

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 216 (2022)



Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 216 (2022)

Дата публикации 10 октября 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 15 раз в год

Редакторы-составители выпуска

Е. Ю. Лискина,

М. В. Шамолин

Научный редактор выпуска

Е. Е. Букжалёв

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-3-11>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-12-28>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-29-43>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-44-49>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-50-56>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-57-65>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-66-75>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-76-87>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-88-96>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-97-105>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-106-115>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-116-123>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-124-132>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-133-152>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-216-153-171>

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 216

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ,
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

К проблеме устойчивости нулевого решения периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (<i>В. В. Абрамов</i>)	3
Алгебры Ли проективных движений пятимерных псевдоримановых пространств. V. Алгебры Ли проективных и аффинных движений h -пространств H_{221} типа {221} (<i>А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов</i>)	12
Бифуркации в динамической системе, моделирующей педагогическое воздействие на студенческую группу с отрицательным неформальным лидером (<i>С. А. Бельман, Е. Ю. Лискина</i>)	29
Циклические пространства (<i>И. М. Бурлаков, М. П. Бурлаков</i>)	44
Эллиптические задачи в областях с вырожденными особенностями (<i>В. Б. Васильев, Ш. Х. Кутаиба</i>)	50
Некоторые задачи выпуклого анализа в пространстве Лобачевского (<i>А. В. Костин, Н. Н. Костина</i>)	57
Инвариантные торы слабо диссипативного варианта уравнения Гинзбурга—Ландау (<i>А. Н. Куликов</i>)	66
Циклы двух конкурирующих макроэкономических систем в рамках одной из версий модели Гудвина (<i>Д. А. Куликов, О. В. Баева</i>)	76
Скрытая синхронизация систем фазовой автоподстройки с учетом нелинейности в запаздывании (<i>С. С. Мамонов, И. В. Ионов, А. О. Харламова</i>)	88
О геометрии конформных векторных полей (<i>А. Я. Нарманов, О. Ю. Касымов, Э. О. Ражабов</i>)	97
О существовании и полноте перечисления трехмерных RR -многогранников (<i>В. И. Субботин</i>)	106
Существование поверхности с заданными геометрическими характеристиками в галилеевом пространстве (<i>Б. М. Султанов</i>)	116
О группе изометрий слоеных многообразий (<i>А. С. Шарипов, Г. М. Абдишукурова</i>)	124
Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией (<i>М. В. Шамолин</i>)	133
Полиномиальные автоморфизмы, квантование и задачи вокруг гипотезы Якобиана. IV. Аппроксимации полиномиальными симплектоморфизмами (<i>А. М. Елишев, А. Я. Канель-Белов, Ф. Разавиния, Ц.-Т. Юй, В. Чжан</i>)	153



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 3–11
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-3-11

УДК 517.925.51

К ПРОБЛЕМЕ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. В. В. АБРАМОВ

Аннотация. Исследована нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которой является периодической по независимой переменной, локально гладко зависит от малого параметра и от фазовой переменной. Доказаны признаки, гарантирующие произвольную малость возмущенных решений при условии, что начальные значения решений и параметр достаточно малы. В рассуждениях использованы свойства нелинейных приближений правого и левого операторов монодромии.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, малый параметр, устойчивость, оператор монодромии.

ON THE STABILITY OF THE TRIVIAL SOLUTION TO A PERIODIC SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2022 V. V. ABRAMOV

ABSTRACT. In this paper, we examine a normal system of ordinary differential equations whose right-hand side is periodic in the independent variable and locally smoothly depends on the small parameter and the phase variable. Using the properties of nonlinear approximations of the right and left monodromy operators, we prove conditions that guarantee the arbitrary smallness of perturbed solutions for sufficiently small initial values of the solutions and the parameter.

Keywords and phrases: differential equation, small parameter, stability, monodromy operator.

AMS Subject Classification: 34D20, 34C25

1. Введение. При обсуждении вопроса о формулировке свойства «практической» устойчивости в монографии И. Г. Малкина [6, с. 21] приводится пример скалярного уравнения $\dot{x} = \mu^2 x - x^3$, для которого нулевое решение неустойчиво вправо. Однако возмущенные решения произвольно малы, если достаточно малы не только начальные значения решений, но и параметр μ . При этом сделан вывод о том, что такого рода «практическая» устойчивость нулевого решения связана с ляпуновской устойчивостью двух стационарных решений $x = \pm\mu$, ограничивающих область отталкивания нулевого решения в смысле Ляпунова. Тем не менее, несколько усложнив приведенный пример, можно заметить целесообразность введения ослабленного понятия устойчивости. Рассмотрим скалярное уравнение $\dot{x} = \mu^2 a(t)x - x^3$, в котором $a(t): \mathbb{R} \rightarrow [b, c]$, $b > 0$. Так как $\dot{x}x = \mu^2 a(t)x^2 \geq \mu^2 bx^2$, то в линейном приближении решение $x = 0$ данного уравнения неустойчиво по Ляпунову при $\mu \neq 0$. Однако область отталкивания, включенная в интервал $(-|\mu|\sqrt{c}, |\mu|\sqrt{c})$, имеет бесконечно малый диаметр при $\mu \rightarrow 0$. Следовательно, решение $x = 0$ можно считать «практически» устойчивым. Идея этого примера приводит к понятию устойчивости по параметру, которое исследовал М. М. Хапаев на конечном и на неограниченном интервалах с помощью

комбинации метода усреднения и второго метода Ляпунова (см. [7]). Предполагалось, что имеют место критические случаи, когда при параметре, равном нулю, нулевое решение исследуемой системы устойчиво по Ляпунову, но не является асимптотически устойчивым. Для системы с малым параметром вопрос о вариантах ослабления понятия устойчивости, основанного на ляпуновских возмущениях, рассматривался также в [1].

В данной работе исследуем проблему двусторонней устойчивости по параметру для нулевого решения периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С этой целью используем метод оценки степеней оператора монодромии, изложенный в монографии М. А. Красносельского [5] и примененный для исследования свойства устойчивости по параметру в [2–4].

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = g(t, x, \mu), \quad (1)$$

в которой $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ — малый параметр, $g(t, 0_n, \mu) = 0_n$. Допустим, что при любом достаточно малом начальном значении $x(0, a, \mu) = a$ ее решение $x(t, a, \mu)$ единственно и нелокально продолжаемо.

Определение 1. Решение $x = 0_n$ системы (1) двусторонне μ -устойчиво (двусторонне устойчиво по параметру), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие число $\delta > 0$ и множество $M \subset \mathbb{R}^m$, $0_m \in M'$, что при всех $a \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in M$ и $t \in \mathbb{R}$ из неравенств $\|a\| < \delta$, $\|\mu\| < \delta$ следует оценка $\|x(t, a, \mu)\| < \varepsilon$.

Здесь и далее символом $\|\cdot\|$ обозначается какая-либо конечномерная норма вектора или матрицы вне зависимости от их размерности.

Замечание 1. Ясно, что устойчивость по определению 1 означает наличие устойчивости как влево, так и вправо, причем в общем случае решение может быть неустойчивым по Ляпунову.

2. Вспомогательные результаты. Далее исследуем вопрос о двусторонней устойчивости по параметру в силу определения 1, предполагая, что при всех (t, x, μ) выполняется условие $g(t \pm \omega, x, \mu) = g(t, x, \mu)$, то есть система (1) является периодической. Кроме того, будем предполагать, что функция $g(t, x, \mu)$ дифференцируема по фазовой переменной и непрерывна по параметру в окрестности точки $(x, \mu) = (0_n, 0_m)$. Тогда система (1) локально близка к линейной, значит, ее решения определены, по крайней мере, при $t \in [-\omega, \omega]$. Поэтому при достаточно малых начальном значении и параметре определены левый и правый операторы монодромии $a \rightarrow x(\pm\omega, a, \mu)$.

Установим признаки устойчивости в терминах последовательности степеней $x(s\omega, a, \mu)$, $s \in \mathbb{Z}$ оператора монодромии.

Лемма 1. Для ω -периодической по t системы вида (1) решение $x = 0_n$ двусторонне μ -устойчиво тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие число $\delta > 0$ и множество $M \in \mathbb{R}^m$, $0_m \in M'$, что при всех $a \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in M$ и $s \in \mathbb{Z}$ из неравенств $\|a\| < \delta$, $\|\mu\| < \delta$ следует оценка $\|x(s\omega, a, \mu)\| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из определения 1, если $t = s\omega$, $s \in \mathbb{Z}$.

Установим достаточность. Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу непрерывной зависимости решения от начального значения и параметра существует такое число $\Delta > 0$, что при любых $\tau \in [-\omega, \omega]$, a : $\|a\| < \Delta$ и $\mu \in M$: $\|\mu\| < \Delta$ справедливо неравенство $\|x(\tau, a, \mu)\| < \varepsilon$. По условию для $\Delta > 0$ существует $\delta \in (0, \Delta)$, для которого при всех $s \in \mathbb{Z}$, a : $\|a\| < \delta$ и $\mu \in M$: $\|\mu\| < \delta$ имеет место оценка $\|x(s\omega, a, \mu)\| < \Delta$. Тогда по групповому свойству периодической динамической системы для произвольного $t = s\omega + \tau$, $s \in \mathbb{Z}$, $\tau \in [-\omega, \omega]$ из условий a : $\|a\| < \delta$ и $\mu \in M$: $\|\mu\| < \delta$ следует, что

$$\|x(t, a, \mu)\| = \|x(\tau, x(s\omega, a, \mu), \mu)\| < \varepsilon.$$

Итак, нулевое решение системы (1) устойчиво по определению 1. Лемма 1 доказана. \square

Из леммы 1 следует признак двусторонней устойчивости в терминах оценок для односторонних операторов монодромии.

Лемма 2. *Если для любого $\delta_1 > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|a\| < \delta_1$, $\|\mu\| < \delta_2$ справедливы оценки $\|x(\pm\omega, a, \alpha)\| < \delta_1$, то для ω -периодической по t системы вида (1) решение $x \equiv 0_n$ двусторонне μ -устойчиво.*

Доказательство. Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1 = \varepsilon$. По условию существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|a\| < \delta_1$, $\|\mu\| < \delta_2$ справедливы оценки $\|x(\pm\omega, a, \alpha)\| < \varepsilon$. Допустим, что для некоторого $s \in \mathbb{Z}$ при $\|a\| < \delta_1$, $\|\alpha\| < \delta_2$ имеет место неравенство $\|x(s\omega, a, \alpha)\| < \varepsilon$. Тогда $\|x((s+1)\omega, a, \mu)\| = \|x(\omega, x(s\omega, a, \mu), \mu)\| < \varepsilon$. Следовательно, по индукции $\|x(s\omega, a, \mu)\| < \varepsilon$ при всех $s \in \mathbb{Z}$, $\|a\| < \delta$, $\|\mu\| < \delta$, где $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Итак, в силу леммы 1 нулевое решение устойчиво по определению 1. Лемма 2 доказана. \square

Замечание 2. Очевидно, аналоги лемм 1 и 2 при $s \in \mathbb{Z}_-$ или $s \in \mathbb{Z}_+$ можно использовать и в качестве достаточных признаков односторонней устойчивости по параметру.

3. Некритический случай устойчивости по параметру. Рассмотрим систему вида (1)

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu), \quad (2)$$

в которой матрица $A(t)$ и вектор-функция $f(t, x, \mu)$ являются ω -периодическими по t , $f(t, x, \mu)$ достаточно гладкая относительно x и μ в окрестности точки $(x, \mu) = (0_n, 0_m)$, $f(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n$, $f'(t, 0_n, 0_m) \equiv 0_{nm}$. Будем предполагать, что для устойчивости нулевого решения системы (2) по линейному приближению имеет место критический случай как влево, так и вправо, то есть справедливы равенства

$$\rho(X_r) = 1, \quad r = 1, 2,$$

в которых $\rho(*)$ — операция вычисления спектрального радиуса матрицы, $X_r = X((-1)^r\omega)$ — матрицы монодромии, $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$.

Сформулируем идею конструкции признака устойчивости. Допустим, что нулевое решение системы вида (1) при нулевом значении параметра асимптотически устойчиво вправо (влево) по Ляпунову. Тогда нулевое решение устойчиво вправо (влево) по параметру. При этом с точки зрения устойчивости по параметру имеет место некритический случай [3, 7]. Если к тому же при ненулевом значении параметра нулевое решение асимптотически устойчиво влево (вправо), то тем более имеет место более слабый тип устойчивости — по параметру. Таким образом, нулевое решение оказывается двусторонне устойчивым по параметру.

Для реализации этой идеи с помощью леммы 2, установим локальную структуру односторонних операторов монодромии. Решение системы (2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t, x, \mu) = X(t)a + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau, x(\tau, x, \mu), \mu)d\tau. \quad (3)$$

Обозначим

$$y(t, x, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau, x(\tau, x, \mu), \mu)d\tau.$$

Так как $x = 0_n$ — решение системы (2), то $x(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n$ в силу единственности решения с заданным начальным значением. Поэтому, учитывая гладкость правой части системы (2) и условие $f'_x(t, 0_n, 0_m) \equiv 0_{nm}$, имеем

$$y'_a(t, 0_n, 0_m) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)f'_x(\tau, x(\tau, 0_n, 0_m), 0_m)x'_a(\tau, 0_n, 0_m)d\tau \equiv 0_{nn}. \quad (4)$$

Подставим выражение вида $x(t, a, \mu) = X(t)a + y(t, a, \mu)$ в правую часть уравнения (3). В силу равенства (4) получим локальный вид решения системы (2)

$$x(t, a, \mu) = X(t)a + y_1(t, a, \mu) + y_2(t, a, \mu), \quad (5)$$

в котором

$$y_2(t, a, \mu) = y(t, a, \mu) - y_1(t, a, \mu), \quad y_1(t, a, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, X(\tau)a, \mu) d\tau.$$

Учитывая гладкость правой части системы (2), с помощью формулы Тейлора получим выражения

$$y_1((-1)^r \omega, a, \mu) = p_r(a, \mu) + \psi_r(a, \mu), \quad r = 1, 2, \quad (6)$$

в которых $p_r(a, \mu)$ — вектор-формы порядка k , $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, то есть $p_r(\alpha a, \alpha \mu) = \alpha^k p_r(a, \mu)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, вектор-функция $\psi_r(a, \mu)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|\psi_r(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0.$$

В частности,

$$y_1((-1)^r \omega, \gamma a, \gamma \mu) = O(\gamma^k) \quad \text{при } \gamma \rightarrow 0.$$

По формуле Лагранжа справедливо равенство

$$\begin{aligned} y_2(t, a, \mu) &= X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) (f(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) - f(\tau, X(\tau)a, \mu)) d\tau = \\ &= X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f'_x(\tau, X(\tau)a + q(\tau, a, \mu)y(\tau, a, \mu), \mu) y(\tau, a, \mu) d\tau, \end{aligned}$$

где $q(\tau, a, \mu) \in (0, 1)$ — некоторая величина. Тогда

$$y_2((-1)^r \omega, \gamma a, \gamma \mu) = o(\gamma^k) \quad \text{при } \gamma \rightarrow 0$$

в силу равенств (4) и (6). Положим

$$\varphi_r(a, \mu) = \psi_r(a, \mu) + y_2((-1)^r \omega, a, \mu).$$

Тогда

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|\varphi_r(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0.$$

Итак, подставив $t = \omega$ в равенство (5), для системы (2) с учетом выражения (6) получили локальную структуру левого и правого операторов монодромии

$$x((-1)^r \omega, a, \mu) = X_r a + p_r(a, \mu) + \varphi_r(a, \mu), \quad r = 1, 2. \quad (7)$$

Условия устойчивости по определению 1 для системы (2) целесообразно сформулировать в терминах свойств функций $p_r(a, \mu)$, которые являются первыми нелинейными приближениями операторов монодромии относительно начального значения решения и параметра, представляя собой усредненные на периоде характеристики нелинейного приближения правой части системы (2) вдоль решений соответствующей системы $\dot{x} = A(t)x$.

Так как в равенствах (7) функции $p_r(a, \mu)$ являются вектор-формами, то представим их в виде сумм

$$p_r(a, \mu) = \sum_{l=0}^k h_{rl}(a, \mu),$$

где $h_{rl}(a, \mu)$ — вектор-формы, $h_{rl}(\alpha a, \beta \mu) = \alpha^l \beta^{k-l} h_{rl}(a, \mu)$. В частности, $h_{r1}(a, \mu) = H_r(\mu)a$, $h_{rk}(a, \mu) = p_r(a, 0_m)$.

Допустим, что возможно разложение $p_2(a, 0_m) = D_2(a)a$, при котором для всех λ : $\|\lambda\| = 1$ и для всех достаточно малых $\gamma > 0$ справедлива оценка

$$\|X_2 + \gamma D_2(\lambda)\| \leq 1 - \gamma b_2, \quad b_2 > 0. \quad (8)$$

Кроме того, предположим, что существует значение $\mu_0 \neq 0_m$, при котором для любого достаточно малого $\gamma > 0$ имеет место неравенство

$$\|X_1 + \gamma H_1(\mu_0)\| \leq 1 - \gamma b_1, \quad b_1 > 0. \quad (9)$$

Теорема 1. *Если выполнены условия (8) и (9), то нулевое решение системы (2) двусторонне μ -устойчиво.*

Доказательство. В силу равенства (7) правый оператор монодромии имеет вид

$$x(\omega, a, \mu) = X_2 a + p_2(a, \mu) + \varphi_2(a, \mu) = (X_2 + D_2(a))a + \tilde{p}_2(a, \mu) + \tilde{\varphi}_2(a, \mu),$$

где вектор-функции $\tilde{p}_2(a, \mu)$, $\tilde{\varphi}_2(a, \mu)$ удовлетворяют условиям

$$\tilde{p}_2(a, 0_m) \equiv 0_n, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|\tilde{\varphi}_2(\alpha a, \mu)\| \equiv 0.$$

Из оценки (8) следует, что существует $\delta > 0$, при котором

$$\|\tilde{\varphi}_2(a, \mu)\| \leq \frac{b_2 \|a\|^k}{4},$$

если $\|a\| < \delta$ и $\|\mu\| < \sigma_1$ ($\sigma_1 > 0$ — произвольно выбранное малое число). Выберем такое $\sigma_2 \in (0, \sigma_1]$, что

$$\|\tilde{p}_2(a, \mu)\| \leq \frac{b_2 \delta^k}{4}$$

для любых a : $\delta/2 \leq \|a\| < \delta$, μ : $\|\mu\| < \sigma_2$. При этом

$$\begin{aligned} \|x(\omega, a, \mu)\| &= \|X_2 + D_2(a)\| \|a\| + \|\tilde{p}_2(a, \mu)\| + \|\tilde{\varphi}_2(a, \mu)\| \leq \\ &\leq (1 - b_2 \|a\|^{k-1}) \|a\| + \frac{b_2 \|a\|^k}{4} + \frac{b_2 \delta^k}{4} \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{3b_2 \|a\|^{k-1}}{4}\right) \|a\| + \frac{b_2 \delta^k}{4} \leq \left(1 - \frac{3b_2 \delta^{k-1}}{8}\right) \delta + \frac{b_2 \delta^k}{4} < \delta. \end{aligned}$$

Так как $x(\omega, 0_n, \mu) \equiv 0_n$ и $x'_a(\omega, 0_n, 0_m) = X_2$, то возможно разложение $x(\omega, a, \mu) = Y_2(a, \mu)a$, в котором матрица $Y_2(a, \mu)$ удовлетворяет условию $Y_2(0_n, 0_m) = X_2$. Поэтому без ограничения общности рассуждений с учетом равенства $\rho(X_2) = 1$ при $0 < \|a\| < \delta/2$, $\|\mu\| < \sigma_2$ справедлива оценка $\|Y_2(a, \mu)\| < 2$, то есть $\|x(\omega, a, \mu)\| < \delta$. Таким образом, $\|x(\omega, a, \mu)\| < \delta$ при любых a : $0 < \|a\| < \delta$, μ : $\|\mu\| < \sigma_2$. Произвольно выберем $\varepsilon > 0$. Допустим, что $\delta_1 = \min\{\varepsilon, \delta\}$. Тогда в силу предыдущих рассуждений существует $\delta_2 \in (0, \sigma_2]$, для которого из неравенств $0 < \|a\| < \delta_1$, $\|\mu\| < \delta_2$ следует оценка $\|x(\omega, a, \mu)\| < \delta_1$. Итак, по замечанию 2 аналогично лемме 2 для нулевого решения системы (2) доказана устойчивость по параметру вправо. (Заметим, что из оценки (8) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2) при нулевом значении параметра [3]).

Выберем $a = \alpha \lambda$, $\mu \in M = \{\mu = \beta(\mu_0 + \gamma)\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}^m$ — малые параметры, $\|\lambda\| = 1$. Тогда в силу равенства (7) левый оператор монодромии имеет вид

$$x(-\omega, a, \mu) = (X_1 + \beta^{k-1} H_1(\mu_0))a + \beta^{k-1} \tilde{H}_1(\gamma)a + \tilde{p}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma) + \tilde{\varphi}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma),$$

где вектор-функции $\tilde{p}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)$, $\tilde{\varphi}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)$ и матрица $\tilde{H}_1(\gamma)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-k} \|\tilde{p}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| \equiv 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} \|\tilde{\varphi}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| \equiv 0, \quad \tilde{H}_1(0_m) = 0_m.$$

Оценим норму произвольного значения рассматриваемого оператора

$$\|x(-\omega, a, \mu)\| \leq \|X_1 + \beta^{k-1} H_1(\mu_0)\| \alpha + \beta^{k-1} \alpha \|\tilde{H}_1(\gamma)\| + \|\tilde{p}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| + \|\tilde{\varphi}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\|.$$

Выберем такое $\Delta > 0$, что $\|\tilde{H}_1(\gamma)\| \leq b_1/3$ при $\|\gamma\| < \Delta$. Произвольно зафиксируем $\sigma > 0$. Так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} \|\tilde{\varphi}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| \equiv 0,$$

то найдется $\delta > 0$, при котором

$$\|\tilde{\varphi}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| < \frac{\beta^{k-1}\alpha b_1}{3}$$

для $\alpha < \delta$, $\beta < \sigma$, $\|\gamma\| < \Delta$. Из условия

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-k} \|\tilde{p}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| \equiv 0$$

следует, что для известных δ , σ , Δ можно подобрать $\sigma_1 \in (0, \sigma]$ таким образом, чтобы при $\delta/2 \leq \alpha < \delta$, $\beta < \sigma_1$, $\|\gamma\| < \Delta$ было справедливо неравенство

$$\|\tilde{p}_1(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| < \frac{\beta^{k-1}\alpha b_1}{3}.$$

При этом $\|x(-\omega, a, \mu)\| \leq \alpha < \delta$. Кроме того, без ограничения общности рассуждений, как и в предыдущей части доказательства, при $\alpha < \delta/2$, $\beta < \sigma_1$, $\|\gamma\| < \Delta$ можно установить оценку $\|x(-\omega, a, \mu)\| \leq 2\alpha < \delta$. Произвольно выберем $\varepsilon > 0$. Допустим, что $\delta_1 = \min\{\varepsilon, \delta\}$. Тогда в силу предыдущих рассуждений существует $\delta_2 = \sigma_2(\|\mu_0\| + \Delta)$, при котором для любых $a \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \in M$ из неравенств $0 < \|a\| < \delta_1$, $0 < \|\mu\| < \delta_2$ следует оценка $\|x(-\omega, a, \mu)\| < \delta_1$. Итак, аналогично лемме 2 доказано, что нулевое решение системы (2) устойчиво по параметру влево. (Заметим, что из оценки (9) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2) по линейному приближению, так как при малом ненулевом $\mu \in M$ для спектрального радиуса левой матрицы монодромии справедлива оценка $\rho(x'_a(-\omega, 0_n, \mu)) \leq \|X_1 + \beta^{k-1}(H_1(\mu_0) + \tilde{H}_1(\gamma))\| < 1$). Теорема 1 доказана. \square

Замечание 3. Если оценка типа (8) имеет место для левого оператора монодромии, а оценка типа (9) — для правого, то справедливо утверждение о двусторонней устойчивости, аналогичное теореме 1.

Пример 1. Рассмотрим систему вида (2) со скалярным параметром μ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \mu^2 \begin{pmatrix} 1 + \sin t & 0 \\ 8 \cos^2 t & 0 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

При этом $\omega = 2\pi$ — период правой части по t , односторонние матрицы монодромии $X_1 = X_2 = E$. Для соответствующих равенств (7) вычислим $p_r(a, \mu)$, $r = 1, 2$. В данном случае $p_2(a, \mu) = -p_1(a, \mu)$. Выделив линейное приближение, получим левую матрицу монодромии

$$X_1 + H_1(\mu) = \begin{pmatrix} 1 - 6\pi\mu^2 & \pi\mu^2 \\ -\pi\mu^2 & 1 - 2\pi\mu^2 \end{pmatrix}.$$

Если параметр равен нулю, то первое нелинейное приближение правого оператора монодромии имеет вид $(X_2 + D_2(a))a = (1 - \pi(a_1^2 + a_2^2))Ea$. При этом

$$\|X_1 + H_1(\mu)\|_\infty \leq 1 - \pi\mu^2, \quad \|X_2 + D_2(a)\|_2 = 1 - \pi\|a\|_2^2,$$

то есть выполняются оценки (8) и (9) (для определенности можно выбрать $\mu_0 = 1$). Значит, согласно замечанию 3 из аналога теоремы 1 следует, что нулевое решение системы (10) двусторонне μ -устойчиво. Этот вывод иллюстрируется на рисунке 1, где в условиях теоремы 1 изображена типичная для исследуемого типа устойчивости картина расположения интегральных кривых с малыми начальными значениями и при малом значении параметра.

4. Критический случай устойчивости по параметру. Рассмотрим систему вида (2)

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu), \quad (11)$$

для правой части которой имеют место разложения

$$f(t, x, \mu) = d_r(t, x, \mu) + u_r(t, x, \mu) + q_r(t, x, \mu), \quad r = 1, 2, \quad (12)$$

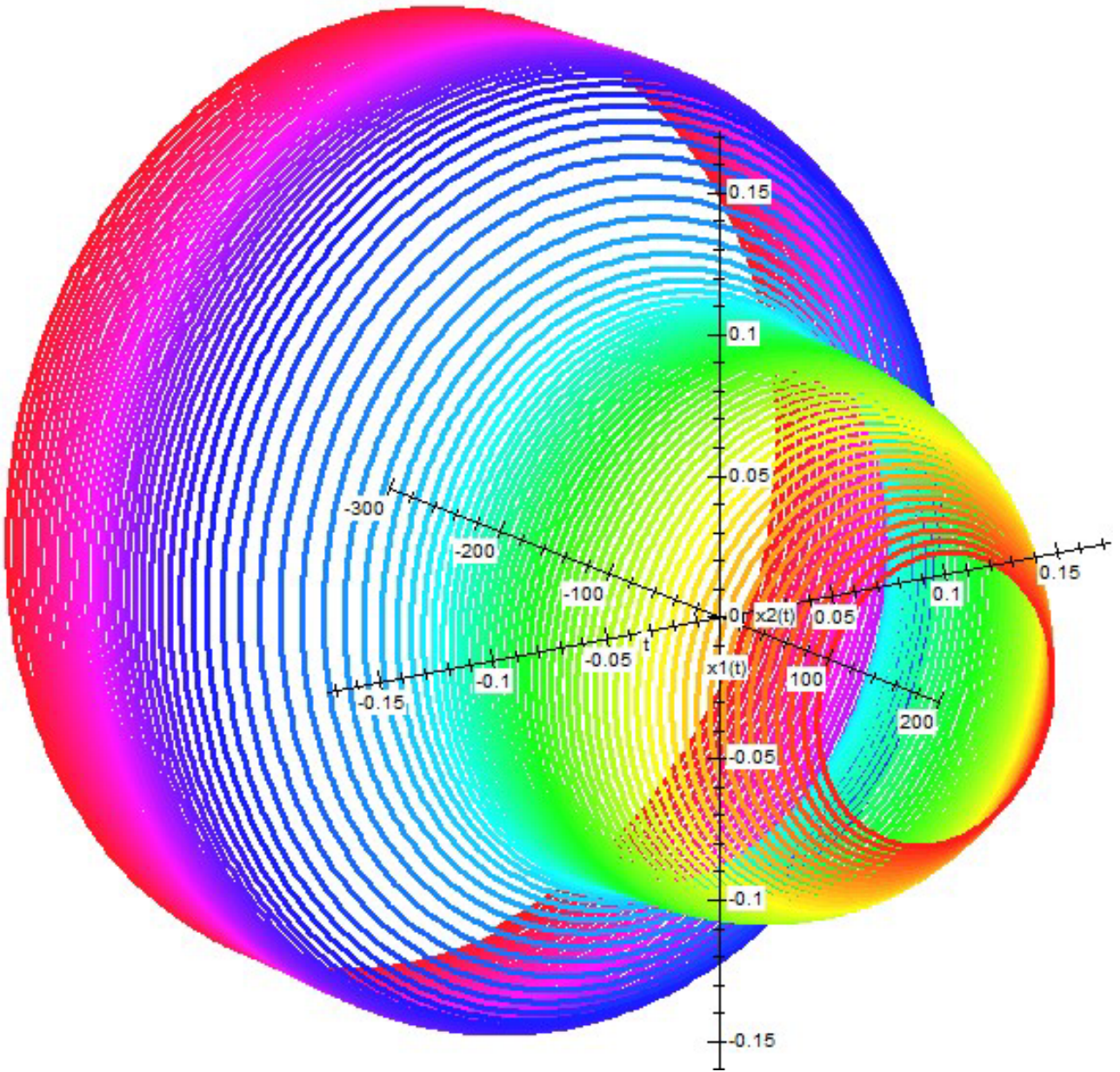


Рис. 1. Интегральные кривые системы (10) при $\mu = 0,01$.

удовлетворяющие условиям: $d_r(t, \alpha x, \beta \mu) = F_r(\alpha)G_r(\beta)d_r(t, x, \mu)$, $F_r(\alpha) = \text{diag}\{\alpha^{s_{r1}}, \dots, \alpha^{s_{rn}}\}$ и $G_r(\beta) = \text{diag}\{\beta^{k_{r1}}, \dots, \beta^{k_{rn}}\}$ — $n \times n$ -матрицы, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — произвольные числа, $s_{rj} \in \mathbb{N}$, $s_{rj} + k_{rj} > 1$, $j = \overline{1, n}$,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} G_r^{-1}(\beta)u_r(t, x, \beta \mu) \equiv 0_n, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_r^{-1}(\alpha)q_r(t, \alpha x, \mu) \equiv 0_n.$$

Замечание 4. Вектор-функции $d_r(t, x, \mu)$ из равенств (12) рассматриваются в качестве первых нелинейных приближений правой части системы (11), свойства которых призваны обеспечить наличие односторонних свойств устойчивости. При этом другие слагаемые имеют больший порядок малости либо при $\|x\| \rightarrow 0$, либо при $\|\mu\| \rightarrow 0$. Заметим, что в качестве вектор-функции $d_r(t, x, \mu)$ целесообразно рассматривать только те слагаемые правой части системы (11), которые не аннулируются при усреднении на периоде вдоль решений системы $\dot{x} = A(t)x$.

Рассуждая аналогично некритическому случаю, можно установить локальную структуру односторонних операторов монодромии

$$x((-1)^r, a, \mu) = (X_r + D_r(a, \mu))a + p_r(a, \mu) + \varphi_r(a, \mu), \quad r = 1, 2, \quad (13)$$

где

$$D_r(a, \mu)a = X((-1)^r \omega) \int_0^{(-1)^r \omega} X^{-1}(\tau) d_r(\tau, X(\tau)a, \mu) d\tau,$$

$D_r(a, \mu)$ — однородная $n \times n$ -матрица, $D_r(\alpha a, \beta \mu) = F_r(\alpha)G_r(\beta)D_r(a, \mu)$,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} G_r^{-1}(\beta)p_r(a, \beta \mu) \equiv 0_n, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_r^{-1}(\alpha)\varphi_r(\alpha a, \mu) \equiv 0_n.$$

Допустим, что существует значение $\mu_0 \neq 0_m$, при котором для любого достаточно малого $\gamma > 0$ имеют место неравенства

$$\|X_r + \gamma D_r(a, \mu_0)\| \leq 1 - \gamma b_r, \quad b_r > 0, \quad r = 1, 2. \quad (14)$$

Теорема 2. *Если выполнены условия (14), то нулевое решение системы (11)–(13) двусторонне μ -устойчиво.*

Доказательство. Установим устойчивость по параметру вправо, используя схему рассуждений из второй части доказательства теоремы 1. В равенстве (13) при $r = 2$ выберем $a = \alpha \lambda$, $\mu \in M = \{\mu\beta(\mu_0 + \gamma)\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}^m$ — малые параметры, $\|\lambda\| = 1$. Тогда правый оператор монодромии имеет вид

$$x(\omega, a, \mu) = (X_2 + \alpha^{-1}F_2(\alpha)G_2(\beta)(D_2(\lambda, \mu_0) + \tilde{D}_2(\lambda, \gamma)))a + \tilde{p}_2(\alpha, \beta, \lambda, \gamma) + \tilde{\varphi}_2(\alpha, \beta, \lambda, \gamma), \quad (15)$$

где $\tilde{p}_2(\alpha, \beta, \lambda, \gamma) = p_2(\alpha \lambda, \beta(\mu_0 + \gamma))$, $\tilde{\varphi}_2(\alpha, \beta, \lambda, \gamma) = \varphi_2(\alpha \lambda, \beta(\mu_0 + \gamma))$, $D_2(\lambda, \mu_0) + \tilde{D}_2(\lambda, \gamma) = D_2(\lambda, \mu_0 + \gamma)$, $\tilde{D}_2(\lambda, 0_m) = 0_{nn}$. Оценим норму произвольного значения оператора (15)

$$\begin{aligned} \|x(\omega, a, \mu)\| &\leq \|X_2 + \alpha^{-1}F_2(\alpha)G_2(\beta)D_2(\lambda, \mu_0)\|\alpha + \\ &+ \|F_2(\alpha)\| \|G_2(\beta)\| \|\tilde{D}_2(\lambda, \gamma)\| + \|\tilde{p}_2(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| + \|\tilde{\varphi}_2(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\|. \end{aligned} \quad (16)$$

Из оценки (14) следует, что при некотором $\bar{b}_2 \in (0, b_2]$ для достаточно малых α и β справедлива оценка

$$\|X_2 + \alpha^{-1}F_2(\alpha)G_2(\beta)D_2(\lambda, \mu_0)\| \leq 1 - \alpha^{-1}\|F_2(\alpha)\| \|G_2(\beta)\| \|D_2(\lambda, \mu_0)\| \bar{b}_2. \quad (17)$$

Выберем такое $\Delta > 0$, что

$$\|\tilde{D}_2(\lambda, \gamma)\| \leq \frac{\bar{b}_2}{3} \quad (18)$$

при $\|\gamma\| < \Delta$, $\|\lambda\| = 1$. Произвольно зафиксируем $\sigma > 0$. Так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|F_2(\alpha)\|^{-1} \|\tilde{\varphi}_2(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| \equiv 0,$$

то найдется $\delta > 0$, для которого

$$\|\tilde{\varphi}_2(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| \leq \frac{1}{3} \|F_2(\alpha)\| \|G_2(\beta)\| \bar{b}_2, \quad (19)$$

если $\alpha < \delta$, $\beta < \sigma$, $\|\gamma\| < \Delta$, $\|\lambda\| = 1$. Из условия

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \|G_2(\beta)\|^{-1} \|\tilde{p}_2(a, \beta \mu)\| \equiv 0$$

следует, что для известных δ , σ , Δ можно подобрать $\sigma_1 \in (0, \sigma]$ таким образом, чтобы при $\delta/2 \leq \alpha < \delta$, $\beta < \sigma_1$, $\|\gamma\| < \Delta$, $\|\lambda\| = 1$ было справедливо неравенство

$$\|\tilde{p}_2(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)\| \leq \frac{1}{3} \|F_2(\alpha)\| \|G_2(\beta)\| \bar{b}_2. \quad (20)$$

Итак, из оценок (16)–(20) следует, что

$$\|x(\omega, a, \mu)\| \leq \alpha < \delta \quad (21)$$

при $\delta/2 \leq \alpha < \delta$, $\beta < \sigma_1$, $\|\gamma\| < \Delta$, $\|\lambda\| = 1$. Если $\alpha < \delta/2$, $\beta < \sigma_1$, $\|\gamma\| < \Delta$, $\|\lambda\| = 1$, то без ограничения общности рассуждений справедливо неравенство

$$\|x(\omega, a, \mu)\| \leq 2\alpha < \delta. \quad (22)$$

Произвольно выберем $\varepsilon > 0$. Допустим, что $\delta_1 = \min\{\varepsilon, \delta\}$, $\delta_2 = \sigma_2(\|\mu\| + \Delta)$. Тогда для любых $a \in \mathbb{R}^n$: $0 < \|a\| < \delta_1$ и $\mu \in M$: $0 < \|\mu\| < \delta_2$ из условий (21), (22), $0 < \|a\| < \delta_1$, $\|\mu\| < \delta_2$ следует оценка $\|x(\omega, a, \mu)\| < \delta_1$. Итак, в силу замечания 2 нулевое решение системы (11)–(13) устойчиво по параметру право. Ясно, что доказательство факта устойчивости влево для нулевого решения проводится аналогично. Таким образом, теорема 2 доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В. В.* Устойчивость нулевого решения периодической системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2010. — 12, № 4. — С. 49–54.
2. *Абрамов В. В.* Двусторонняя устойчивость малого периодического решения // Вестн. РАЕН. — 2014. — 14, № 5. — С. 6–9.
3. *Абрамов В. В.* К задаче об устойчивости малого периодического решения // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 148. — С. 3–9.
4. *Абрамов В. В., Бельман С. А., Лискина Е. Ю.* Устойчивость по параметру при постоянно действующих возмущениях // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 168. — С. 8–13.
5. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости. — М.: Наука, 1966.
7. *Хапаев М. М.* Усреднение и устойчивость движения. — М.: Наука, 1986.

Абрамов Владимир Викторович
 Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
 E-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 12–28
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-12-28

УДК 514.763

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ
ПЯТИМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ.
V. АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ И АФФИННЫХ
ДВИЖЕНИЙ h -ПРОСТРАНСТВ H_{221} ТИПА $\{221\}$

© 2022 г. А. В. АМИНОВА, Д. Р. ХАКИМОВ

Аннотация. Работа посвящена имеющей многочисленные геометрические и физические приложения проблеме исследования многомерных псевдоримановых многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Настоящая статья является завершающей частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — 212. — С. 10–29. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — 213. — С. 10–37. Третья часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — 214. — С. 3–20. Четвертая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — 215. — С. 18–31.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h -пространство, система дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнение Киллинга, проективная алгебра Ли.

LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE MOTIONS
OF FIVE-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES.
V. LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE AND AFFINE MOTIONS
OF h -SPACES H_{221} OF TYPE $\{221\}$

© 2022 A. V. AMINOVA, D. R. KHAKIMOV

ABSTRACT. This work is devoted to the problem of studying multidimensional pseudo-Riemannian manifolds that admit Lie algebras of infinitesimal projective (in particular, affine) transformations, wider than Lie algebras of infinitesimal homotheties. Such manifolds have numerous geometric and physical applications. This paper is the final part of the work. The first part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — 212. — P. 10–29. The second part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — xxx. — P. 10–37. The third part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — xxx. — P. 3–20. The fourth part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — xxx. — P. 18–31.

Keywords and phrases: differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h -space, system of partial differential equations, nonhomothetical projective motion, Killing equation, projective Lie algebra.

AMS Subject Classification: 53Z05

5. АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ И АФФИННЫХ ДВИЖЕНИЙ
 h -ПРОСТРАНСТВ H_{221} ТИПА $\{221\}$

Для того чтобы инфинитезимальное проективное преобразование $x^{i'} = x^i + \xi^i \delta t$ было проективным движением псевдориманова пространства (M^5, g) , необходимо и достаточно выполнение уравнения Эйзенхарта (??):

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}$$

и обобщенного уравнения Киллинга (??):

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij},$$

где φ — определяющая функция проективного движения. Если она постоянна, то проективное движение является аффинным. При $h_{ij} = \nu g_{ij}$ аффинное движение сводится к гомотетии, а при $h_{ij} = 0$ является изометрическим движением.

Согласно теореме ?? в канонической карте (x, U) метрика g h -пространства H_{221} , билинейная форма h типа $\{221\}$ и функция φ имеют вид

$$\begin{aligned} g = & e_1(f_2 - f_1)^2(f_3 - f_1) \left(2Adx^1 dx^2 - A^2 \left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1} \right) (dx^2)^2 \right) + \\ & + e_2(f_1 - f_2)^2(f_3 - f_2) \left(2Bdx^3 dx^4 - B^2 \left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2} \right) (dx^4)^2 \right) + \\ & + e_3(f_1 - f_3)^2(f_2 - f_3)^2(dx^5)^2, \quad (5.1) \end{aligned}$$

$$h = 2\varphi g +$$

$$\begin{aligned} & + e_1(f_2 - f_1)^2(f_3 - f_1) \left(f_1 \left(2Adx^1 dx^2 - A^2 \left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1} \right) (dx^2)^2 \right) + A^2(dx^2)^2 \right) + \\ & + e_2(f_1 - f_2)^2(f_3 - f_2) \left(f_2 \left(2Bdx^3 dx^4 - B^2 \left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2} \right) (dx^4)^2 \right) + B^2(dx^4)^2 \right) + \\ & + e_3(f_1 - f_3)^2(f_2 - f_3)^2 f_3 (dx^5)^2, \quad (5.2) \end{aligned}$$

$$\varphi = f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3,$$

где

$$\begin{aligned} f_1 = & \varepsilon_1 x^2 + (1 - \varepsilon_1)c_1, \quad f_2 = \varepsilon_2 x^4 + (1 - \varepsilon_2)c_2, \quad f_3 = f_3(x^5), \\ A = & \varepsilon_1 (x^1 + \tau(x^2)) + 1 - \varepsilon_1, \quad B = \varepsilon_2 (x^3 + \omega(x^4)) + 1 - \varepsilon_2; \end{aligned}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ принимают независимо значения 0 или 1, $e_1, e_2, e_3 = \pm 1$, c_1 и c_2 — постоянные, $\tau = \tau(x^2)$ — функция x^2 , $\omega = \omega(x^4)$ — функция x^4 .

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ будем обозначать h -пространство H_{221} символом $H_{221,1}$, при $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$ — символом $H_{221,2}$, а при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ — символом $H_{221,3}$. Случай $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1$ приводится к случаю $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$ переобозначением переменных и далее не рассматривается. Таким образом, всякое h -пространство H_{221} является либо $H_{221,1}$, либо $H_{221,2}$, либо, наконец, $H_{221,3}$.

В случае постоянной функции $f_3 = p$ будем пользоваться заменой $f_i \rightarrow f_i + p$ и сдвигом $x^2 \rightarrow x^2 + \text{const}$, $x^4 \rightarrow x^4 + \text{const}$, не меняющих вида метрики (5.1), для того чтобы привести f_3 к нулю: $f_3 = 0$, что далее предполагается выполненным.

Для получения максимальной проективной алгебры Ли в h -пространстве H_{221} нужно найти общее решение уравнения Эйзенхарта. Это было сделано в разделе ??, где установлены необходимые и достаточные условия существования негомотетического проективного движения (любого допустимого типа) в H_{221} (теорема ??). Показано, что общее решение уравнения Эйзенхарта имеет вид $c_1 h + 2c_2 g$, где g и h определены формулами (5.1), (5.2), а c_1 и c_2 — произвольные постоянные; как следствие доказано, что если h -пространство типа $\{221\}$ непостоянной кривизны допускает r -мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r , то эта алгебра содержит

$(r - 1)$ -мерную гомотетическую подалгебру H_{r-1} ; аффинная подалгебра сводится к гомотетиям или изометриям (теоремы ?? и ??).

В данном разделе будут определены все h -пространства H_{221} непостоянной кривизны, допускающие негомотетические проективные движения, и сами эти движения. Решение этой задачи сводится к интегрированию обобщенных уравнений Киллинга

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = a_1 h_{ij} + 2a_2 g_{ij}, \quad (5.3)$$

где a_1, a_2 — постоянные, и существенно упрощается благодаря использованию условий интегрируемости (5.9) уравнений (5.3), включающих тензор кривизны, и теоремам 5.1 и 5.2.

В разделе 5.1 устанавливаются необходимые и достаточные условия в канонических (натуральных) координатах, при которых H_{221} является пространством постоянной кривизны (теорема 5.1), что позволяет исключить из рассмотрения пространства постоянной кривизны S^5 , допускающие максимальную 35-мерную проективную алгебру Ли, строение которой известно (см. [13, гл. 4]).

В разделе 5.2 формулируются общие свойства проективных векторных полей в пространствах H_{221} (теорема 5.2).

Непосредственному интегрированию обобщенных уравнений Киллинга (5.3) в пространствах H_{221} непостоянной кривизны посвящен раздел 5.3, а в 5.4 исследуются гомотетии и изометрии указанных пространств.

Классификация h -пространств H_{221} непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований дается в 5.5 (теорема 5.3), где перечислены все проективно-подвижные метрики и указываются размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных алгебр Ли.

5.1. Условия постоянства кривизны h -пространств типа {221} в канонической карте.

Теорема 5.1. *H -пространство H_{221} типа {221} является пространством постоянной кривизны, если и только если выполнены следующие условия:*

(i) для h -пространства $H_{221,1}$ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$):

$$f'_3 = \tau' = \omega' = 0; \quad (5.4)$$

(ii) для h -пространства $H_{221,2}$ ($\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$):

$$f'_3 = \tau' = 0; \quad (5.5)$$

(iii) для h -пространства $H_{221,3}$ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$):

$$f'_3 = 0. \quad (5.6)$$

При этом $K = 0$, т.е. всякое h -пространство H_{221} типа {221} постоянной кривизны является плоским.

Доказательство. Необходимое и достаточное условие постоянства кривизны псевдориманова пространства с метрикой g и тензором римановой кривизны R^i_{jkl} определяется равенством

$$R^i_{jkl} = K (\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}), \quad (5.7)$$

где K — постоянная кривизна, в частности, $R^1_{324} = R^3_{124} = 0$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что из коэффициентов связности h -метрики (5.1) в канонических координатах не равны нулю только следующие:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{\varepsilon_1}{A}, & \Gamma^1_{12} &= \varepsilon_1 \frac{3f_1 - f_2 - 2f_3}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)}, & \Gamma^1_{14} &= \frac{\varepsilon_2}{f_2 - f_1}, & \Gamma^1_{15} &= \frac{1}{2} \frac{f'_3}{f_3 - f_1}, \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{\varepsilon_1 A (3f_1 - 2f_2 - f_3)}{(f_1 - f_3)(f_2 - f_1)^2}, & \Gamma^1_{24} &= \frac{\varepsilon_2 A}{(f_2 - f_1)^2}, & \Gamma^1_{25} &= \frac{1}{2} \frac{f'_3 A}{(f_3 - f_1)^2}, \\ \Gamma^1_{34} &= \frac{e_1 e_2 \varepsilon_1 B (f_2 - f_3)}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_1) A}, & \Gamma^1_{44} &= \frac{e_1 e_2 \varepsilon_1 B^2 (f_1 - 2f_2 + f_3)}{(f_2 - f_1)^2 (f_3 - f_1) A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{55}^1 &= \frac{e_1 e_3 \varepsilon_1 (f_2 - f_3)^2}{(f_2 - f_1)^2 A}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\varepsilon_1 \tau'}{A}, & \Gamma_{24}^2 &= \frac{\varepsilon_2}{f_2 - f_1}, & \Gamma_{25}^2 &= \frac{1}{2} \frac{f_3'}{f_3 - f_1}, \\
\Gamma_{12}^3 &= \frac{e_1 e_2 \varepsilon_2 A (f_1 - f_3)}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_2) B}, & \Gamma_{22}^3 &= \frac{e_1 e_2 \varepsilon_2 A^2 (2f_1 - f_2 - f_3)}{(f_2 - f_1)^2 (f_2 - f_3) B}, & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\varepsilon_1}{f_1 - f_2}, \\
\Gamma_{24}^3 &= \frac{\varepsilon_1 B}{(f_2 - f_1)^2}, & \Gamma_{33}^3 &= \frac{\varepsilon_2}{B}, & \Gamma_{34}^3 &= \frac{\varepsilon_2 (f_1 - 3f_2 + 2f_3)}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_2)}, & \Gamma_{35}^3 &= \frac{1}{2} \frac{f_3'}{f_3 - f_2}, \\
\Gamma_{44}^3 &= \frac{\varepsilon_2 B (2f_1 - 3f_2 + f_3)}{(f_3 - f_2)(f_2 - f_1)^2}, & \Gamma_{45}^3 &= \frac{1}{2} \frac{f_3' B}{(f_3 - f_2)^2}, & \Gamma_{55}^3 &= \frac{e_2 e_3 \varepsilon_2 (f_1 - f_3)^2}{(f_2 - f_1)^2 B}, \\
\Gamma_{24}^4 &= \frac{\varepsilon_1}{f_1 - f_2}, & \Gamma_{44}^4 &= \frac{\varepsilon_2 \omega'}{B}, & \Gamma_{45}^4 &= \frac{1}{2} \frac{f_3'}{f_3 - f_2}, & \Gamma_{12}^5 &= -\frac{1}{2} \frac{e_1 e_3 f_3' A (f_1 - f_2)^2}{(f_3 - f_2)^2 (f_3 - f_1)^2}, \\
\Gamma_{22}^5 &= \frac{e_1 e_3 f_3' A^2 (f_2 - f_1)}{(f_3 - f_2)^2 (f_3 - f_1)^2}, & \Gamma_{25}^5 &= \frac{\varepsilon_1}{f_1 - f_3}, & \Gamma_{34}^5 &= -\frac{1}{2} \frac{e_2 e_3 f_3' B (f_1 - f_2)^2}{(f_3 - f_2)^2 (f_3 - f_1)^2}, \\
\Gamma_{44}^5 &= \frac{e_2 e_3 f_3' B^2 (f_1 - f_2)}{(f_3 - f_2)^2 (f_3 - f_1)^2}, & \Gamma_{45}^5 &= \frac{\varepsilon_2}{f_2 - f_3}, & \Gamma_{55}^5 &= \frac{f_3' (f_1 + f_2 - 2f_3)}{(f_1 - f_3)(f_3 - f_2)},
\end{aligned}$$

а не равные нулю компоненты тензора кривизны определяются равенствами:

$$\begin{aligned}
R_{112}^1 &= -R_{212}^2 = \frac{\varepsilon_1 \tau'}{A^2} + \frac{e_1 e_3 f_3'^2 A (f_1 - f_2)^2}{4(f_1 - f_3)^3 (f_2 - f_3)^2}, \\
R_{212}^1 &= \frac{(3f_1 - f_2 - 2f_3)}{(f_1 - f_3)} \left(\frac{\varepsilon_1 \tau'}{(f_1 - f_2) A} + \frac{e_1 e_3 f_3'^2 (f_1 - f_2) A^2}{4(f_1 - f_3)^3 (f_2 - f_3)^2} \right), \\
R_{314}^1 &= R_{413}^1 = R_{324}^2 = R_{423}^2 = \frac{e_2 e_3 f_3'^2 B (f_2 - f_1)^2}{4(f_1 - f_3)^3 (f_3 - f_2)^2}, \\
R_{324}^1 &= R_{423}^1 = \frac{e_2 e_3 f_3'^2 A B (f_1 - f_2)^2}{4(f_1 - f_3)^4 (f_2 - f_3)^2} - \frac{\varepsilon_1 \tau' e_1 e_2 (f_2 - f_3) B}{(f_1 - f_2)(f_1 - f_3) A^2}, \\
R_{414}^1 &= R_{424}^2 = \frac{\varepsilon_2 \omega'}{(f_2 - f_1) B} + \frac{e_2 e_3 f_3'^2 B^2 (f_2 - f_1)}{2(f_1 - f_3)^3 (f_2 - f_3)^2}, \\
R_{424}^1 &= \frac{\varepsilon_2 \omega' A}{B (f_1 - f_2)^2} + \frac{e_1 e_2 \varepsilon_1 \tau' (f_1 - 2f_2 - f_3) B^2}{(f_1 - f_2)^2 (f_1 - f_3) A^2} + \frac{e_2 e_3 f_3'^2 B^2 A (f_1 - f_2)}{2(f_1 - f_3)^4 (f_2 - f_3)^2}, \\
R_{515}^1 &= R_{525}^2 = \frac{f_3''}{2(f_1 - f_3)} + \frac{f_3'^2 (2f_1 + 3f_2 - 5f_3)}{4(f_1 - f_3)^2 (f_2 - f_3)}, \\
R_{525}^1 &= -\frac{f_3'' A}{2(f_1 - f_3)^2} - \frac{f_3'^2 A (2f_1 - 2f_2 - 3f_3)}{2(f_2 - f_3)(f_1 - f_3)^3} - \frac{e_1 e_3 \varepsilon_1 \tau' (f_2 - f_3)^2}{(f_1 - f_2)^2 A^2}, \\
R_{123}^3 &= R_{213}^3 = R_{124}^4 = R_{214}^4 = \frac{e_1 e_3 f_3'^2 A (f_1 - f_2)^2}{4(f_3 - f_2)^3 (f_3 - f_1)^2}, \\
R_{124}^3 &= R_{214}^3 = \frac{e_1 e_3 f_3'^2 A B (f_1 - f_2)^2}{4(f_1 - f_3)^2 (f_2 - f_3)^4} + \frac{e_1 e_2 \varepsilon_2 \omega' (f_1 - f_3) A}{(f_1 - f_2)(f_2 - f_3) B^2}, \\
R_{223}^3 &= -R_{224}^4 = -\frac{e_1 e_2 \varepsilon_1 \tau'}{(f_1 - f_2) A} - \frac{e_1 e_3 f_3'^2 (f_1 - f_2) A^2}{2(f_1 - f_3)^2 (f_2 - f_3)^3}, \\
R_{224}^3 &= -\frac{\varepsilon_1 \tau' B}{(f_1 - f_2)^2 A} + \frac{e_1 e_2 \varepsilon_2 \omega' (2f_1 - f_2 - f_3) A^2}{(f_1 - f_2)^2 (f_2 - f_3) B^2} - \frac{e_2 e_3 f_3'^2 A^2 B (f_1 - f_2)}{2(f_1 - f_3)^2 (f_2 - f_3)^4}, \\
R_{334}^3 &= -R_{434}^4 = \frac{\varepsilon_2 \omega'}{B^2} + \frac{e_2 e_3 f_3'^2 B (f_1 - f_2)^2}{4(f_2 - f_3)^3 (f_1 - f_3)^2}, \\
R_{434}^3 &= \frac{\varepsilon_2 \omega' (f_1 - 3f_2 + 2f_3)}{B (f_1 - f_2)(f_2 - f_3)} + \frac{e_2 e_3 f_3'^2 B^2 (f_1 - 3f_2 + 2f_3)(f_1 - f_2)}{4(f_1 - f_3)^2 (f_2 - f_3)^4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{535}^3 &= R_{545}^4 = \frac{f_3''}{2(f_2 - f_3)} + \frac{f_3'^2(3f_1 + 2f_2 - 5f_3)}{4(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)^2}, \\
R_{545}^3 &= -\frac{f_3''B}{2(f_2 - f_3)^2} - \frac{e_2e_3\varepsilon_2\omega'(f_1 - f_3)^2}{B(f_1 - f_2)^2} + \frac{f_3'^2B(2f_1 + f_2 - 3f_3)}{2(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)^3}, \\
R_{125}^5 &= R_{215}^5 = \frac{f_3''Ae_1e_3(f_1 - f_2)^2}{2(f_2 - f_3)^2(f_1 - f_3)^2} + \frac{f_3'^2e_3A(f_1 - f_2)^2(2f_1 + 3f_2 - 5f_3)}{4(f_1 - f_3)^3(f_2 - f_3)^3}, \\
R_{225}^5 &= \frac{f_3''A^2e_1e_3(f_1 - f_2)}{(f_2 - f_3)^2(f_1 - f_3)^2} - \frac{\varepsilon_1\tau'}{A(f_1 - f_3)} + \frac{f_3'^2e_1e_3A^2(f_1 - f_2)(f_2 - 5f_3 + 4f_1)(f_1 + f_2 - 2f_3)}{4(f_1 - f_3)^4(f_2 - f_3)^3}, \\
R_{345}^5 &= R_{435}^5 = \frac{f_3''Be_2e_3(f_1 - f_2)^2}{2(f_2 - f_3)^2(f_1 - f_3)^2} + \frac{e_2e_3f_3'^2B(f_1 - f_2)^2(3f_1 + 2f_2 - 5f_3)}{4(f_1 - f_3)^3(f_2 - f_3)^3}, \\
R_{445}^5 &= \frac{f_3''B^2e_2e_3(f_2 - f_1)}{(f_2 - f_3)^2(f_1 - f_3)^2} - \frac{\varepsilon_2\omega'}{(f_2 - f_3)B} - \frac{e_2e_3f_3'^2(f_1 + f_2 - 2f_3)(4f_2 - 5f_3 + f_1)(f_1 - f_2)B^2}{4(f_1 - f_3)^3(f_2 - f_3)^4}.
\end{aligned}$$

Из условия $R_{324}^1 = 0$ для h -пространств $H_{221,1}$ и $H_{221,2}$ постоянной кривизны имеем

$$e_1(x^2 - x^4)^3(x^1 + \tau(x^2))^3 f_3'^2 - 4e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3 \tau' = 0;$$

отсюда, дифференцируя по x^1 , найдем $f_3' = \tau' = 0$. При этом все компоненты тензора кривизны h -пространства $H_{221,2}$ постоянной кривизны обращаются в нуль, что доказывает теорему в данном случае.

Приравняв нулю R_{124}^3 , для h -пространства $H_{221,1}$ постоянной кривизны получим

$$e_2(x^2 - x^4)^3(x^3 + \omega(x^4))^3 f_3'^2 + 4e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3 \omega' = 0;$$

отсюда ввиду равенства $f_3' = 0$ следует $\omega' = 0$. Это доказывает необходимость условия (5.4); его достаточность легко проверяется, при этом тензор кривизны обращается в нуль, т.е. $K = 0$.

Наконец, для h -пространства $H_{221,3}$ постоянной кривизны из условия $R_{324}^1 = 0$ следует $f_3' = 0$, после этого все компоненты тензора кривизны обращаются в нуль. \square

5.2. Свойства проективных векторных полей в h -пространствах типа {221}.

Теорема 5.2. *Если инфинитезимальное преобразование $x^{i'} = x^i + \xi^i \delta t$ является проективным движением в h -пространстве H_{221} типа {221} непостоянной кривизны, то в канонической карте компоненты*

$$\xi^1 = \xi^1(x^1, x^2), \quad \xi^2 = \xi^2(x^2), \quad \xi^3 = \xi^3(x^3, x^4), \quad \xi^4 = \xi^4(x^4), \quad \xi^5 = \xi^5(x^5)$$

векторного поля ξ^i , задающего проективное движение, зависят только от указанных переменных.

Доказательство. Рассмотрим в канонической карте (x, U) обобщенные уравнения Киллинга (5.3):

$$L_X g_{ij} \equiv \xi^s \partial_s g_{ij} + g_{is} \partial_j \xi^s + g_{sj} \partial_i \xi^s = a_1 h_{ij} + 2a_2 g_{ij} \quad (5.8)$$

вместе с условиями их интегрируемости (см. [13, с. 230]):

$$L_X R_{jkl}^i \equiv \xi^s \partial_s R_{jkl}^i - R_{jkl}^s \partial_s \xi^i + R_{skl}^i \partial_j \xi^s + R_{jsl}^i \partial_k \xi^s + R_{jks}^i \partial_l \xi^s = \delta_l^i \varphi_{,jk} - \delta_k^i \varphi_{,jl}, \quad (5.9)$$

где R_{jkl}^i — компоненты тензора кривизны метрики g_{ij} , а φ — определяющая функция проективного движения $X = \xi^s \partial_s$.

Из (5.8) при $(ij) = (11)$, (33) найдем $\partial_1 \xi^2 = \partial_3 \xi^4 = 0$.

Рассмотрим h -пространства $H_{221,1}$. Используя выражение для компонент тензора кривизны, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, из (5.9) при $(ijkl) = (2213)$, (2334) получим

$$(R_{212}^2 - R_{213}^3) \partial_3 \xi^2 = (R_{324}^2 - R_{334}^3) \partial_3 \xi^2 = 0.$$

Если $\partial_3 \xi^2 \neq 0$, то выполняются равенства

$$\begin{aligned}
e_1(x^1 + \tau(x^2))^3(x^2 - x^4)^3 f_3'^2 - 4e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3 \tau'(x^2) &= 0, \\
e_2(x^2 - x^4)^3(x^3 + \omega(x^4))^3 f_3'^2 + 4e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3 \omega'(x^4) &= 0.
\end{aligned} \quad (5.10)$$

Дифференцируя первое равенство по x^1 , получим $f'_3 = 0$, после этого из (5.10) найдем $\tau' = \omega' = 0$, и $H_{221,1}$ по теореме 5.1 имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению. Поэтому $\partial_3 \xi^2 = 0$, и из (5.8) при $(ij) = (13)$ выводим $\partial_1 \xi^4 = 0$.

Учитывая в каждом случае найденные ранее соотношения, из (5.9) при $(ijkl) = (2214), (2434)$ найдем

$$(R_{212}^2 - R_{214}^4) \partial_4 \xi^2 = (R_{443}^4 - R_{423}^2) \partial_4 \xi^2 = 0;$$

отсюда при $\partial_4 \xi^2 \neq 0$ следует (5.10), поэтому $\partial_4 \xi^2 = 0$, и из (5.8) при $(ij) = (14)$ получим $\partial_1 \xi^3 = 0$.

Уравнение (5.9) при $(ijkl) = (2215), (2445)$ дает

$$(R_{212}^2 - R_{215}^5) \partial_5 \xi^2 = (R_{442}^2 - R_{445}^5) \partial_5 \xi^2 = 0,$$

что при $\partial_5 \xi^2 \neq 0$ влечет равенства

$$\begin{aligned} e_1(x^1 + \tau(x^2))^3(x^2 - x^4)^2((x^2 - f_3)(x^4 - f_3)f_3'' + \\ + (x^2 + 2x^4 - 3f_3)f_3'^2) + 2e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3\tau'(x^2) = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} e_2(x^3 + \omega(x^4))^3(x^2 - x^4)^2(4(x^2 - f_3)(x^4 - f_3)^2f_3'' + \\ + (3x^4 + x^2 - 4f_3)(2x^4 + x^2 - 3f_3)f_3'^2) + 4e_3(x^2 - f_3)^4(x^4 - f_3)^3\omega'(x^4) = 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя первое равенство трижды по x^1 , затем по x^2 и x^4 , найдем сначала $f'_3 = 0$, затем $\tau' = 0$ и, из второго равенства, $\omega' = 0$, т. е. выполняется (5.4), и $H_{221,1}$ имеет постоянную кривизну. Поэтому $\partial_5 \xi^2 = 0$, и из (5.8) с $(ij) = (15)$, $\partial_1 \xi^5 = 0$.

Из (5.9) при $(ijkl) = (1125), (1445)$ получим

$$(R_{121}^1 - R_{125}^5) \partial_5 \xi^1 = (R_{441}^1 - R_{445}^5) \partial_5 \xi^1 = 0;$$

отсюда при $\partial_5 \xi^1 \neq 0$ следует (5.11), поэтому $\partial_5 \xi^1 = 0$, и, в силу (5.8) с $(ij) = (25)$, $\partial_2 \xi^5 = 0$.

Записав уравнение (5.9) при $(ijkl) = (1123), (1334)$, получим

$$(R_{121}^1 - R_{123}^3) \partial_3 \xi^1 = (R_{314}^1 - R_{334}^3) \partial_3 \xi^1 = 0.$$

Если $\partial_3 \xi^1 \neq 0$, то выполняется (5.10), что, как мы видели, означает постоянство кривизны пространства $H_{221,1}$. Поэтому $\partial_3 \xi^1 = 0$, и из (5.8) с $(ij) = (23)$ получаем $\partial_2 \xi^4 = 0$.

Положив $(ijkl) = (1124), (1434)$ в (5.9), будем иметь

$$(R_{121}^1 - R_{124}^4) \partial_4 \xi^1 = (R_{431}^1 - R_{434}^4) \partial_4 \xi^1 = 0.$$

При $\partial_4 \xi^1 \neq 0$ отсюда вытекает (5.10); следовательно, $\partial_4 \xi^1 = 0$. После этого из (5.8) при $(ij) = (24)$ находим $\partial_2 \xi^3 = 0$.

Уравнение (5.9) при $(ijkl) = (4125), (4225), (4435)$ дает

$$(R_{124}^4 - R_{125}^5) \partial_5 \xi^4 = (R_{224}^4 - R_{225}^5) \partial_5 \xi^4 = (R_{434}^4 - R_{435}^5) \partial_5 \xi^4 = 0.$$

Отсюда при $\partial_5 \xi^4 \neq 0$ найдем

$$2(x^2 - f_3)(x^4 - f_3)f_3'' + 3(x^2 + x^4 - 2f_3)f_3'^2 = 0, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} e_1(x^1 + \tau(x^2))^3(x^2 - x^4)^2(4(x^2 - f_3)^2(x^4 - f_3)f_3'' + \\ + (x^4 + 3x^2 - 4f_3)(x^4 + 2x^2 - 3f_3)f_3'^2) + 4e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^4\tau'(x^2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2(x^2 - x^4)^2(x^3 + \omega(x^4))^3((x^2 - f_3)(x^4 - f_3)f_3'' + \\ + (x^4 + 2x^2 - 3f_3)f_3'^2) + 2e_3(x^2 - f_3)^3(x^4 - f_3)^3\omega'(x^4) = 0. \end{aligned}$$

Из первого равенства выводим $f'_3 = 0$; тогда, в силу второго и третьего равенств, $\tau' = \omega' = 0$, и $H_{221,1}$ имеет постоянную кривизну. Поэтому $\partial_5 \xi^4 = 0$, и из (5.8) при $(ij) = (35)$ получим $\partial_3 \xi^5 = 0$.

Из (5.9) при $(ijkl) = (3125), (3225), (3345)$ имеем

$$(R_{123}^3 - R_{125}^5) \partial_5 \xi^3 = (R_{223}^3 - R_{225}^5) \partial_5 \xi^3 = (R_{343}^3 - R_{345}^5) \partial_5 \xi^3 = 0.$$

При $\partial_5 \xi^3 \neq 0$ отсюда следуют равенства (5.12), поэтому $\partial_5 \xi^3 = 0$ и уравнение (5.8) при $(ij) = (45)$ дает $\partial_4 \xi^5 = 0$, что завершает доказательство теоремы 5.2 для h -пространства $H_{221,1}$.

Для h -пространств $H_{221,2}$ и $H_{221,3}$ теорема 5.2 доказывается аналогично. \square

5.3. Интегрирование обобщенных уравнений Киллинга в h -пространствах типа {221}.

5.3.1. Ввиду теоремы 5.2 часть уравнений Киллинга (5.8) обращаются в тождество, остальные, при $(ij) = (12), (22), (34), (44), (55)$, приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \partial_1 \xi^1 + \frac{d\xi^2}{dx^2} + \frac{\varepsilon_1}{A} \xi^1 + \varepsilon_1 \left(\frac{\tau'}{A} - \frac{2}{f_2 - f_1} - \frac{1}{f_3 - f_1} \right) \xi^2 + \\ + \frac{2\varepsilon_2}{f_2 - f_1} \xi^4 + \frac{f'_3}{f_3 - f_1} \xi^5 = a_1(3f_1 + 2f_2 + f_3) + 2a_2, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 \xi^1 - A \left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1} \right) \frac{d\xi^2}{dx^2} - \varepsilon_1 \left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1} \right) \xi^1 + \\ + \varepsilon_1 \left(A \left(\frac{1}{(f_2 - f_1)^2} + \frac{2}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)} \right) - \left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1} \right) \tau' \right) \xi^2 - \\ - \varepsilon_2 A \left(\frac{1}{(f_2 - f_1)^2} + \frac{1}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)} \right) \xi^4 - \frac{Af'_3}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)} \xi^5 = \\ = \frac{1}{2} a_1 A \left(1 - (3f_1 + 2f_2 + f_3) \left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1} \right) \right) - a_2 A \left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1} \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \partial_3 \xi^3 + \frac{d\xi^4}{dx^4} + \frac{2\varepsilon_1}{f_1 - f_2} \xi^2 + \frac{\varepsilon_2}{B} \xi^3 + \varepsilon_2 \left(\frac{\omega'}{B} - \frac{2}{f_1 - f_2} - \frac{1}{f_3 - f_2} \right) \xi^4 + \frac{f'_3}{f_3 - f_2} \xi^5 = \\ = a_1(2f_1 + 3f_2 + f_3) + 2a_2, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_4 \xi^3 - B \left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2} \right) \frac{d\xi^4}{dx^4} - \varepsilon_1 B \left(\frac{1}{(f_1 - f_2)^2} + \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)} \right) \xi^2 - \\ - \varepsilon_2 \left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2} \right) \xi^3 + \varepsilon_2 \left(B \left(\frac{1}{(f_1 - f_2)^2} + \frac{2}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2} \right) \omega' \right) \xi^4 - \frac{Bf'_3}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)} \xi^5 - \\ = \frac{1}{2} a_1 B \left(1 - (2f_1 + 3f_2 + f_3) \left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2} \right) \right) - a_2 B \left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2} \right), \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\frac{d\xi^5}{dx^5} + \frac{\varepsilon_1}{f_1 - f_3} \xi^2 + \frac{\varepsilon_2}{f_2 - f_3} \xi^4 - \left(\frac{f'_3}{f_1 - f_3} + \frac{f'_3}{f_2 - f_3} \right) \xi^5 = a_1(f_1 + f_2 + f_3) + a_2. \quad (5.17)$$

Используя теорему 5.2, проинтегрируем уравнения Киллинга для h -пространств $H_{221,1}$, положив $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Дифференцируя уравнение (5.13) по x^4 , после несложных преобразований получим равенство

$$a_1(x^4 - x^2)^2 - \xi^2 + \xi^4 - (\xi^4)'(x^4 - x^2) = 0; \quad (5.18)$$

взяв производную по x^4 и затем по x^2 , найдем $\xi^{4''} = 2a_1$, откуда следует

$$\xi^4 = a_1(x^4)^2 + a_3x^4 + a_4, \quad (5.19)$$

и из (5.18) получаем

$$\xi^2 = a_1(x^2)^2 + a_3x^2 + a_4, \quad (5.20)$$

где a_3, a_4 — постоянные.

Возьмем производную по x^5 от (5.13), умножим на $(f_3 - f_1)^2$ и, выписывая коэффициенты при первой и нулевой степенях переменной x^2 , получим сначала

$$f_3' \frac{d\xi^5}{dx^5} + f_3'' \xi^5 = (2a_1 f_3 + a_3) f_3',$$

затем

$$\xi^5 f_3' = a_1 f_3^2 + a_3 f_3 + a_4. \quad (5.21)$$

После этого из (5.17) следует уравнение

$$\frac{d\xi^5}{dx^5} = -a_1 f_3 + a_2 - 2a_3. \quad (5.22)$$

Из (5.21) и (5.22) при $f_3' \neq 0$ имеем

$$\frac{f_3''}{f_3'^2} = \frac{3a_1 f_3 - a_2 + 3a_3}{a_1 f_3^2 + a_3 f_3 + a_4}; \quad (5.23)$$

при $f_3' = 0$, полагая $f_3 = 0$ (см. замечание выше), получим $a_4 = 0$.

Дифференцируя (5.14) дважды по x^1 , найдем

$$\partial_{112}\xi^1 - \left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1} \right) \partial_{11}\xi^1 = 0; \quad (5.24)$$

отсюда дифференцированием по x^4 выводим $\partial_{11}\xi^1 = 0$. Положим $\xi^1 = \mu(x^2)A + \nu(x^2)$; подставив это в уравнение (5.13), найдем функции $\mu(x^2)$ и $\nu(x^2)$; в итоге

$$\xi^1 = -(a_1 x^2 - a_2 + 2a_3)(x^1 + \tau(x^2)) - \xi^2 \tau'. \quad (5.25)$$

Так же из (5.15), (5.16) имеем

$$\xi^3 = -(a_1 x^4 - a_2 + 2a_3)(x^3 + \omega(x^4)) - \xi^4 \omega'. \quad (5.26)$$

Если внести найденные выражения в (5.14) и (5.16), то получим уравнения

$$(a_1(x^2)^2 + a_3 x^2 + a_4) \tau'' + (3a_1 x^2 - a_2 + 3a_3) \tau' = 0, \quad (5.27)$$

$$(a_1(x^4)^2 + a_3 x^4 + a_4) \omega'' + (3a_1 x^4 - a_2 + 3a_3) \omega' = 0, \quad (5.28)$$

где $a_4 = 0$ в случае $f_3 = 0$.

5.3.2. Обратимся к пространству $H_{221,2}$ ($\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $f_1 = x^2$, $f_2 = c_2 = \text{const}$, $B = 1$).

Дифференцируя (5.15) по x^2 , найдем

$$\xi^2 = (a_1 x^2 + a_3)(x^2 - c_2), \quad a_3 = \text{const}.$$

Из (5.16), (5.15), (5.15) и (5.16) соответственно получаем

$$\partial_{43}\xi^3 = 0, \quad \xi^{4''} = 0, \quad \partial_{44}\xi^3 = \partial_{33}\xi^3 = 0.$$

В итоге

$$\xi^3 = a_4 x^3 + a_5 x^4 + a_6, \quad \xi^4 = a_7 x^4 + a_8,$$

где a_4, \dots, a_8 — постоянные. Дифференцируя (5.15) по x^5 , получим

$$\xi^5 f_3' = (a_1 f_3 + a_9)(f_3 - c_2),$$

где постоянная a_9 равна нулю при $f_3 = 0$. Из (5.15) имеем

$$a_9 = 3a_1 c_2 + 2a_2 - 2a_3 - a_4 - a_7.$$

Дифференцирование (5.16) по x^2 дает

$$a_7 = (a_1 + a_5) f_3 + a_1 c_2 + a_2 - a_3 - a_5 c_2;$$

отсюда следует

$$a_5 = -a_1, \quad a_7 = 2a_1 c_2 + a_2 - a_3.$$

Взяв производную от (5.16) по x^5 , получим

$$a_4 = a_1 c_2 + a_2 - 2a_3, \quad a_3 = a_1 c_2 + \frac{1}{2} a_2;$$

далее,

$$\begin{aligned}\xi^2 &= \left(a_1(x^2 + c_2) + \frac{1}{2}a_2 \right) (x^2 - c_2), & \xi^3 &= -a_1(c_2x^3 + x^4) + a_6, \\ \xi^4 &= \left(a_1c_2 + \frac{1}{2}a_2 \right) x^4 + a_8, & \xi^5 f_3' &= \left(a_1(f_3 + c_2) + \frac{1}{2}a_2 \right) (f_3 - c_2).\end{aligned}\tag{5.29}$$

При $f_3' \neq 0$ из уравнения (5.24) дифференцированием по x^5 выводим $\partial_{11}\xi^1 = 0$. Положим

$$\xi^1 = \mu(x^2)A + \nu(x^2);$$

подставив это в (5.13), найдем функции $\mu = -a_1x^2$, $\nu = -\xi^2\tau'$ и

$$\xi^1 = -a_1x^2(x^1 + \tau) - \xi^2\tau'.\tag{5.30}$$

Затем из (5.14), (5.17) имеем

$$(x^2 - c_2)(2a_1(x^2 + c_2) + a_2)\tau'' + (6a_1x^2 + a_2)\tau' = 0,\tag{5.31}$$

$$f_3'' = \frac{6a_1f_3 + a_2}{2a_1(f_3^2 - c_2^2) + a_2(f_3 - c_2)} f_3'^2.\tag{5.32}$$

В случае $f_3 = 0$ из (5.15), (5.16) и (5.17) найдем

$$\begin{aligned}\xi^2 &= a_1x^2(x^2 - c_2), & \xi^3 &= (a_1c_2 + a_2)x^3 - a_1x^4 + a_6, \\ \xi^4 &= (2a_1c_2 + a_2)x^4 + a_8, & \xi^5 &= (2a_1c_2 + a_2)x^5 + a_{10}, \quad a_{10} = \text{const}.\end{aligned}\tag{5.33}$$

Интегрируя уравнение

$$\partial_{111}\xi^1 = \frac{1}{x^1 + \tau(x^2)} \partial_{11}\xi^1,$$

полученное дифференцированием (5.13) дважды по x^1 , найдем

$$\xi^1 = \frac{\rho(x^2)}{2(x^1 + \tau)} + \mu(x^2)(x^1 + \tau) + \nu(x^2);$$

подставив в (5.13), получим

$$\mu = -a_1x^2 + 2a_1c_2 + a_2, \quad \nu = -\xi^2\tau'.$$

После этого из (5.14) следует уравнение $\rho\tau' = 0$; отсюда $\rho = 0$, ибо при $\tau' = 0$ выполняется (5.5), и по теореме 5.1 пространство $H_{221,2}$ имеет постоянную кривизну. Имеем

$$\xi^1 = (a_1(2c_2 - x^2) + a_2)(x^1 + \tau) - \xi^2\tau',\tag{5.34}$$

$$a_1x^2(x^2 - c_2)\tau'' = (3a_1(c_2 - x^2) + a_2)\tau'.\tag{5.35}$$

5.3.3. Интегрируя уравнения Киллинга для пространства $H_{221,3}$ непостоянной кривизны ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $A = B = 1$, $f_1 = c_1$, $f_2 = c_2$, $f_3 \neq \text{const}$), получим

$$\begin{aligned}\xi^1 &= (a_1(c_1 + 2c_2) + a_2)x^1 - a_1x^2 + a_3, & \xi^2 &= (a_1(2c_1 + c_2) + a_2)x^2 + a_4, \\ \xi^3 &= (a_1(2c_1 + c_2) + a_2)x^3 - a_1x^4 + a_5, & \xi^4 &= (a_1(c_1 + 2c_2) + a_2)x^4 + a_6,\end{aligned}\tag{5.36}$$

$$\xi^5 \frac{df_3}{dx^5} = a_1(f_3 - c_1)(f_3 - c_2),$$

$$\frac{d\xi^5}{dx^5} = a_1(2(c_1 + c_2) - f_3) + a_2.\tag{5.37}$$

$$\frac{a_1f_3''}{f_3'^2} = \frac{3a_1(f_3 - c_1 - c_2) - a_2}{(f_3 - c_1)(f_3 - c_2)}.$$

5.4. Инфинитезимальные гомотетии и изометрии в h -пространствах типа $\{221\}$. В разделе ?? доказано, что максимальная проективная алгебра Ли P_r в h -пространстве H_{221} непостоянной кривизны, допускающем негомотетическое проективное движение, обладает подалгеброй H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий. Поэтому базис в P_r может быть получен добавлением к базису в H_{r-1} негомотетического проективного движения $X = \xi^i \partial_i$, определяемого приведенными выше формулами, где $a_1 = 1$. Рассмотрим, как это делается для всех возможных случаев.

H -пространства $H_{221,1}$ непостоянной кривизны. Полагая $a_1 = 1$ в (5.23), (5.27), (5.28) и вводя обозначения $a_2 \equiv 3a$, $a_3 \equiv b$, $a_4 \equiv c$, получим

$$f_3'' = 3 \frac{f_3 - a + b}{f_3^2 + bf_3 + c} f_3'^2, \quad (5.38)$$

$$((x^2)^2 + bx^2 + c)\tau'' + 3(x^2 - a + b)\tau' = 0, \quad (5.39)$$

$$((x^4)^2 + bx^4 + c)\omega'' + 3(x^4 - a + b)\omega' = 0. \quad (5.40)$$

Если векторное поле X задает гомотетии, то в подходящей карте его координаты ξ^i удовлетворяют соотношениям (5.19), (5.20), (5.21), (5.25), (5.26), где $a_1 = 0$, и выполняются равенства

$$(a_3 f_3 + a_4) f_3'' - 3 \left(-\frac{a_2}{6} + a_3 \right) f_3'^2 = 0, \quad (5.41)$$

$$(a_3 x^2 + a_4) \tau'' + 3 \left(-\frac{a_2}{6} + a_3 \right) \tau' = 0, \quad (5.42)$$

$$(a_3 x^4 + a_4) \omega'' + 3 \left(-\frac{a_2}{6} + a_3 \right) \omega' = 0, \quad (5.43)$$

где $a_4 = 0$ в случае $f_3 = 0$. При $f_3' \neq 0$ из (5.38) и (5.41) имеем

$$c \neq a(b - a), \quad a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

либо

$$c = a(b - a), \quad a_2 = 0, \quad a_4 = aa_3.$$

В обоих случаях $a_2 = 0$, следовательно, гомотетии сводятся к изометриям.

Положив $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ в (5.19), (5.20), (5.21), (5.25), (5.26), убедимся, что изометрии в случае $c \neq a(b - a)$ отсутствуют.

В случае $c = a(b - a)$ к негомотетическому проективному движению присоединяется изометрия ($a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = a$). Интегрирование уравнений (5.38)–(5.40) после замены $f_3 \rightarrow f_3 + a$ и переноса начала координат, не меняющих вида метрики, дает

$$f_3 = \frac{C_0}{\sqrt{|x^5|}}, \quad \tau = \frac{C_1}{x^{2^2}}, \quad \omega = \frac{C_2}{x^{4^2}}, \quad (5.44)$$

где $C_0 \neq 0$, C_1, C_2 — здесь и далее постоянные.

При $f_3 = 0$ выполняются уравнения (5.39), (5.40), (5.42), (5.43), где $c = a_4 = 0$. Из (5.39) и (5.42) выводим $a_2 = aa_3 = 0$. В случае $a = 0$ имеются изометрия ($a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0$) и трансляция ∂_5 ; τ и ω определяются формулами (5.44).

В случае $a_3 = 0$ имеется трансляция ∂_5 ,

$$\begin{aligned} \tau &= C_1 \left(1 + \frac{3a - b}{x^2} \right) \left(1 + \frac{b}{x^2} \right) \left(\frac{x^2}{x^2 + b} \right)^{3a/b}, \\ \omega &= C_2 \left(1 + \frac{3a - b}{x^4} \right) \left(1 + \frac{b}{x^4} \right) \left(\frac{x^4}{x^4 + b} \right)^{3a/b}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

H -пространства $H_{221,2}$ непостоянной кривизны. При $f_3' \neq 0$ положим $a_1 = 1$, $a_2 \equiv 6a$; тогда уравнения (5.31) и (5.32) примут вид

$$(x^{2^2} + 3a(x^2 - c_2) - c_2^2)\tau'' + 3(x^2 + a)\tau' = 0, \quad (5.46)$$

$$\frac{f_3''}{f_3'^2} = \frac{3}{2} \frac{f_3 + a}{f_3^2 + 3a(f_3 - c_2) - c_2^2}. \quad (5.47)$$

Приравняв a_1 нулю в (5.32) и сравнив с (5.47), получим $a_2 = 0$, следовательно, гомотетии отсутствуют, а изометрии задаются формулами (5.29), (5.30) при $a_1 = a_2 = 0$.

В случае $f_3 = 0$ из (5.35) при $a_1 = 1, a_2 \equiv a$ получим

$$x^2(x^2 - c_2)\tau'' = (3(c_2 - x^2) + a)\tau'. \quad (5.48)$$

Сравнив (5.35) при $a_1 = 0$ с (5.48) и учтя неравенство $\tau' \neq 0$, найдем $a_2 = 0$. Поэтому гомотетии сводятся к изометриям (5.33), (5.34), где $a_1 = a_2 = 0$. Интеграция (5.48) с учетом допустимого сдвига $x^1 \rightarrow x^1 + \text{const}$ дает

$$\tau = C_1 \left(1 + \frac{a + c_2}{x^2}\right) \left(1 - \frac{c_2}{x^2}\right)^{1+a/c_2}. \quad (5.49)$$

H -пространства $H_{221,3}$ непостоянной кривизны. Положив $a_1 = 1, a_2 \equiv 3a$ в (5.37), получим

$$\frac{f_3''}{f_3'^2} = 3 \frac{f_3 - c_1 - c_2 - a}{(f_3 - c_1)(f_3 - c_2)}.$$

При $a_1 = 0$ из (5.37) ввиду неравенства $f_3' \neq 0$ следует $a_2 = 0$, т.е. гомотетии отсутствуют, а изометрии определяются формулами (5.36) при $a_1 = a_2 = 0$.

Найдя во всех случаях генераторы изометрий, получим следующий результат.

5.5. Классификация h -пространств типа $\{221\}$ по алгебрам Ли проективных и аффинных движений.

Теорема 5.3. *Если пятимерное h -пространство H_{221} типа $\{221\}$ (см. (5.1)) непостоянной кривизны допускает негомотетическое проективное движение, то это пространство и действующая в нем максимальная проективная алгебра Ли P определяются указанными далее формулами, где E_n — неаффинное проективное движение, E_2 — неизометрическая инфинитезимальная гомотетия, E_u — инфинитезимальная изометрия.*

I. H -пространства $H_{221,1}$ непостоянной кривизны ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, f_3'^2 + \tau'^2 + \omega'^2 \neq 0$).

I.A. Функции f_3, τ и ω являются решениями уравнений (5.38), (5.39) и (5.40), где a, b, c — постоянные, связанные условием $a - b(c - b) \neq 0; f_3' \neq 0$. Размерность проективной алгебры Ли $\dim P = 1$. Алгебра P натянута на проективное векторное поле

$$\begin{aligned} E_n = & \left\{ (3a - 2b - x^2)(x^1 + \tau) - (x^{22} + bx^2 + c)\tau' \right\} \partial_1 + (x^{22} + bx^2 + c) \partial_2 + \\ & + \left\{ (3a - 2b - x^4)(x^3 + \omega) - (x^{42} + bx^4 + c)\omega' \right\} \partial_3 + (x^{42} + bx^4 + c) \partial_4 + \\ & + \frac{f_3^2 + bf_3 + c}{f_3'} \partial_5. \end{aligned}$$

I.B. Функции f_3, τ и ω имеют вид (5.44), $f_3' \neq 0$. Размерность проективной алгебры Ли $\dim P = 2$. Базис в P включает проективное векторное поле

$$E_n = -x^2(x^1 + \tau)\partial_1 + x^{22}\partial_2 - x^4(x^3 + \omega)\partial_3 + x^{42}\partial_4 - 2x^5 f_3 \partial_5$$

и инфинитезимальную изометрию

$$E_u = -2x^1\partial_1 + x^2\partial_2 - 2x^3\partial_3 + x^4\partial_4 - 2x^5\partial_5.$$

Структурное уравнение имеет вид

$$[E_2, E_1] = E_1.$$

I.C. Функции τ и ω задаются равенствами (5.45), $f_3 = 0$. Размерность проективной алгебры Ли $\dim P = 2$. Базис в P состоит из проективного движения

$$\begin{aligned} E_n = & \left\{ (3a - 2b - x^2)(x^1 + \tau) - x^2(x^2 + b)\tau' \right\} \partial_1 + x^2(x^2 + b)\partial_2 + \\ & + \left\{ (3a - 2b - x^4)(x^3 + \omega) - x^4(x^4 + b)\omega' \right\} \partial_3 + x^4(x^4 + b)\partial_4 + \\ & + (3a - 2b)x^5\partial_5. \end{aligned}$$

и трансляции $E_u = \partial_5$;

$$[E_2, E_1] = (3a - 2b)E_2.$$

II. H -пространства $H_{221,2}$ непостоянной кривизны ($\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $f_2 = c_2 = \text{const}$, $f_3'^2 + \tau'^2 \neq 0$).

II.A. Непостоянная функция f_3 задается уравнением (5.47),

$$\tau = C_1(x^2 + 3a)(x^2 - c_2)^{-c_2/(3a+2c_2)}(x^2 + 3a + c_2)^{-(3a+c_2)/(3a+2c_2)},$$

где a — постоянная. Размерность проективной алгебры Ли $\dim P = 3$. Алгебра Ли P натянута на проективное векторное поле

$$\begin{aligned} E_n = & \left\{ -x^2(x^1 + \tau) - (x^2 + 3a + c_2)(x^2 - c_2)\tau' \right\} \partial_1 + (x^2 + 3a + c_2)(x^2 - c_2)\partial_2 - \\ & - (c_2x^3 + x^4)\partial_3 + (3a + c_2)x^4\partial_4 + \frac{(f_3 + 3a + c_2)(f_3 - c_2)}{f_3'}\partial_5 \end{aligned}$$

и две трансляции $E_u = \partial_3$, $E_u = \partial_4$. Структурные уравнения:

$$[E_1, E_2] = c_2E_2, \quad [E_1, E_3] = E_2 - (3a + c_2)E_3, \quad [E_2, E_3] = 0.$$

II.B. Постоянная функция $f_3 = 0$, τ определяется равенством (5.49), где a — постоянная. Размерность проективной алгебры Ли $\dim P = 4$. Базис в P включает проективное векторное поле

$$\begin{aligned} E_n = & \left\{ (a + 2c_2 - x^2)(x^1 + \tau) - x^2(x^2 - c_2)\tau' \right\} \partial_1 + x^2(x^2 - c_2)\partial_2 + \\ & + ((a + c_2)x^3 - x^4)\partial_3 + (a + 2c_2)x^4\partial_4 + (a + 2c_2)x^5\partial_5 \end{aligned}$$

и три трансляции $E_u = \partial_3$, $E_u = \partial_4$ и $E_u = \partial_5$,

$$[E_2, E_1] = (a + c_2)E_2, \quad [E_3, E_1] = -E_2 + (a + 2c_2)E_3, \quad [E_4, E_1] = (a + 2c_2)E_4;$$

остальные скобки Ли равны нулю.

III. H -пространства $H_{221,3}$ непостоянной кривизны ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $A = B = 1$, $f_1 = c_1$ и $f_2 = c_2$ — постоянные, $f_3' \neq 0$). Функция f_3 является решением уравнения

$$\frac{f_3''}{f_3'^2} = 3 \frac{f_3 - c_1 - c_2 - a}{(f_3 - c_1)(f_3 - c_2)},$$

где a — постоянная. Размерность проективной алгебры Ли $\dim P = 5$. Алгебра Ли P натянута на проективное движение

$$\begin{aligned} E_n = & ((3a + c_1 + 2c_2)x^1 - x^2)\partial_1 + (3a + 2c_1 + c_2)x^2\partial_2 + \\ & + ((3a + 2c_1 + c_2)x^3 - x^4)\partial_3 + (3a + c_1 + 2c_2)x^4\partial_4 + \frac{(f_3 - c_1)(f_3 - c_2)}{f_3'}\partial_5 \end{aligned}$$

и пять трансляций $E_u = \partial_1$, $E_u = \partial_2$, $E_u = \partial_3$ и $E_u = \partial_4$. Структурные уравнения алгебры Ли P имеют вид

$$\begin{aligned} [E_2, E_1] &= (3a + c_1 + 2c_2)E_2, \quad [E_3, E_1] = -E_2 + (3a + 2c_1 + c_2)E_3, \\ [E_4, E_1] &= (3a + 2c_1 + c_2)E_4, \quad [E_5, E_1] = -E_4 + (3a + c_1 + 2c_2)E_5; \end{aligned}$$

остальные скобки Ли равны нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аминова А. В. Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения// Гравит. теория относит. — 1970. — № 7. — С. 127–131.
2. Аминова А. В. О полях тяготения, допускающих группы проективных движений// Докл. АН СССР. — 1971. — 197, № 4. — С. 807–809.
3. Аминова А. В. Проективные группы в полях тяготения. I// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 3–13.
4. Аминова А. В. Проективные группы в полях тяготения. II// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 14–20.
5. Аминова А. В. О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел/ Препринт ИТФ АН УССР 71-85Р. — Киев, 1971.
6. Аминова А. В. Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств// Тр. Геом. семин. ВИНТИ АН СССР. — 1974. — 6. — С. 295–316.
7. Аминова А. В. Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности// Тр. Геом. семин. ВИНТИ АН СССР. — 1974. — 6. — С. 317–346.
8. Аминова А. В. Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля// Гравит. теория относит. — 1976. — № 10. — С. 9–22.
9. Аминова А. В. Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности// Изв. вузов. Мат. — 1988. — № 1. — С. 3–13.
10. Аминова А. В. Группы преобразований римановых многообразий// Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. ВИНТИ. — 1990. — 22. — С. 97–165.
11. Аминова А. В. Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими// Усп. мат. наук. — 1993. — 48, № 2 (290). — С. 107–164.
12. Аминова А. В. Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий// Усп. мат. наук. — 1995. — 50, № 1. — С. 69–142.
13. Аминова А. В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
14. Аминова А. В. Проективные симметрии и законы сохранения в K -пространствах, определяемых полями тяготения// Изв. вузов. Физика. — 2008. — 51, № 4. — С. 30–37.
15. Аминова А. В., Аминов Н. А.-М. Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии// Мат. сб. — 2010. — 201, № 5. — С. 3–13.
16. Аминова А. В. Проективные симметрии гравитационных полей. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018.
17. Аминова А. В., Аминов Н. А.-М. Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка// Мат. сб. — 2006. — 197, № 7. — С. 3–28.
18. Аминова А. В., Аминов Н. А.-М. Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2009. — 123. — С. 58–80.
19. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях пятимерных пространств специального вида// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 5. — С. 97–102.
20. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях пятимерных пространств. I. H -пространства типа $\{32\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2018. — № 4. — С. 21–31.
21. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях пятимерных пространств. II. H -пространства типа $\{41\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 45–55.
22. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях пятимерных пространств. III. H -пространства типа $\{5\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 56–66.
23. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. H -пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 4. — С. 4–12.
24. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. Проективно-групповые свойства h -пространств типа $\{221\}$ // Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 10. — С. 87–93.

25. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. Проективно-групповые свойства h -пространств H_5 типа $\{5\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2020. — № 1. — С. 4–11.
26. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О свойствах проективных алгебр Ли жестких h -пространств H_{32} типа $\{32\}$ // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — 162, № 2. — С. 111–119.
27. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. Алгебры Ли проективных движений пятимерных h -пространств H_{221} типа $\{221\}$ // Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 12. — С. 9–22.
28. Буданов К. М., Султанов А. Я. Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3–13.
29. Гладуш В. Д. Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы—Клейна// Теор. мат. физ. — 2003. — 136, № 3. — С. 480–495.
30. Голиков В. И. О геодезическом отображении полей тяготения общего вида// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — № 12. — С. 97–129.
31. Егоров И. П. Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.
32. Жукова Л. И. Римановы пространства с проективной группой// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — 124. — С. 13–18.
33. Жукова Л. И. Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай)// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — 124. — С. 19–25.
34. Жукова Л. И. О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — 124. — С. 26–30.
35. Жукова Л. И. Римановы пространства, допускающие проективные преобразования// Изв. вузов. Мат. — 1973. — № 6. — С. 37–41.
36. Киселев А. С. Космологическая проблема в пятимерном пространстве-времени// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2010. — № 1. — С. 64–67.
37. Киселев А. С., Кречет В. Г. Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана—Вейля с идеальной жидкостью// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2011. — 3, № 1. — С. 37–41.
38. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2. — М.: Наука, 1981.
39. Кречет В. Г., Левкоева М. В., Садовников Д. В. Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве// Вестн. РУДН. Сер. Физ. — 2001. — 1, № 9. — С. 33–37.
40. Кручкович Г. И. Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1963. — № 24. — С. 74–87.
41. Кручкович Г. И. О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1967. — № 33. — С. 3–18.
42. Петров А. З. О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1949. — 109, № 3. — С. 7–36.
43. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — Факториал, 1998.
44. Рчеумлишвили Г. Л. Сферически-симметричный линейный элемент и векторы Киллинга в пятимерном пространстве// Теор. мат. физ. — 1995. — 102, № 3. — С. 345–351.
45. Рчеумлишвили Г. Л. Обобщенные векторы Киллинга в пятимерном лоренцевом пространстве// Теор. мат. физ. — 1997. — 112, № 2. — С. 249–253.
46. Синюков Н. С. О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — 98, № 1. — С. 21–23.
47. Синюков Н. С. Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — 111, № 4. — С. 266–267.
48. Синюков Н. С. Эквидистантные римановы пространства// Научн. ежегод. Одесса. — 1957. — С. 133–135.
49. Синюков Н. С. Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — 137, № 6. — С. 1312–1314.
50. Синюков Н. С. Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 4. — С. 781–782.
51. Синюков Н. С. К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — 169, № 4. — С. 770–772.
52. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.

53. Солодовников А. С. Проективные преобразования римановых пространств// Усп. мат. наук. — 1956. — 11. — С. 45–116.
54. Солодовников А. С. Пространства с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1956. — 108, № 2. — С. 201–203.
55. Солодовников А. С. Геодезические классы пространств $V(K)$ // Докл. АН СССР. — 1956. — 111, № 1. — С. 33–36.
56. Солодовников А. С. Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вekt. тенз. анал. — 1961. — № 2. — С. 43–102.
57. Трунев А. П. Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы–Клейна// Науч. ж. Кубан. гос. агр. ун-та. — 2011. — 71, № 7. — С. 1–26.
58. Шарафутдинов В. А. Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. — Новосибирск.: ИПЦ НГУ, 2018.
59. Широков П. А. Тензорное исчисление. — Казань: Изд-во КГУ, 1961.
60. Широков П. А. Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во КГУ, 1966.
61. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.
62. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
63. Abe O. Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza–Klein space-time// Nuovo Cim. B. — 1994. — 109, № 6. — P. 659–673.
64. Aminova A. V. On geodesic mappings of Riemannian spaces// Tensor. — 1987. — 46. — P. 179–186.
65. Aminova A. V. Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds// Tensor, N.S. — 1993. — 54. — P. 91–100.
66. Aminova A. V. Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics// в кн.: In Memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. 3, part 2. — Изд-во Казан. ун-та: Казань, 1995. — С. 79–103.
67. Aminova A. V. Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — 113, № 3. — P. 367–470.
68. Aminova A. V., Aminov N. A.-M. Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type VI.1// J. Math. Sci. — 2009. — 158, № 2. — P. 163–183.
69. Anchordoqui L. A., Birman G. S. Metric tensors for homogeneous, isotropic, five-dimensional pseudo-Riemannian models// Rev. Colomb. Mat. — 1998. — 32. — P. 73–79.
70. Becerril R., Matos T. Bonnor solution in five-dimensional gravity// Phys. Rev. D. — 1990. — 41, № 6. — P. 1895–1896.
71. Beltrami E. Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante// Ann. Mat. — 1868. — № 2. — P. 232–255.
72. Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G. Mixed metric perturbation in Kaluza–Klein cosmologies// Astron. Nachr. — 1990. — 311, № 3. — P. 151–154.
73. Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G. Mixed metric perturbations in Kaluza–Klein cosmologies// Nuovo Cim. B. — 1991. — 106, № 2. — P. 107–122.
74. Bokhari A. H., Qadir A. Symmetries of static, spherically symmetric space-times// J. Math. Phys. — 1987. — 28. — P. 1019–1022.
75. Calvaruso G., Marinosci R. A. Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces// Balkan J. Geom. Appl. — 2003. — 8, № 1. — P. 1–19.
76. Coley A. A., Tupper B. O. J. Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance// J. Math. Phys. — 1989. — 30. — P. 2616–2625.
77. Dacko P. Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact Ricci potential/ arXiv: 1308.6429 [math.DG].
78. Dini U. Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra// Ann. Mat. — 1869. — 3, № 7. — P. 269–293.
79. Dumitrescu T. T., Festuccia G., Seiberg N. Exploring curved superspace/ arXiv: 1205.1115v2 [hep.th].
80. Fialowski A., Penkava M. The moduli space of complex five-dimensional Lie algebras// J. Algebra. — 2016. — 458. — P. 422–444.
81. Fubini G. Sui gruppi trasformazioni geodetiche// Mem. Acc. Torino. Cl. F. Mat. Nat. — 1903. — 53, № 2. — P. 261–313.

82. *Fukui T.* The motion of a test particle in the Kaluza–Klein-type of gravitational theory with variable mass// *Astrophys. Space Sci.* — 1988. — 141, № 2. — P. 407–413.
83. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal invariance in physics// *Rev. Mod. Phys.* — 1962. — 34, № 3. — P. 442–557.
84. *Gall L., Mohaupt T. J.* High Energy Phys. — 2018. — 2018. — 53.
85. *Geroch R.* Limits of space-times// *Commun. Math. Phys.* — 1969. — 13. — P. 180–193.
86. *Gezer A.* On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric// *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*. — 2009. — 119, № 3. — P. 345–350.
87. *Gross D. J., Perry M. J.* Magnetic monopoles in Kaluza–Klein theories// *Nucl. Phys.* — 1983. — B226. — P. 29–48.
88. *Guendelman E. I.* Kaluza–Klein–Casimir cosmology with decoupled heavy modes// *Phys. Lett. B.* — 1988. — 201, № 1. — P. 39–41.
89. *Hall G. S., Rebouas M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* On the algebraic structure of second order symmetric tensors in 5-dimensional space-times// *Gen. Rel. Gravit.* — 1996. — 8, № 9. — P. 1107–1113.
90. *Hicks J. W.* Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions// *All Graduate Plan B and other Reports*. — 2011. — 102. — P. 1–90.
91. *Ho Choon-Lin, Ng Kin-Wang* Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza–Klein cosmology// *Phys. Rev. D.* — 1991. — 43, № 10. — P. 3107–3111.
92. *Jadczyk A.* START in a five-dimensional conformal domain/ [arXiv: 1111.5540v2 \[math-ph\]](https://arxiv.org/abs/1111.5540v2).
93. *Kiselev A. S., Krechet V. G.* Static distributions of matter in the five-dimensional Riemann–Weyl space// *Russ. Phys. J.* — 2012. — 55, № 4. — P. 417–425.
94. *Knebelman M. S.* Homothetic mappings of Riemann spaces// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1958. — 9, № 6. — P. 927–928.
95. *Kokarev S. S.* Phantom scalar fields in five-dimensional Kaluza–Klein theory// *Russ. Phys. J.* — 1996. — 39, № 2. — P. 146–152.
96. *Kollár J.* Einstein metrics on five-dimensional Seifert bundles// *J. Geom. Anal.* — 2005. — 15, № 3. — P. 445–476.
97. *Königs M. G.* Sur les géodésiques a intégrales quadratiques// in: *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV. — Chelsea Publ., 1972. — P. 368–404.
98. *Kovacs D.* The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza–Klein// *Gen. Rel. Gravit.* — 1984. — 16, № 7. — P. 645–655.
99. *Kowalski O.* Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leq 5$ // *Rozprawy CSAV, Rada MPV.* — 1975. — № 85. — P. 1–61.
100. *Kramer D., Stephani H., MacCallum M., Herlt E.* Exact Solutions of Einstein’s Field Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
101. *Ladke L. S., Jaiswal V. K., Hiwarkar R. A.* Five-dimensional exact solutions of Bianchi type-I space-time in $f(R, T)$ theory of gravity// *Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Techn.* — 2014. — 3, № 8. — P. 15332–15342.
102. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// *Ann. Mat.* — 1896. — 24, № 2. — P. 255–300.
103. *Macedo P. G.* New proposal for a five-dimensional unified theory of classical fields of Kaluza–Klein type/ [arXiv: gr-qc/0101121](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0101121).
104. *Magazev A. A.* Casimir functions for five-dimensional Lie groups with a non-semi-Hausdorff space of orbits// *Russ. Phys. J.* — 2003. — 46, № 9. — P. 912–920.
105. *Mankoc-Borstnik N., Pavsi M.* A systematic examination of five-dimensional Kaluza–Klein theory with sources consisting of point particles or strings// *Nuovo Cim.* — 1988. — 99A, № 4. — P. 489–507.
106. *Marinosci R. A.* Classification of five-dimensional generalized pointwise symmetric Riemannian spaces// *Geom. Dedic.* — 1995. — 57. — P. 11–53.
107. *Mikesh J.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky University, 2019.
108. *Mikesh J., Stepanova E.* A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$ -structure as a model of abstract statistical manifold// *Ann. Glob. Anal. Geom.* — 2014. — 45. — P. 111–128.
109. *Mohanty G., Mahanta K. L., Bishi B. K.* Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field// *Astrophys. Space Sci.* — 2007. — 310. — P. 273–276.
110. *Paiva F. M., Rebouca M. J., Teixeira A. F. F.* Limits of space-times in five dimensions and their relation to the Segre types// *J. Math. Phys.* — 1997. — 38. — P. 4228–4236.

111. *Pan Yiwen* Rigid supersymmetry on five-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry/ [arXiv:1308.1567v4 \[hep.th\]](#).
112. *Pini A., Rodriguez-Gomez D., Schmudea J.* Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions/ [arXiv:1504.04340v3 \[het-th\]](#).
113. *Rcheulishvili G.* Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. — Miramare-Trieste: Preprint ICTP, IC/92/108, 1992.
114. *Rcheulishvili G. L.* The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space// *J. Math. Phys.* — 1992. — 33. — P. 1103–1108.
115. *Rcheulishvili G. L.* Conformal Killing vectors in five-dimensional space/ [arXiv:gr-qc/9312004v1](#).
116. *Rebouças M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* Classification of energy momentum tensors in $n > 5$ dimensional space-times: A review// *Brazil. J. Phys.* — 2004. — 34, № 2A. — P. 535–543.
117. *Rodroquez-Vallarte M. C., Salgado G.* Five-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions// *J. Geom. Phys.* — 2016. — 100. — P. 20–32.
118. *Santos J., Rebouças M. J., Teixeira A. F. F.* Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza–Klein-type theories// *J. Math. Phys.* — 1995. — 36. — P. 3074–3084.
119. *Schur F.* Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen// *Math. Ann.* — 1886. — 27. — P. 537–567.
120. *Starks S. A., Kosheleva O., Kreinovich V.* Kaluza–Klein 5D ideas made fully geometric/ [arXiv:0506218v1 \[physics.class-ph\]](#).
121. *Varaksin O. L., Klishevich V. V.* Integration of Dirac equation in Riemannian spaces with five-dimensional group of motions// *Russ. Phys. J.* — 1997. — 40, № 8. — P. 727–731.
122. *Wesson P. S.* A physical interpretation of Kaluza–Klein cosmology// *Astrophys. J.* — 1992. — 394, № 1. — P. 19–24.
123. *Wesson P. S.* The properties of matter in Kaluza–Klein cosmology// *Mod. Phys. Lett. A.* — 1992. — 7, № 11. — P. 921–926.
124. *Witten E.* Search for a realistic Kaluza–Klein theory// *Nucl. Phys. B.* — 1981. — 186. — P. 412–428.
125. *Yano K.* On harmonic and Killing vectors// *Ann. Math.* — 1952. — 55. — P. 38–45.
126. *Zeghib A.* On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds// *Adv. Math.* — 2016. — 297. — P. 26–53.

Аминова Ася Васильевна
 Казанский (Приволжский) федеральный университет
 E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович
 Казанский (Приволжский) федеральный университет
 E-mail: dzhamoliddink@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 29–43
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-29-43

УДК 517.925.41

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ,
МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ
НА СТУДЕНЧЕСКУЮ ГРУППУ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ
НЕФОРМАЛЬНЫМ ЛИДЕРОМ

© 2022 г. С. А. БЕЛЬМАН, Е. Ю. ЛИСКИНА

Аннотация. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующая педагогическое воздействие на группу студентов. Воздействие выражено суммой некоторой константы и управляющего параметра. Найдены состояния равновесия системы, определены типы их бифуркаций, возникающие при изменении управляющего параметра. Получены коэффициентные условия возникновения устойчивых состояний равновесия и соответствующие бифуркационные значения параметра.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, состояние равновесия, управляющий параметр, бифуркация, периодическое решение.

BIFURCATIONS IN A DYNAMIC SYSTEM
MODELING PEDAGOGICAL IMPACTS ON A GROUP
OF STUDENTS WITH A NEGATIVE INFORMAL LEADER

© 2022 S. A. BELMAN, E. Yu. LISKINA

ABSTRACT. We consider a system of ordinary differential equations, which describes a model of the pedagogical impact on a group of students. The impact is expressed as the sum of a constant and a control parameter. We find equilibrium states of the system and determine the types of their bifurcations that arise when the control parameter changes. Also, we obtain coefficient conditions for the emergence of stable equilibrium states and the corresponding bifurcation values of the parameter.

Keywords and phrases: differential equation, equilibrium state, control parameter, bifurcation, periodic solution.

AMS Subject Classification: 34C23, 37G10, 91F99

1. Введение. Динамические системы применяются для моделирования различных социальных взаимодействий уже свыше двадцати лет (см., например [6–9]). Однако описание взаимодействий в образовательной среде в большинстве случаев остаётся на уровне описательных или статистических моделей (см. [11, 12], большое количество статей в [8]).

В числе работ, посвященных моделированию взаимодействий в социальных системах с использованием дифференциальных уравнений [1, 2, 9, 10], мы выделили работы [1, 2], в которых рассматривается процесс возобновления научных кадров. Продолжая эту идею, мы предлагаем построение и исследование динамической модели педагогических ресурсов, начатое в работах [4, 5].

2. Построение динамической модели педагогических ресурсов. Под педагогическими ресурсами мы понимаем численность студентов педагогического направления подготовки. Поток студентов этого направления не является однородным по убеждениям: первая часть студентов целенаправленно поступает на данное направление; вторая часть студентов поступает потому, что хватило баллов на бюджетное место; третья часть — по иным причинам. Студентов, целенаправленно поступивших на педагогическое направление, будем называть вовлеченными в будущую педагогическую деятельность, всех остальных — не вовлеченными. В процессе обучения убеждения студентов и их вовлеченность в будущую педагогическую деятельность могут изменяться. В данной работе будем полагать, что основными факторами влияния являются педагогическое воздействие с стороны преподавателей и воздействие со стороны неформального лидера потока. Моделирование динамики педагогических ресурсов является актуальной задачей в связи с тем, что в процессе обучения необходимо не только сохранить и укрепить убеждения вовлеченных студентов, но и изменить убеждения не вовлеченных с целью обеспечения школ региона педагогическими кадрами.

Рассмотрим поток студентов педагогического направления подготовки общей численностью w . Обозначим соответственно через x и y количество студентов, вовлеченных и не вовлеченных в будущую профессиональную педагогическую деятельность. Сформулируем следующие предположения модели.

1. Скорость изменения количества вовлеченных студентов пропорциональна численности этих студентов, ограниченной максимальной численностью w_1 суммы количества вовлеченных студентов и количества тех не вовлеченных студентов потока, которые могут рассматривать профессию учителя среди своих возможных профессий ($w_1 \leq w$), и убывает при наличии отрицательного воздействия на вовлеченных студентов:

$$\dot{x} = a_1 x \left(1 - \frac{x}{w_1} \right) - d_1 xy;$$

в отличие от данной работы, в [5] предполагалось, что $w_1 = w$.

2. Аналогично, скорость изменения количества не вовлеченных студентов зависит от их численности, ограниченной максимальной численностью w_2 суммы количества не вовлеченных студентов и тех вовлеченных студентов потока, которые в процессе обучения могут перестать рассматривать профессию учителя своей возможной профессией ($w_2 \leq w$), и увеличивается за счет влияния не вовлеченных студентов на вовлеченных (т.е. студент из группы вовлеченных студентов может перейти в группу не вовлеченных студентов):

$$\dot{y} = -a_2 y \left(1 - \frac{y}{w_2} \right) - d_2 xy;$$

в отличие от данной работы, в [5] предполагалось, что $w_2 = w$.

3. численность потока w является постоянной; $w_1 + w_2 \leq 2w$.

Тогда система дифференциальных уравнений, моделирующая взаимную динамику вовлеченных и не вовлеченных студентов, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x \left(1 - \frac{x}{w_1} \right) - d_1 xy, \\ \dot{y} = -a_2 y \left(1 - \frac{y}{w_2} \right) + d_2 xy. \end{cases} \quad (1)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 положительны и характеризуют влияние педагогического воздействия на студентов; коэффициенты d_1 и d_2 также положительны и характеризуют соотношение между стабильностью личных убеждений вовлеченных студентов и интенсивностью убеждения неформальным лидером потока из числа не вовлеченных студентов. Если неформальный лидер находится в группе не вовлеченных студентов, то знаки при слагаемых $d_1 xy$ и $d_2 xy$ такие, как в системе (1), причем чем меньше d_1 , тем устойчивей убеждения вовлеченных студентов. Возможна симметричная ситуация, при которой неформальный лидер находится в группе вовлеченных студентов.

Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x \left(1 - \frac{x}{w_1}\right) + d_1xy, \\ \dot{y} = -a_2y \left(1 - \frac{y}{w_2}\right) + d_2xy. \end{cases} \quad (2)$$

Формально системы (1) и (2) являются системами типа «хищник — жертва» с внутривидовой конкуренцией за ресурс, которым является общая численность потока. В системе (1) «хищниками» являются не вовлеченные студенты, а в системе (2) — вовлеченные. Группу «хищников» можно интерпретировать как наличие сильного неформального лидера в этой группе. Далее будем рассматривать систему (1). Далее предположим следующее.

4. Так как система (1) описывает динамику одного потока студентов, то, в отличие от [4], $a_1 = a_2 = a$ (педагогическое воздействие на всех студентов потока одинаковое).
5. Для повышения числа вовлеченных студентов следует проводить дополнительную работу среди не вовлеченных, т.е. $a_1 = a$, а $a_2 = a + \alpha$, где $\alpha > 0$ — показатель дополнительного педагогического воздействия на не вовлеченных студентов.

Таким образом, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \left(1 - \frac{x}{w_1}\right) - d_1xy, \\ \dot{y} = -(a + \alpha)y \left(1 - \frac{y}{w_2}\right) + d_2xy. \end{cases} \quad (3)$$

Ставится задача: изучить поведение динамической системы (3) в зависимости от величины управляющего параметра $\alpha \geq 0$; найти такие его значения, при которых в системе (3) возникают устойчивые структуры (устойчивые продуктивные состояния равновесия и периодические решения).

3. Состояния равновесия динамической модели и их бифуркации. Состояния равновесия системы (3) определяются решениями алгебраической системы

$$\begin{cases} ax \left(1 - \frac{x}{w_1}\right) - d_1xy = 0, \\ -(a + \alpha)y \left(1 - \frac{y}{w_2}\right) + d_2xy = 0, \end{cases}$$

из которой следует, что система (3) имеет 4 состояния равновесия: $O(0, 0)$, $K(0, w_2)$, $L(w_1, 0)$, $M(x_0(\alpha); y_0(\alpha))$, где

$$x_0(\alpha) = \frac{(a + \alpha)w_1(w_2d_1 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}, \quad y_0(\alpha) = \frac{aw_2(w_1d_2 - (a + \alpha))}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}. \quad (4)$$

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что матрица системы линейного приближения, соответствующей системе (3) в точке $O(0, 0)$, имеет вид

$$A_O(\alpha) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -(a + \alpha) \end{pmatrix},$$

состояние равновесия $O(0, 0)$ является седлом при всех $\alpha \geq 0$.

Аналогично матрица системы линейного приближения, соответствующей системе (3) в точке $K(0, w_2)$, имеет вид

$$A_K(\alpha) = \begin{pmatrix} -(d_1w_2 - a) & 0 \\ d_2w_2 & a + \alpha \end{pmatrix},$$

состояние равновесия $K(0, w_2)$ может являться седлом или неустойчивым узлом в зависимости от знака выражения $d_1w_2 - a$ при всех $\alpha \geq 0$.

Для исследования состояния равновесия $L(w_1, 0)$ выполним параллельный перенос системы координат с помощью замены переменных $u = x - w_1$, $v = y$, получим

$$\begin{cases} \dot{u} = -au - d_1w_1v - \frac{a}{w_1}u^2 - d_1uv, \\ \dot{v} = (d_2w_1 - (a + \alpha))v + \frac{a + \alpha}{w_2}v^2 + d_2uv. \end{cases} \quad (5)$$

Матрица системы линейного приближения, соответствующей системе (3) в точке $L(w_1, 0)$, имеет вид

$$A_L(\alpha) = \begin{pmatrix} -a & -d_1w_1 \\ 0 & d_2w_1 - (a + \alpha) \end{pmatrix}.$$

Так как ее собственные значения равны $\lambda_1 = -a < 0$ и $\lambda_2(\alpha) = d_2w_1 - (a + \alpha)$, то состояние равновесия $L(w_1, 0)$ может являться седлом или устойчивым узлом в зависимости от знака $\lambda_2(\alpha) = d_2w_1 - (a + \alpha)$. Для того чтобы точка $L(w_1, 0)$ являлась устойчивым узлом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\lambda_2(\alpha) < 0$ или $\alpha > d_2w_1 - a$. Тогда при $\alpha = \alpha_0 \equiv d_2w_1 - a$ (бифуркационное значение параметра) точка $L(w_1, 0)$ меняет характер с седла на узел (транскритическая бифуркация).

При $\alpha_0 = d_2w_1 - a$ состояние равновесия $L(w_1, 0)$ является сложным с простым нулевым собственным значением. Выясним его тип.

С учетом $\alpha = \alpha_0$ из системы (5) получим

$$\begin{cases} \dot{u} = -au + d_1w_1v - \frac{a}{w_1}u^2 - d_1uv, \\ \dot{v} = d_2v \left(u + \frac{w_1}{w_2}v \right). \end{cases} \quad (6)$$

Лемма 1. При $\alpha_0 = d_2w_1 - a$ и $a - d_1w_2 \neq 0$ состояние равновесия $L(w_1, 0)$ является простейшим двукратным устойчивым седло-узлом.

Доказательство. Приведем систему (6) к каноническому виду (см. [3, с. 66]) с помощью линейной замены

$$u = \xi - \frac{d_1w_1}{a}\eta, \quad v = \eta,$$

тогда система (6) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -a\xi - \frac{a}{w_1}\xi^2 + \frac{d_1}{a}(d_2w_1 + a)\xi\eta + \frac{d_1d_2w_1^2}{a^2w_2}(a - d_1w_2)\eta^2, \\ \dot{\eta} = d_2\xi\eta + \frac{d_2w_1}{aw_2}(a - d_1w_2)\eta^2. \end{cases} \quad (7)$$

В соответствии с алгоритмом (см. [3, с. 67]) введем в рассмотрение функцию $\xi = \varphi(\eta)$, являющуюся решением уравнения

$$-a\xi - \frac{a}{w_1}\xi^2 + \frac{d_1}{a}(d_2w_1 + a)\xi\eta + \frac{d_1d_2w_1^2}{a^2w_2}(a - d_1w_2)\eta^2 = 0.$$

или

$$\xi^2 + w_1 \left(1 - \frac{d_1}{a^2}(d_2w_1 + a)\eta \right) \xi - \frac{d_1d_2w_1^3}{a^3w_2}(a - d_1w_2)\eta^2 = 0. \quad (8)$$

Так как левая часть уравнения (8) определена, непрерывна и дифференцируема по переменным ξ , η в окрестности точки $(\xi; \eta) = (0; 0)$, то функция $\xi = \varphi(\eta)$ определена и непрерывна в окрестности точки $(\xi; \eta) = (0; 0)$. Запишем решение уравнения (8) в виде

$$\xi_{1,2} = \frac{w_1}{2} \left((\bar{a}\eta - 1) \pm \sqrt{1 - 2\bar{a}\eta + \bar{a}\eta^2} \right),$$

где

$$\bar{a} = \frac{d_1}{a^2}(d_2w_1 + a), \quad \bar{\bar{a}} = \bar{a}^2 + 4\frac{d_2w_1}{w_2}(a - d_1w_2).$$

Непосредственными вычислениями получим, что область определения выражения $\varphi(\eta)$ определяется дискриминантом

$$D_\eta = 4\bar{a}^2 - 4\bar{a} = \frac{16d_1d_2w_1^3}{a^3w_2}(d_1w_2 - a).$$

Заметим, что $D_\eta < 0$ тогда и только тогда, когда $d_1w_2 - a < 0$. Следовательно, при $d_1w_2 - a < 0$ справедливо неравенство $1 - 2\bar{a}\eta + \bar{a}\eta^2 > 0$, и функция $\varphi(\eta)$ определена при всех $\eta \in \mathbb{R}$. Если $D_\eta > 0$ (т.е. $d_1w_2 - a > 0$), то область определения функции $\varphi(\eta)$ является решением неравенства $1 - 2\bar{a}\eta + \bar{a}\eta^2 \geq 0$, причем решение этого неравенства содержит значение $\xi = 0$.

Подставим функцию

$$\varphi_+(\eta) = \frac{w_1}{2} \left((\bar{a}\eta - 1) + \sqrt{1 - 2\bar{a}\eta + \bar{a}\eta^2} \right)$$

в правую часть второго уравнения системы (7), получим

$$\psi(\eta) = d_2\eta\varphi(\eta) + \frac{d_2w_1}{aw_1}(a - d_1w_2)\eta^2. \quad (9)$$

Пусть $a - d_1w_2 \neq 0$. Разложим функцию (9) в ряд Тейлора в окрестности точки $\eta = 0$. Для коэффициентов разложения получим $\psi(0) = 0$,

$$\psi(0)' = 0, \quad \psi''(0) \equiv \Delta_2 = 2\frac{d_2w_1}{aw_2}(a - d_1w_2) \neq 0,$$

следовательно, разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\psi(\eta) = \Delta_2\eta^2 + o(\eta^2).$$

В силу теоремы 2 (см. [3, С. 87–88]), при $\alpha_0 = d_2w_1 - a$ и $a - d_1w_2 \neq 0$ состояние равновесия $L(w_1, 0)$ является простейшим двукратным седло-узлом при любом знаке коэффициента Δ_2 . Так как $\lambda_1 = -a < 0$, то узловой сектор данного состояния равновесия является устойчивым. Лемма 1 доказана. \square

Замечание 1. При $\alpha_0 = d_2w_1 - a$ и $d_1w_2 - a = 0$ система (7) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -a\xi - \frac{a}{w_1}\xi^2 + \frac{d_1}{a}(d_2w_1 + a)\xi\eta, \\ \dot{\eta} = d_2\xi\eta. \end{cases}$$

Выполняя алгоритм, запишем уравнение (8)

$$\xi \left(-a - \frac{a}{w_1}\xi + \frac{d_1}{a}(d_2w_1 + a)\eta \right) = 0,$$

тогда решение уравнения (8) определено при всех $\eta \in \mathbb{R}$ и имеет вид

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} 0, \\ -w_1 + \frac{d_1w_1}{a^2}(d_2w_1 + a)\eta. \end{cases}$$

Следовательно, случай $d_1w_2 - a = 0$ требует отдельного исследования.

Рассмотрим состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$, где $x_0(\alpha)$ и $y_0(\alpha)$ определяются формулами (4). Исследуем тип и положение этого состояния равновесия в системе координат в зависимости от параметра α .

Область допустимых значений параметра α в (4) определяется неравенством

$$w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha) \neq 0.$$

Непосредственными вычислениями получим, что предельные положения точки $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ при $\alpha \rightarrow 0 + 0$ определяются следующими значениями пределов:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} x_0(\alpha) = \frac{aw_1(d_1w_2 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a^2}; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} y_0(\alpha) = \frac{aw_2(d_2w_1 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a^2}. \quad (10)$$

Исходя из содержательной интерпретации системы дифференциальных уравнений (3), состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ необходимо рассматривать в первой координатной четверти (численности вовлеченных и не вовлеченных студентов неотрицательны). При этом из (10) с учетом замечания 1 следует, что предельное положение точки $M(x_0(0), y_0(0))$ в первой координатной четверти существует при выполнении следующей совокупности коэффициентных условий:

$$\left[\begin{cases} d_1 w_2 - a > 0, \\ w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2 > 0, \\ d_2 w_1 - a \geq 0; \\ d_1 w_2 - a < 0, \\ w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2 < 0, \\ d_2 w_1 - a \leq 0. \end{cases} \right. \quad (11)$$

Всюду далее полагаем, что одна из систем совокупности (11) имеет место.

Лемма 2. Пусть справедлива одна из систем совокупности (11). Состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ расположено в первой четверти тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 w_2 - a > 0, \\ \alpha \in [0; d_2 w_1 - a]. \end{array} \right. \quad (12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 w_2 - a < 0, \\ \alpha \geq 0. \end{array} \right. \quad (12b)$$

Доказательство. Состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ расположено в первой координатной четверти тогда и только тогда, когда одновременно $x_0(\alpha) > 0$, $y_0(\alpha) > 0$, что равносильно следующей системе неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(a + \alpha)w_1(d_1 w_2 - a)}{w_1 w_2 d_1 d_2 - a(a + \alpha)} > 0, \\ \frac{a w_2 (w_1 d_2 - (a + \alpha))}{w_1 w_2 d_1 d_2 - a(a + \alpha)} \geq 0. \end{array} \right.$$

Решая последнюю систему неравенств, получим следующую совокупность условий:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} d_1 w_2 - a > 0, \\ \alpha \in \left[0; \min \left\{ d_2 w_1 - a; \frac{w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2}{a} \right\} \right] \right\}; \\ \left\{ \begin{array}{l} d_1 w_2 - a < 0, \\ \alpha \geq \max \left\{ 0; d_2 w_1 - a; \frac{w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2}{a} \right\}. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (13)$$

(угловая скобка обозначает неопределенный тип конца промежутка).

Рассмотрим первую систему совокупности (13). Допустим, что одновременно выполняются неравенства $d_1 w_2 - a > 0$ и

$$d_2 w_1 - a > \frac{w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2}{a}.$$

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что последнее неравенство может быть справедливо тогда и только тогда, когда $d_1 w_2 - a < 0$, что противоречит первому неравенству этой системы. Следовательно,

$$\min \left\{ d_2 w_1 - a; \frac{w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2}{a} \right\} = d_2 w_1 - a$$

при $d_1 w_2 - a \geq 0$, то есть $\alpha \in [0; d_2 w_1 - a]$ при $d_1 w_2 - a > 0$.

Рассмотрим вторую систему совокупности (13). Так как $d_1w_2 - a < 0$, то в силу условий (11)

$$\max \left\{ 0; d_2w_1 - a; \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a} \right\} = 0.$$

Следовательно, $\alpha \geq 0$ при $d_1w_2 - a < 0$. Лемма 2 доказана. \square

Исследуем поведение траекторий системы (3) в окрестности точки $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$. Для этого выполним параллельный перенос начала координат в эту точку с помощью замены переменных $x = u + x_0$, $y = v + y_0$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = a_{11}(\alpha)u + a_{12}(\alpha)v - \frac{a}{w_1}u^2 - d_1uv, \\ \dot{v} = a_{21}(\alpha)u + a_{22}(\alpha)v + \frac{a + \alpha}{w_2}v^2 + d_2uv. \end{cases}$$

Матрица соответствующей системы линейного приближения имеет вид

$$A_M(\alpha) = \begin{pmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) \\ a_{21}(\alpha) & a_{22}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(\alpha) &= \left(a - \frac{2ax_0}{w_1} - d_1y_0 \right) = -\frac{a(a + \alpha)(d_1w_2 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}, \\ a_{12}(\alpha) &= -d_1x_0 = \frac{a(a + \alpha)(d_1w_2 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}, \\ a_{21}(\alpha) &= d_2y_0 = \frac{ad_2w_2(d_2w_1 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}, \\ a_{22}(\alpha) &= -\left((a + \alpha) - \frac{2(a + \alpha)y_0}{w_2} - d_2x_0 \right) = \frac{a(a + \alpha)(d_2w_1 - (a + \alpha))}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}. \end{aligned}$$

Собственные значения матрицы $A_M(\alpha)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(\alpha) &= -\frac{a(a + \alpha)(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)}{2(w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha))} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2(a + \alpha)^2(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)^2}{(w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha))^2} - 4\frac{a(a + \alpha)(d_1w_2 - a)(d_2w_1 - a - \alpha)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим знаки собственных значений λ_1 и λ_2 (14) при реализации случаев (12а) и (12б) леммы 2.

3.1. Случай (12а). Пусть $d_1w_2 - a > 0$ и $\alpha \in [0; d_2w_1 - a]$. Заметим, что в этом случае при всех $\alpha \in [0; d_2w_1 - a]$ точка $L(w_1, 0)$ является седлом.

Подкоренное выражение в (14) приведем к общему знаменателю, тогда числитель имеет вид

$$a(a + \alpha)(a(a + \alpha)(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)^2 - 4(d_1w_2 - a)(d_2w_1 - a - \alpha)(w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha))).$$

В этом случае тип собственных значений определяется знаком и значением выражения

$$D(\alpha) = a(a + \alpha)(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)^2 - 4(d_1w_2 - a)(d_2w_1 - a - \alpha)(w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)). \quad (15)$$

Заметим, что при $\alpha < d_2w_1 - a$ выполняется неравенство $d_2w_1 - a - \alpha > 0$, а в силу $d_1w_2 - a > 0$ справедлива оценка

$$w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha) > w_1w_2d_1d_2 - a(a + d_2w_1 - a) = w_1w_2d_1d_2 - ad_2w_1 = d_2w_1(d_1w_2 - a) > 0,$$

то есть

$$4\frac{a(a + \alpha)(d_1w_2 - a)(d_2w_1 - a - \alpha)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)} > 0,$$

причём и числитель и знаменатель этой дроби положительны. Отсюда следует, что $D(\alpha) > 0$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$(d_1 w_2 - d_2 w_1 + \alpha)^2 > 4(d_1 w_2 - a)(d_2 w_1 - a - \alpha)(w_1 w_2 d_1 d_2 - a(a + \alpha)).$$

Лемма 3. Пусть справедливы неравенства первой системы из совокупности (11).

1. Если при $\alpha = 0$ выполняется неравенство $D(0) > 0$, то при $d_1 w_2 < d_2 w_1$ состояние равновесия $M(x_0(0), y_0(0))$ является неустойчивым узлом, а при $d_1 w_2 > d_2 w_1$ — устойчивым узлом.
2. Если при $\alpha = 0$ выполняется неравенство $D(0) < 0$, то при $d_1 w_2 < d_2 w_1$ состояние равновесия $M(x_0(0), y_0(0))$ является неустойчивым фокусом, а при $d_1 w_2 > d_2 w_1$ — устойчивым фокусом.

Доказательство. При $\alpha = 0$ собственные значения матрицы $A_M(0)$, определенные равенствами (14), примут вид

$$\lambda_{1,2}(0) = -\frac{a^2(d_1 w_2 - d_2 w_1)}{2(w_1 w_2 d_1 d_2) - a^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^4(d_1 w_2 - d_2 w_2)^2}{(w^2 d_1 d_2 - a^2)^2} - 4 \frac{a^2(d_1 w_2 - a)(d_2 w_2 - a)}{w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2}}.$$

Очевидно, что тип собственных значений $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ зависит от значения и знака выражения (15) при $\alpha = 0$

$$D(0) = a^2(d_1 w_2 - d_2 w_2)^2 - 4a^2(a - d_1 w_2)(a - d_2 w_2)(a^2 - w_1 w_2 d_1 d_2)$$

В силу первой системы совокупности (11) при $d_1 w_2 - a > 0$ должны выполняться условия

$$d_2 w_1 - a \geq 0, \quad w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2 > 0.$$

Тогда при выполнении условий $D(0) > 0$ и $d_1 w_2 < d_2 w_1$ собственные значения $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ вещественны, положительны и

$$\left| \frac{a^2(d_1 w_2 - d_2 w_1)}{2(a^2 - w_1 w_2 d_1 d_2)} \right| > \frac{1}{2} \sqrt{D_0},$$

а точка $M(x_0(0), y_0(0))$ является неустойчивым узлом. При $d_1 w_2 > d_2 w_1$ собственные значения $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ вещественны и отрицательны, а точка $M(x_0(0), y_0(0))$ является устойчивым узлом.

Аналогично рассуждая, получим, что при выполнении неравенств $D(0) < 0$ и $d_1 w_2 < d_2 w_1$ собственные значения $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ являются комплексно-сопряженными с положительными действительными частями. Следовательно, точка $M(x_0(0), y_0(0))$ является неустойчивым фокусом. При $d_1 w_2 > d_2 w_1$ собственные значения $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ являются комплексно-сопряженными с отрицательными действительными частями, следовательно, точка $M(x_0(0), y_0(0))$ является устойчивым фокусом. Лемма 3 доказана. \square

Лемма 4. Пусть выполняются неравенства первой системы из совокупности (11), при $\alpha = 0$ в (15) $D(0) > 0$ и $d_1 w_2 - d_2 w_1 > 0$. Тогда при всех $\alpha \in (0; d_2 w_1 - a)$ состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ является устойчивым узлом.

Доказательство. При выполнении условий леммы и в силу утверждения 1 леммы 3 состояние равновесия $M(x_0(0), y_0(0))$ является устойчивым узлом. В силу леммы 2 при всех $\alpha \in [0; d_2 w_1 - a]$ выражение $D(\alpha)$ (15) является непрерывной функцией параметра. При этом при возрастании $\alpha \in (0; d_2 w_1 - a)$ в формуле (14) положительная дробно-рациональная функция

$$\frac{a^2(a + \alpha)^2(d_1 w_2 - d_2 w_2 + \alpha)^2}{(w_1 w_2 d_1 d_2 - a(a + \alpha))^2}$$

возрастает, а положительная дробно-рациональная функция

$$4 \frac{a(a + \alpha)(d_1 w_2 - a)(d_2 w_2 - a - \alpha)}{w_1 w_2 d_1 d_2 - a(a + \alpha)}$$

убывает. Следовательно, при всех $\alpha \in (0; d_2 w_1 - a)$ выполняется неравенство $D(\alpha) > 0$. Так как $d_1 w_2 - d_2 w_1 > 0$, то и $\alpha + d_1 w_2 - d_2 w_1 > 0$, тогда из него и неравенства $D(\alpha) > 0$ следует, что

$$\sqrt{a(a + \alpha)D(\alpha)} < |a(a + \alpha)(\alpha + d_1 w_2 - d_2 w_1)|.$$

Следовательно, собственные значения $\lambda_1(\alpha)$ и $\lambda_2(\alpha)$ в формуле (14) будут вещественными одного знака, определяемого знаком выражения

$$\left(-\frac{a(a+\alpha)(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)}{2(w_1w_2d_1d_2 - a(a+\alpha))} \right).$$

Так как $\alpha + d_1w_2 - d_2w_1 > 0$, то

$$\left(-\frac{a(a+\alpha)(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)}{2(w_1w_2d_1d_2 - a(a+\alpha))} \right) < 0,$$

откуда следует, что при всех $\alpha \in [0; d_2w_1 - a)$ состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ является устойчивым узлом. Лемма 4 доказана. \square

Лемма 5. *Если выполняются неравенства первой системы из совокупности (11), при $\alpha = 0$ в (15) $D(0) < 0$ и $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$, то при переходе через значение $\alpha_1 \equiv d_2w_1 - d_1w_2$ фокус $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ меняет характер с неустойчивого на устойчивый, а при $\alpha = \alpha_1$ состояние равновесия $M(x_0(\alpha_1), y_0(\alpha_1))$ является сложным с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения; и существует значение параметра $\alpha = \alpha_2 \in (d_2w_1 - d_1w_2; d_2w_1 - a)$, при котором происходит бифуркация типа особой точки (устойчивый фокус становится устойчивым узлом).*

Доказательство. Пусть выполняются условия леммы. Тогда в силу утверждения 2 леммы 3 состояние равновесия $M(x_0(0), y_0(0))$ является неустойчивым фокусом. В лемме 2 установлено, что

$$\min \left\{ d_2w_1 - a; \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a} \right\} = d_2w_1 - a,$$

следовательно,

$$\alpha < \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a},$$

тогда функции $D(\alpha)$ и $\lambda_{1,2}(\alpha)$ (14) непрерывны на отрезке $[0; d_2w_1 - a]$. При этом, если

$$d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha < 0,$$

то $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}(\alpha)) > 0$, и состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ остается неустойчивым фокусом. Если же $d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha > 0$, то $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}(\alpha)) < 0$, и точка $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ становится устойчивым фокусом. Рассмотрим значение параметра $\alpha = \alpha_1 \equiv d_2w_1 - d_1w_2$, при котором $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}(\alpha_1)) = 0$. Заметим, что из условия $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$ следует оценка

$$0 < d_2w_1 - d_1w_2 = (d_2w_1 - a) - (d_1w_2 - a) < d_2w_2 - a,$$

из которой следует включение $\alpha_1 \in (0; d_2w_1 - a)$, и точка $M(x_0(\alpha_1), y_0(\alpha_1))$ является сложным состоянием равновесия с чисто мнимыми собственными значениями.

Так как функция $D(\alpha)$ (15) непрерывна на отрезке $[0; d_2w_1 - a]$; из неравенства

$$\alpha_1 < \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a}$$

следует неравенство

$$D(\alpha_1) = -4(d_1w_2 - a)^2(w_1w_2d_1d_2 - a(a + d_2w_1 - d_1w_2)) < 0;$$

поскольку $D(\alpha_0) = ad_2w_2(d_1w_2 - a)^2 > 0$, то по теореме Больцано—Коши на интервале (α_1, α_0) существует такое значение параметра $\alpha = \alpha_2 \in (\alpha_1, \alpha_0)$, что $D(\alpha_2) = 0$, а состояние равновесия $M(x_0(\alpha_2), y_0(\alpha_2))$ из устойчивого фокуса становится устойчивым узлом (вырожденным или дикритическим). При $\alpha \in (\alpha_2; d_2w_1 - a)$ состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ становится грубым устойчивым узлом. Лемма 5 доказана. \square

Замечание 2. Так как при прохождении значения $\alpha = \alpha_1$ фокус $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ меняет характер устойчивости, то в его окрестности возможно возникновение периодических решений [3], в частности, бифуркация Андронова—Хопфа. Для обнаружения этой бифуркации (или иных) впоследствии предполагается исследовать тип сложного состояния равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ при $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$ и $\alpha = \alpha_1$.

Замечание 3. Так как $D(\alpha)$ (15) представляет собой кубический многочлен относительно параметра α , который может иметь либо один, либо три действительных корня (возможен подслучай двух совпадающих корней из трех). Следовательно, при изменении α возможно существование нескольких (но не более трёх) бифуркаций состояния равновесия типа фокус-узла.

Замечание 4. Случаи $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$ и $D(\alpha) > 0$ и $d_1w_2 - d_2w_1 > 0$ и $D(\alpha) < 0$ не могут быть реализованы при $\alpha > 0$ в первой координатной четверти, так как при этом нарушается одно из неравенств первой системы совокупности (11).

Замечание 5. Пусть $d_1w_2 - d_2w_1 = 0$. При $\alpha = 0$ непосредственными вычислениями получаем, что $D(0) < 0$, а при $\alpha = \alpha_0$ $D(\alpha_0) > 0$. Следовательно, в силу замечания 3 при изменении α возможно существование нескольких (не более трех) бифуркаций состояния равновесия типа фокус-узла. Так как при $d_1w_2 - d_2w_1 = 0$ состояние равновесия $M(x_0(0), y_0(0))$ является сложным состоянием равновесия с чисто мнимыми собственными значениями, то впоследствии предполагается исследовать структуру траекторий в его окрестности.

Лемма 6. Пусть справедливы неравенства первой системы из совокупности (11) и $\alpha = \alpha_0 \equiv d_2w_1 - a$. Тогда точка $M(x_0(\alpha_0), y_0(\alpha_0))$ совпадает с точкой $L(w_1, 0)$ (происходит седло-узловая бифуркация слияния двух состояний равновесия).

Доказательство. При выполнении условий леммы выражения (4) примут вид $x_0(\alpha_0) = w_1$, $M(x_0(\alpha_0), y_0(\alpha_0))$ совпадает с точкой $L(w_1; 0)$. Подставив значение $\alpha = \alpha_0$ в формулы (14), получим $\lambda_1 = a < 0$, $\lambda_2 = 0$. Так как в силу леммы 1 точка $L(w_1; 0)$ при $d_1w_2 - a \neq 0$ и $\alpha < \alpha_0$ является седлом, а при $\alpha = \alpha_0$ является простейшим двукратным устойчивым седло-узлом, то при $\alpha = \alpha_0$ происходит седло-узловая бифуркация слияния двух особых точек в одну. Лемма 6 доказана. \square

3.2. Случай (12b). Пусть $d_1w_2 - a < 0$, $\alpha \geq 0$. В этом случае при всех $\alpha \geq 0$ точка $L(w_1; 0)$ является устойчивым узлом.

Лемма 7. Если выполняются условия второй системы неравенств из совокупности (11), тогда состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ существует при всех $\alpha \in [0; +\infty)$ в первой координатной четверти и является седлом.

Доказательство. Пусть выполняются условия второй системы неравенств из совокупности (11). Тогда функции (4) не определены при

$$\alpha = \alpha_3 \equiv \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a} < 0,$$

следовательно, при всех $\alpha \in [0; +\infty)$ состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ существует в первой четверти. Тип собственных значений $\lambda_{1,2}$ в (15) определяется значением и знаком выражения $D(\alpha)$ (15). Заметим, что в силу второй системы неравенств из совокупности (11) вместе с неравенством $d_1w_2 - a < 0$ должны выполняться неравенства $d_2w_1 - a \leq 0$ и $w_1w_2d_1d_2 - a^2 < 0$. Следовательно, при всех $\alpha \in [0; +\infty)$ справедливы неравенства $D(\alpha) > 0$ и

$$\sqrt{a(a + \alpha)D(\alpha)} > \frac{a(a + \alpha)(\alpha + d_1w_2 - d_2w_1)}{2(a(a + \alpha) - w_1w_2d_1d_2)}.$$

Тогда при всех $\alpha \in [0; +\infty)$ собственные значения $\lambda_{1,2}$ в (15) вещественны, различны и имеют разные знаки, а состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ является седлом. Лемма 7 доказана. \square

Замечание 6. Так как в данном случае $\alpha_0 \equiv d_2w_1 - a < 0$, то бифуркация слияния точек M и L происходит не в первой координатной четверти.

Непосредственными вычислениями получим предельные положения состояния равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ при $\alpha \rightarrow +\infty$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} x_0(\alpha) = -\frac{w_1(d_1w_2 - a)}{a}(+0); \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} y_0(\alpha) = -w_2(-0).$$

Очевидно, что предельное положение точки $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ при $\alpha \rightarrow +\infty$ находится в третьей координатной четверти при $w_2d_1 - a > 0$ и во второй координатной четверти при $w_2d_1 - a < 0$.

Замечание 7. Теоретически если не ограничивать значение параметра промежутком $\alpha \in [0; +\infty)$, то в этом случае состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ при

$$\alpha \rightarrow \alpha_3 \equiv \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a}$$

испытывает бифуркацию исчезновения и появления седла на бесконечности. Действительно, функции (4) не определены при

$$\alpha = \alpha_3 \equiv \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a},$$

следовательно, состояние равновесия $M(x_0(\alpha_3), y_0(\alpha_3))$ не существует. Так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_3 \pm 0} x_0(\alpha) = +\infty; \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_3 \pm 0} y_0(\alpha) = +\infty,$$

то особая точка $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ исчезает и появляется на бесконечности при $\alpha \rightarrow \alpha_3 \pm 0$. Следовательно, значение $\alpha = \alpha_3$ является бифуркационным, при котором происходит бифуркация особой точки от бесконечности.

3.3. Выводы. Таким образом, в системе (3) при изменении параметра $\alpha \geq 0$ возможны следующие последовательности бифуркаций.

Если справедливы первая система неравенств совокупности (11) и $d_1w_2 - d_2w_1 > 0$, то при $\alpha = 0$ в системе (3) в первой четверти расположены четыре состояния равновесия: седла O , K , L и устойчивый узел M (лемма 3). При возрастании $\alpha \geq 0$ точка M приближается к точке L , оставаясь устойчивым узлом (лемма 4). При $\alpha = \alpha_0$ происходит седло-узловая бифуркация точек L и M (лемма 2), состояние равновесия M исчезает в первой четверти. При дальнейшем возрастании параметра α точка L остается устойчивым узлом.

Если справедливы первая система неравенств совокупности (11) и $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$, то при $\alpha = 0$ в системе (3) в первой четверти также расположены четыре состояния равновесия: седла O , K , L и неустойчивый фокус M (лемма 3). При возрастании $\alpha \geq 0$ точка M при $\alpha = \alpha_1$ становится сложным состоянием равновесия с чисто мнимыми собственными значениями соответствующей линейной системы. При переходе через $\alpha = \alpha_1$ фокус меняет характер устойчивости, в системе возможно возникновение периодических решений (лемма 5). При $\alpha_2 \in (\alpha_1, \alpha_0)$ точка M меняет характер с фокуса на узел (лемма 5), и при $\alpha = \alpha_0$ происходит седло-узловая бифуркация точек L и M (леммы 2, 6), состояние равновесия M исчезает в первой четверти. При дальнейшем возрастании параметра α точка L остается устойчивым узлом.

Если справедливы первая система неравенств совокупности (11) и $d_1w_2 - d_2w_1 = 0$, то при $\alpha = 0$ в системе (3) в первой четверти также расположены четыре состояния равновесия: седла O , K , L и сложное состояние равновесия M (замечание 5). При возрастании $\alpha \geq 0$ в силу замечания 3 точка M может до трех раз менять характер с фокуса на узел (устойчивый), и при $\alpha = \alpha_0$ происходит седло-узловая бифуркация точек L и M (леммы 2, 6), состояние равновесия M исчезает в первой четверти. При дальнейшем возрастании параметра α точка L остается устойчивым узлом.

Если справедлива вторая система неравенств совокупности (11), то при любом соотношении d_1w_2 и d_2w_1 и при $\alpha = 0$ в системе (3) в первой четверти также расположены четыре состояния равновесия: седла O , M , устойчивый узел L и неустойчивый узел K . При возрастании $\alpha \geq 0$ топологическая структура фазового портрета в первой координатной четверти не меняется (лемма 7).

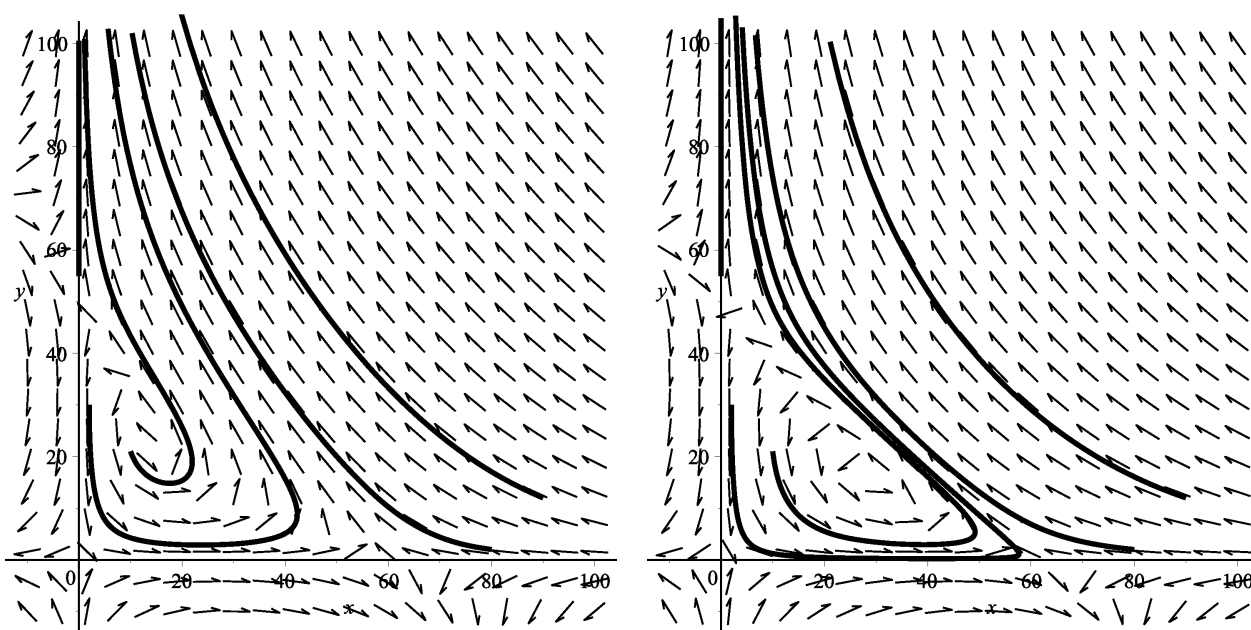


Рис. 1. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha = 0$ (слева) и при $\alpha = 2$ (справа). Точка M — неустойчивый фокус.

Заметим, что седло-узловая бифуркация точек L и M означает возможность перехода всех не вовлеченных студентов в группу вовлеченных.

4. Примеры.

Пример 1. Пусть в системе (3) $a = 3$; $d_1 = 0,1$; $d_2 = 0,12$; $w = 160$, $w_1 = 60$, $w_2 = 50$. Тогда $d_1w_2 - a = 2$; $d_2w_1 - a = 4,2$ $d_1d_2w_1w_2 - a^2 = 27$, то есть имеет место первый случай. Бифуркационные значения параметра: $\alpha_0 = 4,20$; $\alpha_1 = 2,20$; $\alpha_2 \approx 3,79$. На рисунках 1–4 представлены фазовые портреты системы (3) при изменении параметра α .

Пример 2. Пусть в системе (3) $a = 3$; $d_1 = 0,1$; $d_2 = 0,12$; $w = 160$, $w_1 = 60$, $w_2 = 50$. Тогда $d_1w_2 - a = -1,6$; $d_2w_1 - a = 0,6$ $d_1d_2w_1w_2 - a^2 = -5,64$, то есть имеет место второй случай. На рисунках 5–6 представлены фазовые портреты системы (3) при изменении параметра α .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атряхин В. А., Шаманаев П. А. Построение математической модели динамики потока претендентов на поступление в аспирантуру с использованием системы дифференциальных уравнений с запаздыванием// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2011. — 13, № 4. — С. 35–39.
2. Атряхин В. А., Шаманаев П. А. Моделирование динамики кадров с использованием дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2012. — 14, № 1. — С. 35–39.
3. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1991.
4. Бельман С. А., Быкова А. А. Исследование динамической модели педагогических ресурсов// Вестн. РАЕН. — 2019. — 19, № 2. — С. 36–38.
5. Бельман С. А., Лискина Е. Ю. О регулировании педагогического воздействия в динамической модели студенческой группы, имеющей отрицательного неформального лидера// Диффер. уравн. мат. модел. — 2021. — № 2. — С. 10–19.
6. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
7. Математические модели социальных систем. — Омск: Омск. гос. ун-т, 2000.

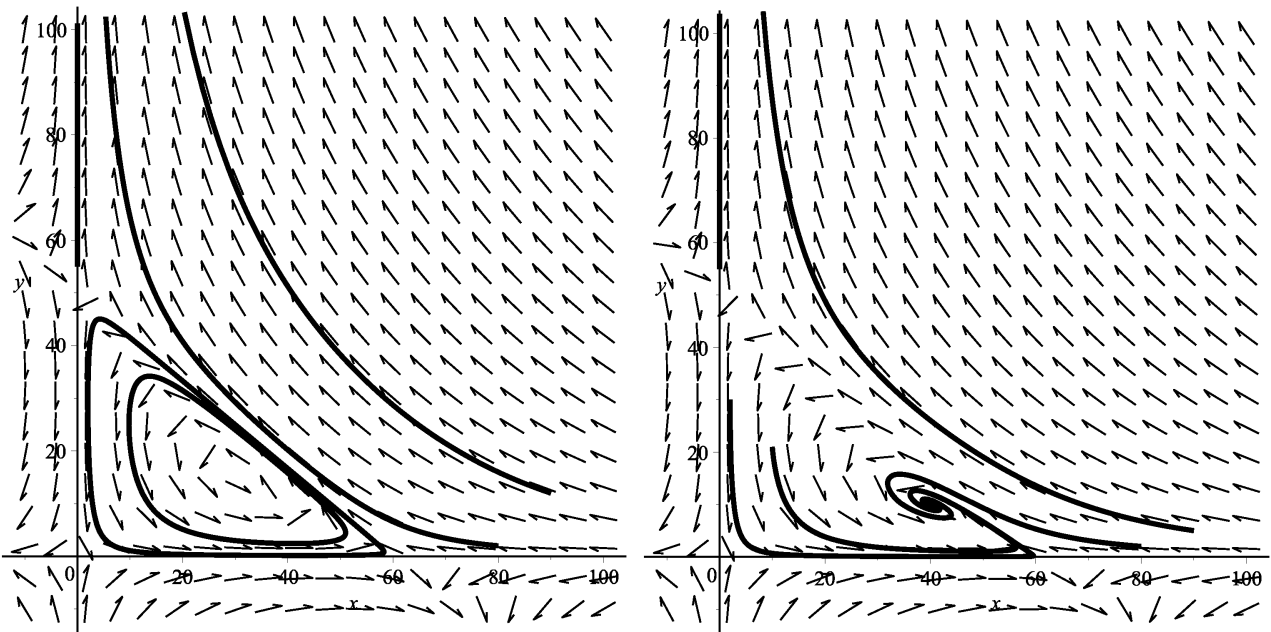


Рис. 2. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha_1 = 2,20$ (слева, точка M — сложное состояние равновесие с мнимыми собственными значениями матрицы системы линейного приближения) и при $\alpha = 3$ (справа, точка M — устойчивый фокус).

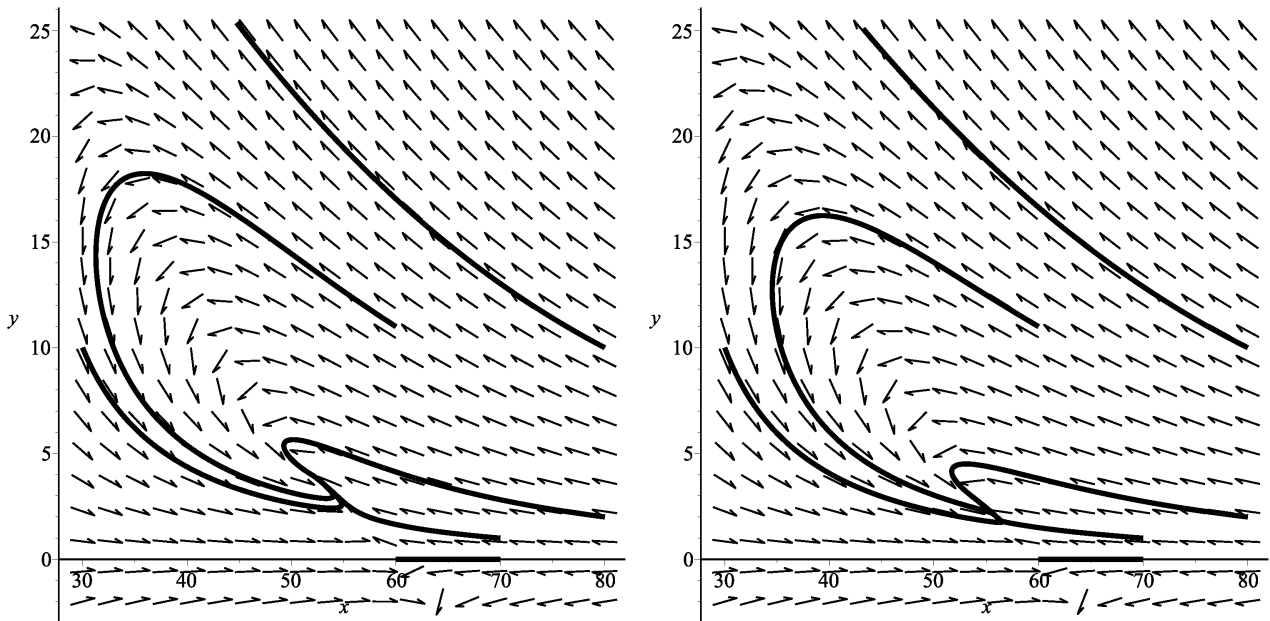


Рис. 3. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha_2 \approx 3,79$ (слева, изменение фокус-узел) и при $\alpha = 4$ (справа, точка M — устойчивый узел).

8. Математическое моделирование социальных процессов / Сб. науч. трудов. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017. — № 19.
9. Михайлов А. П., Петров А. П. Поведенческие гипотезы и математическое моделирование в гуманитарных науках // Мат. модел. — 2011. — 23, № 6. — С. 18–32.

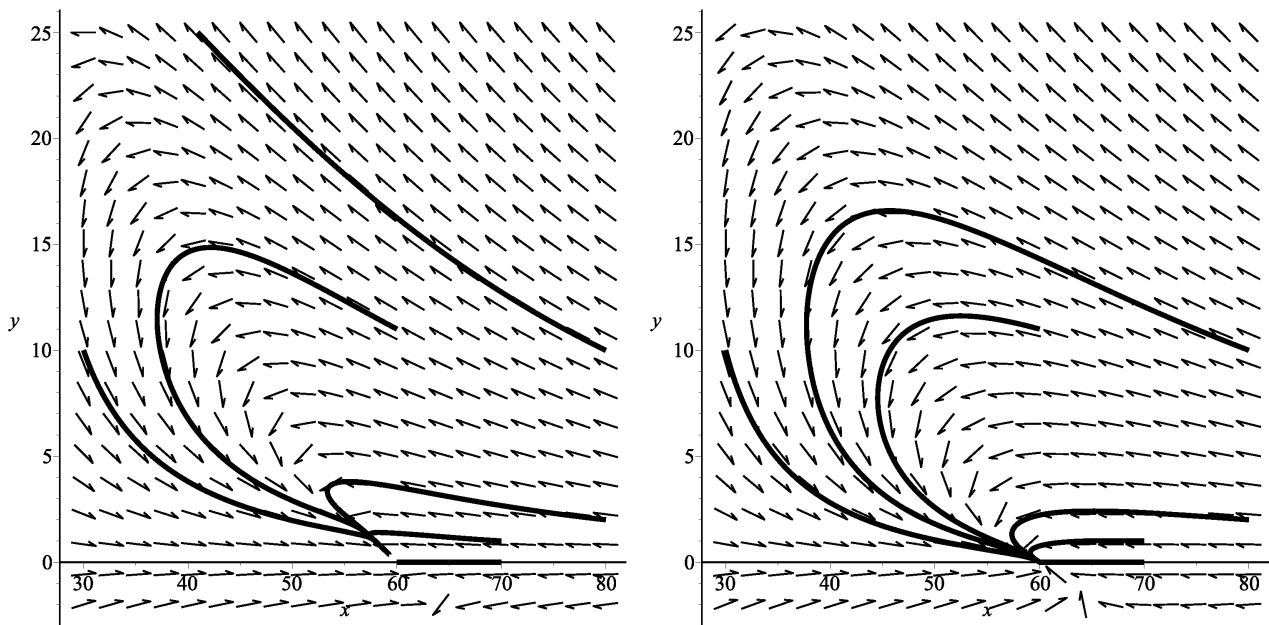


Рис. 4. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha_0 = 4,20$ (слева, точка $M = L$ — двукратное седло-узел) и при $\alpha = 5,2$ (справа, точка M исчезла, точка L — устойчивый узел).

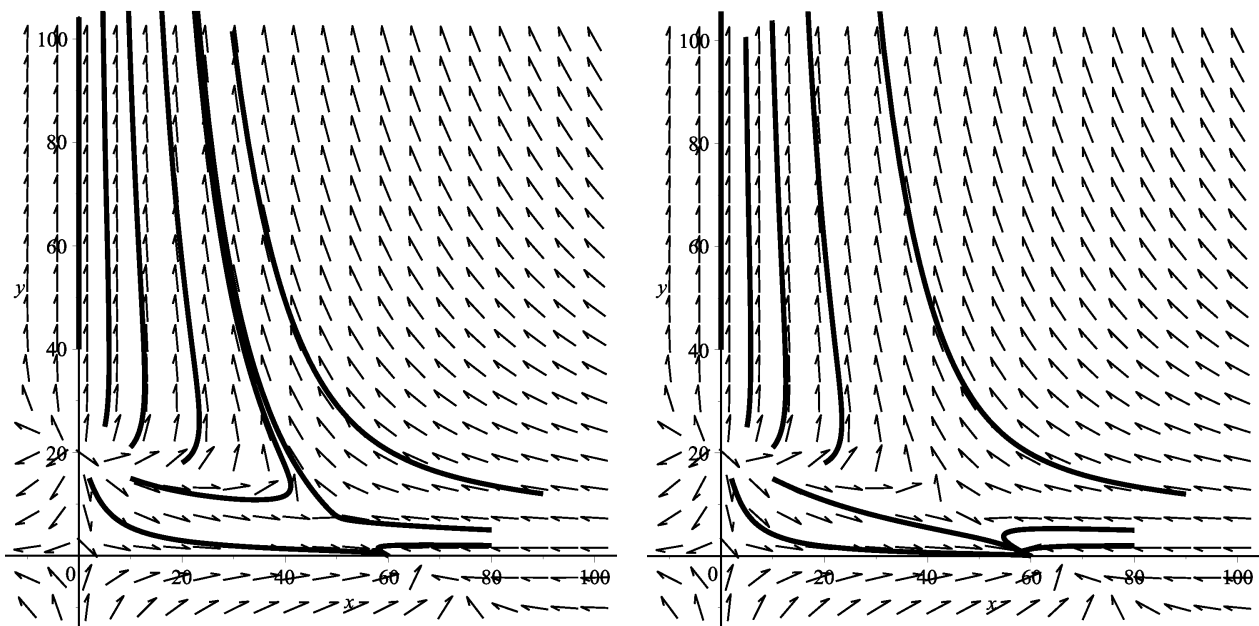


Рис. 5. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha = 0$ (слева) и при $\alpha = 0,5$ (справа). Точка M — седло, точка L — устойчивый узел.

10. Михайлов А. П., Прончева О. Г. Дестабилизирующее воздействие на социум в моделях информационного противоборства // в кн.: Математическое моделирование социальных процессов. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017. — 19. — С. 51–57.
11. Моделирование социально-педагогических систем / Мат. регион. науч.-практ. конф. — Пермь: Перм. гос. пед. ун-т, 2004.

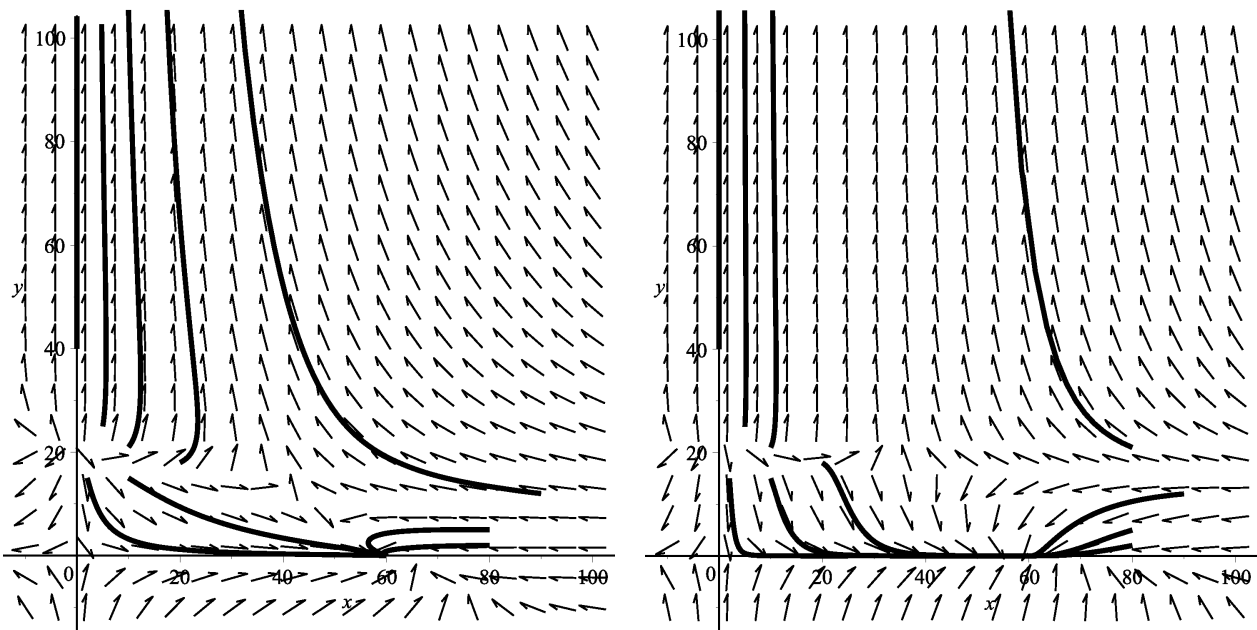


Рис. 6. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha_1 = 1$ (слева) и при $\alpha = 10$ (справа). Точка M — седло, точка L — устойчивый узел.

12. Ядровская М. В. Моделирование педагогического взаимодействия // Образовательные технологии и общество. — 2009. — № 3. — С. 354–362.

Бельман Светлана Александровна
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: s.Belman@365.rsu.edu.ru

Лискина Екатерина Юрьевна
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru



ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

© 2022 г. И. М. БУРЛАКОВ, М. П. БУРЛАКОВ

Аннотация. Рассмотрены групповые алгебры, базовыми группами которых являются циклические группы. Доказана теорема о мультипликативности циркулянтов для циклических и антициклических чисел. Описаны геометрические структуры на линейных пространствах циклических и антициклических алгебр.

Ключевые слова: групповые алгебры, алгебры циклических чисел, алгебры антициклических чисел, пространства с фундаментальной формой, циклические вращения.

CYCLIC SPACES

© 2022 I. M. BURLAKOV, M. P. BURLAKOV

ABSTRACT. We consider group algebras whose base groups are cyclic groups, prove a theorem on the multiplicativity of circulants for cyclic and anticyclic numbers, and describe geometric structures on linear spaces of cyclic and anticyclic algebras.

Keywords and phrases: group algebras, algebras of cyclic numbers, algebras of anticyclic numbers, spaces with fundamental form, cyclic rotations.

AMS Subject Classification: 15A66, 15A69, 16S38

Хорошо известно, что евклидову планиметрию можно построить как геометрическую интерпретацию алгебры (поля) комплексных чисел, отождествляя точки с комплексными числами (см. [1, 7]). Такое алгебраическое определение евклидовой геометрии плоскости ничем не лучше и не хуже тех, которые получаются из аксиом Евклида или Вейля, но у него есть одно преимущество: если алгебру комплексных чисел заменить какой-либо другой алгеброй, получим новую геометрическую структуру, «сконструированную» по образцу евклидовой планиметрии.

Например, если алгебру комплексных чисел \mathbb{C} заменить алгеброй двойных вещественных чисел \mathbb{C}^+ , то получим числовую модель псевдоевклидовой плоскости (см. [8]). Обобщением алгебры двойных вещественных чисел будут алгебры $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ циклических чисел m -го порядка, а обобщением поля комплексных чисел — алгебры $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ антициклических чисел m -го порядка (см. [5]). Аналогично, с каждой подобной алгеброй связана некоторая геометрическая структура (см. [2, 3]).

Для простоты изложения будем отождествлять элементы

$$\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{e} + \dots + x_{m-1}\mathbf{e}^{m-1} \in \mathbb{R}(\mathbb{Z}_m), \quad \mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{i} + \dots + x_{m-1}\mathbf{i}^{m-1} \in \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m),$$

где $\mathbf{e}^m = 1$ и $\mathbf{i}^m = -1$, с радиус-векторами центроаффинного пространства. Заметим, что $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ и $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ являются подалгебрами алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ комплексных циклических чисел m -го порядка, так что алгебраические свойства у них схожи.

Покажем, что в алгебрах $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ и $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ можно определить величины, которые совпадают с длинами векторов и углами между ними в евклидовой и псевдоевклидовой планиметрии, если взять $m = 2$, и эти величины инвариантны относительно преобразований некоторой линейной группы.

2. Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$\text{sp}(\hat{\alpha}_m^k(\exp \phi e^r)) = \exp \alpha_m^k \phi,$$

где $r = 1, 2, \dots, m-1$, поэтому

$$\Delta(\exp \phi e^r) = \prod_{k=0}^{m-1} \text{sp}(\hat{\alpha}_m^k(\exp \phi e^r)) = \exp(1 + \alpha_m + \alpha_m^2 + \dots + \alpha_m^{m-1})\phi = 1,$$

так как $1 + \alpha_m + \alpha_m^2 + \dots + \alpha_m^{m-1} = 0$. Остаётся лишь заметить, что

$$\Delta(\exp \Phi) = \Delta\left(\prod_{k=1}^{m-1} \exp \phi_k e^k\right) = \prod_{k=1}^{m-1} \Delta(\exp \phi_k e^k) = 1. \quad \square$$

Учитывая теорему 1, в качестве *фундаментальной формы* геометрии циклической алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ возьмём детерминант $\Delta(\mathbf{x})$ текущего элемента $\mathbf{x} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, так что *циклической длиной* вектора \mathbf{x} будет корень m -й степени из детерминанта:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt[m]{\Delta(\mathbf{x})}.$$

При этом линейные преобразования, которые сохраняют фундаментальную форму, т.е. *циклические вращения*, задаются линейными алгебраическими функциями вида $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \exp \Phi$, так как

$$\Delta(\mathbf{x}') = \Delta(\mathbf{x} \cdot \exp \Phi) = \Delta(\mathbf{x})\Delta(\exp \Phi) = \Delta(\mathbf{x}).$$

В случае $\mathbb{C}^+ \equiv \mathbb{R}(\mathbb{Z}_2)$ для циклической длины вектора $\mathbf{x} = x_0 + x_1 \mathbf{e}$ имеем выражение

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \Delta(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2,$$

а движениями в $\mathbb{C}^+ \equiv \mathbb{R}(\mathbb{Z}_2)$ являются преобразования вида

$$\mathbf{x}' = x'_0 + x'_1 \mathbf{e} = \mathbf{x} \cdot \exp(\phi \mathbf{e}) = (x_0 + x_1 \mathbf{e})(\text{ch } \phi + \mathbf{e} \text{ sh } \phi) = (x_0 \text{ ch } \phi + x_1 \text{ sh } \phi) + (x_0 \text{ sh } \phi + x_1 \text{ ch } \phi)\mathbf{e},$$

т.е. псевдоевклидовы повороты на псевдоевклидов угол ϕ . Таким образом, циклические геометрии представляют собой обобщение псевдоевклидовой планиметрии.

Циклическая длина вектора, как видно из её определения, может быть любым вещественным числом или некоторым комплексным числом. Чтобы найти те области, в которых циклическая длина векторов принимает различные значения, введём в рассмотрение *циклический сфероид*, т.е. поверхность, все точки, которой удалены от начала координат на одинаковое циклическое расстояние. Уравнение циклического сфероида имеет вид

$$\Delta(\mathbf{x}) \equiv \prod_{k=0}^{m-1} \text{sp}(\mathbf{x}(\alpha_m^k)) = \rho^m.$$

Области, в которых $\Delta(\mathbf{x}) > 0$ и $\Delta(\mathbf{x}) < 0$, разделяются *изотропным сфероидом*, т.е. сфероидом нулевого радиуса, и их взаимное расположение зависит от размерности линейного пространства циклической алгебры. Как видно из структуры детерминанта при $m = 2n + 1$, изотропный сфероид представляет собой объединение гиперплоскости, заданной уравнением

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} = 0,$$

и n плоскостей размерности $(m-2)$, заданных уравнениями

$$x_0 + \alpha_m^k x_1 + \alpha_m^{2k} x_2 + \dots + \alpha_m^{(m-1)k} x_{m-1} = 0,$$

где $k = 1, 2, \dots, n$. Если же $m = 2n$, то изотропный сфероид представляет собой объединение двух гиперплоскостей с уравнениями

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} = 0, \quad x_0 - x_1 + x_2 - \dots + x_{m-2} - x_{m-1} = 0$$

и $n-1$ плоскостей размерности $(m-2)$ с уравнениями

$$x_0 + \alpha_m^k x_1 + \alpha_m^{2k} x_2 + \dots + \alpha_m^{(m-1)k} x_{m-1} = 0,$$

где $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Например, если $m = 3$, то

$$\Delta(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2 = (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + \alpha_3x_1 + \alpha_3^2x_2)(x_0 + \alpha_3^2x_1 + \alpha_3x_2),$$

поэтому изотропный сфероид состоит из гиперплоскости с уравнением $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ и прямой $x_0 + \alpha_3x_1 + \alpha_3^2x_2 = 0$ или $x_0 = x_1 = x_2$.

Возьмём теперь $m = 2$; тогда

$$\Delta(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2 = (x_0 + x_1)(x_0 - x_1),$$

поэтому изотропный сфероид состоит из объединения двух прямых с уравнениями $x_0 + x_1 = 0$ и $x_0 - x_1 = 0$.

Если же $m = 4$, то

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{x}) &= \begin{vmatrix} x_0 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = ((x_0 + x_2)^2 - (x_0 - x_2)^2)((x_0 - x_2)^2 + (x_0 - x_2)^2) = \\ &= (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3)(x_0 + x_1i - x_2 - x_3i)(x_0 - x_1i - x_2 + x_3i), \end{aligned}$$

поэтому изотропный сфероид состоит из объединения двух трёхмерных плоскостей $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и $x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0$ одной двумерной плоскости с уравнением $(x_0 - x_2) + (x_1 - x_3)i = 0$.

Гиперплоскости, входящие в изотропный сфероид, будем называть *перегородками*, а плоскости размерности $m-2$ — *туннелями* (см. [4]). Перегородки делят пространство на части, в которых фундаментальная форма имеет одинаковый знак. Таким образом, в пространствах циклических алгебр размерности $m = 2k + 1$ имеются две области разделённые перегородкой, в одной из которых $\Delta(\mathbf{x}) > 0$, а в другой $\Delta(\mathbf{x}) < 0$. В то же время в пространствах циклических алгебр размерности $m = 2k$ имеются четыре области, разделённые двумя перегородками, причем в двух из этих областей $\Delta(\mathbf{x}) > 0$, а в двух других $\Delta(\mathbf{x}) < 0$.

Серия антициклических алгебр также порождает ряд геометрических структур, в которых фундаментальной формой будет детерминант элемента $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{i} + \dots + x_{m-1}\mathbf{i}^{m-1} \in \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & -x_{m-1} & \dots & -x_1 \\ x_1 & x_0 & \dots & -x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_0 \end{vmatrix}.$$

Заметим теперь, что поскольку $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m) \subset \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, то можно считать, что $\mathbf{i} = \alpha_{2m}\mathbf{e}$, а потому

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{i}^2 + \dots + x_{m-1}\mathbf{i}^{m-1} = x_0 + \tilde{x}_1\mathbf{i} + \tilde{x}_2\mathbf{i}^2 + \dots + \tilde{x}_{m-1}\mathbf{i}^{m-1} = \\ &= x_0 + \alpha_{2m}x_1\mathbf{e} + \alpha_{2m}^2x_2\mathbf{e}^2 + \dots + \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1}\mathbf{e}^{m-1} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m). \end{aligned}$$

Тогда для вычисления детерминанта получим следующую формулу:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \prod_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{h=0}^{m-1} \alpha_m^{kh} \tilde{x}_h \right).$$

Отсюда видно, что детерминант в антициклических алгебрах будет мультипликативной функцией, причём

$$\Delta(\exp(\Psi)) \equiv \Delta(\exp(\psi_1\mathbf{i} + \psi_2\mathbf{i}^2 + \dots + \psi_{m-1}\mathbf{i}^{m-1})) = 1$$

и, следовательно, антициклические вращения или движения в $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ задаются линейными алгебраическими функциями:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot (\exp(\Psi)) \equiv \mathbf{x} \cdot (\exp(\psi_1\mathbf{i} + \psi_2\mathbf{i}^2 + \dots + \psi_{m-1}\mathbf{i}^{m-1})).$$

Заметим ещё, что имеют место следующие изоморфизмы (см. [5]):

$$\begin{aligned}\mathbb{R}(Z_{2k+1}) &\cong \overline{\mathbb{R}}(Z_{2k+1}) \cong \mathbb{R} \oplus \underbrace{\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}}_k, \\ \mathbb{R}(Z_{2k}) &\cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \underbrace{\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}}_{k-1}, \\ \overline{\mathbb{R}}(Z_{2k}) &\cong \underbrace{\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}}_k;\end{aligned}$$

поэтому имеет смысл отдельно рассматривать только алгебры $\overline{\mathbb{R}}(Z_{2k})$.

При $m = 2$ для антициклической длины вектора $\mathbf{x} = x_0 + x_1 \mathbf{i}$ будем иметь выражение

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \Delta(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 + x_1^2,$$

а движениями в $\mathbb{C} \equiv \overline{\mathbb{R}}(Z_2)$ являются преобразования, задаваемые линейными алгебраическими функциями

$$\mathbf{x}' \equiv x'_0 + x'_1 \mathbf{e} = \mathbf{x} \cdot \exp(\psi \mathbf{i}) = (x_0 + x_1 \mathbf{i})(\cos \psi + \mathbf{i} \sin \psi) = (x_0 \cos \psi - x_1 \sin \psi) + (x_0 \sin \psi + x_1 \cos \psi) \mathbf{i},$$

т.е. евклидовы повороты на угол ψ . Таким образом, геометрии алгебр $\overline{\mathbb{R}}(Z_{2k})$ представляют собой обобщение евклидовой планиметрии.

На евклидовой плоскости изотропный сфероид — это просто нулевой вектор или точка (начало координат). Рассмотрим структуру изотропных сфероидов в алгебрах $\overline{\mathbb{R}}(Z_{2k})$ при $k > 1$. Из формул для вычисления детерминантов в этих алгебрах видно, что изотропные сфероиды в них представляют собой объединение $k - 1$ плоскостей размерности $2k - 2$.

Например, для $m = 4$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{x}) &= \begin{vmatrix} x_0 & -x_3 & -x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & -x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{x}_0 & \tilde{x}_3 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_0 & \tilde{x}_3 & \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_3 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_0 \end{vmatrix} = \\ &= (x_0 + \alpha_8^2 x_2 + \alpha_8 x_1 + \alpha_8^3 x_3)(x_0 + \alpha_8^2 x_2 - \alpha_8 x_1 - \alpha_8^3 x_3) + \\ &+ (x_0 - \alpha_8^2 x_2 + i \alpha_8 x_1 - i \alpha_8^3 x_3)(x_0 - \alpha_8^2 x_2 - i \alpha_8 x_1 + i \alpha_8^3 x_3) = \\ &= ((x_0 + i x_1)^2 - i(x_1 + i x_3)^2)((x_0 - i x_2)^2 + i(x_1 - i x_3)^2) = \\ &= (x_0^2 - x_2^2 + 2x_1 x_3)^2 + (x_3^2 - x_1^2 + 2x_0 x_2)^2,\end{aligned}$$

так как

$$\alpha_8 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_8^2 = i, \quad \alpha_8^3 = \frac{(1+i)i}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда видно, что в пространстве $\overline{\mathbb{R}}(Z_4)$ при отсутствии перегородок имеются два туннеля:

$$\left(x_0 + \frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) + i \left(x_2 + \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) = 0, \quad \left(x_0 - \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) - i \left(x_2 - \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Располагая информацией о строении изотропных сфероидов, мы можем определить инвариантные относительно движений величины, которые в циклических и антициклических пространствах будут играть роль углов между векторами.

Рассмотрим отдельно алгебры $\mathbb{R}(Z_{2k+1})$, $\mathbb{R}(Z_{2k})$ и $\overline{\mathbb{R}}(Z_{2k})$.

В алгебрах $\mathbb{R}(Z_{2k+1})$ имеется одна перегородка, которая делит циклическое пространство на полупространства \mathbf{I}_0 и \mathbf{I}_1 , где вектор с единичной координатой лежит в \mathbf{I}_0 . Тогда любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{I}_0 \subset \mathbb{R}(Z_{2k+1})$ можно однозначно записать в экспоненциальной форме

$$\mathbf{x} = {}^{2k+1}\sqrt{\Delta(\mathbf{x})} \exp(\xi_1 \mathbf{e} + \xi_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \xi_{2k} \mathbf{e}^{2k}) \equiv \|\mathbf{x}\| \exp \Xi.$$

В качестве циклического угла Θ между векторами $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \exp \Xi \in \mathbf{I}_0$ и $\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\| \exp \Gamma \in \mathbf{I}_0$ возьмём векторный элемент $\Theta = \Gamma - \Xi$, инвариантный относительно циклических вращений. При этом

циклический угол для векторов из \mathbf{I}_1 определяется с помощью автоморфизма, переводящего полупространство \mathbf{I}_1 в \mathbf{I}_0 .

В алгебрах $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_{2^k})$ имеется две перегородки, которые делят циклическое пространство на квадранты $\mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$, где вектор с единичной координатой лежит в \mathbf{I}_0 . Тогда любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{I}_0 \subset \mathbb{R}(\mathbb{Z}_{2^k})$ можно однозначно записать в *экспоненциальной* форме

$$\mathbf{x} = \sqrt[2^k]{\Delta(\mathbf{x})} \exp(\xi_1 e + \xi_2 e^2 + \dots + \xi_{2^k-1} e^{2^k-1}) \equiv \|\mathbf{x}\| \exp \Xi.$$

В качестве циклического угла Θ между векторами $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \exp \Xi \in \mathbf{I}_0$ и $\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\| \exp \Gamma \in \mathbf{I}_0$ возьмём векторный элемент $\Theta = \Gamma - \Xi$, инвариантный относительно циклических вращений. При этом циклический угол для векторов из \mathbf{I}_1 определяется с помощью автоморфизма, переводящего полупространство \mathbf{I}_1 в \mathbf{I}_0 .

Наконец, в алгебрах $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_{2^k})$ вовсе нет перегородок, и любой вектор $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_{2^k})$ можно однозначно записать в *экспоненциальной* форме

$$\mathbf{x} = \sqrt[2^k]{\Delta(\mathbf{x})} \exp(\xi_1 e + \xi_2 e^2 + \dots + \xi_{2^k-1} e^{2^k-1}) \equiv \|\mathbf{x}\| \exp \Xi;$$

в качестве циклического угла Θ между векторами $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \exp \Xi$ и $\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\| \exp \Gamma$ снова возьмём векторный элемент $\Theta = \Gamma - \Xi$, инвариантный относительно циклических вращений.

В заключение заметим, что туннели представляют собой асимптоты для уходящих в бесконечность отростков циклических и антициклических сфероидов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. — М.: МЦНМО, 2014.
2. Бурлаков И. М., Бурлаков М. П. Геометрические структуры линейных алгебр. — LAMBERT, 2017.
3. Бурлаков М. П. Гамильтоновы алгебры. — М.: Граф Пресс, 2006.
4. Бурлаков М. П., Бурлаков И. М., Гусева Н. И. Очерки об алгебрах циклических чисел. — М.: Ким, 2020.
5. Вишневецкий В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Пространства над алгебрами. — Казань: Изд-во КГУ, 1985.
6. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1967.
7. Скопец З. А. Геометрические миниатюры. — М.: Просвещение, 1990.
8. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. — М.: Наука, 1969.

Бурлаков Игорь Михайлович
Тверской государственный университет
E-mail: don.burlakoff@mail.ru

Бурлаков Михаил Петрович
Московский педагогический государственный университет
E-mail: burlakovmihail@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 50–56
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-50-56

УДК 517.929

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© 2022 г. В. Б. ВАСИЛЬЕВ, Ш. Х. КУТАИБА

Аннотация. Рассматривается модельное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в пространствах Соболева—Слободецкого во внешней области угла на плоскости. С помощью волновой факторизации в случае единственного решения исследуется ситуация, когда раcтвор угла стремится к нулю. Показано, что этот предел существует, только если правая часть удовлетворяет некоторому дополнительному условию. Это условие получено с использованием свойств сингулярных интегральных операторов.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, символ, волновая факторизация, плоский угол, сингулярный интеграл, предельное решение, граничное условие.

ELLIPTIC PROBLEMS IN DOMAINS WITH DEGENERATE SINGULARITIES

© 2022 V. B. VASILYEV, Sh. Kh. KUTAIBA

ABSTRACT. We consider a model elliptic pseudodifferential equation in Sobolev–Slobodetsky spaces in a reflex angle on the plane. Using the wave factorization, in the case of a unique solution, we study the situation where the aperture of the complementary angle tends to zero. We prove that this limit exists only if the right-hand side satisfies a certain additional condition and obtain this condition using the properties of singular integral operators.

Keywords and phrases: pseudodifferential equation, symbol, wave factorization, planar angle, singular integral, limit solution, boundary condition.

AMS Subject Classification: 35S15, 42B37, 45E05

1. Введение. В теории эллиптических псевдодифференциальных операторов и уравнений на многообразиях с особенностями, начиная с последней четверти прошлого столетия, появилось много различных подходов и интересных результатов [1, 4–6, 9, 10]. Обычно под теорией подразумевается описание условий фредгольмовости псевдодифференциального оператора и предъявление формулы для его индекса. Любой вариант теории опирается на локальный принцип, согласно которому для получения условий фредгольмовости нужно иметь условия обратимости модельных операторов в специальных канонических областях евклидова пространства. Универсальной канонической областью евклидова пространства является конус, который годится как для гладких многообразий без края (здесь в качестве канонической области выступает все пространство \mathbb{R}^m ; см. [8]), так и для многообразий с гладким краем (здесь участвуют два канонических конуса: \mathbb{R}^m и $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$; см. [6]). Самый неприятный случай конуса — это выпуклый конус, не содержащий целой прямой. С этой отправной точки были проведены первые

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № FZWG-2020-0029.

исследования автора. Однако здесь мы рассмотрим ситуацию, когда исходный конус превращается в конус меньшей размерности, когда некоторые его параметры стремятся к предельным значениям. Некоторые предварительные рассмотрения были сделаны автором в [11], и некоторые конкретные результаты получены в [7, 12].

Здесь будет рассмотрен еще один случай вырождения конуса, отличный от описанных ранее. Используемые свойства одномерных сингулярных интегральных операторов можно найти в классических монографиях [2, 3].

2. Эллиптические операторы. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ — область, $A(x, \xi)$ — измеримая функция, определенная на $D \times \mathbb{R}^m$.

Определение 1. Псевдодифференциальным оператором A в области D называется оператор вида

$$u(x) \mapsto \int_D \int_{\mathbb{R}^m} A(x, \xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} u(y) dy d\xi, \quad x \in D; \quad (1)$$

функция $A(x, \xi)$ называется символом этого оператора.

Оператор называют эллиптическим, если его символ нигде не обращается в нуль. Мы будем рассматривать эллиптические операторы, символы которых удовлетворяют условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(x, \xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha,$$

с универсальными положительными постоянными c_1, c_2 ; при этом $\alpha \in \mathbb{R}$ называют порядком псевдодифференциального оператора A . (Если вспомнить про сегодняшнее модное направление, связанное с дробными производными, то стоит подчеркнуть, что это оператор дробного порядка).

Удобными функциональными пространствами для исследования таких операторов являются пространства Соболева—Слободецкого $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, носитель которых содержится \overline{D} и конечна норма

$$\|u\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi \right)^{1/2},$$

где \tilde{u} обозначает преобразование Фурье

$$\tilde{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix \cdot \xi} u(x) dx.$$

Псевдодифференциальное уравнение

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in D, \quad (2)$$

с оператором A было предметом исследования многих работ, в которых основной акцент был сделан на построение регуляризатора для оператора, наличие которого позволяло свести исходное уравнение к интегральному уравнению Фредгольма. Это гарантировало конечность индекса оператора и в дальнейшем приводило к его вычислению. Упомянутый метод основывался на локальном принципе (или принципе замораживания коэффициентов, известном в теории уравнений с частными производными), и, в силу локального принципа, следовало описать условия обратимости некоторого модельного псевдодифференциального уравнения в специальной канонической области евклидова пространства. Это модельное уравнение должно быть «локальной копией» уравнения (2) с несущественными изменениями (которые не оказывают влияния на регуляризатор и индекс). В случае гладких символов эта локальная копия выглядит следующим образом:

$$(A_{x_0} f)(x) = g(x), \quad x \in D_{x_0},$$

где A_{x_0} — оператор с символом $A(x_0, \xi)$ (x_0 фиксировано), а D_{x_0} — специальная каноническая область (конус), который выглядит по-разному в зависимости от расположения точки x_0 в исходной области D .

2.1. *Типы канонических областей.* Первый рассмотренный тип — это евклидово пространство \mathbb{R}^m ; он возникает, когда точка x_0 — внутренняя точка области (многообразия) D . Поскольку малая окрестность такой точки диффеоморфна \mathbb{R}^m , евклидово пространство подходит в качестве канонической области D_{x_0} .

Второй тип — это полупространство

$$\mathbb{R}_+^m = \left\{ x \in \mathbb{R}^m, x = (x', x_m), x_m > 0 \right\};$$

он появляется, когда точка находится на гладкой части границы, и малая окрестность такой точки ему диффеоморфна.

Наконец, третий и наиболее неприятный канонический тип — это выпуклый конус C^k в k -мерном пространстве \mathbb{R}^k и его разновидности $\mathbb{R}^{m-k} \times C^k$. Полагаем по определению $\mathbb{R}^0 \times C^m \equiv C^m$, $\mathbb{R}^m \times C^0 \equiv \mathbb{R}^m$.

Теория разрешимости модельных уравнений в каждом типе канонических областей выглядит по-разному, и в следующем пункте мы кратко опишем их отличия.

2.2. *Эллиптические операторы в канонических областях.* Модельный оператор в канонической области имеет символ $A(\xi)$, не зависящий от пространственной переменной x . Модельное уравнение

$$(Af)(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\text{ess inf}_{\xi \in \mathbb{R}^m} |A(\xi)| > 0. \quad (3)$$

Условие (3) обычно называют условием эллиптичности уравнения (2) (или оператора A , или символа $A(\xi)$). Это условие является необходимым и достаточным для однозначной разрешимости уравнения (2) при любой правой части $g \in H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$, или, другими словами, для обратимости модельного оператора $A: H^s(\mathbb{R}^m) \rightarrow H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$.

Нетрудно сообразить, что при сделанных предположениях модельный оператор также будет линейным ограниченным оператором $A: H^s(\mathbb{R}_+^m) \rightarrow H^{s-\alpha}(\mathbb{R}_+^m)$, однако картина разрешимости модельного уравнения

$$(Af)(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^m,$$

существенно иная. Для однозначной разрешимости уравнения условия (3) уже недостаточно, ключевую роль играет специальная метрическая (порядок роста на бесконечности) и топологическая (степень отображения) характеристика символа $A(\xi)$ — число \varkappa , названная индексом факторизации [6]. Оказалось, что разность $\varkappa - s$ полностью определяет структуру решения модельного уравнения в пространстве $H^s(\mathbb{R}_+^m)$.

Последняя тип модельного уравнения — уравнение в конусе

$$(Af)(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^{m-k} \times C^k,$$

с линейным ограниченным оператором

$$A: H^s(\mathbb{R}^{m-k} \times C^k) \rightarrow H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^{m-k} \times C^k);$$

здесь выяснилось, что может оказаться полезной другая числовая характеристика, называемая индексом волновой факторизации эллиптического символа (см. [1]). Как и в предыдущем случае, разность между этим индексом и показателем s полностью определяет структуру решения, правда, конструкции оказываются несколько более громоздкими. Самое неприятное, это отсутствие алгоритма построения волновой факторизации в отличие от случая полупространства, где этот алгоритм гарантировала классическая теория краевой задачи Римана [2,3]. С учетом этого обстоятельства, наличие волновой факторизации можно считать дополнительным постулатом теории эллиптических псевдодифференциальных уравнений в конусах. Несмотря на это обстоятельство, удается рассматривать и более замысловатые конусы, которые получаются из вышеприведенных с помощью предельного перехода. Ниже мы рассмотрим простейший конус на плоскости.

3. Вырожденная особенность: двумерный случай. Пусть C_+^a — угол на плоскости

$$C_+^a = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0 \right\}.$$

Мы рассматриваем модельное уравнение вида

$$(Af)(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus C_+^a, \quad (4)$$

в предположении, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно $-C_+^a$ (знак « $-$ » нужен, в отличие от определения в [1], поскольку мы рассматриваем дополнение к выпуклому конусу). Напомним, что это специальное представление символа

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

множителями, обладающими специальными свойствами, связанными с аналитическим продолжением в радиальные трубчатые области комплексного пространства \mathbb{C}^2 . Кратко поясним сказанное.

Конусом, сопряженным к C_+^a называется конус

$$C_+^{*a} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), ax_2 > |x_1| \right\};$$

радиальная трубчатая область $T(C_+^{*a})$ над конусом C_+^{*a} — это множество вида $\mathbb{R}^2 + i C_+^{*a}$.

Волновая факторизация требует аналитической продолжимости операторов $A_{\neq}(\xi)$ и $A_{=}(\xi)$ в $T(-C_+^{*a})$ и $T(C_+^{*a})$ соответственно с оценками

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi - i\tau)| \leq c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm \varkappa}, \quad |A_{=}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| \leq c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - \varkappa)}$$

для всех $\tau \in C_+^{*a}$; и число \varkappa называется индексом волновой факторизации.

Введем интегральный оператор (см. [1])

$$(G_a \tilde{u})(\xi) = \frac{a}{2\pi^2} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{u}(\eta) d\eta}{(\xi_1 - \eta_1)^2 - a^2(\xi_2 - \eta_2 + i\tau)^2}. \quad (5)$$

Теорема 1 (см. [1]). Пусть символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_+^a с таким индексом \varkappa , что $|\varkappa - s| < 1/2$. Тогда уравнение (4) имеет единственное решение в пространстве $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus C_+^a)$, которое в образах Фурье дается формулой

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)(I - G_a)(A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{\ell}g(\xi)), \quad (6)$$

где ℓg — произвольное продолжение g на все $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$.

Замечание 1. В отличие от [1], в теореме 1 записан оператор $I - G_a$, поскольку оператор G_a «обслуживает» угол C_+^a , а мы рассматриваем уравнение во внешней области угла.

Ниже мы попытаемся выяснить, что произойдет с решением, когда $a \rightarrow \infty$. Основной момент в этом разделе — поведение оператора G_a при $a \rightarrow \infty$.

Лемма 1. Имеет место соотношение

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (G_2 \tilde{u})(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \tilde{u}(\xi_1, 0).$$

для функций из класса Шварца $S(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Сделаем в (5) замену переменных

$$\begin{cases} \eta_1 - a\eta_2 = y_1, \\ \eta_1 + a\eta_2 = y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 - a\xi_2 = t_1, \\ \xi_1 + a\xi_2 = t_2. \end{cases}$$

Перепишем оператор G_a в новых переменных

$$(G_a \tilde{u}) \left(\frac{t_2 + t_1}{2}, \frac{t_2 - t_1}{2a} \right) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{u} \left(\frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2a} \right) dy}{(t_1 - ia\tau - y_1)(t_2 + ia\tau - y_2)} \quad (7)$$

с учетом вычисления якобиана

$$\frac{D(\eta_1, \eta_2)}{D(y_1, y_2)} = \frac{1}{2a}.$$

Обозначим

$$\tilde{u} \left(\frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2a} \right) \equiv \tilde{U}(y_1, y_2).$$

Если ввести двумерный интеграл типа Коши (см. [2])

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{U}(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{(y_1 - z_1)(y_2 - z_2)},$$

то предел в формуле (7) соответствует граничному значению $\Phi^{-+}(t_1, t_2)$. Все четыре граничных значения функции $\Phi^{\pm\pm}(t_1, t_2)$ были вычислены В. А. Какичевым и включены в последнее издание книги [2]. Эти формулы играют важную роль при изучении двумерного аналога краевой задачи Римана в бицилиндрических областях.

Введем два одномерных сингулярных интегральных оператора по переменным y_1, y_2 :

$$(S_1 \tilde{U})(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{U}(\eta_1, \xi_2) d\eta_1}{\eta_1 - \xi_1}, \quad (S_2 \tilde{U})(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{U}(\xi_1, \eta_2) d\eta_2}{\eta_2 - \xi_2}.$$

С учетом упомянутых граничных значений формула (7) примет вид

$$\begin{aligned} (G_a \tilde{u}) \left(\frac{t_2 + t_1}{2}, \frac{t_2 - t_1}{2a} \right) &= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{U}(y_1, y_2) dy}{(t_1 - ia\tau - y_1)(t_2 + ia\tau - y_2)} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{U}(y_1, y_2) dy}{(t_1 - ia\tau - y_1)(t_2 + ia\tau - y_2)} = \\ &= \frac{1}{4} (\tilde{U}(t_1, t_2) - (S_1 \tilde{U})(t_1, t_2) + (S_2 \tilde{U})(t_1, t_2) + (S_1 S_2 \tilde{U})(t_1, t_2)) \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим интегральные слагаемые

$$(S_1 \tilde{U})(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{U}(y_1, t_2) dy_1}{y_1 - t_1} = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u} \left(\frac{t_2 + y_1}{2}, \frac{t_2 - y_1}{2a} \right) dy_1}{y_1 - t_1}.$$

Если \tilde{u} — функция, например, из класса Шварца $S(\mathbb{R}^2)$, то при $a \rightarrow \infty$ последний интеграл примет вид

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (S_1 \tilde{U})(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u} \left(\frac{t_2 + y_1}{2}, 0 \right) dy_1}{y_1 - t_1}$$

Делая замену $(t_2 + y_1)/2 = x_1$, после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} (S_1 \tilde{U})(t_1, t_2) &= \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\tilde{u}(x_1, 0) dx_1}{2x_1 - t_2 - t_1} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(x_1, 0) dx_1}{x_1 - \frac{t_2 + t_1}{2}} = (S_1 \tilde{u}) \left(\frac{t_2 + t_1}{2}, 0 \right). \end{aligned}$$

Третье слагаемое из формулы (8) имеет вид

$$(S_2\tilde{U})(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{U}(t_1, y_2) dy_2}{y_2 - t_2} = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}\left(\frac{y_2+t_1}{2}, \frac{y_2-t_1}{2a}\right) dy_2}{y_2 - t_2}.$$

Как и в предыдущем интеграле, в пределе получим

$$\frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}\left(\frac{y_2+t_1}{2}, 0\right) dy_2}{y_2 - t_2},$$

и с помощью аналогичной замены переменных получим такой же результат:

$$\lim_{a \rightarrow 0} (S_2\tilde{U})(t_1, t_2) = (S_1\tilde{u})\left(\frac{t_2+t_1}{2}, 0\right).$$

Последнее слагаемое — это бисингулярный интеграл

$$\begin{aligned} (S_1S_2\tilde{U})(t_1, t_2) &= \\ &= \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(S_2\tilde{U})(y_1, t_2) dy_1}{y_1 - t_1} = -\frac{1}{\pi^2} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_1}{y_1 - t_1} \left(\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{U}(y_1, y_2) dy_2}{y_2 - t_2} \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_1}{y_1 - t_1} \left(\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}\left(\frac{y_2+y_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2a}\right) dy_2}{y_2 - t_2} \right). \end{aligned}$$

Далее, при $a \rightarrow \infty$ находим

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (S_1S_2\tilde{U})(t_1, t_2) = -\frac{1}{\pi^2} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_1}{y_1 - t_1} \left(\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}\left(\frac{y_2+y_1}{2}, 0\right) dy_2}{y_2 - t_2} \right).$$

Вновь делая замену переменной $(y_2 + y_1)/2 = x_2$, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi^2} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_1}{y_1 - t_1} \left(\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}\left(\frac{y_2+y_1}{2}, 0\right) dy_2}{y_2 - t_2} \right) &= \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_1}{y_1 - t_1} \left(\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\tilde{u}(x_2, 0) dx_2}{2x_2 - y_1 - t_2} \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_1}{y_1 - t_1} \left(\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(x_2, 0) dx_2}{x_2 - \frac{y_1+t_2}{2}} \right) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(S_1\tilde{u})\left(\frac{y_1+t_2}{2}, 0\right) dy_1}{y_1 - t_1} \end{aligned}$$

Еще раз делая замену $(y_1 + t_2)/2 = x_1$, приходим к соотношению

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (S_1S_2\tilde{U})(t_1, t_2) = (S_1^2\tilde{u})\left(\frac{t_2+t_1}{2}, 0\right) = \tilde{u}\left(\frac{t_2+t_1}{2}, 0\right).$$

Собирая все слагаемые формулы (8) и учитывая формулу (7), заключаем, что искомый предел в переменных t_1, t_2 имеет вид

$$\frac{1}{2} \tilde{u}\left(\frac{t_2+t_1}{2}, 0\right). \quad (9)$$

Возвращаясь в (9) к переменной ξ , получаем утверждение леммы 1. \square

4. Предельное решение.

Теорема 2. В дополнение к условиям теоремы 1 предположим, что волновая факторизация с индексом κ существует для всех достаточно больших a и $g \in H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Тогда предел

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2)$$

существует и принимает следующий вид:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = A^{-1}(\xi) \tilde{g}(\xi) - \frac{1}{2} A^{-1}(\xi_1, 0) \tilde{g}(\xi_1, 0). \quad (10)$$

Доказательство. Если раскрыть скобки в формуле (6), получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) &= A_{\neq}^{-1}(\xi)(I - G_a)(A_{=}^{-1}(\xi) \tilde{g}(\xi)) = A_{\neq}^{-1}(\xi) A_{=}^{-1}(\xi) \tilde{g}(\xi) - A_{\neq}^{-1}(\xi) G_a(A_{=}^{-1}(\xi) \tilde{g}(\xi)) = \\ &= A^{-1}(\xi) \tilde{g}(\xi) - A_{\neq}^{-1}(\xi) G_a(A_{=}^{-1}(\xi) \tilde{g}(\xi)). \end{aligned}$$

Первое слагаемое от a не зависит, а со вторым работаем с учетом леммы 1 и вышеупомянутой заменой переменных, после чего легко приходим к формуле (10). \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: УРСС, 2010.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
3. Мухомелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
4. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. — М.: Наука, 1991.
5. Пламеневский Б. А. Псевдодифференциальные операторы на кусочно гладких многообразиях. — Новосибирск: Тамара Рожковская, 2010.
6. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
7. Kutaiba Sh., Vasilyev V. On solutions of certain limit boundary-value problems// AIP Conf. Proc. — 2020. — 2293. — 110006.
8. Mikhlín S. G., Pröβdorf S. Singular Integral Operators. — Berlin: Akademie-Verlag, 1986.
9. Nazaikinskii V., Schulze B.-W., Sternin B. The Localization Problem in Index Theory of Elliptic Operators. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2014.
10. Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V. Differential Equations on Singular Manifolds: Semiclassical Theory and Operator Algebras. — Berlin: Wiley-VCH, 1998.
11. Vasilyev V. B. Asymptotical analysis of singularities for pseudodifferential equations in canonical non-smooth domains// in: Integral Methods in Science and Engineering. Computational and Analytic Aspects (Constanda C., Harris P. J., eds.). — Boston: Birkhäuser, 2011. — P. 379–390.
12. Vasilyev V. B. On certain 3D limit boundary-value problem// Lobachevskii J. Math. — 2020. — 41, № 5. — P. 913–921.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: vbv57@inbox.ru

Кутаиба Шабан Хасан
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: 1167542@bsu.edu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 57–65
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-57-65

УДК 514.13; 514.752

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

© 2022 г. А. В. КОСТИН, Н. Н. КОСТИНА

Аннотация. Задача о тени в евклидовом пространстве поставлена Г. Худайбергановым в 1982 г. Ее решение для размерностей >2 , а также различные обобщения были получены группой украинских математиков во главе с Ю. Б. Зелинским в 2015 г. В работе рассматриваются некоторые вариации таких задач и их обобщений в пространстве Лобачевского, а также близкой задачи об освещении для пространства Лобачевского. В евклидовом пространстве эта задача была поставлена В. Г. Болтянским.

Ключевые слова: пространство Лобачевского, обобщенная выпуклость, задача о тени, задача об освещении, сфера, шар, орицикл.

SOME PROBLEMS OF CONVEX ANALYSIS IN THE LOBACHEVSKY SPACE

© 2022 A. V. KOSTIN, N. N. KOSTINA

ABSTRACT. The shadow problem in the Euclidean space was posed by G. Khudaiberganov in 1982. Its solution for dimensions >2 and various generalizations were obtained by a group of Ukrainian mathematicians led by Yu. B. Zelinsky in 2015. In this paper, we consider some variations of such problems and their generalizations in the Lobachevsky space and a closed lighting problem for the Lobachevsky space. In the Euclidean space, this problem was posed by V. G. Boltyansky.

Keywords and phrases: Lobachevsky space, generalized convexity, shadow problem, lighting problem, sphere, ball, horocycle.

AMS Subject Classification: 53A35, 53B30

1. Введение. В 1982 г. в [8] (см. также [3]) Г. Худайберганов предложил задачу о тени в следующей постановке:

Задача 1. Какое минимальное число попарно не пересекающихся шаров с центрами на $(n-1)$ -мерной сфере n -мерного евклидова пространства и радиуса меньшего, чем радиус сферы, достаточно для того, чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Им же было доказано, что в двумерном случае достаточно двух шаров и сделано предположение, что в n -мерном случае будет достаточно n шаров. Это предположение оказалось ошибочным. Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская и М. В. Стефанчук в [2] доказали, что в n -мерном евклидовом пространстве при $n > 2$ для решения задачи необходимое количество шаров равно $n + 1$. Задача о тени является частным случаем задачи о принадлежности точки обобщенно-выпуклой оболочке семейства множеств. Приведем соответствующие определения для пространства Лобачевского (см. [12]). Термины «гиперболическая плоскость» и «гиперболическое пространство» в работе рассматриваются как синонимы плоскости Лобачевского и пространства Лобачевского.

Определение 1. Множество U из n -мерного гиперболического пространства H^n называется t -выпуклым относительно произвольной фиксированной точки $M \in H^n \setminus U$, если существует t -мерная плоскость, проходящая через точку M и не имеющая с множеством U общих точек.

Пересечение любого семейства множеств, t -выпуклых относительно не принадлежащей этим множествам точки M , является t -выпуклым относительно точки M .

Определение 2. Множество $U \in H^n$, являющееся t -выпуклым относительно каждой точки $M \in H^n \setminus U$, называется t -выпуклым.

Это определение также удовлетворяет аксиоме выпуклости: пересечение t -выпуклых множеств само является t -выпуклым.

Определение 3. Минимальное t -выпуклое множество, содержащее множество $U \in H^n$, называется t -выпуклой оболочкой множества U .

Задача о тени эквивалентна задаче о принадлежности центра сферы 1-выпуклой оболочке семейства шаров, центры которых лежат на данной сфере, а радиусы меньше радиуса этой сферы. Если в определениях t -выпуклости заменить t -плоскости на t -полуплоскости, то получим определение t -полувыпуклости.

Определение 4. Множество U из n -мерного пространства Лобачевского H^n называется t -полувыпуклым относительно произвольной фиксированной точки $M \in H^n \setminus U$, если существует t -мерная полуплоскость, проходящая через точку M и не имеющая с множеством U общих точек.

Определение 5. Множество $U \in H^n$, являющееся t -полувыпуклым относительно каждой точки $M \in H^n \setminus U$, называется t -полувыпуклым. Минимальное t -полувыпуклое множество, содержащее множество $U \in H^n$, называется t -полувыпуклой оболочкой множества U .

Все эти определения являются калькой соответствующих определений из работ Ю. Б. Зелинского и его коллег. Недостающие определения будут приведены по ходу изложения.

2. Основные результаты. Сформулируем основные результаты работы. В теореме 1 найдены условия, при которых решение задачи о касательной тени на плоскости Лобачевского совпадает с евклидовым. В теореме 2 и следствии из нее получены условия, при которых минимальное число кругов, обеспечивающих создание касательной тени во всех точках окружности на плоскости Лобачевского, равно n . В теоремах 3 и 4 обобщена задача Зелинского о касательной тени, а именно, в теореме 3 установлены условия, при которых каждая плоскость, касающаяся сферы S^2 радиуса R в трехмерном пространстве Лобачевского, пересекается хотя бы с одним из четырех равных шаров радиуса $r < R$ с центрами на сфере S^2 , а в теореме 4 найдены аналогичные условия для $(n - 1)$ -мерной сферы в n -мерном пространстве Лобачевского, $n + 1$ шаров и касательных гиперплоскостей. В теоремах 5 и 6 описаны множества на плоскости Лобачевского и в пространстве Лобачевского, являющиеся слабо 1-полувыпуклыми, но не 1-полувыпуклыми. Теорема 7 дает решение задачи Болтянского об освещении для круга на плоскости Лобачевского. Теорема 8 посвящена одному обобщению задачи об освещении для тела с гладкой границей.

3. Задача о касательной тени. Ю. Б. Зелинский рассматривал различные вариации задачи о тени. В одной из них прямые, проходящие через центр сферы, заменяются на касательные прямые:

Задача 2. Какое минимальное число попарно не пересекающихся шаров с центрами на $(n - 1)$ -мерной сфере n -мерного евклидова пространства и радиуса меньшего, чем радиус сферы, достаточно для того, чтобы любая прямая, касающаяся сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Этот вариант в статье [3] назван задачей о касательной тени. Шары, удовлетворяющие условию этой задачи, будем называть шарами, создающими касательную тень. На евклидовой плоскости

достаточно рассматривать единичную окружность и круги, радиусы которых меньше единицы. Для создания касательной тени в этом случае достаточно трех кругов с центрами на окружности.

В задачах, касающихся обобщенной выпуклости, и смежных задачах в гиперболической геометрии, в отличие от евклидова случая, результаты, как правило, существенно зависят от линейных размеров фигур [4, 5, 10–12]. Предварительно оценим величину радиуса окружности на гиперболической плоскости, удовлетворяющего условию, что три равных круга с центрами на этой окружности обеспечивают создание касательной тени, то есть найдем граничное значение радиуса, при котором это число кругов совпадает с евклидовым.

Теорема 1. Пусть на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1/\rho^2$ задана окружность S^1 , радиус r которой удовлетворяет условию $R < \rho \cdot \operatorname{Arch} \sqrt{3}$. Тогда минимальное число кругов равного радиуса $r < R$ с центрами на S^1 , обеспечивающих создание касательной тени, равно трем.

Доказательство. Двух кругов равного радиуса, меньшего, чем R , с центрами на S^1 для создания касательной тени недостаточно. Хотя бы в одной из точек пересечения оси симметрии этих кругов с окружностью S^1 касательная тень не создается. Впрочем, и два круга разных радиусов, меньших R , тоже не обеспечат создание касательной тени во всех точках окружности. Расположим три круга равного радиуса $r < R$ в вершинах правильного треугольника ABC , вписанного в окружность S^1 . Пусть точка O — центр окружности S^1 . Обозначим через D точку окружности S^1 , диаметрально противоположную точке C . Пусть прямая m — касательная к окружности S^1 в точке D . Опустим из вершины A перпендикуляр на прямую m . Пусть точка E — основание этого перпендикуляра. Четырехугольник $O A E D$ является двупрямоугольником I рода [6], то есть двупрямоугольником с двумя соседними прямыми углами. Отрезок ED в нем называется базисом, противоположная сторона OA — антибазисом, отрезки AE и OD — боковыми сторонами. Между элементами этого двупрямоугольника имеется следующее соотношение:

$$\operatorname{sh} \frac{AE}{\rho} = \operatorname{sh} \frac{OD}{\rho} \cdot \operatorname{ch} \frac{OA}{\rho} - \operatorname{ch} \frac{OD}{\rho} \cdot \operatorname{sh} \frac{OA}{\rho} \cdot \cos \angle AOD. \quad (1)$$

Учитывая, что $OA = OD = R$, $\angle AOD = \pi/3$, получим:

$$\operatorname{sh} \frac{AE}{\rho} = \operatorname{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \operatorname{ch} \frac{R}{\rho} - \operatorname{ch} \frac{R}{\rho} \cdot \operatorname{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \cos \frac{\pi}{3}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем:

$$\operatorname{sh} \frac{AE}{\rho} = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \operatorname{ch} \frac{R}{\rho}. \quad (3)$$

Предельное значение r_0 радиусов непересекающихся кругов с центрами на окружности S^1 равно половине стороны правильного треугольника ABC . Отсюда

$$\operatorname{sh} \frac{r_0}{\rho} = \operatorname{sh} \frac{a}{2\rho} = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sh} \frac{R}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{R}{\rho}. \quad (4)$$

Если круги открыты, то это предельное значение достигается, если замкнуты, то не достигается. Если теперь боковая сторона AE двупрямоугольника будет меньше, чем r , то трех кругов для создания касательной тени во всех точках окружности S^1 будет достаточно. Соотношение $AE/r < 1$ эквивалентно соотношению

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{AE}{\rho}}{\operatorname{sh} \frac{r}{\rho}} < 1. \quad (5)$$

Оценим его. Учитывая (3), (4), и подставив в (5) $r = r_0$, имеем:

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{AE}{\rho}}{\operatorname{sh} \frac{r_0}{\rho}} = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \operatorname{ch} \frac{R}{\rho}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{R}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{ch} \frac{R}{\rho}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что при $R < \rho \cdot \text{Arch} \sqrt{3}$ трех кругов для создания касательной тени во всех точках окружности будет достаточно. Теорема доказана. \square

При увеличении радиуса R окружности число кругов, необходимое для создания касательной тени, растет до бесконечности. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1/\rho^2$ задана окружность S^1 , радиус R которой удовлетворяет условию

$$R < \rho \cdot \text{Arch} \left(\text{ctg} \frac{\pi}{2n} \right). \quad (7)$$

Тогда для создания касательной тени во всех точках окружности S^1 достаточно n кругов равного радиуса $r < R$ с центрами на S^1 .

Доказательство. Аналогично предыдущему случаю, расположим центры кругов в вершинах правильного n -угольника $A_1 A_2 \dots A_n$, вписанного в окружность S^1 . Предельное значение радиуса r_0 круга будет равно половине стороны n -угольника.

$$\text{sh} \frac{r_0}{\rho} = \sin \frac{\pi}{n} \cdot \text{sh} \frac{R}{\rho}. \quad (8)$$

Обозначим через D середину дуги $A_1 A_2$. В точке D проведем касательную к S^1 и опустим на нее перпендикуляр $A_1 E$. В двупрямоугольнике $OA_1 E D$ имеем:

$$\text{sh} \frac{AE}{\rho} = \text{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \text{ch} \frac{R}{\rho} - \text{ch} \frac{R}{\rho} \cdot \text{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \cos \frac{\pi}{n}, \quad (9)$$

или

$$\text{sh} \frac{AE}{\rho} = \text{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \text{ch} \frac{R}{\rho} \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}. \quad (10)$$

Оценим отношение

$$\frac{\text{sh} \frac{A_1 E}{\rho}}{\text{sh} \frac{r_0}{\rho}} = \frac{\text{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \text{ch} \frac{R}{\rho} \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{n} \cdot \text{sh} \frac{R}{\rho}} = \text{tg} \frac{\pi}{2n} \cdot \text{ch} \frac{R}{\rho}. \quad (11)$$

Если

$$\frac{\text{sh} \frac{A_1 E}{\rho}}{\text{sh} \frac{r_0}{\rho}} < 1,$$

то n равных кругов для создания касательной тени достаточно. Из (11) следует, что это условие будет выполняться при

$$R < \rho \cdot \text{Arch} \left(\text{ctg} \frac{\pi}{2n} \right).$$

Теорема доказана. \square

Следствие. Пусть на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1/\rho^2$ задана окружность S^1 , радиус R которой удовлетворяет условию

$$\rho \cdot \text{Arch} \left(\text{ctg} \frac{\pi}{2(n-1)} \right) \leq R < \rho \cdot \text{Arch} \left(\text{ctg} \frac{\pi}{2n} \right). \quad (12)$$

Тогда минимальное число кругов равного радиуса $r < R$ с центрами на S^1 , обеспечивающих создание касательной тени во всех точках окружности, равно n .

Обобщим задачу Зелинского о касательной тени следующим образом:

Задача 3. Какое минимальное число попарно не пересекающихся шаров с центрами на $(n-1)$ -мерной сфере n -мерного пространства и радиуса меньшего, чем радиус сферы, достаточно для того, чтобы любая m -плоскость, касающаяся сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

В пространстве Лобачевского эта задача становится содержательной уже для касательных гиперплоскостей. Предварительно оценим значение радиуса R сферы S^2 трехмерного пространства Лобачевского, когда число шаров равного радиуса, обеспечивающих выполнение условий задачи, совпадает с евклидовым.

Теорема 3. Пусть в пространстве Лобачевского H^3 кривизны $K = -1/\rho^2$ задана сфера S^2 , радиус R которой удовлетворяет условию:

$$R < \rho \cdot \text{Arch} \sqrt{3/2}. \quad (13)$$

Тогда минимальное число шаров равного радиуса $r < R$ с центрами на S^2 , обеспечивающих выполнение условия, при котором каждая касательная к сфере плоскость пересекается хотя бы с одним из шаров, равно четырем.

Доказательство. Трех шаров, очевидно, недостаточно. Проведем диаметр сферы S^2 , перпендикулярный плоскости, проходящей через центры шаров. Хотя бы одна из плоскостей, касающихся сферы S^2 в концах этого диаметра, не будет пересекаться ни с одним из этих шаров. В евклидовом пространстве такая плоскость была бы параллельна плоскости центров шаров. Расположим центры четырех шаров в вершинах правильного тетраэдра $ABCD$, вписанного в сферу S^2 . Обозначим через O центр сферы S^2 . Пусть T — точка пересечения прямой DO со сферой S^2 . Из вершины A опустим перпендикуляр на плоскость Σ , касающуюся сферы S^2 в точке T . Пусть точка E — основание этого перпендикуляра. Четырехугольник $OAET$ является двупрямоугольником первого рода с базисом ET . Величина угла AOT в этом четырехугольнике совпадает с величиной евклидова угла четырехугольника в аналогичной конструкции, а антибазис OA и боковая сторона OT равны радиусу R сферы S^2 . В двупрямоугольнике имеем:

$$\text{sh} \frac{AE}{\rho} = \text{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \text{ch} \frac{R}{\rho} - \text{ch} \frac{R}{\rho} \cdot \text{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \cos \angle AOT, \quad (14)$$

или

$$\text{sh} \frac{AE}{\rho} = \frac{2}{3} \cdot \text{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \text{ch} \frac{R}{\rho}. \quad (15)$$

Обозначим через φ угол между перпендикуляром, проведенным из центра O тетраэдра к ребру, и отрезком, соединяющим центр с вершиной тетраэдра. Тогда, как и в евклидовом случае,

$$\sin \varphi = \sqrt{2/3}.$$

Предельное значение r_0 радиусов непересекающихся шаров будет равно половине длины ребра правильного тетраэдра $ABCD$. Следовательно,

$$\text{sh} \frac{r_0}{\rho} = \text{sh} \frac{AB}{2\rho} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \text{sh} \frac{R}{\rho}. \quad (16)$$

Если

$$\frac{\text{sh}(AE/\rho)}{\text{sh}(r_0/\rho)} < 1, \quad (17)$$

то каждая касательная плоскость будет пересекаться хотя бы с одним из четырех шаров. Поделив почленно равенство (15) на (16), получим, что при

$$R < \rho \cdot \text{Arch} \sqrt{3/2}$$

это условие будет выполняться. Теорема доказана. \square

Обобщим это утверждение следующим образом.

Теорема 4. Пусть в пространстве Лобачевского H^n кривизны $K = -1/\rho^2$ задана сфера S^{n-1} , радиус R которой удовлетворяет условию:

$$R < \rho \cdot \text{Arch} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{(n-1)\sqrt{2}}. \quad (18)$$

Тогда минимальное число шаров равного радиуса $r < R$ с центрами на S^{n-1} , обеспечивающих выполнение условия, при котором каждая касательная к сфере гиперплоскость пересекается хотя бы с одним из шаров, равно $n + 1$.

Доказательство. Если взять n шаров радиуса $r < R$ с центрами на S^{n-1} и провести диаметр сферы перпендикулярно гиперплоскости, проходящей через центры шаров, то хотя бы одна касательная гиперплоскость, проходящая через концы диаметра, не пересечется ни с одним из шаров. Значит, n шаров недостаточно. Расположим центры $n + 1$ -го шара в вершинах правильного симплекса $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$, вписанного в S^{n-1} . Обозначим через φ угол между перпендикуляром, проведенным из центра O симплекса к ребру, и отрезком, соединяющим центр с вершиной симплекса. Тогда

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}.$$

Предельное значение r_0 радиусов непересекающихся шаров будет равно половине длины ребра правильного симплекса $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$. Следовательно,

$$\operatorname{sh} \frac{r_0}{\rho} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \cdot \operatorname{sh} \frac{R}{\rho}. \quad (19)$$

Пусть точка T диаметрально противоположна вершине A_{n+1} . Проведем через точку T гиперплоскость, касающуюся сферы S^{n-1} , и опустим на эту гиперплоскость перпендикуляр $A_1 E$. Как выше, имеем:

$$\operatorname{sh} \frac{A_1 E}{\rho} = \operatorname{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \operatorname{ch} \frac{R}{\rho} \cdot (1 - \cos \angle A_1 O T), \quad (20)$$

или

$$\operatorname{sh} \frac{A_1 E}{\rho} = \frac{n-1}{n} \operatorname{sh} \frac{R}{\rho} \cdot \operatorname{ch} \frac{R}{\rho}. \quad (21)$$

Если

$$\frac{\operatorname{sh}(A_1 E/\rho)}{\operatorname{sh}(r_0/\rho)} < 1, \quad (22)$$

то каждая касательная гиперплоскость будет пересекаться хотя бы с одним из шаров выбранного семейства. Подставив в (22) выражения из (19) и (21), получим, что при выполнении условия

$$R < \rho \cdot \operatorname{Arch} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{(n-1)\sqrt{2}}$$

касательные гиперплоскости в каждой точке сферы будут пересекаться хотя бы с одним из $n+1$ -го шаров. Теорема доказана. \square

4. Открытые множества с **Z**-свойством на плоскости и в пространстве Лобачевского. Приведем необходимые определения.

Определение 6. Орициклом (см. [7]) на плоскости Лобачевского H^2 называется линия, ортогонально пересекающая пучок параллельных прямых. Прямые пучка называются осями орицикла. Орикругом называется область на H^2 , ограниченная орициклом.

Орицикл можно определить как линию уровня функции Буземана, а орикруг — как множество подуровня этой функции.

На плоскости Лобачевского семейство непересекающихся выпуклых множеств, объединение которых не является 1-выпуклым множеством, может иметь любое, большее единицы, число компонент связности. В частности, минимальное число непересекающихся орикругов, обеспечивающее принадлежность произвольной фиксированной точки плоскости Лобачевского их 1-выпуклой оболочке, равно двум. Минимальное число непересекающихся орикругов, обеспечивающее принадлежность произвольной фиксированной точки плоскости Лобачевского их 1-полувыпуклой оболочке, равно трем. Ю. Б. Зелинский ввел в рассмотрение множества следующего вида (см., например, [13]).

Определение 7. Множество E называется слабо 1-полувыпуклым, если для любой точки границы ∂E существует луч с началом на ∂E , не пересекающийся с E .

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Множество на плоскости Лобачевского, являющееся объединением непересекающихся открытых множеств, из которых два орикруга и два круга, может быть слабо 1-полувыпуклым, но не 1-полувыпуклым.*

Доказательство. Эта теорема является непосредственным следствием работы Т. М. Осипчук [13]. Построенные в этой работе конструкции непосредственно переносятся на плоскость Лобачевского, причем некоторые из фигурирующих там множеств можно заменить такими, аналогов которых нет на евклидовой плоскости. Сами приведенные там множества можно рассматривать как множества на плоскости Лобачевского в модели Бельтрами—Клейна. Опишем одну из конструкций для H^2 синтетически. Возьмем на плоскости Лобачевского ромб $ABCD$ — четырехугольник с равными сторонами. Выберем углы в противоположных вершинах A, C . В вертикальные с ними углы впишем по орициклу ω_1 и ω_2 соответственно. В угол ADC впишем окружность, проходящую через точку B и не имеющую с ромбом других общих точек, а в угол ABC — окружность, проходящую через точку D и также не имеющую с ромбом других общих точек. Пусть P — точка пересечения орицикла ω_1 с его осью, проходящей через центр ромба. Можно так подобрать параметры конфигурации, что касательная l к орициклу ω_1 в точке P не будет пересекать круги. Обозначим через L точку пересечения касательной l с прямой DA . Можно показать, что если величина угла BAD будет равна $\arccos \frac{1}{9}$, то ось орицикла, проходящая через точку L , будет параллельна прямой AB . При большей величине угла BAD указанные прямые будут пересекаться. В обоих случаях, то есть, если ось орицикла ω_1 , проходящая через точку L , не расходится с прямой AB , описанная выше конфигурация кругов и орикругов реализуема. Объединение открытых кругов и орикругов в ней будет слабо 1-полувыпуклым множеством, а внутренние точки ромба будут принадлежать 1-полувыпуклой оболочке построенного множества. Значит, множество, являющееся объединением этих четырех открытых кругов и орикругов, не 1-полувыпукло. Теорема доказана. \square

Т. М. Осипчук в память о Ю. Б. Зелинском множества, слабо 1-полувыпуклые, но не 1-полувыпуклые, назвала множествами, обладающими Z -свойством. На евклидовой плоскости множество, обладающее Z -свойством, обязано иметь не менее трех компонент связности [9]. В трехмерном случае ситуация иная. Сформулируем соответствующее утверждение для пространства Лобачевского.

Теорема 6. *Множество, обладающее Z -свойством в трехмерном пространстве Лобачевского, может иметь любое число компонент связности.*

Доказательство. Поместим плоскость Лобачевского с конфигурацией кругов и орикругов из теоремы 5 в трехмерное пространство Лобачевского (круги и орикруги можно было бы заменить другими парами равных открытых множеств с гладкой границей). Вращением вокруг оси симметрии получим множество из трех компонент связности, слабо 1-полувыпуклое, но не 1-полувыпуклое. Двумя достаточно тонкими трубками склеим компоненты. Получим связное множество с Z -свойством в H^3 . Ясно, что к нему можно добавлять любое число компонент связности, сохраняя Z -свойство. Теорема доказана. \square

5. Задача об освещении. Задача об освещении поставлена В. Г. Болтянским (см. [5]) в следующем виде:

Задача 4. Требуется найти наименьшее число параллельных световых пучков, которыми можно осветить всю границу выпуклой фигуры F . Освещение границы понимается в смысле трансверсального пересечения границы прямыми со стороны бесконечно удаленного источника света. Для фигуры с негладкой границей опорные «лучи» в особых точках тоже не считаются освещающими границу.

Мы будем рассматривать только ограниченные фигуры и тела. Если в качестве фигуры F на евклидовой плоскости выступает круг, то для его освещения, очевидно, требуется три параллельных пучка прямых. На плоскости Лобачевского под освещением круга будем понимать трансверсальное пересечение границы фигуры пучками параллелей со стороны бесконечно удаленных центров пучков. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1/\rho^2$ задан круг, радиус R которого удовлетворяет условию

$$R < \rho \cdot \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \right).$$

Тогда для освещения этого круга достаточно n параллельных пучков прямых.

Доказательство. Каждый пучок освещает открытую дугу граничной окружности, видимую из центра окружности под углом $2\Pi(R)$, где $\Pi(R)$ — угол параллельности отрезка R . Предельное значение радиуса окружности будет определяться условием $\pi/n = \Pi(R)$. Используя формулу Лобачевского для угла параллельности

$$\operatorname{ctg} \frac{\Pi(R)}{2} = \exp \frac{R}{\rho},$$

получим, что при

$$R < \rho \cdot \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \right)$$

для освещения круга n пучков будет достаточно. Теорема доказана. \square

Определение 8. Теневой стороной связки (пучка, при $n = 2$) параллельных прямых в пространстве Лобачевского H^n назовем сторону, противоположную бесконечно удаленному источнику.

Очевидно, что для трансверсального покрытия окружности теневыми сторонами пучков параллелей достаточно двух пучков. Расположив центры пучков в «концах» прямой, проходящей через центр окружности, получим выполнение данного условия. Имеет место и более общая теорема. Мы приведем ее вариант для трехмерного пространства.

Теорема 8. Если граница выпуклого тела V в пространстве Лобачевского H^3 принадлежит классу C^1 , то для трансверсального покрытия границы теневыми сторонами связок достаточно двух связок параллельных прямых.

Доказательство. Пусть AB — какой-либо диаметр тела V . Через середину диаметра проведем перпендикулярную ему прямую l . Две связки прямых, параллельных l , то есть имеющих бесконечно удаленные центры в «концах» прямой l , обеспечат покрытие границы тела теневыми сторонами связок. Теорема доказана. \square

6. Открытая проблема. Орисфера и оришар являются трехмерными аналогами орицикла и орикруга соответственно. В работе [12], в частности, доказано, что девяти одновременно открытых или одновременно замкнутых оришаров, или восьми оришаров, из которых три замкнуты и пять открыты, достаточно для того, чтобы не принадлежащая им произвольная фиксированная точка трехмерного пространства Лобачевского принадлежала 1-полувыпуклой оболочке оришаров. Определение точной верхней оценки числа оришаров, обеспечивающих принадлежность точки их 1-полувыпуклой оболочке, является нерешенной задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1965.
2. Выговская И. Ю., Зелинский Ю. Б., Стефанчук М. В. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. ж. — 2015. — 67, № 12. — С. 1658–1666.
3. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дажил Х. К. Задача о тени и смежные задачи // Proc. Int. Geom. Center. — 2016. — 9, № 3. — С. 50–58.

4. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Задача Таммеса и контактное число сферы в пространствах постоянной кривизны// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 182. — С. 45–50.
5. *Костина Е. А., Костина Н. Н.* Метрические характеристики гиперболических многоугольников и многогранников// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 169. — С. 31–38.
6. *Несторович Н. М.* Геометрические построения в плоскости Лобачевского. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
7. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
8. *Худайбергенов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров// Деп. в ВИНИТИ. — 21.02.1982. — № 1772-85.
9. *Dakhil H. K.* The shadows problems and mappings of fixed multiplicity/ Ph.D. — Kiev, 2017.
10. *Dostert M., Kolpakov A.* Kissing number in non-Euclidean spaces of constant sectional curvature// Math. Comput. — 2021. — 90. — P. 2507–2525.
11. *Kostin A. V.* Problem of shadow in the Lobachevskii space// Ukr. Math. J. — 2019. — 70, № 11. — P. 1758–1766.
12. *Kostin A. V.* Some generalization of the shadow problem in the Lobachevsky space// Ukr. Math. J. — 2021. — 73, № 1. — P. 61–68.
13. *Osipchuk T. M.* On semiconvexity of open sets with smooth boundary in the plane// Proc. Int. Geom. Center. — 2019. — 12, № 4. — P. 69–88.

Костин Андрей Викторович

Елабужский институт Казанского федерального университета

E-mail: kostin_andrei@mail.ru

Костина Наталья Николаевна

Елабужский институт Казанского федерального университета

E-mail: natnikost@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 66–75
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-66-75

УДК 517.929

ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ СЛАБО ДИССИПАТИВНОГО ВАРИАНТА УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА—ЛАНДАУ

© 2022 г. А. Н. КУЛИКОВ

Аннотация. Рассмотрена периодическая краевая задача для слабо диссипативного варианта комплексного уравнения Гинзбурга—Ландау в случае, когда период (длина волны) мал. Показана возможность существования конечномерных инвариантных торов. Для решений, принадлежащих таким торам, получены асимптотические формулы. Изучен вопрос об устойчивости инвариантных торов. При этом оказалось, что все инвариантные торы, кроме торов размерности один, т.е. предельных циклов, неустойчивы. Используются такие методы теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий, как метод интегральных (инвариантных) многообразий и метод нормальных форм, а также аппарат теории возмущений.

Ключевые слова: комплексное уравнение Гинзбурга—Ландау, периодическая краевая задача, инвариантный тор, устойчивость, асимптотическая формула, малый параметр.

INVARIANT TORI OF THE WEAKLY DISSIPATIVE VERSION OF THE GINZBURG—LANDAU EQUATION

© 2022 А. N. KULIKOV

ABSTRACT. We consider a periodic boundary value-problem for a weakly dissipative variant of the complex Ginzburg–Landau equation in the case where the period (wavelength) is small. The possibility of the existence of finite-dimensional invariant tori is proved. For solutions that belong to such tori, asymptotic formulas are obtained. We prove that all invariant tori, except for tori of dimension one (i.e., limit cycles), are unstable. We used various methods of the theory of dynamical systems with an infinite-dimensional space of initial conditions, for example, the method of integral (invariant) manifolds, the method of normal forms, and methods of perturbation theory.

Keywords and phrases: complex Ginzburg–Landau equation, periodic boundary-value problem, invariant torus, stability, asymptotic formula, small parameter.

AMS Subject Classification: 35B41, 35Q56, 37G35

1. Введение. Одним из самых известных нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными считают комплексное уравнение Гинзбурга—Ландау (см., например, [11, 15]). Эта популярность обусловлена прежде всего широтой его приложений в физике (см. [11]), химической кинетике [15]. В случае, когда неизвестная комплекснозначная функция $u(t, y)$ зависит от одной пространственной переменной y , это уравнение, как правило, записывают в следующем виде:

$$u_\tau = u - (1 + ic)u|u|^2 + (a + ib)u_{yy}, \quad (1)$$

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2021-1397).

где $c, a, b \in \mathbb{R}$ и $a \geq 0$. Представляет интерес и вариант, когда неизвестная комплекснозначная функция $u = u(\tau, y_1, \dots, y_n)$ зависит от эволюционной переменной τ и нескольких пространственных переменных [12, 14].

С точки зрения приложений к нелинейной оптике и к гидродинамике [5, 7, 18] также представляет интерес уравнение (1), в котором $a = 0$. В таком случае дифференциальное уравнение (1) принято называть слабодиссипативным вариантом уравнения Гинзбурга—Ландау или обобщенным кубическим уравнением Шредингера.

Будем изучать периодическую краевую задачу для слабодиссипативной версии уравнения (1):

$$u_\tau = u - (1 + ic)u|u|^2 - idu_{yy}, \quad (2)$$

$$u(\tau, y + 2l) = u(\tau, y), \quad (3)$$

где $l > 0, c, d \in \mathbb{R}$ и $d \neq 0$. Для определенности будем считать, что $d > 0$. В той задаче, которую предполагается изучить, последнее ограничение не является существенным. Следует особо подчеркнуть, что при анализе ряда вопросов варианты $d > 0$ и $d < 0$ необходимо различать. У классической версии нелинейного уравнения Шредингера в зависимости от сочетания знаков d и c такое уравнение квалифицируют как фокусирующее или дефокусирующее нелинейное уравнение Шредингера (см., например, [16]).

Если теперь положить

$$y = \frac{l}{\pi}x, \quad \tau = \frac{1}{d} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 t,$$

то в новых переменных краевая задача (2), (3) перепишется в следующем виде:

$$u_t = \varepsilon[u - (1 + ic)u|u|^2] - iu_{xx}, \quad (4)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (5)$$

где $\varepsilon = (l/\pi)^2/d$. Во многих случаях при анализе задач из оптики величина l (длина полуволны) достаточно мала. В оптике диапазон длин электромагнитных волн колеблется от 10^{-1} до 10^{-6} м [2]. Поэтому вполне естественно с физической точки зрения считать ε малым положительным параметром.

Уместно подчеркнуть, что уравнение (1) дополненное периодическими краевыми условиями (3) (см., например, [11]). Отдельно заметим, что простой подстановкой можно проверить наличие у краевой задачи (1), (3) одномодовых периодических по τ решений вида

$$u_n(\tau, y) = \eta_n \exp(i\sigma_n\tau + inx + i\varphi),$$

где $\eta_n = \sqrt{1 - a(\pi n/l)^2}$, $\sigma_n = -c\eta_n^2 - b(\pi n/l)^2$, φ — произвольная действительная постоянная. Такие решения существуют, если $1 - a(\pi n/l)^2 > 0$. При $a = 0$ существует счетный набор одномодовых τ периодических решений. Вопрос о существовании многомодовых периодических или квазипериодических решений по эволюционной переменной τ (t после нормировок) существенно сложнее. В данной работе его удалось рассмотреть, но пока в частном случае, когда анализу подлежит краевая задача (4), (5).

2. Постановка задачи. Нормальная форма. В данном разделе и далее будем рассматривать краевую задачу (2), (3) уже в перенормированном виде, т.е. задачу (4), (5), в которой $u(t, x) = u_1(t, x) + iu_2(t, x)$ — комплекснозначная функция, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, т.е. ε далее интерпретируем как малый параметр. Если положить $\varepsilon = 0$, то получим вспомогательную линейную краевую задачу

$$u_t = -iu_{xx}, \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (6)$$

Обе краевые задачи дополним начальным условием

$$u(0, x) = f(x) = f_1(x) + if_2(x). \quad (7)$$

Далее будем считать, что $f(x) \in H_2^2$, где через H_2^2 обозначено гильбертово пространство комплекснозначных функций, которые по переменной x имеют период 2π и их обобщенные производные $f'(x), f''(x) \in L_2(-\pi, \pi)$.

Из теорем вложения Соболева [9] вытекает, что $f(x)$, $f'(x)$ — непрерывные функции. Кроме того, $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \exp(ikx),$$

где последовательность коэффициентов $\{f_k\} \in l_2^2$ — дискретному аналогу пространства H_2^2 . В частности, сходятся ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |f_k|^2, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^4 |f_k|^2.$$

Сразу отметим, что линейная начально-краевая задача (6), (7) имеет решение вида

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k q_k(t) \exp(ikx),$$

где $q_k(t) = \exp(ik^2 t)$. Решение начально-краевой задачи (6), (7) существует при всех t , если $\{f_k\} \in l_2^2$ и при любом $t = t_0$ справедливо включение $u(t_0, x) = f_{t_0}(x) \in H_2^2$.

Из результатов работ [10, 17] вытекает, что нелинейная начально-краевая задача (4), (5), (7) локально корректно разрешима, а ее решения могут быть записаны в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t) \exp(ikx) \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (8)$$

где через \mathbb{Z} обозначено множество целых чисел. Следовательно, коэффициенты ряда (8) удовлетворяют счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_k = ik^2 u_k + \varepsilon(u_k - (1 + ic)F_k(u)), \quad (9)$$

где теперь $u = \{u_k(t)\}$ последовательность комплекснозначных функций, принадлежащих при рассматриваемых t гильбертову пространству l_2^2 . Здесь нелинейный функционал

$$F_k(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u|u|^2 \exp(-ikx) dx, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Учет разложения (8) позволяет записать нелинейный оператор $F_k(u)$ в следующей форме:

$$F_k(u) = \sum_{\mathbb{Z}_k} u_m u_n \bar{u}_p,$$

где через \mathbb{Z}_k обозначено подмножество множества целых чисел \mathbb{Z} . Числа $m, n, p \in \mathbb{Z}_k$, если $m + n - p = k$. В свою очередь, подмножество \mathbb{Z}_k разделим еще на два множества $\mathbb{Z}_{k,res}$ и $\mathbb{Z}_{k,0}$. Если $(m, n, p) \in \mathbb{Z}_k$ и $m^2 + n^2 - p^2 = k^2$, то этот набор целых чисел принадлежит $\mathbb{Z}_{k,res}$. Остальные элементы \mathbb{Z}_k отнесем к $\mathbb{Z}_{k,0}$. Оба подмножества $\mathbb{Z}_{k,0}$ и $\mathbb{Z}_{k,res}$ непусты. Действительно, $\mathbb{Z}_{k,res}$ содержит, например, тройки вида (k, n, n) , где $n, k \in \mathbb{Z}$. Естественно, существуют и иные тройки целых чисел, для которых $m + n - p = k$, но не принадлежащих $\mathbb{Z}_{k,res}$ и, следовательно, входящих в $\mathbb{Z}_{k,0}$ (так, например, набор $(k-1, k+1, k) \notin \mathbb{Z}_{k,res}$). Для целых чисел из $\mathbb{Z}_{k,0}$ справедливо неравенство

$$\Delta_{m,n,p}(k) = |m^2 + n^2 - p^2 - k^2| \geq 2.$$

Действительно, для чисел из \mathbb{Z}_k справедливо тождество

$$m^2 + n^2 - p^2 - k^2 = -2(m-k)(n-k),$$

где $m-k, n-k \in \mathbb{Z}$, но они отличны от нуля, если $m \neq k, n \neq k$. Следовательно, такие наборы m, n, p включаются в $\mathbb{Z}_{k,0}$.

Последние два замечания позволяют записать нелинейный функционал $F_k(u)$ в виде суммы

$$F_k(u) = G_k(u) + Q_k(u),$$

где $k \in \mathbb{Z}$,

$$G_k(u) = 2u_k V(u) - u_k |u_k|^2, \quad V(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |u_m|^2, \quad Q_k(u) = \sum_{\mathbb{Z}_{k,0}} u_m u_n \overline{u_p},$$

т.е. к $Q_k(u)$ отнесены «нерезонансные» слагаемые кубической формы ($m + n - p = k$, но $m^2 + n^2 - p^2 \neq k^2$).

Пусть $(m, n, p) \in \mathbb{Z}_k$ — тройка целых чисел, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где ε_0 — достаточно малое положительное число. Положим

$$u_k = v_k + \varepsilon W_k(v), \quad (10)$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $v = \{v_k\}$, а функционал $W_k(v)$ определен равенством

$$W_k(v) = \sum_{\mathbb{Z}_{k,0}} \beta_{m,n,p}(k) v_m v_n \overline{v_p}.$$

Подчеркнем, что замену (10) можно рассматривать как нелинейный оператор, существующий из $l_2^2 \times (0, \varepsilon_0)$ в l_2^2 :

$$u = \Phi(v, \varepsilon), \quad u = \{u_k\} \in l_2^2, \quad (11)$$

где в правой части равенства (11) $\Phi = \{\Phi_k\}$. При $\varepsilon = 0$ получим, что нелинейный оператор, определенный равенством (11), равен тождественному ($\Phi(v, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = E$). Следовательно, при достаточно малых ε нелинейный оператор $\Phi(v, \varepsilon)$ имеет обратный достаточно гладкий нелинейный оператор (см. [10, § 4.4]). Пусть $\beta_{m,n,p}(k) = (1 + ic)/\Delta_{m,n,p}(k)$, если $m, n, p \in \mathbb{Z}_{0,k}$. Очевидно, что $|\beta_{m,n,p}(k)| \leq \sqrt{1 + c^2}/2$ ($|\Delta_{m,n,p}(k)| \geq 2$).

При таком выборе $W_k(v)(\beta_{m,n,p}(k))$ можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Замены (10) приводят систему дифференциальных уравнений (9) к следующему виду:*

$$\dot{v}_k = ik^2 v_k + \varepsilon \left(v_k + (1 + ic) v_k (|v_k|^2 - 2V(v)) \right) + \varepsilon^2 R(v, \varepsilon), \quad (12)$$

где $k \in \mathbb{Z}$,

$$V(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |v_n|^2,$$

$R(v, \varepsilon)$ — достаточно гладкий нелинейный функционал, действующий из $l_2^2 \times (0, \varepsilon_0)$ в \mathbb{C} .

Вместе с системой (12) рассмотрим укороченный вариант данной системы, который достаточно часто называют нормальной формой. Иногда используют несколько иное название «квазинормальная» форма, если речь идет о бесконечномерной динамической системе.

На первом этапе целесообразно вместо системы (12) изучать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_k = ik^2 v_k + \varepsilon v_k \left(1 + (1 + ic) (|v_k|^2 - 2V(v)) \right). \quad (13)$$

Систему (13) будем анализировать в следующем разделе.

3. Анализ нормальной формы. Для анализа системы дифференциальных уравнений (13) удобно и целесообразно перейти к переменным «действие-угол» (см. [1, гл. 10]). Положим

$$v_k = r_k \exp(i\varphi_k), \quad r_k = r_k(t), \quad \varphi_k = \varphi_k(t). \quad (14)$$

Замены (14) позволяют переписать систему (13) в действительной форме:

$$\dot{r}_k = \varepsilon r_k \left[1 + r_k^2 - 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m^2 \right], \quad (15)$$

$$\dot{\varphi}_k = k^2 + \varepsilon c \left[r_k^2 - 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m^2 \right]. \quad (16)$$

Напомним, что по постановке задачи последовательность $\{r_k(t)\}$ при всех рассматриваемых t принадлежит гильбертову пространству l_2^2 , т.е. сходятся ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 r_k^2, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^4 r_k^2.$$

При этом систему (15), (16) удобно переписать в следующей форме:

$$\dot{\rho}_k = 2\varepsilon \rho_k [1 + \rho_k - 2V(\rho)], \quad (17)$$

$$\dot{\varphi}_k = k^2 + \varepsilon c [\rho_k - 2V(\rho)], \quad (18)$$

где использовано обозначение

$$V(\rho) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m,$$

$\rho_k \geq 0$ и $\{\sqrt{\rho_k}\} \in l_2^2$ при всех t . В частности, ряд

$$V(\rho) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m$$

сходится. Наконец, $\rho_k = r_k^2$.

Лемма 2. *Кроме нулевого состояния равновесия S_0 ($\rho_j = 0$ при всех $j \in \mathbb{Z}$) система дифференциальных уравнений (17) имеет ненулевые состояния равновесия S_m , у каждого из которых есть m ненулевых координат, а остальные равны нулю. Подробнее, $\{\rho_k\} \in S_m$, если $\rho_{j_q} = 1/(2m-1)$ при $k = j_q$, $q = 1, \dots, m$, но $\rho_k = 0$ при $k \neq j_q$ ($q = 1, \dots, m$).*

Прежде чем приступить к доказательству леммы 2, отметим в качестве примера, что S_1 содержит «однокомпонентные» состояния равновесия $(\dots, 0, 1, 0, \dots)$, где единица находится на произвольном месте бесконечной последовательности, а остальные ее компоненты равны 0. Состояние равновесия S_2 содержит элементы вида $(\dots, 0, 0, 1/3, 0, \dots, 0, 1/3, 0, \dots)$, где $1/3$ равны две произвольные координаты бесконечной последовательности, а остальные, естественно, равны нулю.

Координаты состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (17) находим как решения системы алгебраических уравнений

$$\rho_k [1 + \rho_k - 2V(\rho)] = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

Отметим, что у системы (19) есть тривиальное решение $\rho_k = 0$.

Самый простой вариант ненулевого решения у системы (19) возникает, если одно $\rho_j \neq 0$, а остальные координаты $\rho_k = 0$, если $k \neq j$. Итак, $\rho_j = 1$.

Рассмотрим более общий случай, когда по крайней мере две координаты состояния равновесия отличны от нуля. Например, $\rho_k \neq 0$ и $\rho_n \neq 0$, где $k, n \in \mathbb{Z}$ и $k \neq n$. Следовательно, справедливы два следующих равенства:

$$1 + \rho_k - 2V(\rho) = 0, \quad 1 + \rho_n - 2V(\rho) = 0.$$

Ясно, что они могут быть выполнены тогда и только тогда, если $\rho_k = \rho_n$.

Из этих замечаний вытекает, что для любого состояния равновесия S_m характерно выполнение следующего. Пусть η_{j_q} ненулевые координаты нетривиального состояния равновесия. Тогда с необходимостью выполнено условие $\eta_{j_q} = \eta_{j_1}$ (они все равны). Очевидно, что любое нетривиальное состояние равновесия не может иметь бесконечного числа координат, отличных от нулевого, т.е. $\eta_{j_q} > 0$, где набор индексов принадлежит бесконечному подмножеству \mathbb{Z} или совпадает с \mathbb{Z} . В этом случае $\eta_{j_q} = \eta > 0$ и такая последовательность не принадлежит даже пространству l_1 . Напомним, что бесконечная последовательность $\{a_j\}$ принадлежит l_1 , если сходится ряд

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|.$$

Подчеркнем еще раз, что ненулевое состояние равновесия может иметь лишь конечное число ненулевых компонент. При этом с необходимостью $\eta_{j_p} = \eta_{j_l} = \eta_m$, где m — число таких координат. Следовательно, получаем, что

$$1 + \eta_m - 2 \sum_{q=1}^m \eta_m = 1 + \eta_m - 2m\eta_m = 0, \quad \text{т.е.} \quad \eta_m = \frac{1}{2m-1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Лемма 3. *Состояния равновесия S_0 и S_m ($m \geq 2$) неустойчивы, а все $S_1(j)$ ($j \in \mathbb{Z}$) асимптотически устойчивы.*

Через $S_1(j)$ обозначено состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (17), у которого координата с номером j равна 1, а все остальные равны нулю. Например, $(\dots, 0, 1, 0, \dots)$ — здесь $\eta_0 = 1$, а $\dots, \eta_k = 0$, если $k \neq 0$.

Доказательство леммы 3. Покажем сначала, что S_0 неустойчиво. Напомним, что фазовым пространством системы дифференциальных уравнений (13) будет l_2^2 . Поэтому сойдутся ряды

$$V(\rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \rho_k, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^4 \rho_k.$$

Пусть

$$Q = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k^2$$

— также сходящийся ряд. Справедливо равенство

$$\dot{V} = 2\varepsilon[V - 2V^2 + Q],$$

полученное сложением всех компонент системы (17). Пусть в начальный момент времени мала величина $V(0)$. Например, $V(0) < \delta < 1/2$, то до тех пор, пока $V(t) < 1/2$, заведомо справедливо неравенство

$$V - 2V^2 + Q > 0$$

и, следовательно, функция $V(t) = V(p(t))$ возрастает, т.е. решения системы дифференциальных уравнений (17) с достаточно малыми начальными условиями покидают окрестность нулевого решения уже в смысле нормы гильбертова пространства l_2 , а также l_2^2 .

Перейдем теперь к анализу устойчивости S_m , где m число ненулевых компонент состояния равновесия, т.е. $\rho_{j_q} = \eta_m = 1/(2m-1)$, если $q = 1, \dots, m$, а остальные координаты нулевые. Положим

$$\rho_{j_q} = \eta_m + y_{j_q}, \quad q = 1, \dots, m, \quad \rho_k = y_k, \quad k \neq j_q.$$

В результате замены получим новую систему дифференциальных уравнений для переменных y_j . Эти уравнения следует разбить на две группы дифференциальных уравнений. В первую группу таких уравнений входят m уравнений вида

$$\dot{y}_q = 2\varepsilon(\eta_m + y_q)(y_q - 2V_1(y) - 2V_2(y)), \quad (20)$$

а во вторую — остальные

$$\dot{y}_k = 2\varepsilon y_k[-\eta_m - 2V_1(y) - 2V_2(y) + y_k]. \quad (21)$$

Здесь упрощена запись для индексов в первой группе уравнений $y_q = y_{j_q}$ и, следовательно, первая подсистема насчитывает m уравнений, а во вторую входят остальные, т.е. те, где $k \neq j_q$. В системах дифференциальных уравнений (20), (21)

$$V_1 = \sum_{q=1}^m y_q, \quad V_2(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} y_k.$$

При формировании систем дифференциальных уравнений (20), (21) использованы равенства

$$1 - (2m-1)\eta_m = 0, \quad 1 - 2m\eta_m = -\eta_m,$$

а через \mathbb{Z}_* обозначено множество целых чисел, отличных от $1, \dots, m$.

Система дифференциальных уравнений (20), (21) имеет инвариантное многообразие M_m размерности m , выделяемое равенствами $y_k = 0$, если $k \in \mathbb{Z}_*$. Из результатов и построений работы [6] вытекает, что это многообразие будет инерциальным многообразием для вспомогательной системы дифференциальных уравнений (20), (21). В частности, все $y_k \rightarrow 0$, если $k \in \mathbb{Z}_*$. В свою очередь, на инерциальном многообразии M_m ($\dim M_m = m$) получаем конечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Эту систему можно записать в следующем виде:

$$\dot{v} = Av + F(v), \quad (22)$$

где $v = \text{colon}(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $A = \{a_{jn}\}$, где $j, n = 1, \dots, m$, $a_{jj} = -\eta_m = -1/(2m-1)$, $a_{jn} = -2\eta_m$, если $j \neq n$. Наконец, нелинейная вектор-функция $F(v)$ имеет m компонент $F_q(v)$. Каждая из них определена равенством

$$F_q(v) = y_q(y_q - 2V_1(y)), \quad q = 1, \dots, m, \quad V_1(y) = \sum_{q=1}^m y_q.$$

Система дифференциальных уравнений (22) имеет нулевое состояние равновесия, соответствующее состоянию равновесия S_m системы дифференциальных уравнений (20), (21).

Далее будем различать два случая: $m = 1$ и $m \geq 2$.

Если $m \geq 2$, то матрица A имеет собственное число $\lambda_1 = -1$, которое соответствует, как легко проверить, собственному вектору $e_1 = \text{colon}(1, \dots, 1)$. Кроме того, матрица A имеет собственное значение $\lambda_2 = \eta_m > 0$ кратности $m-1$, которому отвечают собственные элементы (собственный элемент при $m = 2$) $e_q = \text{colon}(\beta_1, \dots, \beta_m)$, где $\beta_1 = 1$, $\beta_q = -1$ и $\beta_j = 0$, если $j \neq 1$ и q , $q = 2, \dots, m$. Следовательно, при $m \geq 2$ нулевое решение неустойчиво.

Если $m = 1$, то вместо системы (22) имеем скалярное дифференциальное уравнение ($q = 1$)

$$\dot{y}_1 = -y_1 - y_1^2,$$

у которого, очевидно, нулевое решение асимптотически устойчиво. Лемма 3 доказана. \square

Пусть S_m — какое-либо выделенное состояния равновесия с m отличными от нуля координатами: $\eta_{j1} = 1/(2m-1), \dots, \eta_{jm} = 1/(2m-1)$. Если вернуться к нормальной форме в комплексной форме записи, т.е. к системе дифференциальных уравнений (13), то состоянию равновесия S_m соответствует инвариантный тор T_m ($\dim T_m = m$)

$$v_{j_q} = \sqrt{\frac{1}{2m-1}} \exp(i\varphi_{j_q}), \quad v_k = 0, \quad (23)$$

где $k \neq j_1, \dots, j_q$ — выбранный набор индексов. Для решений, принадлежащих T_m , справедлива формула

$$v_{j_q}(t) = \sqrt{\frac{1}{2m-1}} \exp(i\sigma_{j_q}(t + h_{j_q})), \quad v_k = 0, \quad (24)$$

если $k \neq (j_1, \dots, j_m)$, $\sigma_{j_q} = j_q^2 - c\varepsilon$. Соответствующие значения частот σ_{j_q} получаем после интегрирования уравнений (18) для угловых переменных для соответствующих компонент $\varphi_k(t)$. При этом учтено, что для координат состояний равновесия системы (19) справедливо равенство $\rho_{j_q} - 2V(\rho) = -1$, а также равенства (23).

Решения (24) формируют при $m \geq 2$ инвариантный тор T_m системы дифференциальных уравнений (13), размерность которого равна m . Подчеркнем, что в ситуации общего положения тор T_m нерезонансный (см. [13, гл. 4]). При $m = 1$ получаем орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл T_1 . Естественно, что торы T_m ($m \geq 2$) седловые (неустойчивые).

4. Инвариантные торы основной краевой задачи. Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений (12). Ее можно трактовать как возмущенный вариант системы (12), которую называют нормальной формой. Из результатов [1, 6, 8] (в частности, теоремы о сохранении инвариантных торов при возмущениях) и результатов, полученных в предыдущем разделе, вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ инвариантному тору T_m нормальной формы (13) соответствует тор $T_m(\varepsilon)$ уже основной системы дифференциальных уравнений (12). При этом $T_m(0) = T_m$ с сохранением свойств устойчивости. Эти торы могут быть заданы уравнениями*

$$v_{j_q} = \sqrt{\eta_m} \exp(i\varphi_{j_q}) + h_{j_q}(\varphi_m, \varepsilon), \quad q = 1, \dots, m, \quad v_k = h_k(\varphi_m, \varepsilon), \quad k = j_1, \dots, j_m.$$

Подчеркнем, что эти функции $h_k, h_{j_1}, \dots, h_{j_m}$ обладают следующими свойствами:

1. Все функции $h_k, h_{j_1}, \dots, h_{j_m}$ достаточно гладко зависят от своих аргументов;
2. $h_l(\varphi_m, 0) = 0$ при всех возможных l ;
3. эти функции 2π -периодические функции φ_{j_q} при всех j_q ($q = 1, \dots, m$).

Наконец, использовано обозначение $\varphi_m = (\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_m})$, где φ_{j_q} функции переменного t при всех рассматриваемых j_q . Их хотя бы приближенно находим после интегрирования уравнения (18), но теперь, естественно, $\varphi_{j_q}(t) = \sigma_{j_q}(\varepsilon)t + h_{j_q}$, $\sigma_{j_q}(\varepsilon) = j_q^2 - \varepsilon c + o(\varepsilon)$, $h_{j_q} \in \mathbb{R}$.

Все эти построения и результаты работ [3, 4] позволяют заключить о справедливости утверждения, относящегося к краевой задаче (4), (5).

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0(m_0) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (4), (5) имеет торы $T_{*m}(\varepsilon)$ соответствующие любому состоянию равновесия S_m , у которого отличны от нуля m координат с номерами j_1, \dots, j_m , для которых $j_1^2 + \dots + j_m^2 \leq M_0$. Торы $T_{*m}(\varepsilon)$ наследуют устойчивость торов $T_m(\varepsilon)$ системы дифференциальных уравнений (12) и в итоге устойчивость состояний равновесия S_m . Для решений, принадлежащих тору $T_{*m}(\varepsilon)$, справедлива асимптотическая формула*

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\eta_m} \sum_{q=1}^m \exp(ij_q x + i\sigma_{j_q}(\varepsilon)(t + h_{j_q})) + O(\varepsilon). \quad (25)$$

Напомним, что $\sigma_{j_q}(\varepsilon) = j_q^2 - \varepsilon c$. Символ $O(\varepsilon)$ заменяет достаточно гладкие функции $U(\varphi_m, \varepsilon, x)$.

Равенство (25) является следствием формул (23), (24) и замен из второго раздела.

Отметим, что асимптотические формулы (25) могут быть уточнены. Например, возможно в явном виде выписать слагаемые, имеющие порядок ε .

Теорема 1 относится к вспомогательной краевой задаче (4), (5). Если возвратиться к первоначальным переменным, то для решений, принадлежащих торам, формулу (25) следует переписать в следующем виде:

$$u(\tau, y) = \sqrt{\eta_m} \sum_{q=1}^m \exp\left(ij_q \frac{\pi}{l} y + i\sigma_{j_q}(\varepsilon) d \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (\tau + h_{j_q})\right) + O(\varepsilon),$$

где h_{j_q} — такие произвольные действительные постоянные. Подчеркнем, что

$$\sigma_{j_q}(\varepsilon) d \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = \sigma_{j_q}(\varepsilon) / \varepsilon,$$

т.е. в первоначальных переменных получаем быстро осциллирующие решения.

В заключение этого раздела напомним, что для определенности был изучен вариант уравнения (2), в котором предполагалось, что $d > 0$. Если же $d < 0$, то результаты аналогичны. Вместо уравнения (4) в таком случае получим уравнение

$$u_t = \varepsilon[u - (1 + ic)u|u|^2] + iu_{xx},$$

которое следует анализировать вместе с периодическими краевыми условиями (5). Далее, повторяя шаг за шагом построения при анализе краевой задачи (4), (5), приходим к теореме 1. В частности, к формуле (25) для решений, принадлежащих инвариантным торам с несколькими изменениями. В формуле (25) следует $\sigma_{j_q}(\varepsilon)$ заменить на $\omega_{j_q}(\varepsilon) = -j_q^2 - \varepsilon c$. Естественно, и в этом случае члены, обозначенные $O(\varepsilon)$, могут быть уточнены как в случае формулы (25), но с соответствующими и небольшими поправками.

5. Заключение. Если $m = 1$, то речь идет не о торе, а о цикле. При этом для их отыскания не обязательно использовать построения предыдущих разделов. Одномодовые t -периодические решения находятся точно и могут быть записаны в виде

$$u_n(t, x) = \exp(inx + i\sigma_n(t + h)),$$

где h — произвольная действительная постоянная, $n \in \mathbb{Z}$, $\sigma_n = n^2 - \varepsilon c$. Эти решения были найдены в более общей ситуации для слабодиссипативного варианта уравнения Гинзбурга—Ландау. В нашем случае эти периодические решения устойчивы (см., например, [14], где изучен и более общий случай об устойчивости циклов). Впрочем, в этом можно было убедиться и в данной работе, если, конечно, изучать краевую задачу (4), (5), т.е. если слабодиссипативное уравнение содержит малый параметр ε . В работе [14] использовалась иная методика для анализа устойчивости циклов.

Возвратимся к формуле (25). Если рассмотреть решение $u(t, x)$ только как функцию x , а t временно интерпретировать как малый параметр, то можно отметить следующее. Функция $u(t, x)$ такова, что ее норма в $L_2(0, 2\pi)$ равна

$$\|u(t, x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^{2\pi} |u(t, x)|^2 dx} = \sqrt{\frac{m}{2m-1}}$$

и близка к $1/\sqrt{2}$ при больших m .

Иная ситуация возникает, если у решений, принадлежащих $T_{*m}(\varepsilon)$, вычислить норму в фазовом пространстве, т.е. величину

$$\|u(t, x, \varepsilon)\|_{H_2^2} = \|u(t, x, \varepsilon)\|_{L_2} + \|u_x(t, x, \varepsilon)\|_{L_2} + \|u_{xx}(t, x, \varepsilon)\|_{L_2}.$$

Очевидно, что $\|u(t, x, \varepsilon)\|_{H_2^2} \geq \|u_{xx}(t, x, \varepsilon)\|_{L_2}$. При этом, при любом $t \in \mathbb{R}$ заведомо выполнено неравенство

$$\|u_{xx}(t, x, \varepsilon)\|_{L_2}^2 \approx \eta_m^2 \sum_{q=1}^m j_q^2 \geq \frac{m(m^2-1)}{24(2m-1)}$$

вне зависимости от выбора номеров мод, т.е. вне зависимости от выбора тора размерности m , норма решений, вычисленная как норма фазового пространства, стремится к бесконечности. Это замечание отчасти объясняет причину необходимости условия

$$j_1^2 + \dots + j_m^2 \leq M_0 \tag{26}$$

в формулировке теоремы. Аналогично замечание справедливо и для $\frac{1}{2}\|u_t(t, x, \varepsilon)\|_{L_2}^2$. Последняя величина, как известно, может быть проинтерпретирована как кинетическая энергия или величина, пропорциональная ей. Иными словами, кинетическая энергия многомодовых волн возрастает и с формальной точки зрения стремится к бесконечности.

Условие (26) в полной мере содержательно для торов размерности $m \geq 2$. При $m = 1$ получаем точные одномодовые решения

$$u(t, x) = \exp(i\sigma_{j_1}(\varepsilon)(t + h) + ij_1x),$$

где $\sigma_{j_1} = j_1^2 - \varepsilon c$ (при $d > 0$) и, следовательно, условия на малость ε теряют смысл. Тем не менее, норма в фазовом пространстве у такого решения растет с ростом $|j_1|$ и также стремится к ∞ , если $|j_1| \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
2. Карякин Н. И., Быстров К. Н., Киреев П. С. Краткий справочник по физике. — М.: Высшая школа, 1964.
3. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 5. — С. 584–601.
4. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 6. — С. 738–753.

5. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шрёдингера// Докл. РАН. — 2006. — 406, № 1. — С. 21–29.
6. Куликов А. Н. Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы в гильбертовом пространстве// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 186. — С. 57–66.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. 6. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.
8. Люстernик Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
9. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
10. Якубов С. Я. Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1970. — 23. — С. 37–60.
11. Aranson I. S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation// Rev. Modern. Phys. — 2002. — 74. — P. 99–143.
12. Bartuccelli M. V., Constantin P., Doering C. R., Gibbon J. D., Gissel-falt M. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg–Landau equation// Phys. D. — 1990. — 44. — P. 421–444.
13. Broer H. W., Dumortier F., van Strien S. J., Takens F. Structures in Dynamics: Finite Dimensional Deterministic Studies. — Elsevier, 1991.
14. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Local bifurcations of plane running waves for the generalized cubic Schrödinger equation// Differ. Equations. — 2010. — 46. — P. 1299–1308.
15. Kuramoto Y., Tsusuki T. On the formation of the dissipative structures in reaction-diffusion systems// Progr. Theor. Phys. — 2018. — 54, № 3. — P. 687–699.
16. Scott A. Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures. — London: Oxford Univ. Press, 2003.
17. Segal I. Nonlinear semigroups// Ann. Math. — 1963. — 78, № 2. — P. 339–364.
18. Witham G. Linear and Nonlinear Waves. — New York: Wiley, 1974.

Куликов Анатолий Николаевич

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: anat_kulikov@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 76–87
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-76-87

УДК 517.929

ЦИКЛЫ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В РАМКАХ ОДНОЙ ИЗ ВЕРСИЙ МОДЕЛИ ГУДВИНА

© 2022 г. Д. А. КУЛИКОВ, О. В. БАЕВА

Аннотация. Рассмотрена задача о конкурентном взаимодействии двух макроэкономических систем. В качестве базисной модели выбрана известная модель бизнес-цикла Гудвина. Получены достаточные условия, при реализации которых в рассматриваемой системе могут появиться устойчивые предельные циклы.

Ключевые слова: модель Гудвина, конкуренция, экономический цикл, устойчивость, бифуркация, асимптотическая формула.

CYCLES OF TWO COMPETING MACROECONOMIC SYSTEMS WITHIN A CERTAIN VERSION OF THE GOODWIN MODEL

© 2022 D. A. KULIKOV, O. V. BAEVA

ABSTRACT. In this paper, we examine the problem of competitive interaction of two macroeconomic systems. As the basic model, the well-known Goodwin model is chosen. We obtain sufficient conditions under which stable limit cycles can appear in the system considered.

Keywords and phrases: Goodwin model, competition, economic cycle, stability, bifurcation, asymptotic formula.

AMS Subject Classification: 34C15, 34C23, 37N40

1. Введение. Как показывает практика, эволюция макроэкономических систем происходит циклически. Это означает, что экономические показатели изменяются колебательным образом и в идеализированном варианте у соответствующих математических моделей существуют устойчивые периодические решения (устойчивые циклы).

Классическая экономическая теория исходила из двух основных положений.

1. Во-первых, согласно этой теории маловероятна ситуация, когда уровень совокупных расходов будет недостаточен для закупки продукции, произведенной при полной занятости. Отрицалась возможность кризиса «перепроизводства товаров».
2. Во-вторых, если такая ситуация встретится, то незамедлительно изменится заработная плата, цена и рыночная ставка процента и, следовательно, ситуация стабилизируется на новом уровне, при новом состоянии экономического равновесия.

Эти идеи нашли свое отражение в математических моделях того периода. Например, в модели «спрос-предложение» существует состояние экономического равновесия, но отсутствуют циклы (см. [17]). В своем основополагающем труде [11] Дж. Кейнс подверг критике некоторые из положений классической экономической теории и объяснил механизм возникновения цикличности

в рыночной экономике. В частности, это привело к созданию новых математических моделей, которые позволяли описывать циклические колебания экономических показателей. Одной из первых математических моделей, пригодной для описания цикличности экономики, следует считать модель Гудвина [7, 9, 13, 14, 16].

Ниже будет приведен вариант модели Гудвина и, в частности, показано существование устойчивых периодических решений в этом варианте модели. Математическая модель Гудвина представляет собой дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + A(x)\dot{x} + B(x) = 0. \quad (1)$$

Здесь $x = x(t)$ — отклонение от равновесного дохода. В уравнении (1) $A(x)$, $B(x)$ — достаточно гладкие функции. При этом $A(x)$ — четная функция и $A(0) < 0$, $A''(0) > 0$. Наконец, $B(x)$ — нечетная функция. В частности, $B(0) = 0$. Например, функции $A(x)$, $B(x)$ можно выбрать следующим образом: $A(x) = x^2 - \alpha$, $B(x) = bx + x^3$, где α , b — положительные постоянные.

Уместно подчеркнуть, что предложенный выбор $A(x)$ и $B(x)$ при определенных значениях параметров задачи позволяет находить устойчивые периодические решения у дифференциального уравнения (1).

Анализ уравнения (1) приводит к описанию нелинейной динамики в рамках отдельно взятой экономики. Вместе с тем представляет интерес вопрос о взаимодействии двух или нескольких экономик [15]. В работе ограничимся анализом системы дифференциальных уравнений, описывающей взаимодействие двух конкурирующих экономик. Как будет показано далее, эта задача близка по духу задаче о синхронизации двух автоколебательных систем. При этом будут рассмотрены два способа учета взаимодействия между макроэкономическими системами. В статье показана возможность существования автоколебательных решений трех типов. В обоих случаях выбора взаимодействия экономик возможны синхронные колебания обеих частей изучаемой макроэкономической системы, противофазные колебания, а также более сложные колебания, которые описываются асимметричными циклами изучаемой системы. При этом будет изучен актуальный вопрос об устойчивости, т.е. экономической реализуемости циклов трех типов.

2. Периодические решения в модели Гудвина. В этом разделе покажем, что в базисной модели Гудвина могут существовать устойчивые периодические решения. Рассмотрим достаточно стандартную версию модели Гудвина

$$\ddot{x} + a(x^2 - \alpha^2)\dot{x} + bx + x^3 = 0, \quad (2)$$

где a , b , α — некоторые положительные постоянные. Уравнение (2) можно и удобно переписать в форме

$$\ddot{x} - a\alpha^2\dot{x} + \omega^2x = -a\dot{x}x^2 - x^3, \quad (3)$$

где $\omega^2 = b$. Пусть $a\alpha^2 = 2\varepsilon$, где далее ε будем интерпретировать как малый параметр. Отметим, что при таком выборе параметров (т.е. при $\alpha = \sqrt{2\varepsilon/a}$) уравнение (3) имеет устойчивый предельный цикл. Этот ответ для уравнения (3) хорошо известен, а уравнение (3) часто называют осциллятором Ван дер Поля—Дюффинга. Для соответствующего цикла справедлива следующая асимптотическая формула (см., например, [5, §§ 10–12], а также [6, гл. 9]):

$$x(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\sqrt{2/a}\cos(\omega(\varepsilon)t + \varphi) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где φ — произвольная действительная постоянная, $\omega(\varepsilon) = \omega + 3\varepsilon/a\omega$.

3. Постановка задачи. Основное внимание в работе будет уделено задаче об анализе системы из двух слабосвязанных экономик, взаимодействие которых учтено двумя наиболее естественными способами.

Первая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + \omega^2x_1 = -ax_1^2\dot{x}_1 - x_1^3 + 2d\varepsilon(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + \omega^2x_2 = -ax_2^2\dot{x}_2 - x_2^3 + 2d\varepsilon(x_1 - x_2), \end{cases} \quad (4)$$

где коэффициент $d \in \mathbb{R}$ характеризует степень взаимодействия. Наличие ε в последних слагаемых учитывает то обстоятельство, что связь экономик относительно слабая. В модели (4)

взаимодействие экономик пропорционально разности уровней доходов в каждой отдельной макроэкономической системе.

Второй вариант предусматривал анализ системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -ax_1^2\dot{x}_1 - x_1^3 + 2d\varepsilon(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -ax_2^2\dot{x}_2 - x_2^3 + 2d\varepsilon(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь считаем, что интенсивность взаимодействия пропорциональна разности скоростей изменения доходов в каждой из частей. Если ориентироваться на изложение этого вопроса в монографии [15] (см. главу 4), первый вариант связи следует считать основным, быть может, более естественным с экономической точки зрения.

Для изучения динамики решений систем дифференциальных уравнений (4) и (5) будет использован подход, сочетающий два наиболее известных метода изучения автоколебательных систем: метод интегральных многообразий и нормальных форм Пуанкаре (см., например, [4, 12]).

4. Нормальная форма. Более подробно остановимся на анализе системы из двух дифференциальных уравнений (4). В частности, для нее вопрос об анализе динамики ее решений сведен к аналогичному вопросу для специальной системы, которую принято называть нормальной формой [1, 8]. При этом будем интересоваться теми решениями, которые находятся в малой окрестности нулевого состояния равновесия. Решения системы дифференциальных уравнений (4) из такой окрестности следует искать в следующем виде (см., например, [4, 12]):

$$\begin{aligned} x_1(t, s, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2}u_1(t, s) + \varepsilon v_1(t, s) + \varepsilon^{3/2}w_1(t, s) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ x_2(t, s, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2}u_2(t, s) + \varepsilon v_2(t, s) + \varepsilon^{3/2}w_2(t, s) + o(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $s = \varepsilon t$ — медленное время,

$$\begin{aligned} u_1 &= z_1(s) \exp(i\omega t) + \bar{z}_1(s) \exp(-i\omega t), \\ u_2 &= z_2(s) \exp(i\omega t) + \bar{z}_2(s) \exp(-i\omega t). \end{aligned}$$

Функции $v_j(t, s)$, $w_j(t, s)$, $j = 1, 2$ принадлежат классу функций W_p . Функция $K(t, s) \in W_p$, если она обладает следующими свойствами:

- (1) $K(t, s)$ — достаточно гладкая по совокупности аргументов функция;
- (2) по t имеет период $2\pi/\omega$;
- (3) справедливы тождества

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} K(t, s) \exp(\pm i\omega t) dt = 0.$$

В последних двух равенствах интерпретируем s как независимую переменную (параметр).

Отметим, что комплекснозначные функции $z_1(s)$, $z_2(s)$ — решения вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = G_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \varepsilon), \\ z_2' = G_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \varepsilon), \end{cases} \quad (7)$$

где достаточно гладкие функции G_1, G_2 подлежат определению. Система (7) может быть названа нормальной формой, но основную роль играет «укороченный» ее вариант, т.е. система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} z_1' = Q_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2), \\ z_2' = Q_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2), \end{cases} \quad (8)$$

где $Q_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = G_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, 0)$, $j = 1, 2$. В системах (7), (8) штрихом обозначена производная по s .

Для определения правых частей дифференциальных уравнений (8) подставим правые части равенств (6) в систему (4) с последующим выделением членов при $\varepsilon^{1/2}$, ε , $\varepsilon^{3/2}$ в обоих уравнениях. В результате для v_1 , v_2 получим линейные дифференциальные уравнения вида

$$\ddot{v}_1 + \omega^2 v_1 = 0, \quad \ddot{v}_2 + \omega^2 v_2 = 0.$$

Откуда находим, что с необходимостью $v_1 = v_2 = 0$, если, конечно, мы определяем решения как функции, принадлежащие W_p .

Наконец, для определения w_1 , w_2 получаем уже систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\ddot{w}_1 + \omega^2 w_1 = \Phi_1(t, s), \quad \ddot{w}_2 + \omega^2 w_2 = \Phi_2(t, s),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, s) &= -au_1^2 \dot{u}_1 - u_1^3 + 2u_{1t} - 2u_{1st} + 2d(u_2 - u_1), \\ \Phi_2(t, s) &= -au_2^2 \dot{u}_2 - u_2^3 + 2u_{2t} - 2u_{2st} + 2d(u_1 - u_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Из условий разрешимости системы (9) в классе $2\pi/\omega$ периодических по t функций, суть которых состоит в выполнении двух равенств

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi_j(t, s) \exp(\pm i\omega t) dt = 0, \quad j = 1, 2,$$

выводим, что

$$Q_1 = z_1 + (l_1 + il_2)z_1|z_1|^2 - ig(z_2 - z_1), \quad Q_2 = z_2 + (l_1 + il_2)z_2|z_2|^2 - ig(z_1 - z_2),$$

где $g = d/\omega$, $l_1 = -a/2$, $l_2 = 3/(2\omega)$, т.е. в данном случае нормальная форма (точнее ее укороченный вариант) приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} z_1' = z_1 + (l_1 + il_2)z_1|z_1|^2 - ig(z_2 - z_1), \\ z_2' = z_2 + (l_1 + il_2)z_2|z_2|^2 - ig(z_1 - z_2). \end{cases} \quad (10)$$

Аналогичный анализ системы дифференциальных уравнений (5) приводит к следующей нормальной форме:

$$\begin{cases} z_1' = z_1 + (l_1 + il_2)z_1|z_1|^2 + d(z_2 - z_1), \\ z_2' = z_2 + (l_1 + il_2)z_2|z_2|^2 + d(z_1 - z_2), \end{cases} \quad (11)$$

Системы (10) и (11) различаются лишь последними слагаемыми в каждом из двух уравнений. Подчеркнём, что системы (4) и (5) различались также последними слагаемыми.

Следующие два раздела будут посвящены анализу нормальных форм (10) и (11) соответственно. В первом из них будет проанализирована нормальная форма (10), соответствующая системе дифференциальных уравнений (4).

5. Анализ нормальной формы основного варианты системы. Положим в системе дифференциальных уравнений (10)

$$z_1(s) = \rho_1(s) \exp(i\varphi_1(s)), \quad z_2(s) = \rho_2(s) \exp(i\varphi_2(s)), \quad (12)$$

где функции $\rho_1(s)$, $\rho_2(s) > 0$, если рассматривают решения, отличные от тривиальных. Замена (12) в системе дифференциальных уравнений (10) приводит ее к следующему виду:

$$\begin{cases} \rho_1' = \rho_1 + l_1 \rho_1^3 + g \rho_2 \sin \psi, \\ \rho_2' = \rho_2 + l_1 \rho_2^3 - g \rho_1 \sin \psi, \\ \varphi_1' = -g \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \psi + g + l_2 \rho_1^2, \\ \varphi_2' = -g \frac{\rho_1}{\rho_2} \cos \psi + g + l_2 \rho_2^2. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. Систему (13) удобно перенормировать. Положим

$$\rho_1 = \rho_1(s) = \frac{y_1(s)}{\sqrt{|l_1|}}, \quad \rho_2 = \rho_2(s) = \frac{y_2(s)}{\sqrt{|l_1|}},$$

а $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ оставим без изменений. С учетом того обстоятельства, что $l_1 = -a/2 < 0$, вместо системы (13) получим уже следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_1^3 + gy_2 \sin \psi, \\ y_2' = y_2 - y_2^3 - gy_1 \sin \psi, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \varphi_1' = -g \frac{y_2}{y_1} \cos \psi + g + cy_1^2, \\ \varphi_2' = -g \frac{y_1}{y_2} \cos \psi + g + cy_2^2, \end{cases} \quad (15)$$

где $c = l_2/|l_1|$ (в нашем случае $c = 3/(a\omega)$). Далее считаем, что $c \neq 0$. Если теперь из второго уравнения системы (15) вычтем первое уравнение этой системы, не меняя при этом систему (14), то для $y_1 = y_1(s)$, $y_2 = y_2(s)$, $\psi = \psi(s)$ получим уже замкнутую подсистему дифференциальных уравнений для медленных переменных:

$$y_1' = y_1 - y_1^3 + gy_2 \sin \psi, \quad y_2' = y_2 - y_2^3 - gy_1 \sin \psi, \quad \psi' = (y_2^2 - y_1^2) \left(c + g \frac{\cos \psi}{y_1 y_2} \right), \quad (16)$$

Без нарушения общности можно считать, что систему (16) достаточно изучить при $g > 0$. Действительно, при $g < 0$ можно положить $y_1 = u_2$, $y_2 = u_1$, $\Theta = -\psi$. Тогда для переменных u_1 , u_2 , Θ получим систему, подобную (16), в которой следует считать $g > 0$.

Для нахождения периодических по s решений нормальной формы (10) сначала следует найти ненулевые состояния равновесия вспомогательной системы дифференциальных уравнений (16) для «медленных» переменных y_1, y_2, ψ . Это приводит к необходимости анализа следующей системы уравнений:

$$y_1 - y_1^3 + gy_2 \sin \psi = 0, \quad y_2 - y_2^3 - gy_1 \sin \psi = 0, \quad (y_2^2 - y_1^2) \left(c + g \frac{\cos \psi}{y_1 y_2} \right) = 0. \quad (17)$$

При ее анализе считаем, что $g \neq 0$ и, следовательно, $g > 0$. Если $g = 0$, то получаем несодержательный случай двух несвязанных макроэкономических систем.

Решения системы уравнений (17) (т.е. состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (16)) можно разделить на два типа:

тип 1: $y_1 = y_2 = \eta$ ($\rho_1 = \rho_2$);

тип 2: $y_1 \neq y_2$ ($\rho_1 \neq \rho_2$).

Пусть $y_1 = y_2 = \eta$ ($\eta > 0$). Тогда первые два уравнения системы (17) запишутся в виде

$$\eta - \eta^3 + g\eta \sin \psi = 0, \quad \eta - \eta^3 - g\eta \sin \psi = 0,$$

Следовательно, $\sin \psi = 0$, $\eta = 1$. В результате получим лишь два состояния равновесия

$$S_o : y_1 = y_2 = 1, \quad \psi = 0,$$

$$S_p : y_1 = y_2 = 1, \quad \psi = \pi.$$

Состоянию S_o соответствует однородный цикл системы (10)

$$C_o : z_1(s) = \frac{1}{\sqrt{|l_1|}} \exp(i\sigma s), \quad z_2(s) = \frac{1}{\sqrt{|l_1|}} \exp(i\sigma s), \quad \sigma = \frac{l_2}{|l_1|} \quad (\sigma = c).$$

В свою очередь, циклу C_o системы (10) соответствует цикл исходной системы (4)

$$x_1(t, \varepsilon) = x_2(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2} \frac{1}{\sqrt{|l_1|}} \cos(\omega(\varepsilon)t + h_0) + o(\varepsilon),$$

где $\omega(\varepsilon) = (\omega + \varepsilon\sigma)$, $h_0 \in \mathbb{R}$. Последний цикл называется синхронным (иногда его называют циклом Андронова–Хопфа). Подчеркнем, что $\sigma = 3/(a\omega)$.

Состоянию равновесия S_p соответствует противофазный цикл $C_p(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} x_2(t, \varepsilon) &= -x_1(t, \varepsilon), \\ x_1(t, \varepsilon) &= 2\varepsilon^{1/2} \frac{1}{\sqrt{|l_1|}} \cos(\omega_p(\varepsilon)t + h_p) + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\omega_p(\varepsilon) = \omega + \varepsilon\sigma_p, \quad \sigma_p = \frac{l_2}{|l_1|} + 2g.$$

Отметим, что противофазный цикл (18) характерен тем, что колебания первого и второго осцилляторов разнятся на фазу π , а также, что $\sigma_p = \sigma + 2g$, т.е. $\sigma_p \neq \sigma$.

Перейдём к определению состояний равновесия второго типа, т.е. тех, для которых $y_1 \neq y_2$ ($\rho_1 \neq \rho_2$). Состояния равновесия второго типа будем обозначать S_a . Напомним, что такие циклы в теории синхронизации принято называть асимметричными (см., например, [4, 12]).

Их координаты могут быть определены как решения следующей системы уравнений:

$$y_1 - y_1^3 + gy_2 \sin \psi = 0, \quad y_2 - y_2^3 - gy_1 \sin \psi = 0, \quad y_1 y_2 = -\frac{g}{c} \cos \psi. \quad (19)$$

Систему (19) можно преобразовать следующим образом. Во-первых, умножим первое уравнение системы (19) на y_1 , а второе на y_2 . Затем их сложим. В результате получим уравнение

$$y_1^2 + y_2^2 = y_1^4 + y_2^4.$$

Отметим, что справедливо тождество

$$y_1^4 + y_2^4 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)^2 + \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2)^2.$$

Во-вторых, умножим первое уравнение этой системы на y_2 , а второе — на y_1 и вычтем затем из первого уравнения второе. В результате получим ещё одно уравнение

$$y_1 y_2 (y_1^2 - y_2^2) = g(y_1^2 + y_2^2) \sin \psi.$$

Учёт третьего уравнения системы (19) позволяет последнее уравнение переписать в форме

$$y_1^2 - y_2^2 = -c(y_1^2 + y_2^2) \operatorname{tg} \psi.$$

Подчеркнём, что из третьего уравнения системы (19) вытекает неравенство

$$\left(\frac{g}{c}\right) \cos \psi < 0.$$

В нашем случае $c > 0$, а $g > 0$ по предположению. Следовательно, $\cos \psi < 0$.

Суммируя все эти преобразования, получаем систему из трёх уравнений

$$y_1^2 - y_2^2 = -\frac{2c(\operatorname{tg} \psi)}{c^2(\operatorname{tg}^2 \psi) + 1}, \quad y_1^2 + y_2^2 = \frac{2}{1 + c^2 \operatorname{tg}^2 \psi}, \quad y_1^2 y_2^2 = \frac{g^2}{c^2} \cos^2 \psi \equiv \frac{g^2}{c^2(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)}. \quad (20)$$

Из первых двух уравнений системы (20) находим, что

$$y_1^2 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi^2}, \quad y_2^2 = \frac{1 + \xi}{1 + \xi^2}, \quad (21)$$

где $\xi = c(\operatorname{tg} \psi)$ и, следовательно, $\xi \in (-1, 1)$. После подстановки правых частей равенств (21) в третье уравнение системы (20) для вспомогательной неизвестной $\xi \in (-1, 1)$ получаем уравнение

$$P(\eta) = (1 + g^2)\eta^2 - (1 - c^2 - 2g^2)\eta + (g^2 - c^2) = 0, \quad (22)$$

где $\eta = \xi^2 \in (0, 1)$.

При анализе квадратного уравнения (22) следует различать три случая:

Случай 1. $g^2 - c^2 < 0$;

Случай 2. $g^2 - c^2 > 0$;

Случай 3. $g^2 = c^2$ (в нашем случае $g = c$).

Рассмотрим сначала случай 1. При реализации неравенства $g^2 - c^2 < 0$ квадратное уравнение (22) имеет корни разных знаков. При этом $P(0) < 0$, $P(1) = 4g^2 > 0$ ($g \neq 0$ по условию). Это означает, что уравнение (22) имеет один подходящий корень

$$\eta = \frac{(1 - c^2 - 2g^2) + \sqrt{D}}{2(1 + g^2)}, \quad D = (1 - c^2 - 2g^2)^2 + 4(1 + g^2)(c^2 - g^2) > 0.$$

В свою очередь, последнее замечание позволяет сделать вывод, что в случае 1 система дифференциальных уравнений (16) имеет два состояния равновесия $S_a(1; 1+)$, $S_a(1; 1-)$:

$$\begin{aligned} S_a(1; 1+) : \quad y_1 &= \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 + \xi}{1 + \xi^2}}, \quad \psi = \arctan \frac{\xi}{c} + \pi, \quad \xi = \sqrt{\eta}, \\ S_a(1; 1-) : \quad y_1 &= \sqrt{\frac{1 + \xi}{1 + \xi^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi^2}}, \quad \psi = -\arctan \frac{\xi}{c} + \pi, \quad \xi = \sqrt{\eta}. \end{aligned}$$

Напомним, что в нашем случае $c > 0$ (если c было бы отрицательным, то $\psi = \arctan(\xi/c)$ в первом варианте и $\psi = -\arctan(\xi/c)$ во втором).

Перейдем к случаю 2, т.е. пусть выполнено неравенство $g^2 - c^2 > 0$. Требование, что корни квадратного уравнения (22) принадлежат отрезку $(0, 1)$, приводит к двум неравенствам

$$1 - c^2 - 2g^2 > 0, \quad D > 0. \quad (23)$$

Отметим, что вывод условий (23) использует неравенства $P(0) > 0$, $P(1) > 0$, которые справедливы при изучении второго случая.

Если все предыдущие требования выполнены, то в случае 2 система дифференциальных уравнений (16) имеет четыре состояния равновесия $S_a(2; 1+)$, $S_a(2; 1-)$, $S_a(2; 2+)$, $S_a(2; 2-)$:

$$\begin{aligned} S_a(2; 1+) : \quad y_1 &= \sqrt{\frac{1 - \xi_1}{1 + \xi_1^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 + \xi_1}{1 + \xi_1^2}}, \quad \psi = \arctan \frac{\xi_1}{c} + \pi, \quad \xi_1 = \sqrt{\eta_1}, \\ S_a(2; 1-) : \quad y_1 &= \sqrt{\frac{1 + \xi_1}{1 + \xi_1^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 - \xi_1}{1 + \xi_1^2}}, \quad \psi = -\arctan \frac{\xi_1}{c} + \pi, \quad \xi_1 = \sqrt{\eta_1}, \\ S_a(2; 2+) : \quad y_1 &= \sqrt{\frac{1 - \xi_2}{1 + \xi_2^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 + \xi_2}{1 + \xi_2^2}}, \quad \psi = \arctan \frac{\xi_2}{c} + \pi, \quad \xi_2 = \sqrt{\eta_2}, \\ S_a(2; 2-) : \quad y_1 &= \sqrt{\frac{1 - \xi_2}{1 + \xi_2^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 + \xi_2}{1 + \xi_2^2}}, \quad \psi = -\arctan \frac{\xi_2}{c} + \pi, \quad \xi_2 = \sqrt{\eta_2}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\eta_1 = \frac{1 - c^2 - 2g^2 + \sqrt{D}}{2(1 + g^2)}, \quad \eta_2 = \frac{1 - c^2 - 2g^2 - \sqrt{D}}{2(1 + g^2)}.$$

Напомним, что $c > 0$, если мы изучаем модель Гудвина.

В случае 3 уравнение (22) имеет подходящий корень

$$\eta_3 = \frac{1 - 3c^2}{1 + c^2} \in (0, 1),$$

если $1 - 3c^2 > 0$. Тогда возможны так же, как и в случае 1, два варианта формул для координат состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (16)

$$\begin{aligned} S_a(3+) : \quad y_1 &= \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 + \xi}{1 + \xi^2}}, \quad \psi = \arctan \frac{\xi}{c} + \pi, \quad \xi = \sqrt{\eta_3}, \\ S_a(3-) : \quad y_1 &= \sqrt{\frac{1 + \xi}{1 + \xi^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi^2}}, \quad \psi = -\arctan \frac{\xi}{c} + \pi, \quad \xi = \sqrt{\eta_3}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к анализу устойчивости состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (16). При этом будет использована теорема об устойчивости по первому (линейному) приближению. Для этого в матрицу Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \partial F_1 / \partial y_1 & \partial F_1 / \partial y_2 & \partial F_1 / \partial \psi \\ \partial F_2 / \partial y_1 & \partial F_2 / \partial y_2 & \partial F_2 / \partial \psi \\ \partial F_3 / \partial y_1 & \partial F_3 / \partial y_2 & \partial F_3 / \partial \psi \end{pmatrix},$$

где

$$F_1 = y_1 - y_1^3 + gy_2 \sin \psi, \quad F_2 = y_2 - y_2^3 - gy_1 \sin \psi, \quad F_3 = (y_2^2 - y_1^2) \left(c + g \frac{\cos \psi}{y_1 y_2} \right),$$

необходимо подставить координаты исследуемого состояния равновесия и у получившейся матрицы с постоянными элементами определить собственные числа.

Пусть сначала $g^2 - c^2 < 0$, т.е. в задаче о существовании состояний равновесия третьего типа реализуется случай 1. Тогда система дифференциальных уравнений (16) имеет состояния равновесия $S_o, S_p, S_a(1; 1+), S_a(1; 1-)$.

Анализ устойчивости S_o приводит к необходимости исследования спектра матрицы J при $y_1 = y_2 = 1, \psi = 0$. В результате получаем, что

$$J_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & g \\ 0 & -2 & -g \\ -2(c+g) & 2(c+g) & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4(c + g)) = 0,$$

у которого все корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, т.е. S_o асимптотически устойчиво. Аналогичные вычисления для S_p приводят уже к характеристическому уравнению

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4(g - c)) = 0,$$

у которого имеется корень в правой полуплоскости, т.е. состояние равновесия S_p неустойчиво ($g, c > 0$ в рассматриваемой задаче).

Перейдем теперь к анализу устойчивости состояний равновесия $S_a(1; 1+)$ и $S_a(1; 1-)$. В этом случае приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0,$$

где в данном случае

$$P = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}), \quad Q = b(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}), \\ R = -\det(J_a), \quad J_a = \{a_{jk}\}.$$

В свою очередь,

$$a_{11} = 1 - 3y_1^2, \quad a_{12} = g \sin \psi, \quad a_{13} = gy_2 \cos \psi, \\ a_{21} = -g \sin \psi, \quad a_{22} = 1 - 3y_2^2, \quad a_{23} = -gy_1 \cos \psi, \\ a_{31} = (y_1^2 - y_2^2)g \frac{\cos \psi}{y_1 y_2}, \quad a_{32} = (y_1^2 - y_2^2)g \frac{\cos \psi}{y_1 y_2}, \quad a_{33} = g(y_1^2 - y_2^2) \frac{\sin \psi}{y_1 y_2},$$

где y_1, y_2, ψ — координаты соответствующего состояния равновесия ($S_a(1; 1+), S_a(1; 1-)$ в этом случае). Ясно, что анализ устойчивости, как обычно, сводится к проверке неравенств (критерий Рауса—Гурвица) $P, Q, R > 0, PQ - R > 0$. Анализ этих неравенств сразу показывает, что состояния равновесия $S_a(1; 1+), S_a(1; 1-)$ одновременно устойчивы или неустойчивы. Более детальное изучение условий устойчивости опиралось на их численный анализ. Он показал, что в большинстве случаев такие состояния равновесия неустойчивы. Тем не менее, если c и g достаточно близки друг к другу, то можно указать диапазоны их изменения (не очень широкие), когда исследуемые состояния равновесия $S_a(1; 1+)$ и $S_a(1; 1-)$ асимптотически устойчивы. Пусть выбрано $g > 0$. Тогда можно указать такие g_Δ , что при $c \in (g, g_\Delta)$ предыдущее замечание справедливо. Возможность такого выбора g_Δ проверялось численно.

Например, если $g = 0,7$, то $g_{\Delta} \approx 0,8$ ($g = 1,6$, $g_{\Delta} = 1,9$; $g = 3,0$, $g_{\Delta} = 3,4$ и т. д.). Тем не менее всегда можно указать диапазоны g и c , что если $g^2 - c^2 < 0$ ($g < c$), то система дифференциальных уравнений (16) имеет 3 устойчивых состояния равновесия S_o , $S_a(1; 1+)$, $S_a(1; 1-)$. Аналогичный вывод можно сделать в случае 3.

Иная ситуация реализуется в случае 2, т.е. если $g^2 - c^2 > 0$ ($g > c > 0$). В этом случае асимптотически устойчивы S_o , S_p . При этом, как показал анализ устойчивости, четыре состояния равновесия $S_a(2; 1+)$, $S_a(2; 1-)$, $S_a(2; 2+)$, $S_a(2; 2-)$, если они и существуют, то всегда неустойчивы. Подчеркнем, что диапазоны изменения параметров g и c , при которых в случае 2 существуют асимметричные состояния равновесия достаточно узкие. Впрочем, детальный анализ этого вопроса не актуален с прикладной точки зрения. С экономической точки зрения интерес представляют только те решения, которые устойчивы и, следовательно, реализуемы на практике.

6. Анализ второй постановки задачи. В этом разделе изложим анализ нормальной формы (11), которая была получена при изучении системы дифференциальных уравнений (5). Напомним, что вариант модели (5), по-видимому, менее естественен для задач макроэкономики. Отметим также, что изучение системы дифференциальных уравнений (11) во многих аспектах повторяет анализ нормальной формы (10) и поэтому соответствующий анализ системы (11) будет изложен короче. Более того, ограничимся только вариантом $d > 0$. Он более естественен для приложений. Напомним, что $c > 0$ (см. начало статьи).

Итак, в системе дифференциальных уравнений (11) положим (см. предыдущий раздел)

$$z_j(s) = \mu y_j(s) \exp(i\varphi_j(s)), \quad j = 1, 2, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{|l_1|}} \quad (l_1 = -a/2 < 0).$$

В результате последних замен, как и в п. 5, получаем систему дифференциальных уравнений для определения $y_1(s)$, $y_2(s)$, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ следующего вида:

$$\begin{cases} y_1'(s) = y_1 - y_1^3 + d(y_2 \cos \psi - y_1), \\ y_2'(s) = y_2 - y_2^3 + d(y_1 \cos \psi - y_2), \\ \varphi_1' = cy_1^2 + d \frac{y_2}{y_1} \sin \psi, \\ \varphi_2' = cy_2^2 - d \frac{y_1}{y_2} \sin \psi, \end{cases}$$

где, как и ранее, использовано обозначение $c = l_2/|l_1|$. Если теперь вычесть из четвертого уравнения последней системы третье уравнение, то получим замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(s) = y_1 - y_1^3 + d(y_2 \cos \psi - y_1), \\ y_2'(s) = y_2 - y_2^3 + d(y_1 \cos \psi - y_2), \\ \psi' = c(y_2^2 - y_1^2) - d \sin \psi \left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} \right). \end{cases} \quad (24)$$

Подчеркнем, что систему дифференциальных уравнений (24) следует дополнить уравнением для $\varphi_1(s)$ или $\varphi_2(s)$. Например,

$$\varphi_2' = l_2 \frac{y_2^2}{|l_1|} - g \left(\frac{y_1}{y_2} \cos \psi - 1 \right) = cy_2^2 - g \left(\frac{y_1}{y_2} \cos \psi - 1 \right).$$

У системы дифференциальных уравнений (24) найдём состояния равновесия и исследуем вопрос об их устойчивости. Как и в предыдущем разделе состояния равновесия можно разделить на 2 типа. К первому отнесём такие состояния равновесия, для которых $y_1 = y_2$, а ко второму — остальные, для которых $y_1 \neq y_2$.

Система дифференциальных уравнений (24) имеет два состояния равновесия первого типа: $E_o : y_1 = y_2 = 1$, $\psi = 0$, которое существует при всех значениях параметров задачи, а также $E_p : y_1 = y_2 = \sqrt{1 - 2d}$, $\psi = \pi$, существующее при $1 - 2d > 0$ ($d < 1/2$).

Анализ их устойчивости показал, что в изучаемом случае состояние равновесия E_o асимптотически устойчиво всегда (при всех значениях параметров задачи). В свою очередь E_p при данных значениях d и c всегда неустойчиво ($d > 0$, $c > 0$).

Состояния равновесия второго типа обозначим E_a . Его координаты определяют как решения системы алгебраических уравнений

$$y_1 - y_1^3 + d(y_2 \cos \psi - y_1) = 0, \quad y_2 - y_2^3 + d(y_1 \cos \psi - y_2) = 0, \quad c(y_2^2 - y_1^2) - d \left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} \right) \sin \psi = 0.$$

После преобразований, аналогичных тем, которые были использованы при изучении системы уравнений (17), получим уже систему

$$y_1^2 + y_2^2 = 1 - d, \quad y_1 y_2 + d \cos \psi = 0, \quad y_1^2 - y_2^2 = \frac{1 - d}{c} \operatorname{tg} \psi.$$

При получении последней системы уравнений было использовано предположение, что $y_1 \neq y_2$. Ясно, что она имеет решения $y_1, y_2 > 0$, если $\cos \psi < 0$ и если $1 - d > 0$, т.е. $d \in (0, 1)$. При выполнении этих предварительных требований аналогично, как и в п. 5, вопрос об их существовании удаётся свести к анализу квадратного уравнения

$$G(\xi) = c^2 \xi^2 - (c^2 - 1)\xi + Q^2 - 1 = 0, \quad (25)$$

где $Q = 2d/(1-d) > 0$. При этом интерес представляют только те корни этого уравнения, которые принадлежат отрезку $(0, 1)$.

Случай 1. Пусть $(Q^2 - 1) < 0$, т.е. $d \in (0, 1/3)$. Тогда уравнение (25) имеет один подходящий корень

$$\xi = \frac{c^2 - 1 + \sqrt{(c^2 - 1)^2 - 4c^2(Q^2 - 1)}}{2c^2} \in (0, 1);$$

второй корень отрицателен. В этом случае система дифференциальных уравнений (24) имеет два состояния равновесия

$$\begin{aligned} E_a(1; 1+) : \quad y_1 &= \nu \sqrt{1 + \sqrt{\xi}}, \quad y_2 = \nu \sqrt{1 - \sqrt{\xi}}, \quad \psi = \arctan(c\xi) + \pi, \\ E_a(1; 1-) : \quad y_1 &= \nu \sqrt{1 - \sqrt{\xi}}, \quad y_2 = \nu \sqrt{1 + \sqrt{\xi}}, \quad \psi = -\arctan(c\xi) + \pi, \end{aligned}$$

где $\nu = \sqrt{(1-d)/2}$. Анализ таких решений показал, что они всегда неустойчивы.

Случай 2. Пусть $(Q^2 - 1) > 0$, т.е. $d \in (1/3, 1)$. Тогда состояния равновесия существуют, если выполнены ещё два условия (неравенства):

$$(c^2 - 1) > 0, \quad (c^2 - 1)^2 - 4c^2(Q^2 - 1) > 0.$$

В этом случае квадратное уравнение (25) имеет два подходящих корня, которым соответствуют четыре состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (24), но все эти состояния равновесия неустойчивы. Это было показано на основе использования теоремы о первом (линейном) приближении с привлечением численного анализа.

Случай 3. В этом случае $Q^2 = 1$, или $Q = 2d/(1-d) = 1$, т.е. $d = 1/3$. Квадратное уравнение имеет один подходящий корень $\xi = (c^2 - 1)/c^2$, если $(c^2 - 1) > 0$. Ему соответствуют два состояния равновесия системы дифференциальных уравнения (24), которые, как показал анализ, неустойчивы при всех соответствующих значениях c и рассматриваемых d .

7. Основные результаты. Возвратимся к анализу системы (4). Отметим, что каждому состоянию равновесия системы дифференциальных уравнений (16) для медленных переменных y_1, y_2, ψ соответствует периодическое решение нормальной формы (10)

$$z_1(s) = \rho_{1*} \exp(i\delta_*(s+h)), \quad \rho_{1*} = y_{1*} \frac{1}{\sqrt{|l_1|}}, \quad z_2(s) = \rho_{2*} \exp(i\delta_*(s+h) + i\psi_*), \quad \rho_{2*} = y_{2*} \frac{1}{\sqrt{|l_1|}},$$

где

$$\delta_* = cy_{2*}^2 - g \left(\frac{y_{1*}}{y_{2*}} \cos \psi_* - 1 \right) \neq 0, \quad c = \frac{l_2}{|l_1|}.$$

Наконец, y_{1*} , y_{2*} , ψ_* координаты любого из найденных состояний равновесия системы (16). Если случайно оказалось, что $\delta_* = 0$, то у системы дифференциальных уравнений (10) получаем состояния равновесия вместо периодических решений. Ясно, что соответствующее δ_* определяется после интегрирования уравнения

$$\varphi'_2 = l_2 \frac{y_{2*}^2}{|l_1|} - g \left(\frac{y_{1*}}{y_{2*}} \cos \psi_* - 1 \right).$$

В свою очередь, таким решениям полученной нормальной формы (10) соответствуют периодические решения системы дифференциальных уравнений (4). Справедливо утверждение (см. [2,3]), которое можно назвать основным результатом для системы (4).

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ любому существующему состоянию равновесия системы (16) соответствует предельный цикл системы (4) с наследованием устойчивости, т.е. асимптотически устойчивому состоянию равновесия S_* соответствует орбитально асимптотически устойчивый цикл C_* системы (4). Для него справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} x_1(t, \varepsilon) &= 2\varepsilon^{1/2} \rho_{1*} \cos((\omega + \varepsilon\delta_*)(t + h)) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ x_2(t, \varepsilon) &= 2\varepsilon^{1/2} \rho_{2*} \cos((\omega + \varepsilon\delta_*)(t + h) + \psi_*) + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned}$$

где $\rho_{1*} = y_{1*}/\sqrt{|l_1|}$, $\rho_{2*} = y_{2*}/\sqrt{|l_1|}$, а y_{1*} , y_{2*} , ψ_* координаты выбранного и существующего состояния равновесия вспомогательной системы (16), а δ_* было определено ранее, а $h \in \mathbb{R}$.

Отметим, что состояниями равновесия S_* могут быть состояния равновесия первого типа S_o , S_p , а также состояния равновесия второго типа (см. п. 5), т.е. S_a .

Например, если $g = 0,7$, $c = 0,8$, то существует синхронный цикл, в котором $\rho_{1*} = \rho_{2*} = 1$, $\psi_* = 0$, и он устойчив. Существует также противофазный, но неустойчивый цикл, для которого $\rho_{1*} = \rho_{2*} = 1$, $\psi_* = \pi$. Наконец, существуют два асимметричных цикла. Для первого $\rho_{1*} = 0,7/\sqrt{|l_1|}$, $\rho_{2*} = 1,1/\sqrt{|l_1|}$, $\psi_* = 3,62$ ($\psi_* \approx 1,15\pi$, т.е. угол в третьей четверти). Для второго получаем, что $\rho_{1*} = \frac{1,1}{\sqrt{|l_1|}}$, $\rho_{2*} = \frac{0,7}{\sqrt{|l_1|}}$, $\psi_* = 2,66$ ($\psi_* \approx 0,85\pi$, т.е. угол из второй четверти).

В данном случае оба асимметричных цикла устойчивы.

Для системы дифференциальных уравнений (5) справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ каждому существующему состоянию равновесия E_* вспомогательной системы (24) соответствует цикл системы дифференциальных уравнений (5) с наследованием свойств устойчивости.*

Отметим, что для циклов системы дифференциальных уравнений (5) могут быть выписаны асимптотические формулы. Их вид аналогичен формулам из теоремы 1.

8. Заключение. В работе были рассмотрены две системы, описывающие динамику двух взаимодействующих макроэкономических систем. Если учет взаимодействия произведен тем способом, который использован в системе дифференциальных уравнений (5), то динамика такой системы достаточно простая. В ней могут реализоваться только синхронные колебания. Напомним, что у нее устойчив только однородный цикл, а противофазный и асимметричные, если даже и существуют, то неустойчивы. Эти выводы еще раз акцентируют внимание на то, что система дифференциальных уравнений (5) менее естественна для приложений в экономике.

Иная ситуация реализуется при использовании в качестве математической модели системы дифференциальных уравнений (4). Пусть имеет место первый случай, т.е. $g^2 - c^2 < 0$, то в этой ситуации устойчив синхронный цикл, а противофазный цикл неустойчив. В тоже время можно указать диапазоны изменения параметров задачи, когда существуют устойчивые асимметричные циклы. Справедливости ради можно отметить, что такие диапазоны не будут слишком большими. При $g^2 - c^2 > 0$, когда реализуется второй случай, ситуация кардинально изменяется: синхронный и противофазный циклы устойчивы, но асимметричные циклы, если и существуют, то неустойчивы. В этом случае колебания двух частей макроэкономической системы могут происходить в противофазном режиме, когда подъем одной из экономик сопровождается стагнацией

в другой. Отметим, что такой вариант колебаний характерен для многих физических систем. Так, противофазные колебания достаточно типичны в задаче о колебаниях двух связанных маятников. Это явление было открыто опытным путем Гюйгенсом [10].

Добавим, что для системы дифференциальных уравнений (4) однородный цикл существует и устойчив всегда. Это означает, что в такой постановки задачи достаточно типична мультистабильность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 5. — С. 584–601.
3. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 6. — С. 738–753.
4. *Куликов Д. А.* Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов// Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. — 2006. — 14, № 5. — С. 120–132.
5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: ГИТТЛ, 1956.
6. *Морозов А. Д.* Математические модели теории колебаний. — М.-Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2017.
7. *Bashkirtseva I., Ryazanova T., Ryashko L.* Confidence domains in the analysis of noise-induced transition to chaos for Goodwin model of business cycles// Int. J. Bifurcation Chaos. — 2014. — 24, № 8. — P. 1–10.
8. *Guckenheimer J., Holmes P. J.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. — Berlin: Springer-Verlag, 1983.
9. *Goodwin R. M.* The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles// Econometrica. — 1951. — 19, № 1. — P. 1–17.
10. *Huygens C.* The pendulum clock (English translation, original publication in 1673). — Iowa: Iowa State Univ. Press, 1986.
11. *Keynes J. M.* General Theory of Employment, Interest, and Money. — New-York: Harcourt Brace, 1936.
12. *Kulikov D. A.* Self-similar cycles and their local bifurcations in the problem of two weakly coupled oscillators// J. Appl. Math. Mech. — 2010. — 74, № 4. — P. 389–400.
13. *Lorenz H. W.* Goodwin's nonlinear accelerator and chaotic motion// J. Econ. — 1987. — 47, № 4. — P. 413–418.
14. *Lorenz H. W., Nusse H. E.* Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered// Chaos Soliton Fractals. — 2002. — 13. — P. 957–965.
15. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — New York: Springer-Verlag, 1993.
16. *Ryazanova T., Jungeilges J.* Noise-induced transitions in a stochastic Goodwin-type business cycle model// Struct. Change Econ. Dyn. — 2017. — 40. — P. 103–115.
17. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

Куликов Дмитрий Анатольевич

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Баева Ольга Владимировна

Академия ФСИН России, Рязань

E-mail: olga836@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 88–96
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-88-96

УДК 517.925.51

СКРЫТАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКИ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ЗАПАЗДЫВАНИИ

© 2022 г. С. С. МАМОНОВ, И. В. ИОНОВА, А. О. ХАРЛАМОВА

Аннотация. Рассматривается математическая модель системы фазовой автоподстройки с учетом нелинейности в запаздывании, в случае дробно-рационального интегрирующего фильтра второго порядка. Получены условия существования нескольких квазисинхронных режимов системы, определяющих режимы фазовой синхронизации. Проведён анализ влияния нелинейности запаздывания на фазовую мультистабильность. Целью работы является разработка численно-аналитического подхода для определения условий существования скрытой синхронизации фазовых систем, разработка алгоритма определения влияния нелинейности запаздывания на режимы синхронизации.

Ключевые слова: фазовая система, фазовая автоподстройка частоты, динамический режим, автомодуляционные колебания, синхронизация.

HIDDEN SYNCHRONIZATION OF PHASE-LOCKED LOOPS WITH NONLINEAR DELAY

© 2022 S. S. MAMONOV, I. V. IONOVA, A. O. KHARLAMOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider a mathematical model of a phase locked loop system taking into account nonlinearity in the delay in the case of a fractional rational second-order integrating filter. We obtain conditions for the existence of several quasi-synchronous modes of the system, which determine the phase synchronization modes, and analyze the influence of the nonlinear delay on the phase multistability. We develop numerical and analytical conditions for the existence of hidden synchronization of phase systems and construct an algorithm for determining the influence of nonlinear delays on synchronization modes.

Keywords and phrases: phase system, phase locked loop, dynamic mode, self-modulation oscillations, synchronization.

AMS Subject Classification: 34K05, 34K13, 34K60

1. Введение. В работе рассматривается система фазовой автоподстройки с запаздыванием. Системы с запаздыванием отличаются от обычных фазовых систем тем, что в одном или нескольких из своих звеньев имеют запаздывание во времени на величину τ , называемую временем запаздывания выходного сигнала относительно входного, причём это время запаздывания остаётся постоянным и во всём последующем ходе процесса [1]. Передаточная функция звена чистого запаздывания имеет вид

$$K_\tau(p) = 1 - \tau p + \frac{1}{2!} \tau^2 p^2 + \dots + \frac{1}{n!} \tau^n p^n = e^{-\tau p}.$$

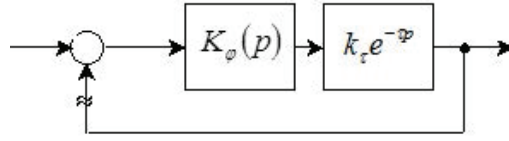


Рис. 1. Схема цепи при последовательном включении звена с запаздыванием.

При последовательном включении звена с запаздыванием передаточная функция системы будет определяться соотношением $K_\tau(p) = K_\varphi(p)e^{-\tau p}$, где $K_\varphi(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы без учета запаздывания. На рисунке 1 изображена схема звена с запаздыванием, включенного в прямую цепь при размыкании главной обратной связи. В этом случае $K_\tau(p) = K_\varphi(p)k_\tau e^{-\tau p}$, где k_τ — коэффициент передачи звена с запаздыванием [1].

Динамика рассматриваемой системы фазовой автоподстройки с запаздыванием описывается операторным уравнением

$$p\sigma + K_\varphi(p)K_\tau(p)\Omega_y F(\sigma) = \Omega_H \quad (1)$$

(см. [2,4,12]), где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования, $\sigma(t)$ — разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, Ω_y — полоса удержания фазового кольца, $K_\varphi(p)$ — коэффициент передачи фильтров нижних частот в фазовой цепи управления, $K_\tau(p) = e^{-\tau p}$ — операторный коэффициент запаздывания [2,9], τ — время запаздывания, $F(\sigma)$ — характеристика фазового детектора, $F(\sigma)$ — Δ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция, $\Omega_H = \text{const}$ — начальная расстройка. В работе [7] проведены исследования системы синхронизации в случае, когда операторный коэффициент запаздывания определяется линейной зависимостью от оператора дифференцирования $K_\tau(p) = e^{-\tau p} \approx 1 - \tau p$. В настоящей работе предлагается в коэффициенте запаздывания учитывать нелинейную зависимость от оператора дифференцирования

$$K_\tau(p) = 1 - \tau p + \frac{1}{2!}\tau^2 p^2.$$

2. Основные результаты. Построим математическую модель системы фазовой автоподстройки с нелинейностью в запаздывании. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений [5,6,8–11]

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + \rho\varphi(\sigma), \quad (2)$$

где $x, b, c \in \mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$\varphi(\sigma) = (AF(\sigma) - \gamma)$ — Δ -периодическая функция,

$$\alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad \nu = -\nu_1 < 0, \quad \Gamma > 0, \quad \rho_1 = \nu_1\beta_1^{-1}, \quad \rho_0 = \rho - \rho_1, \\ l^T b = -\nu_1 < 0, \quad c^T b = -\Gamma < 0, \quad c^T A = l^T, \quad l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T.$$

Для системы (2) определим операторное уравнение (1), описывающее динамику системы фазовой автоподстройки с запаздыванием. Систему (2) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2 + \nu\varphi(\sigma), \\ \dot{x}_2 = x_1 - \Gamma\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = x_2 + \rho\varphi(\sigma). \end{cases} \quad (3)$$

С учетом (2) найдем значения $\ddot{\sigma}$, $\ddot{\sigma}$

$$\ddot{\sigma} = \dot{x}_2 + \rho\dot{\varphi}(\sigma) = \dot{x}_1 - \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) + \rho\dot{\varphi}(\sigma), \quad \ddot{\sigma} = \dot{x}_1 - \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) + \rho\dot{\varphi}(\sigma). \quad (4)$$

Из соотношений (4), (3) определим x_1 , x_2 , \dot{x}_1

$$x_1 = \ddot{\sigma} + \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) - \rho\dot{\varphi}(\sigma), \quad x_2 = \dot{\sigma} - \rho\varphi(\sigma), \quad \dot{x}_1 = \ddot{\sigma} + \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) - \rho\dot{\varphi}(\sigma). \quad (5)$$

Равенства (5) позволяют представить первое уравнение системы (3) в виде

$$\ddot{\sigma} + \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) - \rho\ddot{\varphi}(\sigma) = -\alpha_1(\ddot{\sigma} + \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) - \rho\dot{\varphi}(\sigma)) - \beta_1(\dot{\sigma} - \rho\varphi(\sigma)) + \nu\varphi(\sigma). \quad (6)$$

Используя (5), получим соотношение

$$\ddot{\sigma} + \alpha_1\ddot{\sigma} + \beta_1\dot{\sigma} + (\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu)\varphi(\sigma) + (\Gamma - \alpha_1\rho)\dot{\varphi}(\sigma) - \rho\ddot{\varphi}(\sigma) = 0. \quad (7)$$

Пусть $p = d/dt$ – оператор дифференцирования, тогда (7) примет вид

$$(p^2 + \alpha_1p + \beta_1)(p\sigma) + (\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu)\varphi(\sigma) + (\Gamma - \alpha_1\rho)(p\varphi(\sigma)) - \rho(p^2\varphi(\sigma)) = 0. \quad (8)$$

С учетом (8) получим операторное уравнение

$$(p^2 + \alpha_1p + \beta_1)(p\sigma) + (-\rho p^2 + (\Gamma - \alpha_1\rho)p + (\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu))\varphi(\sigma) = 0. \quad (9)$$

Обозначим

$$M(p) = -\rho p^2 + (\Gamma - \alpha_1\rho)p + (\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu). \quad (10)$$

Представим оператор $M(p)$ в виде

$$M(p) = (A_1p + A_2)(1 - \tau p), \quad A_1, A_2, \tau \in \mathbb{R}_0^+.$$

Используя (10), получим равенство

$$-\tau A_1 p^2 + (A_1 - \tau A_2)p + A_2 = -\rho p^2 + (\Gamma - \alpha_1\rho)p + (\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu). \quad (11)$$

Приравнявая коэффициенты при степенях оператора p , найдем A_1, A_2, τ :

$$A_1 = \frac{\rho}{\tau}, \quad A_2 = \alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu > 0, \quad (12)$$

$$\frac{\rho}{\tau} - \tau(\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu) = (\Gamma - \alpha_1\rho). \quad (13)$$

Уравнение (13) определяет взаимосвязь значений τ и ρ . Приведем (13) к виду

$$\tau^2(\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu) + \tau(\Gamma - \alpha_1\rho) - \rho = 0. \quad (14)$$

Пусть для системы (2) выполнено неравенство (12); тогда

$$D = (\Gamma - \alpha_1\rho)^2 + 4\rho(\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu) > 0, \quad -\rho < 0. \quad (15)$$

Из (15) следует, что уравнение (14) имеет единственный положительный корень

$$\tau = (-(\Gamma - \alpha_1\rho) + \sqrt{D}) / (2(\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu)). \quad (16)$$

Используя (16), (15), (14), получим, что если $\rho = 0$, то $\tau = 0$. При $\tau = 0$ из (14) следует, что $\rho = 0$. Введем обозначение

$$N(p) = p^2 + \alpha_1p + \beta_1. \quad (17)$$

Учитывая (10), (17), (11), (12), запишем уравнение (9) в виде

$$N(p)(p\sigma) + (A_1p + A_2)(1 - \tau p)\varphi(\sigma) = 0. \quad (18)$$

В уравнении (18) сделаем замену $\varphi(\sigma) = (F(\sigma) - \gamma)$, где

$$\gamma = \frac{\beta_1\Omega}{\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu} = \frac{\beta_1\Omega}{A_2},$$

$\Omega = \text{const} > 0$, получим

$$N(p)(p\sigma) + (A_1p + A_2)(1 - \tau p)F(\sigma) - A_2\gamma = 0. \quad (19)$$

Соотношение (19) получается из операторного уравнения

$$p\sigma + \frac{(A_1p + A_2)(1 - \tau p)}{N(p)}F(\sigma) = \Omega \quad (20)$$

умножением на оператор $N(p)$. При этом $\beta_1\Omega = A_2\gamma$. Для (19) введем обозначения

$$K_\varphi(p) = \frac{A_1p + A_2}{p^2 + \alpha_1p + \beta_1},$$

$K_\tau(p) = 1 - \tau p$, получим уравнение

$$p\sigma + K_\varphi(p)K_\tau(p)F(\sigma) = \Omega. \quad (21)$$

Операторное уравнение (21) описывает динамику системы фазовой автоподстройки с линейным запаздыванием, $\sigma(t)$ — разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов,

$$\Omega = \frac{\Omega_H}{\Omega_y},$$

$\Omega_y = \text{const}$ — начальная расстройка, Ω_y — полоса удержания фазового кольца, $K_\varphi(p)$ — коэффициент передачи фильтров нижних частот в фазовой цепи управления, $K_\tau(p)$ — операторный коэффициент запаздывания, τ — время запаздывания, $F(\sigma)$ — характеристика фазового детектора. Таким образом, если для (2) выполняется неравенство (12), то система (2) является математической моделью системы фазовой автоподстройки с запаздыванием. Время запаздывания определяется соотношением (16).

Определим систему дифференциальных уравнений для операторного уравнения (1) с учетом нелинейности запаздывания. В этом случае операторный коэффициент запаздывания удовлетворяет соотношению

$$K_\tau(p) = e^{-\tau p} \approx 1 - \tau p + \frac{1}{2!}\tau^2 p^2.$$

Используя $K_\tau(p)$, определим оператор $K_{\tau_1}(p) = 1 - \tau p + \tau_1 p^2$, зависящий от двух параметров τ и τ_1 . При $\tau_1 = \tau^2/2!$ получим равенство $K_{\tau_1}(p) = K_\tau(p)$.

Используя (2), рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + (b + q)\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + \rho\varphi(\sigma) - \rho_2\dot{\varphi}(\sigma) + \rho_3\ddot{\varphi}(\sigma), \quad (22)$$

где

$$q = \text{colon}(q_1, q_2) = \text{colon}(-\alpha_1\beta_1\rho_2; \beta_1\rho_2) = \beta_1\rho_2 \text{colon}(-\alpha_1; 1), \\ \rho_2 > 0, \quad \varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma, \quad \ddot{\varphi}(\sigma) = -\ddot{\varphi}(\sigma).$$

Систему (22) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2 + \nu\varphi(\sigma) - \alpha_1\beta_1\rho_2\varphi(\sigma), \\ \dot{x}_2 = x_1 - \Gamma\varphi(\sigma) + \beta_1\rho_2\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = x_2 + \rho\varphi(\sigma) - \rho_2\dot{\varphi}(\sigma) + \rho_3\ddot{\varphi}(\sigma). \end{cases} \quad (23)$$

С учетом (23) получим

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} &= \dot{x}_2 - \rho\dot{\varphi}(\sigma) + \rho_2\ddot{\varphi}(\sigma) + \rho_3\dddot{\varphi}(\sigma) = x_1 - \Gamma\varphi(\sigma) + \beta_1\rho_2\varphi(\sigma) + \rho\dot{\varphi}(\sigma) - \rho_2\ddot{\varphi}(\sigma) + \rho_3\dddot{\varphi}(\sigma), \\ \ddot{\sigma} &= \dot{x}_1 - \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) + \rho\ddot{\varphi}(\sigma) + \beta_1\rho_2\dot{\varphi}(\sigma) - \rho_2\ddot{\varphi}(\sigma) - \rho_3\dddot{\varphi}(\sigma). \end{aligned} \quad (24)$$

Равенства (24) позволяют представить первое уравнение системы (23) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} + \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) - \rho\ddot{\varphi}(\sigma) - \beta_1\rho_2\dot{\varphi}(\sigma) + \rho_2\ddot{\varphi}(\sigma) + \rho_3\ddot{\varphi}(\sigma) &= \\ &= -\alpha_1 \left(\ddot{\sigma} + \Gamma\varphi(\sigma) - \beta_1\rho_2\varphi(\sigma) - \rho\dot{\varphi}(\sigma) + \rho_2\ddot{\varphi}(\sigma) - \rho_3\ddot{\varphi}(\sigma) \right) - \\ &\quad - \beta_1 \left(\dot{\sigma} - \rho\varphi(\sigma) + \rho_2\dot{\varphi}(\sigma) - \rho_3\ddot{\varphi}(\sigma) + \nu\varphi(\sigma) - \alpha_1\beta_1\rho_2\varphi(\sigma) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Используя (25) и оператор дифференцирования $p = d/dt$, получим соотношение

$$\begin{aligned} (p^2 + \alpha_1 p + \beta_1)(p\sigma) + (\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu)\varphi(\sigma) + (\Gamma - \alpha_1\rho)(p\varphi(\sigma)) - \\ - \rho(p^2\varphi(\sigma)) + (\alpha_1\rho_2 + \rho_3 - \beta_1\rho_3)(p^2\varphi(\sigma) + (\rho_2 - \alpha_1\rho_3)(p^3\varphi(\sigma))). \end{aligned} \quad (26)$$

С учетом обозначений (10), (17), уравнение (26) запишем в виде

$$N(p)(p\sigma) + M(p)\varphi(\sigma) + ((\rho_2 - \alpha_1\rho_3)p^3 + (\alpha_1\rho_2 + \rho_3 - \beta_1\rho_3)p^2)\varphi(\sigma) = 0. \quad (27)$$

Обозначим

$$L(p) = (\rho_2 - \alpha_1\rho_3)p^3 + (\alpha_1\rho_2 + \rho_3 - \beta_1\rho_3)p^2. \quad (28)$$

Представим оператор $L(p)$ в виде

$$L(p) = (A_1p + A_2)\tau_1p^2 = \tau_1A_1p^3 + \tau_1A_2p^2,$$

где A_1, A_2 определяются равенствами (12). Используя (28), получим

$$(\rho_2 - \alpha_1\rho_3)p^3 + (\alpha_1\rho_2 + \rho_3 - \beta_1\rho_3)p^2 = \tau_1A_1p^3 + \tau_1A_2p^2. \quad (29)$$

Приравнявая коэффициенты при степенях оператора p , найдем ρ_2, ρ_3

$$\begin{aligned} \rho_2 = \tau_1A_1 + \alpha_1\rho_3 &= \tau_1A_1 + \frac{\alpha_1\tau_1A_2 - \alpha_1^2\tau_1A_1}{\alpha_1^2 - \beta_1 + 1} = \frac{\tau_1A_1 - \beta_1\tau_1A_1 + \alpha_1\tau_1A_2}{\alpha_1^2 - \beta_1 + 1}, \\ \alpha_1\tau_1A_1 + \alpha_1^2\rho_3 + \rho_3 - \beta_1\rho_3 &= \tau_1A_2. \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\rho_2 = \frac{\tau_1A_1 - \beta_1\tau_1A_1 + \alpha_1\tau_1A_2}{\alpha_1^2 - \beta_1 + 1}, \quad (30)$$

$$\rho_3 = \frac{\tau_1A_2 - \alpha_1\tau_1A_1}{\alpha_1^2 - \beta_1 + 1}. \quad (31)$$

Если $\tau_1 = \tau^2/2!$, то соотношения (30), (31) примут вид

$$\rho_2 = \frac{(A_1 - \beta_1A_1 + \alpha_1A_2)\tau^2}{4(\alpha_1^2 - \beta_1 + 1)}, \quad \rho_3 = \frac{(A_2 - \alpha_1A_1)\tau^2}{4(\alpha_1^2 - \beta_1 + 1)}. \quad (32)$$

В силу (30), (31), (29), уравнение (27) определит равенство

$$N(p)(p\sigma) + M(p)\varphi(\sigma) + ((A_1p + A_2)\tau_1p^2)\varphi(\sigma) = 0, \quad (33)$$

где $M(p) = (A_1p + A_2)(1 - \tau p)$. В уравнении (33) сделаем замену

$$\varphi(\sigma) = (F(\sigma) - \gamma),$$

где $\gamma = \beta_1\Omega/A_2$, $\Omega = \text{const} > 0$, получим

$$N(p)(p\sigma) + (A_1p + A_2)(1 - \tau p + \tau_1p^2)F(\sigma) - A_2\gamma = 0. \quad (34)$$

Соотношение (34) получается из операторного уравнения

$$p(\sigma) + \frac{(A_1p + A_2)(1 - \tau p + \tau_1p^2)}{N(p)}F(\sigma) = \Omega \quad (35)$$

умножением на оператор $N(p)$. Для (35) обозначим

$$K_\varphi(p) = \frac{A_1p + A_2}{p^2 + \alpha_1p + \beta_1}, \quad K_{\tau_1}(p) = 1 - \tau p + \tau_1p^2,$$

получим уравнение

$$p\sigma + K_\varphi(p)K_{\tau_1}(p)F(\sigma) = \Omega. \quad (36)$$

Уравнение (36) описывает динамику системы фазовой автоподстройки с учетом нелинейности в запаздывании. Таким образом, если в системе (22) значения ρ_2, ρ_3 , определяются соотношениями (30), (31) или соотношением (32) при $\tau_1 = \tau^2/2!$, то (22) является математической моделью системы фазовой автоподстройки с учетом нелинейности в запаздывании.

Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2), где

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\nu_1 \\ -\Gamma \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0;$$

тогда

$$\begin{aligned} c^T b &= -\Gamma, \quad c^T A = l^T, \quad l^T b = -\nu_1 < 0, \quad \text{rang} \|c, l\| = 2, \\ l^T A &= -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T, \quad c^T A^{-1} b \neq 0, \quad \rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1}, \quad \rho = \rho_1 + \rho_0. \end{aligned}$$

Пусть

$$\alpha = 0,02, \quad \beta = 2,11, \quad \Gamma = 4, \quad \nu_1 = 1,24, \quad \gamma = 0,12, \quad \rho_1 = 0,588, \quad \rho_0 = 0,032,$$

$\varphi(\sigma) = -\gamma + \sin(\sigma + \arcsin \gamma)$ — периодическая функция с периодом $\Delta = 2\pi$, $\varphi(0) = 0$.

Численно-аналитическими методами [5, 6, 8–11] можно показать, что система (2) имеет устойчивый предельный цикл первого рода

$$z_1(t) = \text{colon} (x_1(t), x_2(t), \sigma_1(t))$$

с начальными условиями

$$x_1 = 1,89025, \quad x_2 = 8,74307, \quad \sigma_1 = 0, \quad T_{z_1} = 4,45675,$$

для которого

$$\langle \dot{\sigma} \rangle = 0,0008931,$$

где

$$\langle \dot{\sigma}_1 \rangle = T^{-1} \int_0^T \dot{\sigma}(t) dt = 0.$$

Используя (16), определим запаздывание

$$\tau = 0,0777052548, \quad \tau_1 = \frac{\tau^2}{4} = 0,0015095266.$$

С учетом нелинейности запаздывания динамика системы фазовой автоподстройки описывается системой (23). Значение ρ_2 определяется равенством (32):

$$\rho_2 = 0,00089.$$

Численно-аналитическими методами [5, 6, 8–11] можно показать, что система (23) имеет устойчивый предельный цикл первого рода

$$\tilde{z}_1(t) = \text{colon} (\tilde{x}_{11}(t), \tilde{x}_{21}(t), \tilde{\sigma}_1(t))$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}_1 = 1,91077, \quad \tilde{x}_2 = 8,78266, \quad \tilde{\sigma}_1 = 0, \quad T_{\tilde{z}_1} = 4,45772,$$

для которого

$$\langle \dot{\tilde{\sigma}}_1 \rangle = 0,0008972.$$

Учет нелинейности в запаздывании приводит к увеличению среднего значения $\langle \dot{\tilde{\sigma}}_1 \rangle$ на 0,46%, что говорит об ухудшении характеристики режима синхронизации.

У системы (2) помимо цикла $z_1(t)$ существует еще один устойчивый предельный цикл $z_2(t)$ с начальными условиями

$$x_1 = 2,36543, \quad x_2 = 12,13685, \quad \sigma_2 = 0, \quad T_{z_2} = 4,29085,$$

для которого

$$\langle \dot{\sigma}_2 \rangle = 0,0012304.$$

Существование в системе (2) разночастотных предельных циклов первого рода позволяет сделать вывод о наличии фазовой мультистабильности в этой системе, при этом предельные циклы первого рода системы (2) определяют режимы фазовой синхронизации.

У системы (23) также существует устойчивый предельный цикл первого рода

$$\tilde{z}_2(t) = \text{colon} (\tilde{x}_{12}(t), \tilde{x}_{22}(t), \tilde{\sigma}_2(t))$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}_{12} = 2,36334, \quad \tilde{x}_{22} = 12,13765, \quad \tilde{\sigma}_2 = 0, \quad T_{\tilde{z}_2} = 4,29073,$$

для которого

$$\langle \dot{\tilde{\sigma}}_2 \rangle = 0,0012401.$$

Для выбора наилучшего режима скрытой синхронизации системы (2) возникает необходимость проведения сравнительного анализа зависимости кривизны циклов системы (2) от ее координат. Для этого рассматривается расширенная система вида [10]

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma, \\ \dot{K}(t) = \psi(\sigma, x), \end{cases} \quad (37)$$

где

$$\dot{K}(t) = \frac{g'f - 3gf'}{2g^{1/2}f^{5/2}}$$

— производная кривизны цикла системы (1), а функции $g(x; \sigma)$, $g'(x; \sigma)$, $f(x; \sigma)$ и $f'(x; \sigma)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} g(x; \sigma) &= (x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2)^2 + (x'_2 \sigma'' - x''_2 \sigma')^2 + (\sigma' x'_1 - \sigma'' x'_1)^2, \\ g'(x; \sigma) &= 2(x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2)(x'_1 x'''_2 - x'''_1 x'_2) + 2(x'_2 \sigma'' - x''_2 \sigma')(x'_2 \sigma''' - x'''_2 \sigma') + \\ &\quad + 2(x'_1 \sigma' - x'_1 \sigma'')(x'''_1 \sigma' - x'_1 \sigma'''), \\ f(x; \sigma) &= x_1'^2 + x_2'^2 + \sigma'^2, \quad f'(x; \sigma) = 2x'_1 x''_1 + 2x'_2 x''_2 + 2\sigma' \sigma''. \end{aligned}$$

В работах [6, 10] для циклов $z_1(t)$, $z_2(t)$ системы (37) проведен сравнительный анализ зависимости кривизны от фазовых координат этой системы.

Для выяснения вопроса о существовании нулей кривизны цикла системы (2) воспользуемся теоремой.

Теорема 1. Пусть для кривизны $K(t)$ цикла системы (2) существуют такие t^* , $r > 0$, $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, что оператор

$$U \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K(t)^{\theta_1}}{(t-t^*)^{\theta_2}} + t + y \\ 2y \end{pmatrix},$$

на границе $\partial\omega$ множества

$$\omega = \{(t, y) : (t-t^*)^2 + y^2 \leq r^2\}$$

определяет векторное поле

$$Q \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} - U \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix},$$

для которого вращение на $\partial\omega$ не равно нулю $\gamma(Q, \partial\omega) \neq 0$. Тогда существует такое t_0 , что $K(t_0) = 0$.

Доказательство. В силу теоремы [3] оператор U имеет неподвижную точку на множестве ω ,

$$U \begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K(t_0)^{\theta_1}}{(t_0-t^*)^{\theta_2}} + t_0 + y_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} K(t_0)^{\theta_1} \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

так что $K(t_0) = 0$. □

Теорема позволяет выяснять вопрос о существовании нулей у неотрицательно определенных функций. Рассмотрим кривизну $K_{z_1}(t)$ цикла $z_1(t)$ фазовой системы (2). На рис. 2 представлена зависимость кривизны этого цикла от времени на его периоде.

Для условий теоремы возьмем $r = 0,12$, $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 1$, в качестве значения $t^* = 0,2476$ выберем приближенное значения нуля производной $\dot{K}(t)$. На рис. 3 представлены множества $\partial\omega$ и $U(\partial\omega)$, а на рис. 4 изображено векторное поле $Q(\partial\omega)$, для которого $\gamma(Q, \partial\omega) \neq 0$. В силу теоремы функция $K(t)$ имеет ноль на промежутке $[t^* - r; t^* + r]$.

Рассмотрим систему (2) в случае увеличения запаздывания. Пусть

$$\alpha_1 = 0,02, \quad \beta_1 = 2,11, \quad \Gamma = 4, \quad \nu_1 = 1,24, \quad \gamma = 0,12, \quad \rho = 0,9;$$

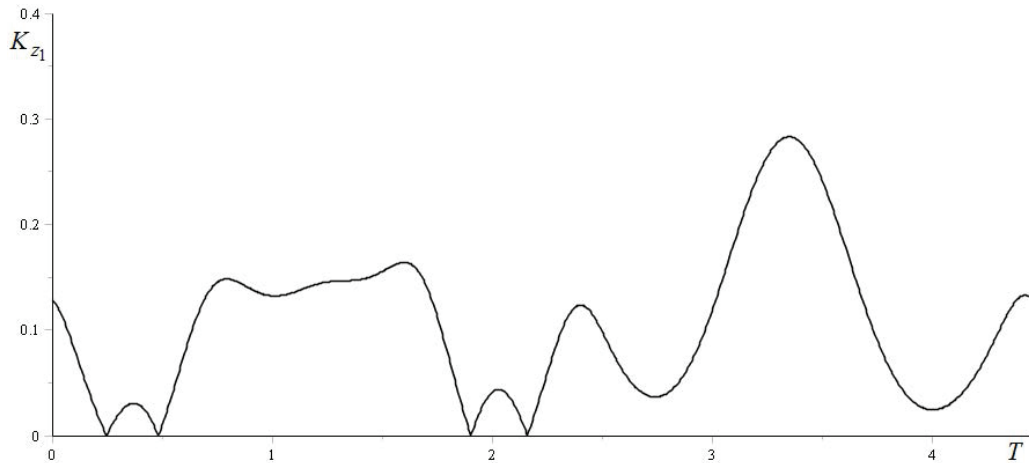


Рис. 2. Кривизна цикла $z_1(t)$ фазовой системы (2).

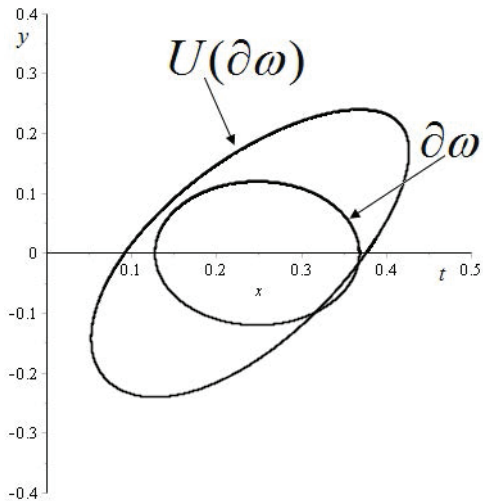


Рис. 3. Множества $\partial\omega$ и $U(\partial\omega)$.

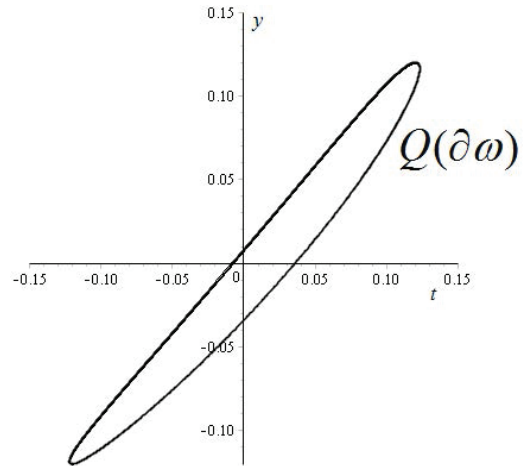


Рис. 4. Векторное поле $Q(\partial\omega)$, для которого $\gamma(Q, \partial\omega) \neq 0$.

тогда увеличение значения ρ приводит к увеличению

$$\tau = 0,11699, \quad \tau_1 = \frac{\tau^2}{4} = 0,003421585770.$$

Система (2) имеет цикл $z_3(t)$ с начальными условиями

$$x_1 = 5,01069, \quad x_2 = 10,32156, \quad \sigma_3 = 0, \quad T_{z_3} = 4,40252,$$

для которого

$$\langle \dot{\sigma}_3 \rangle = 0,0010535.$$

В свою очередь, система (23) также имеет устойчивый предельный цикл с начальными условиями

$$\tilde{z}_3(t) = \text{colon} (\tilde{x}_{13}(t), \tilde{x}_{23}(t), \tilde{\sigma}_3(t))$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}_{13} = 4,20745, \quad \tilde{x}_{23} = 10,53717, \quad \tilde{\sigma}_3 = 0, \quad T_{\tilde{z}_3} = 4,43369,$$

для которого

$$\langle \dot{\tilde{\sigma}}_3 \rangle = 0,0010828.$$

Таким образом, увеличение времени запаздывания в системе фазовой автоподстройки приводит к увеличению характеристики синхронных режимов на 2,78%, что приводит к необходимости учитывать нелинейности в запаздывании при исследовании систем фазовой автоподстройки.

3. Заключение. В работе проведено исследование системы фазовой автоподстройки с запаздыванием. Для этой системы определены условия существования нескольких режимов фазовой синхронизации. Проведён анализ влияния запаздывания на фазовую мультистабильность. Рассмотрен пример электрической цепи фильтра нижних частот и найдены условия, определяющие значения коэффициентов фильтра нижних частот и запаздывания для вынужденной фазовой синхронизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1972.
2. Капранов М. В., Кулешов В. Н., Уткин Г. М. Теория колебаний в радиотехнике. — М.: Наука, 1984.
3. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
4. Мамонов С. С. Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Мат. мех. информ. — 2011. — 11, № 1. — С. 70–81.
5. Мамонов С. С., ИONOVA И. В., Харламова А. О. Матричные уравнения систем фазовой синхронизации // Чебышевский сб. — 2019. — 20, № 2. — С. 244–258.
6. Мамонов С. С., ИONOVA И. В., Харламова А. О. Пространственные характеристики циклов систем дифференциальных уравнений // в кн.: Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. Вып. 1. — Рязань: РГУ им. С. А. Есенина, 2020. — С. 39–45.
7. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестн. Рязан. гос. радиотехн. ун-та. — 2017. — № 62. — С. 26–35.
8. Мамонов С. С., Харламова А. О. Циклы первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 148. — С. 83–92.
9. Мамонов С. С., Харламова А. О., ИONOVA И. В. Колебательно-вращательные циклы фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестн. РАЕН. — 2018. — 18, № 4. — С. 51–57.
10. Мамонов С. С., Харламова А. О., ИONOVA И. В. Кривизна колебательных циклов фазовых систем // Вестн. РАЕН. — 2019. — 19, № 2. — С. 105–110.
11. Харламова А. О. Асинхронные режимы фазовых систем // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 148. — С. 101–108.
12. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. — М.: Связь, 1972.

Мамонов Сергей Станиславович

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

ИONOVA Ирина Викторовна

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru

Харламова Анастасия Олеговна

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: a.harlamova@365.rsu.edu.ru



О ГЕОМЕТРИИ КОНФОРМНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

© 2022 г. А. Я. НАРМАНОВ, О. Ю. КАСЫМОВ, Э. О. РАЖАБОВ

Аннотация. Статья представляет собой обзор некоторых работ по геометрии конформных векторных полей.

Ключевые слова: многообразие, векторное поле Киллинга, конформное векторное поле, орбита, слоение, распределение.

ON GEOMETRY OF CONFORMAL VECTOR FIELDS

© 2022 А. Ya. NARMANOV, O. Yu. QASIMOV, E. O. RAJABOV

ABSTRACT. This paper is a review of some works on the geometry of conformal vector fields.

Keywords and phrases: manifold, Killing vector field, conformal vector field, orbit, foliation, distribution.

AMS Subject Classification: 22A05, 54H15, 57R50, 53C12

1. Введение. Пусть M — гладкое многообразие размерности n , множество $V(M)$ всех гладких векторных полей на многообразии M является линейным пространством над полем действительных чисел и является алгеброй Ли относительно скобки Ли.

Рассмотрим некоторое семейство $D \subset V(M)$ гладких векторных полей. Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей. Для векторного поля $X \in D$ через $X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X , проходящую через точку $x \in M$ при $t = 0$. Отображение $t \rightarrow X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x)$, которая в общем случае зависит не только от поля X , но и от начальной точки x .

В дальнейшем всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$. Если для всех точек $x \in M$ область определения $I(x)$ кривой $t \rightarrow X^t(x)$ совпадает с числовой осью, то векторное поле X называется полным векторным полем.

В статье всюду под гладкостью понимается гладкость класса C^∞ .

Определение 1 (см. [1, 19]). Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x , определяется как множество таких точек y из M , для которых существуют действительные числа t_1, t_2, \dots, t_k и векторные поля

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

из D (где k произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1})\dots)). \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (проект фундаментальных исследований Ф3-2020092531).

Определение 2. Точка $y \in L(x)$ называется T -достижимой из точки $x \in M$, если существует такое представление (1), для которого

$$\sum_{i=1}^k t_i = T.$$

Ясно, что если D состоит из одного векторного поля, орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием).

Фундаментальным результатом в изучении геометрии и топологии орбит стала теорема Сусманна (см. [19, 20]), которая показывает, что существует вполне интегрируемое распределение P на M такое, что для каждой точки $x \in M$ орбита $L(x)$ совпадает с максимальным интегральным подмногообразием P , проходящим через точку x .

Топология орбиты $L(x_0)$ (топология Сусманна) вводится как сильнейшая топология, для которой все отображения вида

$$(t_1, t_2, \dots, t_k) \longrightarrow X_1^{t_1}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}} \dots (X_{i_1}^{t_1}(x_0) \dots))$$

являются непрерывными.

Обозначим через $A_x(T)$ множество точек, которые T -достижимы из точки x . В [13] доказана следующая теорема.

Теорема 1 (см. [13]). *Множество $A_x(T)$ для каждого $x \in M$ при любом T является погруженным подмногообразием орбиты $L(x)$ коразмерности единицы или ноль.*

Напомним, что если в определении 1 потребовать, что числа t_1, t_2, \dots, t_k являются неотрицательными, то мы получим определение положительной полуорбиты $L^+(x)$.

О положительной орбите Сусманном получена следующая теорема, которая доказана совместно с N. Levitt (см. [10]).

Теорема 2. *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности n . Существует система D , состоящая из двух векторных полей такая, что $L^+(x) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

В [13] доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности $n \geq 2$. Существует система D , состоящая из трех векторных полей, такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

Напомним, что отображение P , ставящее каждой точке $x \in M$ некоторое подпространство $P(x) \subset T_x M$ касательного пространства $T_x M$, называется распределением. Если $\dim P(x) = k$ для всех $x \in M$, то P называется k -мерным распределением.

Распределение P называется гладким, если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность этой точки $U(x)$, и гладкие векторные поля X_1, X_2, \dots, X_m , заданные на $U(x)$, такие, что векторы

$$X_1(y), X_2(y), \dots, X_m(y)$$

образуют базис для подпространства $P(y)$ для каждого $y \in U(x)$.

Семейство D гладких векторных полей естественным образом порождает гладкое распределение, которое каждой точке $x \in M$ сопоставляет подпространство $P(x)$ касательного пространства $T_x M$, порожденное множеством векторов

$$D(x) = \{X(x) : X \in D\}.$$

Разумеется, размерности подпространств $P(x)$ может меняться от точки к точке.

Распределение P называется вполне интегрируемым, если для каждой точки $x \in M$ существуют подмногообразие N_x многообразия M такое, что $T_y N_x = P(y)$ для всех $y \in N_x$. Подмногообразие N_x называется интегральным подмногообразием распределения P . Для векторного поля X будем писать $X \in P$, если $X(x) \in P(x)$ для всех $x \in M$.

Распределение P называется инволютивным, если из $X, Y \in P$ вытекает, что $[X, Y] \in P$, где $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей X, Y .

Необходимое и достаточное условие вполне интегрируемости распределения постоянной размерности дано в теореме Фробениуса (см. [4, с. 20, предложение 2.1]).

Теорема 4 (Фробениус). *Для того чтобы распределение P на многообразии M было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было инволютивным.*

Теорема Фробениуса, обобщенная Херманном для распределений непостоянной размерности, дает необходимое и достаточное условие для вполне интегрируемости семейства векторных полей, состоящее из конечного числа векторных полей (см. [5]).

Теорема 5 (Р. Нерманн). *Пусть $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ — семейство векторных полей на многообразии M . Семейство D порождает вполне интегрируемое распределение тогда и только тогда, когда оно инволютивно.*

Инволютивность семейства векторных полей $D = X_1, X_2, \dots, X_k$ означает следующее: для векторных полей $X, Y \in D$ существуют гладкие функции $f^l(x)$, $x \in M$, $l = 1, \dots, k$, такие, что

$$[X, Y] = \sum_{l=1}^k f^l(x) X_l.$$

Заметим, что если многообразие M и векторные поля из D аналитичны, то теорема верна для произвольного числа (необязательно конечного числа) векторных полей (см. [12]).

Пусть $A(D)$ — наименьшая подалгебра Ли, содержащая множество D . Полагая $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$, получим инволютивное распределение $P_D: x \rightarrow A_x(D)$. Если размерности $\dim A_x(D)$ не зависят от x , то распределение $P_D: x \rightarrow A_x(D)$ вполне интегрируемо по теореме Фробениуса. В этом случае для каждой точки x множество $L(x)$ является интегральным подмногообразием P_D . Если размерности $\dim A_x(D)$ зависят от x , то как показывает примеры, распределение $P_D: x \rightarrow A_x(D)$ не обязано быть вполне интегрируемым.

2. Геометрия векторных полей Киллинга. Пусть (M, g) гладкое риманово многообразие размерности. Напомним, что векторное поле X на (M, g) называется полем Киллинга, если $L_X g = 0$, где $L_X g$ — производная Ли от метрики g в направлении X . В этом случае его поток состоит из изометрий риманова многообразия (M, g) . Равенство $L_X g = 0$ эквивалентно следующему равенству:

$$Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]),$$

где Y, Z — произвольные гладкие векторные поля, а $[X, Y]$ — скобка Ли векторные поля X, Y .

В случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, векторное поле

$$X = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

является векторным полем Киллинга тогда и только тогда, когда выполняются условие

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Отметим, что скобка Ли двух полей Киллинга дает опять поле Киллинга и линейная комбинация полей Киллинга над полем действительных чисел тоже является полем Киллинга. Поэтому множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M , обозначаемое $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Кроме того, известно, что алгебра Ли $K(M)$ векторных полей Киллинга связного риманова многообразия M имеет размерность не более чем $n(n+1)/2$, где $n = \dim M$. Если $\dim K(M) = n(n+1)/2$, то M есть многообразие постоянной кривизны (см. [4, с. 282]).

Таким образом, в случае, когда семейство D состоит из векторных полей Киллинга, алгебра $K(M)$ конечномерна, и поэтому из теоремы-2 мы получим следующую теорему.

Теорема 6. *Каждая орбита семейства D векторных полей Киллинга является интегральным подмногообразием вполне интегрируемого распределения $P_D: x \rightarrow A_x(D)$.*

Действительно, в силу того, подалгебра $A(D)$ конечно порождена, распределение $P_D: x \rightarrow A_x(D)$ порождено конечным числом инволютивных векторных полей X_1, X_2, \dots, X_m и поэтому по теореме Р. Нерманн оно вполне интегрируемо.

Известно, что разбиение многообразия M на орбиты семейства является сингулярным слоением (см. [19]). Обозначим это слоение F , а множество орбит (множество слоев) обозначим через M/F . Если размерности всех орбит одинаковы, то слоение F является регулярным слоением.

Напомним некоторые понятия из теории слоений. Предположим, что $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in M$, где $0 < k < n$. Тогда разбиение F многообразия на орбиты является k -мерным слоением (см. [1, 19]). Известно, что если векторные поля из семейства D являются векторными полями Киллинга, то слоение F является римановым (см. [8]).

Напомним, что слоение F на римановом многообразии M называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F , остается ортогональной во всех своих точках к слоям F (см. [8, 19]).

Пусть L — слой слоения F (орбита семейства D), $x \in L$, $T_x L$ — касательное пространство L в точке x , $H(x)$ — ортогональное дополнение $T_x L$. Возникают два подрасслоения $TF: x \rightarrow T_x L$, $H: x \rightarrow H(x)$ касательного расслоения TM многообразия M . В этом случае каждое векторное поле $X \in V(M)$ можно представить в виде $X = X_F + X_H$, где X_F, X_H — ортогональные проекции X на TF, H соответственно. Если $X_H = 0$, то оно называется вертикальным полем (касательным к F), а если $X_F = 0$, то X называется горизонтальным полем.

Пусть $f: M \rightarrow N$ — дифференцируемое отображение максимального ранга, где M — гладкое риманово многообразие размерности n , N — гладкое риманово многообразие размерности m , где $n > m$. Тогда для каждой точки $q \in N$ множество $L_q = \{p \in M : f(p) = q\}$ является многообразием размерности $n - m$ и разбиение M на многообразия L_q является $k = n - m$ -мерным слоением. Отображение $f: M \rightarrow N$ называется римановой субмерсией, если дифференциал df отображения f сохраняет длину горизонтальных векторов (см. [8]).

В случае, когда слоение F является регулярным слоением, в [8] показано, что множество M/F имеет структуру гладкого многообразия. А именно, доказана следующая теорема.

Теорема 7. Пусть (M, g) — полное риманово многообразие, и слоение F риманово. Тогда, если все слои являются замкнутыми подмножествами и группы голономии всех слоев тривиальны, то множество M/F , наделенное фактортопологией, обладает такой дифференциальной структурой гладкого многообразия, что отображение $x \rightarrow L(x)$ является дифференцируемым отображением максимального ранга, т.е. является субмерсией.

В общем случае множество M/F не обязательно должно быть гладким многообразием. В данной работе изучается геометрия множества M/F в случае, когда множество D состоит из векторных полей Киллинга.

Рассмотрим отображение $\pi: M \rightarrow M/F$, при котором $\pi(x) = L(x)$, где $L(x)$ — слой, содержащий точку x . Следующая теорема, доказанная в [11], показывает, что орбиты являются слоями римановой субмерсии.

Теорема 8. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, множество D состоит из векторных полей Киллинга и $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in M$, где $0 < k < n$. Тогда множество слоев $B = M/F$, наделенное фактортопологией, обладает такой дифференциальной структурой гладкого $n - k$ -мерного многообразия неотрицательной кривизны, что отображение $\pi: M \rightarrow B$ является гладкой римановой субмерсией.

В общем случае множество слоев слоения не является многообразием. Как показывают существующие результаты, чаще всего орбиформы возникают в теории слоений как пространство слоев. Как показано в [3], если трансверсально полное риманово слоение имеет собственный слой с конечной группой голономии, то пространство слоев является орбиформом. Из [17] известно, что это также верно, если все слои F замкнуты. Также известно, что пространство слоев компактного слоения является орбиформом тогда и только тогда, когда слоение локально устойчиво (см. [21]).

Теперь мы дадим понятие орбифолда, которое является обобщением понятия многообразия. Пусть X — связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

Определение 3. Карта орбифолда в топологическом пространстве X это набор из четырех элементов $(\tilde{U}, G, U, \varphi)$, где U открытое подмножество X , \tilde{U} открыто в \mathbb{R}^n , а G конечная группа гомеоморфизмов множества \tilde{U} , $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U$ — карта, которую можно разложить на множители как $\varphi = \tilde{\pi} \cdot \pi$, где $\pi: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}/G$ — факторотображение на множество орбит и $\tilde{\pi}: \tilde{U}/G \rightarrow U$ — некоторый гомеоморфизм.

Карта линейна, если G -действие на \mathbb{R}^n линейно.

Для $i = 1, 2$ предположим, что $(\tilde{U}_i, G_i, U_i, \varphi_i)$ являются картами орбифолда на X . Эти карты совместимы, если для точек $\tilde{u}_i \in \tilde{U}_i$ с $\varphi_1(\tilde{u}_1) = \varphi_2(\tilde{u}_2)$ существует гомеоморфизм h из окрестности \tilde{u}_1 в \tilde{U}_1 в окрестность \tilde{u}_2 в \tilde{U}_2 , такой, что $\varphi_1 = \varphi_2 \cdot h$ в этой окрестности.

Определение 4. Орбифолдный атлас на X — это совокупность совместимых орбифолд-карт $\{(\tilde{U}_i, G_i, U_i, \varphi_i)\}$, покрывающих X .

Максимальный атлас A класса C^r называется C^r -дифференциальной структурой орбифолда на X , и пара (X, A) дифференцируемым C^r -орбифолдом. Любой атлас класса C^r однозначно определяет максимальный атлас того же класса. Число n называется размерностью орбифолда (X, A) .

Пример 1. Единственная конечная группа, которая действует линейно (и эффективно) на \mathbb{R}^1 -циклическая группа G_2 порядка 2. Она действует через отображение $x \rightarrow -x$. Пространство орбит \mathbb{R}^1/G_2 есть $[0; \infty)$. Отсюда следует, что всякий одномерный орбифолд X является либо одномерным многообразием, либо одномерным многообразием с краем. Если X компактно и связно, то это либо окружность или сегмент вида $[0; 1]$.

Пусть F — сингулярное слоение на римановом многообразии. Слои L слоения F называются регулярными, если размерность слоя L_p максимален. Слои L слоения F называются сингулярными, если он не является регулярным. Точка регулярного слоя L называется регулярной точкой слоения F . Точка слоения F называется сингулярной, если она не является регулярной.

В [11] введено понятие сингулярного риманова слоения с сечением, которое понадобится для изложения некоторых теорем.

Определение 5. Пусть F — сингулярное риманово слоение на полном римановом многообразии. Слоение F называется сингулярным римановым слоением с сечением, если для каждой регулярной точки $p \in L$ множество $\sigma := \exp_p(H_p L)$ является полным погруженным подмногообразием, которое пересекает каждый слой ортогонально и в нем множество регулярных точек всюду плотно. Множество σ называется сечением (см. [11]).

Типичными примерами сингулярных римановых слоений с сечениями являются орбиты полярного действия, параллельные подмногообразия изопараметрического многообразия в пространственной форме.

Изометрическое действие компактной группы Ли G на римановом многообразии M называется полярным, если существует полное погруженное подмногообразие σ в M , которое ортогонально пересекает каждую G -орбиту. Такое подмногообразие σ называется сечением. Типичным примером полярного действия является компактная группа Ли с биинвариантной метрикой, которая действует на себя сопряжением. Например, действие группы ортогональных вращений на евклидовой плоскости является полярным. В этом случае орбитами являются концентрические окружности, сечением является любая прямая, проходящая через центр окружностей.

Следующая теорема показывает, что сингулярное риманово слоение малой коразмерности евклидовой плоскости и трехмерного евклидова пространства является слоением с сечением.

Теорема 9. Пусть F сингулярное слоение на \mathbb{R}^n , порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга, где $n = 2, 3$. Если размерность регулярных слоев равна $n - 1$, то слоение F является сингулярным римановым слоением с сечением.

Следующая теорема показывает, что в общем случае сингулярное риманово слоение малой коразмерности евклидова пространства является слоением с сечением, если сингулярные слои изолированы (см. [13]).

Теорема 10. Пусть F сингулярное слоение на \mathbb{R}^n , порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга. Предположим, что все сингулярные слои изолированы, а размерность регулярных слоев равна $n - 1$. Тогда слоение F является римановым слоением с сечением.

Как показывает следующий пример, сингулярные слои сингулярного риманова слоения на \mathbb{R}^n не обязательно изолированы.

Пример 2. Рассмотрим векторные поля в \mathbb{R}^4 , которые имеют следующий вид в декартовых координатах (x_1, x_2, x_3, x_4) :

$$X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad Y = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Нетрудно показать, что $[X, Y] = 0$. Отсюда следует, что семейство $D = \{X, Y\}$ инволютивно, соответственно по теореме Фробениуса—Хермана семейство векторных полей $D = \{X, Y\}$ вполне интегрируемо.

Теперь покажем, что каждая регулярная орбита семейства векторных полей $D = \{X, Y\}$ является двумерным тором.

Рассмотрим отображение $(t, s) \rightarrow X^t(Y^s(p))$ для всех $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ в каждой точке p . Если в точке p векторные поля X, Y линейно независимы, ранг этой карты в точке p равен двум. Следовательно, орбита, проходящая через точки p , является двумерным многообразием. Равенство $[X, Y] = 0$ означает, что $X^t(Y^s(p)) = Y^s(X^t(p))$ для всех $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. Это означает, что поток векторного поля X переводит интегральные кривые векторного поля Y в интегральные кривые векторного поля Y (соответственно поток векторного поля Y переводит интегральные кривые векторного поля X в интегральные кривые векторного поля X). Поскольку любая интегральная кривая векторного поля Y и X является окружностью, мы получаем, что регулярные орбиты — это двумерные торы.

Векторные поля X, Y коллинеарны только на двух двумерных плоскостях, которые задаются уравнениями $x_1 = x_4, x_2 = -x_3$ и $x_1 = -x_4, x_2 = x_3$ соответственно.

На этой плоскости все орбиты представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат. Таким образом, сингулярные слои этого сингулярного риманова слоения не изолированы.

В [14] доказана следующая теорема, которая показывает, что если сингулярное риманово слоение является слоением с сечением, то множество слоев является орбиобразом.

Теорема 11. Пусть F — сингулярное слоение на \mathbb{R}^n , порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга. Если слоение F является сингулярным римановым слоением с сечением, то множество слоев является гладким орбиформом.

3. Геометрия конформных векторных полей. В этом разделе мы изучаем геометрию орбит конформных векторных полей и, в частности, показываем, что если множество D состоит из конформных векторных полей, то распределение $P_D: x \rightarrow A_x(D)$ полностью интегрируем.

Определение 6. Векторное поле X конформно, если $L_X g = \sigma g$, где σ — функция на (M, g) , $L_X g$ обозначает производную Ли от метрики g относительно X .

Известно, что векторное поле X на (M, g) конформно тогда и только тогда, когда локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная векторным полем X , состоит из конформных преобразований. Локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная конформным векторным полем, состоит из гомотетий, если σ является константой, и состоит из изометрий, если $\sigma = 0$.

Напомним, что диффеоморфизм $\phi: M \rightarrow M$ называется конформным преобразованием, если $|d|\phi(g) = \lambda g$, где $|d|\phi(g)(u, v) = g(|d|\phi(u), |d|\phi(v))$, λ — положительная функция на (M, g) , u, v — касательные векторы. Если постоянная λ , то ϕ является преобразованием гомотетии. Если

λ тождественно равен 1, то ϕ является изометрией. Примерами конформных векторных полей являются векторные поля Киллинга.

Многочисленные исследования посвящены изучению геометрии конформных векторных полей (см. [2, 6, 7, 15–17]): в частности, в [6] доказано, что если многообразие компактно, то множество неподвижных точек конформного векторного поля является подмногообразием четной коразмерности. В [17] было показано, что если риманово многообразие (M, g) отличается от евклидова пространства или сферы, то на многообразии (M, g) существует риманова метрика \tilde{g} , конформно эквивалентная римановой метрике g такой, что группа конформных преобразований многообразия (M, g) является группой изометрий в (M, \tilde{g}) (см. также [2]). Этот факт показывает, что все конформные векторные поля на многообразиях являются векторными полями Киллинга относительно римановой метрики \tilde{g} . Из этого следует, что на многообразиях, отличных от евклидова пространства и от сферы, изучение геометрии конформных векторных полей сводится к изучению векторных полей Киллинга (см. [5]).

Отметим, что скобка Ли двух конформных полей и линейная комбинация конформных полей над поля действительных чисел также являются конформными полями. Следовательно, множество $\text{Conf}(M)$ всех конформных векторных полей на многообразии M является алгеброй Ли над полем действительных чисел. Кроме того, хорошо известно, что размерность алгебры Ли $\text{Conf}(M)$ конформных векторных полей на связном римановом многообразии M не превосходит $(n+1)(n+2)/2$, где $n = \dim M$, $n \geq 3$ (см. [4, с. 310, теорема 1]).

Теперь через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли в $\text{Conf}(M)$, содержащую множество D . Поскольку алгебра $\text{Conf}(M)$ конечномерна, отсюда следует, что существуют векторные поля конечных чисел X_1, X_2, \dots, X_m в $A(D)$ так, что векторы $X_1(x), X_2(x), \dots, X_m(x)$ образуют базис подпространства $A_x(D)$ для каждого $x \in M$. Поэтому из теоремы 2 вытекает следующее утверждение для случая, в котором состоит семейство D конформных векторных полей.

Теорема 12. Пусть $n \geq 3$, D — семейство конформных векторных полей. Тогда каждая орбита D является интегральным многообразием вполне интегрируемого распределения

$$P_D: x \rightarrow A_x(D).$$

Следующая теорема показывает, что при $n \geq 3$ каждая точка из орбиты $L(x_0)$ достижима из x_0 с помощью конечного числа «переключений» с использованием векторных полей X_1, X_2, \dots, X_m в определенном порядке (см. [15]).

Теорема 13. Множество точек вида

$$y = X_m^{t_m}(X_{m-1}^{t_{m-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x_0)\dots)))$$

где $(t_1, t_2, \dots, t_m) \in U$ совпадает с орбитой $L(x_0)$.

Заметим, что это теорема для векторных полей Киллинга верна для любых n (см. [5]).

В [5] доказана следующая теорема, которая показывает, что орбиты векторных полей Киллинга в евклидовом пространстве являются замкнутыми подмножествами.

Теорема 14. Пусть $M = \mathbb{R}^n$ и множество D состоит из векторных полей Киллинга. Тогда каждая орбита семейства D является замкнутым подмножеством.

Эта теорема не верна для конформных векторных полей, не являющихся полями Киллинга. Для конформных векторных полей теорема 13 позволяет доказать следующую теорему при $n \geq 3$ (см. [14]); при $n = 2$ теорема доказывается с использованием результатов работы [9].

Теорема 15. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, множество D состоит из конформных векторных полей и $\dim A_x(D) = k$ для любого $x \in M$, где $0 < k \leq n$. Тогда каждая орбита семейства D является замкнутым подмножеством.

Пример 3. Рассмотрим множество полей D , содержащих следующие векторные поля:

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad Y = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 с декартовыми координатами x_1, x_2 . Эти векторные поля порождают гладкое распределение: $(x_1, x_2) \rightarrow P(x_1, x_2)$, где подпространство $P(x_1, x_2)$ является линейной оболочкой векторов $\{X(x_1, x_2) : X \in D\}$. Мы имеем $\dim P(x_1, x_2) = 2$ для каждой точки (x_1, x_2) , отличной от точек $(0, x_2)$, где $\dim P(x_1, x_2) = 1$. Это семейство векторных полей конечно порождено, но не находится в инволюции. В этом случае наименьшая подалгебра Ли $A(D)$ алгебры Ли $\text{Conf}(M)$, содержащая множество D , является трехмерной. Векторные поля X, Y и $Z = \partial/\partial x_2$ являются базисными полями алгебры $A(D)$.

Можно проверить, что $\dim A_x(D) = 2$ для каждой точки $x \in \mathbb{R}^2$. Распределение $x \rightarrow A_x(D)$ вполне интегрируемо по теореме Херманна, каждая орбита семейства D совпадает со всей плоскостью \mathbb{R}^2 .

Пример 4. Рассмотрим множество D , содержащее векторное поле

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Алгебра $A(D)$ одномерна, но размерность $\dim A_x(D)$ не является постоянной величиной. Имеем $\dim A_{(x,y)}(D) = 1$ для каждого (x, y) , отличного от $(0, 0)$, где $\dim A_{(x,y)}(D) = 0$.

Пример 5. Рассмотрим множество D , содержащее только одно конформное векторное поле

$$X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$$

на $M = \mathbb{R}^3$. В этом случае поток X имеет вид $X^t(x) = A(t)x + bt$ для каждого $t \in \mathbb{R}$, где $b = \{0, 0, 1\}^T$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом примере $\dim A_x(D) = 1$ для каждой точки $x \in M$. Орбита L_0 , проходящая через начало координат O системы координат, является осью OZ . Другие орбиты — это спирали.

Замечание 1. Как показывают простые примеры, теорема 12 неверна без предположения $\dim A_x(D) = k$ для каждой точки $x \in M$. Действительно, пусть $M = \mathbb{R}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и множество D содержит только конформное векторное поле

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

В этом случае для любой точки $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$$

орбита $L(p)$ не является замкнутым подмножеством.

Замечание 2. Иррациональная обмотка двумерного тора показывает, что в общем случае для римановых многообразий, отличных от евклидовых пространств, теорема 12 неверна при выполнении условия $\dim A_x(D) = k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азамов А., Нарманов А. Я. О предельных множествах орбит систем векторных полей// Диффер. уравн. — 2004. — 40, № 2. — С. 257–260.
2. Алексеевский Д. В. Группы конформных преобразований римановых пространств// Мат. сб. — 1972. — 89 (131), № 2 (10). — С. 280–296.
3. Жуклова Н. И. Слоения с локально стабильными слоями// Изв. вузов. Мат. — 1996. — № 7. — С. 21–31.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
5. Нарманов А. Я., Саитова С. С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — 50, № 12. — С. 1582–1589.

6. *Blair D.* On the zeros of a conformal vector field// Nagoya Math. J. — 1974. — 55. — P. 1–3.
7. *Ferrand J.* The action of conformal transformations on a Riemannian manifold// Math. Ann. — 1996. — 304. — P. 277–291.
8. *Hermann R.* On the differential geometry of foliations// Ann. Math. Second Ser. — 1960. — 72. — P. 445–457.
9. *Kaplan W.* Regular curve families filling the plane, I// Duke Math. J. — 1940. — № 7. — P. 154–185.
10. *Levitt N., Sussmann H.* On controllability by means of two vector fields// SIAM J. Control. — 1975. — № 6. — P. 1271–1281.
11. *Marcos M.* Singular Riemannian foliations with sections// Ill. J. Math. — 2004. — 48, № 4. — P. 1163–1182.
12. *Nagano T.* Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras// J. Math. Soc. Jpn. — 1966. — 18. — P. 398–404.
13. *Narmanov A., Saitova S.* On the geometry of the reachability set of vector fields// Differ. Equations. — 2017. — 53. — P. 311–316.
14. *Narmanov A. Ya., Qosimov O. Y.* On the geometry of the set of orbits of Killing vector fields on Euclidean space// J. Geom. Symm. Phys. — 2020. — 55. — P. 39–49.
15. *Narmanov A., Rajabov E.* On the geometry of orbits of conformal vector fields// J. Geom. Symm. Phys. — 2019. — 51. — P. 29–39.
16. *Sharief D.* Geometry of conformal vector fields// Arab. J. Math. Sci. — 2017. — 23. — P. 44–73.
17. *Obata M.* The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — 77. — P. 265–270.
18. *Reinhart B.* Closed metric foliations// Michigan Math. J. — 1961. — 8. — P. 7–9.
19. *Sussman H.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — 180. — P. 171–188.
20. *Sussmann H.* Some properties of vector field systems that are not altered by small perturbations// J. Differ. Equations. — 1976. — 20. — P. 292–315.
21. *Zhukova N. I.* On the stability of leaves of Riemannian foliation// Ann. Global Anal. Geom. — 1987. — 7. — P. 261–271.

Нарманов Абдигалпар Якубович

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: narmanov@yandex.ru

Касымов Одилбек Юнусович

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: okasimov84@inbox.ru

Ражабов Элдор Одилбекович

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: rajabov2019@bk.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 106–115
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-106-115

УДК 514.172.45

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ПОЛНОТЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ RR -МНОГОГРАННИКОВ

© 2022 г. В. И. СУББОТИН

Аннотация. RR -Многогранник — это замкнутый выпуклый многогранник в E^3 , множество граней которого можно разбить на два непустых непересекающихся класса: класс правильных одно-типных многоугольников, и класс граней, образующих звёзды симметричных ромбических вершин. Доказана теорема о существовании и полноте перечисления замкнутых выпуклых трёхмерных RR -многогранников.

Ключевые слова: RR -многогранник, звезда вершины, симметричная ромбическая вершина.

ON THE EXISTENCE AND COMPLETENESS OF ENUMERATION OF THREE-DIMENSIONAL RR -POLYHEDRA

© 2022 V. I. SUBBOTIN

ABSTRACT. An RR -polyhedron is a closed convex polyhedron in E^3 whose set of faces can be divided into two nonempty disjoint class: the class of regular polygons of the same type and the class of faces that form stars of symmetric rhombic vertices. A theorem on the existence and completeness of enumeration of closed convex three-dimensional RR -polyhedra is proved.

Keywords and phrases: RR -polyhedron, star of a vertex, symmetric rhombic vertex.

AMS Subject Classification: 52B10, 52B15

1. Введение. При исследовании симметрии многогранников важен вопрос о влиянии группы симметрий, действующей на элементах многогранника, на его комбинаторику и метрическое строение (см., например, [1, 2, 6, 8, 10]). Конечно, по заданным условиям симметрии не всегда можно с определённой судить о комбинаторной структуре многогранника и его геометрии. Однако, если, например, задаться вопросом: найти все замкнутые выпуклые многогранники в E^3 с равными правильными гранями, в каждой вершине которых сходится одинаковое число рёбер, то получим только пять правильных (платоновых) многогранников. Таким образом, в этом простейшем примере класс многогранников с предписанными условиями симметрии (правильности) содержит только пять многогранников. Естественно, чем слабее условия симметрии, тем более многочисленные классы многогранников, удовлетворяющие этим условиям, могут получиться. Если, к примеру, ограничиться только условиями правильности замкнутого выпуклого многогранника в E^3 , то помимо правильных и архимедовых многогранников, бесконечной серии призм и антипризм, получим 92 многогранника с правильными гранями (см. [1, 2, 10]).

Ранее автором рассматривались такие условия симметрии, в которых не предполагалось заранее ни правильности граней многогранника, ни правильности вершинных фигур, (см., например, [4]). Даже такие условия симметрии позволили найти полный список многогранников, удовлетворяющих этим условиям. (Удобно назвать такие условия *жесткими*.) Причём иногда этот список не содержал бесконечных серий многогранников.

Далее, (*гранная*) звезда вершины V многогранника — это множество $\text{Star}(V)$ всех граней, имеющих общую вершину, совпадающую с V .

Если множество $\text{Star}(V)$ состоит из n равных и одинаково расположенных, т.е. сходящихся в вершине V либо своими острыми, либо тупыми углами ромбов (не квадратов), то V называется *ромбической*.

Если V принадлежит оси вращения порядка n множества $\text{Star}(V)$, то $\text{Star}(V)$ называется *симметричной n -ромбической звездой*, а V — *симметричной n -ромбической вершиной*.

В настоящей работе рассматриваются трёхмерные многогранники с жесткими условиями симметрии, которым удовлетворяет лишь конечное число многогранников, причём каждый из них определяется с точностью до подобия. Эти многогранники составляют класс *RR -многогранников*, введённых автором в [4]. Напомним определение этого класса.

Пусть у замкнутого выпуклого многогранника в E^3 существуют симметричные ромбические вершины V_i и существуют грани F_i , не принадлежащие ни одной звезде вершин V_i ; причём все грани F_i являются правильными многоугольниками одного типа. Тогда такой многогранник будем называть *RR -многогранником* (от слов “rombic” и “regular”).

Таким образом, *RR -многогранник* — это замкнутый выпуклый многогранник в E^3 , множество граней которого можно разбить на два непустых непересекающихся класса: класс правильных однотипных многоугольников, и класс граней, образующих звезды симметричных ромбических вершин.

Если V является вершиной только острых углов ромбов звезды $\text{Star}(V)$, то V называется *остроугольной*.

Ромбическая вершина называется *изолированной*, если ее гранная звезда не имеет общих вершин со звездой любой другой ромбической вершины многогранника.

Ромбическая вершина называется *неизолированной*, если ее гранная звезда имеет общие вершины, но не имеет общих рёбер с гранной звездой любой другой ромбической вершины.

2. Теорема о существовании и полноте класса RR . В [4,5] при условии, что пояс граней, отделяющий симметричные ромбические вершины только один и в предположении, что изолированных симметричных ромбических вершин только две, автором перечислены *RR -многогранники с правильными гранями одного типа*.

Напомним, что *поясом граней* здесь и в дальнейшем называется связное множество граней F_1, F_2, \dots, F_n такое, что любые две грани F_i, F_{i+1} и также F_1, F_n имеют только одно общее ребро, а любые две другие грани этого множества не имеют общих рёбер.

В следующей общей теореме дано доказательство существования и полноты списка *RR -многогранников без предположения о количестве поясов граней, разделяющих симметричные ромбические вершины, и без ограничения, что число таких вершин равно двум*.

Теорема 1. *Следующие двадцать три многогранника исчерпывают класс всех RR -многогранников с изолированными и неизолированными ромбическими вершинами.*

I. RR -многогранники с изолированными ромбическими вершинами:

- (1) 7-гранник с треугольными гранями и одной 3-ромбической вершиной (расширенный октаэдр);
- (2) 12-гранник с треугольными гранями и одной 4-ромбической вершиной;
- (3) 15-гранник с треугольными гранями и одной 5-ромбической вершиной;
- (4) 13-гранник с треугольными гранями и одной тупоугольной 3-ромбической вершиной;
- (5) 19-гранник с треугольными гранями и одной тупоугольной 3-ромбической вершиной;

- (6)—(11) *шесть многогранников с двумя n -ромбическими вершинами, $6 \leq n < 12$, и правильными треугольными гранями;*
 (12) *24-гранник с двумя 4-ромбическими вершинами и правильными треугольными гранями;*
 (13) *20-гранник с двумя 5-ромбическими вершинами и квадратными гранями;*
 (14) *удлинённый ромбический додекаэдр;*

II. *RR-многогранники с неизоллированными ромбическими вершинами:*

- (15) *12-гранник с двумя неизоллированными 4-ромбическими вершинами и четырьмя квадратами (дважды расширенный кубооктаэдр);*
 (16)—(22) *семь многогранников с двумя неизоллированными n -ромбическими вершинами, $4 < n < 12$, и треугольными гранями;*
 (23) *12-гранник с двумя неизоллированными тупоугольными ромбическими вершинами.*

Доказательство.

В первой части доказательства будут найдены все *RR*-многогранники с одной остроугольной ромбической вершиной и *RR*-многогранники с одной тупоугольной ромбической вершиной.

Во второй части — *RR*-многогранники с изолированными ромбическими вершинами без предположения о количестве изолирующих поясов граней и количестве ромбических вершин.

В третьей части рассмотрен вопрос о существовании *RR*-многогранников с неизоллированными ромбическими вершинами.

I. Покажем, что существуют только три *RR*-многогранника с одной остроугольной симметричной ромбической вершиной.

Найдём сначала все такие *RR*-многогранники с треугольными гранями.

Как и в нашей работе [5], рассмотрим границу $L(V)$ ромбической звезды $\text{Star}(V)$, которая является пространственной ломаной $MRNSPTQ\dots$, рис. 1(a). Острые углы ромбов звезды $\text{Star}(V)$ обозначим α . Углы с вершинами на $L(V)$, образованные сторонами двух смежных ромбов, обозначим β и будем называть *свободными*.

Напомним формулу из [5], связывающую углы α , β и степень n остроугольной ромбической вершины V :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\pi(n-2)}{2n}}. \quad (1)$$

Из этой формулы при $n = 3$ легко видеть, что при $\beta = \frac{\pi}{3}$ острые углы ромбов α тоже равны $\pi/3$.

Таким образом, мы можем поместить правильные треугольные грани T_i в свободные углы β граничной ломаной $L(V)$. При этом для каждого ромба из $\text{Star}(V)$ существует параллельная ей треугольная грань T_i , $i = 1, 2, 3$. Поэтому три вершины острых углов ромбов, лежащие на $L(V)$, будут вершинами ещё одной — новой — правильной треугольной грани T_4 .

Итак, в этом случае мы имеем *RR*-многогранник с трёхгранной ромбической вершиной и четырьмя правильными треугольными гранями, рис. 2(a). Заметим, что на рис. 2 у каждого многогранника указана его группа симметрии.

Пусть теперь $n = 4$. Поместив правильные треугольные грани в свободные углы β , получим многогранную поверхность, край которой представляет собой квадрат. Надстраивая над этим квадратом правильную четырёхугольную пирамиду, получим 12-гранник с восемью треугольными гранями и 4-ромбической вершиной. Из формулы (1) получаем острые углы ромбов этой вершины: $\alpha \approx 41,41^\circ$, рис. 2(b).

Аналогично при $n = 5$ получим 15-гранный *RR*-многогранник с одной ромбической вершиной, который получается помещением правильных треугольных граней в свободные углы β с последующим надстраиванием над пятиугольником правильной пятиугольной пирамиды. Острые углы ромбов в ромбической вершине в этом случае равны по 36° , рис. 2(c).

Заметим, что во всех трёх случаях можно к треугольному, четырёхугольному или пятиугольному краю приставить антипризматический пояс. Однако в этом случае при $n = 3$ и $n = 4$

выпуклость многогранника будет нарушена. В случае $n = 5$ пять треугольников антипризматического пояса будут составлять с пятью треугольными гранями, помещёнными в свободные углы, ромбы; и многогранник не будет являться RR -многогранником (см. [5]).

Очевидно, в случае $n > 5$ рассмотренные построения невозможны и новые RR -многогранники в этом случае не существуют.

Проверим теперь, можно ли получить при $n = 3, 4, 5$ RR -многогранники с одной ромбической вершиной V , если помещать в свободные углы по две правильных треугольных грани.

В случае $n = 3$, как было замечено выше, $\beta = \alpha$. Поэтому, помещая две треугольные грани в свободные углы в этом случае, получим, что общее ребро этих граней будет продолжением общего ребра двух ромбических граней из $\text{Star}(V)$. Таким образом, в этом случае ромбичность вершины нарушится.

В случае $n = 4$ возможно поместить в свободные углы по две правильных треугольных грани. Добавим ещё по две треугольных грани в углы, вершинами которых являются острые углы ромбов, а сторонами — стороны треугольников. Получим пояс из восьми треугольных граней, как в случае многогранника в [5]. Обозначим $L'(V)$ полученную новую граничную ломаную пояса образовавшейся многогранной поверхности. В вершинах ломаной $L'(V)$ попеременно сходятся по две и по четыре треугольных грани. Вершины ломаной $L'(V)$, в которых сходятся по четыре треугольных грани, будут вершинами новых свободных углов; эти углы здесь и в дальнейшем будем обозначать γ .

При $n = 4$ в каждый из четырёх углов γ нельзя поместить две треугольных грани, иначе сумма плоских углов в вершинах углов будет больше 2π . Поместив в углы γ по одной треугольной грани, получим в силу симметрии, что вершины ломаной $L'(V)$, в которых сходятся по две треугольных грани, будут вершинами квадрата. Очевидно, над этим квадратом нельзя надстроить правильную четырёхугольную пирамиду, так как нарушится выпуклость многогранника. Таким образом, в этом случае мы не получим новый RR -многогранник с одной ромбической вершиной.

Аналогичное рассуждение приводит к невозможности RR -многогранника с одной остроугольной 5-ромбической вершиной и с двумя правильными треугольными гранями в углах β .

В случае $n > 5$ поместить по две треугольных грани в свободные углы нельзя. Действительно, в этом случае углы α удовлетворяют неравенству $\alpha < \pi/6$. Поэтому тупые углы ромбов должны быть больше $2\pi/3$, и, следовательно, в вершинах ломаной $L(V)$, в которых ромбы сходятся тупыми углами, не могут сходить ещё по две правильных треугольных грани.

Проверим теперь, существуют ли RR -многогранники с одной остроугольной ромбической вершиной и квадратными гранями.

В случае $n = 3$, как и ранее, в силу $\beta = \alpha$ RR -многогранник с квадратными гранями невозможен.

Если $n = 4$, то поместить в свободные углы β квадратные грани возможно. В этом случае острый угол $\alpha = \pi/3$. Углы между граничными рёбрами соседних квадратов обозначим δ , рис. 1(с).

В углы δ нельзя поместить квадратные грани. Действительно, $\delta = \pi/3$, так как в них можно поместить правильные треугольные грани, свободные рёбра которых ограничат квадратную грань, и мы получим известный 13-гранник — *расширенный кубооктаэдр* с одной ромбической вершиной с углами $\alpha = \pi/6$ и треугольными и квадратными гранями. Таким образом, правильные грани такого многогранника не являются однотипными, рис. 1(b).

При $n = 5$, помещая квадратные грани в свободные углы, получим, что $\alpha \approx 52^\circ$.

В этом случае $\delta = \pi/2$, так как в них можно поместить квадратные грани и однозначно построить полученную многогранную поверхность до RR -многогранника с 20 гранями и с двумя ромбическими вершинами из [4] (см. рис. 2(g)). Таким образом, и в этом случае RR -многогранник с одной ромбической вершиной невозможен.

Покажем, что и при $n = 6$ RR -многогранник с одной ромбической вершиной невозможен.

Действительно, в этом случае поместить в углы δ квадратные грани нельзя. Действительно, поместив квадратные грани в свободные углы, перейдём по параллельным рёбрам $m \parallel p$ и $n \parallel q$ и т. д., образованным сторонами угла β , через ромбическую вершину, как это сделано в [5]. Тогда мы получим, что в вершине B квадрата, противоположного углу β , сходятся четыре квадратных

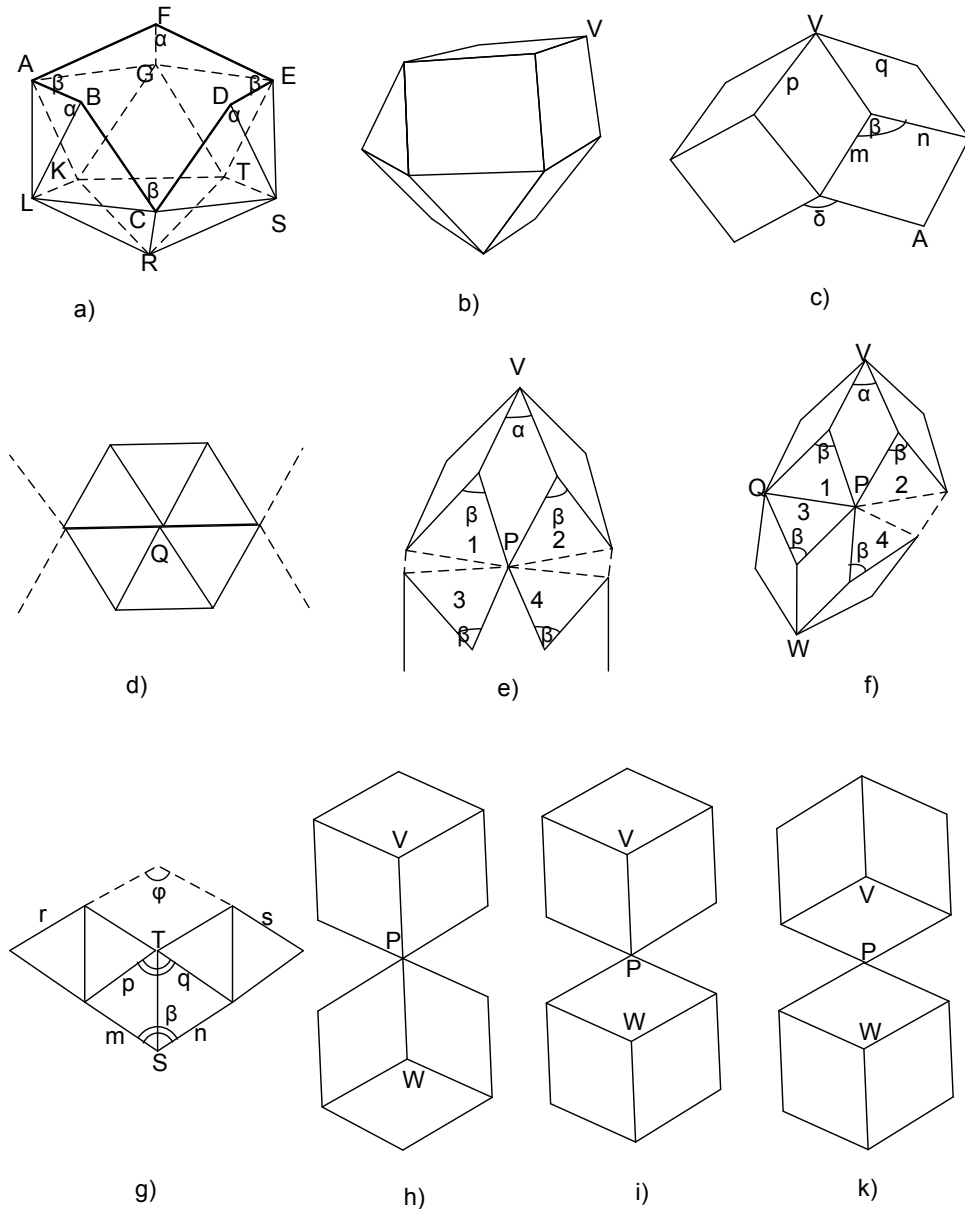


Рис. 1. К доказательству теоремы 1.

грани, что невозможно. Здесь вершина B — это вершина, эквивалентная вершине A относительно оси вращения звезды $\text{Star}(V)$, рис. 1(c).

При $n = 7$ доказательство несуществования RR -многогранника аналогично, только в этом случае нужно совершать переход по параллельным рёбрам, образующим стороны угла δ .

Если $n > 7$, то в вершинах углов β сумма плоских углов будет больше 2π , и RR -многогранники с одной ромбической вершиной и квадратными гранями не существуют.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании RR -многогранников с одной остроугольной ромбической вершиной и правильными пятиугольными гранями.

В случае, если $n = 3$, в силу $\beta = \alpha$ RR -многогранник с пятиугольными гранями невозможен.

Если $n = 4$, то поместив в свободные углы правильные пятиугольные грани, и обозначив углы между граничными рёбрами пятиугольников δ , мы не сможем в углы δ поместить пятиугольные грани. Действительно, плоскости двух соседних пятиугольных граней, помещённых в свободные углы, при $n = 4$ параллельны оси вращения звезды $\text{Star}(V)$. Поэтому угол γ , вершина которого

является вершиной острого угла ромба и стороны являются рёбрами двух соседних пятиугольных граней, будет меньше $3\pi/5$.

При $n = 5$ и $\beta = 3\pi/5$ формула (1) даёт: $\alpha = \pi/3$. Поэтому в угол δ нельзя поместить правильную пятиугольную грань. В противном случае сумма плоских углов в вершинах ломаной $L(V)$, инцидентных острым углам ромбов, будет больше 2π .

Аналогично рассуждая в случае $n = 6$, получаем и в этом случае невозможность RR -многогранника.

Точно так же используя формулу (1) в случае $n > 6$, получим, что в вершинах ломаной $L(V)$, в которых сходятся тупые углы ромбов, сумма плоских углов будет больше 2π .

Таким образом, RR -многогранники с одной остроугольной ромбической вершиной и правильными пятиугольными гранями не существуют.

Предыдущие рассуждения делают очевидным, что для решения вопроса о существовании RR -многогранников с одной остроугольной ромбической вершиной и правильными шестиугольными гранями достаточно рассмотреть случай $n = 4$. В этом случае в свободные углы β можно поместить правильные шестиугольные грани, как это видно на примере удлиненного ромбододекаэдра — одного из RR -многогранников, рис. 2(f). На этом примере видим также, что в углы δ можно поместить только ромбические грани, равные граням из $\text{Star}(V)$. Таким образом, в этом случае RR -многогранник с одной ромбической вершиной не существует.

Отсюда видно также, что не существует RR -многогранников с одной остроугольной ромбической вершиной и правильными k -угольными гранями при $k > 6$.

Здесь кратко рассмотрим основные идеи в решении вопроса о существовании RR -многогранников с одной тупоугольной ромбической вершиной. Покажем, что существуют только два таких многогранника. Оба они могут быть получены из икосаэдра — правильного 20-гранника с треугольными гранями.

Первый RR -многогранник с одной тупоугольной вершиной получим, удалив из икосаэдра четыре грани, а также шесть соседних с ними по ребру икосаэдра. К краю оставшейся многогранной поверхности присоединяем тупоугольную звезду $\text{Star}(V)$ из трёх ромбов с тупыми углами $\alpha = 3\pi/5$. Полученный 13-гранник — искомый RR -многогранник (см. рис. 2(d)).

Более трудоёмким является вопрос о существовании второго многогранника с одной тупоугольной вершиной. Здесь мы укажем кратко основные идеи доказательства.

Удалим из икосаэдра одну грань и три грани, соседние с нею по рёбрам икосаэдра. Граничную ломаную полученной многогранной поверхности M обозначим L . На рис. 1(a) — это ломаная $ABCDEF$. Углы между рёбрами BA и BC , а также им эквивалентные, обозначим α . Углы между рёбрами CB и CD , а также им эквивалентные, обозначим β .

Для того чтобы к граничной ломаной L можно было присоединить тупоугольную ромбическую звезду $\text{Star}(V)$ из трёх ромбов, необходимо выполнения равенства: $\alpha = \beta$. Учитывая это равенство, вычисления дают приближённое значение угла $\alpha \approx 91,4397^\circ$. Заметим также, что вопрос о том, возможно ли обеспечить равенство $\alpha = \beta$ путём изометрической деформации (изгибания) поверхности M , решается утвердительно.

Таким образом, ромбические грани полученного RR -многогранника с 19 гранями таковы, что он *приближённо* может считаться многогранником с правильными треугольными и квадратными гранями (см. рис. 2(e)).

Итак, существуют два RR -многогранника с одной тупоугольной ромбической вершиной.

Доказательство того, что не существует других таких многогранников, основано на следующих замечаниях.

Рассматривая граничную ломаную $L(V)$ в случае первого из рассмотренных многогранников с тупоугольной ромбической вершиной, видим, что в вершинах ломаной $L(V)$ попеременно сходятся по две и по три треугольных грани. А в случае 19-гранника — по две и по четыре треугольных грани. Легко проверить, что возможен ещё только один случай, когда в вершинах граничной ломаной $L(V)$ попеременно сходятся по три и по четыре треугольных грани. Однако в этом случае RR -многогранник с одной тупоугольной ромбической вершиной невозможен. Это следует из

доказанной в [5] невозможности существования в этом случае многогранника с двумя ромбическими вершинами. Таким образом, других RR -многогранников с тупоугольной ромбической вершиной и с треугольными гранями не существует. Не существует их и в случае правильных k -угольных граней. Действительно, в случае $k = 4$ и $k = 5$ получим, что множество правильных граней является, соответственно, частью поверхности куба и частью поверхности додекаэдра. При $k > 5$ невозможность RR -многогранника очевидна.

II. В этой части доказательства рассмотрим те изменения, которые необходимо внести в доказательство существования многогранников из [5], чтобы обобщить результаты из [5] на случай, когда предполагаемое число ромбических вершин не ограничено двумя и их ромбические звёзды не предполагаются зеркально расположенными. Будет снято также ограничение на число поясов, разделяющих ромбические вершины. Все RR -многогранники этой части обязательно будут иметь хотя бы один пояс граней, разделяющий ромбические вершины. Таким образом, гранные звёзды ромбических вершин не имеют в этом случае общих вершин.

Перечисление всех RR -многогранников в этом случае будем проводить по следующей схеме.

Рассмотрим одну симметричную ромбическую звезду $Star_1(V)$ с одним поясом граней и докажем, что в этом случае и в случае, если к этому поясу добавляются новые правильные грани, возможно добавление только одной (конгруэнтной $Star_1(V)$) симметричной ромбической звезды $Star_2(V)$. При этом звёзды $Star_1(V)$ и $Star_2(V)$ будут иметь общую ось вращения.

Рассматривать ромбические звёзды будем в том же порядке, что и в части I. При этом будем ссылаться на уже рассмотренные случаи из [5]. Заметим здесь же, что несуществование RR -многогранника с одной данной ромбической звездой не исключает его существование с большим числом ромбических звёзд.

Сначала будем рассматривать звёзды с остроугольными ромбическими вершинами.

Рассмотрим, как и в части I, случай, когда в свободные углы ромбической звезды помещено по одной треугольной грани. В дальнейшем для удобства ромбическую звезду вершины V с правильными гранями в свободных углах будем называть *ромбической шапочкой* и обозначать $K(V)$.

При $n = 3, 4, 5$ отделение поясом граней другой возможной ромбической вершины невозможно. При $5 < n < 12$ такое отделение возможно только антипризматическим поясом. Действительно, в вершинах ломаной $L(V)$, которые совпадают с острыми углами ромбов звезды вершины V , могут сходиться самое большее 5 треугольных граней. Приставить к антипризматическому поясу ещё один такой же пояс нельзя, иначе в одной вершине (например, вершина Q на рис. 1(d)) будут сходиться шесть правильных граней. Приставляя к первому поясу ромбическую шапочку $K(V')$, конгруэнтную первой ромбической шапочке, получим один из многогранников 6–11 в формулировке теоремы, в которых ромбические вершины изолированы (см. рис. 2(h)). Приставить любую симметричную ромбическую шапочку $K(V')$ к антипризматическому поясу так, чтобы её ось симметрии была бы не параллельна оси симметрии шапочки $K(V)$, невозможно, иначе нарушится условие для суммы плоских углов в вершинах, в которых сходятся острый угол ромба шапочки $K(V')$ и три угла треугольников антипризматического пояса.

Таким образом, число RR -многогранников из [5] с правильными треугольными гранями в случае, когда в свободных углах ромбических звёзд помещено по одной грани, не изменится, если не ограничиваться одним разделяющим поясом правильных граней и двумя ромбическими вершинами.

Повторяя построения части I в случае, когда в свободные углы β помещены по две правильных треугольных грани, видим, что при $n = 4$ в углы γ можно поместить ромбы, как это сделано в [4]. Таким образом, если не ограничиваться заранее числом вершин, то в случае, если в свободные углы поместить по две треугольных грани, будет существовать только один RR -многогранник — 24-гранник, конструктивное доказательство существования которого выполнено в [4] (см. рис. 2(i)). Невозможность аналогичного построения для случая $n = 3$ очевидна из части I.

Покажем, что RR -многогранник с двумя и большим числом вершин, когда в свободные углы β помещены по две правильных треугольных грани, невозможен в случае $n = 5$.

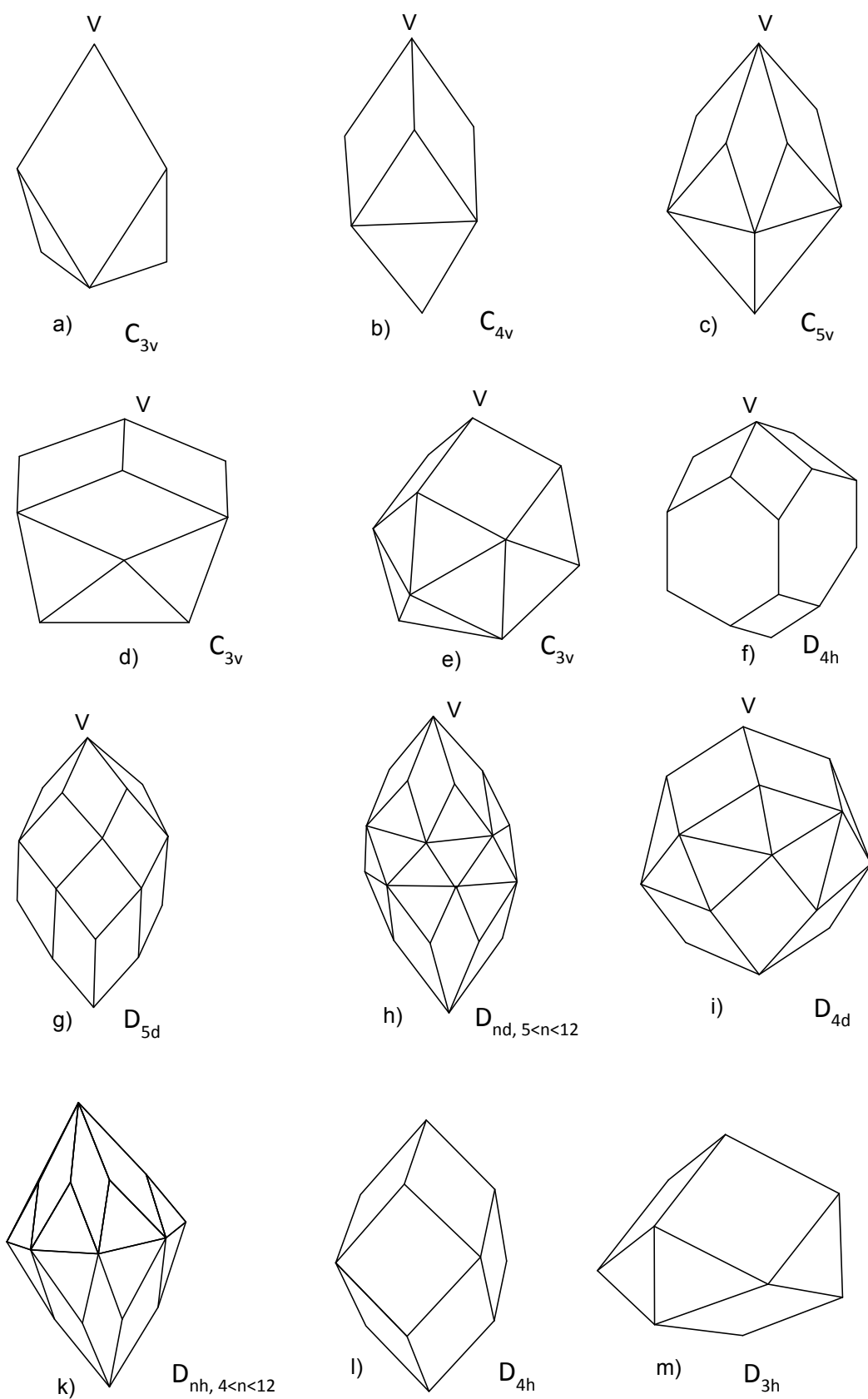


Рис. 2. RR -многогранники с правильными гранями одного типа.

Пусть β_1 — свободный угол с вершиной S и сторонами m и n ромбической звезды $\text{Star}(V_1)$. Рассмотрим равный ему угол ϕ с вершиной T и сторонами p и q , где T — вершина острого угла ромба из $\text{Star}(V_2)$ (см. рис. 1(g)). Так как ребро $r \nparallel p$, а $s \nparallel q$, то угол $\phi < \beta$. Предположим, что существует вторая ромбическая звезда $\text{Star}(V_2)$. Совершая переход по рёбрам, соответственно параллельным сторонам угла ϕ , через вершину звезды $\text{Star}(V_2)$, получим, что ϕ равен свободному углу β_2 звезды $\text{Star}(V_2)$. Отсюда получаем неравенство: $\beta_2 < \beta_1$. Меняя местами вершины V_1 и V_2 , получим противоположное неравенство. Оба неравенства одновременно несовместимы. Следовательно, при $n = 5$ RR -многогранник невозможен.

Проводя рассуждения, аналогичные части I настоящего доказательства, видим, что для нахождения всех RR -многогранников с квадратными гранями, достаточно рассмотреть случаи $n = 4$ и $n = 5$. Но при $n = 4$ мы получим только 12-гранник с двумя ромбическими вершинами и квадратными гранями («дважды расширенный кубооктаэдр»), у которого $\alpha = \pi/6$. Однако его ромбические вершины не изолированы, и пока его не учитываем (см. рис. 2(1)).

При $n = 5$ из изложенного в части I следует, что в этом случае, если не ограничивать число ромбических вершин и число разделяющих поясов, существует только один многогранник с остроугольными ромбическими вершинами — 20-гранник с двумя ромбическими вершинами, упомянутый выше (см. рис. 2(g)).

Из предыдущего изложения следует также, что RR -многогранников с пятиугольными гранями и с числом вершин, большим 5, не существует. С шестиугольными правильными гранями существует только удлинённый ромбический додекаэдр (см. рис. 2(f)). При $k > 6$ не существуют RR -многогранники с правильными k -угольными гранями.

RR -многогранников с изолированными тупоугольными ромбическими вершинами, число которых больше одной, не существует.

Действительно, в [5] показано, что если у многогранника с изолированными ромбическими вершинами помимо одной тупоугольной ромбической вершины существует ещё хотя бы одна, то оси симметрии их гранных звёзд должны совпадать. Но таких многогранников, как показано в [5], не существует.

III. В этой части будут найдены все RR -многогранники, у которых существуют неизолированные ромбические вершины. Пусть гранные звёзды таких вершин имеют общие вершины на граничной ломаной $L(V)$, но не имеют общих рёбер.

Сначала рассмотрим случай остроугольных ромбических вершин. При этом случай треугольных правильных граней требует более подробного рассмотрения.

Итак, пусть имеется RR -многогранник с правильными треугольными гранями, у которого остроугольные n -ромбические звёзды $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$ имеют общие граничные вершины.

На рис. 1 показаны случаи, когда n -ромбические звёзды вершин V и W имеют одну (см. рис. 1(e)) или две (рис. 1(f)) общие вершины. В случае общих трёх вершин очевидно, что $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$ имеют n общих вершин. На рис. 1(e) видно, что сумма плоских углов в вершине P заведомо будет больше 2π . Действительно, в этой вершине будут сходиться шесть правильных треугольников и два ромба. Поэтому этот случай невозможен.

Невозможен и случай двух общих вершин. Действительно, угол α даже в случае максимального значения $n = 11$ будет больше $\pi/6$, что следует из формулы (1). Так как вершина P на рис. 1(f) является общей для пяти треугольных и двух углов α , то и в этом случае в вершине P сумма плоских углов будет больше 2π .

Аналогично убеждаемся в том, что невозможен RR -многогранник с ромбическими вершинами с одной или двумя общими вершинами и правильными k -угольными гранями при $k > 3$.

Если общих вершин у двух ромбических звёзд больше двух, то в свободных углах этих звёзд могут быть либо треугольные грани — и тогда получим семь многогранников с двумя неизолированными n -ромбическими вершинами, $4 < n < 12$, и треугольными гранями (см. рис. 2(k)); либо две ромбические шапочки имеют общие грани — четыре квадрата. В последнем случае мы получим 12-гранник с двумя неизолированными 4-ромбическими вершинами и четырьмя квадратами, упомянутый выше: «дважды расширенный кубооктаэдр» (см. рис. 2(1)).

Пусть ромбические вершины тупоугольные.

Рассмотрим только случай, когда правильные грани треугольные, так как в случае нетреугольных граней не трудно убедиться в невозможности RR -многогранников с неизолированными тупоугольными ромбическими вершинами.

Если общими являются только вершины двух острых углов ромбов ромбических звёзд (см. рис. 1(h)), то в вершине P сумма плоских углов будет больше 2π . Аналогично, если общими являются только вершины острого и тупого углов ромбов ромбических звёзд (см. рис. 1(i)).

Если общими являются вершины двух тупых углов ромбов ромбических звёзд (см. рис. 1(k)), то общими будут все три вершины тупых углов ромбов двух ромбических звёзд $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$. Действительно, в этом случае тупые углы ромбов должны быть равны, и $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$ отделены друг от друга только шестью треугольными гранями, не образующими пояса в смысле данного выше определения пояса граней. Таким образом, в этом случае получим RR -многогранник с шестью правильными гранями и двумя тупоугольными ромбическими вершинами (см. рис. 2(m)). Вычислениями находим для него значение тупого угла ромба:

$$\alpha = 2 \arcsin 0,75 \approx 97,18^\circ.$$

Итак, рассмотрены все возможные случаи расположения ромбических звёзд и правильных граней. Следовательно, найденные двадцать три многогранника исчерпывают класс всех RR -многогранников с изолированными и неизолированными ромбическими вершинами и правильными гранями одного типа. Теорема доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза М., Гришукин В. П., Штогрин А. И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. — М.: МЦНМО, 2007.
2. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями// Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1967. — 2. — С. 1–220.
3. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники. Графы. Оптимизация. — М.: Наука, 1981.
4. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 153–164. — 476.
5. Субботин В. И. О полноте списка выпуклых RR -многогранников// Чебышев. сб. — 2020. — 1. — С. 297–309.
6. Coxeter H. S. M. Regular and semi-regular polytopes, III// Math. Z. — 1988. — 200, № 21. — P. 3–45.
7. Cromwell P. R. Polyhedra. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
8. Grünbaum B. Regular polyhedra—old and new// Aequat. Math. — 1977. — 16. — P. 1–20.
9. Grünbaum B. New uniform polyhedra// in: Discrete Geometry: In Honor of W. Kuperberg's 60th Birthday (Bezdek A., ed.). — New York: Marcel Dekker, 2003. — P. 331–350.
10. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces// Can. J. Math. — 1966. — 18, № 1. — P. 169–200.

Субботин Владимир Иванович

Южно-Российский государственный политехнический университет

имени М. И. Платова, Новочеркасск

E-mail: geometry@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 116–123
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-116-123

УДК 517.126+514.7

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ГАЛИЛЕЕВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2022 г. Б. М. СУЛТАНОВ

Аннотация. Доказано существование циклической поверхности, натянутой на два заданные кривые пространства. Доказаны существование полной циклической поверхности с заданной полной кривизной на всей плоскости, а также существование поверхности по заданным коэффициентам первой квадратичной формы и дефекту кривизны.

Ключевые слова: галилеево пространство, циклическая поверхность, восстановление, геометрические характеристики, дефект кривизны, изометрия.

EXISTENCE OF A SURFACE WITH PRESCRIBED GEOMETRIC CHARACTERISTICS IN THE GALILEAN SPACE

© 2022 B. M. SULTANOV

ABSTRACT. In this paper, we prove the existence of a cyclic surface spanned by two given curved spaces, the existence of a complete cyclic surface with a given total curvature on the whole plane, and the existence of a surface with given coefficients of the first quadratic form and the curvature defect.

Keywords and phrases: Galilean space, cyclic surface, reconstruction, geometric characteristics, curvature defect, isometry.

AMS Subject Classification: 53A35, 53B30

1. Введение. Под задачей восстановления в геометрии «в целом» понимается решение задачи существования и единственности поверхности с заданными геометрическими характеристиками. Геометрическими характеристиками могут быть площадь поверхности, гауссова кривизна, полная кривизна, средняя кривизна, коэффициенты дериwационных формул, первая или вторая квадратичная форма поверхности. Часто эти геометрические величины связаны дифференциальными формулами и являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений. В этой статье будет доказана теорема о существовании циклической поверхности в галилеевом пространстве \mathbb{R}_3^1 , а также существование поверхности с данной полной кривизной и дефектом кривизны.

2. Галилеевы пространства. Основные понятия геометрии галилеева пространства приведены в [1]. В этой монографии изучена дифференциальная геометрия «в малом», определены первая и вторая квадратичная форма поверхностей и геометрические характеристики поверхностей, вычислены дериwационные уравнения поверхностей, получены аналоги формул Петерсона—Кодацци и Гаусса.

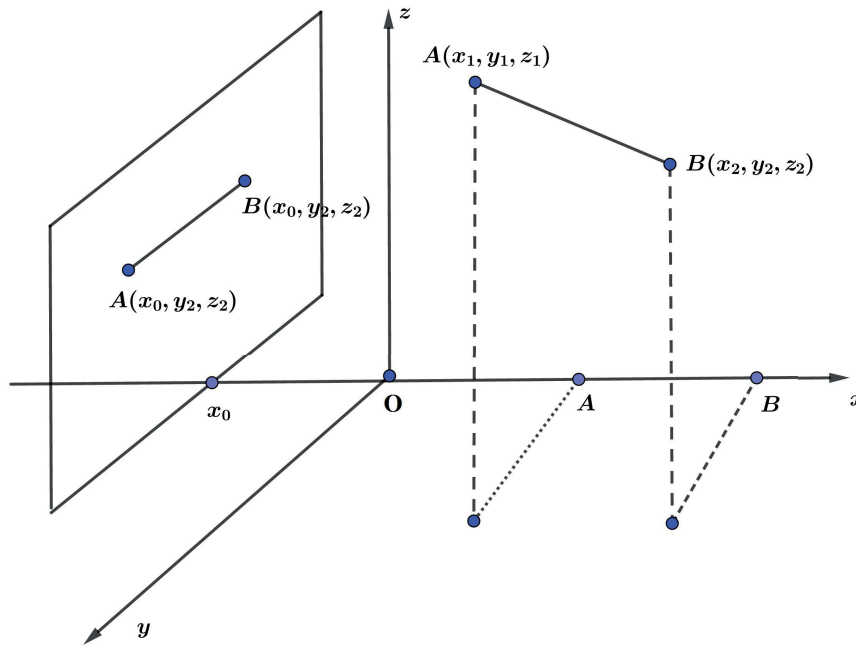


Рис. 1

Пусть задано трехмерное аффинное пространство A_3 , $Oxyz$ — система аффинных координат с началом в точке $O(0, 0, 0)$ и $\{i, j, k\}$ — базисные векторы в этом пространстве. Скалярное произведение векторов $\mathbf{X}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\mathbf{Y}\{x_2, y_2, z_2\}$ определяется по формуле

$$(\mathbf{X}\mathbf{Y}) = \begin{cases} x_1x_2, & \text{если } x_1x_2 \neq 0, \\ y_1y_2 + z_1z_2, & \text{если } x_1x_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Определение 1 (см. [1]). Аффинное пространство, в котором скалярное произведение векторов \mathbf{X}, \mathbf{Y} определено по формуле (1), называется галилеевым пространством и обозначается через \mathbb{R}_3^1 или Γ_3 .

Скалярное произведение (1) называется вырожденным скалярным произведением. Вырожденное скалярное произведение векторов появляется в псевдоевклидовых пространствах (см. [8]) вследствие изотропности векторов.

Выясним геометрический смысл расстояния между двумя точками галилеева пространства \mathbb{R}_3^1 , определяемого как норма соединяющего эти точки вектора. Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ — точки галилеева пространства \mathbb{R}_3^1 , причем $x_1 \neq x_2$. Тогда

$$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB})} = \begin{cases} |x_2 - x_1|, & \text{если } x_2 \neq x_1, \\ \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, & \text{если } x_2 = x_1. \end{cases}$$

Если $x_1 \neq x_2$, то расстояние AB равно длине проекции вектора \overrightarrow{AB} на ось Ox (см. рис. 1). Если $x_1 = x_2 = x_0$, то вектор \overrightarrow{AB} параллелен плоскости Oyz , и расстояние между точками $A(x_0, y_1, z_1)$ и $B(x_0, y_2, z_2)$ определяется как евклидово расстояние между точками. Очевидно, что точки A и B лежат на плоскости $x = x_0$, и расстояние будет евклидовым расстоянием между соответствующими точками. Поэтому геометрия на плоскости $x = x_0$ галилеева пространства будет евклидовой. Отметим, что такие плоскости, задаваемые уравнениями $x = \text{const}$, называются особыми плоскостями галилеева пространства (см. [1]).

3. Теория поверхностей в \mathbb{R}_3^1 . Рассмотрим основные понятия поверхностей в \mathbb{R}_3^1 , связанные с первой квадратичной формой.

Пусть F — поверхность пространства \mathbb{R}_3^1 , не имеющая особых касательных плоскостей. Введем специальную систему криволинейных координат. Для этого рассмотрим всевозможные пересечения F с особыми плоскостями $x = \text{const}$.

Выберем в качестве криволинейных координат $u = u_0$ семейство кривых, образованных пересечениями поверхности особыми плоскостями, а в качестве координатных линий $v = v_0$ — произвольные линии, образующие сеть на поверхности F . При таком выборе криволинейных координат уравнения поверхности имеют вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}. \quad (2)$$

При этом векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v образуют базис в касательной плоскости поверхности, которая является галилеевой. Направление вектора \mathbf{r}_v соответствует выделенному направлению галилеевой плоскости.

Векторное уравнение линии в галилеевом пространстве имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = s\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}.$$

Пусть на поверхности F кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$. Рассмотрим длину кривой на поверхности. Вычисляя длину дуги отрезка кривой с концами в точках $A(u_0)$ и $B(u_1)$, где $u_1 \neq u_0$, получаем, что дифференциал длины дуги $ds = |\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv|$. Следовательно, квадрат дифференциала дуги кривой на поверхности равен квадрату приращения координаты:

$$ds^2 = du^2.$$

Полученную форму назовем первой квадратичной формой поверхности.

Если $du = 0$, то $u = \text{const}$. В этом случае кривая лежит на особой плоскости. Дифференциал длины дуги кривой вычисляется по формуле

$$ds_2^2 = (y_v^2 + z_v^2)dv^2 = G(u, v)dv^2,$$

где ds_2^2 — первая дополнительная квадратичная форма поверхности. Следовательно, при выбранной криволинейной координате коэффициенты первой квадратичной формы имеют вид $E_1 = 1$, $G = y_v^2 + z_v^2$.

Деривационное уравнение поверхности (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} &= \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}_v + L\mathbf{n}, & \mathbf{n}_u &= -\frac{M}{G} \mathbf{r}_v, \\ \mathbf{r}_{uv} &= \Gamma_{21}^2 \mathbf{r}_v + M\mathbf{n}, & & \\ \mathbf{r}_{vv} &= \Gamma_{22}^2 \mathbf{r}_v + N\mathbf{n}, & \mathbf{n}_v &= -\frac{N}{G} \mathbf{r}_v, \end{aligned}$$

где Γ_{ij}^2 — аналоги символов Кристоффеля, $G(u, v)$ — коэффициент первой квадратичной формы, L, N, M — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности (2), \mathbf{n} — нормаль поверхности. Символы Кристоффеля определяются формулами

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{F_u - \frac{1}{2}E_v}{G}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

Выражение $D(u, v) = F_u - \frac{1}{2}E_v$ называется дефектом кривизны поверхности; здесь

$$F = y_u y_v + z_u z_v, \quad E = y_u^2 + z_u^2.$$

Тогда

$$D(u, v) = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_v = |\mathbf{r}_{uu}| \cdot |\mathbf{r}_v| \cos \varphi, \quad |\mathbf{r}_v| = \sqrt{G(u, v)},$$

где φ — угол между векторами \mathbf{r}_{uu} и \mathbf{r}_v на особой плоскости (см. [1, 2]). Аналог формулы Гаусса в галилеевом пространстве \mathbb{R}_3^1 имеет вид

$$K = \frac{LN - M^2}{G} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{F_u - \frac{1}{2}E_v}{\sqrt{G}} \right)_v - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}. \quad (3)$$

Условием интегрируемости дериационных формул являются аналоги уравнений Петерсона—Кодацци:

$$L_v - M_u = \Gamma_{12}^2 M - \Gamma_{11}^2 N, \quad N_u - M_v = \Gamma_{12}^2 N - \Gamma_{22}^2 M.$$

В формуле Гаусса кроме коэффициента первой квадратичной формы участвует дефект кривизны $D(u, v)$. Это показывает, что гауссова кривизна (3) поверхности галилеева пространства полностью не выражается через коэффициент первой квадратичной формы и их производные.

Известно (см. [9]), что гауссова кривизна поверхности евклидова пространства является объектом внутренней геометрии, т.е. выражается только через коэффициент первой квадратичной формы и его производные. В галилеевом пространстве этот факт не имеет места.

4. Изометрия поверхностей в \mathbb{R}_3^1 . Пусть F — ограниченная поверхность галилеева пространства, заданная уравнением (2). Из общей ограниченности поверхности следует ее ограниченность и по оси Ox . Следовательно, особые плоскости, заданные уравнением $x = x_i = \text{const}$, пересекающие поверхность F , также ограничены, т.е. существуют такие числа a и b , что $a \leq x_i \leq b$. При этом плоскость $x = a$ ограничивает поверхность F слева по оси Ox , а плоскость $x = b$ — справа.

Определение 2. Назовем интервал $[a, b]$ шириной поверхности F в галилеевом пространстве.

Определение 3. Назовем полуизометричными поверхности, имеющие равные ширины.

Очевидно, существует достаточно широкий класс полуизометричных поверхностей. Кроме того, между полуизометричными поверхностями всегда можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что расстояние между соответствующими особыми плоскостями, пересекающими поверхность F , равны.

Определение 4. Полуизометричные поверхности называются изометричными, если в соответствующих сечениях отображение изометрично.

Если поверхности полуизометричны, т.е. их ширины равны, то в уравнении (2) параметры можно выбрать одинаковыми для обеих поверхностей. Изометричность сечения означает, что в случае $u = u_0$ выполняется равенство

$$\int_{v_0}^v \sqrt{G_1(u_0, v)} dv = \int_{v_0}^v \sqrt{G_2(u_0, v)} dv.$$

Из этого равенства следует, что $G_1(u_0, v) = G_2(u_0, v)$, т.е. коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей равны.

Следовательно, можно сделать вывод, что можно выбрать координатные линии изометричных поверхностей так, чтобы они имели одинаковые первые квадратичные формы.

Приведем пример изометричных поверхностей. Рассмотрим поверхности, заданные уравнениями

$$F_1 : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad F_2 : z = \frac{1}{2}(2x + y^2).$$

Вычислим коэффициенты первых квадратичных форм, а также дефект кривизны поверхностей F_1 и F_2 . Коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей $G_1(x, y) = G_2(x, y) = 1 + y^2$ равны. Дефекты кривизны поверхностей $D_1(x, y) = x$ и $D_2(x, y) = 0$ не равны. Следовательно, существуют поверхности с различными дефектами кривизны.

Определение 5. Изометричные поверхности называются вполне изометричными, если у них в соответствующих точках равны дефекты кривизны.

Поверхность F_1 из предыдущего примера и поверхность F_3 , заданная уравнением

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + y^2 + 8),$$

вполне изометричны.

5. Основные результаты.

Сформулируем основной результат работы.

В галилеевом пространстве существует введенная в [1] «циклическая поверхность», основные свойства которой изучены в [3, 4]. Докажем теорему существования циклической поверхности.

Пусть l_1 и l_2 — две непересекающиеся линии в галилеевом пространстве \mathbb{R}_3^1 , заданные векторными уравнениями

$$l_1 : \mathbf{r}_1(u) = u\mathbf{i} + y_1(u)\mathbf{j} + z_1(u)\mathbf{k}, \quad l_2 : \mathbf{r}_2(u) = u\mathbf{i} + y_2(u)\mathbf{j} + z_2(u)\mathbf{k}.$$

Теорема 1. *В галилеевом пространстве \mathbb{R}_3^1 существует единственная циклическая поверхность, образующие которой проходят через точки кривых l_1 и l_2 .*

Доказательство. Рассмотрим особую плоскость $x = u_1$, пересекающую кривые l_1 и l_2 в точках $M(u_1, y_1(u), z_1(u))$ и $N(u_1, y_2(u), z_2(u))$. На особой плоскости $x = u_1$ через точки M и N проходит единственная прямая $l(u_1)$. Когда координата x меняется, соответственно меняется прямая $l(u)$, проходящая через соответствующие точки M и N . Изменение прямой $l(u)$ описывает некоторую линейчатую поверхность, которая является циклической поверхностью. Единственность этой циклической поверхности следует из единственности ее образующей $l(u)$. \square

В циклических точках поверхности полную кривизну определим по формуле $K = -M^2$, где M — коэффициент второй квадратичной формы (см. [1, 3]).

Пусть в галилеевом пространстве \mathbb{R}_3^1 уравнением

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{4}$$

задана циклическая поверхность F , однозначно проектирующаяся на область D плоскости $O(x, y)$, областью D может быть вся плоскость $O(x, y)$. Полная кривизна поверхности F вычисляется по формуле

$$K = -M^2 = - \left(\frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_y^2}} \right)^2.$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x, y) \in C(D)$ — произвольная положительная функция. В галилеевом пространстве всегда существует циклическая поверхность с полной кривизной*

$$K = -\varphi^2(x, y).$$

Доказательство. Из уравнений полной кривизны циклической поверхности галилеева пространства для поверхности, заданной уравнением (4), имеем

$$K = -M^2 = -\varphi^2(x, y). \tag{5}$$

Учитывая, что $M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_y^2}}$, отсюда находим

$$- \left(\frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_y^2}} \right)^2 = -\varphi^2(x, y).$$

Следовательно, $z_{xy} = \varphi(x, y)\sqrt{1 + z_y^2}$. Производя в этом гиперболическом дифференциальном уравнении замену $z_y = T$, получим уравнение

$$\frac{T_x}{\sqrt{1 + T^2}} = \varphi(x, y),$$

решение которого имеет вид

$$\ln |T + \sqrt{1 + T^2}| = \int \varphi(x, y) dx + c_1(y) \iff z_y + \sqrt{1 + z_y^2} = \pm e^{\int \varphi(x, y) dx + c_1(y)}.$$

После несложных преобразований получим

$$z_y = \pm \left(\frac{1}{2} e^{\int \varphi(x, y) dx + c_1(y)} - \frac{1}{2e^{\int \varphi(x, y) dx + c_1(y)}} \right).$$

Следовательно,

$$z(x, y) = \pm \int \left(\frac{1}{2} e^{\int \varphi(x, y) dx + c_1(y)} - \frac{1}{2 e^{\int \varphi(x, y) dx + c_1(y)}} \right) dy + c_2(x). \quad (6)$$

Формула (6) дает общее решение уравнения (5). Если заданы начальные условия, то из общего решения можно выделить частное решение. \square

Рассмотрим задачу существования поверхности в галилеевом пространстве с заданными первой квадратичной формой и дефектом кривизны.

Задание первой квадратичной формы и положительность полной кривизны достаточны для определения выпуклой поверхности евклидова пространства. Но задание первой квадратичной формы в галилеевом пространстве определяет его с точностью до изометрии этого пространства. Кроме этого, в галилеевом пространстве существует вполне изометричность. Оказывается, условие вполне изометричности является достаточным для однозначной определенности поверхностей. Это вытекает из следующей теоремы 3.

Рассмотрим класс выпуклых поверхностей $W(\pi)$ из $C^2(\pi)$, однозначно проектирующихся на всю плоскость Oxy , которые задаются уравнением $z = z(x, y)$.

Теорема 3. *Если заданы функции $\varphi(x, y) > 1$ и $\mu(x, y)$, определенные на всей плоскости, то существует поверхность с коэффициентом первой квадратичной формы $\varphi(x, y) \in W(\pi)$ и дефектом кривизны $\mu(x, y) \in W(\pi)$.*

Доказательство. Для поверхностей галилеева пространства \mathbb{R}_3^1 первая квадратичная форма имеет вид

$$ds_1^2 = du^2 + ds_2^2 = G(u, v) dv^2,$$

где $G(u, v)$ — коэффициент первой квадратичной формы, а аналог уравнения Гаусса — вид

$$K = \frac{LN - M^2}{G} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{D}{\sqrt{G}} \right)_v - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2},$$

где D — дефект кривизны поверхности. Если поверхность принадлежит классу $W(\pi)$, то ее коэффициент первой квадратичной формы и дефект кривизны соответственно вычисляются по следующим формулам:

$$G(x, y) = 1 + z_y^2(x, y); \quad D(x, y) = z_{xx}(x, y) \cdot z_y(x, y).$$

Согласно условиям теоремы даны коэффициент первой квадратичной формы $G(x, y) = \varphi(x, y)$ и дефект кривизны $D(x, y) = \mu(x, y)$ на всей плоскости Oxy . Следовательно,

$$z_y^2(x, y) = \varphi(x, y) - 1, \quad z_{xx}(x, y) \cdot z_y(x, y) = \mu(x, y).$$

Выразив их первого равенства системы

$$z_y(x, y) = \pm \sqrt{\varphi(x, y) - 1}$$

и подставляя это выражение во второе равенство системы, получим

$$z_{xx}(x, y) = \pm \frac{\mu(x, y)}{\sqrt{\varphi(x, y) - 1}}.$$

Положим

$$\psi(x, y) = \pm \frac{\mu(x, y)}{\sqrt{\varphi(x, y) - 1}}.$$

Часть с отрицательным знаком не рассматриваем, так как это решение является зеркальным отображением положительной части относительно плоскости Oxy . Имеем

$$z(x, y) = \int \left(\int \psi(x, y) dx \right) dx + C_1(y) \cdot x + C_2(y).$$

Итак, доказано существование решения на всей плоскости Oxy . В случае, когда задача рассматривается на ограниченной части плоскости, следует решить задачу Дирихле. \square

Аналогично теореме 3 можно сформулировать и доказать теорему, когда искомая поверхность имеет уравнения вида (2). В этом случае задача связана с решением системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_v^2(x, v) + z_v^2(x, v) = \varphi(x, v), \\ y_{xx}(x, v)y_v(x, v) + z_{xx}(x, v)z_v(x, v) = \mu(x, v). \end{cases}$$

Для этой системы дифференциальных уравнений не существует метода нахождения общего решения. Аналогом теоремы Бонне для евклидова пространства является следующая теорема в \mathbb{R}_3^1 .

Теорема 4. Если на односвязной области Q плоскости заданы функции

$$G = G(u, v) \geq 0, \quad D = D(u, v) \geq 0, \quad L = L(u, v), \quad M = M(u, v), \quad N = N(u, v)$$

из класса C^1 , удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} L_v - M_u = \Gamma_{12}^2 M - \Gamma_{11}^2 N, \\ N_u - M_v = \Gamma_{12}^2 N - \Gamma_{22}^2 M, \end{cases} \quad K = \frac{LN - M^2}{G} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{D}{\sqrt{G}} \right)_v - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{du^2},$$

то существует единственная в области Q функция $r(u, v) = (u, y(u, v), z(u, v))$, являющаяся решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_v^2 + z_v^2 = G, \\ \begin{cases} y_{uu} = Dy_v - \frac{L}{\sqrt{G}}z_v, & z_{uu} = Dz_v + \frac{L}{\sqrt{G}}y_v, \\ y_{uv} = \frac{G_u}{2G}y_v - \frac{M}{\sqrt{G}}z_v, & z_{uv} = \frac{G_u}{2G}z_v + \frac{M}{\sqrt{G}}y_v, \\ y_{vv} = \frac{G_v}{2G}y_v - \frac{N}{\sqrt{G}}z_v, & z_{vv} = \frac{G_v}{2G}z_v + \frac{N}{\sqrt{G}}y_v. \end{cases} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{a}(a_1, a_2), \quad \mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \mathbf{b}(b_1, b_2), \quad \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \mathbf{c}(c_1, c_2), \quad \|\mathbf{c}\| = \sqrt{G(u_0, v_0)}.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся методом наложенного пространства, т.е. галилееву систему координат будем считать декартовой системой координат евклидова пространства \mathbb{R}_3 . Тогда из условий теоремы получаем систему дифференциальных уравнений, являющуюся частным случаем системы дифференциальных уравнений из теоремы Бонне (см. [6, 7]). Существование решения следует из существования решения соответствующей задачи Бонне.

Также эту систему дифференциальных уравнений можно рассматривать как частный случай системы дифференциальных уравнений, приведенной в доказательстве существования и единственности решения задач нахождения поверхности с заданной первой и второй квадратичной формой в книге А. Я. Нарманова [5]. Следует отметить, что коэффициенты первой квадратичной формы $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ в нашем варианте будут $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = D(u, v)$, а $G(u, v)$ остается неизменной. Здесь $D(u, v)$ — дефект кривизны поверхности.

Изложение доказательства теоремы является почти дословным повторением доказательства, приведенного в [5], так как является его частным случаем, поэтому мы его не приводим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артикбаев А., Соколов Д. Д. Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. — Ташкент: Фан, 1991.
2. Курбонов Э. К. О дефекте кривизны поверхности галилеева пространства // Узбек. мат. ж. — 2000. — № 4. — С. 26–29.
3. Курбонов Э. К. О поверхности галилеева пространства // Узбек. мат. ж. — 2005. — № 1. — С. 51–56.
4. Курбонов Э. К. Циклические поверхности галилеева пространства / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Ташкент, 2006.
5. Нарманов А. Я. Дифференциальная геометрия. — Ташкент: Турон Икбол, 2018.
6. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.
7. Позняк Э. Г., Шижин Е. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1990.

8. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
9. *Торопogov V. A., Rovenski V. Y.* Differential Geometry of Curves and Surfaces. — Boston: Birkhäuser, 2006.

Султанов Бекзод Максуд угли

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

E-mail: bek_4747@bk.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 124–132
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-124-132

УДК 514.763.23

О ГРУППЕ ИЗОМЕТРИЙ СЛОЕНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2022 г. А. С. ШАРИПОВ, Г. М. АБДИШУКУРОВА

Аннотация. В работе исследуется группа изометрий $\text{Iso}_F(M)$ слоеного многообразия с F -компактно-открытой топологией. Эта топология зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n -мерным слоением. Если коразмерность слоения равна n , то сходимость в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью. Доказаны некоторые свойства группы $\text{Iso}_F(M)$.

Ключевые слова: многообразие, слоение, изометрия слоений, топологическая группа, F -компактно-открытая топология.

ON THE ISOMETRY GROUPS OF FOLIATED MANIFOLDS

© 2022 A. S. SHARIPOV, G. M. ABDISHUKUROVA

ABSTRACT. In this paper, we study the isometry group $\text{Iso}_F(M)$ of a foliated manifold with an F -compact-open topology. This topology depends on the foliation F and coincides with the compact-open topology if F is an n -dimensional foliation. If the codimension of the foliation is equal to n , then the convergence in this topology coincides with the pointwise convergence. Some properties of the group $\text{Iso}_F(M)$ are proved.

Keywords and phrases: manifold, foliation, isometry of foliations, topological group, F -compact-open topology.

AMS Subject Classification: 22A05, 54H15, 57R50, 53C12

1. Введение. Множество $\text{Diff}(M)$ всех диффеоморфизмов многообразия на себя является группой относительно композиции и обратного отображения. Группа диффеоморфизмов гладких многообразий имеет важное значение в дифференциальной геометрии и в анализе. Фундаментальными работами в этой области являются исследования В. И. Арнольда, Н. Омоги, А. М. Лукацкого (см. [5, 6, 15, 26, 27]).

Интенсивное развитие теории группы диффеоморфизмов началось с работы В. И. Арнольда [15], в которой доказано, что движения идеальной несжимаемой жидкости являются геодезическими на группе диффеоморфизмов, сохраняющих объем элемента.

Н. Омоги определил дифференциальную структуру на группе диффеоморфизмов компактных многообразий, которая слабее, чем структура группы Ли в классическом смысле. Эта дифференциальная структура называется структурой ИЛН (Inverse limit of Hilbert) групп Ли. Н. Омоги доказал, что ИЛН-группа Ли диффеоморфизмов может действовать на компактном многообразии транзитивно и неприводимо только в случаях, когда она является полной группой диффеоморфизмов, группой сохраняющих элемент объема диффеоморфизмов, группой симплектических диффеоморфизмов или группой контактных диффеоморфизмов (см. [26, 27]). Вопросы конечной

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований (грант Ф3-2020092531 «Геометрия векторных полей и сингулярные слоения»).

порожденности группы диффеоморфизмов и свойства кривизны ЛН-групп Ли диффеоморфизмов исследованы А. М. Лукацким (см. [5, 6]).

Известно, что группа диффеоморфизмов является топологической группой в компактно-открытой топологии. В случае, когда многообразие компактно, этот факт доказан в [13]. Для произвольного многообразия конечной размерности этот факт доказан в [24].

Пусть M — гладкое многообразие с римановой метрикой g . Вопрос о группе изометрий риманова многообразия (M, g) является основной классической задачей римановой геометрии. Обозначим через $I(M)$ группу всех изометрий риманова многообразия (M, g) размерности n с римановой метрикой g . Структура группы $I(M)$ зависит от фиксированной римановой метрики g . Известно, что для «плохих» римановых метрик группа $I(M)$ может быть очень бедной. Известны примеры, когда группа $I(M)$ состоит из одного элемента.

Многообразие M с некоторым фиксированным слоением F на нем называется слоеным многообразием и обозначается через (M, F) . Слоеные римановы многообразия изучаются в рамках теории слоений, которая является относительно новым направлением математики. Она возникла на стыке дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии во второй половине XX в.

В формировании и развитии теории слоения большой вклад внесли французские математики С. Ehresmann [16], G. Reeb [28], H. Lawson [21], P. Molino [23], A. Haefliger [17], R. Langevin и H. Rosenberg [20], G. Lamoureaux [19]. Основные работы Ж. Рибба (G. Reeb), одного из основоположников теории слоений, посвящены задачам качественной теории слоений. Ж. Рибб доказал (см. [28]), что если компактный слой имеет конечную фундаментальную группу, то существует окрестность этого слоя, состоящая из слоев, диффеоморфных данному слою. В работах Ш. Эресмана (С. Ehresmann) показано, что римановы и геодезические слоения на полных римановых многообразиях обладают связностью Эресмана.

В настоящее время теория слоений интенсивно развивается, она имеет широкие приложения в различных областях математики: теории оптимального управления, теории динамических полисистем, теории динамических систем. По теории слоений имеются многочисленные исследования. Американский математик Р. Tondeur составил обзор последних научных работ по теории слоений, содержащий более 2500 наименований.

С геометрической точки зрения важными классами слоений являются римановы (метрические) слоения. Р. Tondeur рассматривал функцию без критических точек на римановом многообразии (см. [30]), длина градиента которой постоянна на каждой поверхности уровня. Для таких функций он доказал, что слоение, порожденное поверхностями уровня такой функции, является римановым (метрическим) слоением. В [25] доказано, что если слоение порождено римановой субмерсией, то слои этого слоения являются многообразиями постоянной гауссовой кривизны. Римановы слоения, порожденные метрическими функциями, изучены в работах А. Я. Нарманова [7], Г. Х. Каипназаровой [8], А. М. Байтураева [2]. В [8] изучена геометрия слоений, порожденных поверхностями уровней метрических функций, и получена полная классификация в следующем виде.

Теорема 1. Пусть f — метрическая функция, определенная в \mathbb{R}^n . Тогда поверхности уровня функции f образуют слоение F , которое имеет один из следующих n типов:

- (1) слоение F состоит из параллельных гиперплоскостей;
- (2) слоение F состоит из концентрических гипербол и точки (центр гипербол);
- (3) слоение F состоит из концентрических цилиндров вида $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^k$ и сингулярного слоя \mathbb{R}^k , который возникает при вырождении сфер в точку; здесь k — минимальная размерность поверхностей критического уровня и $1 \leq k \leq n - 2$.

В работе А. М. Байтураева [2] изучена геометрия метрических субмерсий на римановом многообразии; в частности, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть M — гладкое полное связное риманово многообразие постоянной неотрицательной секционной кривизны, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ — метрическая функция без критических точек.

Тогда поверхности уровня функции f порождают вполне геодезическое слоение F на M , слои которого являются взаимно изометричными.

Исследование группы изометрий слоения является новой задачей в теории слоеных многообразий. Понятие изометрии слоения было введено А. Я. Нармановым в [10]. Группа изометрий слоения является подгруппой группы диффеоморфизмов слоеного многообразия. Группа диффеоморфизмов слоеного многообразия изучена в работах С. Х. Арансона (см. [1]). Им получено необходимое и достаточное условие топологической сопряженности таких диффеоморфизмов. Для компактных многообразий различные подгруппы группы диффеоморфизмов изучали P. L. Antonelli, D. Burghilea, P. J. Kahn (см. [14]). В [11] исследованы свойства некоторых подгрупп группы диффеоморфизмов. В частности, доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть (M, F) — гладкое связное полное слоеное риманово многообразие конечной размерности. Тогда группа $\text{Iso}_F(M)$ является топологической группой с F -компактно-открытой топологией.

Теорема 4. Пусть M — гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k , где $0 < k < n$.

1. Каждый слой с индуцированной римановой метрикой на нём является полным римановым многообразием.
2. Пусть $\gamma_m: \mathbb{R}^1 \rightarrow L_m$ — такая последовательность геодезических (относительно индуцированных римановых метрик) слоев L_m , что $\gamma_m(s_0) \rightarrow p$ при $m \rightarrow \infty$ для некоторого $s_0 \in \mathbb{R}^1$. Тогда существует подпоследовательность γ_{m_i} последовательности γ_m , которая поточечно сходится к некоторой геодезической $\gamma: \mathbb{R}^1 \rightarrow L(p)$ слоя $L(p)$, выходящая из точки p при $s = s_0$.

Теорема 5. Пусть (M, F) — слоеное многообразие, где M — гладкое связное многообразие конечной размерности. Тогда группа $\text{Diff}_F^0(M)$ является топологической группой с F -компактно-открытой топологией.

Теорема 6. Пусть M — полное гладкое многообразие размерности n с гладким слоением F размерности k , $f_m \in G_F^r(M)$, $r \geq 0$, $m = 1, 2, \dots$. Предположим, что для каждого слоя L_α существует такая точка $o_\alpha \in L_\alpha$, что последовательность $f_m(o_\alpha)$ сходится. Тогда существует подпоследовательность f_{m_i} последовательности f_m , сходящаяся в F -компактно-открытой топологии.

В этой работе рассмотрим слоеное многообразие с некоторым слоением и исследуем некоторые свойства группы $\text{Iso}_F(M)$ изометрий слоеного многообразия, с F -компактно-открытой топологией. Эта топология зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n -мерным слоением. Если коразмерность слоения равна n , то сходимость в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью. Доказаны некоторые свойства группы $\text{Iso}_F(M)$. Всюду в работе слово «гладкость» означает гладкость класса C^∞ .

2. Основные результаты. Изометрии n -мерного риманова многообразия M на себя образуют подгруппу группы $\text{Diff } M$ всех диффеоморфизмов M на себя. Как показали S. В. Myers, N. Steenrod (см. [22]), группа изометрий $I(M)$ с компактно-открытой топологией имеет естественную структуру группы Ли.

Пусть M — риманово многообразие и $I(M)$ — множество всех изометрий многообразия M . Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in I(M)$. Композиция отображений $\varphi_1 \circ \varphi_2$ снова является изометрией. Если положить $\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$, то $I(M)$ станет группой. Мы здесь рассматриваем $I(M)$ с компактно-открытой топологией, которая определяется следующим образом.

Пусть C и U — компактное и открытое подмножества в M соответственно и пусть

$$W(C, U) = \{\varphi \in I(M) \mid \varphi(C) \subset U\}.$$

Компактно-открытая топология в $I(M)$ определяется как самая слабая топология в $I(M)$, для которой все множества $W(C, U)$ открыты. Известно, что $I(M)$ — хаусдорфово пространство со счетной базой.

Объект, состоящий из дифференцируемого многообразия и заданной на нем групповой структуры, называется группой Ли, если групповая операция совместима с дифференциальной структурой, т.е. отображение $\mu: I \times I \rightarrow I$, заданное формулой $\mu(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, дифференцируемо. Иными словами, групповая операция

$$\mu(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1 \circ \varphi_2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in I,$$

и взятие обратного

$$i: I \rightarrow I, \quad i(\varphi) = \varphi^{-1}, \quad \varphi \in I,$$

являются гладкими отображениями многообразий.

Пусть M — гладкое связное риманова многообразие размерности n , $0 < k < n$.

Определение 1 (см. [29]). Слоением F размерности k (слоением коразмерности $n - k$) называется разбиение M на линейно связные подмножества $L_\alpha \subset M$, обладающее следующими свойствами:

(F₁) справедливо соотношение

$$\bigcup_{\alpha \in B} L_\alpha = M;$$

(F₂) для всех $\alpha, \beta \in B$ если $\alpha \neq \beta$, то $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$;

(F₃) для всякой точки $p \in M$ существуют такие окрестность U и карта $(x^1, x^2, \dots, x^k, y^1, y^2, \dots, y^{n-k})$, что для каждого слоя L_α компоненты линейной связности множества $U_p \cap L_\alpha$ задаются уравнениями $y^1 = \text{const}, y^2 = \text{const}, \dots, y^{n-k} = \text{const}$.

Эта карта называется отмеченной картой. Компоненты связности множеств $y^1 = \text{const}, y^2 = \text{const}, \dots, y^{n-k} = \text{const}$ в отмеченных картах называются локальными слоями слоения F . При фиксированном y отображение $x \rightarrow (x, y)$ является гладким вложением. Следовательно, локальные слои являются связными k -мерными подмногообразиями многообразия M , каждый слой L_α как объединение локальных слоев является k -мерным связным подмногообразием M . Заметим, что естественная топология на многообразии L_α не является топологией, индуцированной из M . Простой пример слоения задается гладкой субмерсией $f: M \rightarrow B$, где B является $n - k$ -мерным многообразием. Компоненты связности полного прообраза точки $y \in B$ определяют k -мерное слоение на M (см. [30]).

Через (M, F) обозначим гладкое многообразие M размерности n , на котором задано гладкое k -мерное слоение F , $0 < k < n$. Пусть $L(p)$ — слой слоения F , проходящий через точку p , $T_p F$ — касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p . Имеем подрасслоение (гладкое распределение) $TF = \{T_p F : p \in M\}$ касательного расслоения TM многообразия M . Обозначим через $V(M)$, $V(F)$ множество гладких сечений расслоений TM , TF соответственно.

Определение 2. Если при диффеоморфизме $f: M \rightarrow M$ образ $f(L_\alpha)$ любого слоя L_α слоения F является слоем слоения F , то отображение $f: M \rightarrow M$ называется C^r -диффеоморфизмом слоеного многообразия; обозначение $f: (M, F) \rightarrow (M, F)$.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y) . Пусть слои L_α слоения F задаются уравнениями $x^2 - y = \alpha = \text{const}$. Тогда диффеоморфизм плоскости

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(x, y) = (x, y + \lambda f(x, y)),$$

является диффеоморфизмом слоеной плоскости (\mathbb{R}^2, F) для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$, где $f(x, y) = x^2 - y$. Оно отображает каждый слой L_α на слой $L_{(1-\lambda)\alpha}$.

Пример 2. Пусть (M, F) — слоеное многообразие, где F — гладкое слоение размерности k , $0 < k < n$. Напомним, что векторное поле X называется слоеным полем, если для каждого векторного поля Y , касательного к слоению F , скобка Ли $[X, Y]$ также является касательным к F . Известно, что поток каждого слоеного поля состоит диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F) .

Для слоеной плоскости из примера 1 векторное поле

$$X = (x^2 - y) \frac{\partial}{\partial y}$$

является слоеным полем, а его поток состоит из диффеоморфизмов

$$\phi^t: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, x^2 - e^{-t}(x^2 - y)) \in \mathbb{R}^2 \quad \phi^t: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, x^2 - e^{-t}(x^2 - y)) \in \mathbb{R}^2$$

слоеной плоскости (\mathbb{R}^2, F) . Каждый такой диффеоморфизм отображает каждый слой L_α на слой $L_{e^{-t}\alpha}$.

Пример 3. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y) . Слои L_α слоения F задаются уравнениями $y = \alpha = \text{const}$. Тогда гомеоморфизм плоскости

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(x, y) = (x + y, y^{1/3}),$$

является диффеоморфизмом на каждом слое слоения F , но не является диффеоморфизмом плоскости.

Обозначим через $\text{Diff}_F(M)$ множество всех C^r -диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F) , $r \geq 0$. Множество $\text{Diff}^r(M)$ является группой по отношению к суперпозиции и обратного отображения. Группа $\text{Diff}_F(M)$ является подгруппой $\text{Diff}(M)$ — топологической группой в компактно-открытой топологии.

Пусть M — гладкое связное риманово многообразие конечной размерности.

Определение 3. Изометрия $\phi: M \rightarrow M$ называется изометрией слоеного многообразия (M, F) , если она является диффеоморфизмом слоеного многообразия (M, F) .

Пример 4. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y) . Пусть слоения F задаются уравнениями $x^2 - y = \alpha = \text{const}$. Тогда изометрия плоскости

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda),$$

является изометрией слоеной плоскости (\mathbb{R}^2, F) для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$. Оно отображает каждый слой L_α на слой $L_{\alpha-\lambda}$. Семейство изометрий ϕ_λ является потоком векторного поля Киллинга $X = \partial/\partial y$. Нетрудно проверить, что диффеоморфизм слоеной плоскости из примера 1 является изометрией слоеной плоскости, но не является потоком векторного поля.

Напомним, что векторное поле X на римановом многообразии (M, g) называется векторным полем Киллинга, если поток состоит из изометрий риманова многообразия (M, g) , т.е. $L_X g = 0$, где g — риманова метрика, а $L_X g$ — производная Ли метрики по направлению X . Геометрия орбит семейства векторных полей Киллинга изучена в [6]. Если X является слоеным векторным полем Киллинга, то его поток состоит из изометрий слоеного многообразия (M, F) .

Обозначим через $\text{Iso}_F(M)$ множество всех C^r -изометрий слоеного многообразия (M, F) , $r \geq 0$. Имеем

$$\text{Iso}_F(M) = \text{Diff}_F(M) \cap I(M).$$

Исследование группы изометрий слоения является новой задачей в теории слоеных многообразий. Группа изометрий слоения является подгруппой группы диффеоморфизмов слоеного многообразия. Исследуем некоторую топологию на группе $\text{Iso}_F(M)$, которая зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n -мерным слоением. Если коразмерность слоения равна n , то сходимости в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью.

Пусть $\{K_\lambda\}$ — семейство всех компактных множеств, где каждое K_λ принадлежит какому-либо слою слоения F , и пусть $\{U_\beta\}$ — семейство всех открытых множеств на M .

Рассмотрим для каждой пары $K_\lambda \subset L_\alpha$ и любого U_β совокупность всех отображений $f \in \text{Iso}_F(M)$, для которых $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. Эту совокупность отображений будем обозначать

$$[K_\lambda, U_\beta] = \left\{ f: M \rightarrow M \mid f(K_\lambda) \subset U_\beta \right\}.$$

Пусть $\sigma_1 = \{[K_\lambda, U_\beta]\}$. Рассмотрим семейство

$$\sigma_2 = \left\{ \bigcap_{i=1}^k [K_{\lambda_i}, U_{\beta_i}] \right\} \cup \emptyset.$$

Согласно известному критерию в $\text{Iso}_F(M)$ существует топология, для которой семейство σ_2 является базой, причем эта топология единственна. Эту топологию будем называть послойной компактно-открытой топологией или F -компактно-открытой топологией.

В [11] доказано, что группа изометрий конечномерного слоеного многообразия является топологической группой с F -компактно-открытой топологией.

Теорема 7. Пусть (M, F) — гладкое связное полное слоеное риманово многообразие конечной размерности. Тогда группа $\text{Iso}_F(M)$ является топологической группой с F -компактно-открытой топологией.

Теорема 8. Множество $\text{Iso}_F(M)$ с F -компактно-открытой топологией является хаусдорфовым пространством со счетной базой.

Доказательство. Возьмем произвольные $f_1 \in \text{Iso}_F(M)$ и $f_2 \in \text{Iso}_F(M)$, $f_1 \neq f_2$. Это означает, что существует такая точка $x \in M$, образы которой при отображениях f_1 и f_2 различны: если $x_1 = f_1(x)$, $x_2 = f_2(x)$, то $x_1 \neq x_2$. Так как M — хаусдорфово пространство, существуют не пересекающиеся окрестности U_1 и U_2 , которые содержат соответственно точки $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$. Положим $K_\lambda = \{x\}$. Тогда по определению F -компактно-открытой топологии множества $[K_\lambda, U_1]$ и $[K_\lambda, U_2]$ открыты и не пересекаются:

$$[K_\lambda, U_1] \cap [K_\lambda, U_2] = \emptyset.$$

Действительно, если предполагать, что $[K_\lambda, U_1] \cap [K_\lambda, U_2] \neq \emptyset$, то существует $f \in \text{Iso}_F(M)$, которое содержится в $f \in [K_\lambda, U_1] \cap [K_\lambda, U_2]$. Следовательно, $f(C) \subset U_1$, $f(C) \subset U_2$. Отсюда $f(C) \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Это противоречие доказывает хаусдорфовость пространства $\text{Iso}_F(M)$.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Известно, что каждое риманово многообразие сепарабельно. Следовательно, существует счетная база U_1, \dots, U_i, \dots для открытых подмножеств в M . Поскольку M локально компактно, можно предположить, что замыкание $\overline{U_i}$ компактно для каждого i . Пусть $K_\lambda \subset L_\alpha$ — компакт, лежащий на некотором слое L_α , $U_\beta \subset M$ — открытое множество и f — элемент из $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. Для каждого $p \in K_\lambda$ существуют такие индексы i и j , что $p \in U_i$, $f(U_i) \subset U_j \subset U_\beta$. Найдутся такие покрытия U_{i_1}, \dots, U_{i_N} множества K_λ и U_{j_1}, \dots, U_{j_N} множества $f(K_\lambda)$, что

$$f(\overline{U_{i_k}}) \subset U_{j_k} \subset U_\beta, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Отсюда следует, что

$$f \in \bigcap_{k=1}^N [\overline{U_{i_k}}, U_{j_k}] \subset [K_\lambda, U_\beta].$$

Значит, множество Ω всех конечных пересечений множеств вида $[\overline{U_{i_k}}, U_{j_k}]$ образует базу открытых множеств в пространстве $\text{Iso}_F(M)$. Поскольку Ω счетно, получаем счётность базы топологии пространства. \square

Пусть M — гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k , $0 < k < n$. Тогда каждый слой является римановым многообразием с индуцированной римановой метрикой. Следующая теорема показывает, что если M является полным римановым многообразием, то каждый слой является полным римановым многообразием с индуцированной римановой метрикой.

Теорема 9. Пусть M — гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k , $0 < k < n$.

1. Каждый слой с индуцированной римановой метрикой на нём является полным римановым многообразием.
2. Пусть $\gamma_m: \mathbb{R}^1 \rightarrow L_m$ — такая последовательность геодезических (относительно индуцированных римановых метрик) слоев L_m , что $\gamma_m(s_0) \rightarrow p$ при $m \rightarrow \infty$ для некоторого $s_0 \in \mathbb{R}^1$. Тогда существует подпоследовательность γ_{m_i} последовательности γ_m , которая поточечно сходится к некоторой геодезической $\gamma: \mathbb{R}^1 \rightarrow L(p)$ слоя $L(p)$, выходящей из точки p при $s = s_0$.

Докажем вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Предположим, что $\{f_m\} \in \text{Iso}_F(M)$ — последовательность, которая поточечно сходится на множестве $A \subset L_\alpha$, где L_α — некоторый слой слоения F . Тогда $\{f_m\}$ также поточечно сходится на \overline{A} , где \overline{A} — замыкание множества A в L_α .*

Доказательство. Пусть $p \in \overline{A}$, $\varepsilon > 0$. Выберем сначала такую точку $p_1 \in A$, что $d_\alpha(p, p_1) < \varepsilon/3$, и такое N , что $d(f_l(p_1), f_m(p_1)) < \varepsilon/3$ для $l, m \geq N$, где $d_\alpha(p, p_1)$ — расстояние между точками p и p_1 на слое L_α . Тогда

$$d(f_l(p), f_m(p)) \leq d(f_l(p), f_l(p_1)) + d(f_l(p_1), f_m(p_1)) + d(f_m(p_1), f_m(p)) < \varepsilon$$

для всех $l, m \geq N$. Следовательно, последовательность $\{f_m(p)\}$ фундаментальна, и из полноты многообразия M следует, что $\{f_m(p)\}$ сходится. \square

Лемма 2. *Пусть A — такое множество точек на многообразии M , что для каждой точки $p \in A$ существует сходящаяся подпоследовательность $f_{m_i}(p)$ последовательности $f_m(p)$. Если множество A непусто, то $A = M$.*

Доказательство. Пусть $p \in L_\alpha$, $p^* \in A$, $r = d_\alpha(p, p^*)$, где $d_\alpha(p, p^*)$ — расстояние между точками p и p^* на L_α . Пусть подпоследовательность $\{f_{m_i}\}$ такова, что $\{f_{m_i}(p^*)\}$ сходится. Так как f_{m_i} — изометрия слоения, то расстояние $d_\alpha(p, p^*)$ между точками p и p^* на слое L_α сохраняется и $d_{f_l(\alpha)}(f_{m_i}(p), f_{m_i}(p^*)) = d_\alpha(p, p^*)$, где $d_{f_l(\alpha)}$ — расстояние на слое $f_{m_i}(L_\alpha)$. Пусть

$$q^* = \lim_{l \rightarrow \infty} (f_{m_i}(p^*)).$$

Тогда

$$d(q^*, f_{m_i}(p)) \leq d(q^*, f_{m_i}(p^*)) + d(f_{m_i}(p^*), f_{m_i}(p)) \leq \varepsilon + r.$$

Следовательно, множество $\{f_{m_i}(p)\}$ имеет компактное замыкание. Отсюда следует, что $p \in A$. \square

Следующая теорема показывает некоторое свойство группы $\text{Iso}_F(M)$ с F -компактно-открытой топологией.

Теорема 10. *Пусть M — гладкое риманово многообразие размерности n с гладким слоением F размерности k и f_m — последовательность в $\text{Iso}_F(M)$. Предположим, что существует такая точка $O \in M$, что последовательность $f_m(O)$ сходится. Тогда существует элемент $\varphi \in \text{Iso}_F(M)$ и подпоследовательность f_{m_i} последовательности f_m , сходящаяся к φ в F -компактно-открытой топологии.*

Доказательство. По условиям теоремы существует такая точка $O \in M$, что последовательность $\{f_m(O)\}$ сходится. По лемме 2 для каждой точки $p \in M$ последовательность $\{f_m(p)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Отсюда следует, что последовательность $\{f_m(p)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность для всех $p \in M$.

Риманово многообразие M является сепарабельным метрическим пространством. Поэтому оно содержит всюду плотное счетное подмножество $A = \{p_i\}$. Для каждой точки p_i существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_{m_i}^i(p_i)\}$ последовательности $\{f_m(p_i)\}$. Используя диагональный процесс, можем найти подпоследовательность $\{f_{m_i}\}$, которая сходится во всех точках множества A . Так как существует точка $O \in M$, в которой последовательность $\{f_{m_i}\}$ сходится, то по лемме 2 она сходится во всех точках многообразия M . Отсюда получим, что последовательность сходится поточечно в каждой точке M .

Пусть L_α — произвольный слой. Полагая

$$\varphi(p) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_{m_l},$$

получим отображение $\varphi: M \rightarrow M$. Пусть $p \in L_\alpha$, $\gamma: [0, l] \rightarrow L_\alpha$ — геодезическая, которая реализует расстояние $d_0 = d_\alpha(o_\alpha, p)$ на слое L_α , и параметризованная длиной дуги, $\gamma(0) = o_\alpha$, $\gamma(l) = p$. Если рассмотрим $\gamma_l = f_{m_l}(\gamma)$, то они являются геодезическими на $f_{m_l}(L_\alpha)$. По условиям теоремы $\gamma_l(0) \rightarrow p_0$ при $l \rightarrow \infty$, где p_0 — некоторая точка из M . Тогда по теореме 3 из последовательности $\{\gamma_l(s)\}$ можно выделить подпоследовательность, которая поточечно сходится к некоторой

геодезической $\gamma(0): \mathbb{R}^1 \rightarrow L(p_0)$ слоя $L(p_0)$, выходящей из точки p_0 при $s = 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что сама последовательность $\{\gamma_l(s)\}$ сходится к $\{\gamma_0(s)\}$ для каждого $s \in [0; l]$. Отсюда следует, что $\varphi(\gamma) = \gamma_0$, т.е. отображение φ изометрично переводит L_α на $L(p_0)$.

Теперь покажем, что f_{m_l} сходится к f равномерно на каждом компакте, лежащем на слое слоения F . Пусть K — компактное множество на слое L и $\varepsilon > 0$. Так как K — компакт, то существует $(\varepsilon/3)$ -сеть, состоящая из конечного числа точек (p_1, p_2, \dots, p_m) , где $p_i \in L$. Для каждой точки p_i существует такой номер N_i , что $d(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)) < \varepsilon/3$ для произвольного $m_l \geq N_i$. Кроме того, для каждой точки $p \in K$ существует такое p_i , что $d_L(p, p_i) < \varepsilon/3$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} d(f_{m_l}(p), \varphi(p)) &\leq d(f_{m_l}(p), f_{m_l}(p_i)) + d(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)) + d(\varphi(p_i), \varphi(p)) \leq \\ &\leq d_{m_l}(f_{m_l}(p), f_{m_l}(p_i)) + d(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)) + d_l(\varphi(p_i), \varphi(p)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

для

$$m_l > N = \max_{1 \leq i \leq m} \{N_i\},$$

где $1 \leq i \leq m$. Следовательно, получаем, что последовательность f_{m_l} сходится к φ в F -компактно-открытой топологии.

Теперь докажем, что отображение φ отображением «на», или гомеоморфизмом многообразия M на себя. Если предельное отображение является гомеоморфизмом, то оно является изометрией слоения в смысле определения, приведенного выше.

Пусть $q \in \varphi(M)$. Определим $q' \in \varphi(M)$ равенством $\varphi(q') = q$. Тогда

$$0 = \lim d(q, f_\nu(q')) = \lim d(f_\nu^{-1}(q), q').$$

Таким образом, последовательность $f_\nu^{-1}(q)$ сходится к q' . Из доказанного мы знаем, что существует такая подпоследовательность f_{m_l} последовательности f_m , что $f_{m_l}(p)$ сходится для каждой точки $p \in M$. Пусть $p' = \lim f_{m_l}^{-1}(p)$. Тогда

$$d(\lim f_{m_l}(p)', p) = \lim d(p', f_{m_l}^{-1}(p)) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$p = \lim f_{m_l}(p)' = \varphi(p').$$

Поскольку точка $p \in M$ произвольна, заключаем отсюда, что $f(M) = M$.

Известно, что если отображение «на» сохраняет расстояние, то это отображение является изометрией. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арансон С. Х. Топология векторных полей, слоений с особенностями и гомеоморфизмов с инвариантными слоениями на замкнутых поверхностях // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1992. — 193. — С. 15–21.
2. Байтураев А. М. О геометрии слоений коразмерности 1 // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 144. — С. 109–116.
3. Гринес В. З., Левченко Ю. А., Починка О. В. О топологической классификации структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами // Мат. заметки. — 2015. — 97, № 2. — С. 318–320.
4. Гринес В. З., Починка О. В. Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях // Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 1 (409). — С. 129–188.
5. Лукацкий А. М. Конечнопорожденность групп диффеоморфизмов // Усп. мат. наук. — 1978. — 33, № 1 (199). — С. 219–220.
6. Лукацкий А. М. Исследование геодезического потока на бесконечномерной группе Ли с использованием оператора коприсоединенного действия // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2009. — 267. — С. 204–213.
7. Нарманов А. Я. О геометрии вполне геодезических римановых слоений // Изв. вузов. Мат. — 1999. — № 9. — С. 26–31.
8. Нарманов А. Я., Каипназарова Г. Х. Метрические функции на римановых многообразиях // Узбек. мат. ж. — 2010. — № 1. — С. 11–20.

9. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — 50, № 12. — С. 1582–1589.
10. *Нарманов А. Я., Скоробогатов Д. А.* Изометрические отображения слоений// Докл. АН РУз. — 2004. — № 4. — С. 12–16.
11. *Нарманов А. Я., Шарипов А. С.* О группе диффеоморфизмов слоеных многообразий// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 181. — С. 74–83.
12. *Починка О. В.* Классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла на 3-многообразиях// Докл. РАН. — 2011. — № 6. — С. 34–37.
13. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
14. *Antonelli P. L., Burgelea D., Kahn P. J.* The non-finite type of some diffeomorphism groups// Topology. — 1972. — 11. — P. 1–49.
15. *Arnold V.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits// Ann. Inst. Fourier. — 1966. — 16, № 1. — P. 319–361.
16. *Ehresmann C.* Structures feuilletées// in: Proc. 5th Can. Math. Congr., 1961. — P. 109–172.
17. *Haefliger A.* Variétés feuilletées// Ann. Scu. Norm. Super. Pisa. — 1962. — 16. — P. 367–397.
18. *Helgason S.* Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. — Toronto: Academic Press, 1978.
19. *Lamoureaux G.* Variétés feuilletées. Transversales fermées// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1970. — 270. — P. 1659–1662.
20. *Langevin R., Rosenberg H.* Feuilletages de codimension 1// Topology. — 1977. — 16. — P. 107–111.
21. *Lawson H.* Foliations// Bull. Am. Math. Soc. — 1974. — 80. — P. 369–418.
22. *Myers S., Steenrod N.* The group of isometries of a Riemannian manifold// Ann. Math. (2). — 1939. — 40, № 2. — P. 400–416.
23. *Molino P.* Riemannian Foliations. — Boston: Birkhäuser, 1988.
24. *Narmanov A., Sharipov A.* On the group of foliation isometries// Meth. Funct. Anal. Topology. — 2009. — 15, № 2. — P. 195–200.
25. *Narmanov A., Sharipov A.* On the geometry of submersions// Int. J. Geom. — 2014. — 3, № 2. — P. 51–56.
26. *Omori H.* On the group of diffeomorphisms on a compact manifold// Proc. Symp. Pure Math. — 1970. — 15. — P. 167–183.
27. *Omori H.* Groups of diffeomorphisms and their subgroups// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — 79, № 1. — P. 85–122.
28. *Reeb G.* Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. — Paris: Hermann, 1952.
29. *Tamura I.* Topology of Foliations: An Introduction. — Am. Math. Soc., 2006.
30. *Tondeur P.* Foliations on Riemannian Manifolds. — New York: Springer-Verlag, 1988.

Шарипов Анваржон Солиевич

Ташкентский филиал

Национального исследовательского ядерного университета МИФИ

E-mail: asharipov@inbox.ru

Абдишукурова Гузал Максуд кизи

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент

E-mail: Abdishukurova93@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 133–152
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-133-152

УДК 517.9; 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ГЛАДКОГО
КОНЕЧНОМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ. III. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К n -МЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ
В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

© 2022 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Статья завершает работу об интегрируемости общих классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким n -мерным многообразиям. Первая часть работы: Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении к гладкому n -мерному многообразию // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — Т. xxx. — С. xx–xx. Вторая часть работы: Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. II. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в потенциальном силовом поле // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — Т. xxx. — С. xx–xx.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS
WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF SMOOTH
FINITE-DIMENSIONAL MANIFOLDS. III. EQUATIONS OF MOTION
ON THE TANGENT BUNDLE OF AN n -DIMENSIONAL MANIFOLD
IN A FORCE FIELD WITH VARIABLE DISSIPATION

© 2022 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. This paper is the conclusion of the work on the integrability of general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on the tangent bundles of n -dimensional manifolds. The first part of the paper is: Integrable homogeneous dynamical systems with dissipation on the tangent bundles of smooth finite-dimensional manifolds. I. Equations of geodesics on the tangent bundle of a smooth n -dimensional manifold // Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory. — 2022. — V. xxx. — P. xx–xx. The second part of the paper is: Integrable homogeneous dynamical systems with dissipation on the tangent bundles of smooth finite-dimensional manifolds. II. Equations of motion on the tangent bundle of an n -dimensional manifold in a potential force field // Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory. — 2022. — V. xxx. — P. xx–xx.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ
К n -МЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

3.1. Приведенная система. Случай I. Несколько модифицируя систему (??), получим систему с диссипацией. Именно, в отличие от системы (??), наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризуется не только коэффициентом $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (3.1), но и следующим видм (внешнего) гладкого силового поля в координатах $\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n$:

$$\tilde{F}(z_n, \dots, z_1; \alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ \vdots \\ z_{n-1} F_{n-1}^1(\alpha) \\ z_n F_n^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T^*M^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ примет следующий вид:

$$\dot{\alpha} = -z_n + b\delta(\alpha), \quad (3.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n = F(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)z_{n-1}^2 + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)z_2^2 + \dots + \\ + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)z_1^2 + z_n F_n^1(\alpha), \end{aligned} \quad (3.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n-1} = \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] z_{n-1}z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)z_{n-2}^2 - \dots - \\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)z_1^2 + z_{n-1}F_{n-1}^1(\alpha), \end{aligned} \quad (3.1c)$$

.....

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = \left[2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha) \right] z_2z_n - \\ - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1) \right] z_2z_{n-1} - \dots - \\ - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)s_a(\beta_{n-4}) \left[2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dr_1(\beta_{n-3}) \right] z_2z_3 - \\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \dots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha), \end{aligned} \quad (3.1d)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = \left[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha) \right] z_1z_n - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) \right] z_1z_{n-1} - \\ - f_2(\alpha)g_1(\beta_1) \left[2\Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2) \right] z_1z_{n-2} - \dots - \\ - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) \left[2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2}) \right] z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha), \end{aligned} \quad (3.1e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \quad (3.1f)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \quad (3.1g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \quad (3.1h)$$

.....

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}). \quad (3.1i)$$

Система (3.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot{\alpha} - \left[b\tilde{\delta}(\alpha) + F_n^1(\alpha) \right] \dot{\alpha} + F(\alpha) + b\delta(\alpha)F_n^1(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_1 - \left\{ b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1 \right] + F_{n-1}^1(\alpha) \right\} \dot{\beta}_1 + \\ + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.2b)$$

$$\ddot{\beta}_2 - \left\{ b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2 \right] + F_{n-2}^1(\alpha) \right\} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + \\ + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (3.2c)$$

$$\ddot{\beta}_3 - \left\{ b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3 \right] + F_{n-3}^1(\alpha) \right\} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + \\ + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (3.2d)$$

$$\dots, \\ \ddot{\beta}_{n-2} - \left\{ b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2} \right] + F_2^1(\alpha) \right\} \dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_{n-2} + \\ + 2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_{n-2} + \dots + 2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-3} \dot{\beta}_{n-2} + \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (3.2e)$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} - \left\{ b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1} \right] + F_1^1(\alpha) \right\} \dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_{n-1} + \\ + 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_{n-1} + \dots + \Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-2} \dot{\beta}_{n-1} = 0; \quad (3.2f)$$

здесь и далее $\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.2. Первые интегралы для уравнений в поле с диссипацией. Случай I. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (3.1) порядка $2n$ при выполнении свойств (??), (??), (??), (??), (??), ..., (??). Тогда система (3.1) допускает отделение независимой подсистемы порядка $2n - 1$:

$$\dot{\alpha} = -z_n + b\delta(\alpha), \quad (3.3a)$$

$$\dot{z}_n = F(\alpha) + f^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha)z_{n-1}^2 + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1)z_2^2 + \dots + \\ + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})z_1^2 + z_n F_n^1(\alpha), \quad (3.3b)$$

$$\dot{z}_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha) \right] z_{n-1}z_n - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta_1)z_{n-2}^2 - \dots - \\ - f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})z_1^2 + z_{n-1}F_{n-1}^1(\alpha), \quad (3.3c)$$

$$\dots, \\ \dot{z}_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha) \right] z_2z_n - f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) \right] z_2z_{n-1} - \dots - \\ - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots s(\beta_{n-4}) \left[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3}) \right] z_2z_3 - \\ - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha), \quad (3.3d)$$

$$\dot{z}_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha) \right] z_1z_n - f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) \right] z_1z_{n-1} - \\ - f(\alpha)g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2) \right] z_1z_{n-2} - \dots - \\ - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3}) \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2}) \right] z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha), \quad (3.3e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}f(\alpha), \quad (3.3f)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1), \quad (3.3g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2), \quad (3.3h)$$

$$\dots, \\ \dot{\beta}_{n-2} = z_2f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3}), \quad (3.3i)$$

при наличии также уравнения

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}). \quad (3.4)$$

Замечание 3.1. Будем переходить теперь к интегрированию искомой системы (3.3), (3.4) порядка $2n$ при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha) \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1)g^2(\beta_1) \equiv \dots \equiv \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2}) = \Gamma_n(\alpha). \quad (3.5)$$

Введем также ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять первому дифференциальному равенству из (??), преобразованному в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) = 0. \quad (3.6)$$

При переходе от системы (3.1) к системе (3.3), (3.4) использовалась система дифференциальных равенств (??), а также группа условий (??), (??), (??), (??), \dots , (??). Но нетрудно показать, что из только что всех перечисленных условий вытекают (3.5), (3.6). Но если систему дифференциальных равенств (??) заменить на ее ослабленный вариант — систему дифференциальных равенств (??) — то для проведения дальнейшего анализа нужно требовать выполнение условий (3.5), (3.6).

Далее наложим определенные ограничения на гладкое силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому также предположим, что выполнены (в некотором смысле технические) равенства:

$$F_1^1(\alpha) = \dots = F_{n-1}^1(\alpha) = F^1(\alpha). \quad (3.7)$$

Для полного интегрирования (по Якоби; см. [18, 24, 39, 40]) рассматриваемой системы (3.3), (3.4) при условиях (3.5)–(3.7) необходимо знать, вообще говоря, $2n - 1$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{aligned} w_n = z_n, \quad w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}, \quad w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1}, \\ w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad \dots, \quad w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

система (3.3), (3.4) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_n + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2 + w_n F_n^1(\alpha), \\ \dot{w}_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] w_{n-1}w_n + w_{n-1}F^1(\alpha), \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1})f(\alpha)g(\beta_1) \dots \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \dot{\beta}_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1})f(\alpha)g(\beta_1) \dots, \quad s = 1, \dots, n-2, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \mathcal{Z}_1(w_1, \dots, w_{n-1})f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}), \quad (3.11)$$

где в системе (3.10) символом « \dots » показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций g, h, \dots , зависящая от соответствующего угла β_s ; при этом

$$\mathcal{Z}_k(w_1, \dots, w_{n-1}) \equiv z_k, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

— функции в силу замены (3.8).

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.9)–(3.11) порядка $2n$ достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.9), по одному — для систем (3.10) (меняя в них независимые переменные, количество систем равно $n - 2$) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.11) (т.е. всего $n + 1$ первых интегралов).

Продолжим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторых $\kappa, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_n \in \mathbb{R}$ выполнены группы равенств

$$f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \quad (3.12)$$

а также

$$F(\alpha) = \lambda_0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}, \quad F^1(\alpha) = \lambda_1 \frac{d}{d\alpha} \delta(\alpha), \quad F_n^1(\alpha) = \lambda_n \frac{d}{d\alpha} \delta(\alpha). \quad (3.13)$$

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (3.12) и (3.13). Тогда система (3.9)–(3.11) обладает полным набором независимых (вообще говоря, трансцендентных в смысле комплексного анализа) первых интегралов, количество которых равно $n + 1$.

Условие (3.12) назовем «геометрическим», а условия группы (3.13) — «энергетическими».

Условие (3.12) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_n(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условия группы (3.13) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся в некотором смысле «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\delta^2(\alpha)/2$ (или $\delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\delta(\alpha)$). При этом функция $\delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию (см. также [32, 33, 45, 49]).

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 3.1 для начала сопоставим системе третьего порядка (3.9) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_n}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2 + w_n F_n^1(\alpha)}{-w_n + b\delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} &= \frac{[2\Gamma_1(\alpha) + d \ln |f(\alpha)|/d\alpha]w_{n-1}w_n + w_{n-1}F^1(\alpha)}{-w_n + b\delta(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-1} = u_1\delta(\alpha), \quad w_n = u_2\delta(\alpha), \quad (3.15)$$

приводим систему (3.14) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha)u_2 &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u_1^2 + \delta(\alpha)u_2 F_n^1(\alpha)}{-u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha)u_1 &= \frac{[2\Gamma_1(\alpha) + d \ln |f(\alpha)|/d\alpha]\delta^2(\alpha)u_1u_2 + \delta(\alpha)u_1 F^1(\alpha)}{-u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

что, учитывая (3.6), почти всюду эквивалентно

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} &= \frac{H_n(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_1^2 + u_2 F_n^1(\alpha) + \tilde{\delta}(\alpha)u_2^2 - b\tilde{\delta}(\alpha)u_2}{-u_2 + b}, \\ \delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{-\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_1u_2 + u_1 F^1(\alpha) + \tilde{\delta}(\alpha)u_1u_2 - b\tilde{\delta}(\alpha)u_1}{-u_2 + b}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$H_n(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}, \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}.$$

Теперь для интегрирования системы (3.17) нам потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (3.12) и (3.13). Эти условия можно переписать следующим образом:

(i) для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa \frac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}; \quad (3.18)$$

(ii) для некоторых $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ должны выполняться равенства

$$H_n(\alpha) = \lambda_0 \tilde{\delta}(\alpha), \quad F^1(\alpha) = \lambda_1 \tilde{\delta}(\alpha), \quad F_n^1(\alpha) = \lambda_n \tilde{\delta}(\alpha). \quad (3.19)$$

Действительно, после выполнения условий (3.12) и (3.13) (или (3.18) и (3.19)) система (3.17) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_0 + \kappa u_1^2 + u_2^2 + (\lambda_n - b)u_2}{(1 - \kappa)u_1 u_2 + (\lambda_1 - b)u_1}. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) имеет вид уравнения Абеля (см. [30, 65, 71]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_n$ оно имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (3.21)$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 + (\lambda_1 - b)w_n \delta(\alpha) + \lambda_0 \delta^2(\alpha)}{w_{n-1} \delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (3.22)$$

Замечание 3.2. Если α — периодическая координата периода 2π , то система (3.9) (как часть системы (3.9)–(3.11)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [62, 63, 67]). При выполнении условия (3.6), геометрического и энергетических условий (3.12), (3.13) (но при любой гладкой функции $F(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda_1 = \lambda_n = -b$, $\kappa = -1$ она превращается в консервативную систему:

$$\dot{\alpha} = -w_n + b\delta(\alpha), \quad (3.23a)$$

$$\dot{w}_n = F(\alpha) + \kappa \frac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)} w_{n-1}^2 - b w_n \tilde{\delta}(\alpha), \quad (3.23b)$$

$$\dot{w}_{n-1} = -\kappa \frac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)} w_{n-1} w_n - b w_{n-1} \tilde{\delta}(\alpha). \quad (3.23c)$$

Действительно, система (3.23) обладает двумя гладкими первыми интегралами

$$\Phi_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1}^2 + w_n^2 - 2b w_n \delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad V(\alpha) = 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da, \quad (3.24)$$

$$\Phi_2(w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1} \delta(\alpha) = C_2 = \text{const}. \quad (3.25)$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем

$$\begin{aligned} \Phi_2(w_{n-1}; \alpha) &= w_{n-1} f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} = \\ &= w_{n-1} f(\alpha) \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\Gamma_n(b) f^2(b) + \frac{d \ln |f(b)|}{db} \right] db \right\} \cong w_{n-1} \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_n(b) f^2(b) db \right\}, \end{aligned}$$

где « \cong » означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной.

Теперь в силу (3.12) (или (3.18)) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_n = -b$, перепишется в виде

$$w_{n-1} \exp \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db} \ln |\delta(b)| db \right\} \cong w_{n-1} \delta(\alpha). \quad (3.26)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.24), (3.25) также является первым интегралом системы (3.23). Но при $\lambda_1 = \lambda_n \neq -b$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 + (\lambda_1 - b)w_n \delta(\alpha) + \lambda_0 \delta^2(\alpha) \quad (3.27)$$

и (3.25) по отдельности не является первым интегралом системы (3.9). Однако отношение функций (3.27), (3.25) является первым интегралом системы (3.9) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda_1 = \lambda_n$ и b .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.9) при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_n$. Преобразуем инвариантное соотношение (3.21) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{\lambda_1 - b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2}{4} - \lambda_0. \quad (3.28)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 - 4\lambda_0 \geq 0, \quad (3.29)$$

и фазовое пространство системы (3.9) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.28).

Таким образом, в силу соотношения (3.21) первое уравнение системы (3.17) при условиях (3.12) и (3.13) и при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_n$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda_0 + (\lambda_1 - b)u_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \quad (3.30)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0)} \right\}; \quad (3.31)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.29).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.9) примет вид

$$\int \frac{d\delta(\alpha)}{\delta(\alpha)} = \int \frac{(b - u_2)du_2}{2(\lambda_0 + (\lambda_1 - b)u_2 + u_2^2) - C_1 \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0)} \right\}/2}. \quad (3.32)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln |\delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 + \frac{\lambda_1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 - 4\lambda_0, \quad (3.33)$$

то правая часть равенства (3.32) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = \\ = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \mp \frac{b}{2} I_1, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \quad (3.35)$$

При вычислении интеграла (3.35) возможны три случая.

I. $(\lambda_1 - b)^2 > 4\lambda_0$:

$$\begin{aligned} I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \right| + \text{const.} \end{aligned} \quad (3.36)$$

II. $(\lambda_1 - b)^2 < 4\lambda_0$:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4\lambda_0 - (\lambda_1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.37)$$

III. $(\lambda_1 - b)^2 = 4\lambda_0$:

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.38)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{z_2}{\delta(\alpha)} + \frac{\lambda_1 - b}{2}, \quad (3.39)$$

находим окончательный вид для величины I_1 :

I. $(\lambda_1 - b)^2 > 4\lambda_0$:

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \right| + \text{const.} \quad (3.40)$$

II. $(\lambda_1 - b)^2 < 4\lambda_0$:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4\lambda_0 - (\lambda_1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.41)$$

III. $(\lambda_1 - b)^2 = 4\lambda_0$:

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.42)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.9) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_n$), т.е. предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [30, 34, 62, 75]).

Замечание 3.3. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.21).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const.} \quad (3.43)$$

Выражение первого интеграла (3.43) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией *неэлементарной*).

Таким образом, для интегрирования системы (3.9)–(3.11) порядка $2n$ при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.9). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти по одному первому интегралу для систем (3.10), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимого переменного (число этих систем равно $n - 2$), а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.11).

Первые интегралы для систем (3.10) будут иметь следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n - 2; \quad (3.44)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \dots, n - 2$, см. (??), ..., (??).

В предыдущих переменных z первые интегралы (3.44) будут выглядеть так:

$$\Theta'_3(z_{n-1}, \dots, z_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2} \Psi_1(\beta_1)} = C'_3 = \text{const}, \quad (3.45a)$$

$$\Theta'_4(z_{n-2}, \dots, z_1; \beta_2) = \frac{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2} \Psi_2(\beta_2)} = C'_4 = \text{const}, \quad (3.45b)$$

.....,

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 = & F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}) - f_n(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha) \right] z_1 z_n - \\
& - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) \right] z_1 z_{n-1} - \\
& - f_2(\alpha)g_1(\beta_1) \left[2\Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2) \right] z_1 z_{n-2} - \dots - \\
& - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) \left[2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2}) \right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha),
\end{aligned} \tag{3.47e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{3.47f}$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{3.47g}$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{3.47h}$$

.....,

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}). \tag{3.47i}$$

Система (3.47) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_n^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha) \right] \right\} \dot{\alpha} - F_n(\alpha)f_n^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F_n^1(\alpha) + \\
+ b^2\delta^2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha) \right] + \\
+ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.48a}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\beta}_1 - \left\{ F_{n-1}^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] \right\} \dot{\beta}_1 - F_{n-1}(\beta_1)f_1^2(\alpha) + \\
+ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.48b}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\beta}_2 - \left\{ F_{n-2}^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) \right] \right\} \dot{\beta}_2 - F_{n-2}(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + \\
+ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \\
+ \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.48c}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\beta}_3 - \left\{ F_{n-3}^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha) \right] \right\} \dot{\beta}_3 - F_{n-3}(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h_1^2(\beta_2) + \\
+ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \\
+ \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.48d}$$

.....,

$$\begin{aligned}
\ddot{\beta}_{n-2} - \left\{ F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha) \right] \right\} \dot{\beta}_{n-2} - \\
- F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2) \dots r_1^2(\beta_{n-3}) + \\
+ 2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \dots + \\
+ \Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.48e}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\beta}_{n-1} - \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha) \right] \right\} \dot{\beta}_{n-1} - \\
- F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) + 2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + \\
+ 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \dots + \Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0;
\end{aligned} \tag{3.48f}$$

здесь, как и выше, $\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.4. Первые интегралы для уравнений в поле с диссипацией. Случай II. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (3.47) порядка $2n$ при выполнении свойств (??), (??), (??), (??), (??), ..., (??). При этом для простоты допустим выполнение следующих условий на

(внешнее) гладкое силовое поле:

$$F_1(\beta_{n-1}) \equiv \dots \equiv F_{n-1}(\beta_1) \equiv 0.$$

Тогда система (3.47) допускает отделение независимой подсистемы порядка $2n - 1$:

$$\dot{\alpha} = z_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \tag{3.49a}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n = & F_n(\alpha) f_n(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) z_{n-1}^2 - \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) z_2^2 - \dots - \\ & - \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) z_1^2 + z_n F_n^1(\alpha), \end{aligned} \tag{3.49b}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n-1} = & -f_n(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha) \right] z_{n-1} z_n - f(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta_1) z_{n-2}^2 - \dots - \\ & - f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) z_1^2 + z_{n-1} F_{n-1}^1(\alpha), \end{aligned} \tag{3.49c}$$

.....,

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & -f_n(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha) \right] z_2 z_n - f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) \right] z_2 z_{n-1} - \dots - \\ & - f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots s(\beta_{n-4}) \left[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3}) \right] z_2 z_3 - \\ & - f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \end{aligned} \tag{3.49d}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & -f_n(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha) \right] z_1 z_n - f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) \right] z_1 z_{n-1} - \\ & - f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2) \right] z_1 z_{n-2} - \dots - \\ & - f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3}) \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2}) \right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \end{aligned} \tag{3.49e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1} f(\alpha), \tag{3.49f}$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1), \tag{3.49g}$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \tag{3.49h}$$

.....,

$$\dot{\beta}_{n-2} = z_2 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3}), \tag{3.49i}$$

при наличии также последнего уравнения

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}). \tag{3.50}$$

Замечание 3.4. Будем переходить теперь к интегрированию искомой системы (3.49), (3.50) порядка $2n$ при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha) \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) g^2(\beta_1) \equiv \dots \equiv \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2}) = \Gamma_n(\alpha). \tag{3.51}$$

Введем также ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять первому дифференциальному равенству из (??), преобразованному в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$f_n^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_n(\alpha) = 0. \tag{3.52}$$

При переходе от системы (3.47) к системе (3.49), (3.50) использовалась система дифференциальных равенств (??), а также группа условий (??), (??), (??), (??), ..., (??). Но нетрудно показать, что из только что всех перечисленных условий условия (3.51), (3.52) вытекают. Но если систему дифференциальных равенств (??) заменить на ее ослабленный вариант — систему дифференциальных равенств (??) — то для проведения дальнейшего анализа выполнение условий (3.51), (3.52) нужно требовать.

Далее наложим определенные ограничения на гладкое силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому также предположим, что выполнены (в некотором смысле, технические) равенства:

$$F_1^1(\alpha) = \dots = F_{n-1}^1(\alpha) = F^1(\alpha). \quad (3.53)$$

Для полного интегрирования (по Якоби) рассматриваемой системы (3.49), (3.50) при условиях (3.51)–(3.53) необходимо знать, вообще говоря, $2n - 1$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{aligned} w_n &= z_n, & w_{n-1} &= \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}, & w_{n-2} &= \frac{z_2}{z_1}, \\ w_{n-3} &= \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, & \dots, & & w_1 &= \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}} \end{aligned} \quad (3.54)$$

система (3.49), (3.50) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_n = F_n(\alpha) f_n(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) w_{n-1}^2 + w_n F_n^1(\alpha), \\ \dot{w}_{n-1} = \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) w_{n-1} w_n + w_{n-1} F^1(\alpha), \end{cases} \quad (3.55)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1}) f(\alpha) g(\beta_1) \dots \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \dot{\beta}_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1}) f(\alpha) g(\beta_1) \dots, \quad s = 1, \dots, n-2, \end{cases} \quad (3.56)$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \mathcal{Z}_1(w_1, \dots, w_{n-1}) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}), \quad (3.57)$$

где в системе (3.56) символом «...» показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций g, h, \dots , зависящая от соответствующего угла β_s ; при этом

$$\mathcal{Z}_k(w_1, \dots, w_{n-1}) \equiv z_k, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

— функции в силу замены (3.54).

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.55)–(3.57) порядка $2n$ достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.55), по одному — для систем (3.56) (меняя в них независимые переменные; количество систем равно $n - 2$), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.57) (т.е. всего $n + 1$ первых интегралов).

Продолжим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторых $\kappa, \lambda_n^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n$, выполнены группы равенств

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_n(\alpha)}, \quad (3.58)$$

а также

$$F_n(\alpha) = \lambda_n^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_n(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.59)$$

Здесь, как уже отмечалось, $\lambda_1^1 = \dots = \lambda_{n-1}^1 = \lambda^1$.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия (3.58) и (3.59). Тогда система (3.55)–(3.57) обладает полным набором $n + 1$ независимых (вообще говоря, трансцендентных в смысле комплексного анализа) первых интегралов.

Условие (3.58) назовем «геометрическим», а условия группы (3.59) — «энергетическими». Условие (3.58) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_n(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условия группы (3.59) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы

становятся в некотором смысле «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (*знако*)переменную диссипацию.

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 3.2 для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (3.55) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dw_n}{d\alpha} &= \frac{F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}^2/f_n(\alpha) + w_nF_n^1(\alpha)}{w_nf_n(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} &= \frac{f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}w_n/f_n(\alpha) + w_{n-1}F^1(\alpha)}{w_nf_n(\alpha) + b\delta(\alpha)}.\end{aligned}\quad (3.60)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_n = u_2\Delta(\alpha), \quad w_{n-1} = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_n(\alpha)}, \quad (3.61)$$

приводим систему (3.60) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 &= \frac{F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_n(\alpha) + \Delta(\alpha)F_n^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 &= \frac{f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_n(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)},\end{aligned}\quad (3.62)$$

что, учитывая (3.52), почти всюду эквивалентно

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} &= \frac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)} \left\{ F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_n(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + [\Delta(\alpha)F_n^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_2 \right\}, \\ \Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)} \left\{ [f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\Delta^2(\alpha)/f_n(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1u_2 + \right. \\ &\quad \left. + [\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1 \right\};\end{aligned}\quad (3.63)$$

здесь и далее $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$.

Теперь для интегрирования системы (3.63) нам потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (3.58) и (3.59). Условия (3.58) и (3.59) можно переписать следующим образом:

(i) для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma_n(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}; \quad (3.64)$$

(ii) для некоторых $\lambda_n^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$, должны выполняться равенства

$$F_n(\alpha) = \lambda_n^0\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha), \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1f_n(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.65)$$

Действительно, после выполнения условий (3.58) и (3.59) (или (3.64) и (3.65)) система (3.63) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_n^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_n^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 + (\lambda^1 - b)u_1}. \quad (3.66)$$

Уравнение (3.66) имеет вид уравнения Абеля и его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$ оно имеет первый интеграл

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_n^0}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (3.67)$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \frac{f_n^2(\alpha)(w_n^2 + w_{n-1}^2) + (b - \lambda^1)w_n\delta(\alpha)f_n(\alpha) - \lambda_n^0\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)f_n(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (3.68)$$

Замечание 3.5. Если α — периодическая координата периода 2π , то система (3.55) (как часть системы (3.55)–(3.57)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. При выполнении условия (3.52), геометрического и энергетических условий (3.58), (3.59) (но при любой гладкой функции $F_n(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_n^1 = -b$, $\kappa = -1$ этом она превращается в консервативную систему:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_n &= F_n(\alpha)f_n(\alpha) - \kappa f_n(\alpha)\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_{n-1}^2 - bw_n f_n(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_{n-1} &= \kappa f_n(\alpha)\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_{n-1}w_n - bw_{n-1}f_n(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Действительно, система (3.69) обладает двумя гладкими первыми интегралами

$$\Phi_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1}^2 + w_n^2 + 2bw_n\Delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad V(\alpha) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_n(a)da, \quad (3.70)$$

$$\Phi_2(w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1}\Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}. \quad (3.71)$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_2(w_{n-1}; \alpha) &= w_{n-1}f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db \right\} = \\ &= w_{n-1}f(\alpha) \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\Gamma_n(b)\frac{f^2(b)}{f_n^2(b)} + \frac{d \ln |f(b)|}{db} \right] db \right\} \cong w_{n-1} \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_n(b)\frac{f^2(b)}{f_n^2(b)} db \right\}, \end{aligned}$$

где « \cong » означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной.

Теперь, в силу (3.58) (или (3.64)) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1 = -b$, переписется в виде

$$w_{n-1} \exp \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db} \ln |\delta(b)| db \right\} \cong w_{n-1}\delta(\alpha). \quad (3.72)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.70), (3.71) также является первым интегралом системы (3.69). Но при $\lambda^1 = \lambda_n^1 \neq -b$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 + (b - \lambda^1)w_n\Delta(\alpha) - \lambda_n^0\Delta^2(\alpha) \quad (3.73)$$

и (3.71) по отдельности не является первым интегралом системы (3.55). Однако отношение функций (3.73), (3.71) является первым интегралом системы (3.55) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_n^1$ и b .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.55) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$. Преобразуем инвариантное соотношение (3.67) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2} \right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_n^0. \quad (3.74)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_n^0 \geq 0, \quad (3.75)$$

и фазовое пространство системы (3.55) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.74).

Таким образом, в силу соотношения (3.67) первое уравнение системы (3.63) при условиях (3.58) и (3.59) и при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda_n^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 U_1(C_1, u_2)}{u_2 + b}, \quad (3.76)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_n^0)} \right\}, \quad (3.77)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.75). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.55) примет вид

$$-\int \frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} = \int \frac{(b + u_2) du_2}{2(\lambda_n^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 \left\{ -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_n^0)} \right\} / 2}. \quad (3.78)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln |\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 - \frac{\lambda^1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_n^0, \quad (3.79)$$

то правая часть равенства (3.78) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = \\ = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \mp \frac{b}{2} I_1, \end{aligned} \quad (3.80)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \quad (3.81)$$

При вычислении интеграла (3.81) возможны три случая.

I. $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_n^0$:

$$\begin{aligned} I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \right| + \text{const}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

II. $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_n^0$:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_n^0 - (\lambda^1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \quad (3.83)$$

III. $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_n^0$:

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \quad (3.84)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)} - \frac{\lambda^1 - b}{2}, \quad (3.85)$$

получаем следующие окончательные формулы для величины I_1 .

I. $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_n^0$:

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \right| + \text{const.} \quad (3.86)$$

II. $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_n^0$:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_n^0 - (\lambda^1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.87)$$

III. $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_n^0$:

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.88)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.55) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 3.6. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.67). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (3.89)$$

Выражение первого интеграла (3.89) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией *неэлементарной*).

Таким образом, для интегрирования системы (3.55)–(3.57) порядка $2n$ при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.55). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти по одному первому интегралу — для систем (3.56) (меняя в них независимые переменные; количество этих систем равно $n - 2$), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.57).

Первые интегралы для систем (3.56) будут иметь следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n - 2, \quad (3.90)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \dots, n - 2$, см. (??), ..., (??).

В предыдущих переменных z первые интегралы (3.90) будут иметь вид

$$\Theta'_3(z_{n-1}, \dots, z_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2} \Psi_1(\beta_1)} = C'_3 = \text{const}, \quad (3.91a)$$

$$\Theta'_4(z_{n-2}, \dots, z_1; \beta_2) = \frac{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2} \Psi_2(\beta_2)} = C'_4 = \text{const}, \quad (3.91b)$$

.....

$$\Theta'_n(z_2, z_1; \beta_{n-2}) = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \Psi_{n-2}(\beta_{n-2})} = C'_n = \text{const.} \quad (3.91c)$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.57), находится по аналогии с (??):

$$\Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db = C_{n+1} = \text{const}, \quad (3.92)$$

где после взятия интеграла вместо постоянных C_{n-1} , C_n можно формально подставить левые части равенств (3.90) (или (3.91)) при $s = n - 3$ и $s = n - 2$ соответственно.

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.55)–(3.57) имеет $n + 1$ первых интегралов, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа).

Можно считать, что теорема 3.2 доказана. \square

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как известно, понятию интегрируемости придают различные значения в соответствии с тем, в каких функциях производится интегрирование (аналитических, гладких, мероморфных и др.), каким образом понимается смысл интегрируемости (см. [16, 63, 67]). В данной работе обсуждается вопрос интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классе трансцендентных функций, т.е. функций, которые после продолжения в комплексную область имеют существенно особые точки. Понятие интегрируемости в классе трансцендентных функций возникает по причине наличия у системы асимптотических (или притягивающих, или отталкивающих) предельных множеств, т.е. множеств размерности $d \geq 1$, или притягивающих, или отталкивающих некоторые области фазового пространства.

Более того, если разрыв трансцендентных интегралов происходит на асимптотических предельных множествах, размерностей $d \geq 1$, то удастся выяснить наличие в системе, например, предельных циклов. И хотя в последнем случае трансцендентный первый интеграл, как правило, не выражается через элементарные функции, он имеет многообразие неизолированных существенно особых точек.

В работе проанализированы как уже известные ранее работы автора, так и полученные впервые случаи интегрируемости систем с диссипацией разного знака на касательном расслоении к n -мерному гладкому многообразию, являющемуся пространством положений (конфигурационным пространством) рассматриваемой динамической системы. При этом в работе только что был применен следующий подход. Мы начинаем рассмотрение систем, в которых отсутствует какое-либо («внешнее» или «внутреннее») силовое поле (т.е. мы изучаем по сути дела геодезические потоки). В дальнейшем мы переходим к системам, в которых уже присутствует внешнее силовое поле, но только консервативное. В результате же дальнейшего анализа мы проводим исследование систем, в которых появляется внешнее неконсервативное силовое поле, обладающее диссипацией, причем разных знаков (так называемая (знако)переменная диссипация).

В следующих работах автора будут получены результаты по вопросам существования не просто полного набора первых интегралов (тензоров ранга 0), но и существования полного набора тензорных инвариантов (в частности, дифференциальных форм) ранга, большего 0. Более того, в данном случае в многомерных системах будет присутствовать силовое поле существенно неконсервативное, в отличие от монографий автора [18, 73].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // Докл. АН СССР. — 1983. — 272, № 6. — С. 1364–1367.
2. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 5. — С. 1105–1108.
3. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.

5. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
6. Веселов А. П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$ // Докл. АН СССР. — 1983. — 270, № 6. — С. 1298–1300.
7. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
8. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
9. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в \mathbb{R}^n // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
10. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — 76. — С. 22–39.
11. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
12. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы теории колебаний. — М.: Наука, 1988.
15. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
16. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
17. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
18. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
19. Ложкин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — 100. — С. 76–133.
20. Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела// Функциональный анализ. — 1976. — 10, № 4. — С. 93–94.
21. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
22. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
23. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
24. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. Тихонов А. А. Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
27. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
28. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундаментальная прикладная математика. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
29. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — 1. — С. 52–58.

32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — 57, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — 4. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbf{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле// Докл. РАН. — 2015. — 460, № 2. — С. 165–169.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
54. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
55. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
56. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2016. — 470, № 3. — С. 288–292.

57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
63. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
70. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
71. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
72. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
73. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
74. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — 1959. — 080001.
75. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
76. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — 13, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 153–171
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-153-171

УДК 512.7

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ, КВАНТОВАНИЕ
И ЗАДАЧИ ВОКРУГ ГИПОТЕЗЫ ЯКОБИАНА.
IV. АППРОКСИМАЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ
СИМПЛЕКТОМОРФИЗМАМИ

© 2022 г. А. М. ЕЛИШЕВ, А. Я. КАНЕЛЬ-БЕЛОВ,
Ф. РАЗАВИНИЯ, Ц.-Т. ЮЙ, В. ЧЖАН

Посвящается памяти Евгения Соломоновича Голода

Аннотация. Работа является четвертой частью обзора результатов, касающихся квантового подхода к некоторым классическим аспектам некоммутативных алгебр. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — 213. — С. 110–144. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — 214. — С. 107–126. Третья часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — 215. — С. 95–128. Окончание будет опубликовано в следующем выпуске.

Ключевые слова: автоморфизм, квантование, гипотеза о Якобиане.

POLYNOMIAL AUTOMORPHISMS, QUANTIZATION,
AND JACOBIAN CONJECTURE RELATED PROBLEMS.
IV. APPROXIMATIONS BY POLYNOMIAL SYMPLECTOMORPHISMS

© 2022 A. M. ELISHEV, A. Ya. KANEL-BELOV,
F. RAZAVINIA, J.-T. YU, W. ZHANG

ABSTRACT. This paper is the fourth part of a review of results concerning the quantization approach to the some classical aspects of noncommutative algebras. The first part is: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **213** (2022), pp. 110–144. The second part is: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **214** (2022), pp. 107–126. The third part is: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **215** (2022), pp. 95–128. The final part of the survey will be published in the next issue.

Keywords and phrases: automorphism, quantization, Jacobian conjecture.

AMS Subject Classification: 14R10, 18G85

CONTENTS

Chapter 4. Approximations by Polynomial Symplectomorphisms 154
 4.1. Endomorphisms of $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $W_n(\mathbb{K})$ and $P_n(\mathbb{K})$ 156
 4.2. Approximation by Tame Automorphisms 158
 4.3. Approximation by Tame Symplectomorphisms and Lifting to Weyl Algebra 161
 4.4. Conclusion 163
 References 163

CHAPTER 4

APPROXIMATIONS BY POLYNOMIAL SYMPLECTOMORPHISMS

One of the active research areas in ring theory concerns the geometry of polynomial endomorphisms – that is, endomorphisms of finitely generated associative algebras (typically over a field \mathbb{K}) subject to a set of polynomial identities and possibly carrying other structures. Arguably, the most renowned – and notoriously difficult – open problems in this area is the Jacobian conjecture of Keller [202], open for all $N \geq 2$:

Conjecture 4.1. If \mathbb{K} is a field of characteristic zero and $\varphi : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^N \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^N$ is a polynomial mapping of the affine space of dimension N with unit Jacobian:

$$J(\varphi) = \det \left[\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j} \right] = 1$$

then φ is invertible (and the inverse is also a polynomial mapping).

Tsuchimoto [190,191], and independently Kanel-Belov and Kontsevich [42], found a deep connection between the Jacobian conjecture and a celebrated conjecture of Dixmier [75] on endomorphisms of the Weyl algebra, which is stated as follows:

Conjecture 4.2. Any endomorphism ϕ of the n -th Weyl algebra $W_n(\mathbb{K})$ in characteristic zero is invertible.

The correspondence between the two open problems, in the case of algebraically closed \mathbb{K} , is based on the existence of a composition-preserving map

$$\text{End } W_n(\mathbb{K}) \rightarrow \text{End } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{2n}]$$

which is a homomorphism for the corresponding automorphism groups. Furthermore, the mappings that belong to the image of this homomorphism preserve the standard symplectic form on the $2n$ -dimensional affine space $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{2n}$. In accordance with this, Kontsevich and Kanel-Belov [41] formulated several conjectures on correspondence between automorphisms of the Weyl algebra W_n and the Poisson algebra P_n (which is the polynomial algebra $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_{2n}]$ endowed with the standard Poisson bracket) in characteristic zero. In particular, there is the following conjecture.

Conjecture 4.3. The automorphism groups of the n -th Weyl algebra and the polynomial algebra in $2n$ variables with Poisson structure over the rational numbers are isomorphic:

$$\text{Aut } W_n(\mathbb{Q}) \simeq \text{Aut } P_n(\mathbb{Q})$$

Relatively little is known about the case $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, and the proof techniques developed in [41] rely heavily on model-theoretic objects such as infinite prime numbers (in the sense of non-standard analysis); that in turn requires the base field \mathbb{K} to be of characteristic zero and algebraically closed (effectively \mathbb{C} by the Lefschetz principle). However, even the seemingly easier analogue of the above conjecture, the case $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, is known (and positive) only for $n = 1$.

In the case $n = 1$, the affirmative answer to the Kontsevich conjecture, as well as positivity of several isomorphism statements for algebras of similar nature, relies on the fact that all automorphisms of the algebras in question are tame (see definition below). Groups of tame automorphisms are rather interesting objects. Anick [8] has proved that the group of tame automorphisms of $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ is dense (in power series topology) in the subspace of all endomorphisms with non-zero constant Jacobian. This fundamental result enables one to reformulate the Jacobian conjecture as a statement on invertibility of limits of tame automorphism sequences.

Another interesting problem is to ask whether all automorphisms of a given algebra are tame [66, 103, 183, 184, 203]. For instance, it is the case [141, 145] for $\mathbb{K}[x, y]$, the free associative algebra $\mathbb{K}\langle x, y \rangle$ and the free Poisson algebra $\mathbb{K}\{x, y\}$. It is also the case for free Lie algebras (a result of P. M. Cohn). On the other hand, tameness is no longer the case for $\mathbb{K}[x, y, z]$ (the wild automorphism example is provided by the well-known Nagata automorphism, cf. [148, 181]).

Anick's approximation theorem was established for polynomial automorphisms in 1983. We obtain the approximation theorems for polynomial symplectomorphisms and Weyl algebra automorphisms. These new cases are established after more than 30 years. The focus of this paper is *the problem of lifting of symplectomorphisms*:

– can an arbitrary symplectomorphism in dimension $2n$ be lifted to an automorphism of the n -th Weyl algebra in characteristic zero?

The lifting problem is the milestone in the Kontsevich conjecture. The use of tame approximation is advantageous due to the fact that tame symplectomorphisms correspond to Weyl algebra automorphisms: in fact [41], the tame automorphism subgroups are isomorphic when $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

The problems formulated above, as well as other statements of similar flavor, outline behavior of algebro-geometric objects when subject to quantization. Conversely, quantization (and anti-quantization in the sense of Tsuchimoto) provides a new perspective for the study of various properties of classical objects; many of such properties are of distinctly K-theoretic nature. The lifting problem is a subject of a thorough study of Artamonov [9–12], one of the main results of which is the proof of an analogue of the Serre – Quillen – Suslin theorem for metabelian algebras. The possibility of lifting of (commutative) polynomial automorphisms to automorphisms of metabelian algebra is a well-known result of Umirbaev, cf. [197]; the metabelian lifting property was instrumental in Umirbaev's resolution of the Anick's conjecture (which says that a specific automorphism of the free algebra $\mathbb{K}\langle x, y, z \rangle$, $\text{char } \mathbb{K} = 0$ is wild). Related to that also is a series of well-known papers [181–184].

An interesting and in a sense essential generalization of this line of inquiry is obtained by taking it to the realm of quantum algebra. Indeed, the algebraic and K-theoretic language of quantization can be extended naturally to account for the relevant non-commutative geometry. Accordingly, the vast majority of problems formulated above may also be posed in the quantum algebraic context. Automorphism groups of algebras of quantum polynomials were the subject of an investigation of Artamonov [13, 14]. Such algebras provide a generalization of the Weyl algebra, and it is a question of legitimate interest whether the topology of the corresponding automorphism group allows for approximation theorems analogous to the ones discussed in the present paper.

We establish the approximation property for polynomial symplectomorphisms and comment on the lifting problem of polynomial symplectomorphisms and Weyl algebra automorphisms. In particular, the main results discussed here are as follows.

Main Theorem 1. *Let $\varphi = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N))$ be an automorphism of the polynomial algebra $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ over a field \mathbb{K} of characteristic zero, such that its Jacobian is equal to 1. Then there exists a sequence $\{\psi_k\} \subset \text{TAut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ of tame automorphisms which converges to φ in formal power series topology.*

Anick [8] proved the tame approximation theorem for polynomial automorphisms. We present a slightly modified elementary proof of Anick's theorem, which is then adapted to the problem of approximation by polynomial symplectomorphisms. That in turn allows us to attack the problem of

approximating Weyl algebra automorphisms – as tame symplectomorphisms have (unique) preimages under the Kanel-Belov – Kontsevich homomorphism [41].

Main Theorem 2. *Let $\sigma = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n), \sigma(p_1), \dots, \sigma(p_n))$ be a symplectomorphism of $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n]$ with unit Jacobian. Then there exists a sequence $\{\tau_k\} \subset \text{TAut } P_n(\mathbb{K})$ of tame symplectomorphisms which converges to σ in formal power series topology.*

Main Theorem 3. *Let $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ and let $\sigma : P_n(\mathbb{C}) \rightarrow P_n(\mathbb{C})$ be a symplectomorphism over complex numbers. Then there exists a sequence*

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots$$

of tame automorphisms of the n -th Weyl algebra $W_n(\mathbb{C})$, such that their images σ_k in $\text{Aut } P_n(\mathbb{C})$ converge to σ .

The last theorem is of main concern to us. As we shall see, sequences of tame symplectomorphisms lifted to automorphisms of Weyl algebra (either by means of the isomorphism of [41], or explicitly through deformation quantization $P_n(\mathbb{C}) \rightarrow P_n(\mathbb{C})[[\hbar]]$) are such that their limits may be thought of as power series in Weyl algebra generators. If we could establish that those power series were actually polynomials, then the Dixmier conjecture would imply the Kontsevich’s conjecture (with \mathbb{Q} replaced by \mathbb{C}). Conversely, approximation by tame automorphisms provides a possible means to attack the Dixmier conjecture (and, correspondingly, the Jacobian conjecture).

Another important detail of approximation by tame automorphisms is its natural behavior with respect to the \mathfrak{m} -adic topology on local rings of automorphism varieties. This is formalized in the following two results.

Main Theorem 4. *Let φ be a polynomial automorphism and let \mathcal{O}_φ be the local ring of $\text{Aut } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ with its maximal ideal \mathfrak{m} . If $\{\psi_k\}$ is a tame sequence which converges to φ in power series topology, then the coordinates of ψ_k converge to coordinates of φ in \mathfrak{m} -adic topology.*

Main Theorem 5. *Let σ be a symplectomorphism and let \mathcal{O}_σ be the local ring of $\text{Aut } P_n(\mathbb{C})$ with its maximal ideal \mathfrak{m} . If $\{\sigma_k\}$ is a tame sequence which converges to σ in power series topology, then the coordinates of σ_k converge to coordinates of σ in \mathfrak{m} -adic topology.*

The present paper serves as a continuation and expansion of our previous study of quantization [120].

4.1. ENDOMORPHISMS OF $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $W_n(\mathbb{K})$ AND $P_n(\mathbb{K})$

4.1.1. Definitions and notation. The n -th Weyl algebra $W_n(\mathbb{K})$ over \mathbb{K} is by definition the quotient of the free associative algebra

$$\mathbb{K}\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \rangle$$

by the two-sided ideal generated by elements

$$b_i a_j - a_j b_i - \delta_{ij}, \quad a_i a_j - a_j a_i, \quad b_i b_j - b_j b_i,$$

with $1 \leq i, j \leq n$. One can think of $W_n(\mathbb{K})$ as the algebra

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$$

with two sets of n mutually commuting generators (images of the free generators under the canonical projection) which interact according to $[y_i, x_j] = y_i x_j - x_j y_i = \delta_{ij}$; henceforth we denote the Weyl algebra by $W_n(\mathbb{K})$ in order to avoid confusion with $\mathbb{K}[X]$ – notation reserved for the ring of polynomials in commuting variables.

The polynomial algebra $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ itself is the quotient of the free associative algebra by the congruence that makes all its generators commutative. When the number N of generators is even, the algebra $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_{2n}]$ carries an additional structure of the Poisson algebra – namely, a bilinear map

$$\{ , \} : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{2n}] \otimes \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{2n}] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{2n}]$$

that turns $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_{2n}]$ into a Lie algebra and acts as a derivation with respect to polynomial multiplication. Under a fixed choice of generators, this map is given by the standard Poisson bracket

$$\{x_i, x_j\} = \delta_{i,n+j} - \delta_{i+n,j}.$$

We denote the pair $(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_{2n}], \{, \})$ by $P_n(\mathbb{K})$. In our discussion the coefficient ring \mathbb{K} is a field of characteristic zero, and for later purposes (Proposition 4.3) we require \mathbb{K} to be algebraically closed. Thus one may safely assume $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in the sequel.

Throughout we assume all homomorphisms to be unital and preserving all defining structures carried by the objects in question. Thus, by a Weyl algebra endomorphism we always mean a \mathbb{K} -linear ring homomorphism $W_n(\mathbb{K})$ into itself that maps 1 to 1. Similarly, the set $\text{End } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ consists of all \mathbb{K} -endomorphisms of the polynomial algebra, while $\text{End } P_n$ is the set of polynomial endomorphisms preserving the Poisson structure. We will call elements of the group $\text{Aut } P_n$ *polynomial symplectomorphisms*, due to the fact that they can be identified with polynomial one-to-one mappings $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{2n} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{2n}$ of the affine space $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{2n}$ which preserve the symplectic form

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dx_i.$$

Any endomorphism φ of $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$, $P_n(\mathbb{K})$ or $W_n(\mathbb{K})$ can be identified with the ordered set

$$(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots)$$

of images of generators of the corresponding algebra. For $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ and $P_n(\mathbb{K})$, the polynomials $\varphi(x_i)$ can be decomposed into sums of homogeneous components; this means that the endomorphism φ may be written as a formal sum

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots,$$

where φ_k is a string (of length N and $2n$, respectively) whose entries are homogeneous polynomials of total degree k .¹ Accordingly, the height $\text{ht}(\varphi)$ of the endomorphism is defined as

$$\text{ht}(\varphi) = \inf\{k \mid \varphi_k \neq 0\}, \quad \text{ht}(0) = \infty.$$

This is not to be confused with the degree of endomorphism, which is defined as $\text{deg}(\varphi) = \sup\{k \mid \varphi_k \neq 0\}$.² The height $\text{ht}(f)$ of a polynomial f is defined quite similarly to be the minimal number k such that the homogeneous component f_k is not zero. Evidently, for an endomorphism $\varphi = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N))$ one has

$$\text{ht}(\varphi) = \inf\{\text{ht}(\varphi(x_i)) \mid 1 \leq i \leq N\}.$$

The function

$$d(\varphi, \psi) = \exp(-\text{ht}(\varphi - \psi))$$

is a metric on $\text{End } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$. We will refer to the corresponding topology on End (and on subspaces such as Aut and TAut) as the formal power series topology.

4.1.2. Tame automorphisms. We call an automorphism $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ *elementary* if it is of the form

$$\varphi = (x_1, \dots, x_{k-1}, ax_k + f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N), x_{k+1}, \dots, x_N)$$

with $a \in \mathbb{K}^\times$. Observe that linear invertible changes of variables – that is, transformations of the form

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_1, \dots, x_N)A, \quad A \in \text{GL}(N, \mathbb{K})$$

are realized as compositions of elementary automorphisms.

The subgroup of $\text{Aut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ generated by all elementary automorphisms is the group $\text{TAut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ of so-called *tame automorphisms*.

¹We set $\text{deg } x_i = 1$.

²For W_n the degree is well defined, but the height depends on the ordering of the generators.

Let $P_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n]$ be the polynomial algebra in $2n$ variables with Poisson structure. It is clear that for an elementary $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n]$ to be a symplectomorphism, it must be either a linear symplectic change of variables – that is, a transformation of the form

$$(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)A$$

with $A \in \text{Sp}(2n, \mathbb{K})$ a symplectic matrix, or an elementary transformation of one of two following types:

$$(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + f(p_1, \dots, p_n), x_{k+1}, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$$

and

$$(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k + g(x_1, \dots, x_n), p_{k+1}, \dots, p_n).$$

Note that in both cases we do not include translations of the affine space into our consideration, so we may safely assume the polynomials f and g to be at least of height one.

The subgroup of $\text{Aut } P_n(\mathbb{K})$ generated by all such automorphisms is the group $\text{TAut } P_n(\mathbb{K})$ of *tame symplectomorphisms*. One similarly defines the notion of tameness for the Weyl algebra $W_n(\mathbb{K})$, with tame elementary automorphisms having the exact same form as for $P_n(\mathbb{K})$.

The automorphisms which are not tame are called *wild*. It is unknown at the time of writing whether the algebras W_n and P_n have any wild automorphisms in characteristic zero for $n > 1$, however for $n = 1$ all automorphisms are known to be tame [103, 141, 142, 203]. On the other hand, the celebrated example of Nagata

$$(x + (x^2 - yz)x, y + 2(x^2 - yz)x + (x^2 - yz)^2z, z)$$

provides a wild automorphism of the polynomial algebra $\mathbb{K}[x, y, z]$.

It is known due to Kanel-Belov and Kontsevich [41, 42] that for $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ the groups

$$\text{TAut } W_n(\mathbb{C}) \text{ and } \text{TAut } P_n(\mathbb{C})$$

are isomorphic. The homomorphism between the tame subgroups is obtained by means of non-standard analysis and involves certain non-constructible entities, such as free ultrafilters and infinite prime numbers. Recent effort [114, 115] has been directed to proving the homomorphism’s independence of such auxiliary objects, with limited success.

4.2. APPROXIMATION BY TAME AUTOMORPHISMS

Let $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ be a polynomial automorphism. We say that φ is approximated by tame automorphisms if there is a sequence

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots$$

of tame automorphisms such that

$$\text{ht}((\psi_k^{-1} \circ \varphi)(x_i) - x_i) \geq k$$

for $1 \leq i \leq N$ and all k sufficiently large. Observe that any tame automorphism ψ is approximated by itself – that is, by a stationary sequence $\psi_k = \psi$.

This and the next section are dedicated to the proof of the first two main results stated in the introduction, which we reproduce here.

Theorem 4.2.1. *Let $\varphi = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N))$ be an automorphism of the polynomial algebra $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ over a field \mathbb{K} of characteristic zero, such that its Jacobian*

$$J(\varphi) = \det \left[\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j} \right]$$

is equal to 1. Then there exists a sequence $\{\psi_k\} \subset \text{TAut } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ of tame automorphisms approximating φ .

Theorem 4.2.2. *Let $\sigma = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n), \sigma(p_1), \dots, \sigma(p_n))$ be a symplectomorphism of $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n]$ with unit Jacobian. Then there exists a sequence $\{\tau_k\} \subset \text{TAut } P_n(\mathbb{K})$ of tame symplectomorphisms approximating σ .*

Theorem 3.1 is a special case of a classical result of Anick [8] (Anick proved approximation for all étale maps, not just automorphisms). We give here a slightly simplified proof suitable for our context. The second theorem first appeared in Grigoriev’s graduation work “Lifting of polynomial automorphisms and Gelfand–Kirillov dimension” and is essential in our approach to the lifting problem in deformation quantization.

The proof of Theorem 3.1 consists of several steps each of which amounts to composing a given automorphism φ with a tame transformation of a specific type – an operation which allows one to dispose in $\varphi(x_i)$ ($1 \leq i \leq N$) of monomial terms of a given total degree, assuming that the lower degree terms have already been dealt with. Thus the approximating sequence of tame automorphisms is constructed by induction. As it was mentioned before, we disregard translation automorphisms completely: all automorphisms discussed here are origin-preserving, so that the polynomials $\varphi(x_i)$ have zero free part. This of course leads to no loss of generality.

The process starts with the following straightforward observation.

Lemma 4.2.3. *There is a linear transformation $A \in \text{GL}(N, \mathbb{K})$*

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_1, \dots, x_N)A$$

such that its composition φ_A with φ fulfills

$$\text{ht}(\varphi_A(x_i) - x_i) \geq 2$$

for all $i \in \{1, \dots, N\}$.

Proof. Consider

$$A_1 = \left[\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j} \right] (0, \dots, 0)$$

– the linear part of φ . Its determinant is equal to the value of $J(\varphi)$ at zero, and $J(\varphi)$ is a non-zero constant. Composing φ with the linear change of variables induced by A_1^{-1} (on the left) results in an automorphism φ_A that is identity modulo $O(x^2)$. \square

Using the above lemma, we may replace φ with φ_A (and suppress the A subscript for convenience), thus considering automorphisms which are close to the identity in the formal power series topology.

The next lemma justifies the inductive step: suppose we have managed, by tame left action, to eliminate the terms of degree $2, \dots, k-1$, then there is a sequence of elementary automorphisms such that their left action eliminates the term of degree k . This statement translates into the following lemma.

Lemma 4.2.4. *Let φ be a polynomial automorphism such that*

$$\varphi(x_1) = x_1 + f_1(x_1, \dots, x_n) + r_1, \dots, \varphi(x_n) = x_n + f_n(x_1, \dots, x_n) + r_n$$

and f_i are homogeneous of degree k and r_i are the remaining terms (thus $\text{ht}(r_i) > k$). Then one can find a sequence $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ of tame automorphisms whose composition with φ is given by

$$\sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \varphi : x_1 \mapsto x_1 + F_1(x_1, \dots, x_n) + R_1, \dots, x_n \mapsto x_n + F_n(x_1, \dots, x_n) + R_n$$

with F_i homogeneous of degree $k+1$ and $\text{ht}(R_i) > k+1$.

Proof. We will first show how to get rid of degree k monomials in the images of all but one generator and then argue that the remaining image is rectified by an elementary automorphism. Let $N \leq n$ be the number of images $\varphi(x_i)$ such that $f_i \neq 0$, and let x_1 and x_2 be two generators¹ corresponding to non-zero term of degree k . The image of x_1 admits the following presentation as an element of the polynomial ring $\mathbb{K}[x_3, \dots, x_n][x_1, x_2]$:

$$\varphi(x_1) = x_1 + \sum_d \sum_{p+q=d} \lambda_{p,q} x_1^p x_2^q + r_i$$

¹Evidently, no loss of generality results from such explicit labelling.

where the coefficients $\lambda_{p,q}$ are polynomials of the remaining variables (thus the double sum above is just a way to express f_1 as a polynomial in x_1 and x_2 with coefficients given by polynomials in the rest of the variables).

Consider the transformation $\Phi_{\lambda\mu}$ of the following form

$$x_1 \mapsto x_1 - \lambda(x_1 + \mu x_2)^d, \quad x_2 \mapsto x_2 - \lambda\mu^{-1}(x_1 + \mu x_2)^d, \quad x_3 \mapsto x_3, \quad \dots, \quad x_n \mapsto x_n,$$

with $\lambda \in \mathbb{K}[x_3, \dots, x_n]$ and $\mu \in \mathbb{K}$. This mapping is equal to the composition $\psi_\mu \circ \phi_{\lambda\mu} \circ \psi_\mu^{-1}$ with

$$\psi_\mu : x_1 \mapsto x_1 + \mu x_2, \quad x_2 \mapsto x_2$$

and

$$\phi_{\lambda\mu} : x_1 \mapsto x_1, \quad x_2 \mapsto x_2 + \lambda\mu^{-1}x_1^d$$

and so is a tame automorphism. As the ground field \mathbb{K} has characteristic zero, it is infinite, so that we can find numbers $\mu_1, \dots, \mu_{l(d)}$ such that the polynomials

$$(x + \mu_1 y)^d, \dots, (x + \mu_{l(d)} y)^d$$

form a basis of the \mathbb{K} -module of homogeneous polynomials in x and y of degree d (this is an easy exercise in linear algebra). Therefore, by selecting $\Phi_{\lambda\mu}$ with appropriate polynomials $\lambda_{p,q}$ and μ_i corresponding to the basis, we eliminate, by acting with $\Phi_{\lambda\mu}$ on the left, the degree d terms in the double sum. Iterating for all d , we dispose of f_1 entirely.

The above procedure yields a new automorphism $\tilde{\varphi}$ which is a composition of the initial automorphism φ with a tame automorphism. The number \tilde{N} of images of x_i under $\tilde{\varphi}$ with non-zero term of degree k equals $N - 1$; therefore, the procedure can be repeated a finite number of times to give an automorphism φ_1 , such that the image under φ_1 of only one generator contains a non-zero term of degree k . Let

$$\varphi_1(x_n) = x_n + g_n(x_1, \dots, x_n) + \tilde{r}_n$$

be the image of that generator (again, no loss of generality results from us having labelled it x_n). We claim now that the polynomial g_n does not depend on x_n .

Indeed, otherwise the Jacobian of φ_1 (which must be a constant and is in fact equal to 1 in our setting) would have a degree $k - 1$ component given by

$$\partial_{x_n} g_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

(remember that by construction $g_1 = \dots = g_{n-1} = 0$), which yields a contradiction. Note that another way of looking at this condition is that if a polynomial mapping of the form

$$x_1 \mapsto x_1 + H_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad x_n \mapsto x_n + H_n(x_1, \dots, x_n), \quad \text{ht}(H_i) > 1$$

is an automorphism, the higher-degree part (H_1, \dots, H_n) must have traceless Jacobian:

$$\text{tr} \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right) = 0.$$

Finally, since g_n does not contain x_n , an elementary automorphism

$$x_1 \mapsto x_1, \quad \dots, \quad x_{n-1} \mapsto x_{n-1}, \quad x_n \mapsto x_n - g_n(x_1, \dots, x_n)$$

eliminates this term. The lemma is proved. □

The last lemma concludes the proof of Theorem 3.1 by induction. The proof of the inductive step is essentially a statement that a certain vector space invariant under a linear group action is, in a manner of speaking, big enough to allow for elimination by elements of the group. More precisely, let $T_{n,k}(\mathbb{K})$ be the vector space of all *traceless* n by n matrices whose entries are homogeneous of degree k polynomials from $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, and let the group $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ act on $T_{n,k}$ as follows: for $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ and $v \in T_{n,k}$, the image $A(v)$ is obtained by taking the product matrix vA^{-1} and then performing (entry-wise in vA^{-1}) the linear change of variables induced by A . Then one has the following

Proposition 4.2.5. *If $V \subset T_{n,k}(\mathbb{K})$ is a \mathbb{K} -submodule invariant under the defined above action of $\text{GL}(n, \mathbb{K})$, then either $V = 0$ or $V = T_{n,k}(\mathbb{K})$.*

Properties of similar nature played an important role in [118, 119]. The invariance under linear group action will become somewhat more pronounced in the symplectomorphism case.

4.3. APPROXIMATION BY TAME SYMPLECTOMORPHISMS AND LIFTING TO WEYL ALGEBRA

We turn to the proof of the more relevant to our context Theorem 3.2. The strategy is analogous to the proof of approximation for polynomial automorphisms with unit Jacobian, with a few more elaborate details which we now consider.

The first step of the proof copies the polynomial automorphism case and takes the following form.

Lemma 4.3.1. *There is a linear transformation $A \in \text{Sp}(2n, \mathbb{K})$*

$$(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)A$$

such that its composition σ_A with σ fulfills

$$\text{ht}(\sigma_A(x_i) - x_i) \geq 2, \quad \text{ht}(\sigma_A(p_i) - p_i) \geq 2$$

for all $i \in \{1, \dots, n\}$.

We now proceed to formulate the inductive step in the proof as the following main lemma.

Lemma 4.3.2. *Let σ be a polynomial symplectomorphism such that*

$$\sigma(x_i) = x_i + U_i, \quad \sigma(p_i) = p_i + V_i$$

and U_i and V_i are of height at least k . Then there exists a tame symplectomorphism σ_k such that the polynomials $\tilde{U}_i = (\sigma_k^{-1} \circ \sigma)(x_i) - x_i$ and $\tilde{V}_i = (\sigma_k^{-1} \circ \sigma)(p_i) - p_i$ are of height at least $k + 1$.

Proof. In order to establish the inductive step, we are going to need the following lemma.

Lemma 4.3.3. *Suppose \mathbb{K} is an infinite field, $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n]$ is the polynomial algebra with standard \mathbb{Z} -grading according to the total degree*

$$A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d, \quad A_d = \{\text{homogeneous polynomials of total degree } d\}.$$

Let V be a \mathbb{K} -submodule of A invariant under the action of $\text{Sp}(2n, \mathbb{K})$ (given by linear symplectic changes of variables). Suppose V is contained in a given homogeneous component A_d . If $V \neq 0$ then $V = A_d$.

Proof. We first observe that if $f = \sum_l f_l$ is a non-zero polynomial given by the sum of degree d monomials in x_i, p_j , then $f \in V$ implies $f_l \in V$ for all l . Indeed, consider a linear symplectomorphism Λ of the form

$$x_i \mapsto \lambda_i x_i, \quad p_i \mapsto \lambda_i^{-1} p_i, \quad \lambda_i \neq 0.$$

Then $f \mapsto \sum_l \prod_{i=1}^n \lambda_i^{k_{li}} f_l \in V$. As the ground field \mathbb{K} is infinite and f_l are linearly independent, we can take sufficiently many automorphisms of the form Λ in order to produce a basis $\{\Lambda_1 f, \dots, \Lambda_N f\}$ of the span of f_l . Since by our assumptions $\Lambda f \in V$, the observation follows.

Next we observe that if $V \neq 0$ and $V \in A_d$, then every monomial of the form x_i^d, p_j^d belongs to V . For if $f \in V$ is a non-zero polynomial, then f has in its decomposition a monomial of the form $a x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}$ with non-zero $a \in \mathbb{K}$. To prove that, say, $p_1 \in V$, one needs to apply a sequence of linear symplectomorphisms to f so that the image of $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}$ is a sum that contains p_1^d . This is accomplished by means of the following procedure. First, we get rid of every x_i by taking in succession

$$x_i \mapsto x_i + p_i, \quad p_i \mapsto p_i \quad (\text{other generators fixed})$$

and using the above homogeneity statement to single out the monomial with maximal degree in p_i . Thus we obtain that $p_1^{d_1} \dots p_n^{d_n} \in V$ for some $d_1, \dots, d_n, d_1 + \dots + d_n = d$. We then dispose of p_2, \dots, p_n by applying symplectomorphisms of the form (written down for p_2)

$$x_1 \mapsto x_1 - x_2, \quad x_2 \mapsto x_1 + x_2, \quad p_1 \mapsto p_1 + p_2, \quad p_2 \mapsto p_2 - p_1$$

and again using homogeneity to single out the monomial with p_1 . A procedure identical to the above is applied to show that $x_i^d \in V, i = 1, \dots, n$.

What remains to prove is that the mixed terms $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}$ (where at least two powers are non-zero) are in V . This can be done by looking at linear combinations of x_i^d and p_j^d and applying suitable symplectomorphisms in a manner similar to our previous construction and using the homogeneity argument. We leave details to the reader. \square

We now turn to the proof of the inductive step. Suppose that

$$\sigma : x_i \mapsto x_i + f_i + P_i, \quad p_j \mapsto p_j + g_j + Q_j$$

is a polynomial symplectomorphism, where f_i and g_j are degree k components and the height of P_i and Q_j is greater than k . The preservation of the symplectic structure by σ means that the k -th component obeys the following identities:

$$\{x_i, f_j\} - \{x_j, f_i\} = 0$$

and

$$\{p_i, f_j\} - \{p_j, f_i\} = 0$$

where $\{ , \}$ is the Poisson bracket corresponding to the symplectic form. In the case of standard symplectic structure these identities translate into

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_j} - \frac{\partial f_j}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0,$$

in which one recognizes the condition for an appropriate differential form to be closed. The triviality of affine space cohomology then implies that there exists a polynomial $F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$, homogeneous of degree $k + 1$, such that

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = f_i, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = g_i;$$

in this way the k -component of a symplectomorphism is generated by a homogeneous polynomial. The tame symplectomorphism group acts on the space of all such generating polynomials (the image of a polynomial is the polynomial corresponding to the k -component of the composition with the tame symplectomorphism), and the orbit of this tame action carries the structure of a \mathbb{K} -module (one may easily come up with a symplectomorphism corresponding to the sum of two generating polynomials). Therefore this space fulfills the conditions of the previous lemma, which in this case implies that one can, by a composition with a tame symplectomorphism, eliminate the k -component. The main lemma, and therefore the Theorem 3.2, is proved. \square

Once the approximation for the case of symplectomorphisms has been established, we can investigate the problem of lifting symplectomorphisms to Weyl algebra automorphisms. More precisely, one has the following

Proposition 4.3.4. *Let $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ and let $\sigma : P_n(\mathbb{C}) \rightarrow P_n(\mathbb{C})$ be a symplectomorphism over complex numbers. Then there exists a sequence*

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots$$

of tame automorphisms of the n -th Weyl algebra $W_n(\mathbb{C})$, such that their images σ_k in $\text{Aut } P_n(\mathbb{C})$ approximate σ .

Proof. This is an immediate corollary of Theorem 3.2 and the existence of tame subgroup isomorphism [41].

\square A few comments are in order. First, the quantization of elementary symplectomorphisms is a very simple procedure: one needs only replace the x_i and p_i by their counterparts \hat{x}_i and \hat{p}_i in the Weyl algebra W_n . Because the transvection polynomials f and g (in the expressions for elementary symplectomorphisms) depend, as it has been noted, on one type of generators (resp. p and x), the quantization is well defined.

Second, as the tame automorphism groups $\text{TAut } W_n(\mathbb{C})$ and $\text{TAut } P_n(\mathbb{C})$ are isomorphic, the correspondence between sequence of tame symplectomorphisms converging to symplectomorphisms and sequences of tame Weyl algebra automorphisms is one to one. The main question is how one may interpret these sequences as endomorphisms of $W_n(\mathbb{C})$.

Our construction shows that these sequences of tame automorphisms may be thought of as (vectors of) power series – that is, elements of

$$\mathbb{C}[[\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n]]^{2n}.$$

The main problem therefore consists in verifying that these vectors have entries polynomial in generators – that is, that the limits of lifted tame sequences are Weyl algebra endomorphisms.

One could take a more straightforward (albeit an equivalent) approach to the lifting of symplectomorphisms by following the prescription of deformation quantization: starting with a symplectic automorphism of the polynomial algebra $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n]$, one constructs a map of $A[[\hbar]]$, the algebra of formal power series (in Planck's constant \hbar), which preserves the star product satisfying Weyl algebra identities. The approximation theory as developed in this text is then a property of the \hbar -adic topology. The (algebraically closed version of) Conjecture 1.3 would then follow if one were to establish a cutoff theorem.

In our closing remark we comment on the remaining two main theorems as stated in the introduction. As the reader may infer from the proof of approximation theorems, the approximation in formal power series topology is natural in the sense that it agrees with the \mathfrak{m} -adic topology in the local ring generated by the coefficients of the approximated automorphism. More precisely, we have the following property, formulated separately for the two cases we consider in the paper.

Theorem 4.3.5. *Let φ be a polynomial automorphism and let \mathcal{O}_φ be the local ring of $\text{Aut } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ with its maximal ideal \mathfrak{m} . If $\{\psi_k\}$ is a tame sequence which converges to φ in power series topology, then the coordinates of ψ_k converge to coordinates of φ in \mathfrak{m} -adic topology.*

Theorem 4.3.6. *Let σ be a symplectomorphism and let \mathcal{O}_σ be the local ring of $\text{Aut } P_n(\mathbb{C})$ with its maximal ideal \mathfrak{m} . If $\{\sigma_k\}$ is a tame sequence which converges to σ in power series topology, then the coordinates of σ_k converge to coordinates of σ in \mathfrak{m} -adic topology.*

These are our last two main results.

4.4. CONCLUSION

We have developed tame approximation theory for symplectomorphisms in formal power series topology. By virtue of the known correspondence between tame automorphisms of the even-dimensional affine space and tame automorphisms of the Weyl algebra, which is the object corresponding to the affine space in terms of deformation quantization, we have arrived at the lifting property of symplectomorphisms. This line of research may yield new insights into endomorphisms of the Weyl algebra, the Dixmier conjecture, and the Jacobian conjecture.

BIBLIOGRAPHY

1. *Abdesselam A.* The Jacobian conjecture as a problem of perturbative quantum field theory// *Ann. H. Poincaré.* — 2003. — 4, № 2. — P. 199–215.
2. *Abhyankar S., Moh T.* Embedding of the line in the plane// *J. Reine Angew. Math.* — 1975. — 276. — P. 148–166.
3. *Amitsur S. A.* Algebras over infinite fields// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1956. — 7. — P. 35–48.
4. *Amitsur S. A.* A general theory of radicals, III. Applications// *Am. J. Math.* — 1954. — 75. — P. 126–136.
5. *Alev J., Le Bruyn L.* Automorphisms of generic 2 by 2 matrices// in: *Perspectives in Ring Theory.* — Springer, 1988. — P. 69–83.
6. *Amitsur A. S., Levitzki J.* Minimal identities for algebras// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1950. — 1. — P. 449–463.
7. *Amitsur A. S., Levitzki J.* Remarks on minimal identities for algebras// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1951. — 2. — P. 320–327.

8. *Anick D. J.* Limits of tame automorphisms of $k[x_1, \dots, x_n]$ // J. Algebra. — 1983. — 82, № 2. — P. 459–468.
9. *Artamonov V. A.* Projective metabelian groups and Lie algebras// Izv. Math. — 1978. — 12, № 2. — C. 213–223.
10. *Artamonov V. A.* Projective modules over universal enveloping algebras// Math. USSR Izv. — 1985. — 25, № 3. — C. 429.
11. *Artamonov V. A.* Nilpotence, projectivity, decomposability// Sib. Math. J. — 1991. — 32, № 6. — C. 901–909.
12. *Artamonov V. A.* The quantum Serre problem// Russ. Math. Surv. — 1998. — 53, № 4. — C. 3–77.
13. *Artamonov V. A.* Automorphisms and derivations of quantum polynomials// in: Recent Advances in Lie Theory (*Bajo I., Sanmartin E.*, eds.). — Heldermann Verlag, 2002. — P. 109–120.
14. *Artamonov V. A.* Generalized derivations of quantum plane// J. Math. Sci. — 2005. — 131, № 5. — C. 5904–5918.
15. *Artamonov V. A.* *Quantum polynomials* in: Advances in Algebra and Combinatorics. — Singapore: World Scientific, 2008. — P. 19–34.
16. *Artin M.* Noncommutative Rings. — Preprint, 1999.
17. *Arzhantsev I., Kuyumzhiyan K., Zaidenberg M.* Infinite transitivity, finite generation, and Demazure roots// Adv. Math. — 2019. — 351. — P. 1–32.
18. *Asanuma T.* Non-linearizable algebraic k^* -actions on affine spaces. — Preprint, 1996.
19. *Backelin E.* Endomorphisms of quantized Weyl algebras// Lett. Math. Phys. — 2011. — 97, № 3. — P. 317–338.
20. *Bass H.* A non-triangular action of G_a on A^3 // J. Pure Appl. Algebra. — 1984. — 33, № 1. — P. 1–5.
21. *Bass H., Connell E. H., Wright D.* The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — 7, № 2. — P. 287–330.
22. *Bavula V. V.* A question of Rentschler and the Dixmier problem// Ann. Math. (2). — 2001. — 154, № 3. — P. 683–702.
23. *Bavula V. V.* Generalized Weyl algebras and diskew polynomial rings/ [arXiv: 1612.08941](https://arxiv.org/abs/1612.08941) [math.RA].
24. *Bavula V. V.* The group of automorphisms of the Lie algebra of derivations of a polynomial algebra// J. Alg. Appl. — 2017. — 16, № 5. — 1750088.
25. *Bavula V. V.* The groups of automorphisms of the Lie algebras of formally analytic vector fields with constant divergence// C. R. Math. — 2014. — 352, № 2. — P. 85–88.
26. *Bavula V. V.* The inversion formulae for automorphisms of Weyl algebras and polynomial algebras// J. Pure Appl. Algebra. — 2007. — 210. — P. 147–159.
27. *Bavula V. V.* The inversion formulae for automorphisms of polynomial algebras and rings of differential operators in prime characteristic// J. Pure Appl. Algebra. — 2008. — 212, № 10. — P. 2320–2337.
28. *Bavula V. V.* An analogue of the conjecture of Dixmier is true for the algebra of polynomial integro-differential operators// J. Algebra. — 2012. — 372. — P. 237–250.
29. *Bavula V. V.* Every monomorphism of the Lie algebra of unitriangular polynomial derivations is an automorphism// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. — 2012. — 350, № 11–12. — P. 553–556.
30. *Bavula V. V.* The Jacobian conjecture $_{2n}$ implies the Dixmier problem $_n$ / [arXiv: math/0512250](https://arxiv.org/abs/math/0512250) [math.RA].
31. *Beauville A., Colliot-Thelene J.-L., Sansuc J.-J., and Swinnerton-Dyer P.* Variétés stables rationnelles non rationnelles// Ann. Math. — 1985. — 121. — P. 283–318.
32. *Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D.* Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures// Ann. Phys. — 1978. — 111, № 1. — P. 61–110.
33. *Belov A.* Linear recurrence equations on a tree// Math. Notes. — 2005. — 78, № 5. — C. 603–609.
34. *Belov A.* Local finite basis property and local representability of varieties of associative rings// Izv. Math. — 2010. — 74. — C. 1–126.
35. *Belov A., Bokut L., Rowen L., Yu J.-T.* The Jacobian conjecture, together with Specht and Burnside-type problems// in: Automorphisms in Birational and Affine Geometry. — Springer, 2014. — P. 249–285.
36. *Belov A., Makar-Limanov L., Yu J. T.* On the generalised cancellation conjecture// J. Algebra. — 2004. — 281. — P. 161–166.
37. *Belov A., Rowen L. H., Vishne U.* Structure of Zariski-closed algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 2012. — 362. — P. 4695–4734.
38. *Belov-Kanel A., Yu J.-T.* On the lifting of the Nagata automorphism// Selecta Math. — 2011. — 17. — P. 935–945.

39. Kanel-Belov A., Berzins A., Lipyanski R. Automorphisms of the semigroup of endomorphisms of free associative algebras// Int. J. Algebra Comp. — 2007. — 17, № 5/6. — P. 923–939.
40. Belov-Kanel A., Elishev A. On planar algebraic curves and holonomic D -modules in positive characteristic// J. Algebra Appl. — 2016. — 15, № 8. — 1650155.
41. Belov-Kanel A., Kontsevich M. Automorphisms of the Weyl algebra// Lett. Math. Phys. — 2005. — 74, № 2. — P. 181–199.
42. Belov-Kanel A., Kontsevich M. The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture// Moscow Math. J. — 2007. — 7, № 2. — C. 209–218.
43. Belov-Kanel A., Lipyanski R. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a polynomial algebra// J. Algebra. — 2011. — 333, № 1. — P. 40–54.
44. Belov-Kanel A., Yu J.-T. Stable tameness of automorphisms of $F\langle x, y, z \rangle$ fixing z // Selecta Math. — 2012. — 18. — P. 799–802.
45. Bergman G. M. Centralizers in free associative algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — 137. — P. 327–344.
46. Bergman G. M. The diamond lemma for ring theory// Adv. Math. — 1978. — 29, № 2. — P. 178–218.
47. Berson J., van den Essen A., Wright D. Stable tameness of two-dimensional polynomial automorphisms over a regular ring// Adv. Math. — 2012. — 230. — P. 2176–2197.
48. Birman J. An inverse function theorem for free groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1973. — 41. — P. 634–638.
49. Bonnet P., Vénéreau S. Relations between the leading terms of a polynomial automorphism// J. Algebra. — 2009. — 322, № 2. — P. 579–599.
50. Berzins A. The group of automorphisms of semigroup of endomorphisms of free commutative and free associative algebras/ arXiv: abs/math/0504015 [math.AG].
51. Białynicki-Birula A. Remarks on the action of an algebraic torus on k^n , I// Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1966. — 14. — P. 177–181.
52. Białynicki-Birula A. Remarks on the action of an algebraic torus on k^n , II// Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1967. — 15. — P. 123–125.
53. Białynicki-Birula A. Some theorems on actions of algebraic groups// Ann. Math. — 1973. — 98, № 3. — P. 480–497.
54. Bitoun T. The p -support of a holonomic D -module is lagrangian, for p large enough/ arXiv: 1012.4081 [math.AG].
55. Bodnarchuk Yu. Every regular automorphism of the affine Cremona group is inner// J. Pure Appl. Algebra. — 2001. — 157. — P. 115–119.
56. Bokut L., Zelmanov E. Selected works of A. I. Shirshov. — Springer, 2009.
57. Bokut L. A. Embedding Lie algebras into algebraically closed Lie algebras// Algebra Logika. — 1962. — 1. — C. 47–53.
58. Bokut L. A. Embedding of algebras into algebraically closed algebras// Dokl. Akad. Nauk. — 1962. — 145, № 5. — C. 963–964.
59. Bokut L. A. Theorems of embedding in the theory of algebras// Colloq. Math. — 1966. — 14. — P. 349–353.
60. Brešar M., Procesi C., Špenko Š. Functional identities on matrices and the Cayley–Hamilton polynomial/ arXiv: 1212.4597 [math.RA].
61. Campbell L. A. A condition for a polynomial map to be invertible// Math. Ann. — 1973. — 205, № 3. — P. 243–248.
62. Cohn P. M. Subalgebras of free associative algebras// Proc. London Math. Soc. — 1964. — 3, № 4. — P. 618–632.
63. Cohn P. M. Progress in free associative algebras// Isr. J. Math. — 1974. — 19, № 1-2. — P. 109–151.
64. Cohn P. M. A brief history of infinite-dimensional skew fields// Math. Sci. — 1992. — 17. — P. 1–14.
65. Cohn P. M. Free Rings and Their Relations. — Academic Press, 1985.
66. Czerniakiewicz A. J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — 160. — P. 393–401.
67. Czerniakiewicz A. J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — 171. — P. 309–315.

68. *Danielewski W.* On the cancellation problem and automorphism groups of affine algebraic varieties. — Warsaw: Preprint, 1989.
69. *De Bondt M., van den Essen A.* The Jacobian conjecture for symmetric Druzkowski mappings. — University of Nijmegen, 2004.
70. *De Bondt M., van den Essen A.* A reduction of the Jacobian conjecture to the symmetric case// Proc. Am. Math. Soc. — 2005. — 133, № 8. — P. 2201–2205.
71. *De Concini C., Procesi C.* A characteristic free approach to invariant theory// in: Young Tableaux in Combinatorics, Invariant Theory, and Algebra. — Elsevier, 1982. — P. 169–193.
72. *Déserti J.* Sur le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine// J. Algebra. — 2006. — 297. — P. 584–599.
73. *Dicks W.* Automorphisms of the free algebra of rank two// Contemp. Math. — 1985. — 43. — P. 63–68.
74. *Dicks W., Lewin J.* Jacobian conjecture for free associative algebras// Commun. Algebra. — 1982. — 10, № 12. — P. 1285–1306.
75. *Dixmier J.* Sur les algèbres de Weyl// Bull. Soc. Math. France. — 1968. — 96. — P. 209–242.
76. *Dodd C.* The p -cycle of holonomic D -modules and auto-equivalences of the Weyl algebra/ [arXiv:1510.05734 \[math.OA\]](#).
77. *Donkin S.* Invariants of several matrices// Inv. Math. — 1992. — 110, № 1. — P. 389–401.
78. *Donkin S.* Invariant functions on matrices// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1993. — 113, № 1. — P. 23–43.
79. *Drensky V., Yu J.-T.* A cancellation conjecture for free associative algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 2008. — 136, № 10. — P. 3391–3394.
80. *Drensky V., Yu J.-T.* The strong Anick conjecture// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 2006. — 103. — P. 4836–4840.
81. *Drensky V., Yu J.-T.* Coordinates and automorphisms of polynomial and free associative algebras of rank three// Front. Math. China. — 2007. — 2, № 1. — P. 13–46.
82. *Drensky V., Yu J.-T.* The strong Anick conjecture is true// J. Eur. Math. Soc. — 2007. — 9. — P. 659–679.
83. *Druzkowski L.* An effective approach to Keller’s Jacobian conjecture// Math. Ann. — 1983. — 264, № 3. — P. 303–313.
84. *Druzkowski L.* The Jacobian conjecture: symmetric reduction and solution in the symmetric cubic linear case// Ann. Polon. Math. — 2005. — 87, № 1. — P. 83–92.
85. *Druzkowski L. M.* New reduction in the Jacobian conjecture// in: Effective Methods in Algebraic and Analytic Geometry. — Kraków: Univ. Jagel. Acta Math., 2001. — P. 203–206.
86. *Elishev A.* Automorphisms of polynomial algebras, quantization and Kontsevich conjecture/ PhD Thesis — Moscow Institute of Physics and Technology, 2019.
87. *Elishev A., Kanel-Belov A., Razavinia F., Yu J.-T., Zhang W.* Noncommutative Białynicki-Birula theorem./ [arXiv:1808.04903 \[math.AG\]](#).
88. *Elishev A., Kanel-Belov A., Razavinia F., Yu J.-T., Zhang W.* Torus actions on free associative algebras, lifting and Białynicki-Birula type theorems/ [arXiv:1901.01385 \[math.AG\]](#).
89. *van den Bergh M.* On involutivity of p -support// Int. Math. Res. Not. — 2015. — 15. — P. 6295–6304.
90. *van den Essen A.* The amazing image conjecture/ [arXiv:1006.5801 \[math.AG\]](#).
91. *van den Essen A., de Bondt M.* Recent progress on the Jacobian conjecture// Ann. Polon. Math. — 2005. — 87. — P. 1–11.
92. *van den Essen A., de Bondt M.* The Jacobian conjecture for symmetric Druzkowski mappings// Ann. Polon. Math. — 2005. — 86, № 1. — P. 43–46.
93. *van den Essen A., Wright D., Zhao W.* On the image conjecture// J. Algebra. — 2011. — 340. — P. 211–224.
94. *Fox R. H.* Free differential calculus, I. Derivation in the free group ring// Ann. Math. (2). — 1953. — 57. — P. 547–560.
95. *Gizatullin M. Kh., Danilov V. I.* Automorphisms of affine surfaces, I// Izv. Math. — 1975. — 9, № 3. — C. 493–534.
96. *Gizatullin M. Kh., Danilov V. I.* Automorphisms of affine surfaces, II// Izv. Math. — 1977. — 11, № 1. — C. 51–98.
97. *Gorni G., Zampieri G.* Yagzhev polynomial mappings: on the structure of the Taylor expansion of their local inverse// Polon. Math. — 1996. — 64. — P. 285–290.

98. Fedosov B. A simple geometrical construction of deformation quantization// J. Differ. Geom. — 1994. — 40, № 2. — P. 213–238.
99. Frayne T., Morel A. C., Scott D. S. Reduced direct products// J. Symb. Logic. — 31, № 3. — P. 1966.
100. Fulton W., Harris J. Representation Theory. A First Course. — Springer-Verlag, 1991.
101. Furter J.-P., Kraft H. On the geometry of the automorphism groups of affine varieties/ arXiv: 1809.04175 [math.AG].
102. Gutwirth A. The action of an algebraic torus on the affine plane// Trans. Am. Math. Soc. — 1962. — 105, № 3. — P. 407–414.
103. Jung H. W. E. Über ganze birationale Transformationen der Ebene// J. Reine Angew. Math. — 1942. — 184. — P. 161–174.
104. Kaliman S., Koras M., Makar-Limanov L., Russell P. C^* -actions on C^3 are linearizable// Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. — 1997. — 3. — P. 63–71.
105. Kaliman S., Zaidenberg M. Families of affine planes: the existence of a cylinder// Michigan Math. J. — 2001. — 49. — P. 353–367.
106. Kuroda S. Shestakov–Umirbaev reductions and Nagata’s conjecture on a polynomial automorphism// Tôhoku Math. J. — 2010. — 62. — P. 75–115.
107. Kuzmin E., Shestakov I. P. Nonassociative structures// Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Probl. Mat. Fundam. Napr. — 1990. — 57. — C. 179–266.
108. Karas’ M. Multidegrees of tame automorphisms of C^n // Dissert. Math. — 2011. — 477.
109. Khoroshkin A., Piontkovski D. On generating series of finitely presented operads/ arXiv: 1202.5170 [math.QA].
110. Kambayashi T. Pro-affine algebras, Ind-affine groups and the Jacobian problem// J. Algebra. — 1996. — 185, № 2. — P. 481–501.
111. Kambayashi T. Some basic results on pro-affine algebras and Ind-affine schemes// Osaka J. Math. — 2003. — 40, № 3. — P. 621–638.
112. Kambayashi T., Russell P. On linearizing algebraic torus actions// J. Pure Appl. Algebra. — 1982. — 23, № 3. — P. 243–250.
113. Kanel-Belov A., Borisenko V., Latysev V. Monomial algebras// J. Math. Sci. — 1997. — 87, № 3. — C. 3463–3575.
114. Kanel-Belov A., Elishev A. On planar algebraic curves and holonomic \mathcal{D} -modules in positive characteristic/ arXiv: 1412.6836 [math.AG].
115. Kanel-Belov A., Elishev A., Yu J.-T. Independence of the B-KK isomorphism of infinite prime/ arXiv: 1512.06533 [math.AG].
116. Kanel-Belov A., Elishev A., Yu J.-T. Augmented polynomial symplectomorphisms and quantization/// arXiv: 1812.02859 [math.AG].
117. Kanel-Belov A., Grigoriev S., Elishev A., Yu J.-T., Zhang W. Lifting of polynomial symplectomorphisms and deformation quantization// Commun. Algebra. — 2018. — 46, № 9. — P. 3926–3938.
118. Kanel-Belov A., Malev S., Rowen L. The images of noncommutative polynomials evaluated on 2×2 matrices// Proc. Am. Math. Soc. — 2012. — 140. — P. 465–478.
119. Kanel-Belov A., Malev S., Rowen L. The images of multilinear polynomials evaluated on 3×3 matrices// Proc. Am. Math. Soc. — 2016. — 144. — P. 7–19.
120. Kanel-Belov A., Razavinia F., Zhang W. Bergman’s centralizer theorem and quantization// Commun. Algebra. — 2018. — 46, № 5. — P. 2123–2129.
121. Kanel-Belov A., Razavinia F., Zhang W. Centralizers in free associative algebras and generic matrices/ arXiv: 1812.03307 [math.RA].
122. Kanel-Belov A., Rowen L. H., Vishne U. Full exposition of Specht’s problem// Serdica Math. J. — 2012. — 38. — P. 313–370.
123. Kanel-Belov A., Yu J.-T., Elishev A. On the augmentation topology of automorphism groups of affine spaces and algebras// Int. J. Algebra Comput. * — 2018. — 28, № 08. — P. 1449–1485.
124. Keller B. Notes for an Introduction to Kontsevich’s Quantization Theorem, 2003.
125. Keller O. H. Ganze Cremona Transformationen// Monatsh. Math. Phys. — 1939. — 47, № 1. — P. 299–306.
126. Kolesnikov P. S. The Makar-Limanov algebraically closed skew field// Algebra Logic. — 2000. — 39, № 6. — C. 378–395.

127. *Kolesnikov P. S.* Different definitions of algebraically closed skew fields// Algebra Logic. — 2001. — 40, № 4. — C. 219–230.
128. *Kontsevich M.* Deformation quantization of Poisson manifolds// Lett. Math. Phys. — 2003. — 66, № 3. — P. 157–216.
129. *Kontsevich M.* Holonomic D -modules and positive characteristic// Jpn. J. Math. — 2009. — 4, № 1. — P. 1–25.
130. *Koras M., Russell P.* C^* -actions on C^3 : The smooth locus of the quotient is not of hyperbolic type// J. Alg. Geom. — 1999. — 8, № 4. — P. 603–694.
131. *Kovalenko S., Perepechko A., Zaidenberg M.* On automorphism groups of affine surfaces// in: Algebraic Varieties and Automorphism Groups. — Math. Soc. Jpn., 2017. — P. 207–286.
132. *Kraft H., Regeta A.* Automorphisms of the Lie algebra of vector fields// J. Eur. Math. Soc. — 2017. — 19, № 5. — P. 1577–1588.
133. *Kraft H., Stampfli I.* On automorphisms of the affine Cremona group// Ann. Inst. Fourier. — 2013. — 63, № 3. — P. 1137–1148.
134. *Kulikov V. S.* Generalized and local Jacobian problems// Izv. Math. — 1993. — 41, № 2. — C. 351–365.
135. *Kulikov V. S.* The Jacobian conjecture and nilpotent maps// J. Math. Sci. — 2001. — 106, № 5. — C. 3312–3319.
136. *Levy R., Loustau P., Shapiro J.* The prime spectrum of an infinite product of copies of Z // Fundam. Math. — 1991. — 138. — P. 155–164.
137. *Li Y.-C., Yu J.-T.* Degree estimate for subalgebras// J. Algebra. — 2012. — 362. — P. 92–98.
138. *Gaiotto D., Witten E.* Probing quantization via branes/ [arXiv: 2107.12251](https://arxiv.org/abs/2107.12251) [hep-th].
139. *Lothaire M.* Combinatorics on Words. — Cambridge Univ. Press, 1997.
140. *Makar-Limanov L.* A new proof of the Abhyankar–Moh–Suzuki theorem/ [arXiv: 1212.0163](https://arxiv.org/abs/1212.0163) [math.AC].
141. *Makar-Limanov L.* Automorphisms of a free algebra with two generators// Funct. Anal. Appl. — 1970. — 4, № 3. — C. 262–264.
142. *Makar-Limanov L.* On automorphisms of Weyl algebra// Bull. Soc. Math. France. — 1984. — 112. — P. 359–363.
143. *Makar-Limanov L., Yu J.-T.* Degree estimate for subalgebras generated by two elements// J. Eur. Math. Soc. — 2008. — 10. — P. 533–541.
144. *Makar-Limanov L.* Algebraically closed skew fields// J. Algebra. — 1985. — 93, № 1. — P. 117–135.
145. *Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U.* Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables// J. Algebra. — 2009. — 322, № 9. — P. 3318–3330.
146. *Markl M., Shnider S., Stasheff J.* Operads in Algebra, Topology, and Physics. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2002.
147. *Miyanishi M., Sugie T.* Affine surfaces containing cylinderlike open sets// J. Math. Kyoto Univ. — 1980. — 20. — P. 11–42.
148. *Nagata M.* On the automorphism group of $k[x, y]$. — Tokyo: Kinokuniya, 1972.
149. *Nielsen J.* Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppen mit zwei Erzeugenden// Math. Ann. — 1918. — 78. — P. 385–397.
150. *Nielsen J.* Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen// Math. Ann. — 1924. — 91. — P. 169–209.
151. *Ol’shanskij A. Yu.* Groups of bounded period with subgroups of prime order// Algebra and Logic. — 1983. — 21. — C. 369–418.
152. *Peretz R.* Constructing polynomial mappings using non-commutative algebras// in: Affine Algebraic Geometry. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2005. — P. 197–232.
153. *Piontkovski D.* Operads versus Varieties: a dictionary of universal algebra. — Preprint, 2011.
154. *Piontkovski D.* On Kurosh problem in varieties of algebras// J. Math. Sci. — 2009. — 163, № 6. — C. 743–750.
155. *Razmyslov Yu. P.* Algebras satisfying identity relations of Capelli type// Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. — 1981. — 45. — C. 143–166, 240.
156. *Razmyslov Yu. P.* Identities of Algebras and Their Representations. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1994.
157. *Razmyslov Yu. P., Zubrilin K. A.* Nilpotency of obstacles for the representability of algebras that satisfy Capelli identities, and representations of finite type// Russ. Math. Surveys — 1993. — 48. — C. 183–184.

158. *Reutenauer C.* Applications of a noncommutative Jacobian matrix// J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — 77. — P. 634–638.
159. *Rowen L. H.* Graduate Algebra: Noncommutative View. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2008.
160. *Moh T.-T.* On the global Jacobian conjecture for polynomials of degree less than 100. — Preprint, 1983.
161. *Moh T.-T.* On the Jacobian conjecture and the configurations of roots// J. Reine Angew. Math. — 1983. — 340. — P. 140–212.
162. *Moyal J. E.* Quantum mechanics as a statistical theory// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1949. — 45, № 1. — P. 99–124.
163. *Orevkov S. Yu.* The commutant of the fundamental group of the complement of a plane algebraic curve// Russ. Math. Surv. — 1990. — 45, № 1. — C. 221–222.
164. *Orevkov S. Yu.* An example in connection with the Jacobian conjecture// Math. Notes. — 1990. — 47, № 1. — C. 82–88.
165. *Orevkov S. Yu.* The fundamental group of the complement of a plane algebraic curve// Sb. Math. — 1990. — 65, № 1. — C. 267–267.
166. *Plotkin B.* Varieties of algebras and algebraic varieties// Israel J. Math. — 1996. — 96, № 2. — P. 511–522.
167. *Plotkin B.* Algebras with the same (algebraic) geometry/ [arXiv:math/0210194](https://arxiv.org/abs/math/0210194) [math.GM].
168. *Popov V. L.* Around the Abhyankar-Sathaye conjecture/ [arXiv:1409.6330](https://arxiv.org/abs/1409.6330) [math.AG].
169. *Procesi C.* Rings with Polynomial Identities. — Marcel Dekker, 1973.
170. *Procesi C.* The invariant theory of $n \times n$ matrices// Adv. Math. — 1976. — 19, № 3. — P. 306–381.
171. *Razar M.* Polynomial maps with constant Jacobian// Israel J. Math. — 1979. — 32, № 2-3. — P. 97–106.
172. *Robinson A.* Non-Standard Analysis. — Princeton Univ. Press, 2016.
173. *Rosset S.* A new proof of the Amitsur–Levitzki identity// Israel J. Math. — 1976. — 23, № 2. — P. 187–188.
174. *Rowen L. H.* Graduate Algebra: Noncommutative View. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2008.
175. *Schofield A. H.* Representations of Rings over Skew Fields. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
176. *Schwarz G.* Exotic algebraic group actions// C. R. Acad. Sci. Paris — 1989. — 309. — P. 89–94.
177. *Shafarevich I. R.* On some infinite-dimensional groups, II// Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Mat. — 1981. — 45, № 1. — C. 214–226.
178. *Sharifi Y.* Centralizers in Associative Algebras/ Ph.D. thesis, 2013.
179. *Shestakov I. P.* Finite-dimensional algebras with a nil basis// Algebra Logika. — 1971. — 10. — C. 87–99.
180. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* Degree estimate and two-generated subalgebras of rings of polynomials// J. Am. Math. Soc. — 2004. — 17. — P. 181–196.
181. *Shestakov I., Umirbaev U.* The Nagata automorphism is wild// Proc. Natl. Acad. Sci. — 2003. — 100, № 22. — P. 12561–12563.
182. *Shestakov I., Umirbaev U.* Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials// J. Am. Math. Soc. — 2004. — 17, № 1. — P. 181–196.
183. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables// J. Am. Math. Soc. — 2004. — 17. — P. 197–220.
184. *Umirbaev U., Shestakov I.* Subalgebras and automorphisms of polynomial rings// Dokl. Ross. Akad. Nauk — 2002. — 386, № 6. — C. 745–748.
185. *Shpilrain V.* On generators of L/R^2 Lie algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1993. — 119. — P. 1039–1043.
186. *Singer D.* On Catalan trees and the Jacobian conjecture// Electron. J. Combin. — 2001. — 8, № 1. — 2.
187. *Shpilrain V., Yu J.-T.* Affine varieties with equivalent cylinders// J. Algebra. — 2002. — 251, № 1. — P. 295–307.
188. *Shpilrain V., Yu J.-T.* Factor algebras of free algebras: on a problem of G. Bergman// Bull. London Math. Soc. — 2003. — 35. — P. 706–710.
189. *Suzuki M.* Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébrique de l'espace C^2 // J. Math. Soc. Jpn. — 1974. — 26. — P. 241–257.
190. *Tsuchimoto Y.* Preliminaries on Dixmier conjecture Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A. Math. — 2003. — 24. — P. 43–59.
191. *Tsuchimoto Y.* Endomorphisms of Weyl algebra and p -curvatures// Osaka J. Math. — 2005. — 42, № 2. — P. 435–452.

192. *Tsuchimoto Y.* Auslander regularity of norm based extensions of Weyl algebra// [arXiv:1402.7153 \[math.AG\]](#).
193. *Umirbaev U.* On the extension of automorphisms of polynomial rings// *Sib. Math. J.* — 1995. — 36, № 4. — C. 787–791.
194. *Umirbaev U. U.* On Jacobian matrices of Lie algebras// В кн.: Proc. 6 All-Union Conf. on Varieties of Algebraic Systems. — Magnitogorsk, 1990. — C. 32–33.
195. *Umirbaev U. U.* Shreer varieties of algebras// *Algebra Logic.* — 1994. — 33. — C. 180–193.
196. *Umirbaev U. U.* Tame and wild automorphisms of polynomial algebras and free associative algebras. — Preprint MPIM 2004–108..
197. *Umirbaev U.* The Anick automorphism of free associative algebras// *J. Reine Angew. Math.* — 2007. — 605. — P. 165–178.
198. *Umirbaev U. U.* Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras in three variables// *J. Reine Angew. Math.* — 2006. — 600. — P. 203–235.
199. *Umirbaev U. U.* Defining relations for automorphism groups of free algebras// *J. Algebra.* — 2007. — 314. — P. 209–225.
200. *Umirbaev U. U., Yu J.-T.* The strong Nagata conjecture// *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* — 2004. — 101. — P. 4352–4355.
201. *Urech C., Zimmermann S.* Continuous automorphisms of Cremona groups/ [arXiv:1909.11050 \[math.AG\]](#).
202. *van den Essen A.* Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. — Birkhäuser, 2012.
203. *van der Kulk W.* On polynomial rings in two variables// *Nieuw Arch. Wisk.* (3) — 1953. — 1. — P. 33–41.
204. *Vitushkin A. G.* A criterion for the representability of a chain of σ -processes by a composition of triangular chains// *Math. Notes* — 1999. — 65, № 5-6. — C. 539–547.
205. *Vitushkin A. G.* On the homology of a ramified covering over C^2 // *Math. Notes.* — 1998. — 64, № 5. — C. 726–731.
206. *Vitushkin A. G.* Evaluation of the Jacobian of a rational transformation of C^2 and some applications// *Math. Notes* — 1999. — 66, № 2. — C. 245–249.
207. *Wedderburn J. H. M.* Note on algebras// *Ann. Math.* — 1937. — 38. — P. 854–856.
208. *Wright D.* The Jacobian conjecture as a problem in combinatorics/ [arXiv:math/0511214 \[math.CO\]](#).
209. *Wright D.* The Jacobian conjecture: Ideal membership questions and recent advances// *Contemp. Math.* — 2005. — 369. — P. 261–276.
210. *Yagzhev A. V.* Finiteness of the set of conservative polynomials of a given degree// *Math. Notes.* — 1987. — 41, № 2. — C. 86–88.
211. *Yagzhev A. V.* Nilpotency of extensions of an abelian group by an abelian group// *Math. Notes.* — 1988. — 43, № 3-4. — C. 244–245.
212. *Yagzhev A. V.* Locally nilpotent subgroups of the holomorph of an abelian group// *Mat. Zametki* — 1989. — 46, № 6. — C. 118.
213. *Yagzhev A. V.* A sufficient condition for the algebraicity of an automorphism of a group// *Algebra Logic.* — 1989. — 28, № 1. — C. 83–85.
214. *Yagzhev A. V.* The generators of the group of tame automorphisms of an algebra of polynomials// *Sib. Mat. Zh.* — 1977. — 18, № 1. — P. 222–225.
215. *Wang S.* A Jacobian criterion for separability// *J. Algebra.* — 1980. — 65, № 2. — P. 453–494.
216. *Wright D.* On the Jacobian conjecture// *Ill. J. Math.* — 1981. — 25, № 3. — P. 423–440.
217. *Yagzhev A. V.* Invertibility of endomorphisms of free associative algebras// *Math. Notes.* — 1991. — 49, № 3–4. — C. 426–430.
218. *Yagzhev A. V.* Endomorphisms of free algebras// *Sib. Math. J.* — 1980. — 21, № 1. — C. 133–141.
219. *Yagzhev A. V.* On the algorithmic problem of recognizing automorphisms among endomorphisms of free associative algebras of finite rank// *Sib. Math. J.* — 1980. — 21, № 1. — C. 142–146.
220. *Yagzhev A. V.* Keller’s problem// *Sib. Math. J.* — 1980. — 21, № 5. — C. 747–754.
221. *A. V. Yagzhev* Engel algebras satisfying Capelli identities// В кн.: Proceedings of Shafarevich Seminar. — Moscow: Steklov Math. Inst., 2000. — C. 83–88 (in Russian).
222. *A. V. Yagzhev* Endomorphisms of polynomial rings and free algebras of different varieties// В кн.: Proceedings of Shafarevich Seminar. — Moscow: Steklov Math. Inst., 2000. — C. 15–47 (in Russian).
223. *Yagzhev A. V.* Invertibility criteria of a polynomial mapping. — Unpublished (in Russian).

224. *Zaks A.* Dedekind subrings of $K[x_1, \dots, x_n]$ are rings of polynomials// Israel J. Math. — 1971. — 9. — P. 285–289.
225. *Zelmanov E.* On the nilpotence of nilalgebras// Lect. Notes Math. — 1988. — 1352. — P. 227–240.
226. *Zhao W.* New proofs for the Abhyankar–Gurjar inversion formula and the equivalence of the Jacobian conjecture and the vanishing conjecture// Proc. Am. Math. Soc. — 2011. — 139. — P. 3141–3154.
227. *Zhao W.* Mathieu subspaces of associative algebras// J. Algebra. — 2012. — 350. — P. 245–272.
228. *Zhevlakov K. A., Slin'ko A. M., Shestakov I. P., Shirshov A. I.* Nearly Associative Rings. — Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
229. *Zubrilin K. A.* Algebras that satisfy the Capelli identities// Sb. Math. — 1995. — 186, № 3. — C. 359–370.
230. *Zubrilin K. A.* On the class of nilpotence of obstruction for the representability of algebras satisfying Capelli identities// Fundam. Prikl. Mat. — 1995. — 1, № 2. — C. 409–430.
231. *Zubrilin K. A.* On the Baer ideal in algebras that satisfy the Capelli identities// Sb. Math. — 1998. — 189. — C. 1809–1818.
232. *Zaidenberg M. G.* On exotic algebraic structures on affine spaces// in: Geometric Complex Analysis. — World Scientific, 1996. — P. 691–714.
233. *Zhang W.* Alternative proof of Bergman's centralizer theorem by quantization/ Master thesis — Bar-Ilan University, 2017.
234. *Zhang W.* Polynomial automorphisms and deformation quantization/ Ph.D. thesis — Bar-Ilan University, 2019.
235. *Zubkov A. N.* Matrix invariants over an infinite field of finite characteristic// Sib. Math. J. — 1993. — 34, № 6. — C. 1059–1065.
236. *Zubkov A. N.* A generalization of the Razmyslov–Procesi theorem// Algebra Logic. — 1996. — 35, № 4. — C. 241–254.

Елишев Андрей Михайлович

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

E-mail: ame1511@mail.ru

Канель-Белов Алексей Яковлевич

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

E-mail: kanelster@gmail.com

Razavinia Farrokh

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

E-mail: farrokh.razavinia@gmail.com

Jie-Tai Yu

Шэньчженьский университет, Шэньчжень, Китайская народная республика

E-mail: yujt@hkust.hku.hk

Wenchao Zhang

Школа математики и статистики, Университет Хуэйчжоу, Китайская народная республика

E-mail: zhangwc@hzu.edu.cn

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)	Зеликин Михаил Ильич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, МГУ им. М. В. Ломоносова)
Акбаров Сергей Саидмузафарович, д.ф.-м.-н., профессор (НИУ «Высшая школа экономики»)	Корпусов Максим Олегович, д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Архипова Наталия Александровна, к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)	Маслов Виктор Павлович, академик РАН, профессор (НИУ «Высшая школа экономики»)
Асеев Сергей Миронович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)	Орлов Дмитрий Олегович, академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)
Букжалёв Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)	Пентус Мати Рейнович, д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Бухштабер Виктор Матвеевич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, МГУ им. М. В. Ломоносова)	Попов Владимир Леонидович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, НИУ «Высшая школа экономики»)
Воблый Виталий Антониевич, д.ф.-м.-н. (ВИНИТИ РАН)	Сарычев Андрей Васильевич, д.ф.-м.-н., профессор (Университет Флоренции)
Гусева Надежда Ивановна, к.ф.-м.-н., профессор (МПГУ, ВИНИТИ РАН)	Степанов Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет при Правительстве РФ, ВИНИТИ РАН)
Дудин Евгений Борисович, к.т.н. (ВИНИТИ РАН)	Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович	Попов Владимир Леонидович
Акбаров Сергей Саидмузафарович	Степанов Сергей Евгеньевич
Кругова Елена Павловна	Шамолин Максим Владимирович
Овчинников Алексей Витальевич	Юлдашев Турсун Камалдинович