовершенным*, если факторкольцо $A/J(A)$ изоморфно конечному прямому произведению колец матриц над телами и каждый идемпотент факторкольца $A/J(A)$ является образом идемпотента $e \in A$ при естественном эпиморфизме $A \to A/J(A)$.

1.3.1. Замечание. Ясно, что любое конечное прямое произведение локальных колец является полусовершенным кольцом. Кроме того, все идемпотенты любого центрально существенного кольца центральны в силу 1.1.4. Отсюда следует, что центрально существенные полусовершенные кольца совпадают с конечными прямыми произведениями центрально существенных локальных колец, и их изучение сводится к изучению центрально существенных локальных колец.

1.3.2. Теорема. *Пусть A — центрально существенное локальное кольцо с радикалом Джекобсона $J(A)$. Тогда факторкольцо $A/J(A)$ является полем (в частности, коммутативно) и $M \cap Z(A) \neq 0$ для каждого минимального правого идеала M.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$ и $ab - ba \notin J(A)$. Элемент $ab - ba$ обратим, так как A локально. Так как $a \neq 0$ и A центрально существенно, то $ax = y$ для некоторых ненулевых $x, y \in Z(A)$. Тогда

$$x = x(ab - ba)(ab - ba)^{-1} = (yb - by)(ab - ba)^{-1} = 0;$$

получено противоречие. Поэтому $ab - ba \in J(A)$ и кольцо $A/J(A)$ коммутативно.

Теперь допустим, что $M \cap Z(A) = 0$ для некоторого минимального правого идеала M кольца A. Пусть m — ненулевой элемент из M. По предположению существуют такие ненулевые центральные элементы x и y кольца A, что $mx = y$. Так как $x \notin J(A)$ (в противном случае $mx = 0$), то элемент x обратим в A и $m = x^{-1}y \in Z(A)$; получено противоречие. □

1.3.3. Теорема. *Пусть A — центрально существенное полусовершенное кольцо с центром $C = Z(A)$. Тогда $A/J(A)$ — конечное прямое произведение полей. В частности, кольцо $A/J(A)$ коммутативно. Кроме того, A — конечное прямое произведение центрально существенных локальных колец и $\mathrm{Soc}(A_C) \subseteq C$.*

Доказательство. По определению полусовершенного кольца $A/J(A)$ — прямая сумма простых артиновых колец, каждое из которых изоморфно кольцу матриц над телом. Пусть $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — полная система неразложимых ортогональных идемпотентов кольца $\bar{A} = A/J(A)$. Тогда существует такая полная система неразложимых ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ в A, что $e_i + J(A) = \bar{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$. В силу 1.1.4 все идемпотенты $e_1, \ldots, e_n$ центральны. Поэтому

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i e_i$$

— разложение кольца A в прямую сумму локальных центрально существенных колец. Следовательно, все кольца $A_i/J(A_i)$ коммутативны в силу теоремы 1.3.2. Непосредственно проверяется, что все кольца $A_i = Ae_i$ центрально существенны; поэтому тело $A_i/J(A_i)$ коммутативно. Тогда кольцо

$$R/J(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i/J(R_i)$$

тоже коммутативно.

Из изложенного выше следует, что без ограничения общности можно считать кольцо A локальным. Заметим, что $J(C) = C \cap J(A)$ и C — локальное кольцо.

Теперь пусть s — ненулевой элемент из $\operatorname{Soc}(R_C)$. Существуют такие ненулевые центральные элементы x, y, что $sx = y$. Ясно, что $x \notin J(R)$, так как $J(C)\operatorname{Soc} A_C = 0$. Следовательно, x — обратимый элемент и $s = x^{-1}y \in C$. $\square$

1.3.4. Замечание. Из изложенного выше следует, что если A — центрально существенное полусовершенное кольцо, то $\operatorname{Soc}_A A = \operatorname{Soc} A_A$.

1.4. Совершенные и полуартиновы кольца. Пусть A — кольцо с радикалом Джекобсона $J(A)$.

Кольцо A называется *совершенным слева*, если A полусовершенно и радикал $J(R)$ *T-нильпотентен слева*, т. е. для любой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ элементов из $J(A)$ существует такой индекс n, что $x_1x_2\ldots x_n = 0$. Совершенные справа кольца определяются аналогично.

Кольцо A называется *полулокальным*, если факторкольцо $A/J(A)$ изоморфно конечному прямому произведению колец матриц над телами.

Модуль M называется *полуартиновым*, если либо $M = 0$, либо каждый ненулевой фактормодуль модуля M — существенное расширение полупростого модуля.

1.4.1. Теорема. *Пусть A — совершенное справа или слева кольцо с центром $C = Z(A)$.*

(a) *Кольцо A центрально существенно в точности тогда, когда* $\operatorname{Soc} A_C \subseteq C$ *и все идемпотенты кольца A центральны.*

(b) *Если все идемпотенты кольца A центральны, факторкольцо $A/J(A)$ коммутативно,* $\operatorname{Soc} A_C = \operatorname{Soc} A_A$ *и* $M \cap C \neq 0$ *для каждого минимального правого идеала M, то кольцо A центрально существенно.*

Доказательство. (a) Если A центрально существенно, то $\operatorname{Soc} A_C \subseteq C$ и все идемпотенты кольца A центральны в силу 1.1.4 и теоремы 1.3.3.

Наоборот, пусть $\operatorname{Soc} A_C \subseteq C$ и все идемпотенты кольца A центральны. Так как все идемпотенты центральны, то можно считать, что A — локальное кольцо. Тогда $J(C) = C \cap J(A)$ и $C/J(C)$ — поле.

Пусть x — ненулевой элемент кольца A. Если $J(C)x = 0$, то $x \in \operatorname{Soc} A_C$; поэтому $x \in C$. В противном случае существует такой элемент $c_1 \in J(C)$, что $c_1x \neq 0$. Если $J(C)c_1x = 0$, то $c_1x \in \operatorname{Soc} A_C$ и $c_1x \in C$; в противном случае возьмем такой элемент $c_2 \in J(C)$, что $c_2c_1x \neq 0$, и так далее. Так как радикал $J(A)$ совершенного справа или слева кольца A является T-нильпотентным справа или слева и элементы c_i центральны, этот процесс остановится на некотором конечном шаге.

(b) В силу (a) достаточно доказать соотношение $\operatorname{Soc} A_C \subseteq C$, эквивалентное тому, что $M \subseteq C$ для любого минимального правого идеала M. По предположению $M \cap C \neq 0$ и по предположению кольцо $A/J(A)$ коммутативно; поэтому имеем $ab - ba \in J(A)$ для всех $a, b \in A$. Для каждого $m \in M \cap C$ имеем $m(ab - ba) = 0$. С другой стороны, так как $m \in C$, то

$$(ma)b = mba = b(ma), \quad ma \in C.$$

Кроме того, $ma \in M$. Следовательно, $M \cap C$ — ненулевой правый идеал кольца A. Так как M — минимальный правый идеал, $M \cap C = M$ и $M \subset C$. Поэтому $\operatorname{Soc} A_C = \operatorname{Soc} A_A \subseteq C$. $\square$

1.4.2. Замечание. В теореме 1.4.1 нельзя опустить условие, что R совершенно справа или слева, так как каждая некоммутативная локальная область (например, кольцо формальных степенных рядов от одной переменной над телом гамильтоновых кватернионов) удовлетворяет всем оставшимся условиям этой теоремы, но это кольцо не центрально существенно.

1.4.3. Лемма. *Пусть A — полупервичное кольцо и $S = \operatorname{Soc} A_A$ — правый цоколь. Если S — существенный правый идеал кольца A и $st = ts$ для всех $s, t \in S$, то кольцо A коммутативно.*

Доказательство. Докажем следующее свойство 1.4.3.1 нашего кольца A:

$$\begin{array}{l}\text{если } e = e^2 \in A \text{ и } eA \text{ — минимальный правый идеал,} \\ \text{то идемпотент } e \text{ централен.}\end{array} \tag{1.4.3.1}$$

Действительно, пусть $a \in A$. Так как S — идеал, то $ae \in S$. По условию

$$eae = e \cdot ae = ae \cdot e = ae.$$

Аналогично, $ea = eae = ae$ и идемпотент e централен.

Докажем, что $ab - ba = 0$ для любых элементов $a, b \in A$. Допустим, что $ab - ba \neq 0$. Хорошо известно, что каждый минимальный правый идеал полупервичного кольца порождается идемпотентом; см., например, [38, Sec. 3.4]. Так как S — существенный правый идеал и порождается в силу сказанного выше идемпотентами, то $S \cap (ab - ba)A \neq 0$ и $e(ab - ba) \neq 0$ для некоторого идемпотента $e \in A$. Тогда $eab \neq eba$ и $(ea)(eb) = (eb)(ea)$ по условию.

В силу свойства 1.4.3.1 идемпотент e централен. Тогда

$$eab = eeab = eaeb = ebea = eba;$$

получено противоречие. Поэтому A коммутативно. □

1.4.4. Лемма. *Пусть A — центрально существенное кольцо и пусть P — такой полупервичный ниль-идеал кольца A, что правый цоколь S/R кольца A/P — существенный правый идеал кольца A/P. Тогда кольцо A/P коммутативно.*

Доказательство. Мы используем следующие хорошо известные факты (см., например, [38, Secs. 3.4, 3.6]):

(a) В любом полупервичном кольце R множество всех минимальных правых идеалов совпадает с множеством всех минимальных левых идеалов и это множество совпадает с множеством всех таких правых идеалов eR, что $e = e^2$ и eRe — тело; кроме того, $\operatorname{Soc} R_R = \operatorname{Soc}_R R$.

(b) Если R — кольцо и P — ниль-идеал кольца R, то каждый идемпотент $\overline{e}$ кольца R/P имеет вид $e + P$, где $e = e^2 \in R$.

Пусть $h\colon A \to A/P$ — естественный эпиморфизм. Для каждого подмножества X в A будем писать $\overline{X}$ вместо $h(X)$. В силу (a) существует такой идеал S кольца A, что $P \subset S$ и $\overline{S} = \operatorname{Soc}_{\overline{A}} \overline{A} = \operatorname{Soc} \overline{A}_{\overline{A}}$.

Сначала покажем, что идеал $\overline{S}$ коммутативен. В силу (a) и (b) любой минимальный левый идеал V кольца $\overline{A}$ порождается некоторым примитивным идемпотентом $\overline{e}$, который имеет вид $\overline{e} = e + P$ для некоторого примитивного идемпотента e кольца A. По 1.1.4 идемпотент e централен. Поэтому V — идеал в $\overline{A}$, eA и $(1 - e)A$ — идеалы в A и $A = eA \oplus (1 - e)A$. Поэтому кольцо eA центрально существенно. Кроме того, $\overline{e}\overline{A}\overline{e} = \overline{e}\overline{A} = V$ и $V = (eA + P)/P \cong eA/(P \cap eA)$. Поэтому $J(eA) \subseteq P \cap eA$. Но P — ниль-идеал, откуда $P \cap eA \subseteq J(eA)$ и $P \cap eA = J(eA)$. По теореме 1.3.2 кольцо V коммутативно. Поэтому $\operatorname{Soc}(\overline{A})$ — коммутативное кольцо, как прямая сумма коммутативных колец. Кроме того, $\operatorname{Soc}(\overline{A})$ — существенный правый идеал полупервичного кольца $\overline{A}$. Тогда $\overline{A}$ коммутативно по лемме 1.4.3. □

1.4.5. Теорема. *Если A — центрально существенное, полуартиново слева или справа кольцо, то $A/J(A)$ — коммутативное регулярное (по фон Нейману) кольцо.*

Доказательство. Пусть A — центрально существенное полуартиново справа или слева кольцо и $\overline{A} = A/J(A)$. Так как A — полуартиново справа или слева кольцо, то $J(A)$ — ниль-идеал в силу [54, Proposition 3.2]. По лемме 1.4.4 кольцо $A/J(A)$ коммутативно. Каждое коммутативное полуартиново полупримитивное кольцо регулярно по фон Нейману в силу [54, Theorem 3.1]. □

2. Градуированные кольца и внешние алгебры

Результаты подразделов 2.1 и 2.2 основываются на [4].

2.1. Градуированные кольца.

2.1.1. Градуированность и однородные элементы. Пусть $(S,+)$ — полугруппа. Кольцо A называется *S-градуированным*, если A — прямая сумма аддитивных подгрупп A_s, $s \in S$, и $A_sA_t \subseteq A_{s+t}$ для любых элементов $s, t \in S$.

Для любого $s \in S$ элементы подгруппы A_s называются *однородными* элементами степени s.

Если $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$, то S-градуированные кольца называются *градуированными* кольцами. Непосредственно проверяется, что единица градуированного кольца содержится в подгруппе A_0. На произвольном градуированном кольце

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_n$$

можно определить $\mathbb{Z}_2$-градуировку:

$$A = A_{(0)} \oplus A_{(1)}, \quad \text{где} \quad A_{(i)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_{2k+i}, \quad i \in \{0, 1\}.$$

2.1.2. Обобщенно антикоммутативные и однородно точные кольца. Говорят, что градуированное кольцо

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_n$$

обобщенно антикоммутативно, если для любых целых чисел $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и произвольных элементов $x \in A_m$ и $y \in A_n$ выполняется соотношение $yx = (-1)^{mn}xy$.

Если градуированное кольцо

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_n$$

удовлетворяет условию

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad A_{m+n} \neq 0 \Rightarrow A_m \neq 0 \ \& \ \forall x \in A_m \setminus \{0\}, \quad xA_n \neq 0, \tag{2.1.2.1}$$

то будем говорить, что R — *однородно точное* кольцо.

2.1.3. Центр градуированного кольца. В любом градуированном кольце

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_n$$

выполняется соотношение:

$$Z(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (A_n \cap Z(A)).$$

Замечание. Если S — коммутативная полугруппа с сокращениями, то приведенное ниже доказательство остается верным для каждого S-градуированного кольца.

Доказательство. Включение

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (A_n \cap Z(A)) \subseteq Z(A)$$

очевидно.

Пусть $x = x_0 + x_1 + \ldots x_n \in Z(A)$, где $x_i \in A_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Если $y \in A_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то $0 = [x, y] = [x_0, y] + \ldots + [x_n, y]$ и слагаемые последней суммы содержатся в различных прямых слагаемых $A_m, A_{m+1}, \ldots, A_{m+n}$. Поэтому $[x_i, y] = 0$ для любого однородного элемента y и всех $i = 0, 1, \ldots, n$. Тогда $x_i \in Z(A)$, так как любой элемент кольца является суммой однородных элементов. □

2.1.4. Пусть

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} A_n$$

— градуированное обобщенно антикоммутативное однородно точное кольцо, которое не имеет аддитивно 2-периодических элементов. Если существует такое нечетное положительное целое число n, что $A_n \neq 0$ и $A_{n+1} = 0$, то $Z(A) = A_{(0)} + A_n$. В противном случае $Z(A) = A_{(0)}$.

Доказательство. Из соотношения обобщенной антикоммутативности следует, что $A_{(0)} \subseteq Z(A)$. Следующее свойство следует из (2.1.2.1): если такое целое число n существует, то $A_m = 0$ для $m > n$ и $A_m \neq 0$ для $0 \leqslant m \leqslant n$, кроме того, если $x \in A_n$ и $y = y_0 + z \in A$, где $y_0 \in A_0$ и $z \in \bigoplus_{m>0} A_m$, то $[x,y] = [x,y_0] = 0$, т. е. $A_n \subseteq Z(A)$. Наоборот, пусть $x \in Z(A)$. В силу 2.1.3 можно считать, что x — однородный элемент нечетной степени i. Пусть $x \neq 0$ и $A_{i+1} \neq 0$. Тогда из (2.1.2.1) следует, что существует такой элемент $y \in A_1$, что $xy \neq 0$. Получаем, что $0 = [x,y] = 2xy$; получено противоречие. Таким образом, либо $x = 0$, либо $x \neq 0$, но $A_{i+1} = 0$, т. е. $i = n$. $\square$

2.1.5. Теорема. *Пусть*

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} A_n$$

— градуированное обобщенно антикоммутативное однородно точное кольцо без аддитивно 2-*периодических элементов. Кольцо A центрально существенно в точности тогда, когда либо $A = A_0$, либо существует такое нечетное положительное целое число n, что $A_n \neq 0$ и $A_{n+1} =$* 0.

Доказательство. Пусть A — центрально существенное кольцо, $C = Z(A)$ и $A \neq A_0$. В силу (2.1.2.1) имеем $A_1 \neq 0$. Возьмем элемент $x \in A_1 \setminus \{0\}$ и допустим, что такое целое число n не существует. В силу 2.1.3 имеем $C = A_{(0)}$ и $xC \subseteq A_{(1)}$, откуда $xC \cap C \subseteq A_{(1)} \cap A_{(0)} = 0$; получено противоречие.

Наоборот, если $A = A_0$, то $C = A$, так как кольцо A_0 коммутативно. Допустим, что существует такое нечетное положительное целое число n, что $A_n \neq 0$ и $A_{n+1} = 0$. Пусть $0 \neq x \in A \setminus C$. Имеем $x = x_0 + \ldots + x_n$, где $x_i \in A_i$, и возьмем такое наименьшее нечетное положительное целое число m, что $x_m \neq 0$. Ясно, что $1 \leqslant m \leqslant n$. Положим $k = n - m$ и возьмем такой элемент $y \in A_k$, что $x_m y \neq 0$. Ясно, что $y \in C$. Кроме того, xy является суммой однородных элементов четной степени и элемента $x_m y$ нечетной степени n. Поэтому $xy \in C$ в силу 2.1.3 и $xy \neq 0$. $\square$

2.2. Внешние алгебры над полями.

2.2.1. Пусть F — поле характеристики 0 или $p \neq 2$, $V = F^n$ — векторное пространство над F размерности $n > 0$, и пусть $\Lambda(V)$ — внешняя алгебра пространства V [11, § III.5], которая определяется как унитальная F-алгебра относительно операции умножения $\wedge$ с образующими $e_1, \ldots, e_n$ и определяющими соотношения $e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Алгебра $\Lambda(V)$ имеет естественную градуировку:

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \Lambda^p(V),$$

где $\Lambda^p(V)$ для $1 \leqslant p \leqslant n$, — векторное пространство с базисом

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} : 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n\},$$

$\Lambda^0(V) = F$ и $\Lambda^p(V) = 0$ для $p > n$.

Хорошо известно, что внешние алгебры являются обобщенно антикоммутативными.

2.2.2. Градуированная алгебра $R = \Lambda(V)$ является однородно точным кольцом.

Доказательство. Пусть $p, q \in \{0, \ldots, n\}$ и $p + q \leqslant n$. Если $pq = 0$, то условие (2.1.2.1) выполняется. Теперь пусть $0 < p < n$ и $0 \neq x \in R_p$. Возьмем базисный элемент $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$, который имеет ненулевой коэффициент в представлении x. Так как $p + q \leqslant n$, то существуют такие индексы $j_1, \ldots, j_q \in \{1, \ldots, n\}$, что $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n$ и $\{i_1, \ldots, i_p\} \cap \{j_1, \ldots, j_q\} = \varnothing$. Положим $y = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q}$ и заметим, что базисный элемент $\pm e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q}$ пространства $\Lambda^{p+q}(V)$ имеет ненулевой коэффициент в представлении элемента xy, так как произведения оставшихся базисных элементов пространства $\Lambda^p(V)$ на элемент y либо равны 0, либо равны $\pm$другим базисным элементам пространства $\Lambda^{p+q}(V)$. $\square$

2.2.3. Теорема. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F характеристики 0 или $p \neq 2$. Внешняя алгебра $\Lambda(V)$ пространства V является центрально существенным кольцом в точности тогда, когда V имеет нечетную размерность.*

Теорема 2.2.3 следует из 2.2.2 и 2.1.4.

2.2.4. Если F — конечное поле нечетной характеристики и $\dim V$ — нечетное положительное целое число, превышающее 1, то $\Lambda(V)$ — центрально существенное некоммутативное конечное кольцо. Итак, если F — конечное поле порядка 3 и $\Lambda(V)$ — 8-мерная F-алгебра с базисом

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\},$$

то $\Lambda(V)$ — центрально существенное некоммутативное конечное кольцо порядка 3^8.

2.2.5. Пример. Если R — центрально существенное кольцо и B — собственный идеал кольца R, порожденный некоторым бесконечным множеством центральных идемпотентов и факторкольцо R/B не имеет нетривиальных идемпотентов, то кольцо R/B не обязательно центрально существенно.

Доказательство. Пусть F — поле из трех элементов, $A = \Lambda(F^3)$ — внешняя алгебра трехмерного векторного F-пространства F^3 и пусть $S = \Lambda(F^2)$ — внешняя алгебра двумерного векторного F-пространства F^2, рассматриваемого как подалгебра алгебры A. Рассмотрим прямое произведение $P = A^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in A\}$ счетного множества копий кольца A и его подкольцо R, состоящее из всех финально постоянных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots) \in P$, которые стабилизируются на элементах алгебры S на конечном шаге, зависящем от последовательности.

Пусть e_i — центральный идемпотент, который имеет единицу поля F на i-й позиции и нули на оставшихся позициях. Обозначим через B идеал кольца R, порожденный всеми идемпотентами $\{e_i\}$. Из теоремы 2.2.3 следует, что R — центрально существенное кольцо и факторкольцо R/B изоморфно кольцу S, которое не центрально существенно и не имеет нетривиальных идемпотентов. $\square$

2.3. Внешние алгебры над кольцами. Результаты данного подраздела основываются на статье [47].

2.3.1. Пусть A — не обязательно коммутативное кольцо с центром $C = Z(A)$ и A^n — конечно порожденный свободный модуль ранга n. Определим алгебру $\Lambda(A^n)$ модуля A^n. А именно $\Lambda(A^n) = A \otimes_C \Lambda(C^n)$, где $\Lambda(C^n)$ — внешняя алгебра свободного модуля C^n над коммутативным кольцом C; см. [11, § III.5].

Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис модуля C^n. Отождествим $1 \otimes x$ с x для всех $x \in \Lambda(C^n)$ и получим, что множество

$$B_n = \{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s} \mid 0 \leqslant s \leqslant n,\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n\}$$

— базис A-модуля $\Lambda(A^n)$ (считаем, что произведение равно 1 для $s = 0$). Ясно, что кольцо $R = \Lambda(A^n)$ имеет естественную градуировку $R = \bigoplus_{s \geqslant 0} R_s$, где $R_0 = A$,

$$R_s = \bigoplus_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n} A e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}$$

для $1 \leqslant s \leqslant n$, и $R_s = 0$ для $s > n$.

2.3.2. Теорема. *Для положительного целого числа n и кольца A с центром $C = Z(A)$ кольцо $\Lambda(A^n)$ центрально существенно в точности тогда, когда A центрально существенно и выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

(a) *n — нечетное целое число.*

(b) *Идеал $\mathrm{Ann}_A(2)$ — существенный подмодуль модуля A_C.*

Доказательство. Положим $R = \Lambda(A^n)$. Пусть R центрально существенно.

Пусть $a \in A \setminus \{0\}$ и $a' = ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Тогда $0 \neq a' \in R$. Поэтому существует такой элемент $c \in Z(R)$, что $0 \neq ca' \in Z(R)$. Имеем $c = c_0 + c'$, где $c_0 \in A$, и $c' \in \bigoplus_{s>0} R_s$. Непосредственно проверяется, что $c_0 \in Z(A) = Z(R) \cap R_0$. Также ясно, что $ca' = c_0a' = c_0ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, откуда $c_0a \neq 0$. Для каждого $b \in A$, имеем

$$0 = [b, c_0ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n] = [b, c_0a]e_1 \wedge \ldots \wedge e_n,$$

откуда $c_0a \in Z(A)$, т. е. A — центрально существенное кольцо.

Допустим, что идеал $\mathrm{Ann}_A(2)$ не является существенным подмодулем модуля A_C и n — четное целое число.

Возьмем такой элемент $a \in A$, что $a \neq 0$ и $Ca \cap \mathrm{Ann}_A(2) = 0$. Рассмотрим элемент $x = ae_2 \wedge \ldots \wedge e_n$.

Пусть $c \in Z(R)$ и $0 \neq cx \in Z(R)$. Имеем $c = c_0 + c_1e_1 + c'$, где c' — линейная комбинация элементов базиса B_n, которые равны 1 и e_1. Ясно, что $c_0, c_1 \in C$ и $cx = c_0ae_2 \wedge \ldots \wedge e_n + c_1ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, где оба слагаемых содержатся в центре кольца R.

Докажем, что $c_0a = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= [e_1, c_0ae_2 \wedge \ldots \wedge e_n] = \\ &= c_0ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n - c_0ae_2 \wedge \ldots \wedge e_n \wedge e_1 = \\ &= c_0a(1 - (-1)^{n-1})e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = 2c_0ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n, \end{aligned}$$

откуда $c_0a \in \mathrm{Ann}_A(2) \cap Ca = 0$ в силу выбора a. Тогда $c_1a \neq 0$ и $c_1e_1 \in Z(R)$. Но $c_1 \in C$, $0 = [c_1e_1, e_2] = 2c_1e_1 \wedge e_2$. Тогда $c_1a \in Ca \cap \mathrm{Ann}_A(2) = 0$. Получено противоречие.

Теперь допустим, что A центрально существенно и выполняется хотя бы одно из указанных выше условий (a) или (b).

Пусть выполняется (a). Положим $N = \mathrm{Ann}_C(2) = C \cap \mathrm{Ann}_R(2)$. Заметим, что N — существенный подмодуль в A_C. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $x \in R$. Имеем

$$x = \sum_{s=0}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n} a_{i_1,\ldots,i_s} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s},$$

где коэффициенты $a_{i_1,\ldots,i_s}$ содержатся в A. Можно домножить x на элементы $C \subseteq Z(R)$ и получить ситуацию, где все коэффициенты из представления x содержатся в N. Действительно, если некоторый коэффициент $a_{i_1,\ldots,i_s}$ не содержится в N, то существует такой элемент $c \in C$, что $0 \neq ca_{i_1,\ldots,i_s} \in N$, т. е. при умножении на c число коэффициентов, содержащихся в N, уменьшается. Остается заметить, что $x \in Z(R)$, если все коэффициенты их представления x лежат в N. Действительно, $[x, a] = 0$ для любого $a \in A$, так как $N \subseteq Z(A)$ и

$$[x, e_i] = \sum_{s=0}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_s} a_{i_1,\ldots,i_s} [e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}, e_i].$$

Заметим, что если число s четно или $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$, то $[e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}, e_i] = 0$. В противном случае

$$[e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}, e_i] = \alpha e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s} \wedge e_i,$$

где $\alpha \in \{0, 2\}$, т. е. мы снова имеем $[a_{i_1,\ldots,i_s} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}, e_i] = 0$. Так как элементы кольца A и $e_1, \ldots, e_n$ порождают кольцо R, имеем $x \in Z(R)$, что и требовалось.

Теперь допустим, что выполняется условие (b). Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $x \in R$. Повторяя рассуждения из предыдущего случая, можно использовать умножение на элементы из C для получения такой ситуации, что все коэффициенты x относительно базиса B_n содержатся в C.

Возьмем такое наименьшее нечетное k, что элемент $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ базиса B_n содержится в представлении x с ненулевым коэффициентом a (если это невозможно, то $x \in Z(R)$). Пусть

$$m = n - k, \quad \{j_1, \ldots, j_q\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}.$$

Ясно, что целое число m четное, откуда $c = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_m} \in Z(R)$. Тогда непосредственно проверяется, что $cx = \pm a e_1 \wedge \ldots \wedge e_n + x'$, где x' — линейная комбинация элементов базиса B_n с четной степенью s и коэффициентами в C. Поэтому повторим рассуждения из предыдущего случая и получим, что $x' \in Z(R)$. Наконец, непосредственно проверяется, что $ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n \in Z(R)$. Утверждение доказано. □

2.3.3. Лемма. *Если A — кольцо конечной характеристики s и $C = Z(A)$, то следующие условия эквивалентны*:

(a) *Идеал* $\mathrm{Ann}_A(2)$ *— существенный подмодуль модуля* A_C.
(b) $s = 2^m$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. (a)⇒(b). Допустим противное. Тогда существует нечетное простое целое число p, делящее s. Ненулевой идеал $\mathrm{Ann}_A(p)$ кольца A имеет нулевое пересечение с идеалом $\mathrm{Ann}_A(2)$. Поэтому идеал $\mathrm{Ann}_A(2)$ не является существенным подмодулем модуля A_C. Получено противоречие.

(b)⇒(a). Допустим противное. Тогда существует. Так как $s = 2^m$, имеем, что для каждого $a \in A \setminus \{0\}$ выполняется соотношение $\mathrm{ord}\, a = 2^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $0 \neq 2^{k-1}a \in Ca \cap \mathrm{Ann}_A(2)$. Поэтому идеал $\mathrm{Ann}_A(2)$ — существенный подмодуль модуля A_C. □

Если A — кольцо конечной характеристики или A не имеет делителей нуля, то формулировка теоремы 2.3.2 может быть упрощена; см. теорему 2.3.4.

2.3.4. Теорема. *Пусть A — кольцо с центром $C = Z(A)$ и n положительное целое число.*

Кольцо $\Lambda(A^n)$ центрально существенно в точности тогда, когда A центрально существенно и выполняется хотя бы одно из следующих условий.

1. *Если A — кольцо конечной характеристики s (это так, если кольцо A конечно), то кольцо $\Lambda(A^n)$ центрально существенно в точности тогда, когда кольцо A центрально существенно и выполняется хотя бы одно из следующих условий.*
   (a) *n — нечетное целое число.*
   (b) $s = 2^m$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$.
2. *Если A — кольцо без делителей нуля, то кольцо $\Lambda(A^n)$ центрально существенно в точности тогда, когда кольцо A центрально существенно и выполняется хотя бы одно из следующих условий.*
   (a) *n — нечетное целое число.*
   (b) *A — кольцо характеристики 2.*

Доказательство. Положим $R = \Lambda(A^n)$.

Утверждение 1 следует из теоремы 2.3.2 и леммы 2.3.3.

Докажем 2. Если A — кольцо характеристики 2 или n — нечетное целое число, то R — центрально существенное кольцо в силу утверждения 1.

Теперь допустим, что A — кольцо без делителей нуля и кольцо R центрально существенно. В силу теоремы 2.3.2 кольцо A центрально существенно и достаточно рассмотреть случай, где n — четное целое число и идеал $\mathrm{Ann}_A(2)$ — существенный подмодуль модуля A_C. Так как A — кольцо без делителей нуля, $\mathrm{Ann}_A(2) = A$. Поэтому A — кольцо характеристики 2. □

3. Конструкции колец

3.1. Кольца многочленов, рядов и частных. Результаты подраздела 3.1 основываются на [51].

Для произвольного конечного подмножества S моноида G и любого кольца A обозначим через Σ_S элемент $\sum_{x\in S} x$ моноидного кольца AG. Для любого элемента $r = \sum_{g\in G} a_g \cdot g \in AG$ будем говорить, что множество $\{g \in G \mid a_g \neq 0\}$ — *носитель* элемента r и обозначим это множество через $\mathrm{supp}(r)$.

3.1.1. Моноидные кольца. Если A — центрально существенное кольцо и G — коммутативный моноид, то моноидное кольцо $R = AG$ центрально существенно.

Доказательство. Для любого ненулевого элемента $r = \sum_{g\in G} r_g \cdot g \in R$ пусть

$$k(r) = |\{g \in G \mid r_g \in Z(A)\}|.$$

Ясно, что $k(r) \leqslant |\mathrm{supp}(r)| < \infty$. Индукцией по k мы докажем, что для $k(r) = k$ существуют такие ненулевые центральные элементы x и y, что $rx = y$.

Если $k = 0$ то $r_g \in Z(A)$ для всех $g \in G$ и поэтому $r \in Z(R)$.

В противном случае, если $k > 0$ и $k(r) = k$, то можно взять элемент $h \in G$ с $r_h \in Z(A)$. Так как кольцо A центрально существенно, существуют ненулевые центральные элементы x и y с $xr_h = y$. Ясно, что $0 \neq xr = \sum\limits_{g\in G} xr_g \cdot g$ и $k(xr) < k(r)$. По предположению индукции существуют такие ненулевые центральные элементы u и v кольца R, что $uxr = v$. Так как $ux \in Z(R)$, то доказательство завершено. $\square$

Следующее утверждение является следствием из 3.1.1.

3.1.2. Кольца многочленов. Для любого центрально существенного кольца A кольцо многочленов $A[x]$ и кольцо многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$ центрально существенны.

3.1.3. Центральные кольца частных. Пусть A — центрально существенное кольцо, Q — кольцо частных кольца A относительно некоторой центральной мультипликативной системы S, состоящей из неделителей нуля, и пусть $0 \neq s^{-1}a = as^{-1} \in Q$, $s \in S$. По предположению существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in A$, что $ax = y$. Тогда $0 \neq as^{-1}x = s^{-1}y$ — центральный элемент кольца Q и кольцо Q центрально существенно. Аналогично доказывается, что если Q — центрально существенное кольцо, то A — центрально существенное кольцо.

3.1.4. Замечание. Так как кольцо формальных рядов Лорана $A((x))$ является кольцом частных кольца формальных степенных рядов $A[[x]]$ относительно центральной мультипликативной системы $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, из 3.1.3 следует, что кольцо $A((x))$ центрально существенно в точности тогда, когда кольцо $A[[x]]$ центрально существенно.

3.1.5. Предложение. *Если R — конечномерная центрально существенная алгебра, то кольцо формальных степенных рядов $R[[x]]$ центрально существенно.*

Доказательство. Достаточно доказать, что кольцо $R[[x]]$ изоморфно $F[[x]] \otimes R$. Сначала мы докажем инъективность естественного гомоморфизма $\varphi\colon F[[x]] \otimes R \to R[[x]]$, определенного соотношением $\varphi(f(x) \otimes r) = f(x)r$ для каждого $f(x) \in F[[x]]$ и $r \in R$. Действительно, каждый элемент алгебры $F[[x]] \otimes R$ может быть записан в виде

$$r = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \otimes r_i,$$

где $f_1(x), \ldots, f_n(x) \in F[[x]]$, $r_1, \ldots, r_n$ — линейно независимые элементы алгебры R (например, $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ может быть подмножеством некоторого фиксированного конечного или бесконечного базиса для R). Полагая

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \alpha_{ij}$$

для некоторых $\alpha_{ij} \in F$, имеем, что

$$\varphi(r) = \sum_{i=1}^{n}\Bigl(\sum_{j=0}^{\infty} x^j\alpha_{ij}\Bigr)r_i = \sum_{j=0}^{\infty} x^j\Bigl(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}r_i\Bigr).$$

Поэтому, если $\varphi(r) = 0$, то для всех $j \geqslant 0$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}r_i = 0,$$

откуда $\alpha_{ij} = 0$ и $f_i(x) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$; следовательно, $r = 0$.

Если R — конечномерная алгебра с базисом $r_1, \ldots, r_n$, то для любого ряда

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j t_j$$

с коэффициентами $t_j \in R$ имеем

$$t_j = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}r_i,$$

откуда

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j\Bigl(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}r_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{n}\Bigl(\sum_{j=0}^{\infty} x^j\alpha_{ij}\Bigr)r_i \in \varphi(F[[x]] \otimes R).$$

□

3.1.6. Теорема. *Если R — конечномерная центрально существенная алгебра, то следующие условия эквивалентны*:

(a) *Кольцо R центрально существенно.*
(b) *Кольцо степенных рядов $R[[x]]$ центрально существенно.*
(c) *Кольцо рядов Лорана $R((x))$ центрально существенно.*

Доказательство. Импликация (a)⇒(b) следует из предложения 3.1.5.

Импликация (b)⇒(a) проверяется непосредственно.

Эквивалентность (b)⇒(c) следует из замечания 3.1.4. □

3.2. Групповые кольца. Результаты подраздела 3.2 основываются на статье [51].

Пусть R — кольцо и G — группа. Положим $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ для любых элементов x, y группы G; аддитивные коммутаторы и мультипликативные коммутаторы обозначаются по-разному, так как элементы группы также рассматриваются как элементы группового кольца. Для любого элемента g группы G обозначим через g^G класс сопряженных элементов, который содержит g. Для группы G *верхний центральный ряд* группы G — это цепь подгрупп $\{1\} = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq \ldots$, где $Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$ — центр группы $G/Z_{i-1}(G)$, $i \geqslant 1$. Обозначим через $NC(G)$ *класс нильпотентности* группы G, т. е. наименьшее положительное целое число n с $Z_n(G) = G$ (если оно существует).

Группа G называется *FC-группой*, если все классы сопряженных элементов в G являются конечными.

3.2.1. Предложение. *Пусть A — кольцо и G — группа. Если групповое кольцо $R = AG$ центрально существенно, то A также — центрально существенное кольцо и группа G — FC-группа.*

Доказательство. Пусть $0 \neq a \in A$. Так как $A \subseteq R$ и R центрально существенно, то существует такой элемент $c \in Z(R)$, что $0 \neq ca \in Z(R)$. Имеем $c = \sum_{g\in G} c_g \cdot g$ и $ca = \sum_{g\in G} c_g a \cdot g$. Из соотношений $0 = [c, b] = \sum_{g\in G}[c_g, b] \cdot g$ для любого $b \in A$ следует, что $c_g \in Z(A)$ для всех $g \in G$. Аналогично, имеем $c_g a \in Z(A)$ для любого $g \in G$. Так как существует хотя бы один элемент $g \in G$ с $c_g a \neq 0$, мы получаем наше утверждение о кольце A.

Теперь пусть g — произвольный элемент группы G. Хорошо известно (см., например, [58, Lemma 4.1.1]), что $Z(AG)$ — свободный $Z(A)$-модуль с базисом

$$\{\Sigma_K \mid K \text{ — конечный класс сопряженных элементов в } G\}. \tag{3.2.1.1}$$

В частности,

$$r \in Z(AG) \Rightarrow |g^G| < \infty \text{ для любого } g \in \operatorname{supp}(r). \tag{3.2.1.2}$$

Так как AG центрально существенно, то $0 \neq cg = d$ для некоторых $c, d \in Z(AG)$. Сравнивая коэффициенты в левой и правой частях равенства $cg = d$, получаем, что для любого $y \in \operatorname{supp}(d)$ существует такой элемент $x \in \operatorname{supp}(c)$, что $xg = y$. Для любого $h \in G$ имеем $hgh^{-1} = (hxh^{-1})^{-1}hyh^{-1}$, откуда $g^G \subseteq (x^{-1})^G \cdot y^G$. Так как $|(x^{-1})^G| = |x^G|$, то $|g^G| \leqslant |x^G| \cdot |y^G| < \infty$ в силу (3.2.1.2). $\square$

3.2.2. Лемма. *Пусть G — группа, F — поле характеристики $p > 0$, и пусть q — простое целое число, не равное p. Если кольцо FG центрально существенно, то каждая q-подгруппа в G — нормальная коммутативная подгруппа.*

Доказательство. Сначала пусть H — конечная q-подгруппа группы G. Тогда $|H| = n = q^k$ — ненулевой элемент поля F и элемент $e_H = \frac{1}{n}\Sigma_H$ — идемпотент кольца FG. По 1.1.4 e_H — центральный идемпотент. Следовательно,

$$ge_Hg^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{h\in H} ghg^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{h\in H} h$$

для любого $g \in G$. Сравнивая коэффициенты в обеих частях последнего соотношения, мы видим, что $ghg^{-1} \in H$, т. е. подгруппа H нормальна.

Пусть F_0 — простое подполе поля F. Рассмотрим конечное кольцо F_0H. По теореме Машке оно изоморфно некоторому конечному прямому произведению колец матриц над телами; кроме того, любое конечное тело является полем по теореме Веддерберна. Допустим, что группа H не коммутативна. Тогда одно из слагаемых кольца F_0H — кольцо матриц порядка $k > 1$ над некоторым полем; это невозможно, так как такое кольцо матриц содержит нецентральный идемпотент.

Теперь пусть H — произвольная q-подгруппа в G. Возьмем любой элемент $h \in H$ и произвольный элемент $g \in G$. Так как h порождает циклическую q-подгруппу $H_0 = \langle h \rangle$, то $ghg^{-1} \in H_0 \subseteq H$ для любого $g \in G$, т. е. подгруппа H нормальна.

Если $x, y \in H$, то подгруппа $H_1 = \langle x, y \rangle$ конечна в силу предложения 3.2.1 и следующей леммы Дицмана: если $x_1, \ldots, x_n$ — элементы конечного порядка произвольной группы G и каждый из элементов $x_1, \ldots, x_n$ имеет только конечное число сопряженных элементов, то существует конечная нормальная подгруппа N группы G, содержащая $x_1, \ldots, x_n$ (см. [38, Lemma C, Appendixes]).

В силу первой части доказательства подгруппа H_1 коммутативна, поэтому $xy = yx$. $\square$

В случае конечных групп имеем более сильное утверждение, которое сводит изучение центрально существенных групповых алгебр конечных групп к изучению центрально существенных групповых алгебр конечных p-групп.

3.2.3. Предложение. *Пусть $|G| = n < \infty$ и F — поле характеристики $p > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) *Кольцо FG центрально существенно.*
(b) *$G = P \times H$, где P — единственная силовская p-подгруппа группы G, группа H коммутативна, и кольцо FP центрально существенно.*

Доказательство. Пусть FG центрально существенно. По лемме 3.2.2 каждая силовская q-подгруппа для $q \neq p$ нормальна в G, и она коммутативна; следовательно, произведение H всех таких подгрупп — коммутативная нормальная подгруппа. Пусть $m = |H|$. Заметим, что $(m, p) = 1$, откуда элемент m обратимый в F.

Докажем, что силовская p-подгруппа P нормальна в G.

Рассмотрим следующее линейное отображение $f\colon R \to R$:

$$f(r) = \frac{1}{m}\sum_{h\in H} hrh^{-1}.$$

Ясно, что $f(1) = 1$ и $f(yry^{-1}) = f(r)$ для любого $y \in H$, так как левая и правая части соотношения содержат одинаковые слагаемые. Теперь допустим, что $xy \neq yx$ для некоторых $x \in P$ и $y \in H$. Положим $r = x - yxy^{-1}$. Непосредственно проверяется, что $r \neq 0$, но $f(r) = f(x) - f(yxy^{-1}) = 0$; это противоречит 1.1.5. Таким образом, элементы из P и H коммутируют, $G = PH$ и $P \cap H = \{1\}$; следовательно, $G = P \times H$. Рассматривая FG как групповое кольцо $(FP)H$, получаем из предложения 3.2.1, что FP центрально существенно.

Обратное утверждение непосредственно следует из 3.1.1 и изоморфизма $FG \cong (FP)H$. $\square$

3.2.4. Предложение. *Пусть G — конечная p-группа и F — поле характеристики p. Если $NC(G) \leqslant 2$, то кольцо FG центрально существенно.*

Доказательство. Напомним, что для любой подгруппы H в G через ωH обозначается правый идеал кольца FG, порожденный множеством $\{1 - h \mid h \in H\}$, также напомним, что этот правый идеал является идеалом в точности тогда, когда подгруппа H нормальна. Хорошо известно (см., например, [58, Lemma 3.1.6]), что в нашем случае идеал ωG нильпотентен.

Пусть $0 \neq x \in FG$. Рассмотрим все произведения $x(1-z)$, где $z \in Z = Z(G)$. Если хотя бы одно из них (скажем, $x_1 = x(1-z_1)$) ненулевое, то рассмотрим произведение $x_1(1-z)$ и так далее. Этот процесс прекратится на некотором шаге, т. е. существует такое целое число $k \geqslant 0$, что $x_k \neq 0$, но $x_k \omega Z = 0$ (допустим, что $x_0 = x$). Тогда $x_k \in FG\Sigma_Z$ (см. [58, Lemma 3.1.2]). Заметим, что $FG\Sigma_Z \subseteq Z(FG)$. Действительно, если $g, h \in G$, то

$$[g, h\Sigma_Z] = [g, h]\Sigma_Z = gh(1 - h^{-1}g^{-1}hg)\Sigma_Z = 0,$$

так как $h^{-1}g^{-1}hg \in G' \subseteq Z$. Таким образом, полагая $c = (1-z_1)\dots(1-z_k)$ (или $c = 1$ для $k = 0$), мы получаем $c \in Z(FG)$ и $xc = x_k \in Z(FG) \setminus \{0\}$, что и требовалось. $\square$

3.2.5. Лемма. *Пусть F — поле характеристики p и пусть G — конечная p-группа, удовлетворяющая следующему условию*:

$$\text{для любого элемента } g \in G \setminus Z(G) \text{ существует такая нетривиальная подгруппа } H \subseteq Z(G), \text{ что } Hg \subseteq g^G. \tag{3.2.5.1}$$

Если $NC(G) > 2$, то кольцо $R = FG$ не центрально существенно.

Доказательство. Пусть $K = g^G$ — такой класс сопряженных элементов группы G, что $|K| > 1$, и пусть H — подгруппа, удовлетворяющая условию (3.2.5.1). Заметим, что $Hg' \subseteq K$ для любого $g' \in K$, так как $g' = a^{-1}ga$ для некоторых $a \in G$ и $Hg' = Ha^{-1}ga = a^{-1}Hga \subseteq a^{-1}Ka = K$. Пусть $Hx_1, \dots, Hx_t$ — все различные смежные классы для G относительно H, содержащиеся в K. Тогда K — дизъюнктное объединение этих смежных классов, откуда

$$\Sigma_K = \sum_{i=1}^{t} \Sigma_{Hx_i}.$$

Теперь заметим, что $(\Sigma_Z)h = \Sigma_Z$ для любого $h \in H$, так как $H \subseteq Z$; поэтому $\Sigma_Z \cdot \Sigma_H = |H|\Sigma_Z = 0$. Тогда получаем, что

$$\Sigma_Z \Sigma_K = \sum_{i=1}^{t} \Sigma_Z \cdot \Sigma H \cdot x_i = 0. \tag{3.2.5.2}$$

Далее, если $NC(G) > 2$, то существует элемент $g \in G \setminus Z_2(G)$. Это означает, что существует такой элемент $a \in G$, что $(g, a) \in Z$. Рассмотрим элемент $x = g\Sigma_Z \neq 0$. Имеем

$$[a, x] = [a, g\Sigma_Z] = (ag - ga)\Sigma_Z = ag(1 - (g, a))\Sigma_Z \neq 0,$$

так как $1 - (g, a) \in \omega Z$. Следовательно, $x \in C = Z(R)$. С использованием базиса 3.2.1 произвольный элемент $c \in C$ может быть представлен в виде $c = c_0 + c_1$, где $c_0 \in FZ$,

$$c_1 = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i \Sigma_{K_i}, \quad K_1, \dots, K_s$$

— классы сопряженных элементов группы G, $|K_i| > 1$ и $\alpha_i \in F$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Допустим, что $xc \in Z(R)$. В силу (3.2.5.2) имеем $xc_1 = 0$, откуда $xc = xc_0$. Так как $(\Sigma_Z)z = \Sigma_Z$ для любого $z \in Z$, мы получаем, что $xc_0 = \alpha x$ для некоторого $\alpha \in F$. Если $\alpha \neq 0$, то $x \in C$; получено противоречие. Получаем, что $xC \cap C = 0$. $\square$

3.2.6. Лемма. *Если централизатор $C_G(Z_2(G))$ подгруппы $Z_2(G)$ группы G лежит в $Z_2(G)$, то G удовлетворяет условию* (3.2.5.1) *леммы* 3.2.5.

Доказательство. Пусть g — элемент из $G \setminus Z(G)$. Допустим, что существует такой элемент $a \in G$, что

$$(g, a) \in Z(G)\{1\}. \tag{3.2.6.1}$$

Пусть $z = (g, a)$. Тогда $gz = a^{-1}ga \in g^G$, откуда $gz^k = a^{-k}ga^k \in g^G$ для любого $k \geqslant 1$. Поэтому подгруппа H, порожденная z, удовлетворяет условию (3.2.5.1).

Теперь рассмотрим два случая. Если $g \in Z_2(G) \setminus Z(G)$, то существует такой элемент $a \in G$, что $(g, a) \neq 1$. Но по определению $Z_2(G)$ получаем $(g, a) \in Z(G)$, откуда (3.2.6.1) верно.

Остается случай $g \in Z_2(G)$. Тогда $g \in Z(Z_2(G))$, откуда существует такой элемент $a \in Z_2(G)$, что $z = (g, a) \neq 1$. Но снова $z \in Z_1(G)$, так как $a \in Z_2(G)$ и получаем (3.2.6.1). $\square$

3.2.7. Замечание (А. Ю. Ольшанский)**.** Существует другая серия групп, удовлетворяющих условиям леммы 3.2.6. А именно, пусть p — простое целое число и G — свободная 3-порожденная группа многообразия, определенного тождествами $x^p = 1$ и $(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$. Тогда G/G' — элементарная абелева p-группа; поэтому G' — подгруппа Фраттини группы G. Если $g \in G'$, то можно включить gG' в систему свободных образующих группы G/G'; следовательно, элемент g может быть включен в систему, состоящую из трех образующих группы G. Так как группа G конечна, то эта система образующих свободна. Поэтому если $g \in C_G(G')$, то G удовлетворяет тождеству $(x_1, x_2, x_3) = 1$; это невозможно, так как группа G может быть гомоморфно отображена на группу верхних унитреугольных матриц порядка 4 над $GF(p)$, которая не удовлетворяет этому тождеству. Поэтому $Z_2(G) \supseteq G' \supseteq C_G(G') \supseteq C_G(Z_2(G))$.

3.2.8. Предложение. *Если F — поле характеристики $p > 0$, то существует такая группа G порядка p^5, что групповая алгебра FG не центрально существенна.*

Доказательство. Построим группы, которые удовлетворяют условиям леммы 3.2.6. Рассмотрим случаи $p = 2$ и $p \neq 2$ по отдельности.

Пусть $p = 2$. Рассмотрим прямое произведение N группы кватернионов $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ и циклической группы $\langle a \rangle$ порядка 2 с образующим a и автоморфизм α группы N, определенный на образующих соотношениями $\alpha(i) = j$, $\alpha(j) = i$, $\alpha(a) = (-1)a$. Положим $\Gamma = \langle \alpha \rangle$. Имеем полупрямое произведение $G = N \rtimes \Gamma$, чьи элементы рассматриваются как произведения $x\gamma$, где $x \in N$ и $\gamma \in \langle \alpha \rangle$, а операция определена соотношением $x\gamma x'\gamma' = x\gamma(x')\gamma\gamma'$. Элементы вида $x \cdot 1$ естественно отождествляются с элементами $x \in N$ и элементы вида $1 \cdot \gamma$ отождествляются с элементами $\gamma \in \Gamma$. Непосредственно проверяется, что $Z_1(G) = \langle -1 \rangle$, $Z_2(G) = \langle k, a \rangle = C_G(Z_2(G))$.

Теперь допустим, что $p > 2$. Рассмотрим полупрямое произведение $N = A \rtimes \Gamma$ элементарной абелевой группы A порядка p^3 с образующими a, b, c и циклической группы $\Gamma = \langle \gamma \rangle$, где γ — автоморфизм группы A, определенный на образующих соотношениями

$$\gamma(a) = a, \quad \gamma(b) = b, \quad \gamma(c) = bc.$$

Непосредственно проверяется, что $|N| = p^4$ и любой элемент группы N может быть единственным образом представлен в виде произведения $a^k b^l c^m \gamma^r$, где $k, l, m, r \in \{0, \ldots, p-1\}$. Докажем, что отображение $\beta \colon \{a, b, c, \gamma\} \to N$, определенное соотношениями

$$\beta(a) = a, \quad \beta(b) = b, \quad \beta(c) = ac, \quad \beta(\gamma) = abc\gamma,$$

может быть продолжено до автоморфизма $\hat{\beta}$ группы N. Действительно, для любых $k, l, m, r \in \mathbb{Z}$ положим

$$\hat{\beta}(a^k b^l c^m \gamma^r) = a^k b^l a^m c^m a^r b^r (c\gamma)^r = a^{k+m+r} b^{l+r(r+1)/2} c^{m+r} \gamma^r.$$

Это определение корректно, так как $p|(r(r+1)/2)$, если $p|r$. Непосредственно проверяется, что для любого $k,l,m,r,k',l',m',r' \in \{0,\ldots,p-1\}$ соотношения

$$a^k b^l c^m \gamma^r \cdot a^{k'} b^{l'} c^{m'} \gamma^{r'} = a^{k+k'} b^{l+l'+rm'} c^{m+m'} \gamma^{r+r'}$$

выполняются. Следовательно,

$$\hat\beta(a^k b^l c^m \gamma^r \cdot a^{k'} b^{l'} c^{m'} \gamma^{r'}) = a^{k+k'+m+m'+r+r'} b^{l+l'+rm'+(r+r')(r+r'+1)/2} c^{m+m'+r+r'} \gamma^{r+r'}.$$

С другой стороны,

$$\hat\beta(a^k b^l c^m \gamma^r)\cdot\hat\beta(a^{k'} b^{l'} c^{m'} \gamma^{r'}) = (a^{k+m+r} b^{l+r(r+1)/2} c^{m+r} \gamma^r)\cdot(a^{k'+m'+r'} b^{l'+r'(r'+1)/2} c^{m'+r'} \gamma^{r'}) =$$
$$= a^{k+m+r+k'+m'+r'} b^{l+r(r+1)/2+l'+r'(r'+1)/2+r(m'+r')} c^{m+r+m'+r'} \gamma^{r+r'}.$$

Остается заметить, что имеем следующее тождество:

$$l+\frac{r(r+1)}{2}+l'+\frac{r'(r'+1)}{2}+r(m'+r') = l+l'+rm'+rr'+\frac{r^2+r+r'^2+r'}{2} =$$
$$= l+l'+rm'+\frac{r^2+2rr'+r'^2+r+r'}{2} == l+l'+rm'+\frac{(r+r')(r+r'+1)}{2}.$$

Теперь положим $G = N \rtimes \langle\beta\rangle$. Непосредственно проверяется, что $Z_1(G) = \langle a,b\rangle$ и $Z_2(G) = \langle a,b,c\rangle = C_G(Z_2(G))$. ☐

3.2.9. Теорема. *Пусть F — поле характеристики $p>0$.*

(a) *Если G — произвольная конечная группа, то групповая алгебра FG — центрально существенное кольцо в точности тогда, когда $G = P\times H$, где P — единственная силовская p-подгруппа группы G, группа H коммутативна, и кольцо FP центрально существенно.*

(b) *Если G — конечная p-группа и класс нильпотентности[1] группы G не превышает 2, то групповая алгебра FG — центрально существенное кольцо.*

(c) *Существует такая группа G порядка p^5, что групповая алгебра FG центрально существенна.*

Доказательство. Теорема 3.2.9 следует из предложения 3.2.3, предложения 3.2.4 и предложения 3.2.8. ☐

3.2.10. Замечания. (a) Следующий критерий полупервичности группового кольца хорошо известен: кольцо AG полупервично если и только если кольцо A полупервично и порядки конечных нормальных подгрупп группы G не являются делителями нуля в A; см., например, предложение 8 в [38, Appendix]).

(b) Если A — такое полупервичное кольцо, что его аддитивная группа не имеет кручения и G — произвольная группа, то групповое кольцо AG центрально существенно в точности тогда, когда кольцо A и группа G коммутативны. Действительно, по теореме 1.2.2 любое центрально существенное полупервичное кольцо коммутативно. Поэтому замечание b следует из замечания a.

(c) В связи с теоремой 3.2.9 заметим, что для произвольного поля F нулевой характеристики и каждой группы G групповая алгебра FG центрально существенна в точности тогда, когда алгебра FG коммутативна; см. замечание b. Поэтому при изучении центрально существенных групповых алгебр над полями интересен только случай полей положительной характеристики.

(d) В связи с теоремой 3.2.9, с заметим, что групповое кольцо конечной p-группы класса нильпотентности 3 может быть как центрально существенным, так и не центрально существенным. Точнее, мы использовали компьютерную алгебраическую систему GAP [26] для проверки того, что для любой группы порядка 16 и класса нильпотентности 3 ее групповая алгебра над полем $GF(2)$ центрально существенна.

[1] Хорошо известно, что каждая конечная p-группа нильпотентна, см., например, [29, Theorem 10.3.4].

(e) Существует такая конечная 2-группа G, что групповая алгебра $R = FG$ над полем F из двух элементов центрально существенна и содержит такой элемент x, что $x^2 = 0$, но $xRx \neq 0$.

Доказательство. Пусть $G = D_4$ — группа диэдра порядка 8, задаваемая образующими a, b и определяющими соотношениями $a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1$. Нетрудно проверить, что

$$G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}, \quad G' = Z(G) = \langle a^2\rangle.$$

Поэтому групповая алгебра FG центрально существенна. В то же время

$$(1 + b)^2 = 1 + b^2 = 1 + 1 = 0,$$

причем

$$(1 + b)a(1 + b) = a + ba + ab + bab = 1 + a^3 + ab + a^3b \neq 0. \qquad \square$$

3.3. Кольца частных, групповые и полугрупповые кольца. Основные результаты данного подраздела доказаны в [41, 44].

Кольца частных и групповые кольца.

3.3.1. Обозначения. Для фиксированной группы G обозначим через $P(G)$ и G_p периодическую часть G и множество элементов группы G, порядки которых являются степенями простого целого числа p соответственно, $Z(G)$ — центр группы G, K — поле характеристики $p > 0$, и KG — групповую алгебру группы G над K.

3.3.2. Замечание. В 3.2.10, с доказано, что если K — поле нулевой характеристики, то центрально существенная групповая алгебра KG коммутативна для любой группы G. Пусть R — коммутативное кольцо, G — группа без кручения и групповое кольцо RG центрально существенно. Тогда кольцо RG коммутативно. Действительно, по предложению 3.2.1 кольцо R также центрально существенно и все классы сопряженных элементов в G конечны. По [58, Lemma 4.1.6] группа G абелева, групповое кольцо RG коммутативно и, следовательно, RG имеет коммутативное классическое кольцо частных.

3.3.3. Замечание. Если группа G не имеет элементов порядка p, то центрально существенная групповая алгебра KG коммутативна.

Доказательство. Из [58, Theorem 4.2.13] следует, что KG — полупервичная алгебра. Следовательно, центрально существенная полупервичная алгебра KG коммутативна по теореме 1.2.2. $\square$

3.3.4. Предложение. *Пусть R — кольцо. Если для любого неделителя нуля b существует такой неделитель нуля x, что $bx = y \in Z(R)$ (соотв., $xb = y \in Z(R)$), то R имеет классическое правое (соотв., левое) кольцо частных.*

Доказательство. Пусть $a, b \in R$, b — неделитель нуля в R. Тогда $b(xa) = a(bx) = ay$. Поэтому кольцо R удовлетворяет правому условию Оре, $(ax)b = a(xb) = (xb)a$, и кольцо R удовлетворяет левому условию Оре. $\square$

3.3.5. Следствие. *Любая центрально существенная групповая алгебра имеет двустороннее классическое кольцо частных.*

Доказательство. Поскольку группа G является FC-группой, то из [58, Lemma 4.4.4] следует, что для любого неделителя нуля b существует такой неделитель нуля $x \in KG$, что $xb = y \in Z(KG)$ ($bx = y \in Z(KG)$) и y — неделитель нуля в KG. $\square$

3.3.6. Замечание. Следствие 3.3.5 также следует из [32], поскольку все классы сопряженных элементов в G являются конечными.

3.3.7. Пример. Пусть K — поле. Рассмотрим кольцо $\mathcal{R}$ всех 3×3 матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} k & a & b \\ 0 & k & a \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

где $k \in K$, a и b содержатся в кольце многочленов $K\langle x, y\rangle$ от двух некоммутирующих переменных x и y над полем K с соотношениями $xk = kx$ и $ky = yk$, где $k \in K$, и $yx - xy = x$; см., например [2].

Заметим, что кольцо $\mathcal{R}$ некоммутативно. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & yx \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$Z(\mathcal{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} k & k' & h \\ 0 & k & k' \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} : k, k' \in K;\ h \in K\langle x, y\rangle \right\}.$$

Кроме того, если $f \in K\langle x, y\rangle$, то

$$\begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z(\mathcal{R}).$$

Следовательно, $\mathcal{R}$ — центрально существенное кольцо. Для любой регулярной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} k & a & b \\ 0 & k & a \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

существует такая регулярная матрица

$$A' = \begin{pmatrix} k' & a' & 0 \\ 0 & k' & a' \\ 0 & 0 & k' \end{pmatrix},$$

где $k' \neq 0$, $a' = \frac{1}{k}(k'' - ak')$ для некоторого $0 \neq k'' \in K$, что $AA' \in Z(\mathcal{R})$. Из предложения 3.3.4 следует, что $\mathcal{R}$ — некоммутативное центрально существенное кольцо, которое имеет двустороннее классическое кольцо частных.

3.3.8. Предложение. *Пусть R — центрально существенное кольцо и α — неделитель нуля в $Z(R)$. Тогда α — неделитель нуля в R.*

Доказательство. Пусть $\alpha\beta = 0$ для некоторого $0 \neq \beta \in R$. Тогда $\beta \notin Z(R)$ и существуют такие элементы $c, d \in Z(R)$, что $0 \neq \beta c = d$. Поскольку α — неделитель нуля в $Z(R)$, имеем, что $\alpha d \neq 0$ и $\alpha\beta c \neq 0$. Получено противоречие. □

3.3.9. Предложение. *Пусть R — центрально существенное кольцо и R имеет классическое кольцо частных. Тогда $Q_{cl}(Z(R)) \subseteq Z(Q_{cl}(R))$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in Z(R)$ — неделитель нуля в $Z(R)$. Из предложения 3.3.8 следует, что α — неделитель нуля в R. Следовательно, существует $\alpha^{-1} \in Q_{cl}(R)$. Проверим, что $\alpha^{-1} \in Z(Q_{cl}(R))$.

Пусть $\beta = \gamma\delta^{-1} \in Q_{cl}(R)$. Поскольку $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, имеем, что $\gamma = \alpha^{-1}\gamma\alpha$ в кольце $Q_{cl}(R)$. Тогда

$$(\gamma\delta^{-1})\alpha^{-1} = \gamma(\alpha\delta)^{-1} = \gamma(\delta\alpha)^{-1} = \gamma\alpha^{-1}\delta^{-1} = \alpha^{-1}\gamma\alpha\alpha^{-1}\delta^{-1} = \alpha^{-1}(\gamma\delta^{-1}).$$

Поэтому $\alpha^{-1} \in Z(Q_{cl}(R))$. Если $\alpha \in Z(R)$ — делитель нуля, то из соотношений $\alpha\delta = \delta\alpha$ и $\alpha = \delta^{-1}\alpha\delta$ следует, что

$$\alpha(\gamma\delta^{-1}) = (\gamma\alpha)\delta^{-1} = \gamma\delta^{-1}\alpha\delta\delta^{-1} = (\gamma\delta^{-1})\alpha.$$

Поэтому $Q_{cl}(Z(R)) \subseteq Z(Q_{cl}(R))$. Левосторонний аналог проверяется аналогично. □

3.3.10. Теорема. *Каждая центрально существенная групповая алгебра над любым полем имеет двустороннее классическое кольцо частных. Кроме того, групповая алгебра над полем является центрально существенной в точности тогда, когда она имеет классическое правое кольцо частных, которое является центрально существенным кольцом.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из следствия 3.3.5. Пусть $0 \neq as^{-1} \in Q_{cl}(KG)$, где $a, s \in KG$ и s — неделитель нуля. Поскольку G — FC-группа, то из [58, Lemma 4.4.4] следует, что существует такой неделитель нуля $\gamma \in KG$, что $s\gamma = t \in Z(KG)$ и t — неделитель нуля в KG. Поэтому имеем, что $s^{-1} = \gamma t^{-1}$, в кольце $Q_{cl}(KG)$. По предположению для ненулевого элемента $a\gamma \in KG$ существуют такие ненулевые элементы $c, d \in Z(KG)$, что $(a\gamma)c = d$. По предложению 3.3.9 (также см. [58, Theorem 4.4.5]) любой элемент из $Z(KG)$ централен в $Q_{cl}(KG)$, т. е. $c, d, t^{-1} \in Z(Q_{cl}(KG))$. Тогда

$$0 \neq (as^{-1})c = (a\gamma t^{-1})c = (a\gamma c)t^{-1} = dt^{-1} \in Z(Q_{cl}(KG)).$$

Наоборот, пусть $0 \neq r \in KG$. По предположению существуют такие элементы $t, s \in Z(Q_{cl}(KG))$, что $0 \neq rt = s$. Поскольку $Z(Q_{cl}(KG)) = Q_{cl}(Z(KG))$, имеем, что $t = cd^{-1}$ и $s = mn^{-1}$ для некоторых $c, d, m, n \in Z(KG)$. Тогда из соотношения $rcd^{-1} = rt = s = mn^{-1}$ получаем $rc = mn^{-1}d$ и

$$r(cn) = (rc)n = md \in Z(KG).$$

Кроме того, $md \neq 0$, поскольку d — неделитель нуля в KG. $\square$

3.3.11. Замечания. Пусть G — группа,

$$\Delta(G) = \{x \in G : |G : C_G(x)| < \infty\}$$

(т. е. $\Delta(G)$ — FC-подгруппа в G), и пусть

$$\Delta^+(G) = \{x \in \Delta(G) : o(x) < \infty\}.$$

Хорошо известно, что $\Delta(G)$ и $\Delta^+(G)$ являются характеристическими подгруппами в G; см. подробности в [58]. Если группа $\Delta^+(G)$ конечна, то кольцо $Q_{cl}(K\Delta(G))$ существует и является квазифробениусовым кольцом; в частности, оно совпадает с максимальным кольцом частных $Q_{\max}(K\Delta(G))$; см. [14]. Из этих фактов и теоремы 3.3.10 вытекает следующее замечание.

1. Если подгруппа $\Delta^+(G)$ группы G конечна, то следующие условия эквивалентны.
   (a) KG — центрально существенное кольцо.
   (b) $Q_{cl}(KG)$ — центрально существенное кольцо.
   (c) $Q_{\max}(KG)$ — центрально существенное кольцо.
2. Кольцо A называется *кольцом с большим центром*, если любой ненулевой идеал кольца A имеет ненулевое пересечение с центром кольца A. В [3, Theorem 2] доказано, что если R — кольцо с большим центром, то $Q_{\max}(Z(R)) \subseteq Z(Q_{\max}(R))$. Поскольку ясно, что любое центрально существенное кольцо является кольцом с большим центром, утверждение предложения 3.3.9 остается также верным для максимальных колец частных.

Кольца частных и полугрупповые кольца. В этом подразделе F обозначает поле, S — полугруппу, FS — полугрупповую алгебру полугруппы S над полем F. Центр полугруппы S и полугрупповой алгебры FS обозначаются через $Z(S)$ и $Z(FS)$ соответственно. Если $a = \sum \alpha_s s \in FS$, то $\operatorname{supp}(a) = \{s \in S \mid \alpha_s \neq 0\}$.

3.3.12. Замечания.

(a) Полугруппа S называется *полугруппой с левым сокращением*, если для любых $a, b, c \in S$ из $ca = cb$ следует $a = b$. Двойственно определяется *полугруппа с правым сокращением*. Полугруппа с левым и правым сокращением называется *полугруппой с сокращением*. Хорошо известно, что периодическая полугруппа с сокращением является группой; см., например, [16]. Полугруппа с сокращением вкладывается в группу правых частных в точности тогда, когда непусто пересечение любых двух главных правых идеалов полугруппы S, т. е. $sS \cap tS \neq \varnothing$ для всех $s, t \in S$ (правое условие Оре). Если S удовлетворяет и левому условию Оре, определяемом симметрично, то группа $G_S = SS^{-1} = S^{-1}S$ называется *группой частных* полугруппы S. Любой элемент группы G_S записывается как в виде $a^{-1}b$, так и в виде cd^{-1}; $a, b, c, d \in S$.

(b) Напомним, что в замечаниях 3.3.11 рассказывается о подгруппе $\Delta(G)$ группы G и ее свойствах.

(c) Пусть S — полугруппа с сокращением и $s \in S$. Если для некоторого $x \in S$ существует такой $t \in S$, что $xs = tx$, то элемент t определен однозначно и обозначается s^x. Тогда $\Delta(S)$ — множество элементов $s \in S$, для которых элементы s^x определены для всех $x \in S$ и множество $\{s^x \mid x \in S\}$ конечно. Если $s \in \Delta(S)$, то полагают $D_S(s) = \{s^x \mid x \in S\}$. Ясно, что если S вкладывается в группу частных G_S, то для $s \in \Delta(S)$ множество $D_S(s)$ вкладывается во множество сопряженных элементов для s в G_S. Если S — полугруппа с сокращением, то $Z(FS)$ является F-подпространством в FS, порожденное элементами вида

$$\sum_{t \in D_S(s)} t,$$

где $s \in \Delta(S)$; см. [56, Theorem 9.10].

3.3.13. Предложение. *Пусть S — полугруппа с сокращением. Если полугрупповая алгебра FS является центрально существенным кольцом, то $S = \Delta(S)$.*

Доказательство. По условию для $s \in S$ имеем $0 \neq cs = d$ для некоторых $c, d \in Z(FS)$. Тогда для любого $y \in \operatorname{supp}(d)$ найдется такой $x \in \operatorname{supp}(c)$, что $xs = y$. Из [56, Proposition 9.2(iii)] следует, что $x, y \in \Delta(S)$. Кроме того, $\Delta(S)$ является правым и левым множеством Оре в S и $G_{\Delta(S)} = \Delta(S)^{-1}\Delta(S) = \Delta(S)\Delta(S)^{-1}$ — FC-группа; см. [56, Corollary 9.6, Proposition 9.8(iii)]. Следовательно, $s = x^{-1}y$, где $x^{-1} \in \Delta(S)^{-1}$, $y \in \Delta(S)$. Для любого $t \in S$ имеем $x^t \in \Delta(S)$. Таким образом, из $tx = x^t t$ следует $(x^t)^{-1}t = tx^{-1}$, т. е. $(x^t)^{-1} = (x^{-1})^t$ в группе $G_{\Delta(S)}$. Тогда элемент $s^t = (x^{-1}y)^t = (x^{-1})^t y^t$ существует для любого $t \in S$; см. [56, Basic property (a), p. 108]. Далее,

$$\{s^t \mid t \in S\} = \{(x^{-1}y)^t \mid t \in S\} = \{(x^{-1})^t \mid t \in S\} \cdot \{y^t \mid t \in S\} = \{(x^t)^{-1} \mid t \in S\} \cdot \{y^t \mid t \in S\}.$$

Первое множество конечно, так как конечно множество $\{x^t \mid t \in S\}$. Из $y \in \Delta(S)$ следует конечность второго множества. Таким образом, множество $D_S(s)$ конечно и $s \in \Delta(S)$. ☐

3.3.14. Следствие. *Если FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением, то S имеет группу частных G_S.*

Доказательство. По предложению 3.3.13 имеем $S = \Delta(S)$. Так как $\Delta(S)$ является правым и левым множеством Оре, то S имеет группу частных G_S. ☐

В силу следствия 3.3.14 при изучении центрально существенных полугрупповых алгебр полугрупп с сокращением достаточно ограничиться рассмотрением полугрупп S, которые имеют группу частных G_S.

3.3.15. Следствие. *Пусть F — поле и $\operatorname{char} F = 0$. Тогда любая центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением над F коммутативна.*

Доказательство. Алгебра FS полупервична в точности тогда, когда полупервична алгебра FG_S; см. [56, Theorem 7.19]. Хорошо известно, что групповая алгебра над полем характеристики 0 полупервична; см., например, [58, Theorem 4.2.12]. По теореме 1.2.2 все центрально существенные полупервичные кольца коммутативны. ☐

3.3.16. Пример. Рассмотрим подкольцо $\mathcal{R}$ в кольце $M_7(F)$ всех матриц порядка 7 над полем F характеристики 0, состоящее из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathcal{R}$ — некоммутативное центрально существенное кольцо в силу примера 3.6.8 ниже. Если S — мультипликативная полугруппа алгебры $\mathcal{R}$, то $\mathcal{R} \cong F_0S$, где F_0S — сжатая полугрупповая алгебра полугруппы S над полем F. Так как $FS \cong F \oplus F_0S$ (см., например, [56, Corollary 4.9]), то FS — центрально существенная полугрупповая алгебра как прямая сумма центрально существенных алгебр.

3.3.17. Теорема. (a) *Пусть S — полугруппа с сокращением и F — поле. Полугрупповая алгебра FS над полем F является центрально существенной тогда и только тогда, когда существует группа частных G_S полугруппы S и групповая алгебра FG_S группы G_S является центрально существенной групповой алгеброй.*

(b) *Существуют некоммутативные центрально существенные полугрупповые алгебры над полями нулевой характеристики (при этом известно, что центрально существенные групповые алгебры над полями характеристики 0 коммутативны).*

Доказательство. (a) Пусть FS — центрально существенное кольцо и $0 \neq a \in FG_S$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i,$$

где $\alpha_i \in F$, $g_i \in G_S$. Известно, что $G_S = SZ(S)^{-1}$; см. [56, Proposition 9.8(iv)]. Тогда

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i t_i^{-1}$$

для некоторых $s_i \in S$, $t_i \in Z(S)$, $i = 1, \ldots, n$. Положим

$$a' = \alpha_1 s_1 t_2 \ldots t_n + \ldots + \alpha_n s_n t_1 \ldots t_{n-1} \in FS.$$

Заметим, что $a' \neq 0$. Для этого достаточно проверить, что $s_1 t_2 \ldots t_n, \ldots, s_n t_1 \ldots t_{n-1}$ — различные элементы в FS. Действительно, если

$$s_i t_1 \ldots \widehat{t_i} \ldots t_n = s_j t_1 \ldots \widehat{t_j} \ldots t_n, \quad i \neq j,$$

то умножив это равенство на $(t_1 \ldots t_n)^{-1}$, получим $s_i t_i^{-1} = s_j t_j^{-1}$, т.е. $g_i = g_j$; противоречие. По условию $0 \neq a'c' = d'$ для некоторых $c', d' \in Z(FS)$. Тогда $0 \neq ac'' = d'$, где $c'' = t_1 \ldots t_n c'$ и d' — центральные элементы в FS, которые остаются центральными в FG_S; см. [56, Corollary 9.11(i)].

Обратно, пусть $0 \neq a \in FS$, $a = \sum \alpha_i s_i$, где $\alpha_i \in F$, $s_i \in S$. По условию $0 \neq ac = d$ для некоторых $c, d \in Z(FG_S)$,

$$c = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i, \quad d = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j h_j,$$

где $g_i, h_j \in G_S$. Пусть $g_i = x_i y_i^{-1}$, $h_j = z_j t_j^{-1}$ и $x_i, z_j \in S$, $y_i, t_j \in Z(S)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Обозначим $y = y_1 \ldots y_n$, $t = t_1 \ldots t_m$. Положим $c' = cyt \in Z(FS)$. Тогда

$$ac' = (ac)yt = dyt \in Z(FS).$$

Осталось проверить, что $ac' \neq 0$. Имеем:

$$dyt = \gamma_1 z_1 y t_2 \ldots t_m + \ldots + \gamma_m z_m y t_1 \ldots t_{m-1}.$$

Если $i \neq j$ и $z_i y t_1 \dots \widehat{t_i} \dots t_m = z_j y t_1 \dots \widehat{t_j} \dots t_m$, то $z_i t_i^{-1} = z_j t_j^{-1}$ и $g_i = g_j$, что приводит к противоречию.

Утверждение (b) следует из примера 3.3.16. □

3.3.18. Пример. Пусть $S = \langle x, y, z \mid z \in Z(S),\ z^2 = e,\ xy = zyx\rangle$. Непосредственно проверяется, что S — полугруппа с сокращением, имеющая группу частных

$$G_S = \langle x, y, z \mid z \in Z(G_S),\ z^2 = e,\ x^{-1}y^{-1}xy = z\rangle.$$

Так как z — центральная инволюция, $x^2, y^2 \in Z(G_S)$, то единственный нетривиальный коммутатор в G_S есть $x^{-1}y^{-1}xy$. Поэтому коммутант $G'_S = \langle z\rangle$. Имеем $Z(G_S) = \langle x^2, y^2, z\rangle$. Пусть $H = G'_S = \{e, z\}$, $\operatorname{char} F = 2$ и $\hat{H} = e + z$. Проверим, что для $0 \neq \alpha \in FG_S$ выполнено $\alpha\hat{H} = \beta \in Z(FG_S)$. Действительно,

$$\text{если} \quad \alpha = \sum_{g \in \operatorname{supp}(\alpha)} a_g g, \quad \text{то} \quad \beta = \sum_{g \in \operatorname{supp}(\alpha)} a_g g\hat{H}.$$

Тогда для любого $x \in G_S$, $g \in \operatorname{supp}(\alpha)$ получим

$$[x, g\hat{H}] = [x, g]\hat{H} = xg(1 - g^{-1}x^{-1}gx)\hat{H} = 0,$$

так как $g^{-1}x^{-1}gx \in G' \subseteq Z(G_S)$. Если $\alpha\hat{H} = 0$, то $\alpha \in FG_S\hat{H}$ (см. [58, Lemma 3.1.2]). В этом случае $\alpha \in Z(FG_S)$. Следовательно, групповая алгебра FG_S центрально существенна. По теореме 3.3.17 полугрупповая алгебра FS также является центрально существенной.

3.3.19. Пример. Пусть $S = \langle x, y, z \mid z \in Z(S),\ xy = zyx\rangle$. Полугруппа S имеет группу частных G_S, которая является свободной нильпотентной группой класса нильпотентности 2; см. [56, Example 21]. Известно, что если группа не содержит элементов порядка p, то центрально существенная групповая алгебра коммутативна; см. [41, Proposition 1]. Значит, групповая алгебра FG_S не является центрально существенной. По теореме 3.3.17 полугрупповая алгебра FS также не является центрально существенной.

3.3.20. Лемма. *Пусть FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением. Тогда для каждого регулярного элемента $b \in FS$ существует такой регулярный элемент $z \in FS$, что $bz \in Z(FS)$.*

Доказательство. Из [58, Lemma 4.4.4] следует, что найдется такой регулярный элемент $x \in FG_S$, что $bx = y \in Z(FG_S)$. Если

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i t_i^{-1},$$

где $\alpha_i \in F$, $s_i \in FS$, $t_i \in Z(FS)$, $i = 1, 2, \dots, n$, то элемент $z = xt_1 \dots t_n$ регулярен в FS и $bz \in Z(FS)$. □

3.3.21. Предложение. *Если FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением, то FS имеет классическое кольцо частных.*

Доказательство. Утверждение следует из предложения 3.3.4, леммы 3.3.20 и того, что верны их левосторонние аналоги. □

Следующая теорема распространяет теорему 3.3.10 на полугрупповые алгебры полугрупп с сокращением.

3.3.22. Теорема. *Полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением является центрально существенной в точности тогда, когда она обладает классическим правым кольцом частных, которое является центрально существенным кольцом.*

Доказательство. Пусть FS — центрально существенное кольцо и $0 \neq as^{-1} \in Q_{cl}(FS)$, где s регулярен в FS. Пусть регулярный элемент $\gamma \in FS$ таков, что $s\gamma = t \in Z(FS)$. Тогда $s^{-1} = \gamma t^{-1}$

в кольце $Q_{cl}(FS)$. По условию для элемента $a\gamma \in FS$ существуют такие ненулевые элементы $c, d \in Z(FS)$, что $0 \neq (a\gamma)c = d \in Z(FS)$. Тогда

$$(as^{-1})c = (a\gamma t^{-1})c = (a\gamma c)t^{-1} = dt^{-1} \neq 0,$$

где $dt^{-1} \in Z(Q_{cl}(FS))$. Следовательно, $Q_{cl}(FS)$ — центрально существенное кольцо.

Обратно, пусть $0 \neq s \in FS$. По условию найдутся такие элементы $t, r \in Z(Q_{cl}(FS))$, что $0 \neq st = r$. Заметим, что $Z(Q_{cl}(FS)) \subseteq Q_{cl}(Z(FS))$; сравни [58, Theorem 4.4.5]. Действительно, пусть $\rho \in Z(Q_{cl}(FS))$, $\rho = \alpha\beta^{-1}$, где $\alpha, \beta \in FS$ и β регулярен. Тогда $\alpha\beta = \beta\alpha$ и $\alpha\beta^{-1} = \beta^{-1}\alpha$. По лемме 3.3.20 существует такой регулярный элемент $\gamma \in FS$, что $\beta\gamma \in Z(FS)$. Обозначив $\epsilon = \beta\gamma$, $\eta = \alpha\gamma$, получим:

$$\eta\epsilon^{-1} = \alpha\gamma\gamma^{-1}\beta^{-1} = \alpha\beta^{-1} = \rho.$$

При этом $\epsilon, \eta \in Z(Q_{cl}(FS))$. С учетом сказанного, имеем $t = cd^{-1}$, $r = mn^{-1}$ для некоторых $c, d, m, n \in Z(FS)$. Тогда

$$s(cn) = (sc)n = (mn^{-1}d)n = md \in Z(FS),$$

и $md \neq 0$, так как d регулярен в FS. □

3.3.23. Открытые вопросы.

1. Остается ли верным утверждение замечания 3.3.11, 1, если подгруппа $\Delta^+(G)$ группы G бесконечна?
2. Верно ли, что каждое центрально существенное кольцо имеет классическое правое кольцо частных?
3. Верно ли, что центрально существенное кольцо с правым классическим кольцом частных также имеет левое классическое кольцо частных?

3.4. Конструкция одного ЦС кольца.

Основные результаты раздела доказаны в [48].

3.4.1. Кольца с полиномиальным тождеством. Пусть X — счетное множество и $F = \mathbb{Z}\langle X\rangle$ — свободное кольцо с множеством свободных образующих X. *Классическое тождество* по Роуэну — тождество с целыми коэффициентами, т. е. элемент свободного кольца F, лежащий в ядре любого гомоморфизма из F в кольцо R. Классическое тождество называется *полиномимальным тождеством*, если оно мультилинейно и имеет 1 одним из своих коэффициентов; кольцо с полиномиальным тождеством называется *PI кольцом*[1].

3.4.2. Кольца, алгебраические или целые над центром. Пусть R — кольцо с центром $C = Z(A)$. Элемент $r \in R$ называется *алгебраическим* (соотв., *целым*) над центром, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие $c_0, \dots c_n \in C$, что c_n — неделитель нуля в R (соотв., обратимый элемент в R) и

$$c_n r^n + c_{n-1}r^{n-1} + \ldots + c_1 r + c_0 = 0. \tag{3.4.2.1}$$

Обозначим через $n_1(r)$ (соотв., $n_2(r)$) наименьшее целое число n, удовлетворяющее этому условию. Кольцо R называется *алгебраическим* (соотв., *целым*) над своим центром, если любой элемент $r \in R$ алгебраичен (соотв., цел) над его центром. Положим $m_1(R) = \max\{n_1(r) \mid r \in R\}$ и $m_2(R) = \max\{n_2(r) \mid r \in R\}$; возможно, что $m_1(R) = \infty$, $m_2(R) = \infty$.

Конечные кольца и конечномерные алгебры над полями являются примерами таких колец R, что $m_1(R) = m_2(R) < \infty$.

3.4.3. Пример (кольцо, алгебраическое над своим центром и не являющееся целым над ним). Пусть

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & z \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q},\ z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ясно, что центр кольца R имеет вид $\mathbb{Z}E$, где E — единичная матрица.

[1] См. [62, Definitions 1.1.12, 1.1.17]

Заметим, что кольцо R не цело над своим центром. Действительно, если

$$r = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то из соотношения

$$r^n + c_{n-1}r^{n-1} + \ldots + c_0E = 0,$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $c_0, \ldots c_{n-1} \in \mathbb{Z}$, вытекают соотношения $c_0 = 0$ и

$$-\frac{1}{2^n} = \frac{c_{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{c_1}{2},$$

что невозможно. С другой стороны, если

$$r = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & z \end{pmatrix} \in R,$$

то $na \in \mathbb{Z}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{trace}(nr) = na + nz$ и $\det(nr) = na \cdot nz$ — целые числа. Поэтому nr — корень многочлена $x^2 - \mathrm{trace}(nr)x + \det(nr) \in \mathbb{Z}[x]$ по теореме Гамильтона—Кэли.

Заметим, что классы центрально существенных колец, PI колец и колец, являющихся алгебраическими или целыми над своим центром, строго содержат все коммутативные кольца.

Основным результатом данного подраздела является теорема 3.4.5. Для доказательства теоремы 3.4.5 нам потребуется следующий известный результат.

3.4.4. Теорема (см. [58, Theorem 5.3.9(ii)]). *Пусть F — поле характеристики $p > 0$. Если групповая алгебра FG удовлетворяет полиномиальному тождеству степени d, то существует такая подгруппа H в G, что $[G : H] \cdot |H'| < g(d)$, где $g(d)$ — некоторая функция целого числа d.*

3.4.5. Теорема. *Для любого простого целого числа p и каждого поля F характеристики p существует центрально существенная F-алгебра, которая не является PI кольцом и не является алгебраической над своим центром.*

Доказательство. Зафиксируем простое целое число p и поле F характеристики p. Обозначим через $Z(G)$ центр группы G.

Для любого положительного целого числа n мы построим группу $G = G(n)$ как указано ниже. Пусть $A = \langle a\rangle$, $B = \langle b\rangle$, $C = \langle c\rangle$ — такие три циклические группы, что $|A| = |B| = |C| = p^n$. Рассмотрим автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(B \times C)$, определенный на образующих соотношениями $\alpha(b) = bc$ и $\alpha(c) = c$. Ясно, что α^n — тождественный автоморфизм; откуда имеем такой гомоморфизм $\varphi\colon A \to \mathrm{Aut}(B \times C)$, что $\varphi(a) = \alpha$. Этот гомоморфизм соответствует полупрямому произведению $G = (B \times C) \ltimes A$, которое может рассматриваться как группа, порожденная элементами a, b, c, которые удовлетворяют соотношениям $a^{p^n} = a^{p^n} = c^{p^n} = 1$, $bc = cb$, $ac = ca$ и $aba^{-1} = bc$. Из этих соотношений следует, что $c \in Z(G)$. Непосредственно проверяется, что для любых целых чисел x, y, z, x', y', z' имеем

$$[b^yc^za^x, b^{y'}c^{z'}a^{x'}] = b^ya^xb^{y'}a^{x'}a^{-x}b^{-y}a^{-x'}b^{-y'} =$$
$$= b^y(a^xb^{y'}a^{-x})(a^{x'}b^{-y}a^{-x'})b^{-y'} = b^y(b^{y'}c^{xy'})(b^{-y}c^{-yx'})b^{-y'} = c^{xy'-yx'}. \quad (3.4.5.1)$$

Таким образом, $Z(G) = G' = \langle c\rangle$ и G — группа класса нильпотентности 2.

Теперь пусть H — любая подгруппа группы G. Докажем, что

$$[G : H] \cdot |H'| \geqslant p^n. \quad (3.4.5.2)$$

Заметим, что $[G : HZ(G)] \leqslant [G : H]$ и $(HZ(G))' = H'$; следовательно, достаточно доказать неравенство (3.4.5.2) в случае, где $H \supseteq Z(G)$. Положим $\bar{G} = G/Z(G)$ и обозначим через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{H}$ образы a, b, H при каноническом гомоморфизме G на группу $\bar{G}$. Мы также положим $\bar{B} = \langle\bar{b}\rangle$. Имеем $[G : H] = [\bar{G} : \bar{H}]$. Из стандартного изоморфизма $(\bar{H}\bar{B})/\bar{B} \cong \bar{H}/(\bar{H} \cap \bar{B})$ следует, что $\bar{H}/(\bar{H} \cap \bar{B})$ — циклическая группа, изоморфная некоторой подгруппе группы $\langle\bar{a}\rangle$. Группа $\bar{H} \cap \bar{B}$

также циклическая; следовательно, группа $\bar{H}$ порождается двумя элементами вида $\bar{b}^{p^m}$ и $\bar{a}^{p^k}\bar{b}^l$ для некоторых неотрицательных целых чисел k, l, m. Таким образом,

$$[\bar{G}:\bar{H}] = [\bar{G}:\bar{H}\bar{B}][\bar{H}\bar{B}:\bar{H}] = [\langle\bar{a}\rangle:\langle\bar{a}^{p^k}\rangle][\langle\bar{b}\rangle:\langle\bar{b}^{p^m}\rangle] = p^k p^m = p^{m+k}.$$

Если $m+k \geqslant n$, то выполняется неравенство (3.4.5.2). Если $m+k<n$, то в силу (3.4.5.1) и того, что элементы $a^{p^k}b^l$ и b^{p^m} содержатся в подгруппе H, то $[a^{p^k}b^l, b^{p^m}] = c^{p^{m+k}} \in H'$; поэтому $|H'| \geqslant |\langle c^{p^{m+k}}\rangle| = p^{n-m-k}$ и имеем

$$[G:H]\cdot|H'| \geqslant p^{m+k}\cdot p^{n-m-k} = p^n,$$

т. е. (3.4.5.2) также выполняется в этом случае.

Теперь достаточно взять прямое произведение групповых алгебр $FG(n)$, $n \in \mathbb{N}$, как кольцо R. Заметим, что прямое произведение любого множества колец центрально существенно в точности тогда, когда каждый сомножитель — центрально существенное кольцо. Поэтому кольцо R центрально существенно по теореме 3.2.9, b. Однако, если алгебра R удовлетворяет некоторому полиномиальному тождеству степени d, то для любого $n \in \mathbb{N}$ неравенство $p^n < g(d)$ следует из (3.4.5.2) и теоремы 3.4.4; это невозможно.

Теперь мы докажем, что построенное кольцо не является алгебраическим над его центром.

Хорошо известно (см., например, [62, Proposition 1.1.47] или [75, Lemma 5.2.6]), что если $m_1(R) = m < \infty$, то R удовлетворяет полиномиальному тождеству степени $d(m) = \frac{m(m+1)}{2} + m$.

Заметим, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такое целое число n_m, что $p^{n_m} > g(d(m))$; кроме того, можно выбрать такие целые числа $n_1, n_2, \ldots$, что эти целые числа образуют возрастающую последовательность. По определению $d(m)$ существует элемент $r'_m \in FG(n_m)$, который не удовлетворяет любому соотношению вида (3.4.2.1) степени m. Теперь мы рассмотрим элемент

$$r = \prod_{n=1}^{\infty} r_n \in \prod_{n=1}^{\infty} FG(n),$$

где $r_n \in FG(n)$, $r_n = r'_m$, если $n = n_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и $r_n = 0$ в противном случае. Ясно, что если r удовлетворяет некоторому соотношению вида (3.4.2.1) степени m, то каждый элемент r_n удовлетворяет соотношению той же степени; это невозможно в силу выбора элемента r'_m. $\square$

3.5. ЦС кольцо R с некоммутативным $R/J(R)$.

3.5.1. Предложение. *Пусть $\{R_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — произвольное множество колец,*

$$R = \prod_{\alpha\in A} R_\alpha,$$

и пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ принадлежит свободному кольцу $\mathbb{Z}\langle X\rangle$ со счетным множеством свободных образующих. Если для любого $m \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много таких индексов $\alpha \in A$, что кольцо R_α не удовлетворяют тождеству $f(x_1,\ldots,x_n)^m$, то кольцо $R/K(R)$ не удовлетворяют тождеству $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Доказательство. По предположению для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такой индекс $\alpha = \alpha_m \in A$, что $f(r_1^{(m)},\ldots,r_n^{(m)})^m \neq 0$ для некоторого $r_1^{(m)},\ldots,r_n^{(m)} \in R_\alpha$ и все индексы α_m, $m \in \mathbb{N}$, могут быть выбраны попарно различными.

Для любого $i = 1,\ldots,n$ положим

$$s_i = \prod_{\alpha\in A} s_\alpha^{(i)},$$

где

$$s_\alpha^{(i)} = \begin{cases} r_i^{(m)}, & \text{для } \alpha = \alpha_m \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N},\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{3.5.1.1}$$

Тогда

$$f(s_1,\ldots,s_n) = \prod_{\alpha\in A} f(s_\alpha^{(1)},\ldots,s_\alpha^{(n)}).$$

Из (3.5.1.1) следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такой индекс $\alpha \in A$, что $f(s_\alpha^{(1)}, \ldots, s_\alpha^{(n)})^m \neq 0$; поэтому $f(s_1, \ldots, s_n)^m \neq 0$ и, следовательно, $f(s_1, \ldots, s_n) \notin K(R)$. □

3.5.2. Предложение. *При условиях предложения 3.5.1 кольцо $R[t]/J(R[t])$ не удовлетворяет тождеству $f(x_1, \ldots, x_n)$.*

Доказательство. Для доказательства можно использовать теорему Амицура [10], в силу которой для произвольного кольца R имеем, что $J(R[t]) = I[t]$ для некоторого ниль-идеала I кольца R, откуда $J(R[t]) \subseteq K(R)[t]$. Однако для наших целей достаточно использовать следующее элементарное замечание: если $r \in J(R[t]) \cap R$, то элемент $1 - rt$ обратим. Запишем $(1 - rt)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m) = 1$ и сравним коэффициенты при степенях t. Получаем, что $a_0 = 1$, $a_i = r^i$ для $i = 1, \ldots, m$ и $r^{m+1} = 0$, т. е. r — нильпотентный элемент. Поэтому $R \cap J(R[t]) \subseteq K(R)$. Однако кольцо $R/K(R)$ не удовлетворяют тождеству $f(x_1, \ldots, x_n)$, Поэтому кольцо $R[t]/J(R[t])$ не удовлетворяет этому тождеству. □

3.5.3. Теорема. *Существует такое центрально существенное кольцо R, что кольцо $R/J(R)$ не является PI кольцом. Следовательно, кольцо $R/N(R)$ также не является PI кольцом (в частности, кольца $R/J(R)$ и $R/N(R)$ некоммутативны).*

Доказательство. Воспользуемся последовательностью колец из леммы 3.4.5.

Заметим, что прямое произведение любого множества колец центрально существенно в точности тогда, когда каждый из прямых сомножителей произведения — центрально существенное кольцо. Поэтому кольцо $R = \prod_{n \in \mathbb{N}} FG(n)$ центрально существенно в силу первого утверждения леммы 3.4.5.

Для любого полиномиального тождества $f(x_1, \ldots, x_n)$ степени d и каждого целого числа $m \in \mathbb{N}$ существует такое бесконечное множество чисел $k \in \mathbb{N}$, что тождество $f(x_1, \ldots, x_n)^m$ не выполняется в кольце $FG(k)$. Если кольцо $FG(k)$ удовлетворяет тождеству $f(x_1, \ldots, x_n)^m$, то оно также удовлетворяет полиномиальному тождеству степени dm, полученному линеаризацией этого тождества. В силу второго утверждения леммы 3.4.5 это невозможно для бесконечных множеств целых чисел k. Из предложения 3.5.2 следует, что $R[t]/J(R[t])$ не является PI кольцом.

Остается заметить, что кольцо многочленов от одной переменной над центрально существенным кольцом центрально существенно по замечанию 3.2.10, c. □

3.6. Локальные подалгебры треугольных алгебр. Данный подраздел основывается на статье [43]. В данном подразделе мы рассматриваем не обязательно унитальные кольца и изучаем локальные центрально существенные подалгебры алгебры $T_n(\mathbb{F})$ всех верхних треугольных матриц, где $\mathbb{F}$ — поле характеристики $\neq 2$. Такие подалгебры представляют интерес, поскольку при $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ они являются алгебрами квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения конечного ранга n. Алгебры квазиэндоморфизмов всех таких групп являются локальными матричными подалгебрами алгебры $M_n(\mathbb{Q})$ всех матриц порядка n над полем $\mathbb{Q}$; см., например, [36, Chapter I, § 5].

Заметим, что алгебра $\mathbb{Q}E$ — алгебра квазиэндоморфизмов сильно неразложимой абелевой группы без кручения простого ранга p в точности тогда, когда $\mathbb{Q}E$ изоморфна локальной подалгебре алгебры $T_p(\mathbb{Q})$. Действительно, $\mathbb{Q}E/J(\mathbb{Q}E) \cong \mathbb{Q}$ в этом случае; см. [21, Theorem 1.4.12], где $J(\mathbb{Q}E)$ — радикал Джекобсона, который нильпотентен, так как $\mathbb{Q}E$ артиново. Из теоремы Веддерберна—Мальцева[1] следует, что $\mathbb{Q}E \cong \mathbb{Q}E_p \oplus J(\mathbb{Q}E)$, где E_p — единичная матрица. Известно, что каждая нильпотентная подалгебра матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ над произвольным полем $\mathbb{F}$ преобразуется сопряжением в ниль-треугольную подалгебру; см. [68, Chapter 2, Theorem 6]. Так как диагональные матрицы локальной алгебры матриц имеют одинаковые элементы на главной диагонали, они преобразуются в себя при сопряжении. Следовательно, алгебры квазиэндоморфизмов таких абелевых групп реализуются как матричные подалгебры в точности тогда, когда эти подалгебры сопряжены с некоторой локальной подалгеброй алгебры $T_p(\mathbb{Q})$. Необходимую информацию об абелевых группах можно найти в [25] и [36].

[1]См., для примера, [19, Theorem 6.2.1].

Пусть $\mathbb{F}$ — поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра над $\mathbb{F}$. Для ниль-алгебры $\mathcal{A}$ максимальный индекс нильпотентности $\nu(\mathcal{A})$ ее элементов называется *ниль-индексом*. Если $\mathcal{A}^k = (0)$ и $\mathcal{A}^{k-1} \neq (0)$, то k — *индекс нильпотентности* алгебры $\mathcal{A}$ и эта алгебра называется алгеброй *индекса нильпотентности* k.

Далее, $\mathcal{A}$ обозначает локальную подалгебру алгебры $T_n(\mathbb{F})$ и $N_n(\mathbb{F})$ обозначает подалгебру нильпотентных матриц в $\mathcal{A}$ (т. е. алгебру строго верхних треугольных матриц). Заметим, что любая матрица $A \in \mathcal{A}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Через E_{ij} обозначается матричная единица, т. е. матрица с 1 на позиции (i,j) и нулями на оставшихся позициях; E_k обозначает единичную $k \times k$ матрицу. Линейная оболочка подмножества S линейного пространства обозначается через $\langle S \rangle$.

3.6.1. Предложение. *Пусть $\mathcal{A}$ — локальная подалгебра алгебры $T_n(\mathbb{F})$ с радикалом Джекобсона $J(\mathcal{A})$. Алгебра $\mathcal{A}$ центрально существенна в точности тогда, когда $J(\mathcal{A})$ — центрально существенная алгебра.*

Доказательство. Пусть имеется матрица $A \in J(\mathcal{A})$ с $A \notin Z(J(\mathcal{A}))$. Так как $\mathcal{A}$ — центрально существенная алгебра, то существует такая матрица $B \in Z(\mathcal{A})$, что $0 \neq AB = C \in Z(\mathcal{A})$. Так как $J(\mathcal{A})$ — идеал, $C \in Z(J(\mathcal{A}))$. Если $B \notin J(\mathcal{A})$, то $A = CB^{-1} \in Z(J(\mathcal{A}))$; это противоречит выбору матрицы A.

Наоборот, пусть $\mathcal{A} = \mathbb{F}E_n \oplus J(\mathcal{A})$. Так как $\mathbb{F}E_n \subset Z(\mathcal{A})$,

$$Z(J(\mathcal{A})) \subset Z(\mathcal{A}). \tag{3.6.1.1}$$

Если $0 \neq A \in \mathcal{A}$ и $A \in Z(\mathcal{A})$, то $0 \neq AE_n \in Z(\mathcal{A})$. Пусть $A \notin Z(\mathcal{A})$ и $A \in J(\mathcal{A})$. Тогда существует такая матрица $B \in Z(J(\mathcal{A}))$, что $0 \neq AB = C \in Z(J(\mathcal{A}))$. Из соотношения (3.6.1.1) следует, что $B \in Z(\mathcal{A})$ и $C \in Z(\mathcal{A})$.

Пусть $A \notin J(\mathcal{A})$. Тогда $A = A' + A''$, где $0 \neq A' \in \mathbb{F}E_n$, $A'' \in J(\mathcal{A})$. Если $A'' = 0$, то $A \in Z(\mathcal{A})$. В противном случае $0 \neq A''B \in Z(J(\mathcal{A}))$ для некоторой $B \in Z(J(\mathcal{A}))$. Тогда

$$AB = A'B + A''B = BA' + BA'' = BA.$$

Так как $A'B, A''B \in Z(J(\mathcal{A}))$, имеем $AB \in Z(J(\mathcal{A})) \subset Z(\mathcal{A})$. Заметим, что $AB \neq 0$, так как матрица A обратима. □

Из предложения 3.6.1 следует, что проблема построения локальных центрально существенных подалгебр алгебры $T_n(\mathbb{F})$ эквивалентна проблеме построения центрально существенных подалгебр алгебры $N_n(\mathbb{F})$.

Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра алгебры $N_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности n. Допустим, что $\nu(\mathcal{A}) = n$. Существует такая матрица $A \in \mathcal{A}$, что $A^{n-1} \neq 0$. Преобразуем A к жордановой форме,

$$A = E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{(n-1)n},$$

и перейдем к соответствующей сопряженной подалгебре $\mathcal{A}_c$. Обозначим через $\mathrm{Cen}(A)$ централизатор матрицы A в $\mathcal{A}_c$. Так как минимальный многочлен матрицы A совпадает с его характеристическим многочленом, то $\mathrm{Cen}(A) = \mathbb{F}[A]$, где $\mathbb{F}[A]$ — кольцо всех матриц, которые могут быть представлены в виде $f(A)$, $f(x) \in \mathbb{F}[x]$; см. [68, Chapter 1, Theorem 5]. Для $B \in \mathrm{Cen}(A)$ имеем

$$B = f(A) = \alpha_0 E_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_{n-1} A^{n-1}.$$

Кроме того, $\alpha_0 = 0$, так как матрица B нильпотентна.

3.6.2. Замечание. Если $Z(\mathcal{A}_c) = \mathrm{Cen}(A)$, то алгебра $\mathcal{A}_c$ коммутативна.

Доказательство. Действительно, если $A' \notin \mathrm{Cen}(A)$, то $AA' \neq A'A$. Однако $A \in \mathrm{Cen}(A) = Z(\mathcal{A}_c)$. Получено противоречие. □

3.6.3. Замечание. Пусть $\mathcal{A}_c$ — центрально существенная алгебра и $Z(\mathcal{A}_c) = \langle A^{n-1} \rangle$. Тогда алгебра $\mathcal{A}_c$ коммутативна.

Доказательство. Действительно, если $\mathcal{A}_c$ не коммутативна, то для матрицы $A' \notin Z(\mathcal{A}_c)$ имеем $BA' = 0$ для любой матрицы $B \in Z(\mathcal{A}_c)$. □

3.6.4. Замечание. Если $\mathbb{F}$ — поле характеристики $\neq 2$, то каждая центрально существенная подалгебра алгебры $N_3(\mathbb{F})$ коммутативна.

Доказательство. Каждая матрица $A \in N_3(\mathbb{F})$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ — некоммутативная центрально существенная подалгебра алгебры $N_3(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 3. Тогда $\nu(\mathcal{A}) = 3$. Пусть матрица $A \in \mathcal{A}$ имеет индекс нильпотентности 3. Преобразуем A к жордановой форме: $A = E_{12} + E_{23}$. Теперь, если $B \in \mathrm{Cen}(A)$, то $B = \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$. Заметим, что $Z(\mathcal{A}_c) \subseteq \mathrm{Cen}(A)$; кроме того, $\nu(Z(\mathcal{A}_c)) = 3$ по замечанию 3.6.3. Однако $Z(\mathcal{A}_c) = \mathrm{Cen}(A)$ и алгебра $\mathcal{A}_c$ коммутативна по замечанию 3.6.2. Получено противоречие. □

3.6.5. Замечание. Из замечания 3.6.4 следует, что все центрально существенные кольца эндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 коммутативны.

3.6.6. Предложение. *Любая центрально существенная подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $N_4(\mathbb{F})$ коммутативна.*

Доказательство. Если алгебра $\mathcal{A}$ имеет индекс нильпотентности 2, то она коммутативна. Пусть индекс нильпотентности алгебры $\mathcal{A}$ равен 3. Тогда $\nu(\mathcal{A}) = 3$, т. е. $\mathcal{A}$ содержит такую матрицу A, что $A^2 \neq 0$. Действительно, допустим противное, $A^2 = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Если $A \notin Z(\mathcal{A})$, то $0 \neq AB \in Z(\mathcal{A})$ для некоторой матрицы $B \in Z(\mathcal{A})$. Тогда

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = 2AB = 0.$$

Поэтому $AB = 0$. Получено противоречие.

Преобразуем матрицу A к жордановой форме,

$$A = E_{12} + E_{23}.$$

В соответствующей сопряженной подалгебре $\mathcal{A}_c$ централизатор $\mathrm{Cen}(A)$ состоит из матриц B вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.6.6.1}$$

см. [68, Chapter 3, § 1]. Кроме того, если $C \in Z(\mathrm{Cen}(A))$, то имеем

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6.6.2}$$

Пусть $Z(\mathcal{A}_c)$ имеет индекс нильпотентности 3. Тогда можно взять матрицу из $Z(\mathcal{A}_c)$ в качестве матрицы A; см. [68, Chapter 1, Proposition 5, Corollary]. В этом случае все матрицы из $\mathcal{A}_c$ содержатся в $\mathrm{Cen}(A)$. Тогда $\mathcal{A}_c$ состоит из матриц вида (3.6.6.1) и матриц из $Z(\mathcal{A}_c)$ вида (3.6.6.2). Если $B = (b_{ij}) \notin Z(\mathcal{A}_c)$ и $b_{12} = 0$, то $BC = 0$ для всех $C \in Z(\mathcal{A}_c)$. Тогда $\mathcal{A}_c$ не является центрально существенной алгеброй. Пусть $b_{12} \neq 0$ и $BD \neq DB$ для некоторой матрицы $D = (d_{ij}) \in \mathcal{A}_c$. Пусть $d_{12} = \lambda b_{12}$ и $F = \lambda B - D$, $F = (f_{ij})$. Тогда $f_{12} = 0$ и $F \notin Z(\mathcal{A}_c)$. Получено противоречие.

Пусть $Z(\mathcal{A}_c)$ имеет индекс нильпотентности 2. Тогда для $C \in Z(\mathcal{A}_c)$ мы получаем

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из соотношения $AC = CA$ для $A \in \mathcal{A}_c$ следует, что

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако $AC = 0$ для любой матрицы $C \in Z(\mathcal{A}_c)$. Следовательно, если $\mathcal{A}_c$ — центрально существенная алгебра, то $\mathcal{A}_c$ коммутативна.

Пусть индекс нильпотентности алгебры $\mathcal{A}$ равен 4. Также, как и выше доказывается, что алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна, если $A^3 = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Предположим, что $A^3 \neq 0$ для некоторой матрицы $A \in \mathcal{A}$. Преобразуем A к жордановой форме,

$$A = E_{12} + E_{23} + E_{34},$$

и перейдем к соответствующей сопряженной подалгебре $\mathcal{A}_c$. Для матрицы $B \in \operatorname{Cen}(A)$ имеем

$$B = \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{F}$. Из замечаний 3.6.2 и 3.6.3 следует, что $Z(\mathcal{A}_c) \neq \operatorname{Cen}(A)$ и $Z(\mathcal{A}_c) \neq \langle A^3 \rangle$, если алгебра $\mathcal{A}_c$ не коммутативна. Тогда любая матрица $C \in Z(\mathcal{A}_c)$ имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathcal{A}_c$ — центрально существенная алгебра, имеем, что для ненулевой матрицы $D \notin Z(\mathcal{A}_c)$ существует такая матрица $C \in Z(\mathcal{A}_c)$, что $0 \neq DC \in Z(\mathcal{A}_c)$. Так как матрица D нильпотентна, то $\operatorname{trace} D = 0$. Кроме того, $\mathcal{A}_c$ локальна; поэтому все элементы на главной диагонали матрицы D равны нулю. В этом случае непосредственно проверяется, что

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & 0 & d_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $d_{12} = 0$ и $D \notin Z(\mathcal{A}_c)$, то $DC = 0$ для любой матрицы $C \in Z(\mathcal{A}_c)$; получено противоречие. Пусть $d_{12} \neq 0$ и $DF \neq FD$ для некоторой матрицы $F = (f_{ij}) \in \mathcal{A}_c$. Найдем такой элемент $\lambda \in \mathbb{F}$, что $f_{12} = \lambda d_{12}$. Положим $G = \lambda D - F$, $G = (g_{ij})$. Тогда

$$FG = F(\lambda D - F) = \lambda FD - F^2, \quad GF = (\lambda D - F)F = \lambda DF - F^2.$$

Поэтому $G \notin Z(\mathcal{A}_c)$ и $g_{12} = 0$. Из полученного противоречия следует, что алгебра $\mathcal{A}_c$ коммутативна. □

3.6.7. Замечание. В теореме 2.2.3 доказано, что внешняя алгебра $\Lambda(V)$ над полем $\mathbb{F}$ характеристики $\neq 2$ — центрально существенная алгебра в точности тогда, когда размерность пространства V нечетна. Рассматривая регулярное матричное представление алгебры $\Lambda(V)$, мы получаем, что для нечетного положительного целого числа $n > 1$ существует некоммутативное центрально существенная подалгебра алгебры $N_{2^n}(\mathbb{F})$; также см. пример 3.7.11 ниже. Поэтому минимальный порядок матриц некоммутативной центрально существенной внешней алгебры равен 8.

Напомним, что для правого идеала I кольца R любой правый идеал J в R, максимальный относительно свойства $I \cap J = 0$, называется $\cap$-*дополнением* к I.

3.6.8. Пример. Существует некоммутативная центрально существенная алгебра 7×7 матриц, которая имеет замкнутый правый идеал, не являющийся идеалом.

Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}$ в $N_7(\mathbb{F})$, состоящей из матриц A вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть для $A' \in \mathcal{A}$ имеем $a' = a + 1$, а остальные компоненты совпадают с соответствующими компонентами матрицы A. Тогда $AA' \neq A'A$, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Таким образом, алгебра $\mathcal{A}$ некоммутативна. Нетрудно видеть, что в $Z(\mathcal{A})$ лежат матрицы C вида

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $0 \neq A \notin Z(\mathcal{A})$, то $0 \neq AC \in Z(\mathcal{A})$ для некоторой матрицы $C \in Z(\mathcal{A})$. Следовательно, $\mathcal{A}$ — центрально существенная алгебра.

Рассмотрим правый идеал I в $\mathcal{A}$, состоящий из матриц вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что I не является идеалом в $\mathcal{A}$. Кроме того, I — замкнутый правый идеал. В самом деле, идеал в $\mathcal{A}$, имеющий только элемент c в качестве ненулевой компоненты, есть $\cap$-дополнение к I.

В то же время замкнутый левый идеал J в $\mathcal{A}$, элементами которого являются матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

не является идеалом. Идеал, имеющий только элемент c в качестве ненулевой компоненты, является $\cap$-дополнением также и для J.

3.6.9. Теорема. *Для любого поля $\mathbb{F}$ характеристики $\neq 2$ и произвольного положительного целого числа $n \geqslant 7$ существует локальная некоммутативная центрально существенная подалгебра алгебры $T_n(\mathbb{F})$ верхних треугольных $n \times n$ матриц.*

Доказательство. В $N_n(\mathbb{F})$ мы рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}$ матриц A вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что алгебра $\mathcal{A}$ не коммутативна; также см. пример 3.6.8. Если $B \in Z(\mathcal{A})$, то

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{14} & b_{15} & \dots & b_{1n-2} & b_{1n-1} & b_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{1n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{1n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $A = (a_{ij}) \notin Z(\mathcal{A})$ имеем $a_{12} \neq 0$, $a_{13} \neq 0$. Пусть $B = (b_{ij}) \in Z(\mathcal{A})$ и $b_{1n-2} = a_{12}$, $b_{1n-1} = a_{13}$. Тогда $0 \neq AB \in Z(\mathcal{A})$. Действительно, пусть $AB = C = (c_{ij})$, $BA = D = (d_{ij})$. Тогда $c_{ij} = d_{ij} = 0$ для всех $i \neq 1$, $j \neq n$. Кроме того, $c_{1n} = d_{1n} = a_{12}^2 + a_{13}^2$. Поэтому $\mathcal{A}$ — центрально существенная алгебра. □

3.7. Кольца эндоморфизмов абелевых групп. В данном подразделе мы изучаем абелевы группы A с центрально существенными кольцами эндоморфизмов $\operatorname{End} A$. Раздел основывается на статье [39].

Обозначим через $\operatorname{End} A$ кольцо эндоморфизмов абелевой группы A. Если $A = \bigoplus_{p\in P} A_p$ — разложение периодической абелевой группы A в прямую сумму p-компонент, то $\operatorname{supp} A = \{p \in P \mid A_p \neq 0\}$. Мы используем следующие обозначения: $\mathbb{Z}_{p^k}$ (соотв., Z_{p^k}) — кольцо вычетов (соотв., аддитивная группа по модулю p^k); $\mathbb{Q}$ (соотв., Q) — кольцо (соотв., аддитивная группа) рациональных чисел; Z_{p^∞} — квазициклическая абелева p-группа; $\hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо p-адических целых чисел.

Абелева группа A называется *делимой*, если $nA = A$ для любого положительного целого числа n. Абелева группа называется *редуцированной*, если она не содержит ненулевых делимых подгрупп и *нередуцированной* в противном случае.

Подгруппа B абелевой группы A называется *чистой*, если уравнение $nx = b \in B$, которое имеет решение в группе A, также имеет решение в B.

3.7.1. Замечание. Пусть A — абелева группа, которая является либо периодической группой, либо нередуцированной группой, и пусть кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} A$ центрально существенно. Ниже мы докажем, что кольцо $\operatorname{End} A$ коммутативно. Поэтому при изучении абелевых групп с некоммутативными центрально существенными кольцами эндоморфизмов только редуцированные группы без кручения и редуцированные смешанные группы представляют интерес.

В теореме 3.7.13, с ниже приведен пример абелевой группы без кручения конечного ранга с центрально существенным некоммутативным кольцом эндоморфизмов. В примере 3.7.15 ниже мы приводим дополнительные примеры некоммутативных центрально существенных колец эндоморфизмов некоторых абелевых групп без кручения бесконечного ранга.

Пусть A — абелева группа без кручения. *Псевдоцоколь* $\operatorname{PSoc} A$ группы A — это чистая подгруппа группы A, порожденная всеми ее минимальными чистыми вполне инвариантными подгруппами.

3.7.2. Лемма. *Пусть A — модуль и $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ — прямое разложение модуля A. Кольцо эндоморфизмов* $\operatorname{End} A$ *центрально существенно в точности тогда, когда для каждого $i \in I$ все кольца* $\operatorname{End} A_i$ *центрально существенны и все A_i — вполне инвариантные подмодули в A.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{End} A = E$ — центрально существенное кольцо. Если A_i не является вполне инвариантным подмодулем для некоторого $i \in I$, то существует такой индекс $j \in I$, $j \neq i$, что $\operatorname{Hom}(A_i, A_j) = e_j E e_i \neq 0$, где e_i и e_j — проекции из модуля A на подмодули A_i и A_j соответственно. Кроме того,

$$e_i \cdot e_j E e_i = 0 \neq e_j E e_i = e_j E e_i \cdot e_i,$$

т. е. идемпотент e_i не централен; это противоречит 1.1.4.

Если A_i — вполне инвариантный подмодуль в A, $i \in I$, то $\operatorname{End} A \cong \operatorname{End} A_i \times \operatorname{End} \overline{A}_i$, где $\overline{A}_i$ — дополнительное прямое слагаемое для A_i. Ясно, что если кольцо $\operatorname{End} A_i$ не центрально существенно, то и $\operatorname{End} A$ не центрально существенно.

Допустим, что для любого $i \in I$ кольцо $\operatorname{End} A_i$ центрально существенно и A_i — вполне инвариантный подмодуль в A. Тогда $\operatorname{End} A \cong \prod_{i\in I} \operatorname{End} A_i$ и все кольца $\operatorname{End} A_i$ центрально существенны. Ясно, что $\operatorname{End} A$ тоже центрально существенно. □

3.7.3. Лемма. *Кольцо эндоморфизмов делимой абелевой группы A центрально существенно в точности тогда, когда $A \cong Q$ или $A \cong \oplus_p Z_{p^\infty}$ для различных простых чисел p.*

Доказательство. Пусть $A = F(A) \oplus T(A)$, где $0 \neq F(A)$ — часть без кручения и $0 \neq T(A)$ — периодическая часть группы A. Тогда подгруппа $F(A)$ в A не вполне инвариантна (см. [25, Theorem 7.2.3]) и, по лемме 3.7.2, кольцо $\operatorname{End} A$ не центрально существенно. Гипотетически, $F(A)$ или $T(A)$ — прямая сумма групп $\mathbb{Z}_p^\infty$ или $\mathbb{Q}$. Ясно, что если в первом случае число слагаемых больше 1, то $End(A)$ имеет нецентральный идемпотент. Та же ситуация имеет место, если группа имеет разложение в прямую сумму квазициклических групп не для различных простых p. □

Пусть $A = \bigoplus_{p\in P} A_p$ — разложение периодической абелевой группы A в прямую сумму ее примарных компонент. Из леммы 3.7.2 следует, что $\operatorname{End} A$ — центрально существенное кольцо в точности тогда, когда каждое кольцо $\operatorname{End} A_p$ центрально существенно.

3.7.4. Лемма. *Кольцо эндоморфизмов примарной абелевой группы A_p центрально существенно в точности тогда, когда $A_p \cong Z_{p^k}$ или $A_p \cong Z_{p^\infty}$.*

Доказательство. Если группа A_p не является неразложимой, то она имеет коциклическое прямое слагаемое; см. [25, Corollary 5.2.3]. Учитывая [25, Theorem 7.1.7, Example 7.1.3 и Theorem 7.2.3], видим, что это слагаемое и дополнительные к нему слагаемые вполне инвариантны в A. Следовательно, $A_p \cong Z_{p^k}$ или $A_p \cong Z_{p^\infty}$. Обратное очевидно, так как кольца $\mathbb{Z}_{p^k}$ и $\hat{\mathbb{Z}}_p$ коммутативны.
□

3.7.5. Теорема. *Пусть $A = D(A) \oplus R(A)$ — нередуцированная абелева группа, где $0 \neq D(A)$ и $0 \neq R(A)$ — делимая и редуцированная части группы A соответственно. Кольцо эндоморфизмов группы A центрально существенно в точности тогда, когда $A = D(A) \oplus R(A)$, где $R(A) = \bigoplus_{p\in P'} Z_{p^k}$ и $D(A) \cong Q$ или $D(A) \cong \bigoplus_{p\in P''} Z_{p^\infty}$; P', P'' — подмножества различных простых чисел с условием $P' \cap P'' = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{End} A$ — центрально существенное кольцо. Проверим, что $D(A)$ и $R(A)$ — вполне инвариантные подгруппы в A. Действительно, хорошо известно, что $\operatorname{Hom}(D(A), R(A)) = 0$. Если $R(A)$ — группа без кручения, то $\operatorname{Hom}(R(A), D(A)) \neq 0$ (см. [25, Theorem 7.2.3]); это противоречит лемме 3.7.2. Также ясно, что $\operatorname{Hom}(R(A), D(A)) \neq 0$, если $R(A)$, $D(A)$ — периодические группы и $\operatorname{supp} R(A) \cap \operatorname{supp} D(A) \neq \varnothing$. Из леммы 3.7.4 следует, что $R(A)$ — прямая сумма его циклических p-компонент и из леммы 3.7.3 следует, что $D(A) \cong Q$ или $D(A) \cong \bigoplus_{p\in P} Z_{p^\infty}$.

Обратное утверждение следует из лемм 3.7.2—3.7.4. □

3.7.6. Следствие. *Кольцо эндоморфизмов нередуцированной абелевой группы центрально существенно в точности тогда, когда кольцо коммутативно. Иными словами, только редуцированные абелевы группы могут иметь некоммутативные центрально существенные кольца эндоморфизмов.*

Доказательство. Действительно, из теоремы 3.7.5 следует, что центрально существенное кольцо эндоморфизмов произвольной нередуцированной абелевой группы является прямым произведением колец, которыми могут быть только кольца $\mathbb{Z}_{p^k}$, $\mathbb{Q}$ и $\hat{\mathbb{Z}}_p$. □

3.7.7. Квазиразложения и сильная неразложимость. Пусть A и B — две абелевы группы без кручения. Говорят, что A *квазисодержится* в B, если $nA \subseteq B$ для некоторого положительного целого числа n. Если A квазисодержится в B и B квазисодержится в A (т. е. если $nA \subseteq B$ и $mB \subseteq A$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$), то говорят, что A *квазиравна* B (пишут $A \doteq B$). Квазиравенство $A \doteq \bigoplus_{i\in I} A_i$ называется *квазиразложением* (или *квазипрямым разложением*) абелевой группы A; эти подгруппы A_i называются *квазислагаемыми* группы A. Если группа A не имеет нетривиальных квазиразложений, то A называется *сильно неразложимой*. Кольцо $\mathbb{Q}\otimes\operatorname{End} A$ называется *кольцом квазиэндоморфизмов* группы A; обозначим его через $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$; подробности см. в [36, Chapter I, § 5]. Элементы кольца $\mathbb{Q}\otimes\operatorname{End} A$ называются *квазиэндоморфизмами* группы A. Заметим, что

$$\mathbb{Q}\operatorname{End} A = \{\alpha \in \operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(Q\otimes A) \mid (\exists n \in \mathbb{N})(n\alpha \in \operatorname{End} A)\}.$$

Хорошо известно [36, Proposition 5.2], что соответствие

$$A \doteq e_1A \oplus \ldots \oplus e_kA \to \mathbb{Q}\operatorname{End} A = \mathbb{Q}\operatorname{End} Ae_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}\operatorname{End} Ae_k$$

между конечными квазиразложениями группы без кручения A и конечными разложениями кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ в прямую сумму левых идеалов, где $\{e_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ — полная ортогональная система идемпотентов кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$, взаимно однозначно.

3.7.8. Предложение. *Кольцо эндоморфизмов E абелевой группы без кручения A центрально существенно в точности тогда, когда кольцо квазиэндоморфизмов $\mathbb{Q}E$ группы A центрально существенно.*

Доказательство. Пусть $0 \neq \tilde{a} \in \mathbb{Q}E$. Для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеем $n\tilde{a} = a \in E$ и существуют $x, y \in Z(E)$ с $ax = y \neq 0$. В этом случае $\tilde{a}\tilde{x} = \tilde{y}$, где $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = \frac{1}{n}\cdot y \in Z(\mathbb{Q}E)$, т. е. $\mathbb{Q}E$ — центрально существенное кольцо.

Наоборот, для каждого $0 \neq a \in E$ существуют ненулевые $\tilde{x}, \tilde{y} \in Z(\mathbb{Q}E)$ с $a\tilde{x} = \tilde{y}$. Кроме того, существуют такие $n, m \in \mathbb{N}$, что $n\tilde{x} \in Z(E)$ и $m\tilde{y} \in Z(E)$. Тогда $ax = y$, где $x = mn\tilde{x}, y = mn\tilde{y} \in Z(E)$. □

Пусть $A \doteq \bigoplus_{i=1}^n A_i = A'$ — разложение абелевой группы без кручения A конечного ранга в квазипрямую сумму сильно неразложимых групп (см., например, [36, Theorem 5.5]). Применяя лемму 3.7.2 и предложение 3.7.8, мы получаем, что кольцо $\operatorname{End} A$ центрально существенно в точности тогда, когда все подгруппы A_i вполне инвариантны в A', и каждое кольцо $\operatorname{End} A_i$ центрально существенно. Поэтому задача описания абелевых групп без кручения конечного ранга с центрально существенными кольцами эндоморфизмов сводится к аналогичной задаче для сильно неразложимых групп.

3.7.9. Предложение. *Пусть A — сильно неразложимая абелева группа и $A = \operatorname{PSoc} A$. Если кольцо $\operatorname{End} A$ центрально существенно, то кольцо $\operatorname{End} A$ коммутативно.*

Доказательство. Если $A = \operatorname{PSoc} A$, то $\operatorname{End} A$ — полупервичное кольцо (см., например, [36, Theorem 5.11]). По теореме 1.2.2 кольцо $\operatorname{End} A$ коммутативно. □

3.7.10. Замечания. Пусть R — локальное артиново кольцо с центром $Z(R) = C$ и R не является телом.

(a) Если R центрально существенно, то $R/J(R)$ коммутативно и $C \cap M \neq 0$ для каждого минимального идеала M.
(b) Если $R/J(R)$ коммутативно, $\operatorname{Soc}(R_C) = \operatorname{Soc}(R_R)$ и $C \cap M \neq 0$ для каждого минимального идеала M, то R центрально существенно.

Доказательство. (a) Пусть R центрально существенно. По теореме 1.3.2 $R/J(R)$ коммутативно. Так как R артиново, то идеал $J(R)$ нильпотентен; пусть k — индекс нильпотентности $J(R)$. Заметим, что если M — минимальный идеал в R, то $MJ(R) = 0$.

Допустим, что $C \cap M = 0$ для некоторого минимального идеала M. По условию для $0 \neq a \in M$ найдутся такие $x, y \in Z(R)$, что $ax = y \neq 0$. Так как $x \notin J(R)$ (иначе $ax = 0$), то элемент x обратим в R и $a = x^{-1}y \in C$; противоречие.

(b) Пусть $C \cap M \neq 0$ для каждого минимального идеала M. Проверим, что $M \subseteq C$. Пусть $C \cap M = K$. Так как по условию $R/J(R)$ коммутативно, то $rs - sr \in J(R)$ для всех $r, s \in R$. Тогда $k(rs - sr) = 0$ для каждого $k \in K$. Кроме того, поскольку $k \in C$, то $(kr)s = ksr = s(kr)$ и $kr \in C$. Аналогично, $rk \in C$. Кроме того, $kr \in M$ и $rk \in M$. Поэтому K — идеал. Из минимальности идеала M следует, что $K = M$ или $K = 0$. Но $K \neq 0$, откуда $K = M$, $M \subset C$. Поэтому $\operatorname{Soc} R_C = \operatorname{Soc} R_R \subseteq C$. По теореме 1.4.1(b) кольцо R центрально существенно. $\square$

3.7.11. Пример. Найдем центрально существенные кольца эндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 2 и 3.

Если A — сильно неразложимая группа ранга 2, то кольцо $\operatorname{End} A$ коммутативно (см., например, [21, Theorem 4.4.2]). Следовательно, $\operatorname{End} A$ — центрально существенное кольцо. Пусть A — сильно неразложимая группа ранга 3. Тогда алгебра $\mathbb{Q} \operatorname{End} A$ изоморфна одной из следующих $\mathbb{Q}$-алгебр (см. [8, Theorem 2]):

$$K \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$R \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$S \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & ky \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Q},\ 0 \neq k \in \mathbb{Q},\ k = \mathrm{const} \right\},$$

$$T \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Кольца K, R, S коммутативны; следовательно, они центрально существенны. Кольцо T не коммутативно (кроме того, $\operatorname{PSoc} A$ имеет ранг 1). Имеем

$$J(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : y, z, t \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$Z(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{Q} \right\},$$

где M — минимальный правый идеал кольца T. Заметим, что кольцо $T/J(T)$ коммутативно, но $Z(T) \cap M = 0$. Из замечания 3.7.10, a следует, что кольцо T не центрально существенно. В результате мы получаем, что кольца эндоморфизмов сильно неразложимых групп ранга 2 или 3 центрально существенны в точности тогда, когда они коммутативны.

3.7.12. Пример. Пусть V — векторное $\mathbb{Q}$-пространство с базисом e_1, e_2, e_3 и пусть $\Lambda(V)$ — внешняя алгебра пространства V, т. е. $\Lambda(V)$ — алгебра с операцией $\wedge$, образующими e_1, e_2, e_3

и определяющими соотношениями
$$e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0 \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, 2, 3.$$
Тогда $\Lambda(V)$ — $\mathbb{Q}$-алгебра размерности 8 с базисом
$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$$
и $\Lambda(V)$ — некоммутативное центрально существенное кольцо; см. введение, пример 2. Рассмотрим регулярное представление $\Lambda(V)$. Если $x \in \Lambda(V)$ и
$$x = q_0 \cdot 1 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_1 \wedge e_2 + q_5 e_2 \wedge e_3 + q_6 e_1 \wedge e_3 + q_7 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$
то матрица $A_x \in \mathrm{Mat}_8(\mathbb{Q})$ имеет вид
$$\begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 \\ 0 & q_0 & 0 & 0 & -q_2 & 0 & -q_3 & q_5 \\ 0 & 0 & q_0 & 0 & q_1 & -q_3 & 0 & -q_6 \\ 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & q_2 & q_1 & q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & -q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 \end{pmatrix}.$$
Обозначим через R соответствующую подалгебру в $\mathrm{Mat}_8(\mathbb{Q})$. Ясно, что радикал $J(R)$ состоит из строго верхних треугольных матриц в R и $A_x \in Z(R)$ в точности тогда, когда $q_1 = q_2 = q_3 = 0$. Кроме того, $\operatorname{Soc} R_R = \{A_x = (a_{ij}) \in R \mid a_{ij} = 0,\ i \neq 1,\ j \neq 8\}$ и $\operatorname{Soc} R_C = \{A_x = (a_{ij}) \in Z(R) \mid a_{ii} = 0\}$. Так как $\operatorname{Soc}(R_C) \neq \operatorname{Soc} R_R$, то соответствующее условие замечания 3.7.10, b не является необходимым.

3.7.13. Теорема. *Пусть A — сильно неразложимая абелева группа без кручения конечного ранга, $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ — кольцо квазиэндоморфизмов, и $A \neq \operatorname{PSoc} A$.*

(a) *Если $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ — центрально существенное кольцо, то кольцо $\mathbb{Q}\operatorname{End} A/J(\mathbb{Q}\operatorname{End} A)$ коммутативно и $Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A) \cap M \neq 0$ для каждого минимального правого идеала M кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$.*

(b) *Пусть кольцо $\mathbb{Q}\operatorname{End} A/J(\mathbb{Q}\operatorname{End} A)$ коммутативно,*
$$\operatorname{Soc}(\mathbb{Q}\operatorname{End} A_{\mathbb{Q}\operatorname{End} A}) = \operatorname{Soc}(\mathbb{Q}\operatorname{End} A_{Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A)})$$
и $Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A) \cap M \neq 0$ для каждого минимального правого идеала M кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$. Тогда кольцо $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ центрально существенно.

(c) *Пусть $n > 1$ — нечетное положительное целое число. Существует такая сильно неразложимая абелева группа без кручения $A(n)$ ранга 2^n, что ее кольцо эндоморфизмов — некоммутативное центрально существенное кольцо.*

Доказательство. (a), (b) Известно, что кольцо $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ — локальное артиново кольцо (см., например, [36, Corollary 5.3]). Остается использовать 3.7.10.

(c) По теореме 2.2.3 внешняя алгебра $\Lambda(V)$ над полем F характеристики 0 или $p \neq 2$ — центрально существенное кольцо в точности тогда, когда размерность пространства V нечетна. Положим $F = \mathbb{Q}$. Известно (см., например, [59]), что каждая $\mathbb{Q}$-алгебра размерности n может быть реализована как кольцо квазиэндоморфизмов абелевой группы без кручения ранга n. Поэтому, учитывая пример 3.7.10 и предложение 3.7.8, мы получаем требуемое свойство. □

При условиях теоремы 3.7.13, если ранг группы A не содержит квадратов, то кольцо $\mathbb{Q}\operatorname{End} A/J(\mathbb{Q}\operatorname{End} A)$ коммутативно [21, Lemma 4.2.1]. Учитывая предложение 3.7.8, мы получаем следствие 3.7.14.

3.7.14. Следствие. *Пусть A — сильно неразложимая абелева группа без кручения конечного ранга, $A \neq \operatorname{PSoc} A$ и ранг группы A не содержит квадратов.*

(a) *Если кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} A$ группы A центрально существенно, то $Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A) \cap M \neq 0$ для каждого минимального правого идеала M кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$.*

(b) *Если для каждого минимального правого идеала M кольца $\mathbb{Q}\operatorname{End} A$ имеем*

$$\operatorname{Soc}(\mathbb{Q}\operatorname{End} A_{\mathbb{Q}\operatorname{End} A}) = \operatorname{Soc}(\mathbb{Q}\operatorname{End} A_{Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A)}) \quad \text{и} \quad Z(\mathbb{Q}\operatorname{End} A) \cap M \neq 0,$$

то кольцо $\operatorname{End} A$ *центрально существенно.*

3.7.15. Пример. Пусть $R = \mathbb{Z}[x, y]$ — кольцо многочленов от двух переменных x и y. Мы используем конструкцию, описанную в [33, Proposition 7]. Рассмотрим кольцо

$$T(R) = \left\{ \begin{pmatrix} f & d_1(f) & g \\ 0 & f & d_2(f) \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} : f, g \in \mathbb{Z}[x, y] \right\},$$

где d_1, d_2 — два дифференцирования кольца $\mathbb{Z}[x, y]$,

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Кольцо $T(R)$ некоммутативно и $J(R) = e_{13}R \subseteq Z(T(R))$, где e_{13} — матричная единица [33, Corollary 8]. Если $0 \neq a \in T(R) \setminus Z(T(R))$, то $0 \neq ae_{13} \in Z(T(R))$. Поэтому $T(R)$ центрально существенно. Так как $T(R)$ — счетное кольцо с редуцированной аддитивной группой без кручения, из известной теоремы Корнера (см., например, [36, Theorem 29.2]) следует, что в кольце $T(R)$ существуют $\mathfrak{M}$ таких абелевых групп A_i, что $\operatorname{End} A_i \cong T(R)$ и $\operatorname{Hom}(A_i, A_j) = 0$ для всех $i \neq j$, где $\mathfrak{M}$ — произвольное наперед заданное кардинальное число; см. [17, 20]. Заметим, что кольцо эндоморфизмов прямой суммы таких групп также является некоммутативным центрально существенным кольцом.

4. Дистрибутивные и цепные кольца

4.1. Цепные артиновы кольца.

Данный подраздел основывается на статье [50].

Следующий факт известен и проверяется непосредственно.

4.1.1. Цепные артиновы кольца. Для кольца R с нильпотентным радикалом Джекобсона J и индексом нильпотентности n для J равносильны условия:

(a) J^{k-1}/J^k — простой левый R-модуль для всех $k = 1, \ldots, n$ (полагаем, что $J^0 = R$);
(b) R — цепное слева, артиново слева кольцо;
(c) R — локальное кольцо и J — главный левый идеал.

4.1.2. Лемма. *Пусть R — цепное слева, артиново слева кольцо, $J = J(R) = R\pi$, $D = \overline{R}$ — тело, и пусть $\sigma\colon D \to D$ — отображение, определенное соотношением*

$$\sigma(\overline{r}) = \overline{a}, \quad \text{где} \quad a\pi = \pi r. \tag{4.1.2.1}$$

Тогда σ — гомоморфизм из тела D в себя.

Доказательство. Сначала заметим, что отображение σ определено корректно. Действительно, существование элемента a из (4.1.2.1) следует из того, что $R\pi$ — двусторонний идеал. Если $r, r' \in R$, $\pi r = a\pi$, $\pi r' = a'\pi$, и $\overline{r} = \overline{r'}$, то $(a - a')\pi = \pi(r - r') \in J^2$. Однако J/J^2 — одномерное линейное пространство над телом $\overline{R}$, порожденное элементом $\pi + J^2$; поэтому $\overline{a - a'} = 0$ и $\overline{a} = \overline{a'}$.

Далее, для любых элементов $r_1, r_2 \in R$ имеем

$$\sigma(r_1 + r_2)(\pi + J^2) = \pi(r_1 + r_2) + J^2 = \pi r_1 + \pi r_2 + J^2 = (\sigma(r_1) + \sigma(r_2))(\pi + J^2),$$
$$\sigma(r_1 r_2)(\pi + J^2) = \pi r_1 r_2 + J^2 = \sigma(r_1)(\pi r_2 + J^2) = \sigma(r_1)\sigma(r_2)(\pi + J^2).$$

Поэтому σ — кольцевой гомоморфизм. □

4.1.3. Замечание. Мы часто без специальных ссылок будем использовать тот факт, что для любого центрально существенного локального кольца R тело $\overline{R}$ является полем по теореме 1.3.2. В частности, это так, если R — цепное слева или справа центрально существенное кольцо.

4.1.4. Предложение. *Пусть R — цепное слева, артиново слева, центрально существенное кольцо, $C = Z(R)$, и пусть $J = J(R)$. Тогда гомоморфизм σ из леммы 4.1.2 — тождественный автоморфизм.*

Доказательство. Пусть c — такой элемент центра кольца R, что $c\pi \in C \setminus \{0\}$. Пусть r — произвольный элемент кольца R. Имеем $c = a\pi^k + b$, где $b \in J^{k+1}$ и $\overline{a} \neq 0$. Из соотношения $rc = cr$ следует, что $\overline{a}(\overline{r} - \sigma^k(\overline{r})) = 0$. Тогда $c\pi = a\pi^{k+1} + b\pi$ и из соотношения $r(c\pi) = (c\pi)r$ следует, что $\overline{a}(\overline{r} - \sigma^{k+1}(\overline{r})) = 0$. Поскольку $\mathrm{Ker}(\sigma) = 0$, то из соотношения $\sigma^k(\overline{r}) = \sigma^{k+1}(\overline{r})$ следует, что $\overline{r} = \sigma(\overline{r})$. □

4.1.5. Следствие. *Если цепное слева, артиново слева кольцо R центрально существенно, то R — цепное справа, артиново справа кольцо.*

Доказательство. Если $J(R) = R\pi$ для некоторого элемента $\pi \in J(R)$, то из предложения 4.1.4 следует, что $J(R) = \pi R + J(R)^2$ и $J(R) = \pi R$ в силу леммы Накаямы. Остается заметить, что выполняется правосторонний аналог условия с из 4.1.1. □

Напомним, что *левый аннулятор* подмножества S кольца R обозначается $\ell_R(S) = \{r \in R \mid rS = 0\}$. Правый аннулятор $r_R(S)$ определяется аналогично.

4.1.6. Предложение. *Пусть R — артиново слева, цепное слева кольцо с радикалом Джекобсона J и центром $C = Z(A)$, n — индекс нильпотентности идеала J. Если $J^{[n/2]} \subseteq C$, то R центрально существенно.*

Доказательство. Сначала заметим, что $\ell_R(J^k) = r_R(J^k) = J^{n-k}$ для любого $k = 0, 1, \ldots, n$. В частности,

$$\ell_R(J^{[n/2]}) \subseteq J^{[n/2]}.$$

Пусть $0 \neq r \in R$. Если $r \in J^{[n/2]}$, то $r \in C$. Если $r \notin J^{[n/2]}$, то выше было замечено, что $r \notin \ell_R(J^{[n/2]})$. Поэтому $rJ^{[n/2]} \neq 0$ и $rJ(R)^{[n/2]} \subseteq J(R)^{[n/2]} \subseteq C$. В обоих случаях $rC \cap C \neq 0$. □

4.1.7. Открытый вопрос. Верно ли утверждение, обратное к предложению 4.1.6?

Теперь мы докажем, что существует некоммутативное цепное центрально существенное кольцо. Для этой цели мы используем конструкцию, аналогичную описанной в [33].

Для поля F напомним, что *дифференцирование* поля F — произвольный эндоморфизм аддитивной группы $(F, +)$, удовлетворяющий соотношению $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$ для любых элементов $f, b \in F$. Общие свойства дифференцирований приведены, например, в [74, § II.17]. Любое поле имеет *тривиальное* дифференцирование $F \to 0$. Пример нетривиального дифференцирования — обычное дифференцирование поля рациональных функций.

Для кольца R обозначим через $[a, b]$ *коммутатор* $ab - ba$ двух элементов a, b кольца R и обозначим через $[A, B]$ идеал кольца R, порожденный множеством $\{[a, b] \mid a \in A,\ b \in B\}$, где A, B — любые два подмножества в R. Для любых трех элементов $a, b, c \in R$ имеем следующие хорошо известные свойства коммутаторов: $[a, b] = -[b, a]$, $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$.

4.1.8. Пример. Пусть F — поле с нетривиальным дифференцированием δ. Тогда существует такое некоммутативное артиново цепное центрально существенное кольцо R, что $R/J(R) \cong F$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $f\colon F \to M_3(F)$ из поля F в кольцо 4×4 матриц над F, определенное соотношением

$$\forall a \in F \quad f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \delta(a) & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что f — кольцевой гомоморфизм. Положим

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подкольцо R кольца $M_4(F)$, порожденное множеством $f(F) \cup \{x\}$. Нетрудно видеть, что $xf(a) = f(a)x + f(\delta(a))x^3$ для любого $a \in A$. Поэтому $Rx = xR$, $(Rx)^4 = 0$ и $R/Rx \cong F$. Из 4.1.1 следует, что R — цепное артиново кольцо.

Поскольку $Rx^2 \subseteq Z(R)$, то из предложения 4.1.6 следует, что кольцо R центрально существенно. Наконец, если $a \in R$ и $\delta(a) \neq 0$, то $[x, f(a)] = f(\delta(a))x^3 \neq 0$; откуда кольцо R не является коммутативным. □

4.1.9. Предложение. *Пусть R — такое цепное артиново кольцо с радикалом $J = R\pi$, что $\overline{R}$ — поле и $[r, \pi] \in J^2$ для любого $r \in R$. Если кольцо R не является коммутативным, то поле F имеет нетривиальное дифференцирование.*

Доказательство. Пусть $\gamma\colon \overline{R} \to R$ — произвольное отображение, такое, что $\overline{\gamma \overline{r}} = \overline{r}$ для любого $r \in R$; другими словами, $\gamma(\overline{r})$ — фиксированный представитель смежного класса $r + J$. Без ограничения общности можно считать, что $\gamma(\overline{0}) = 0$. Положим $\Gamma = \gamma(\overline{R})$. Тогда любой элемент $r \in R$ единственным образом представим в виде суммы

$$r = \sum_{i=0}^{n-1} g_i \pi^i, \tag{4.1.9.1}$$

где $g_i \in \Gamma$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (допустим, что $\pi^0 = 1$). Действительно, $r - g_0 \in J$ для единственного элемента $g_0 = \overline{r}$. Далее, если $g_0, \ldots, g_{k-1}$ уже определены с помощью

$$s = r - \sum_{i=0}^{k-1} g_i \pi^i \in J^k,$$

где $0 < k < n$, то следующий коэффициент однозначно определен как $\gamma(\lambda)$ из соотношения

$$s + J^{k+1} = \lambda(\pi^k + J^{k+1}), \quad \lambda \in \overline{R}.$$

Для $k = n-1$ мы получаем требуемое представление.

Допустим, что $\pi \notin Z(R)$. В силу (4.1.9.1) имеем $[\Gamma, \pi] \neq 0$. Пусть $n(R)$ — индекс нильпотентности радикала $J(R)$. Тогда $[\Gamma, \pi] = J^k$ для некоторого целого числа k такого, что $2 \leqslant k < n(R)$. Индукцией по положительному целому числу m мы докажем, что $[\Gamma, \pi^m] \subseteq J^{m-1+k}$ для любого $m > 0$. Действительно, это верно для $m = 1$ в силу выбора k. Далее, для любого $g \in \Gamma$ имеем

$$[g, \pi^{m+1}] = \pi[g, \pi^m] + [g, \pi]\pi^m \in JJ^{m-1+k} + J^k\pi^m \subseteq J^{m+k}.$$

Таким образом, для любых $g, h \in \Gamma$ имеем $[g, [h, \pi]] = [g, x\pi^k]$ для некоторого $x \in R$. Поэтому

$$[g, [h, \pi]] = [g, x]\pi^k + x[g, \pi^k] \in J\pi^k + J^{2k-1} \subseteq J^{k+1},$$

поскольку $k \geqslant 2$. Получаем, что

$$[hg, \pi] = h[g, \pi] + g[h, \pi] - [g, [h, \pi]] \in h[g, \pi] + g[h, \pi] + J^{k+1}. \tag{4.1.9.2}$$

Поскольку J^k/J^{k+1} — простой левый модуль, то он является одномерным левым векторным пространством над полем $\overline{R}$ с базисом из одного элемента $v = \pi^k + J^{k+1}$. Определим отображение $\delta_\pi\colon \overline{R} \to \overline{R}$ правилом

$$[\gamma(\overline{r}), \pi] + J^{k+1} = \delta_\pi(\overline{r})v$$

для любого $r \in R$. Если $r \in R\pi^m$ для некоторого $m > 0$, то коэффициенты $g_0, \ldots, g_{m-1}$ из представления (4.1.9.1) равны 0; поэтому

$$[r, \pi] = \sum_{i=m}^{n-1} [g_i, \pi]\pi^i \in J^{k+m}.$$

Поэтому для любых $r, s \in R$ имеем

$$[\gamma(\overline{r})\gamma(\overline{s}), \pi] + J^{k+1} = [\gamma(\overline{rs}), \pi] + J^{k+1} = \delta_\pi(\overline{rs})v.$$

С другой стороны, из (4.1.9.2) следует, что

$$[\gamma(\overline{r})\gamma(\overline{s}), \pi] = \gamma(\overline{r})[\gamma(\overline{s}), \pi] + [\gamma(\overline{r}), \pi]\gamma(\overline{s}) + J^{k+1} = (\overline{r}\delta_\pi(\overline{s}) + \overline{s}\delta_\pi(\overline{r}))v;$$

откуда $\delta_\pi(\overline{rs}) = \overline{r}\delta_\pi(\overline{s}) + \overline{s}\delta_\pi(\overline{r})$. Соотношение $\delta_\pi(\overline{r} + \overline{s}) = \delta_\pi(\overline{r}) + \delta_\pi(\overline{s})$ проверяется аналогично. Следовательно, δ_π — нетривиальное дифференцирование поля $\overline{R}$.

Допустим, что $\pi \in Z(R)$. Тогда $[\Gamma, \Gamma] = J^k$ где $1 \leqslant k < n(R)$. Выберем такой элемент $f \in \Gamma$, что $[\Gamma, f] \not\subseteq J^{k+1}$ и определим новое отображение $\delta_f \colon \overline{R} \to \overline{R}$ правилом

$$[\gamma(\overline{r}), f] + J^{k+1} = \delta_f(\overline{r})v$$

для любого $r \in R$, где $v = \pi^k + J^{k+1}$. Проверим, что δ_f — дифференцирование. Сначала заметим, что $[J, \Gamma] \subseteq J^{k+1}$, поскольку для $r \in J$ имеем $g_0 = 0$ в представлении (4.1.9.1) и

$$[r, g] = \sum_{i=1}^{n-1} [g_i, g]\pi^i \in \sum_{i=1}^{n-1} J^k \pi^i = J^{k+1}$$

для любого $g \in \Gamma$. Получаем, что для любых $r, s \in R$ имеем

$$[\gamma(\overline{r})\gamma(\overline{s}), f] + J^{k+1} = [\gamma(\overline{rs}), f] + J^{k+1} = \delta_f(\overline{rs})v.$$

С другой стороны, для любых $r, s \in R$ имеем

$$\begin{aligned}
[\gamma(\overline{r})\gamma(\overline{s}), f] &= \gamma(\overline{r})[\gamma(\overline{s}), f] + [\gamma(\overline{r}), f]\gamma(\overline{s}) = \\
&= \gamma(\overline{r})[\gamma(\overline{s}), f] + \gamma(\overline{s})[\gamma(\overline{r}), f] - [\gamma(\overline{s}), [\gamma(\overline{r}), f] \in \\
&\in \gamma(\overline{r})[\gamma(\overline{s}), f] + \gamma(\overline{s})[\gamma(\overline{r}), f] + [\Gamma, J] \subseteq \\
&\subseteq \gamma(\overline{r})[\gamma(\overline{s}), f] + \gamma(\overline{s})[\gamma(\overline{r}) + J^{k+1} = \\
&= (\overline{r}\delta_f(\overline{s}) + \overline{s}\delta_f(\overline{r}))v.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\delta_f(\overline{rs}) = \overline{r}\delta_f(\overline{s}) + \overline{s}\delta_f(\overline{r})$. Соотношение $\delta_f(\overline{r} + \overline{s}) = \delta_f(\overline{r}) + \delta_f(\overline{s})$ проверяется аналогично. Доказано, что δ_f — нетривиальное дифференцирование поля $\overline{R}$. □

Для поля F известно (см., например [74, § II.17]), что в F нет нетривиальных дифференцирований, если F — сепарабельное алгебраическое расширение своего простого подполя (все конечные поля и все поля алгебраических чисел — такие поля) или F — совершенное поле (т. е. $\operatorname{char} F = p > 0$ и $F^p = F$).

4.1.10. Теорема. *Поле F не имеет нетривиальных дифференцирований в точности тогда, когда любое цепное слева, артиново слева, центрально существенное кольцо R с $R/J(R) \cong F$ коммутативно.*

Доказательство. Теорема 4.1.10 следует из предложений 4.1.9 и 4.1.4. □

Для кольца R и любого элемента r (соотв., подмножества S) в R положим $\overline{r} = r + J(R) \in R/J(R)$ (соотв., $\overline{S} = \{\overline{s} \mid s \in S\}$). В частности, $\overline{R} = R/J(R)$.

4.1.11. Теорема. (a) *Любое цепное слева, центрально существенное конечное кольцо R коммутативно.*

(b) *Существует некоммутативное цепное артиново центрально существенное кольцо.*

Доказательство. (a) Для конечного локального кольца R тело $\overline{R}$ является полем по теореме Веддерберна [31, Theorem 3.1.1]; кроме того, это поле не имеет ненулевых дифференцирований. Тогда кольцо R коммутативно по теореме 4.1.10.

Утверждение (b) следует из 4.1.8. □

4.2. Цепные нётеровы кольца. Данный подраздел основывается на статьях [50] и [52].

4.2.1. Замечания. (a) Непосредственно проверяется, что A — цепное справа (соотв., слева), нётерово справа (соотв., слева) кольцо в точности тогда, когда R — локальное кольцо главных правых (соотв., левых) идеалов.

(b) Из a и теоремы 1.2.2 следует, что центрально существенные цепные нётеровы полупервичные кольца совпадают с коммутативными локальными областями главных правых идеалов.

(c) Существуют цепные справа, нётеровы справа кольца, которые не являются ни первичными кольцами, ни артиновыми справа кольцами; см., например [69, Example 9.10(3)].

Для удобства приведем краткие доказательства следующих двух хорошо известных утверждений.

4.2.2. Замечания. (a) Пусть A — цепное справа кольцо и B — вполне первичный идеал кольца A. Тогда $B = aB$ для каждого $a \in A \setminus B$.

(b) Пусть A — коммутативная область, обладающая ненулевым конечно порожденным делимым A-модулем M без кручения. Тогда A — поле.

Доказательство. (a) Пусть $a \in A \setminus B$. Поскольку $aA \not\subseteq B$, имеем $B \subseteq aA$. Поэтому для каждого $x \in B$ существует элемент $b \in A$ с $x = ab$. Поскольку B — вполне первичный идеал, $b \in B$ и $x \in aB$.

(b) Допустим противное. Тогда A имеет ненулевой максимальный идеал $\mathfrak{m}$ и M естественно превращается в ненулевой конечно порожденный модуль над локальным кольцом $R_{\mathfrak{m}}$ с радикалом $J = \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$. Поскольку модуль M делим, имеем, что $MJ \supseteq M\mathfrak{m} = M$ и $M = 0$ по лемме Накаямы. Получено противоречие. □

4.2.3. Лемма. *Пусть A — локальное кольцо и пусть $J(A) = \pi A$ для некоторого элемента $\pi \in A$ индекса нильпотентности n (возможно, $n = \infty$). Для любых двух целых чисел k, ℓ и произвольных элементов $a, b \in A$ таких, что $k, \ell \geqslant 0$, $k + \ell < n$, $a \in \pi^k A \setminus \pi^{k+1} A$ и $b \in \pi^l A \setminus \pi^{\ell+1} A$, имеем $ab \in \pi^{k+\ell} A \setminus \pi^{k+\ell+1} A$.*

Доказательство. Из включения $A\pi \subseteq \pi A$ следует, что $ab \in \pi^{k+\ell} A$. Если $\pi^m \in \pi^{m+1} A$ для некоторого $m \geqslant 0$, то ясно, что $\pi^m(1 - \pi t) = 0$ для некоторого $t \in A$ и $\pi^m = 0$, поскольку $1 - \pi t \in A^*$. Положим $a = \pi^k r$ и $b = \pi^\ell s$ для некоторых $r, s \in A \setminus J(A)$. Тогда $r, s \in A^*$, поскольку кольцо A локально и $r\pi^\ell \in \pi^l A \setminus \pi^{\ell+1} A$. Следовательно, $r\pi = \pi r'$ для некоторого $r' \in A^*$ и $ab = \pi^{k+\ell} r' s$. Остается заметить, что $ab \notin \pi^{k+\ell+1} A$, поскольку $r's \in A^*$ и $\pi^{k+\ell} \neq 0$. □

4.2.4. Лемма. *Цепное справа, артиново справа, центрально существенное кольцо является цепным слева, артиновым слева кольцом.*

Доказательство. Пусть A — цепное справа, артиново справа, центрально существенное кольцо, $N = J(A)$, и пусть n — индекс нильпотентности идеала N. Если $n = 1$, то кольцо A коммутативно по теореме 1.2.2; в этом случае доказывать нечего. Любое цепное справа кольцо является локальным кольцом; поэтому каждый элемент кольца $A \setminus N$ обратим. Пусть $n > 1$, т. е. $N \neq 0$. Поскольку нётерово справа (например, артиново справа) цепное справа кольцо — кольцо главных правых идеалов, $N = \pi A$ для некоторого элемента $\pi \in N$. Существуют два элемента $x, y \in Z(A)$ такие, что $\pi x = y \neq 0$. Пусть $x \in N^k \setminus N^{k+1}$ для некоторого k, $0 \leqslant k < n$. Тогда $y \in N^{k+1}$, откуда $k + 1 < n$. Если $[a, \pi] \notin N^2$, то из леммы 4.2.3 следует, что $[a, \pi]x \notin N^{k+2}$; следовательно, $[a, \pi]x \neq 0$. Однако $[a, \pi]x = [a, \pi x] = [a, y] = 0$. Получено противоречие; поэтому $[a, \pi] \in N^2$ для каждого $a \in A$. Следовательно, $N = A\pi + N^2$, откуда $N/A\pi = N(N/a\pi) = \ldots = N^n(N/A\pi) = 0$, т. е. $N = A\pi$. Из левостороннего аналога леммы 4.2.3 следует, что каждый левый идеал кольца A совпадает с одним из идеалов $A, N, N^2, \ldots, N^{n-1}, \{0\}$, т. е. A — цепное слева, артиново слева кольцо. □

4.2.5. Теорема. *Для кольца A эквивалентны условия:*

(a) *A — цепное справа, нётерово справа, центрально существенное кольцо.*

(b) A — *цепное слева, нётерово слева, центрально существенное кольцо.*
(c) A — *коммутативная локальная область главных идеалов или цепное артиново кольцо.*

Доказательство. Достаточно доказать эквивалентность условий (a) и (c).

(c)⇒(a). Импликация проверяется непосредственно.

(a)⇒(c). Положим $N = \operatorname{Sing} A_A$. Идеал N нильпотентен; см., например [69, 9.2]. Из 1.1.2, c, d следует, что идеал N вполне первичен и содержит все делители нуля кольца R и кольцо A/N — коммутативная область.

Поэтому предложение верно при $N = 0$. Теперь пусть $N \neq 0$. Обозначим через n индекс нильпотентности идеала N. Тогда $0 \neq N^{n-1} \subseteq \ell.\operatorname{Ann}_A(N)$. Из 1.1.2, e следует, что $N^{n-1} \subseteq Z(A)$. Далее, для каждого $a \in A \setminus N$ имеем $N = aN$ по замечанию 4.2.2 (a), откуда $N^{n-1} = aN^{n-1} = N^{n-1}a$. Следовательно, N^{n-1} — делимый правый (A/N)-модуль и N^{n-1} — (A/N)-модуль без кручения, поскольку все делители нуля кольца A содержатся в N. По замечанию 4.2.2 (b) кольцо A/N — поле и каждый из циклических (A/N)-модулей (N^{k-1}/N^k) для $k = 1, \dots, n$ — простой модуль. Следовательно, цепное справа кольцо A является артиновым справа. По лемме 4.2.4 A — цепное артиново кольцо. □

4.2.6. Пример. Пусть F — поле и $D_1, D_2 \colon F \to F$ — два дифференцирования поля F с несравнимыми ядрами (например, можно взять поле рациональных функций $\mathbb{Q}(x, y)$ от двух независимых переменных в качестве F и положить $D_1 = \partial/\partial x$, $D_2 = \partial/\partial y$).

Тогда для каждого положительного целого числа $n \geqslant 2$ существует такое некоммутативное цепное, артиново, центрально существенное кольцо A, что $A/J(A) \cong F$ и индекс нильпотентности идеала $J(A)$ равен n.

Доказательство. Мы используем конструкцию, аналогичную описанной в [33]. Пусть $N = 2n-1$, $R = M_N(F)$ — кольцо матриц порядка N над полем F, $e_{i,j}$ — матричная единица для любых $i, j \in \{1, \dots, N\}$, и пусть $f \colon F \to R$ — отображение, определенное правилом
$$f(\alpha) = \alpha E + D_1(\alpha)e_{1,N-1} + D_2(\alpha)e_{N-1,N}$$
для каждого $\alpha \in F$, где E — единичная матрица. Пусть A — подкольцо кольца R, порожденное множеством $f(F)$ и матрица
$$\pi = \sum_{i=1}^{n-1} e_{2i-1,2i+1}.$$
Непосредственно проверяется, что $\pi^n = 0$, $\pi^{n-1} = e_{1,N}$, $f(\alpha)\pi = \pi f(\alpha) = \alpha\pi$ и
$$[f(\alpha), f(\beta)] = (D_1(\alpha)D_2(\beta) - D_1(\beta)D_2(\alpha))\pi^{n-1}$$
для любых $\alpha, \beta \in F$. Из этих соотношений следует, что $\pi A = A\pi = J(A)$, $J(A)^k = \pi^k A = A\pi^k$ для всех $k = 1, \dots, n-1$ и $\pi A \subseteq Z(A)$. Ясно, что A — цепное артиново кольцо. Если $a \in A \setminus \{0\}$ и $a \in \pi A$, то $a \in Z(A)$; в противном случае $a\pi^{n-1} \in Z(A) \setminus \{0\}$ и $X^{n-1} \in Z(A)$. Следовательно, кольцо A центрально существенно.

Наконец, если $\alpha \in \operatorname{Ker} D_2 \setminus \operatorname{Ker} D_1$ и $\beta \in \operatorname{Ker} D_1 \setminus \operatorname{Ker} D_2$, то
$$[f(\alpha), f(\beta)] = D_1(\alpha)D_2(\beta)X^{n-1} \neq 0,$$
т. е. кольцо A не является коммутативным. □

4.2.7. Замечание. Вплоть до конца подраздела 4.2 мы полагаем, что A — непростое кольцо и $\varphi \colon A \to A$ — такой инъективный гомоморфизм из кольца A в себя, что $\varphi(A \setminus \{0\}) \subseteq A^*$.

4.2.8. Кольца правых косых степенных рядов. Обозначим через $A_r[[x, \varphi]]$ кольцо правых косых степенных рядов в смысле [69, 9.8]; это кольцо состоит из всех формальных рядов
$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k a_k, \quad a_k \in A,$$
сложение рядов является покомпонентным, а умножение естественно определено с помощью правила $ax^k = x^k\varphi^k(a)$.

4.2.9. Лемма. *Пусть A — непростое кольцо, $R = A_r[[x,\varphi]]$, и пусть I — ненулевой двусторонний идеал кольца R. Тогда $I = x^m B + x^{m+1}R$ для некоторого $n \geqslant 0$ и некоторого ненулевого правого идеала B кольца A, который является левым $\varphi^m(A)$-модулем (считаем, что φ^0 — тождественное отображение).*

Доказательство. Пусть $0 \neq I \lhd R$. Поскольку $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} x^m R = 0$, то существует такое целое число $m \geqslant 0$, что $I \subseteq x^m R$ и $I \nsubseteq x^{m+1}R$. Пусть $f \in I \setminus x^{m+1}R$. Из [69, 9.9(3)][1] следует, что $fR = x^m DR$ для некоторого ненулевого главного правого идеала D кольца A; кроме того, положим $E = R$, $n = m+1$ и получим $fR \supseteq x^n R$. Остается положить $B = \{b \in A \mid x^m b + x^{m+1}R \subseteq I\}$. Домножим элементы из I слева и справа элементами кольца A и получим, что B — $(\varphi^m(A), A)$-под-бимодуль в A. $\square$

4.2.10. Лемма. *Пусть A — непростое кольцо, $R = A_r[[x,\varphi]]$, и пусть $Z(A) \nsubseteq A^* \cup \{0\}$. Тогда $xR \cap Z(R) = 0$.*

Доказательство. Выберем $a \in Z(A) \setminus (A^* \cup \{0\})$. Пусть

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} x^i f_i \in xR \cap Z(R).$$

Тогда из соотношения $[a,f] = 0$ следует, что $\varphi^i(a) f_i = f_i a = a f_i$ для любого $i > 0$. Соотношение $a = \varphi^i(a)$ невозможно при $i > 0$, поскольку $a \notin A^* \cup \{0\}$ и кольцо A — область; поэтому $f_i = 0$ для всех $i > 0$, т. е. $f = 0$. $\square$

4.2.11. Предложение. *Пусть A — непростое PI кольцо, $R = A_r[[x,\varphi]]$, и пусть I — идеал кольца R. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(a) *$I \neq 0$.*
(b) *R/I — PI кольцо.*

Доказательство. (a)⇒(b). По лемме 4.2.9 имеем, что $I \supseteq x^n R = (xR)^n$ для некоторого $n > 0$. Если $f(x_1,\ldots,x_t)$ — допустимое тождество кольца $A = R/xR$, то в кольце R/I выполняется допустимое тождество

$$f(x_1,\ldots,x_t) f(x_{t+1},\ldots,x_{2t}) \ldots f(x_{(n-1)t+1},\ldots,x_{nt}).$$

(b)⇒(a). Надо доказать, что в наших условиях R не является PI кольцом. Кольца A и R являются областями; см. [69, 9.9(1)].

Нам потребуется следующий хорошо известный факт (см. [61, Theorem 2]): *если S — полупервичное PI кольцо, и I — ненулевой двусторонний идеал кольца S, то* $Z(S) \cap I \neq 0$. Применяя его к собственному ненулевому идеалу B кольца A, получаем, что $0 \neq Z(A) \cap B \nsubseteq A^*$. По лемме 4.2.10 $xR \cap Z(R) = 0$; кроме того, xR — ненулевой двусторонний идеал полупервичного кольца R. Снова используя указанный факт, видим, что R не может быть PI кольцом. $\square$

4.2.12. Предложение. *Пусть A — коммутативное непростое кольцо, $R = A_r[[x,\varphi]]$, и пусть I — идеал кольца R. Следующие условия эквивалентны":*

(a) *$I \supseteq xR$.*
(b) *R/I — коммутативное кольцо.*
(c) *Кольцо R/I центрально существенно.*

Доказательство. Импликации (a)⇒(b)⇒(c) проверяются непосредственно.

Допустим, что выполнено (c). Поскольку кольцо A не просто (в коммутативном случае это означает, что A не поле), то $A = Z(A) \nsubseteq A^* \cup \{0\}$, откуда $xR \cap Z(R) = 0$ по лемме 4.2.10; это невозможно в центрально существенном кольце. Поэтому $I \neq 0$.

[1] В [69, 9.9(3)] есть опечатка: корректное соотношение есть $M \subseteq N \Leftrightarrow$ либо $m > n$, либо $m = n$ и $D \subseteq E$.

По лемме 4.2.9 имеем $I = x^m B + x^{m+1} R$, где B — ненулевой идеал кольца A. Если $m = 0$, то выполняется (a). Допустим, что $m > 0$. Для любого элемента $r \in R$ положим $\widehat{r} = r + I \in \widehat{R} = R/I$. Поскольку $I \subseteq xR$, то можно отождествить элементы a и $\widehat{a}$ для любого $a \in A$. Тогда любой элемент кольца $\widehat{R}$ может рассматриваться как сумма $f = f_0 + \widehat{x}_1 f_1 + \ldots + \widehat{x}^m f_m$, где $f_i \in A$, $i = 0, 1, \ldots, m$, коэффициенты $f_0, \ldots, f_{m-1}$ определены однозначно и f_m определяется с точностью до слагаемого, которое является произвольным элементом из B. Пусть $f \in Z(\widehat{R})$. Из соотношения $[a, f] = 0$, где $a \in A$, следует, что $\varphi^i(a) f_i = f_i a = a f_i$ для любого $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Если a — ненулевой необратимый элемент кольца A, мы получаем $a \neq \varphi^i(a)$ для $i > 0$, откуда $f_1 = \ldots = f_{m-1} = 0$. В силу (c) существуют такие два элемента $c, d \in Z(\widehat{R})$, что $\widehat{x}c = d \neq 0$. Положим $c = c_0 + \widehat{x}^m c_m$. Тогда $d = \widehat{x}c = \widehat{x}c_0$, поскольку $\widehat{x}^{m+1} = 0$. Сначала допустим, что $m > 1$. Тогда из включения $d \in Z(\widehat{R})$ следует, что $c_0 = 0$ и $d = 0$; получено противоречие. Таким образом, $m = 1$. Пусть $c = c_0 + \widehat{x}c_1 \in Z(\widehat{R})$. Для $b \in B \setminus \{0\}$ из соотношения $[c, b] = 0$ следует, что $\widehat{x}(c_1 b - c_1\varphi(b)) = 0$; поэтому $c_1 b - c_1 \varphi(b) \in B$ и $c_1\varphi(b) \in B$ и имеем $c_1 \in B$, поскольку элемент $\varphi(b)$ обратим, т. е. $c = c_0$.

Допустим, что B — собственный идеал кольца A. Тогда $\widehat{x} \neq 0$ и для некоторого $c_0 \in Z(\widehat{R})$ имеем $d = \widehat{x}c_0 \in Z(\widehat{R}) \setminus \{0\}$. Аналогично рассмотренному случаю с c, из соотношения $[d, b] = 0$ следует, что $c_0 \in B$, т. е. $d = 0$. Это противоречие показывает, что $B = A$ и $I = xA + x^2 R = xR$. □

4.2.13. Пример. Существует цепное справа, нётерово справа, неполупримарное PI кольцо $\widehat{R}$ с первичным радикалом $\widehat{N}$ и радикалом Джекобсона $\widehat{M}$ такое, что $\widehat{R}$ не является центрально существенным и $\widehat{R}$ не является нётеровым слева или цепным слева кольцом, $\widehat{R}/\widehat{N}$ — коммутативная локальная область главных идеалов, $\widehat{N}$ — минимальный правый идеал, и $\widehat{N} = \widehat{M}\widehat{N} \neq \widehat{N}\widehat{M} = 0$.

Доказательство. Пусть A — непостое кольцо и $R = A_r[[x, \varphi]]$. Мы используем пример [69, 9.10], где $N = xR$ и $0 \neq NM \neq N$. Тогда $\widehat{R} = R/(NM)$ — PI кольцо по предложению 4.2.11; однако оно не является центрально существенным кольцом в силу предложения 4.2.12. □

4.2.14. Замечание. Используя предыдущие результаты, нетрудно проверить, что $J^{n-1} \subseteq C$ при выполнены условий 4.2.13. С другой стороны, следующий пример показывает, что из включения $J^{[n/2]+1} \subseteq C$ не всегда следует, что цепное слева артиново слева кольцо R центрально существенно.

4.2.15. Пример. Пусть $F = GF(4)$, $F_0 = GF(2) \subseteq F$, и пусть $\sigma\colon x \mapsto x^2$ — автоморфизм Фробениуса поля F. Рассмотрим кольцо косых многочленов $S = F[X, \sigma]$ и его факторкольцо $R = S/(X^3)$. Тогда R — цепное слева и справа кольцо, артиново справа и слева кольцо, $J(R)$ — нильпотентный идеал индекса нильпотентности 3, и $J(R)^{[\frac{3}{2}]+1} \subseteq Z(R)$; однако кольцо R не является центрально существенным.

Доказательство. Ясно, что $F = F_0[\theta]$, где θ — корень неприводимого многочлена $t^2 + t + 1 \in F_0[t]$. Обозначим через x образ переменной X при каноническом гомоморфизме из кольца S на R и отождествим элементы поля F с их образами в R. Непосредственно проверяется, что $J(R) = (x)$, $n = 3$ — индекс нильпотентности идеала $J = J(R)$ и левые (и правые) модули J/J^2 и J^2 являются одномерными векторными пространствами над $F = R/J$. Следовательно, R — цепное слева и справа, артиново слева и справа кольцо по 4.1.1. Рассмотрим элемент $r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Из соотношения $x^3 = 0$ следует, что

$$[r, x] = rx - xr = (a_0 - \sigma(a_0))x + (a_1 - \sigma(a_1)x^2,$$
$$[r, \theta] = (a_1\sigma(\theta) - a_1\theta)x + (a_2\sigma^2(\theta) - \theta a_2)x^2 = a_1 x,$$

поскольку σ^2 — тождественный автоморфизм и $\sigma(\theta) = \theta + 1$. Поэтому $Z(R) = F_0 + Fx^2$, поскольку x и θ порождают кольцо R (как кольцо). Остается заметить, что $Z(R)x = F_0 x$ и $F_0 x \cap (F_0 + Fx^2) = 0$. □

4.3. Кольца с плоскими идеалами. Результаты данного подраздела основаны на [71].

4.3.1. Кольца слабой глобальной размерности $\leqslant 1$.

Для кольца R будем писать $\mathrm{w.gl.dim.}\, R \leqslant 1$, если R — *кольцо слабой глобальной размерности не более* 1, т. е. R удовлетворяет следующим эквивалентным[1] условиям:

(a) Для каждого конечно порожденного правого идеала X и любого конечно порожденного левого идеала Y кольца R естественный групповой гомоморфизм $X \otimes_R Y \to XY$ является изоморфизмом.

(b) Каждый конечно порожденный правый (соотв., левый) идеал кольца R — плоский[2] правый (соотв., левый) R-модуль.

(c) Каждый правый (соотв., левый) идеал кольца R — плоский правый (соотв., левый) R-модуль.

(d) Каждый подмодуль любого плоского правого (соотв., левого) R-модуля является плоским.

Поскольку каждый проективный модуль является плоским, то каждое (полу)наследственное[3] справа или слева кольцо имеет слабую глобальную размерность не более 1. Мы также напомним, что слабая глобальная размерность кольца R равна нулю в точности тогда, когда R — *регулярное по фон Нейману* кольцо, т. е. $r \in rRr$ для каждого элемента r кольца R. Регулярные по фон Нейману кольца широко используются в математике; см. [28, 35].

4.3.2. Теорема (см. [34, Theorem]). *Коммутативное кольцо R является кольцом слабой глобальной размерности не более* 1 *в точности тогда, когда R — арифметическое полупервичное кольцо.*

Ясно, что коммутативное кольцо дистрибутивно справа (соотв., слева) в точности тогда, когда кольцо арифметично.

4.3.3. Пример. Существует наследственное справа кольцо R, которое не является ни дистрибутивным справа, ни полупервичным; в частности, наследственное справа кольцо R имеет слабую глобальную размерность не более 1. Пусть F — поле и пусть R — 5-мерная F-алгебра, состоящая из всех 3×3 матриц вида

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{pmatrix},$$

где $f_{ij} \in F$. Кольцо R не является полупервичным, поскольку множество

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

— ненулевой нильпотентный идеал кольца R. Пусть e_{11}, e_{22} и e_{33} — обычные матричные единицы. Кольцо R не является дистрибутивным справа или слева, поскольку каждый идемпотент дистрибутивного справа или слева кольца централен, см. [67], но матричная единица e_{11} кольца R не центральна. Для доказательства того, что кольцо R наследственно справа, достаточно доказать, что R_R — прямая сумма наследственных правых идеалов. Имеем, что $R_R = e_{11}R \oplus e_{22}R \oplus e_{33}R$, где $e_{22}R$ и $e_{33}R$ являются проективными простыми R-модулями; в частности, $e_{22}R$ и $e_{33}R$ являются наследственными R-модулями. Любая прямая сумма наследственных модулей наследственна; см. [73, 39.7, p. 332]. Поэтому остается показать, что R-модуль $e_{11}R = e_{11}F + e_{12}F + e_{13}F$ является наследственным, что проверяется непосредственно.

Следующая лемма хорошо известна; см., например [69, Assertion 6.13].

[1] Эквивалентность этих условий хорошо известна; см., например [69, Theorem 6.12].

[2] Правый R-модуль X называется *плоским*, если для любого левого R-модуля Y естественный групповой гомоморфизм $X \otimes Y \to XY$ является изоморфизмом.

[3] Модуль M называется *наследственным* (соотв., *полунаследственным*), если все подмодули (соотв., конечно порожденные подмодули) модуля M проективны.

4.3.4. Лемма. *Пусть R — кольцо, у которого все главные правые идеалы являются плоскими. Если r и s — два элемента кольца R такие, что $rs = 0$, то существуют такие два элемента $a, b \in R$, что $a + b = 1$, $ra = 0$, и $bs = 0$.*

4.3.5. Лемма. *Существует цепное слева и справа первичное кольцо R, в котором есть неплоские главные правые идеалы.*

Доказательство. Существует цепное слева и справа первичное кольцо R с такими ненулевыми элементами r, s, что $rs = 0$; см. [1, p. 234, Corollary]. Цепное кольцо R локально; поэтому его необратимые элементы образуют радикал Джекобсона $J(R)$. В R не все главные правые идеалы являются плоским. Допустим противное. По лемме 4.3.4 существуют такие $a, b \in R$, что $a+b = 1$, $ra = 0$ и $bs = 0$. Тогда $aR \subseteq bR$ или $bR \subseteq aR$, причем $aR + bR = R = Ra + Rb$. Поэтому хотя бы один из элементов a, b локального кольца R обратим; в частности, этот обратимый элемент не является правым или левым делителем нуля. Это противоречит равествам $ra = 0$ и $bs = 0$. □

4.3.6. Лемма. *Пусть R — центрально существенное кольцо, в котором все главные правые идеалы являются плоскими. Тогда кольцо R не имеет ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. Допустим, что $r^2 = 0$ для некоторого ненулевого $r \in R$. Поскольку R центрально существенно, существуют такие ненулевые центральные элементы $x, y \in R$, что $rx = y$. Поскольку $r^2 = 0$, имеем $y^2 = (rx)^2 = r^2x^2 = 0$. Так как $y^2 = 0$, то по лемме 4.3.4 существуют такие элементы $a, b \in R$, что $a + b = 1$, $ry = 0$ и $by = yb = 0$. Тогда $y = y(a + b) = ya + yb = 0$. Противоречие. □

4.3.7. Теорема. *Для центрально существенного кольца R следующие условия эквивалентны.*

(a) *R — кольцо слабой глобальной размерности не более* 1.

(b) *R — дистрибутивное справа (соотв., слева) полупервичное кольцо.*

(c) *R — арифметическое полупервичное кольцо.*

Доказательство. (a)$\Rightarrow$(b). Поскольку R — центрально существенное кольцо слабой глобальной размерности не более 1, из леммы 4.3.6 следует, что кольцо R не имеет ненулевых нильпотентных элементов. В силу теоремы 1.2.2 центрально существенное полупервичное кольцо R коммутативно. В силу теоремы 4.3.2 R — арифметическое полупервичное кольцо. Любое коммутативное арифметическое кольцо дистрибутивно справа и слева.

Импликация (b)$\Rightarrow$(c) следует из того, что каждое дистрибутивное справа или слева кольцо арифметично.

(c)$\Rightarrow$(a). Поскольку R — центрально существенное полупервичное кольцо, из теоремы 1.2.2 следует, что кольцо R коммутативно; в частности, R центрально существенно. Кроме того, R арифметично. В силу теоремы 4.3.2 кольцо R имеет слабую глобальную размерность не более 1. □

4.3.8. Замечание. Из леммы 4.3.5 следует, что импликация (b)$\Rightarrow$(a) теоремы 4.3.7 не верна для произвольных колец.

4.3.9. Следствие. *Кольцо R является наследственным справа (соотв., слева), нётеровым справа (соотв., слева), центрально существенным кольцом в точности тогда, когда R — конечное прямое произведение коммутативных дедекиндовых областей. Следовательно, R является наследственным справа (соотв., слева), нётеровым справа (соотв., слева), неразложимым, центрально существенным кольцом в точности тогда, когда R — коммутативная дедекиндова область.*

Доказательство. Поскольку нётерово справа или слева кольцо R — конечное прямое произведение нётеровых справа или слева колец, можно считать, что R — нётерово справа или слева неразложимое кольцо. В этом случае хорошо известно, что R является коммутативным наследственным кольцом в точности тогда, когда R — коммутативная дедекиндова область. Теперь можно использовать теорему 4.3.7 и хорошо известный факт: каждый плоский модуль над нётеровым кольцом проективен. □

4.4. Дистрибутивные нётеровы кольца. Результаты данного подраздела основываются на статье [53].

4.4.1. Нётеровы полупервичные кольца. Кольцо R является дистрибутивным справа (соотв., слева), нётеровым справа (соотв., слева), полупервичным, центрально существенным кольцом в точности тогда, когда R — конечное прямое произведение коммутативных дедекиндовых областей. Следовательно, R — дистрибутивное справа (соотв., слева), нётерово справа (соотв., слева), неразложимое, центрально существенное кольцо в точности тогда, когда R — коммутативная дедекиндова область.

Доказательство. Утверждение следует из следствия 4.3.9 и следующего хорошо известного факта: коммутативное кольцо является дедекиндовой областью в точности тогда, когда R — коммутативная дистрибутивная нётерова область. $\square$

4.4.2. Обозначение $^{\cdot}\,.$ в 4.4.3 и 4.4.5. Пусть A — кольцо, X — правый A-модуль и X_1, X_2 — два подмножества в X. Подмножество $\{a \in A \mid X_1a \subseteq X_2\}$ кольца A обозначается через $(X_1{}^{\cdot}\,.X_2)$. Если X_2 — подмодуль в X, то $(X_1{}^{\cdot}\,.X_2)$ — правый идеал кольца A. Если X_1 и X_2 — подмодули в X, то $(X_1{}^{\cdot}\,.X_2)$ — идеал в A.

Мы используем некоторые известные свойства дистрибутивных модулей и колец. Для удобства читателей эти свойства собраны в леммах 4.4.3, 4.4.4, 4.4.5.

4.4.3. Лемма (см. [67]). *Пусть A — кольцо и X — дистрибутивный правый A-модуль.*

(a) *Для любых двух элементов $x, y \in X$ существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$ и $xaA + ybA \subseteq xA \cap yA$. Следовательно, $A = (x^{\cdot}\,.yA) + (y^{\cdot}\,.xA)$ для любых элементов $x, y \in X$. В частности, если $xA \cap yA = 0$, то существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$ и $xaA = ybA = 0$.*
(b) $\mathrm{Hom}(Y, Z) = 0$ *для любых таких подмодулей Y, Z модуля X, что $Y \cap Z = 0$.*
(c) *Все идемпотенты кольца* $\mathrm{End}\,M$ *центральны. В частности, все идемпотенты любого дистрибутивного справа кольца центральны. Поэтому дистрибутивное справа кольцо A неразложимо в кольцевое прямое произведение в точности тогда, когда A не имеет нетривиальных идемпотентов.*
(d) *Если кольцо A локально, то M — цепной модуль. В частности, дистрибутивные справа локальные кольца совпадают с цепными справа кольцами.*
(e) *Если M — нетеров модуль, то M — инвариантный*[1] *модуль. В частности, любое дистрибутивное справа нетерово справа кольцо инвариантно справа.*

Доказательство. (a) Обозначим $T = xA \cap yA$. Так как

$$(x + y)A = (x + y)A \cap xA + (x + y)A \cap yA,$$

то существуют такие элементы $b, d \in A$, что

$$(x + y)b \in xA, \quad (x + y)d \in yA, \quad x + y = (x + y)b + (x + y)d.$$

Поэтому $yb = (x+y)b-xb \in T$ и $xd = (x+y)d-yd \in T$. Обозначим $a = 1-b$ и $z = a-d = 1-b-d$. Тогда

$$1 = a + b, \quad (x + y)z = (x + y) - (x + y)b - (x + y)d = 0,$$
$$xa = xd + xz = xd + (x + y)z - yz = xd - yz,$$
$$yz = -xz \in T, \quad xa \in T.$$

(b) Пусть $f \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$, $y \in Y$ и $z = f(y) \in Z$. По (a) существует такой элемент $a \in A$, что

$$yaA + z(1 - a)A \subseteq yA \cap zA \subseteq Y \cap Z = 0,$$
$$ya = z(1 - a) = 0, \quad z = za = f(y)a = f(ya) = f(0) = 0.$$

Поэтому $f \equiv 0$ и $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$.

[1]Модуль M называется **инвариантным**, если каждый его подмодуль вполне инвариантен в M.

(c) С помощью b утверждение проверяется непосредственно.

(d) Пусть $x, y \in X$. Достаточно доказать, что подмодули xA и yA сравнимы по включению. По a существуют такие элементы $a, b, c, d \in A$, что $1 = a + b$ и $xaA + ybA \subseteq xA \cap yA$. Так как кольцо A локально и $1 = a+b$, то хотя бы один из правых идеалов aA, bA совпадает с A. Поэтому выполнено хотя бы одно из включений $xA \subseteq yA$, $yA \subseteq xA$.

(e) Утверждение доказано в [67]. □

Следующая лемма 4.4.4 является непосредственным следствием леммы 4.4.3(d) и [15, Proposition 2].

4.4.4. Лемма (см. [15, Proposition 2]). *A — дистрибутивное справа, нётерово справа, полупервичное кольцо в точности тогда, когда A — конечное прямое произведение дистрибутивных справа, нётеровых справа, инвариантных справа областей.*

4.4.5. Лемма (см. [7, Lemma 20]). *Пусть A — инвариантное справа кольцо и M — дистрибутивный правый A-модуль.*

(a) *$A = (Y^{\cdot}\ .X) + (X^{\cdot}\ .Y)$ для любых конечно порожденных подмодулей X, Y модуля M.*
(b) *Для любого подмодуля Z' произвольного конечно порожденного подмодуля Z модуля M существует такой идеал A' кольца A, что $ZA' = Z'$.*
(c) *Если M — конечно порожденный модуль, то M — инвариантный модуль.*

Доказательство. (a) Так как $X + Y$ — конечно порожденный модуль, то существуют такое натуральное число n и элементы $x_i \in X$, $y_i \in Y$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $X + Y = (x_1 + y_1)A + \ldots + (x_n + y_n)A$. Так как модуль M дистрибутивен, то $(X + Y) \cap Z = (X \cap Z) + (Y \cap Z)$ для любого подмодуля Z в M.

Пусть $y \in Y$. Для любых $1 \leqslant i \leqslant n$ имеем

$$(x_i + y)A = (x_i + y)A \cap (X + Y) = [(x_i + y)A \cap X] + ((x_i + y)A \cap Y].$$

Поэтому существуют такие элементы $a \in A$ и $z \in Y$, что

$$(x_i + y)a \in X, \quad x_i + y = (x_i + y)a + z.$$

Поэтому $x_i(1 - a) \in Y$ и $ya \in X$. Следовательно,

$$A = (yA^{\cdot}\ .X) + (x_iA^{\cdot}\ .Y), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Поэтому

$$A = (yA^{\cdot}\ .X) + [(x_1A^{\cdot}\ .Y) \cap \ldots \cap (x_nA^{\cdot}\ .Y)] = (yA^{\cdot}\ .X) + (X^{\cdot}\ .Y).$$

В частности,

$$A = (y_iA^{\cdot}\ .X) + (X^{\cdot}\ .Y) \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Поэтому

$$A = [(y_1A^{\cdot}\ .X) \cap \ldots \cap (y_nA^{\cdot}\ .X)] + (X^{\cdot}\ .Y) = (Y^{\cdot}\ .X) + (X^{\cdot}\ .Y).$$

(b) Пусть Z — n-порожденный модуль, $n \in \mathbb{N}$. Будем вести индукцию по n. При $n = 1$ мы можем отождествить циклический A-модуль Z над инвариантным справа кольцом A с инвариантным справа факторкольцом $A/r(Z)$ кольца A. В этом случае утверждение проверяется непосредственно.

Допустим, что утверждение верно для всех k-порожденных подмодулей в M при $k < n$. Можно считать, что $Z = X + Y$, где X — циклический модуль и Y — $(n - 1)$-порожденный модуль. По предположению индукции существуют такие идеалы B и C кольца A, что $X \cap Y = XB = YC$. Поэтому $X \cap Y = X(X^{\cdot}\ .Y) = Y(Y^{\cdot}\ .X)$ По (a) $A = (Y^{\cdot}\ .X) + (X^{\cdot}\ .Y)$ и

$$X = X((Y^{\cdot}\ .X) + (X^{\cdot}\ .Y)) = X(Y^{\cdot}\ .X) + X(X^{\cdot}\ .Y) = X(Y^{\cdot}\ .X) + Y(Y^{\cdot}\ .X) = ZB,$$

где $B = (Y^{\cdot}\ .X)$. Аналогично $Y = ZC$, где $C = (X^{\cdot}\ .Y)$.

Пусть Z' — подмодуль в $Z = X + Y$. Надо доказать, что существует такой идеал H кольца A, что $Z' = (X + Y)H$. По условию $Z' = X \cap Z' + Y \cap Z'$. По предположению индукции существуют

такие идеалы D и E кольца A, что $Z'\cap X = XD$ и $Z'\cap Y = YE$. Кроме того, $X = ZB$ и $Y = ZC$. Поэтому
$$Z' = X\cap Z' + Y\cap Z' = XD + YE = ZBD + ZCE = Z(BD + CE)$$
и $BD + CE$ — требуемый идеал A' кольца A. □

4.4.6. Лемма (см. [7, Proposition 2]). *Для кольца A следующие условия эквивалентны.*

(a) *A — дистрибутивное справа, нётерово справа, конечномерное слева полупервичное кольцо.*

(b) *A — дистрибутивное слева, нётерово слева, конечномерное справа полупервичное кольцо.*

(c) *A — конечное прямое произведение инвариантных наследственных нётеровых областей.*

4.4.7. Лемма. *Пусть A — дистрибутивное справа нётерово справа полупервичное кольцо и каждый ненулевой левый идеал кольца A содержит ненулевой центральный элемент. Тогда A — конечное прямое произведение инвариантных наследственных нётеровых областей.*

Доказательство. По лемме 4.4.6 достаточно доказать, что кольцо A конечномерно слева. Допустим противное. Тогда кольцо A содержит левый идеал B, который является счетной прямой суммой ненулевых левых идеалов B_k, $k = 1,\ldots,+\infty$. По предположению каждый левый идеал B_k содержит ненулевой центральный элемент c_k, где сумма всех идеалов $Ac_k = c_kA$ является прямой суммой. Это противоречит тому, что кольцо A конечномерно справа. □

4.4.8. Предложение. *Пусть A — дистрибутивное справа нётерово справа неразложимое кольцо с первичным радикалом M. Тогда кольцо A инвариантно справа, A/M — дистрибутивная справа, инвариантная справа, нётерова справа область, M — вполне первичный нётеров нильпотентный правый идеал. Кроме того, верны следующие утверждения.*

(a) *$M = xM$ для любого элемента $x\in A\setminus M$.*

(b) *Для любого подмодуля N в M_A существует такой идеал D в A, что $N = MD = xN$ для любого элемента $x\in A\setminus M$.*

(c) *Если M содержит ненулевой центральный элемент m, то A — цепное справа артиново справа кольцо с радикалом M.*

(d) *Если каждый ненулевой левый идеал кольца A содержит ненулевой центральный элемент, то либо A — инвариантная наследственная нётерова область, либо A — цепное справа артиново справа кольцо.*

Доказательство. По лемме 4.4.3(e) кольцо A инвариантно справа. Поскольку M — первичный радикал нётерова справа кольца A, ниль-идеал M нильпотентен. Поскольку M — ниль-идеал, то идемпотенты факторкольца A/B поднимаются до идемпотентов кольца A. По лемме 4.4.3(c) неразложимое кольцо A не имеет нетривиальных идемпотентов. Поэтому факторкольцо A/M не имеет нетривиальных идемпотентов. По лемме 4.4.4 кольцо A/B — дистрибутивная справа, инвариантная справа, нётерова справа область. Поэтому нётеров нильпотентный правый идеал M вполне первичен.

(a) Пусть $x\in A\setminus M$ и y — произвольный элемент идеала M. По лемме 4.4.3(a) существуют такие $a,b\in A$, что $a+b=1$, $xa\in yA$ и $yb\in xA$. Идеал M вполне первичен, $x\in A\setminus M$ и $xa\in M$. Поэтому $a\in M$ и элемент a нильпотентен. Поэтому элемент $b = 1-a$ обратим; кроме того, $yb\in xA$. Тогда $y = xz$ для некоторого $z\in A$. Поскольку элемент xz лежит во вполне первичном идеале M и $x\in A\setminus M$, то $z\in M$ и $y = xz\in xM$. Так как элемент $y\in M$ произволен, то $M = xM$.

(b) Пусть N — подмодуль модуля M_A и пусть $x\in A\setminus M$. По лемме 4.4.5(b) существует идеал D кольца A такой, что $MD = N$. Кроме того, $M = xM$. Поэтому $N = xMD = xN$.

(c) Пусть M содержит ненулевой центральный элемент m. Поскольку кольцо A инвариантно справа и m — ненулевой центральный элемент, существует такой максимальный идеал X кольца A, что A/X — тело и идеал mA строго содержит идеал $(mA)X = X(mA)$. Если $X = M$, то кольцо A локально. По лемме 4.4.3(d) кольцо A — цепное справа. Кроме того, A — нётерово справа кольцо с нильпотентным радикалом Джекобсона M. Поэтому A — цепное справа артиново справа кольцо.

(d) Если вполне первичный идеал M равен нулю, то A — область и A — инвариантная наследственная нётерова область, по лемме 4.4.7. Допустим, что $M\neq 0$. По предположению идеал M

содержит ненулевой центральный элемент. Из (c) следует, что A — цепное справа артиново справа кольцо. □

4.4.9. Теорема. *Центрально существенное кольцо A является дистрибутивным справа нётеровым справа кольцом в точности тогда, когда $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, где каждое кольцо A_k — либо коммутативная дедекиндова область, либо (не обязательно коммутативное) артиново цепное кольцо.*

Доказательство. Пусть A — центрально существенное кольцо. Если $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, где каждое кольцо A_k — либо коммутативная дедекиндова область, либо (не обязательно коммутативное) артиново цепное кольцо, то утверждение следует из леммы 4.4.6.

Теперь пусть A — дистрибутивное справа нётерово справа кольцо. Без ограничения общности можно считать, что A — неразложимое кольцо. Поскольку кольцо A центрально существенно, то каждый ненулевой левый или правый идеал кольца A содержит ненулевой центральный элемент. Из предложения 4.4.8(d) следует, что либо A — цепное справа артиново справа кольцо, либо A — инвариантная наследственная нётерова область. Если A — цепное справа артиново справа кольцо, то A — цепное артиново кольцо, по лемме 4.2.4. Если A — область, то A — коммутативная дедекиндова область в силу теоремы 1.4.1. □

5. Центрально существенные полукольца

В разделе 5 рассматриваются только унитальные полукольца и кольца и изучаются центрально существенные полукольца. Некоторые полукольцевые понятия определены ниже. Другие необходимые сведения о полукольцах содержатся в [27, 30].

5.1. Общие сведения.

5.1.1. Унитальные полукольца и их центры. *Полукольцо* — это структура, отличающаяся от ассоциативного кольца возможной необратимостью аддитивной операции. В полукольце S нуль мультипликативен по определению: имеем $0s = s0 = 0$ для каждого $s \in S$.

Центр полукольца S — это множество $Z(S) = \{s \in S \mid ss' = s's \text{ для всех } s' \in S\}$. Это множество не пусто, так как оно содержит 0 и 1; также верно, что $Z(S)$ — подполукольцо в S.

5.1.2. Центрально существенные полукольца. Полукольцо S называется *центрально существенным*, если либо S коммутативно, либо для каждого ненулевого $s \in S$ существуют такие ненулевые центральные элементы x, y, что $sx = y$.

Ясно, что любое центрально существенное ассоциативное кольцо является центрально существенным полукольцом.

5.1.3. Приведенные полукольца и неделители нуля. Полукольцо S называется *приведенным*, если $x = y$ для всех $x, y \in S$ с $x^2 + y^2 = xy + yx$. Если S — кольцо, то это равносильно тому, что S не имеет ненулевых нильпотентных элементов.

Элемент a полукольца S называется *левым* (соотв., правым) *делителем нуля*, если $ab = 0$ (соотв., $ba = 0$) для некоторого $0 \neq b \in S$. Аналогично пункту 1.1.2 (a) можно показать, что в центрально существенном полукольце односторонние делители нуля являются двусторонними делителями нуля.

5.1.4. Полупервичные и полувычитаемые полукольца. Полукольцо S называется *полупервичным*, если S не имеет нильпотентных идеалов.

Полукольцо S называется *полувычитаемым*, если для всех $a, b \in S$ с $a \neq b$ существует такой элемент $x \in S$, что $a + x = b$ или $b + x = a$.

5.1.5. Аддитивно сократимые полукольца. Полукольцо S называется *аддитивно сократимым*, если для любых $x, y, z \in S$ равенство $x + z = y + z$ равносильно равенству $x = y$.

Кольцо $D(S)$ называется *кольцом разностей* полукольца S, если S — подполукольцо в $D(S)$ и каждый элемент $a \in D(S)$ является разностью $x - y$ некоторых элементов $x, y \in S$.

Хорошо известно, что полукольцо S может быть вложено в кольцо разностей $D(S)$ в точности тогда, когда S аддитивно сократимо.

Класс аддитивно сократимых полуколец содержит все кольца. Кольцо разностей единственно с точностью до изоморфизма над S; см. подробности в [30, Chapter II].

5.1.6. Идемпотенты полуколец. В силу 1.1.4 каждый идемпотент центрально существенного кольца централен. Для полуколец аналогичный результат не верен; см. пример 5.2.2 ниже.

Для полукольца S идемпотент $e \in S$ называется *дополняемым*, если существует идемпотент $f \in S$ с $e + f = 1$.

5.1.7. Предложение. *В аддитивно сократимом центрально существенном полукольце S любой дополняемый идемпотент централен.*

Доказательство. Пусть $e^2 = e$ и $e + f = 1$ для некоторого $f \in S$. Так как S — аддитивно сократимое полукольцо, то из $e = e + fe$ следует, что $fe = 0$. Аналогично, имеем $ef = 0$. Пусть $x \in S$ и $xe \neq 0$. Тогда $x = ex + fx$ и $xe = exe + fxe$.

Сначала допустим, что $fxe = 0$, т. е. $xe = exe$. Так как $x = xe + xf$, то имеем $ex = exe + exf$. Если $exf \neq 0$, то существуют $c, d \in Z(S)$ с $(exf)c = d \neq 0$. Тогда

$$0 \neq d = ed = de = (exfc)e = (exc)fe = 0;$$

получено противоречие. Поэтому $exf = 0$ и $ex = xe = exe$.

Теперь пусть $fxe \neq 0$. Тогда $0 \neq (fxe)c = d$ для некоторых ненулевых элементов $c, d \in Z(S)$. В этом случае

$$0 \neq d = de = ed = ef(xec) = 0;$$

получено противоречие. □

5.1.8. Замечание. Если S — аддитивно сократимое полукольцо, то полукольцо $M_n(S)$ всех матриц и полукольцо $T_n(S)$ всех верхних треугольных матриц над S не центрально существенно для $n \geqslant 2$.

Доказательство. Для единичных матриц приведенных выше полуколец имеем $E = E_{11} + \ldots + E_{nn}$, где $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ — матричные единицы. Из [27, Example 4.19] следует, что $M_n(S)$ — аддитивно сократимое полукольцо. Идемпотенты $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ — нецентральные дополняемые идемпотенты. Следовательно, полукольца $M_n(S)$ и $T_n(S)$ не центрально существенны. □

5.2. Примеры, конструкции и замечания.

5.2.1. Предложение. *Пусть S — аддитивно сократимое полувычитаемое центрально существенное полукольцо с центром $C = Z(S)$. Следующие условия эквивалентны*:

(a) S — *полупервичное полукольцо*;
(b) C — *полупервичное полукольцо*;
(c) S *не имеет ненулевых нильпотентных элементов*;
(d) S — *коммутативное полукольцо без ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. В силу 5.1.5 полукольцо S может быть вложено в кольцо разностей $D(S)$. Кроме того, соотношение $D(S) = -S \cup S$ выполняется в точности тогда, когда S — полувычитаемое полукольцо; см. [30, Chapter II, Remark 5.12]. Тогда утверждение следует из теоремы 1.2.2. □

5.2.2. Пример. Рассмотрим полугруппу $(M, \cdot)$, заданную таблицей умножения

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	a	a	c
b	b	b	b	c
c	c	c	c	c

Для быстрой проверки ассоциативности удобно использовать тест ассоциативности по Лайту (см. [16, p. 7]).

Множество $S = 2^M$ всех подмножеств в M вместе с операциями $A + B = A \cup B$ и $AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$, где $A, B \in S$, образует полукольцо с нулем $\varnothing$ и единицей $1 = \{1_M\}$; см. [27, Example 1.10]. Имеем $|S| = 2^4 = 16$. Заметим, что S свободно от нулевых сумм, т. е. из $A+B = \varnothing$ следует, что $A = B = \varnothing$. Кроме этого, S аддитивно и мультипликативно идемпотентно. Запишем центр $C(S)$:

$$C(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{c\}, \{1, c\}\}.$$

Если $A \in S \setminus C(S)$, то $\varnothing \neq A \cdot \{c\} \in C(S)$. Следовательно, S — некоммутативное центрально существенное полукольцо.

5.2.3. Замечание. Из примера 5.2.2 следует, что утверждение предложения 5.2.1 не верно без предположений аддитивных сокращаемости и полувычитаемости.

5.2.4. Пример. Рассмотрим полукольцо S, порожденное матрицами

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \alpha & c \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha, a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, где $a_{12} = b_{23} = a$, $b_{12} = a_{23} = c$, $a \neq c$, а оставшиеся компоненты равны друг другу. Тогда $AB \neq BA$, т. е. S — некоммутативное полукольцо. Непосредственно проверяется, что центр $Z(S)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & b \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha, b \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Так как $0 \neq AD \in Z(S)$, где $0 \neq A \in S \setminus Z(S)$, $0 \neq D \in Z(S)$ с $\alpha = 0$, имеем, что S — некоммутативное центрально существенное полукольцо. Однако кольцо разностей $D(S) = M_3(\mathbb{Z})$ не является центрально существенным кольцом, так как кольцо имеет нецентральные идемпотенты. Кроме того, по замечанию 3.6.4 любая центрально существенная подалгебра локальной треугольной алгебры 3×3 матриц коммутативна.

Приведем пример центрально существенного кольца R, которое является кольцом разностей для двух собственных подполуколец S_1 и S_2 в R, причем S_1 не является центрально существенным полукольцом, а S_2 — центрально существенное полукольцо.

5.2.5. Пример. Пусть R — кольцо, состоящее из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{5.2.5.1}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел. В 3.6.8 доказано, что R — некоммутативное центрально существенное кольцо. Пусть S_1 — полукольцо, порожденное матрицами вида (5.2.5.1) над $\mathbb{Z}^+$ и такими скалярными матрицами, что $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ и на оставшихся позициях стоят нули. Так как $Z(S_1)$ состоит из скалярных матриц, то S_1 не является центрально существенным полукольцом. Заметим, что S_1 — полукольцо без делителей нуля. В то же время полукольцо S_2 матриц вида (5.2.5.1) над полукольцом $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ — центрально существенное полукольцо.

5.2.6. Предложение. *Пусть S — центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Если кольцо $D(S)$ не содержит делители нуля, то полукольцо S коммутативно.*

Доказательство. Пусть $0 \neq a = x - y \in D(S)$. По предположению $0 \neq xc = d$ и $0 \neq yf = g$ для некоторых $c, d, f, g \in Z(S)$. Тогда

$$a(cf) = (x - y)cf = (xc)f - (yf)c = df - gc.$$

Нм потребуется следующее известный факт [30, Chapter II, Theorem 5.13]: в любом полукольце S с кольцом разностей $D(S)$ любой центральный элемент из S содержится в центре кольца $D(S)$.

Поэтому $c, d, f, g \in Z(D(S))$ и $ac' \in Z(D(S))$, где $c' = cf$. Кроме того, $ac' \neq 0$, так как $D(S)$ не содержит делители нуля. Тогда $D(S)$ — коммутативное кольцо в силу 1.2.2. $\square$

5.2.7. Класс нильпотентности. Напомним, что *верхний центральный ряд* группы G — это цепь подгрупп

$$\{e\} = C_0(G) \subseteq C_1(G) \subseteq \ldots,$$

где $C_i(G)/C_{i-1}(G)$ — центр группы $G/C_{i-1}(G)$, $i \geqslant 1$. Для группы G *класс нильпотентности* группы G — наименьшее натуральное число n с условием $C_n(G) = G$, если такое n существует.

5.2.8. Предложение (ср. предложение 3.2.4)**.** *Пусть G — конечная группа класса нильпотентности $n \leqslant 2$ и пусть S — коммутативное полукольцо без делителей нуля или нулевых сумм. Тогда SG — центрально существенное групповое полукольцо.*

Доказательство. Если $n = 1$, то группа G абелева и SG — центрально существенное групповое полукольцо; см. теорему 1.4.1(a).

Пусть $n = 2$. Аналогично случаю групповых колец (см., например, [58, Part 2]), центр $Z(SG)$ — свободный S-полумодуль с базисом

$$\left\{ \sum_K : K \text{ — классы сопряженности в } G \right\}.$$

Достаточно проверить, что $SG \sum_{Z(G)} \subseteq Z(SG)$, где $Z(G)$ — центр группы G. Действительно, если $g, h \in G$, то

$$(gh)^{-1}hg \sum_{Z(G)} = \sum_{Z(G)},$$

так как $h^{-1}g^{-1}hg \in G' \subseteq Z(G)$. $\square$

В примере 5.2.9 ниже построено некоммутативное центрально существенное полукольцо без делителей нуля; это полукольцо аддитивно сократимо, но не полувычитаемо.

5.2.9. Пример. Пусть Q_8 — группа кватернионов, т. е. группа с двумя образующими a, b и определяющими соотношениями $a^4 = 1$, $a^2 = b^2$ и $aba^{-1} = b^{-1}$; см., например, [29, Sec. 4.4]. Тогда

$$Q_8 = \{e, a, a^2, b, ab, a^3, a^2b, a^3b\},$$

классы сопряженности в Q_8 — это

$$K_e = \{e\}, \quad K_{a^2} = \{a^2\}, \quad K_a = \{a, a^3\}, \quad K_b = \{b, a^2b\}, \quad K_{ab} = \{ab, a^3b\},$$

и центр $Z(Q_8)$ совпадает с $\{e, a^2\}$. Рассмотрим групповое полукольцо SQ_8, где $S = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. Так как Q_8 — группа класса нильпотентности 2, то из предложения 5.2.8 следует, что SQ_8 — центрально существенное групповое полукольцо. Для иллюстрации изложенного выше имеем

$$a \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_a}, \quad b \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_b}, \quad ab \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_{ab}},$$
$$a^3 \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_a}, \quad a^2b \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_b}, \quad a^3b \sum_{Z(Q_8)} = \sum_{K_{ab}}.$$

групповое кольцо разностей $\mathbb{Q}Q_8$ — кольцо без ненулевых нильпотентных элементов; см. [66, Theorem 3.5]. Тогда SQ_8 — приведенное полукольцо. Действительно, если $x^2+y^2 = xy+yx$ и $x \neq y$, то $x^2 + y^2 - xy - yx = (x - y)^2 = 0$ в кольце $\mathbb{Q}Q_8$; это не верно. Таким образом, SQ_8 — некоммутативное приведенное центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Заметим, что кольцо $\mathbb{Q}Q_8$ не центрально существенно, так как центрально существенные кольца без ненулевых нильпотентных элементов коммутативны.

5.2.10. Теорема. *Существует некоммутативное аддитивно сократимое приведенное центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Аддитивно сократимое приведенное полукольцо S коммутативно в точности тогда, когда кольцо разностей полугруппы S — центрально существенное кольцо.*

Доказательство. Из примера 5.2.9 следует, что существует некоммутативное аддитивно сократимое приведенное центрально существенное полукольцо без делителей нуля.

Если полукольцо S коммутативно, то $D(S)$ — коммутативное кольцо, т. е. $D(S)$ центрально существенно. Наоборот, пусть $D(S)$ — центрально существенное кольцо. Так как S — приведенное полукольцо, $D(S)$ — приведенное кольцо. Действительно, пусть $0 \neq a = x - y \in D(S)$. Если $a^2 = 0$, то $x^2 + y^2 = xy + yx$. Поэтому $x = y$, $a = 0$, и получаем противоречие. Тогда кольцо $D(S)$ коммутативно, так как $D(S)$ — приведенное центрально существенное кольцо. Следовательно, S — коммутативное полукольцо. $\square$

5.2.11. Мультипликативно сократимые полукольца. Элемент x полукольца S называется *мультипликативно сократимым слева* (соотв., *справа*), если $y = z$ для всех $y, z \in S$ с $xy = xz$ (соотв., $yx = zx$). Полукольцо S называется *мультипликативно сократимым слева* (соотв., *справа*), если каждый элемент $x \in S\setminus\{0\}$ мультипликативно сократим слева (соотв., справа). Мультипликативно сократимое слева и справа полукольцо называется *мультипликативно сократимым* (см., например, [30, Chapter I]).

5.2.12. Замечание. Мультипликативно сократимое слева (соотв., справа) центрально существенное полукольцо S коммутативно.

Доказательство. Пусть a и b — ненулевые элементы полукольца S. Так как S — центрально существенное полукольцо, то существует $c \in Z(S)$ с $0 \neq ac \in Z(S)$. Мультипликативно сократимое слева полукольцо не содержит левые делители нуля; см. [30, Chapter I, Theorem 4.4]. Поэтому $acb \neq 0$. Тогда

$$(ac)b = Z(ab) = (ca)b = b(ca) = ba),$$

откуда имеем $ab = ba$. Аналогичные рассуждения можно провести для мультипликативно сократимых справа полуколец. $\square$

5.2.13. Полутела и полуполя.

Полукольцо с делением, не являющееся кольцом, называется *полутелом*. Коммутативное полутело называется *полуполем*. Центрально существенные полутела являются полуполями, так как из [30, Chapter I, Theorem 5.5] следует, что полутело с как минимум двумя элементами мультипликативно сократимо и поэтому утверждение следует из замечания 5.2.12.

6. Неассоциативные кольца

В данной главе кольца не обязательно ассоциативны.

Мы используем обозначения и терминологию из [64, 75].

6.1. Виды центральной существенности. *В данном подразделе рассматриваемые кольца не обязательно унитальны или ассоциативны.*

Пусть R — кольцо. Присоединим к R внешнюю единицу и обозначим через R^1 полученное кольцо с единицей.

Ассоциатор трех элементов a, b, c кольца R — элемент $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ и *коммутатор* двух элементов $a, b \in R$ — элемент $[a, b] = ab - ba$.

6.1.1. Различные центры. Для кольца R *ассоциативный центр*, *коммутативный центр* и *центр* кольца R (в смысле [75, § 7.1]) — это множества

$$N(R) = \{x \in R : \forall a, b \in R\ (x, a, b) = (a, x, b) = (a, b, x) = 0\},$$
$$K(R) = \{x \in R : \forall a \in R\ [x, a] = 0\},$$
$$Z(R) = N(R) \cap K(R)$$

соответственно. Ясно, что $N(R)$ и $Z(R)$ являются подкольцами в R, а кольцо R является унитарным (левым и правым) $N(R)$-модулем и $Z(R)$-модулем.

6.1.2. Центроид. Для кольца R обозначим через $\hat{C}(R)$ *центроид* кольца R, т. е. множество всех эндоморфизмов аддитивной группы $(R, +)$, которые коммутируют с левым и правым умножениями на элементы кольца R.

Ясно, что R может рассматриваться как левый или правый модуль над ассоциативным коммутативным кольцом $Z(R)$; R может также рассматриваться как унитарный модуль над унитальным ассоциативным коммутативным кольцом $Z(R)^1$ и как унитарный модуль над над центроидом $\hat{C}(R)$.

6.1.3. Замечание. Ассоциативный центр $N(R)$, коммутативный центр $K(R)$ и центр $Z(R)$ кольца R являются $\hat{C}(R)$-подмодулями в R.

Доказательство. Пусть $n \in N(R)$ и $c \in \hat{C}(R)$. Для любых $a, b \in R$ имеем

$$\begin{aligned}
(c(n), a, b) &= c(n)a \cdot b - c(n) \cdot ab = c(na)b - c(n \cdot ab) = c((n, a, b)) = 0,\\
(a, c(n), b) &= ac(n) \cdot b - a \cdot c(n)b = c(an)b - ac(nb) = c((a, n, b)) = 0,\\
(a, b, c(n)) &= ab \cdot c(n) - a \cdot bc(n) = c(ab \cdot n) - c(a \cdot bn) = c((a, b, n)) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $c(n) \in N(R)$.

Аналогично, если $k \in K(R)$, то для любого $a \in R$ имеем

$$[c(k), a] = c(k)a - ac(k) = c(ka) - c(ak) = c([k, a]) = 0.$$

Следовательно, $c(k) \in K(R)$.

Наконец, утверждение о центре $Z(R)$ непосредственно следует из двух предыдущих утверждений, поскольку $Z(R) = N(R) \cap K(R)$ по определению. $\square$

6.1.4. Виды центральной существенности. Кольцо R с центром $C = Z(R)$ называется *центрально существенным*, если $Cr \cap C \neq 0$ для любого ненулевого $r \in R$ (эквивалентно, $K \cap C \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля K модуля R_C, т. е. C — существенный подмодуль в ${}_CR$).

Кольцо R с центром $C = Z(R)$ называется *сильно центрально существенным* (соотв., *слабо центрально существенным*), если $Cr \cap C \neq 0$ (соотв., $\hat{C}(R)r \cap C \neq 0$) для любого ненулевого элемента $r \in R$.

В определении сильно центрально существенного кольца можно формально заменить $Z(R)$ на $N(R)$; в этих случаях кольцо R называется *N-существенным слева* кольцом).

Кольцо R называется *N-существенным слева*, если $N(R)r \cap N(R) \neq 0$ для любого ненулевого $r \in R$, т. е. $N = N(R)$ — существенный подмодуль модуля ${}_NR$.

Кольцо R называется *K-существенным слева*, если $K(R)r \cap K(R) \neq 0$ для любого ненулевого элемента $r \in R$, т. е. $K = K(R)$ — существенный подмодуль модуля ${}_KR$.

Следующее предложение известно в ассоциативном случае.

6.1.5. Предложение. *Пусть R — кольцо с центром $C = Z(R)$.*

(a) *Если R — сильно центрально существенное кольцо, то R — центрально существенное кольцо.*
(b) *Если R — центрально существенное кольцо, то R — слабо центрально существенное кольцо.*
(c) *В классе унитальных колец совпадают сильно центрально существенные кольца, центрально существенные кольца и слабо центрально существенные кольца.*

Доказательство. (a) Утверждение следует из того, что C — подкольцо в C^1.

(b) Достаточно заметить, что умножения на центральные элементы и умножения на целые числа принадлежат центроиду кольца R.

(c) В силу (a) и (b) достаточно проверить, что если R — слабо существенное кольцо с единицей 1, то R — сильно центрально существенное кольцо. Пусть R — слабо центрально существенное кольцо и $r \in R \setminus \{0\}$. Существует такой элемент $\widehat{Z} \in \widehat{Z}(R)$, что $\widehat{c}(r) \in Z(R) \setminus \{0\}$. Тогда $0 \neq \widehat{Z}(r) = \widehat{Z}(1 \cdot r) = \widehat{c}(1)r \in Z(R)r$, поскольку $\widehat{Z}(1) \in Z(R)$ по замечанию 6.1.3. Таким образом, $Z(R)r \cap Z(R) \neq 0$. Поэтому R — сильно центрально существенное кольцо. □

Приведем примеры 6.1.6 и 6.1.8, которые показывают, что классы сильно центрально существенных, центрально существенных и слабо центрально существенных колец различаются в общем случае.

6.1.6. Пример. Любое ненулевое кольцо R с нулевым умножением — центрально существенное кольцо, которое не является сильно центрально существенным. Действительно, $R = Z(R)$ и для любого ненулевого элемента $r \in R$ имеем $r \in R^1 r \cap R$, но $Z(R)r = 0$.

Для следующего примера нам потребуется замечание 6.1.7.

6.1.7. Замечание. Пусть R — такое кольцо, что $R \cdot R^2 = R^2 \cdot R = 0$ и $\varphi \colon R \to R$ — такой эндоморфизм группы $(R, +)$, что $\varphi(R) \subseteq R^2 \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$. Тогда $\varphi \in \widehat{Z}(R)$. Действительно, $\varphi(ab) = 0$ для любых двух элементов $a, b \in R$, поскольку $ab \in R^2$; кроме того, $a\varphi(b) = \varphi(a)b = 0$, поскольку $aR^2 = R^2 b = 0$.

6.1.8. Пример. Пусть $F = \mathbb{Z}_3$ — поле из трех элементов, $\Lambda(F^2)$ — внешния алгебра двумерного линейного пространства над F. Пусть e_1, e_2 — базис пространства F^2 и пусть R — подалгебра алгебры $\Lambda(F^2)$ с базисом e_1, e_2, $e_1 \wedge e_2$. Пусть $r = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_1 \wedge e_2$ — произвольный элемент кольца R. Нетрудно видеть, что $r \in Z(R)$ в точности тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т. е. $Z(R) = R^2$ и $Z(R)^1 r = Fr$ для любого $r \in R$. В частности, $Z(R)^1 e_1 = Fe_1$ и $Fe_1 \cap R^2 = 0$; поэтому кольцо R не является центрально существенным. Теперь пусть $r \neq 0$. Если $r \in Z(R)$, то $r \in \widehat{Z}r \cap Z(R)$, поскольку $\widehat{Z}(R)$ содержит тождественный автоморфизм группы $(R, +)$. Пусть $\pi \colon R \to R/R^2$ — канонический гомоморфизм. Если $r \notin Z(R)$, то $\pi(r)$ — ненулевой элемент двумерного пространства R/R^2 и существует линейное отображение $\psi \colon R/R^2 \to R^2$, для которого $\psi(\pi(r)) \neq 0$. Если $\varphi = \psi\pi$, то $\varphi \in \widehat{Z}(R)$ по замечанию 6.1.7 и $0 \neq \varphi(r) \in \widehat{Z}(R)r \cap R^2 = Z(R)$. Следовательно, R — слабо центрально существенное кольцо.

6.2. Приведенные и полупервичные кольца. Кольцо называется *приведенным*, если оно не содержит ненулевых элементов с нулевым квадратом. Заметим, что ассоциативные приведенные кольца совпадают с кольцами без ненулевых нильпотентных элементов.

Кольцо R называется *полупервичным*, если R не содержит ненулевых идеалов с нулевым умножением; см. [75, § 8.2].

6.2.1. Теорема. *Пусть R — слабо центрально существенное кольцо, у которого центр $C = Z(R)$ — приведенное кольцо.*

(a) *R — сильно центрально существенное кольцо.*
(b) *R — ассоциативное кольцо.*
(c) *R — коммутативное кольцо.*

Доказательство. (a) Пусть $r \in R \setminus \{0\}$, $\varphi \in \widehat{C}$ и $\varphi(r) = d \in C \setminus \{0\}$. Тогда

$$0 \neq d^2 = d\varphi(r) = \varphi(dr) = \varphi(d)r.$$

По замечанию 6.1.3 $\varphi(d) \in C$. Также ясно, что $d^2 \in C$. Поэтому $0 \neq \varphi(d)r \in Cr \cap C$, т. е. кольцо R сильно центрально существенно.

(b) В силу (a) кольцо R сильно центрально существенно. Допустим, что R не ассоциативно и некоторые элементы $x, y, z \in R$ имеют ненулевой ассоциатор $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. Тогда существуют такие $c, d \in C$, что $d = (x, y, z)c \in C \setminus \{0\}$. Заметим, что $xd \neq 0$; в противном случае

$$\begin{aligned} d^2 &= (x, y, z)c \cdot d = (x, y, z) \cdot cd = (x, y, z) \cdot dc = ((xy \cdot z)d - (x \cdot yz)d)c = \\ &= (d(xy \cdot z) - d(x \cdot yz))c = ((dx \cdot y)z - dx \cdot yz)c = 0, \end{aligned}$$

что невозможно. Поэтому для некоторого элемента $b \in C$ имеем $xd \cdot b = x \cdot db \in C \setminus \{0\}$. Обозначим $I = \{c \in C \mid cx \in C\}$. Ясно, что $db \in I$. Теперь допустим, что $dI = 0$. Тогда $d(db) = 0$, $(db)^2 =$

$db \cdot db = (db \cdot d)b = (d \cdot db)b = 0$ и $db = 0$; получено противоречие. Поэтому $di \neq 0$ для некоторого $i \in I$. Однако $di = (xy \cdot z - x \cdot yz)c \cdot i = c((xi \cdot y)z - xi \cdot yz) = 0$; получено противоречие. Таким образом, R — ассоциативное кольцо.

(c) Предположим, что кольцо R некоммутативно и существуют такие элементы $x, y \in R$, что $xy - yx \neq 0$. Тогда существуют такие элементы $c, d \in C$, что $d = (xy - yx)c \in C \setminus \{0\}$. Заметим, что $xd \neq 0$; в противном случае

$$d^2 = (xy - yx)cd = c((xd)y - y(xd)) = 0;$$

это невозможно. Поэтому $xdz \in C \setminus \{0\}$ для некоторого элемента $z \in C$. Рассмотрим множество $I = \{c \in C \mid cx \in C\}$. Ясно, что $dz \in I$. Теперь допустим, что $dI = 0$. Тогда $d(dz) = 0$, $(dz)^2 = 0$ и $dz = 0$; получено противоречие. Поэтому $di \neq 0$ для некоторого $i \in I$. Однако

$$di = (xy - yx)ci = c((xi)y - y(xi)) = 0;$$

противоречие. Поэтому R коммутативно. □

6.2.2. Замечание. Ясно, что центр полупервичного кольца — приведенное кольцо; обратное не всегда верно, поскольку кольцо верхних треугольных матриц над полем — неполупервичное кольцо с приведенным центром.

6.2.3. Замечание. Пусть R — центрально существенное ассоциативное кольцо. В 1.1.4 и 1.2.5 доказано, что все идемпотенты кольца R центральны и кольцо R коммутативно, если оно полупервично. Во введении были приведены примеры конечных некоммутативных центрально существенных ассоциативных унитальных колец.

6.2.4. Альтернативные кольца. Кольцо R называется *альтернативным справа* (соотв., *альтернативным слева*), если $(ab)b = a(bb)$ (соотв., $(aa)b = a(ab)$) для любых элементов $a, b \in R$.

Альтернативные справа и слева кольца называются *альтернативными* кольцами. Кольцо R альтернативно в точности тогда, когда $(a, a, b) = (a, b, b)$ для любых элементов $a, b \in R$, где через (a, b, c) обозначается ассоциатор $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ элементов a, b, c кольца R.

По теореме Артина [75, Theorem 2.3.2] кольцо R альтернативно в точности тогда, когда любые два элемента кольца R порождают ассоциативное подкольцо.

6.2.5. Теорема. *Пусть R — центрально существенное кольцо.*

(a) *Если центр $Z(R)$ кольца R — полупервичное кольцо, то кольцо R коммутативно и ассоциативно.*
(b) *Если кольцо R альтернативно и e — идемпотент кольца R, то $e \in Z(R)$.*

Доказательство. (a) Из теоремы 6.2.1 и замечания 6.2.2 следует, что любое слабо центрально существенное полупервичное кольцо ассоциативно и коммутативно.

(b) Если R — слабо центрально существенное альтернативное кольцо и e — идемпотент кольца R, то надо доказать, что $e \in Z(R)$. Пусть r — произвольный элемент кольца R. Далее мы будем несколько раз использовать ассоциативности подкольца, порожденного двумя элементами e и r в альтернативном кольце R. Если $c \in \widehat{Z}(R)$ — такой элемент центроида кольца R, что $c(ere-re) = d \in Z(R)$, то $de = c(ere - re)e = c((ere - re)e) = c(ere - re) = d$. С другой стороны,

$$ed = ec(ere - re) = c(e(ere - re)) = c(0) = 0.$$

Поэтому $d = 0$ и $\widehat{Z}(R)(ere - re) \cap Z(R) = 0$. Поскольку кольцо R слабо центрально существенно, то $ere - re = 0$. Можно аналогично проверить, что $ere - er = 0$, откуда $re = er$. □

6.2.6. Открытые вопросы.

1. Верно ли, что любое N-существенное[1] кольцо ассоциативно? Наше предположение: это не верно.
2. Верно ли, что любое полупервичное N-существенное кольцо ассоциативно?

[1] См. 6.1.4.

Следующий пример показывает, что аналогичные вопросы для K-существенных[1] колец имеют отрицательные ответв.

6.2.7. Пример. Пусть F — произвольное поле и R — такая алгебра над F с базисом

$$\{e, f, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots\},$$

что и его умножение определено на базисных элементах соотношениями

$$e^2 = e, \quad f^2 = f, \quad ef = x_1, \quad fe = y_1,$$
$$ex_i = x_ie = x_i, \quad y_jf = fy_j = y_j,$$
$$x_ix_j = x_{i+j}, \quad y_iy_j = y_{i+j},$$
$$x_if = fx_i = y_je = ey_j = x_iy_j = y_jx_i = 0 \quad \text{для всех} \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Положим $x = x_1$, $y = y_1$. Непосредственно проверяется, что $K(R) = F[x]x + F[y]y$. Действительно, если $r = ae + bf + s$, где $a, b \in F$ и $s \in F[x]x + F[y]y$, то $[r, e] = b(y - x)$ и $[r, f] = a(x - y)$. Поэтому $K(R) \subseteq F[x]x + F[y]y$; обратное включение следует из определения умножения в R.

Заметим, что $K(R)$ — идеал в R и кольцо $K(R) \cong F[x]x \oplus F[y]y$ приведенное. Поэтому, если $r \in K(R) \setminus \{0\}$, то $r^2 \in K(R)r \setminus \{0\}$. Если $r \notin K(R)$, то

$$r = ae + bf + \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_iy^i,$$

где $a, b, a_i, b_i \in F$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Если $a \neq 0$, то

$$xr = ax + \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^{i+1} \in (K(R)r \cap K(R)) \setminus \{0\};$$

аналогично, если $b \neq 0$, то

$$yr = by + \sum_{i=1}^{\infty} b_iy^{i+1} \in (K(R)r \cap K(R)) \setminus \{0\}.$$

Поэтому кольцо R является K-существенным.

Так как $R/K(R) \cong F \oplus F$ и $K(R)$ — ассоциативные приведенные кольца, то $r = 0$ для любого элемента $r \in R$ с условием $r^2 = 0$. В частности, R не имеет ненулевых идеалов с нулевым умножением, т. е. кольцо R полупервично. В то же время e и f являются нецентральными идемпотентами кольца R; это невозможно в любом ассоциативном полупервичном слабо центрально существенном кольце.

6.2.8. Замечание. Если R — альтернативное кольцо без элементов порядка 3 в аддитивной группе, то R K-существенно в точности тогда, когда R центрально существенно, поскольку $3K(R) \subseteq N(R)$ [75, Corollary 7.1.1].

6.3. Процесс Кэли—Диксона. Напомним, что если M — левый модуль над кольцом R и S — подмножество в M, то $\mathrm{Ann}_R S = \ell_R(S)$ — аннулятор множества S в кольце R, т. е. $\mathrm{Ann}_R(S) = \{r \in R \mid rS = 0\}$. Обозначим через $[A, A]$ идеал кольца A, порожденный коммутаторами всех его элементов.

Следующее определение слегка обобщает определение процесса Кэли—Диксона, приведенное в [75, § 2.2], см. [9].

6.3.1. Процесс Кэли—Диксона и кольца (A, α). Пусть A — кольцо с инволюцией $*$[2] и α — обратимый симметричный элемент центра кольца A. Определим операцию умножения на абелевой группе $A \oplus A$ как указано ниже:

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4a_2^*, a_1^*a_4 + a_3a_2) \tag{6.3.1.1}$$

[1]См. 6.1.4.

[2]Напомним, что кольцевой антиэндоморфизм называется *инволюцией*, если его двукратное применение является тождественным отображением.

для любых $a_1, \ldots, a_4 \in A$. Обозначим полученное кольцо через (A, α).

Элементы кольца (A, α) вида $(a, 0)$, $a \in A$, образуют подкольцо кольца (A, α), изоморфное кольцу A; мы будем отождествлять их с соответствующими элементами кольца A. Положим $\nu = (0, 1) \in (A, \alpha)$. Тогда $a * \nu = (0, a) = \nu a$ для любого $a \in A$ и $\nu^2 = \alpha$. Таким образом, $(A, \alpha) = A + A\nu$.

Заметим, что много работ посвящено изучению структуры и свойств колец и алгебр, полученных в результате этого процесса; например, [12, 22–24, 60, 64, 72].

Следующие свойства проверяются непосредственно, с использованием соотношений (6.3.1.1).

(a) $\nu^2 = \alpha$ и $\nu a = a^* \nu$ для любого элемента $a \in A$.
(b) $(1, 0)$ — единица кольца (A, α).
(c) Множество $\{(a, 0) \mid a \in A\}$ — подкольцо кольца (A, α), изоморфное кольцу A.
(d) В (A, α) отображение $(a, b) \mapsto (a^*, -b)$, $a, b \in A$ — инволюция.

Вплоть до конца подраздела 6.3 зафиксируем кольцо A и элемент α, который удовлетворяют условиям процесса Кэли—Диксона из 6.3.1; мы также положим $R = (A, \alpha)$.

6.3.2. Лемма. *Элемент $(x, y) \in R$ принадлежит кольцу $N(R)$ в точности тогда, когда для любых двух элементов $u, v \in A$ выполняются следующие две системы соотношений:*

$$\begin{aligned}
&(xu)v = x(uv), \quad (ux)v = u(xv), \quad (uv)x = u(vx),\\
&v(ux) = x(vu), \quad (xu)v = u(vx), \quad (vu)x = (xv)u,\\
&v(xu) = (vu)x, \quad v(ux) = (vx)u, \quad x(uv) = u(xv),\\
&(ux)v = (uv)x, \quad v(xu) = (xv)u, \quad x(vu) = (vx)u;
\end{aligned} \tag{6.3.2.1}$$

$$\begin{aligned}
&(uy)v = y(vu), \quad (uy)v = (yv)u, \quad y(vu) = u(yv),\\
&v(yu) = y(uv), \quad (yu)v = (vy)u, \quad y(uv) = (vy)u,\\
&v(uy) = (uv)y, \quad v(uy) = u(vy), \quad (vu)y = u(vy),\\
&(yu)v = (vu)y, \quad v(yu) = u(yv), \quad (uv)y = (yv)u.
\end{aligned} \tag{6.3.2.2}$$

Доказательство. Пусть $(x, y) \in R$. Так как ассоциаторы линейны, то включение $(x, y) \in N(R)$ равносильно тому, что для любых элементов $u, v \in A$ имеем

$$\begin{aligned}
((x, y)(u, 0)(v, 0)) &= ((u, 0), (x, y), \quad (v, 0)) = ((u, 0), (v, 0), (x, y)) = 0,\\
((x, y)(u, 0)(0, v)) &= ((u, 0), (x, y), \quad (0, v)) = ((u, 0), (0, v), (x, y)) = 0,\\
((x, y)(0, u)(v, 0)) &= ((0, u), (x, y), \quad (v, 0)) = ((0, u), (v, 0), (x, y)) = 0,\\
((x, y)(0, u)(0, v)) &= ((0, u), (x, y), \quad (0, v)) = ((0, u), (0, v), (x, y)) = 0.
\end{aligned} \tag{6.3.2.3}$$

Вычисляя ассоциаторы из (6.3.2.3), мы получим следующую систему, состоящую из 12 соотношений:

$$\begin{gathered}
((xu)v, v(uy)) = (x(uv), (uv)y),\\
((ux)v, v(u^*y)) = (u(xv), u^*(vy)),\\
((uv)x, (v^*u^*)y) = (u(vx), u^*(v^*y)),\\
(\alpha v(y^*u^*), (u^*x^*)v) = (\alpha(u^*v)y^*, x^*(u^*v)),\\
(\alpha v(y^*u), (x^*u^*)v) = (\alpha u(vy^*), u^*(x^*v)),\\
(\alpha y(v^*u), x(u^*v)) = (\alpha u(yv^*), u^*(xv)),\\
(\alpha(uy^*)v, v(x^*u)) = (\alpha(vu)y^*, x^*(vu)),\\
(\alpha(yu^*)v, v(xu)) = (\alpha(vy)u^*, (xv)u),\\
(\alpha y(u^*v^*), x(vu)) = (\alpha(v^*y)u^*, (vx)u),\\
(\alpha v(u^*x), \alpha(yu^*)v) = (\alpha x(vu^*), \alpha(vu^*)y),\\
(\alpha v(u^*x^*), \alpha(uy^*)v) = (\alpha(x^*v)u^*, \alpha(vy^*)u),\\
(\alpha(vu^*)x, \alpha(uv^*)y) = (\alpha(xv)u^*, \alpha(yv^*)u).
\end{gathered}$$

Приравнивая компоненты равных элементов кольца R и учитывая, что элемент α обратим, мы получаем следующую эквивалентную систему:

$$
\begin{array}{ccc}
(xu)v = x(uv), & v(uy) = (uv)y, & (ux)v = u(xv), \\
v(u^*y) = u^*(vy), & (uv)x = u(vx), & (v^*u^*)y = u^*(v^*y), \\
v(y^*u^*) = (u^*v)y^*, & (u^*x^*)v = x^*(u^*v), & v(y^*u) = u(vy^*), \\
(x^*u^*)v = u^*(x^*v), & y(v^*u) = u(yv^*), & u^*(xv) = x(u^*v), \\
(uy^*)v = (vu)y^*, & v(x^*u) = x^*(vu), & (yu^*)v = (vy)u^*, \\
v(xu) = (xv)u, & y(u^*v^*) = (v^*y)u^*, & x(vu) = (vx)u, \\
v(u^*x) = x(vu^*), & (yu^*)v = (vu^*)y, & v(u^*x^*) = (x^*v)u^*, \\
(uy^*)v = (vy^*)u, & (vu^*)x = (xv)u^*, & (uv^*)y = (yv^*)u.
\end{array}
$$

Заменим уравнения, обе части которого содержат x^* или y^*, соотношениями сопряженных элементов. Заметим, что либо u, либо u^* имеется в каждом уравнении. Поэтому можно подставить u вместо u^*, поскольку $A^* = A$. Аналогично заменяем v^* на v. Выбирая содержащие x уравнения, мы получаем (6.3.2.1), а оставшиеся уравнения образуют систему (6.3.2.2). $\square$

6.3.3. Лемма. *Пусть $x \in A$. Соотношения* (6.3.2.1) *выполняются для всех $u, v \in A$ в точности тогда, когда $x \in Z(A)$.*

Доказательство. Пусть $x \in A$ и соотношения (6.3.2.1) выполняются для всех $u, v \in A$. Первые три соотношения означают, что $x \in N(A)$. Из четвертого соотношения при $u = 1$ следует, что $x \in K(A)$. Следовательно, $x \in Z(A)$.

Наоборот, если $x \in Z(A)$, то каждое из соотношений в (6.3.2.1) преобразуется в одно из верных соотношений $x(uv) = x(uv)$ или $x(vu) = x(vu)$, т. е. соотношения (6.3.2.1) выполняются для всех $u, v \in A$. $\square$

6.3.4. Лемма. *Пусть $y \in A$. Соотношения* (6.3.2.2) *выполняются для всех $u, v \in A$ в точности тогда, когда $y \in \mathrm{Ann}_{Z(A)}([A, A])$.*

Доказательство. Пусть $y \in A$ и соотношения (6.3.2.2) выполняются для всех $u, v \in A$. Прежде всего, заметим, что для $v = 1$ первое уравнение из (6.3.2.2) превращается в уравнение $uy = yu$; это эквивалентно включению $y \in K(A)$, поскольку элемент $u \in A$ произволен.

Проверим, что $y \in N(A)$. Для любых элементов $u, v \in A$, имеем

$$
\begin{gathered}
(yu)v \overset{\overline{1}}{=} (vy)u \overset{\overline{2}}{=} y(uv), \\
(uy)v \overset{1}{=} y(vu) \overset{3}{=} u(yv), \\
(uv)y = y(uv) \overset{4}{=} v(yu) = v(uy) \overset{8}{=} u(vy).
\end{gathered}
$$

В этих преобразованиях число над символом отношения — это номер используемого уравнения из (6.3.2.2) (уравнения перенумерованы по строкам слева направо, начиная с первой строки). Число подчеркивания обозначает, что вместо данного уравнения используется эквивалентное уравнение, полученное перестановкой переменных u, v.

Следовательно, $y \in N(A) \cap K(A) = Z(A)$.

Наконец, принимая во внимание доказанное, получаем, что уже из первого уравнения из (6.3.2.2) следует, что $y[u, v] = 0$ для любых $u, v \in A$, т. е. $y \in \mathrm{Ann}_C([A, A])$.

Наоборот, если $y \in \mathrm{Ann}_{Z(A)}([A, A])$, то каждое из соотношений (6.3.2.2) преобразуется в верное соотношение $y(uv) = y(vu)$, т. е. соотношения (6.3.2.2) выполняются для всех $u, v \in A$. $\square$

6.3.5. Теорема. *Пусть A — кольцо с центром $C = Z(A)$, $I = \mathrm{Ann}_C([A, A])$, $R = (A, \alpha)$. Тогда $N(R) = \{(x, y) : x \in C,\ y \in I\}$.*

Доказательство. Утверждение следует из лемм 6.3.2, 6.3.3 и 6.3.4. $\square$

6.3.6. Замечание. Из теоремы 6.3.5 вытекает следующий классический результат (ср. [75, Exercise 2.2.2(a)]): кольцо $R = (A, \alpha)$ ассоциативно в точности тогда, когда кольцо A ассоциативно и коммутативно.

6.4. Процесс Кэли—Диксона и центральная существенность.

6.4.1. Лемма. *Пусть B — подкольцо центра кольца A и I — существенный идеал кольца B. Если B — существенный B-подмодуль модуля ${}_BA$, то I — существенный B-подмодуль модуля ${}_BR$.*

Доказательство. Если r — ненулевой элемент кольца R, то существует такой элемент $b \in B$, что $0 \neq br \in B$. Поэтому существует такой элемент $d \in B$, что $0 \neq dcr \in I$ и $Br \cap I \neq 0$. $\square$

6.4.2. Теорема. *Пусть A — кольцо с центром $C = Z(A)$, $I = \mathrm{Ann}_C([A, A])$, $R = (A, \alpha)$. Кольцо R N-существенно слева (соотв., справа) в точности тогда, когда A центрально существенно и I — существенный идеал кольца C.*

Доказательство. Пусть кольцо A и элемент α удовлетворяют условиям из 6.3.1. Ясно, что $C^* = C$, $I^* = I$, $\alpha C = C$ и $\alpha I = I$.

Пусть кольцо $R = (A, \alpha)$ является N-существенным. Тогда для любого ненулевого элемента $a \in A$ существует такой элемент $(x, y) \in N(R)$, что

$$(x, y)(a, 0) = (xa, ay) \in N(R) \setminus \{0\}.$$

В силу теоремы 6.3.5 $x \in C$ и $y \in I$. Если $xa \neq 0$, то $xa \in C \setminus \{0\}$; в противном случае $ya \in C \setminus \{0\}$. В обоих случаях $Ca \cap C \neq 0$. Таким образом, A — центрально существенное кольцо.

Докажем, что I — существенный идеал кольца C. Пусть $c \in C \setminus \{0\}$. Если $Ic \neq 0$, то $Ic \subseteq I$ и $Cc \cap I \neq 0$. Пусть $Ic = 0$. Рассмотрим элемент $(0, c)$. Существует такой элемент $(x, y) \in N(R)$, что

$$(x, y)(0, c) = (\alpha cy, x^*c) \in N(R) \setminus \{0\}.$$

Поскольку $\alpha y \in I$, $\alpha cy = 0$, имеем, что $x^*c \neq 0$ и $x^*c \in I$ по теореме 6.3.5. Следовательно, $Cc \cap I \neq 0$, что и требовалось.

Наоборот, допустим, что A — центрально существенное кольцо и I — существенный идеал в C.

Пусть $(x, y) \in R \setminus \{0\}$. Существует такой элемент $c \in C$, что $cx \in C \setminus \{0\}$. Поскольку $(c, 0) \in N(R)$, имеем

$$0 \neq (c, 0)(x, y) = (cx, c^*y) \in N(R)(x, y).$$

Если $c^*y = 0$, то

$$0 \neq (cx, 0) \in N(R)(x, y) \cap N(R).$$

Если $c^*y \neq 0$, то по лемме 6.4.1 (для $B = C$) существует такой элемент $d \in C$, что

$$dc^*y \in I \setminus \{0\}.$$

Тогда

$$(d^*, 0)(c, 0)(x, y) = (d^*, 0)(cx, c^*y) = (d^*cx, dc^*y) \in N(R)(x, y) \cap N(R) \setminus \{0\}.$$

Таким образом, кольцо R является N-существенным. $\square$

6.4.3. Замечание. До конца данного подраздела зафиксируем кольцо A с центром $C = Z(A)$ и элемент α, которые удовлетворяют 6.3.1 (процесс Кэли—Диксона). Положим $R = (A, \alpha)$,

$$I = \mathrm{Ann}_C([A, A]), \quad B = \{a \in C \mid a = a^*\}, \quad J = \mathrm{Ann}_B(\{a - a^* \mid a \in A\}).$$

Заметим, что множества B и J инвариантны относительно инволюции и замкнуты относительно умножения на α.

6.4.4. Теорема. $Z(R) = \{(x, y) \mid x \in B,\ y \in I \cap J\}$.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in Z(R)$. Поскольку $Z(R) \subseteq N(R)$, то из теоремы 6.3.5 следует, что $x \in C$ и $y \in I$. Из соотношения $(0,1)(x,y) = (x,y)(0,1)$ вытекают соотношения $\alpha y = \alpha y^*$ и $x = x^*$. Следовательно, $x \in B$ и $y \in B \cap I$. Далее, из соотношения $(a,0)(x,y) = (x,y)(a,0)$, $a \in A$, следуют соотношения $ax = xa$ и $ay = a^*y$. Первое соотношение выполняется для любого $x \in C$ и второе соотношение означает, что $y(a - a^*) = 0$, т. е. $y \in J$. Следовательно, $y \in I \cap J$.

Наоборот, если $x \in B$ и $y \in I \cap J$, то $(x, y) \in N(R)$ и для любых $a, b \in A$ имеем

$$(x,y)(a,b) = (xa + \alpha by^*, x^*b + ay) = (xa + \alpha yb, xb + ay),$$
$$(a,b)(x,y) = (ax + \alpha yb^*, a^*y + xb) = (ax + \alpha yb, xb + ay).$$

Таким образом, $(x, y) \in K(R)$, откуда $(x, y) \in Z(R)$. □

6.4.5. Теорема. *Кольцо $R = (A, \alpha)$ центрально существенно в точности тогда, когда B — существенный B-подмодуль кольца R и $J' = J \cap I$ — существенный идеал кольца B.*

Доказательство. Пусть кольцо $R = (A, \alpha)$ центрально существенно. Тогда для любого $a \in A \setminus \{0\}$ существует такой элемент $(x, y) \in Z(R)$, что $(x, y)(a, 0) = (xa, ay) \in Z(R) \setminus \{0\}$. В силу теоремы 6.4.4 $x, xa \in B$ и $y, ay = ya \in J'$. Если $xa \neq 0$, то $xa \in B \setminus \{0\}$; в противном случае $ya \in B \setminus \{0\}$. В обоих случаях имеем $Ba \cap B \neq 0$. Таким образом, B — существенный подмодуль модуля ${}_BA$.

Докажем, что $J' =$ — существенный идеал кольца B. Пусть $b \in B \setminus \{0\}$. Если $J'b \neq 0$, то $J'b \subseteq J'$ и

$$Bb \cap J' \supseteq J'b \cap J' \neq 0.$$

Пусть $J'b = 0$. Рассмотрим элемент $(0, b)$. Существует такой элемент $(x, y) \in Z(R)$, что

$$(x,y)(0,b) = (\alpha by, x^*b) \in Z(R) \setminus \{0\}.$$

Поскольку $\alpha y \in J'$ и $\alpha by = 0$, то $x^*b \neq 0$, $x \in B$ и $x^*b = xb \in J'$ по теореме 6.4.4. Следовательно, $Bb \cap J' \neq 0$, что и требовалось.

Наоборот, допустим, что B — существенный B-подмодуль кольца R и J' — существенный идеал кольца B.

Пусть $(x, y) \in R \setminus \{0\}$. Сначала допустим, что $x \neq 0$. Существует такой элемент $b \in B$, что $bx \in B \setminus \{0\}$. Поскольку $(b, 0) \in Z(R)$, имеем

$$0 \neq (b,0)(x,y) = (bx, b^*y) \in Z(R)(x,y).$$

Если $b^*y = 0$, то

$$0 \neq (bx, 0) \in Z(R)(x,y) \cap Z(R).$$

Если $b^*y \neq 0$, то по лемме 6.4.1 (для $I = J'$) существует такой элемент $d \in B$, что

$$db^*y \in J' \setminus \{0\}.$$

Тогда

$$(d^*,0)(b,0)(x,y) = (d^*,0)(bx, b^*y) = (d^*bx, db^*y) \in Z(R)(x,y) \cap Z(R) \setminus \{0\}.$$

Теперь пусть $x = 0$. Тогда $y \neq 0$ и существует такой элемент $d \in B$, что $dy \in J' \setminus \{0\}$. Получаем, что

$$(d^*,0)(0,b) = (0, db) \in Z(R) \setminus \{0\}, \quad (d^*,0) \in Z(R).$$

Таким образом, кольцо R центрально существенно. □

6.5. Алгебры кватернионов и октонионов.

6.5.1. Замечания и обозначения. Пусть K — коммутативное ассоциативное кольцо с тождественной инволюцией и a — обратимый элемент кольца R. Рассмотрим кольцо $A_1 = (K, a)$. Тогда A_1 — коммутативное ассоциативное кольцо, поскольку $B = C = I = J = K$ в обозначениях подраздела 6.4. Естественно записать элементы кольца A_1 в виде $x + yi$, где x, y — элементы кольца K, $i = (0, 1)$. На кольце A_1 можно задать инволюцию соотношением $(x + yi)^* = x - yi$ для любых элементов x и y из K. Выберем обратимый элемент $b \in K$. Тогда b — обратимый симметричный элемент центра кольца A_1 и можно построить кольцо $A_2 = (A_1, b)$. Рассмотрим K-базис алгебры A_2, образованный элементами $1 = (1, 0)$, $i = (i, 0)$, $j = (0, 1)$ и $k = (0, -i)$. Соотношения $i^2 = a$,

$j^2 = b$, $ij = -ji = k$, $ik = -ki = aj$, $kj = -jk = bi$ проверяются непосредственно. Следовательно, полученное кольцо — обобщенная алгебра кватернионов

$$\left(\frac{a,b}{K}\right).$$

Хорошо известно (и также следует из теоремы 6.3.5), что кольцо A_2 ассоциативно (см., например [75, Example 7.2.III]). Центр кольца A_2 имеет вид $K + Ni + Nj + Nk$, где $N = \mathrm{Ann}_K(2)$ (см. [6, Lemma 2(b)]). Пусть B, I, J определяется уравнениями из замечания 6.4.3 для $A = A_2$. Непосредственно проверяется, что $B = C = Z(A_2)$, $I = J = N + Ni + Nj + Nk$.

6.5.2. Лемма. *При данных выше обозначениях I — существенный идеал в B в точности тогда, когда N — существенный идеал в K.*

Доказательство. Пусть I — существенный идеал в B. Если $x \in K \setminus \{0\}$, то существует такой элемент $y \in B$, что $xy \in I \setminus \{0\}$. Положим $y = y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k$, где $y_1 \in K$ и $y_2, y_3, y_4 \in N$. Если $xy_1 \neq 0$, то $xK \cap N \neq 0$. В противном случае хотя бы один из элементов xy_2, xy_3, xy_4 не равен 0 и каждый их них принадлежат идеалу N, откуда в этом случае $xK \cap N \neq 0$ тоже верно.

Наоборот, если N — существенный идеал в K и

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in I \setminus \{0\},$$

то $x_2, x_3, x_4 \in N$. Если $x_1 \neq 0$, то существует элемент $y \in K$ такой, что $yx_1 \in N \setminus \{0\}$. Тогда $yx \in Bx \cap I \setminus \{0\}$. Если $x_1 = 0$, то $x = 1 \cdot x \in Bx \cap I$. Таким образом, I — существенный идеал кольца B. $\square$

Из изложенного выше мы получаем следующее предложение.

6.5.3. Предложение. *Алгебра кватернионов $((K, a), b)$ является некоммутативным центрально существенным кольцом в точности тогда, когда $\mathrm{Ann}_K(2)$ — собственный существенный идеал кольца K.*

Теперь рассмотрим любой обратимый элемент $c \in K$ и кольцо $A_3 = (A_2, c)$. Положим

$$f_1 = i, \quad f_2 = j, \quad f_3 = k, \quad f_4 = l = (0,1), \quad f_5 = (0,-i), \quad f_6 = (0,-j), \quad f_8 = (0,-k).$$

Непосредственно проверяется, что базис $\{1, f_1, f_2, \ldots, f_7\}$ K-модуля A_3 удовлетворяет соотношениям из [24] для базисных элементов обобщенной алгебры октонионов $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$ (при $\alpha = -a$, $\beta = -b$, $\gamma = -c$).

Аналогично предложению 6.5.3, мы получаем предложение 6.5.4.

6.5.4. Предложение. *Алгебра октонионов $(((K, a), b), c)$ является неассоциативным центрально существенным кольцом в точности тогда, когда $\mathrm{Ann}_K(2)$ — собственный существенный идеал кольца K.*

6.5.5. Пример. Пусть $K = \mathbb{Z}_4$. Докажем, что $R = (((K, 1), 1), 1)$ — неассоциативное некоммутативное центрально существенное кольцо. Действительно, $\mathrm{Ann}_K(2) = 2K$ — существенный собственный идеал в K. Поэтому некоммутативность кольца $((K, 1), 1)$ (и некоммутативность кольца R, содержащего $((K, 1), 1)$) следует из предложения 6.5.3 и неассоциативность кольца R следует из предложения 6.5.4.

Заметим, что кольцо $R = (((K, 1), 1), 1)$ альтернативно, а кольцо $(R, 1)$ не является даже альтернативным справа, т. е. $(R, 1)$ не удовлетворяет тождеству $(x, y, y) = 0$ [75, Exercise 7.2.2]. Таким образом, существуют альтернативные неассоциативные конечные центрально существенные кольца и неальтернативные конечные центрально существенные кольца.

6.5.6. Открытые вопросы.

1. Существуют ли N-существенные слева кольца, которые не являются N-существенными справа?
2. Существуют ли коммутативные N-существенные (эквивалентно, центрально существенные) неассоциативные кольца?

3. Существуют ли альтернативные справа центрально существенные или N-существенные неальтернативные кольца?
4. Как можно обобщить полученные результаты на случай неунитальных колец и случай, когда элемент α из определения 6.3.1 не предполагается обратимым?
5. Поскольку процесс Кэли—Диксона приводит к неассоциативным телам (см., например, [12, 22]), кажется естественным сформулировать следующий вопрос: что можно сказать об N-существенности этих тел?

Заметим, что центрально существенные полупервичные кольца коммутативны, но неизвестно, являются ли N-существенные полупервичные кольца ассоциативными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубровин Н. И.* Рациональные замыкания групповых колец левоупорядоченных групп// Мат. сб. — 1993. — *184*, № 7. — С. 3–48.
2. *Елизаров В. П.* О теоремах Голди// Сиб. мат. ж. — 1969. — *10*, № 1. — С. 58–63.
3. *Злыднев Д. В.* Кольца частных колец с большим центром// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2014. — № 2. — С. 25–30.
4. *Марков В. Т., Туганбаев А. А.* Центрально существенные кольца// Дискр. мат. — 2018. — *30*, № 2. — С. 55–61.
5. *Марков В. Т., Туганбаев А. А.* Центрально существенные кольца, которые не обязательно унитальны или ассоциативны// Дискрет. матем. — 2018. — *30*, № 4. — С. 42–47.
6. *Туганбаев А. А.* Алгебры кватернионов над коммутативными кольцами// Мат. заметки. — 1993. — *53*, № 2. — С. 126–131.
7. *Туганбаев А. А.* Дистрибутивные полупервичные кольца// Мат. заметки. — 1995. — *58*, № 5. — С. 736–761.
8. *Чередникова А. В.* Кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3// Мат. заметки. — 1998. — *63*, № 5. — С. 763–773.
9. *Albert A. A.* Quadratic forms permitting composition// Ann. Math. — 1942. — *43*, № 1. — P. 161–177.
10. *Amitsur S. A.* Radicals of polynomial rings// Can. J. Math. — 1956. — *8*. — P. 355–361.
11. *Bourbaki N.* Algebra I: Chapters 1–3. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.
12. *Brown R. B.* On generalized Cayley–Dickson algebras// Pac. J. Math. — 1967. — *20*, № 3. — P. 415–422.
13. *Brown K. A.* On zero divisors in group rings// Bull. London Math. Soc. — 1976. — *8*, № 3. — P. 251–256.
14. *Brown K. A.* Quotient rings of group rings// Compos. Math. — 1978. — *36*, № 3. — P. 243–254.
15. *Camillo V.* Distributive modules// J. Algebra. — 1975. — *36*, № 1. — P. 16–25.
16. *Clifford A. H., Prieston G. B.* The Algebraic Theory of Semigroups. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1961.
17. *Corner A. L. S., Göbel R.* Prescribing endomorphism algebras, a unified treatmend// Proc. London Math. Soc. — 1985. — *50*, № 3. — P. 447–479.
18. *Dicman A. P.* On p-groups// Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1937. — *15*. — P. 71–76.
19. *Drozd Y. A., Kirichenko V. V.* Finite Dimensional Algebras. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.
20. *Dugas M., Göbel R.* Every cotorsion-free algebra is an endomorphism algebra// Math. Z. — 1982. — *181*, № 4. — P. 451–470.
21. *Faticoni T. G.* Direct Sum Decompositions of Torsion-Free Finite Rank Groups. — New York: Chapman and Hall/CRC, 2007.
22. *Flaut C.* Divison algebras with dimension 2^t, $t \in \mathbb{N}$// An. Ştiint. Univ. “Ovidius” Constanţa. Ser. Mat. — 2006. — *13*, № 2. — P. 31–38.
23. *Flaut C., Shpakivskyi V.* Some identities in algebras obtained by the Cayley–Dickson process// Adv. Appl. Clifford Algebras. — 2013. — *23*, № 1. — P. 63–76.
24. *Flaut C., Ştefănescu M.* Some equations over generalized quaternion and octonion division algebras// Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum. — 2009. — *52 (100)*, № 4. — P. 427–439.
25. *Fuchs L.* Abelian Groups. — Springer Cham, 2015.
26. The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra, https://www.gap-system.org.

27. *Golan J. S.* Semirings and Their Applications. — Dordrecht–Boston–London: Springer, 1999.
28. *Goodearl K. R.* Von Neumann Regular Rings. — London: Pitman, 1979.
29. *Hall M.* The Theory of Groups. — New York: MacMillan, 1959.
30. *Hebisch U., Weinert H. J.* Semirings: Algebraic Theory and Application in Computer Science. — Singapore: World Scientific.
31. *Herstein I. N.* Noncommutative Rings. — Am. Math. Soc., 2005.
32. *Herstein I. N., Small L. W.* Rings of quotients of group algebras// J. Algebra. — 1971. — *19*, № 2. — P. 153–155.
33. *Jelisiejew J.* On commutativity of ideal extensions// Commun. Algebra. — 2016. — *44*, № 5. — P. 1931–1940.
34. *Jensen C. U.* A remark on arithmetical rings// Proc. Am. Math. Soc. — 1964. — *15*, № 6. — P. 951–954.
35. *Kaplansky I., Berberian S. K.* Rings of Operators. — New York: Benjamin, 1968.
36. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Pubishers, 2003.
37. *Lam T. Y.* A First Course in Noncommutative Rings. — New York: Springer-Verlag, 2001.
38. *Lambek J.* Lectures on Rings and Modules. — Am. Math. Soc., 2009.
39. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential endomorphism rings of abelian groups// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 3. — P. 1249–1256.
40. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential torsion-free rings of finite rank// Beitr. Algebra Geom. — 2021. — *62*, № 3. — P. 615–622.
41. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras and classical rings of fractions// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 12. — P. 2890–2894.
42. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential semirings// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 3. — P. 653–658.
43. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Local centrally essential subalgebras of rriangular algebras// Lin. Multilin. Algebra. — 2022. — *70*, № 13. — P. 2415–2424.
44. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential semigroup algebras/ `arXiv:abs/2204.10518.`
45. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Ideals and Factor Rings of Centrally Essential Rings/ `arXiv:abs/2204.10507.`
46. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras// J. Algebra. — 2018. — *512*, № 15. — P. 109–118.
47. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Rings essential over their centers// Commun. Algebra. — 2019. — *47*, № 4. — P. 1642–1649.
48. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Rings with polynomial identity and centrally essential rings// Beitr. Algebra Geom. — 2019. — *60*, № 4. — P. 657–661.
49. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Cayley–Dickson process and centrally essential rings// J. Algebra Appl. — 2020. — *19*, № 5. — P. 1950229.1–1950229.10.
50. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Uniserial Artinian centrally essential rings// Beitr. Algebra Geom. — 2020. — *61*, № 1. — P. 23–33.
51. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Constructions of centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 1. — P. 198–203.
52. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Uniserial Noetherian centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 1. — P. 149–153.
53. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Distributive Noetherian centrally essential rings// J. Algebra Appl. — 2020.
54. *Năstăsescu C., Popescu N.* Anneaux semi-artiniens// Bull. Soc. Math. France. — 1968. — *96*. — P. 357–368.
55. *Nishigôri N.* On some properties of *FC*-groups// J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. — 1957. — *21*, № 2. — P. 99–105.
56. *Okniński J.* Semigroup Algebras. — New York–Basel: Marcel Dekker, 1991.
57. *Passman D. S.* Infinite Group Rings. — Marcel Dekker, 1971.
58. *Passman D. S.* The Algebraic Structure of Group Rings. — New York: Wiley, 1977.
59. *Pierce R. S., Vinsonhaler C. I.* Realizing central division algebras// Pac. J. Math. — 1983. — *109*, № 1. — P. 165-–177.

60. *Pumplün S., Astier V.* Nonassociative quaternion algebras over rings// Isr. J. Math. — 2006. — *155.* — P. 125–147.
61. *Rowen L.* Some results on the center of a ring with polynomial identity// Bull. Am. Math. Soc. — 1973. — *79*, № 1. — P. 219–223.
62. *Rowen L. H.* Polynomial Identities in Ring Theory. — New York: Academic Press, 1980.
63. *Rowen L. H.* Ring Theory. — New York: Academic Press, 1988.
64. *Schafer R. D.* An Introduction to Nonassociative Algebras. — New York: Academic Press, 1966.
65. *Scott W. R.* Group Theory. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964.
66. *Sehgal S. K.* Nilpotent elements in group rings// Manuscr. Math. — 1975. — *15*, № 1. — P. 65–80.
67. *Stephenson W.* Modules whose lattice of submodules is distributive// Proc. London Math. Soc. — 1974. — *s3-28*, № 2. — P. 291–310.
68. *Suprunenko D. A., Tyschkevich R. I.* Commutative Matrices. — New York: Academic Press, 1968.
69. *Tuganbaev A. A.* Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht Netherlands: Springer, 1998.
70. *Tuganbaev A. A.* Centrally essential rings// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 2. — P. 136–144.
71. *Tuganbaev A. A.* On rings of weak global dimension at most one// Mathematics. — 2021. — *9*, № 21. — 2643.
72. *Waterhouse W. C.* Nonassociative quaternion algebras// Algebras Groups Geom. — 1987. — *4*, № 3. — P. 365–378.
73. *Wisbauer R.* Foundations of Module and Ring Theory: A Handbook for Study and Research. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.
74. *Zariski O., Samuel P.* Commutative Algebra. I. — New York: Springer-Verlag.
75. *Zhevlakov K. A., Slin'ko A. M., Shestakov I. P., Shirshov A. I.* Rings That Are Nearly Associative. — New York–London: Academic Press, 1982.

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: tuganbaev@gmail.com

CONTENTS

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.