ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 215 (2022)

Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 215 (2022)

Дата публикации 12 сентября 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года | Выходит 15 раз в год

Редакторы-составители выпуска Е. Ю. Лискина, М. В. Шамолин
Научный редактор выпуска Е. Е. Букжалёв
Компьютерная вёрстка А. А. Широнин

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя: 125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции +7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN 2782-4438
Форма распространения: периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-215-3-17
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-215-18-31
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-215-32-39
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-215-40-51
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-215-52-57
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-215-58-67
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-215-68-72
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-215-73-80
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-215-81-94
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-215-95-128

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 215

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ, КОМБИНАТОРИКА

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Специальные однородные конусы Винберга и их применения
(*Д. В. Алексеевский*) 3

Алгебры Ли проективных движений пятимерных псевдоримановых пространств.
IV. Структура проективных и аффинных алгебр Ли пятимерных жестких h-пространств
(*А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов*) 18

О геометрии орбит векторных полей Киллинга
(*Ж. О. Аслонов*) 32

Геометрический подход к задаче оптимального скалярного управления
двумя несинхронными осцилляторами
(*Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко*) 40

Удвоения циклических алгебр
(*В. М. Бурлаков, М. П. Бурлаков*) 52

Асимптотическое перечисление некоторых помеченных геодезических графов
(*В. А. Воблый*) 58

Пространства с полилинейными формами
(*Н. И. Гусева, Е. В. Лукьянова*) 68

Теорема Бельтрами в пространстве Минковского
(*А. В. Костин*) 73

Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном
расслоении гладкого конечномерного многообразия.
II. Уравнения движения на касательном расслоении к n-мерному многообразию
в потенциальном силовом поле
(*М. В. Шамолин*) 81

Полиномиальные автоморфизмы, квантование и задачи вокруг гипотезы Якобиана.
III. Автоморфизмы, топология пополнения и аппроксимация
(*А. М. Елишев, А. Я. Канель-Белов, Ф. Разавиния, Ц.-Т. Юй, В. Чжан*) 95

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 3–17
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-3-17

УДК 512.5; 514.744

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ КОНУСЫ ВИНБЕРГА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

© 2022 г. **Д. В. АЛЕКСЕЕВСКИЙ**

Аннотация. В работе излагаются базисные факты теории Винберга однородных выпуклых конусов, прежде всего специальных конусов Винберга, ассоциированных с клиффордовыми модулями, и их обобщению. Кратко рассмотрены приложения теории конусов к дифференциальной геометрии, физике (включая супегравитацию), информационной геометрии, выпуклому программированию и дифференциальным уравнениям.

***Ключевые слова*:** выпуклый конус, конус Винберга, клиффордов модуль, дифференциальной геометрия.

SPECIAL UNIFORM VINBERG CONES AND THEIR APPLICATIONS

© 2022 **D. V. ALEKSEEVSKII**

Abstract. In this paper, we present basic facts of Vinberg's theory of homogeneous convex cones, primarily the special Vinberg cones associated with Clifford modules, and their generalization. Applications of the cone theory to differential geometry, physics (including supergravity), information geometry, convex programming, and differential equations are briefly discussed.

***Keywords and phrases*:** convex cone, Vinberg cone, Clifford module, differential geometry.

***AMS Subject Classification*:** 13Jxx

1. Введение. *Выпуклым конусом* называется выпуклая область $\mathcal{V}$ векторного пространства $V = \mathbb{R}^n$, инвариантная относительно растяжений ($\mathbb{R}^+\mathcal{V} = \mathcal{V}$). Конус называется *однородным*, если группа автоморфизмов

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{V}) = \{A \in GL(V),\ A\mathcal{V} = \mathcal{V}\}$$

действует на нем транзитивно. Тогда $\mathcal{V} = \mathrm{Aut}(V)/K$ и существует просто транзитивная треугольная подгруппа $G \subset \mathrm{Aut}(V)$. Э. Б. Винберг развил дифференциальную геометрию выпуклого конуса, в частности, определил выпуклую вместе с логарифмом характеристическую функцию Винберга φ, которая характеризует конус и играет исключительно важную роль в приложениях. Достаточно сказать, что в Интернете словосочетание «Vinberg characteristic function» упоминается 680000 раз. В выпуклом программирований характеристическая функция используется как барьерная функция (А. С. Немировский, Ю. Е. Нестеров). Гессиан характеристической функции является (*канонической*) римановой метрикой и таким образом конус является римановым многообразием.

Геометрия конуса допускает интерпретацию в рамках *информационной геометрии Ченцова—Амари* как геометрии одного из самых важных классов статистических многообразий — экспоненциальных семейств. При этом каноническая метрика есть метрика Фишера—Рао экспоненциального семейства.

Описание широкого класса выпуклых конусов имеет большой интерес для приложений. В начале 1960-х гг. Винберг явно описал все однородные самосопряженные неразложимые выпуклые конусы как конусы положительно определенных эрмитовых матриц в пространстве эрмитовых матриц $\mathrm{Herm}_n(\mathbb{K})$ над алгеброй с делением $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.

Обобщая этот результат, он определил понятие матричной Т-алгебры $\mathfrak{A}$ как неассоциативной алгебры матриц $X = \|x_{ij}\|$ порядка n, с вещественными диагональными элементами $x_{ii} \in \mathbb{R}$, и недиагональными элементами $x_{ij} \in V_{ij}$, которые принадлежат различным евклидовым пространствам V_{ij}, причем $V_{ji} = V_{ij}^*$. Для определения матричного умножения требуется задать билинейные отображения

$$\beta_{ijk} \colon V_{ij} \times V_{jk} \to V_{ik}, \quad (x_{ij}, x_{jk}) \to x_{ij} \cdot x_{jk},$$

удовлетворяющие ряду аксиом. Важнейшей аксиомой является требование, чтобы при $i < j < k$ отображение β_{ijk} было изометрическим.

Билинейное отображения $\beta \colon V \times U \to W$ евклидовых пространств называется *изометрическим*, если

$$|u \cdot v| = |u||v|, \ \forall u \in U, \ v \in V.$$

Такие отображения известны только в двух случаях:

(i) если $\dim U = \dim V = \dim W$ (*очень специальное изометрическое отображение*) и
(ii) если $\dim U = \dim W$ (*специальное изометрическое отображение*).

Очень специальное отображение определяет (если отождествить U, W с V) в пространстве V структуру евклидовой алгебры Гурвица, которая по теореме Гурвица (A. Hurwitz, 1898) изоморфна $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ или $\mathbb{O}$.

Специальное изометрическое отображение $V \times U \to W$ определяет в $\mathbb{Z}_2$-градуированном пространстве $S = S_0 + S_1 := U + W$ структуру $\mathbb{Z}_2$ градуированного модуля над $\mathbb{Z}_2$ градуированной алгеброй Клиффорда $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}^0(V) + \mathrm{Cl}^1(V)$ и обратно любой $\mathbb{Z}_2$ градуированный клиффордов модуль $S = S_0 + S_1$ вместе с допустимой евклидовой метрикой $g_S = \langle \cdot, \cdot \rangle$, такой, что $\langle S_0, S_1 \rangle = 0$, $g_S(\mu_v s, s) = 0$ (где $\mu_v \colon s \mapsto v \cdot s$ — клиффордово умножение) задает специальное изометрическое отображение.

Градуированные модули клиффорда $S = S_0 + S_1$ над любой клифордовой алгеброй $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$ классифицированны M. F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro (1966), а допустимые псевдоримановы метрики — в совместной работе с V.Cortés (1997).

Явная классификация Т-алгебр Винберга и однородных выпуклых конусов известна только в двух случаях: когда конус самосопряжен и когда Т-алгебра есть специальная Т-алгебра Винберга ранга 3, ассоциированная с метрическим клиффордовым модулем.

Оказывается, что последняя конструкция обобщается на индефинитый случай [5], когда g_S есть псевдоевклидова допустимая метрика в градуированном клиффордовом модуле $S = S_0 + S_1$ над произвольной алгеброй Клиффорда $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$. Мы изложим эту конструкцию и кратко рассмотрим применения однородных конусов к супергравитации, информационной геометрии и других дисциплинах.

2. Базовые факты теории выпуклых конусов. Под *выпуклым конусом* мы будем понимать открытый выпуклый конус $\mathcal{V}$ векторного пространтсва $V \simeq \mathbb{R}^m$, не содержащий прямых.

Прямое произведение $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \subset V_1 \times V_2$ двух выпуклых конусов $\mathcal{V}_1 \subset V_1$, $\mathcal{V}_2 \subset V_2$ есть выпуклый конус.

Определение 1. Выпуклый конус называется неприводимым, если он не разлагается в произведение двух выпуклых конусов.

Пусть $\mathcal{V} \subset V$ — выпуклый конус и $\mathrm{Aut}(\mathcal{V}) \subset GL(V)$ — его группа автоморфизмов.

Определение 2.

1. Сопряженный конус $\mathcal{V}^*$ в сопряженном пространстве V^* определяется как выпуклый конус

$$\mathcal{V}^* = \{x' \in V^*, \ x'(y) > 0 \ \forall y \in \mathcal{V}\}$$

линейных форм, положительных на $\mathcal{V}$.

2. Конус называется самосопряженным, если при отождествлении V с V^* с помощью некоторой евклидовой метрики $\mathcal{V} = \mathcal{V}^*$.
3. Характеристическая функция φ выпуклого конуса задается формулой
$$\varphi(x) = \int\limits_{\mathcal{V}^*} e^{-(x',x)} d\xi', \quad x \in \mathcal{V}, \quad x'i \in \mathcal{V}^*,$$
где dx' — форма объема пространства $V^* = \mathbb{R}^n$.
4. Гессиан $g = \partial^2 \log \varphi$ определяет каноническую риманову метрику в конусе, инвариантную относительно группы $\mathrm{Aut}(\mathcal{V}) \subset GL(V)$ автоморфизмов.
5. Поверхность уровня $S \coloneqq \{x \in \mathcal{V},\ \varphi(x) = 1\}$ называется характеристической (или детерминантной) гиперповерхностью.
6. Конус $\mathcal{V}$ называется однородным, если группа $\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$ действует на нем транзитивно.

В этом случае характеристические гиперповерхности $S_r \coloneqq rS$, $r > 0$ являются орбитами унимодулярной (нормальной) подгруппы $\mathrm{Aut}(\mathcal{V})_o$ группы $\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$.

Предложение 1 (Э. Б. Винберг)**.**

1. *Характеристическая функция φ есть гладкая положительная функция в конусе $\mathcal{V}$, неограниченно возрастающая при приближении к границе.*
2. *Функции φ и $\ln \varphi$ являются выпуклыми.*
3. *Функция $\ln \varphi$ является $\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$-инвариантом, а φ — относительным инвариантом*:
$$\varphi(Ax) = \frac{1}{\det A} \varphi(x), \quad A \in G(\mathcal{V}).$$
В частности, $\varphi(\lambda x) = \lambda^{-n} \varphi(x)$, $\lambda > 0$.
4. *Пусть $x = rx_0$, $x_0 \in S$. Тогда гиперповерхность $S_r \coloneqq rS = \{\varphi(x) = r^{-n}\}$ содержит x и имеет касательное пространство*
$$T_x S_r = \Pi^n_{x^*} = \{y \in V,\ (x^*, y) = n\}.$$
В частности, $x^* \in \mathcal{V}^*$ и $(x^*, x) = n$. Более того, ковектор
$$x^* = \int\limits_{\mathcal{V}^*} e^{(x',x)} x' dx' \Big/ \int\limits_{\mathcal{V}^*} e^{(x,x')} dx' = \int\limits_{\mathcal{V}^* \cap \Pi^n_x} x' dx' \Big/ \int\limits_{\mathcal{V}^* \cap \Pi^n_x} dx'$$
является центром тяжести сечения сопряженного конуса $\mathcal{V}^*$ гиперплоскостью
$$\Pi^n_x = \{x' \in V^*,\ (x, x') = n\}.$$
5. *Отображение $x \mapsto x^*$ есть диффеоморфизм конуса $\mathcal{V}$ на конус $\mathcal{V}^*$.*

Каждая точка x' сопряженного конуса определяет плотность вероятностной меры
$$p_{x'}(x) = \frac{e^{(-x',x)}}{\varphi(x)}.$$
Таким образом, сопряженный конус отождествляется с семейством вероятностных мер в $\mathcal{V}$.

Предложение 2 (Э. Б. Винберг)**.** *Если выпуклый конус $\mathcal{V}$ однороден, то сопряженный конус $\mathcal{V}^*$ тоже однороден, и справедливы следующие утверждения*:

1. *Отображение $*\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ инволютивно*: $(x^*)^* = x$ *и* $\varphi(x) \cdot \varphi(x^*) = \mathrm{const}$.
2. *Пусть*
$$x_{\min} = rx_0 = \int\limits_{\mathcal{V} \cap \Pi} e^{(x',x)} x dx' \Big/ \int\limits_{\mathcal{V} \cap \Pi} e^{(x',x)} dx, \quad x_0 \in S$$
есть центр тяжести сечения конуса $\mathcal{V}$ некоторой гиперплоскостью Π. Тогда гиперплоскость Π касается поверхности уровня $\varphi = \mathrm{const}$ в центре тяжести $x_{\min}$ гиперплоского сечения $\Pi \cap \mathcal{V}$ и $x_{\min}$ есть (единственная) точка минимума функции φ в $\Pi \cap \mathcal{V}$. Иначе говоря,
$$\Pi = T_{x_{\min}}(S_r) = \Pi^n_{x^*_{\min}}, \quad x_{\min} = rx_0, \quad x_0 \in S.$$

3. Клиффордовы алгебры и клиффордовы модули.

Определение 3. Алгебру Клиффорда псевдоевклидова пространств $(V = \mathbb{R}^{p,q}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ можно определить как ассоциативную алгебру $\mathrm{Cl}(V)$ с единицей, порожденную пространством V и соотношениями $u \cdot v + v \cdot u = -2\langle u, v\rangle 1$. Векторное пространство $\mathrm{Cl}(V)$ естественным образом отождествляется с внешней алгеброй $\Lambda(V)$.

Базис (e_i) пространства V порождает базис алгебры Клиффорда:

$$e_{i_1\dots i_k} = e_{i_1} \cdot e_{i_2} \dots \cdot e_{i_{k-1}} \cdot e_{i_k}, \quad i_1 < \dots < i_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Алгебра Клиффорда допускает $\mathbb{Z}_2$ градуировку $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}^0(V) + \mathrm{Cl}^1(V)$, где $\mathrm{Cl}^0(V)$ (соответственно, $\mathrm{Cl}^1(V)$) порождаются мономами четной (соответственно, нечетной) степени.

3.1. Классификация алгебр Клиффорда. Алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}(V)$ имеет размерность 2^n, $n = p + q$, а ее четная подалгебра Cl^0_V — размерность 2^{n-1}. Обе эти алгебры изоморфны либо матричной алгебре $\mathbb{K}(N)$ некоторого порядка N, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ — алгебра с делением, либо прямой сумме $2\mathbb{K}(N)$ двух таких алгебр.

Определение 4. Говорят, что алгебра $\mathrm{Cl}_{p,q}$ имеет тип $t(\mathrm{Cl}_{p,q}) = r\mathbb{K}$, $r = 1, 2$, если она изоморфна алгебре $r\mathbb{K}(N)$. Градуированный тип определяется как пара

$$(r_0\mathbb{K}' r\mathbb{K}) = \big(t(\mathrm{Cl}^0(V)),\ t(\mathrm{Cl}(V))\big).$$

Градуированный тип алгебры Клиффорда зависит только от сигнатуры $s = p - q$ по модулю 8 и указан в следующей таблице (см. [5]).

s	1	2	3	4	5	6	7	8
$t(s)$	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	$\mathbb{C}, \mathbb{H}$	$\mathbb{H}, 2\mathbb{H}$	$2\mathbb{H}, \mathbb{H}$	$\mathbb{H}, \mathbb{C}$	$\mathbb{C}, \mathbb{H}$	$\mathbb{R}, 2\mathbb{R}$	$2\mathbb{R}, \mathbb{R}$

3.2. Метрические модули Клиффорда. Напомним, что любое представление матричной алгебры $\mathbb{K}(N)$ есть прямая сумма $k\mathbb{K}(N)$ несколькиъ копий тавтологического неприводимого представления.

Алгебра $2\mathbb{K}(N)$ имеет два неприводимых представления, определяемые проекцией на первое и второе слагаемое.

Это дает классификацию клиффордовых $\mathrm{Cl}(V)$-модулей: любой $\mathrm{Cl}(V)$-модуль является прямой суммой неприводимых и имеется ровно один клиффордов модуль $S_{p,q}$, если $s := p - q \equiv 1, 2, 4, 5, 6, 8 \pmod 8$ и два неприводимых модуля $S_{p,q}$, $S'_{p,q}$, если $s \equiv 3, 7 \pmod 8$.

$\mathbb{Z}_2$-Градуированные (неприводимые) $\mathrm{Cl}(V)$-модули находятся во взаимно-однозначном сответствии с (неприводимыми) $\mathrm{Cl}^0(V)$-модулями, см. [11]. Градуированному $\mathrm{Cl}(V)$ модулю $S = S_0 + S_1$ отвечает $\mathrm{Cl}^0(V)$ модуль S_0. Обратно, $\mathrm{Cl}^0(V)$ модуль S_0 однозначно продолжается до $\mathbb{Z}_2$ градуированного $\mathrm{Cl}(V)$ модуля

$$S = S_0 + S_1 := \mathrm{Cl}(V) \otimes_{\mathrm{Cl}^0(V)} S^0.$$

Определение 5. $\mathbb{Z}_2$-градуированный $\mathrm{Cl}(V)$-модуль $S = S_0 + S_1$ называется метрическим, если он снабжен псевдоевклидовой метрикой $g_S = \langle\cdot,\cdot\rangle$ для которой операторы клиффордова умножения

$$\mu_v\colon s \mapsto v \cdot s, \quad v \in V, \quad s \in S,$$

кососимметричны ($\langle s \cdot v, v\rangle = 0$). Если метрики g_V, g_S евклидовы, то говорят, что клиффордов модуль евклидов.

Клиффордово умножение $\mu\colon V \times S \to S$ для метрического клиффордова модуля есть изометрическое отображение, т.е.

$$|v \cdot s|^2 := \langle v \cdot s, v \cdot s\rangle = |v|^2 \cdot |s|^2 := \langle v, v\rangle\langle s, s\rangle.$$

3.3. Спинорная группа и ее спинорное представление. Спинорной группой $\mathrm{Spin}(V) = \mathrm{Spin}_{p,q}$ называется связная группа обратимых элементов алгебры $\mathrm{Cl}^0(V)$, порожденная произведениями $v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots v_{2k}$ четного числа элементов $v_i \in V$ с квадратом $v_i^2 = \pm 1$. Естественное представления группа $\mathrm{Spin}(V) \subset \mathrm{Cl}^0(V)$ в пространствах S_0, S_1 называются спинорными представлениями. Группа $\mathrm{Spin}(V)$ также действует присоединенным представлением

$$\mathrm{Ad}_g v = g \cdot v \cdot g^{-1}, \quad g \in \mathrm{Spin}(V), \quad v \in V$$

в пространстве V с ядром $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ и таким образом $\mathrm{Ad}_{\mathrm{Spin}(V)} = SO(V) \simeq \mathrm{Spin}(V)/(\pm 1)$.

4. Специальные псевдоевклидовы однородные конусы.

4.1. Определения. Специальная T-алгебра Винберга $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S)$, ассоциированная с метрическим $\mathrm{Cl}(V)$-модулем S состоит из матриц вида

$$X = \|x_{ij}\| = \begin{pmatrix} x_1 & X_3 & X_2 \\ X_3' & x_2 & X_1 \\ X_2' & X_1' & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & v & s_1 \\ v' & x_2 & s_0 \\ s_1' & s_0' & x_3 \end{pmatrix},$$

где $x_i \in \mathbb{R}$,

$$X_3 = v \in V, \qquad X_1 = s_0 \in S_0, \quad X_2 = s_1 \in S_1$$
$$X_3' = v' \in V^*, \quad X_1' = s_0' \in S_0^*, \quad X_2' = s_1' \in S_1.$$

В пространстве $\mathcal{A}$ определяется инволюция

$$\star : \mathcal{A} \ni X = \|x_{ij}\| \mapsto X^* = \|x_{ij}^*\|$$

где $x_{ij}^* = g \circ x_{ji}$ — сопряженный элемент к x_{ji}.

Матричное умножение верхне (и нижне) треугольных матриц определяется клиффордовым умножением

$$x_{12} \cdot x_{23} = X_3 \cdot X_1 = v \cdot s_0 \in S_1$$

и умножением чисел на векторы и спиноры. Остальные умножения матричных элементов однозначно определяются двумя условиями:

(i) ассоциативность произведений вида

$$x_{ij} \cdot x_{jk} \cdot x_{ki} \in \mathbb{R};$$

(ii) условием $(x_{ij} \cdot x_{jk})^* = x_{jk}^* \cdot x_{ij}^*$, означающим, что отображение $X \to X^*$ есть антиавтоморфизм алгебры $\mathcal{A}$.

Обозначим через $\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{F},\ X^* = X\}$ подпространство эрмитовых матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & X_3 & X_2 \\ X_3^* & x_2 & X_1 \\ X_2^* & X_1^* & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & v & s_1 \\ v^* & x_2 & s_0 \\ s_1^* & s_0^* & x_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Следующая теорема есть обобщение классического результата Э. Б. Винберга.

Теорема 1 (см. [1,5]).

1. *Специальная алгебра Винберга $\mathcal{A}(S)$ удовлетворяет всем аксиомам матричной T-алгебры Винберга за исключением аксиомы положительности метрики, которая выполняется только если метрики g_V, g_S евклидовы.*
2. *Пространство $\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{A},\ X^* = X\}$ эрмитовых матриц есть неассоциативная алгебра относительно йорданова умножения $X \circ Y = \frac{1}{2}(X \cdot Y + Y \cdot X)$, а группа $G = G(S)$ верхнетреугольных матриц с положительными элементами на диагонали есть разрешимая связная односвязная группа Ли, которая действует в пространстве $\mathcal{H}$. Орбита*

$$\mathcal{V} = G(\mathrm{Id}) = \{X = A \cdot A^*,\ A \in G\}$$

единичной матрицы является однородным открытым конусом с просто транзитивным действием группы G. Конус является выпуклым тогда и только тогда, когда g_V, g_S — евклидовы метрики.

Определение 6. Однородный конус $\mathcal{V}$ называется специальным конусом, ассоциированным с метрическим клиффордовым модулем S.

Группа G состоит из матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \alpha_2 & a_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ и $a_{12} \in V$, $a_{23} \in S_0$, $a_{13} \in S_1$. Ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из всех верхнетреугольных матриц A и линейно действует в пространстве $\mathcal{H}$ эрмитовых матриц по формуле

$$A(X) = T_A X \coloneqq AX + XA^*, \quad A \in \mathfrak{g}, \quad X \in \mathcal{H}.$$

Это действие интегрируется до действия (экспоненциальной) группы Ли $G = \{e^A, A \in \mathfrak{g}\}$, задаваемого формулой

$$e^A(X) = \exp(T_A)X = X + T_A X + \frac{1}{2!}T_A^2 X + \frac{1}{3!}T_A^3 X + \dots .$$

4.2. Свойства специального конуса Винберга. Пусть $\mathcal{V} = \{X = AA^*,\ A \in G\} \subset \mathcal{H}$ — специальный конус Винберга. Так как группа G действует в конусе $\mathcal{V}$ просто транзитивно, метричные элементы α_i, a_{12}, a_{23}, a_{13} определяют (групповые) координаты в конусе (но не в пространстве $\mathcal{H}$). В обозначениях (1) определим, следуя Винбергу, однородные полиномы $p_3(X)$, $p_2(X)$, $h(X)$, $p_1(X)$ степени 1, 2, 4, 3 в пространстве эрмитовых матриц

$$p_3(X) = x_3, \quad p_2(X) = x_2 x_3 - |X_1|^2, \quad p_1 = p_3(X)h(X),$$
$$h(X) = x_1 x_2 x_3 - \sum_{i=1}^{3} x_i |X_i|^2 + 2(X_3 \cdot X_1) \cdot X_2^*.$$

Ограничение этих полиномов на конус в групповых координатах имеет вид

$$p_3 = \alpha_3^2, \quad p_2 = (\alpha_2\alpha_3)^2, \quad h = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2, \quad p_1 = \alpha_3^2 h = (\alpha_1\alpha_2)^2\alpha_3^4.$$

Эти полиномы позволяют описать конус неравенствами и указать его характеристическую функцию.

Теорема 2 (см. [5])**.** *Конус $\mathcal{V}$ задается неравенствами $p_i(X) > 0$, $i = 1, 2, 3$, а его характеристическая функция φ имеет вид*

$$\varphi^{-1}(X) = (\alpha_1\alpha_2)^{2+n+N}\alpha_3^{2+2N} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{2+n+N} a_3^{N-n},$$

где $n = \dim V$, $N = \dim S_0 = \dim S_1$.

Отметим, что при отождествлении сопряженного пространства $\mathcal{H}^*$ с $\mathcal{H}$ с помощью метрики $g(X, Y) = \operatorname{tr} XY$, сопряженный конус $\mathcal{V}^*$ задается неравенствами $p_i^*(X) > 0$, $i = 1, 2, 3$, где сопряженные полиномы имеют вид

$$p_3^*(X) = x_1, \quad p_2^*(X) = x_1 x_2 - |X_3|^2, \quad p_1^*(X) = p_3^*(X)h^*(X)$$

и $h^*(X) = h(X)$.

Определение 7. Кубическая функция $h(X) = \frac{p_1(X)}{p_3(X)} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2$ называется кубическим потенциалом конуса (или кубикой), а гиперповерхность $\mathcal{V}_1 = \{h(X) = 1\} \subset \mathcal{V}$ — детерминантной гиперповерхностью.

5. Применения в дифференциальной геометрии и супергравитации. Со специальным однородным конусом $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ (ассоциированным с евклидовым клиффордовым модулем) можно связать ряд важных однородных римановых многообразий, прежде всего однородное специальное аффинное кэлерово многообразие M и однородное специальное проективное кэлерово многообразие, а также специальное гиперкэлерово многообразие и специальное кватернионно кэлерово многообразие с отрицательной кривизной Риччи. Соответствующие конструкции были впервые предложены физиками Де Витом и Ван Пройеном [17] и называются (аффинным и проективным) r-отображениями и c-отображениями. Из работы [4] следует, что специальные кватернионно кэлеровы многообразия, ассоциированные со специальными конусами Винберга, исчерпываются все кватернионно кэлеровы многобразия, допускающие транзитивную разрешимую группу изометрий.

5.1. Аффинные и проективные специальные кэлеровы многообразия. Пусть $\mathcal{V} \subset V = \mathbb{R}^{n+1}$ — специальный однородный конус и $\mathcal{H} = \mathcal{V}_1 = \{h(x) = 1\}$ — его детерминантная гиперповерхность. Гессианова метрика $g_{\mathcal{V}} = -\partial^2 h(x)$ имеет сигнатуру $(n, 1)$, а ее ограничение $g_{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$ есть риманова метрика.

Определение 8.

1. (Аффинное) специальное (псевдо)кэлерово многобразие есть (псевдо)кэлерово многообразие (M, g, J, ω), снабженное плоской связностью (без кручения) ∇, которая сохраняет кэлерову форму ω ($\nabla\omega = 0$) и удовлетворяет условию
$$(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X, \quad X, Y \in TM.$$
2. Многообразие (M, g, J, ω) называется коническим, если задано такое поле ξ гомотетий ($\mathcal{L}_\xi g = cg$), что
   (a) $\nabla\xi = \nabla^g\xi = \mathrm{id}$, где ∇^g — связность Леви-Чивиты;
   (b) Метрика g положительно определена на $\mathcal{D} \coloneqq \mathrm{span}(\xi, J\xi)$ и отрицательно определена на $\mathcal{D}^\perp$;
   (c) Коммутирующие голоморфные векторные поля $(\xi, J\xi)$ порождают свободное голоморфное действие группы $\mathbb{C}^* = \{\rho e^{i\theta}\} = \{\exp t\xi \cdot \exp\theta J\xi\}$, где $e^{i\theta} = \exp\theta J\xi$ есть группа гомотетий.

Если (M, g, J, ω, ξ) — такое коническое специальное многообразие, то на факторпространстве $\bar{M} = M/\mathbb{C}^*$ индуцируется кэлерова структура $(\bar{g}, \bar{J})$, и кэлерово многообразие $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{J})$ называется проективным специальным кэлеровым многообразием. Простейшим примером этой конструкции является метрика Фубини—Штуди на $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}^*$.

Локально структура конического специального кэлерова многообразия M определяется одной голоморфной функцией $F(z)$ (препотенциалом), который в специальных конических голоморфных координатах $z = (z^I)$, $I = 0, 1, \ldots, n$ является однородной функцией степени 2 (см. [16]).

Метрика дается формулой
$$g_M = N_{IJ} dz^I d\bar{z}^J, \quad N_{IJ}(z, \bar{z}) = 2\,\mathrm{Im}\, F_{IJ} = 2\,\mathrm{Im}\,\partial_{z^I}\partial_{z^J} F.$$
и имеет кэлеров потенциал $g_M|_U = r^2 = g_M(\xi, \xi)$, где поле гомотетий
$$\xi = z^I\partial_{z^I} + \bar{z}^I\partial_{\bar{z}^I}.$$

5.2. Аффинное r-отображение. Аффинное r-отображение сопоставляет детерминантной гиперповерхности $\mathcal{H}$ специального однородного конуса однородное специальное кэлерово многобразие (M, g, J, ω). Многообразие $M = T\mathcal{H}$ есть кокасательное расслоение детерминантной гиперповерхности. Многообразие $M = T\mathcal{H} = E\mathcal{V}_1$ есть касательное расслоение характеристической гиперповерхности.

Плоская связность ∇ определяет изоморфизм касательного пространства T_vM в точке $v \in T_x\mathcal{V}_1$ в прямую сумму вертикального подпространства $T_v^{\mathrm{vert}}M \simeq T_x\mathcal{V}_1$ и горизонтального подпространства $\mathcal{H} \simeq T_x\mathcal{V}_1$ и тем самым изоморфизм $T_vM \simeq T_x\mathcal{V}_1 \oplus T_x\mathcal{V}_1$. Это позволяет определить в M структуру специального однородного кэлерова многобразия (см. [6]).

5.3. Проективное r-отображение (см. [16]). Пусть $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ — специальный выпуклый однородный конус с лоренцевой метрикой $g = -\partial^2 h(x)$ и $\mathcal{H} = \mathcal{V}_1$ — характеристическая гиперповерхность с индуцированной метрикой (или очень специальное вещественной многообразие). Проективное r-отображение сопоставляет многообразию $(\mathcal{H}, g|_{\mathcal{H}})$ проективное специальное кэлерово многообразие

$$\bar{M} := \mathbb{R}^n + i\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$$

с индуцированной комплексной структурой J и кэлеровой метрикой $g_{\bar{M}}$, задаваемой в голоморфных координатах $X^\mu := y^\mu + ix^\mu$, $\mu = 1, \dots n$ кэлеровым потенциалом

$$K(X, \bar{X}) = -\log 8h(x^\mu), \quad x^\mu = \operatorname{Re} X^\mu.$$

Это многообразие является проективизацией конического аффинного специального кэлерова многообразия (M, g_M, J_M, ξ), являющегося областью комплексного пространства $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C} \times \bar{M}$. Многообразие M имеет вид

$$M = \{z = z^0(1, X),\ X \in \bar{M} = \mathbb{R}^n + i\mathcal{V},\ z^0 \in \mathbb{C}\}.$$

Его кэлерова структура задается следующими препотенциалом и полем гомотетий:

$$F(z^0, \dots, z^n) = \frac{h(z^1, \dots, z^n)}{z^0}, \quad \xi = \sum_{I=0}^{n} (z^I \partial_{z^I} + \bar{z}^I \partial_{\bar{z}^I}).$$

5.4. c-Отображения.

Определение 9. Риманово $4n$-мерное многообразие (M, g) называется гиперкэлеровым (соотв., кватернионно-кэлеровым), если его группа голономии $\operatorname{Hol}(M)$ содержмится в группе $\operatorname{Sp}(n)$ (соответственно, $\operatorname{Sp}(1) \cdot \operatorname{Sp}(n)$). Любое гиперкэлерово многообразие является кватернионно-кэлеровым и характеризуется как кватернионно-кэлерово многообразие с нулевой кривизной Риччи или как риманово многообразие, обладающее тремя параллельными антикоммутирующими комплексными структурами (∇J_α, $\alpha = 1, 2, 3$) с $J_3 = J_1 J_2$.

Кватернионно-кэлеровы многообразия с ненулевой кривизной Риччи («собственные кватернионно-кэлеровы многообразия») характеризуется как риманово многообразие, обладающее паралллельной кватернионной структурой Q, т. е. параллельным подрасслоением $Q \subset \operatorname{End}(TM)$ локально порожденным антикоммутирующими почти комплексными структурами J_1, J_2, J_3. являются неприводимыми многообразиями Эйнштейна.

С каждым собственным кватернионно-кэлеровым многообразием (N, g, Q) со скалярной кривизной $\mathrm{sc} \neq 0$ связывается (псевдориманово, если $\mathrm{sc} < 0$) гиперкэлерово коническое многообразие $\hat{S}$, определяемое следующим образом.

Рассмотрим $SO(3)$-главное 3-сасакиево расслоение $\pi\colon S \to N$, где слой $S_x = \pi^{-1}(x)$ состоит из базисов $s = (J_1, J_2, J_3)$ пространства Q_x, удовлетворяющих кватернионным соотношениям. Связность Леви-Чивиты ∇^g индуцирует связность в главном расслоении $\pi\colon S \to M$. Пусть

$$\theta = \theta^1 \otimes e_1 + \theta^2 \otimes e_2 + \theta^3 \otimes e_3 \colon TM \to \mathfrak{so}(3)$$

— 1-форма этой связности, где (e_α) — стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$. Метрика g продолжается до (псевдо)римановой метрики

$$g_S = \sum_{\alpha=1}^{3} (\theta^\alpha)^2 + \pi^* g$$

в S, которая называется 3-сасакиевой метрикой. Риманов конус $(\hat{S}, \hat{g}_S := dr^2 + r^2 g_S)$ является гиперкэлеровым многообразием с группой гомотетий, порождаемой полем Эйлера $\xi = r\partial_r$ и параллельными комплексными структурами

$$J_\alpha = g_{\hat{S}}^{-1} \circ \hat{\omega}_\alpha,$$

где

$$\hat{\omega}_\alpha = -d\left(\frac{r^2}{2} \theta^\alpha\right)$$

— точные 2-формы на $\hat{S}$. Такое многообразие $\hat{S}$ называется гиперкэлеровым конусом. Группа $H =: \mathbb{H}^*/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}^+ \cdot SO(3)$ естественно действует на гиперкэлеровом конусе $\hat{S}$ и факторпространство $N = \hat{S}/H$ есть кватернионно кэлерово многообразие.

Естественное расслоение $\hat{S} \to M$ называется расслоением Свана (Andrew Swann), который установил взаимно однозначное соответствие между собственными кватернионно кэлеровыми многообразиями и гиперкэлеровыми конусами. Это соответствие сохраняется и для псевдоримановых кватернионно-кэлеровых многообразий M. Если M имеет сигнатуру $(4k, 4\ell)$, то соответствующий гиперкэлеров конус $\hat{S}$ имеет сигнатуру $(4+4\ell, 4k)$ (см. [8]).

Аффинное (или жесткое) c-отображение сопоставляет специальному аффинному кэлерову многообразию (M, g, J, ∇) его кокасательное расслоение $N = T^*M$ с индуцированной гиперкэлеровой структурой (g_N, J_1, J_2, J_3), которая строится с помощью тривиализации касательного расслоения с помощью плоской связности ∇ как для аффинного r-отображения.

Проективное c-отображение сопоставляет проективному специальному кэлерову $(2n-2)$-мерному многообразию $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{J})$, являющемуся проективизацией специального кэлерова конического $2n$-мерного многообразия M, кватернионно кэлерово мноогообразие $\bar{N}$ размерности $4n$, которое является проективизацией гиперкэлерова конуса $\hat{(N)}$ размерности $4n+4$. Поэтому достаточно сопоставить специальному кэлерову коническому многообразию M гиперкэлеров конус $\hat{N}$. Он строится в два приема. Сначала рассматривается гиперкэлерово многообразие $N = T^*M$, доставляемое аффинным c-отображением, а затем к нему применяется конструкция конификации, предложенная в [7].

5.5. Применения в физике. Конструкции r-отображения и c-отображения возникли в теории супергравитации в работах де Вита и Ван Пройена.

Скалярные поля в пятимерной ($D = 5$, $N = 2$) супергравитации принимают значения в очень специальном вещественном многообразии, задаваемом кубическим однородным полиномом $q(X)$. Как показали де Вит и Ван Пройен (см. [17]) и Кортес (см. [15]), все такие однородные многообразия (в неприводимом случае) исчерпываются гиперповерхностями $\mathcal{V}_1$ специальных конусов Винберга $\mathcal{V}(S)$.

r-Отображение соответствует размерностной редукции к размерности 4. Иначе говоря, в $D = 4$ супергравитации, полученной размерностной редукцией, скалярные поля принимают значение в проективном специальном кэлеровом пространстве $\bar{M}$, являющегося образом детерминантной гиперповерхности при r-отображении. Аналогично, размерностная редукция $D = 4$ супергравитации к $D = 3$ соответствует c-отображению пространства значений $\bar{M}$ скалярных полей в кватернионно кэлерово многообразие $\bar{N}$.

6. Применения в информационной геометрии.

6.1. Об истории создания информационной геометрии. Основной задачей информационной геометрии является изучение дифференциальной геометрии многообразий различных классов вероятностных мер на многообразии M и ее применению к статистике и теории вероятностей, машинному обучению, искусственному интеллекту, математическому программированию и к другим прикладным дисциплинам. С 2018 г. издается журнал «Information Geometry».

Информационная геометрия восходит к работам Р. А. Фишера и его ученика К. Р. Рао по статистике. Важный вклад в создание информационной геометрии внес С. Кульбак, который, обобщая идеи К. Шеннона, ввел основополагающее понятие относительной энтропии, получившей название дивергенции Кульбака—Лейблера или информационного уклонения.

Систематическое развитие информационная геометрия получила только в работах Н. Н. Ченцова (см. [3]) и затем С. И. Амари, и она часто называется на Западе информационной геометрией Ченцова—Амари. Н. Н. Ченцов, заложивший основы этой теории, был учеником А. Н. Колмогорова и работал в Москве.

Парадоксально, что в России сейчас практически отсутствуют исследования по информационной геометрии, а в русской Википедии даже нет статьи о Н. Н. Ченцове и практически отсутствует статья об информационной геометрии. Как написано в статье «Категория: Информационная геометрия» в Википедии «У этой категории нет основной статьи “Информационная геометрия”».

Основной геометрической структурой, изучаемой в информационной геометрии, является дивергенция (или информационное уклонение одной вероятностной меры от другой). С дивергенцией связывается риманова метрика g, называемая метрикой Фишера—Рао, и линейная связность без кручения ∇, введенная Ченцовым, для которой $S = \nabla g$ есть симметрическая 3-форма (тензор Амари—Ченцова). В этом случае сопряженная связность ∇^* тоже не имеет кручения. Пара (g, ∇) называется статистической структурой, а многообразие M со статистической структурой — статистическим многообразием. Если при этом связность является плоской, то (M, g, ∇) называется гессиановым многообразием или иначе дуально плоским многообразием. В этом случае в локальных плоских координатах метрика $g = \partial^2 f(x) = \mathrm{Hess}(f(x))$ есть гессиан некоторой функции.

6.2. Базовые понятия информационной геометрии: дивергенция, метрика Фишера—Рао, связность Ченцова. Дивергенция является гладкой неотрицательной функцией $\mathcal{D}(x, y)$ пары точек многообразия M, обращающейся в нуль только на диагонали так, что точки диагонали являются трансверсально невырожденными точками минимума. Чтобы дать более развернутое определение, введем следующие обозначения.

Многообразие M с локальными координатами x^i мы будем отождествлять с диагональю $M = \{y = x\}$ декартова квадрата $M \times M = \{(x, y)\}$ с локальными координатами $(x^i; y^j)$. Частные производные функции $f(x, y) \in C^\infty(M \times M)$ обозначаются

$$\partial_i f = f_{,i} \coloneqq \partial_{x^i} f, \quad \bar{\partial}_j f = f_{,\bar{j}} \coloneqq \partial_{y^j} f.$$

Положим $\partial f \coloneqq (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$; $\bar{\partial} f \coloneqq (\bar{\partial}_1 f, \dots, \bar{\partial}_n f)$. Если неотрицательная функция $f(x, y)$ обращается в нуль на M, то $\partial f|_M = \bar{\partial} f|_M = 0$ и матрица вторых частных производных

$$\mathrm{Hess}(f)|_M = \partial^2 f|_M = \bar{\partial}^2 f\_M = -\partial\bar{\partial} f|_M \geqslant 0$$

определяет симметрическую неотрицательно определенную симметрическую билинейную форму (гессиан) $g = \partial^2 f|_M$ на многообразии M.

Определение 10. Дивергенция, или информационное уклонение есть неотрицательная функция $\mathcal{D}(x, y)$ пары точек многообразия M, которая обращается в нуль только на диагонали $M \subset M \times M$ и имеет в точках диагонали положительно определенный гессиан $g = \partial^2 \mathcal{D}|_M$, т.е. риманову метрику

$$g = g_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad g_{ij} = -\partial_i \bar{\partial}_j \mathcal{D}(x, x),$$

которая называется метрикой Фишера—Рао.

Частные производные метрики

$$\Gamma_{jk.m}(x) \coloneqq \mathcal{D}_{,jk\bar{m}}(x, x), \quad \Gamma^*_{jk.m}(x) \coloneqq \mathcal{D}_{,\bar{j}\bar{k}m}(x, x).$$

задают пару сопряженных связностей

$$\nabla = \nabla^g + C, \quad \nabla^* = \nabla^* + C$$

без кручения с символами Кристоффеля

$$\Gamma^i_{jk} = g^{im} \Gamma_{jk.m}, \quad (\Gamma^*)^i_{jk} = g^{im} \Gamma^*_{jk.m}.$$

Сопряженность означает, что

$$Z \cdot g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Симметрическая 3-форма

$$S = \nabla g = g \circ C = g_{ij} C^i_{k\ell}$$

называется тензором Амари—Ченцова.

Определение 11. Статистическим многообразием называется риманово пространство (M, g) со связностью $\nabla = \nabla^g + C$ без кручения с симметрической 3-формой $\nabla g = g \circ C$. Здесь ∇^g — связность Леви-Чивиты.

В этом случае сопряженная связность $\nabla^* = \nabla - C$ тоже не имеет кручения. Дивергенция определяет на M структуру статистического многообразия. Статистическое многообразие называется гессиановым (иди дуально плоским), если связность ∇ (а значит, и сопряженная связность ∇^*) плоские.

6.3. Примеры статистических многообразий. Приведем два важных примера статистических многообразий, связанных с самосопряженным конусом $\mathcal{P}(n)$ положительно определенных матриц. Их обобщению на другие однородные выпуклые конуса посвящена большая литература, см., например, [10, 20, 25].

Пример 1 (конус гауссовых нормальных распределений)**.** Стандартная мультивариативная нормальная гауссова мера в евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^n, g_0)$ имеет вид

$$\gamma_0|dx| = (2\pi)^{n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)|dx|, \quad |x|^2 = g_0(x,x),$$

где $|dx|$ — мера Лебега, а $\gamma_0 = (2\pi)^{n/2}\exp(-|x|^2/2)$ — стандартное гауссово распределение.

Связная аффинная группа $\mathrm{Aff}_n^+ = \{A = (L, a),\ x \mapsto Ax + a\}$ действует транзитивно в конусе $\mathcal{P}(n)$ евклидовых метрик по формуле

$$A^*(g)(x,x) = g_L(x,x) \coloneqq g(L^{-1}x, L_x^{-1}) = g((LL^*)^{-1}x, x) = g(S^{-2}x, x) = xS^{-2}x^t,$$

где $S \coloneqq (LL^*)^{1/2} > 0$. Это действие продолжается до транзитивного действия $T_A = T_{(L,a)}$ аффинной группы в пространстве $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ гауссовых распределений по формуле

$$T_A\gamma_0 = \gamma_A = (A^{-1})^*\gamma_0 \coloneqq \frac{1}{2\pi^{n/2}\det S}\exp\left(-(x-a)S^{-2}(x-a)^t\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma^{n/2}}\exp\left(-\frac{(x-a)S_0^{-2}(x-a)^t}{2\sigma^2}\right),$$

где

$$L = \sigma L_0, \quad \det L_0 = 1, \quad S = \sigma S_0, \quad S^2 = LL^* = \sigma^2 L_0 L_0^* = \sigma_2 S_0^2.$$

Отображение

$$\mathcal{N} \ni \gamma_A \mapsto \hat{A} = (\det S)^{-2/(n+1)}\begin{pmatrix} S^2 + a\otimes a^t & a \\ a^t & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}(n+1)_1 \subset \mathcal{P}(n+1).$$

есть Aff_n^+-эквивариантный диффеоморфизм многообразия $\mathcal{N} = \mathrm{Aff}_n/SO(n)$ гауссовых распределений на характеристическую (детерминантную) Aff_n-инвариантную гиперповерхность

$$\mathcal{P}(n+1)_1 = \{X \in \mathcal{P}(n+1),\ \det X = 1\}$$

однородного конуса $\mathcal{P}(n{+}1) = GL(n{+}1)/SO(n{+}1)$ положительно определенных матриц. Действие группы Aff_n определяется вложением $\mathrm{Aff}_n \to SL(n+1, \mathbb{R})$:

$$A = (L, a) \mapsto \hat{A} = (\det L)^{\frac{-1}{n+1}}\begin{pmatrix} L & a \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, многообразие гауссовых распределений отождествляется с детерминантной гиперповерхностью $\mathcal{P}(n{+}1)_1 = SL(n{+}1,\mathbb{R})/SO(n{+}1)$ и транзитивное действие группы Aff_n продолжается до действия группы $SL(n{+}1,\mathbb{R})$. Однородное пространство $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = SL(n{+}1)/SO(n{+}1)$ является неприводимым симметрическим пространством. Геодезические этого пространства хорошо известны. Пусть

$$X = A\Lambda A^{-1} \in \mathcal{P}(n+1)_1, \quad A \in SO(n+1),$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{P}(n+1)$ — матрица из собственных чисел λ_i матрицы $X \in \mathcal{P}(n+1)_1$. Тогда геодезическая из единичной матрицы, проходящая через точку X, имеет вид

$$\gamma(t) = A\Lambda(t)A^{-1}, \quad \Lambda(t) \coloneqq \mathrm{diag}\left(e^{t\log\lambda_1}, \ldots, e^{t\log\lambda_{n+1}}\right).$$

Пример 2 (многобразие распределений Висхарда (Whishart distributions, 1928))**.** Пусть $M = \mathcal{P}(n)$ — конус положительно определенных матриц. Для фиксированного числа $m \geqslant n$ пространство распределений Висхарда $\mathcal{N}^m$ отождествляется с конусом $\mathcal{P}(n)$. Распределение, ассоциированное с $V \in \mathcal{P}(n)$, есть

$$P_V(X) \coloneqq c(V,m)|X|^{m-n-1}\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr} V^{-1}X\right).$$

Пусть Y — $(m\times n)$-матрица, строки которой $Y_1, \ldots, Y_m \in \mathbb{R}^n$ суть независимые случайные векторы с нормальным законом распределения с нулевым средним. Распределение Висхарда описывает распределение дисперсии

$$X = \sum_{i-1}^{m} Y_i^t Y_i$$

случайной матрицы Y. Распределения Висхарда обобщаются на другие однородные выпуклые конусы (см. [10]).

6.4. Проблема построения канонической дивергенции на статистическом многообразии. Каждое статистическое многообразие (M, g, ∇) обладает дивергенцией $\mathcal{D}(x,y)$, которая порождает статистическую структуру (g, ∇), но такая дивергенция не единственна. Имеется несколько конструкций канонической дисперсии. Отметим работы [18, 19], в которых для любого статистического многообразия (M, g, ∇) строятся две канонических дивергенции D, D^*, таких, что $D^*(p,q) = F(D(q,p))$, где F — некоторая функция. Если статистическое многообразие являеися симметрическим, т. е. его ковариантный тензор кривизны R ковариантно постоянен ($\nabla R = 0$) и удовлетворяет условию

$$R(X,Y,Y,Y) = 0 \quad \forall X, Y \in TM,$$

то $D^*(p,q) = D(q,p)$.

Приведем примеры дивергенций. *Дивергенция Брегмана* (Bregman divergence) выпуклой функции φ в $V = \mathbb{R}^n$ задается формулой

$$D_\psi(\xi :, \xi_0) \coloneqq \psi(\xi) - \psi(\xi_0) - d\psi(\xi_0)(\xi - \xi_0).$$

Дивергенция Кульбака—Лейблера (Kulbach–Leibler divergence) или относительная энтропия между двумя вероятностными распределениями $p(x)$, $q(x)$ задается формулой

$$D_{KL}(p(x), q(x)) = -\int p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}.$$

6.5. Преобразование Лежандра. Напомним, что преобразование Лежандра сопоставляет выпуклой функции $f(x)$ в области U векторного пространства V сопряженную выпуклую функцию $f^*(\xi)$ в некоторой области $D^* \subset V^*$ сопряженного пространства V^*. Она задается следующим образом. Отображение $D \ni x \mapsto x^* = \partial f(x) = df(x) \in D^* \subset V^*$ есть диффеоморфизм. Сопряженная функция имеет вид

$$f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle - f(x) = \sup_{x_1\in D}\left[\langle \xi, x_1\rangle - f(x_1)\right] \tag{3}$$

где $x = x(x^*)$. Дифференцируя (3), получаем

$$\partial f^*(x^*) = x + x^*\frac{\partial x}{\partial x^*} - \partial f(x)\frac{\partial x}{\partial x^*} = x.$$

Отсюда следует, что гессиан

$$\mathrm{Hess}\, f^*(x^*) = \partial^2 f^*(x^*) = \frac{\partial x(x^*)}{\partial x^*}$$

положителен как обратная матрица к гессиану $\partial x^*(x)/\partial x$.

6.6. Выпуклые конусы как гессиановы многообразия, экспоненциальные семейства и характеристическая функция Винберга. Пусть $\mathcal{V} \subset V$ — выпуклый конус в пространстве $V = \mathbb{R}^n$ со стандартными декартовыми координатами ξ_i и $\mathcal{V}^* \subset V^*$ — сопряженный конус с двойственными координатами x^i, так что $(\xi, x) = \xi_i x^i$. Пусть

$$\varphi(\xi) = \int\limits_{\mathcal{V}^*} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi$$

— характеристическая функция конуса $\mathcal{V}$. Точка $\xi \in \mathcal{V}$ определяет инвариантную вероятностную меру в конусе $\mathcal{V}^*$ с плотностью

$$p(x, \xi) = p_\xi(x) = \frac{e^{-\langle \xi, x \rangle}}{\varphi(\xi)}.$$

Таким образом конус $\mathcal{V}$ задает семейство вероятностных мер в конусе $\mathcal{V}^*$. Это семейство называется экспоненциальным семейством и является одним из самых популярных статистических многообразий, возникающих в статистике. Как отметил С.-И. Амари (см. [9]), экспоненциальное семейство статистических распределений «не только является типичной статистической моделью, включающей многие хорошо известные семейства вероятностных распределений, такие как дискретное распределение, распределение Гаусса, мультинормальное распределение, гамма распределение и т. д., но и ассоциируется с выпуклой функцией, известной как кумулятивная порождающая функция или свободная энергия».

Положим $\psi(x) = -\log \varphi(x)$. Тогда канонический $\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$-инвариантный диффеоморфизм Винберга записыывается в виде

$$*\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*, \quad \xi \mapsto \xi^* := d\psi(\xi) = \int\limits_{\mathcal{V}} \xi p_\xi(x) dx = E([\xi]).$$

где $\xi^* = d\psi(\xi)$ есть форма Кошуля. Таким образом, $\eta(\xi) = \xi^*$ есть математическое ожидание случайной величины ξ на конусе $\mathcal{V}^*$ с распределением $p_\xi(x)$. Как показал Сасаки, это отображение эквивариантно относительно группы проективных преобразований, сохраняющих $\mathcal{V}$, а значит, и $\mathcal{V}^*$.

Координаты η^i точки $\eta(\xi) \in \mathcal{V}^*$ образуют систему координат сопряженного конуса $\mathcal{V}^*$. Они называются естественными или каноническими параметрами экспоненциального семейства.

Покажем (см. [9]), что преобразование Лежандра $\epsilon(\eta) = (\psi)^*(\eta)$ функции $\psi = -\log \varphi$ есть энтропия $-E(\log p_\xi(x))$ распределения p_ξ. Имеем

$$-E([\log p_{xi}(x)]) = -\int\limits_{\mathcal{V}} p_\xi(x) \log p_\xi(x) dx = \int\limits_{\mathcal{V}} p_\xi(x)[(x, \xi) - \psi(\xi)] dx = (\xi, \eta) - \psi(\xi)) = \psi^*(\eta).$$

Здесь $\eta(\xi) = d\psi(\xi)$ и $\xi = \xi(\eta) = d\epsilon(\eta) = d\psi^*(\eta)$ — обратное преобразование Лежандра.

Заметим также, что дивергенция Брегмана $D_\psi(\eta, \eta')$ совпадает с дивергенцией Кульбака—Лейблера $D_{KL}(p_{\eta'}, p_\eta)$ и имеет вид

$$D_\psi(\xi', \xi) = \psi(\theta') - \psi(\theta) - (\eta, \xi' - \xi) = \int\limits_{\mathcal{V}} p(x, \xi) \log \frac{p(x, \xi)}{p(x, \xi')} dx = D_{KL}(\xi, \xi').$$

Каноническая метрика совпадает с метрикой Фишера и имеет вид

$$g^{\mathrm{can}} = \partial^2 \phi(\xi) = \partial \int\limits_{\mathcal{V}^*} \xi \partial(p(x, \xi)) d\xi = \int\limits_{\mathcal{V}^*} \xi \otimes \xi p(x, \xi) - \left(\int\limits_{\mathcal{V}^*} \xi p(x, \xi) \right)^2 = E\big([\xi \otimes \xi]\big) - E\big([\xi]\big)^2 = \mathrm{Var}(\xi).$$

6.7. Применения в выпуклом программировании. Основная проблема выпуклого программирования (или выпуклой оптимизации) состоит в нахождении минимум выпуклой функции $F(X)$, $X \in V = \mathbb{R}^n$ в выпуклой области $D \subset V$.

Итерационный метод Ньютона состоит в движении шагами в сторону минимума. Шаг Ньютона $X_0 \to X_1$ состоит в аппроксимации функции $F(X)$ в окрестности точки X_0 квадратичной функцией $F(X)_2$ (отрезком ряда Тейлора) и сдвигу в сторону минимума этой квадратичной функции:

$$X_0 \mapsto X_1 = X_0 + t\Delta X_0, \quad \Delta X_0 = -(\operatorname{Hess} F(X))^{-1} \nabla F(X).$$

Проблема состоит в том, что итерация может уводить на границу области. Чтобы этого избежать, надо модифицировать функцию $F(X)$, прибавив к ней барьерную функцию $B(X)$, которая велика в окрестности границы и не меняет минимума функции $F(X)$.

Пример 3 (положительное полуопределенное программирование)**.** Задача состоит в нахождении минимума выпуклой функции $F(X)$ в конусе $\mathcal{P}(n)$ положительно определенных матриц или, более общо, в сечении этого конуса плоскостью $\Pi = \{X, \operatorname{tr} A_1 X = b_1, \dots, \operatorname{tr} A_m X = b_m\}$ коразмерности m. Такая проблема возникает, например, в теории управления [9, 25]. В этом случае барьерной функцией является логарифм характеристической функции

$$B(X) = -\log\det X = 2\log\varphi(X),$$

где $\varphi(X)$ характеристическая функция Винберга, см. [12].

6.8. Применения в теории дифференциальных уравнений. Характеристические гиперповерхности $\varphi = \mathrm{const}$ однородного выпуклого конуса являются однородными аффинными гиперсферами гиперболического типа (средняя кривизна есть отрицательная константа) и все такие гиперсферы исчерпываются характеристическими гиперповерхностями. Характеристическая функция φ есть решение уравнения Монжа—Ампера. Ченг и Яу (см. [13]) развили общую теорию уравнений Монжа—Ампера в выпуклых конусах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Винберг Э. Б.* Теория однородных выпуклых конусов// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1963. — *12.* — С. 303–358.
2. *Кульбак С.* Теория информации и статистика. — М.: Наука, 1967.
3. *Ченцов Н. Н.* Избранные труды. — М.: Ин-т прикл. мат. им. М. В. Келдыша РАН, 2002.
4. *Алексеевский Д. В.* Классификация кватернионных пространств с транзитивной разрешимой группой движений// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — *39*, № 2. — С. 315–362.
5. *Alekseevsky D. V., Cortes V.* Classification of N-(super)-extended Poincare algebras and bilinear invariants of the spinor representation of $\mathrm{Spin}(p,q)$// Commun. Math. Phys. — 1997. — *183*, № 3. — P. 477–510.
6. *Alekseevsky D. V., Cortes V.* Geometric construction of the r-map: from affine special real to special Kähler manifolds// Commun. Math. Phys. — 2009. — *291*, № 2. — P. 579–590.
7. *Alekseevsky D. V., Cortes V., Mohaupt T.* Conification of Kähler and hyper-Kähler manifolds// Commun. Math. Phys. — 2013. — *324*, № 2. — P. 637–655.
8. *Alekseevsky D. V., Cortes V., Dyckmanns M., Mohaupt T.,* Quaternionic Kähler metrics associated with special Kähler manifolds// J. Geom. Phys. — 2015. — *92.* — P. 271–287.
9. *Amari S.* Information Geometry and Its Applications. — Springer, 2016.
10. *Andreson S. A., Wojnar G. G.* Wishard distributions on homogeneous cones// J. Theor. Probab. — 2004. — *17.* — P. 781–818.
11. *Atiah M. F., Bott R., Shapiro A.* Clifford modules// Topology. — 1964. — *3.* — P. 3–38.
12. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
13. *Cheng C.-Y., Yau S. T.* Complete affine hypersurfaces. I. The completeness of affine metrics// Commun. Pure Appl. Math. — 1986. — *34.* — P. 839–866.
14. *Cortés V.* Alekseevskian spaces// Differ. Geom. Appl. — 1996. — *6*, № 2. — P. 129–168.
15. *Cortés V.* Homogeneous special geometry// Transform. Groups. — 1996. — *1*, № 4. — P. 337–373.
16. *Cortés V., Dyckmanns M., Jüngling M., Lindemann D.* A class of cubic hypersurfaces and quaternionic Kahler manifolds of co-homogeneity one/ `arXiv: 1701.07882 [math.DG]`.
17. *de Wit B., Van Proeyen A.* Special geometry, cubic polynomials and homogeneous quaternionic spaces// Commun. Math. Phys. — 1992. — *149.* — P. 307–333.
18. [F-A]*Felice D., Ay N.* Divergence functions in information geometry/ `arXiv: 1903.02379 [math.DG]`.
19. *Felice D., Mancini S., Ay N.* Canonical divergence for measuring classical and quantum complexity/ `arXiv: 1903.09797 [math.ph] ArXiv 1903.09797, p17..`

20. *Forrester P. J.* Octonions in random matrix theory// Proc. Roy. Soc. A. Math. Phys. Eng. Sci. — 2017. — *A473.* — 2016080.
21. *Freedman D. Z., van Proeyen A.* Supergravity. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012.
22. *Ishi H.* Homogeneous cones and their applications to statistics// in: Modern Methods of Multivariate Statistics. — Paris: Hermann, 2014. — P. 135–154.
23. *Lovrić M., Min-Oo M., Ruh E. A.* Multivariate normal distributions parametrized as a Riemannian symmetric space// J. Multivar. Anal. — 2000. — *74*, № 1. — P. 36–48.
24. *Nielsen F., Garcia V.* Statistical exponential families: A digest with flash cards/ `arXiv: 0911.4863v2 [cs.LG].`
25. *Ohara A.* Geodesics for dual connections and means on symmetric cone// Integral Equations Operator Theory. — 2004. — *50.* — P. 537–548.

Алексеевский Дмитрий Владимирович
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва;
University of Hradec Králové, Czech Republic
E-mail: `dalekseevsky@iitp.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 18–31
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-18-31

УДК 514.763

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. IV. СТРУКТУРА ПРОЕКТИВНЫХ И АФФИННЫХ АЛГЕБР ЛИ ПЯТИМЕРНЫХ ЖЕСТКИХ h-ПРОСТРАНСТВ

© 2022 г. **А. В. АМИНОВА, Д. Р. ХАКИМОВ**

Аннотация. Работа посвящена имеющей многочисленные геометрические и физические приложения проблеме исследования многомерных псевдоримановых многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Настоящая статья является четвертой частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *212.* — С. 10–29. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *213.* — С. 10–37. Третья часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *214.* — С. 3–20. Окончание будет опубликовано в следующем выпуске.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h-пространство, система дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнение Киллинга, проективная алгебра Ли.

LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE MOTIONS OF FIVE-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES. IV. STRUCTURE OF PROJECTIVE AND AFFINE LIE ALGEBRAS OF FIVE-DIMENSIONAL RIGID h-SPACES

© 2022 **A. V. AMINOVA, D. R. KHAKIMOV**

Abstract. This work is devoted to the problem of studying multidimensional pseudo-Riemannian manifolds that admit Lie algebras of infinitesimal projective (in particular, affine) transformations, wider than Lie algebras of infinitesimal homotheties. Such manifolds have numerous geometric and physical applications. This paper is the fourth part of the work. The first part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *212.* — P. 10–29. The second part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *213.* — P. 10–37. The third part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *214.* — P. 3–20. The last part will be published in the next issue.

Keywords and phrases: differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space, system of partial differential equations, nonhomothetical projective motion, Killing equation, projective Lie algebra.

AMS Subject Classification: 53Z05

4. Структура проективных и аффинных алгебр Ли пятимерных жестких h-пространств

В данном разделе исследуются пятимерные псевдоримановы пространства, допускающие *инфинитезимальные проективные преобразования.* Находится общее решение уравнения Эйзенхарта для каждого из жестких h-пространств типов $\{221\}$, $\{32\}$, $\{41\}$ и $\{5\}$ непостоянной кривизны. Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования негомотетического проективного движения в каждом из перечисленных h-пространств непостоянной кривизны и описывается структура негомотетической проективной алгебры Ли этих пространств.

4.1. Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{221\}$.

4.1.1. Найдем общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве (H_{221}, g) непостоянной кривизны. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Любое решение (k, g, ψ) уравнения Эйзенхарта*

$$\nabla k(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\psi + g(W,Z)Y\psi + g(Y,W)Z\psi, \tag{4.1}$$

равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ уравнению

$$\nabla b(Y,Z,W) = g(W,Z)Y\psi + g(Y,W)Z\psi, \tag{4.2}$$

в h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны удовлетворяет условию

$$\psi = c_1\left(f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3\right) + \mathrm{const} = c_1\varphi + \mathrm{const}, \tag{4.3}$$

*где функция φ определена равенством (**??**), c_1 — произвольная постоянная.*

Доказательство. Ввиду инвариантности величин f_i и тензорного характера равенства (4.3) достаточно доказать его в каноническом косонормальном репере (**??**), где уравнение (4.2) принимает вид

$$d\bar{b}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h\left(\bar{b}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{b}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}\right) = (Y_q\psi)\theta_p + (Y_p\psi)\theta_q; \tag{4.4}$$

здесь формы $\omega_{p\tilde{h}}$ определены формулами (**??**), а $\bar{b}_{pq}$ — компоненты тензора b в репере (**??**).

Применив внешний дифференциал d к уравнению (4.4), получим условия интегрируемости этого уравнения:

$$\bar{b}_{ph}\Omega^h{}_q + \bar{b}_{hq}\Omega^h{}_p = \psi_{ph}\theta^h \wedge \theta_q + \psi_{hq}\theta^h \wedge \theta_p, \tag{4.5}$$

где

$$\Omega^h{}_p = e_h\Omega_{\tilde{h}p}, \quad \psi_{ph} \equiv -Y_hY_p\psi - \gamma^l{}_{ph}Y_l\psi = \psi_{hp}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных 2-формах $\theta_h \wedge \theta_q$ слева и справа в (4.5), при $(pq) = (11)$, (13), (15), (14) найдем

$$\psi_{11} = -\bar{b}_{11}\left(C_1 + \frac{e_3A_3^2}{(f_3 - f_1)^2}\right) = -\bar{b}_{11}\frac{e_3A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} = \bar{b}_{11}\left(\frac{e_3A_3^2}{(f_3 - f_1)^2} - \frac{C_3}{f_3 - f_1}\right),$$

$$\bar{b}_{11}\left(\frac{C_2}{f_2 - f_1} + \frac{e_3A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)^2}\right) = 0.$$

Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то отсюда следует (**??**), и по теореме **??** пространство H_{221} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{11} = \psi_{11} = 0$.

Аналогично выводятся равенства

$$\bar{b}_{i_15} = \bar{b}_{i_25} = \bar{b}_{i_1i_2} = 0, \quad \psi_{i_15} = \psi_{i_25} = \psi_{i_1i_2} = 0, \quad i_1 = 1, 2; \ i_2 = 3, 4. \tag{4.6}$$

С учетом этих равенств уравнения (4.4), где ω_{hs} определены формулами (**??**), при $(pq) = (11)$, (12) дают

$$Y_1\psi = 0, \quad d\bar{b}_{12} \equiv \theta^lY_l\bar{b}_{12} = (Y_2\psi)\theta_1.$$

Пользуясь формулами (**??**), выводим отсюда

$$\bar b_{12} = e_1\alpha(x^2), \quad \partial_2\psi = \alpha'(x^2).$$

Так же получаются равенства

$$\bar b_{34} = e_2\beta(x^4), \quad \bar b_{55} = e_3\gamma(x^5), \quad \partial_4\psi = \beta'(x^4), \quad \partial_5\psi = \frac{1}{2}\gamma'(x^5);$$

в результате

$$\psi = \alpha(x^2) + \beta(x^4) + \frac{1}{2}\gamma(x^5) + \mathrm{const}\,.$$

Из (4.4) при $(pq) = (23)$, (14) найдем

$$\alpha' = \frac{\beta-\alpha}{f_2-f_1}f_1', \quad \beta' = \frac{\beta-\alpha}{f_2-f_1}f_2'.$$

В случае ${f_2}'f_1' \neq 0$ отсюда следует

$$(\alpha'/f_1')(x^2) = (\beta'/f_2')(x^4) \equiv c_1 = \mathrm{const},$$

т.е.

$$\alpha = c_1 f_1 + \mathrm{const}, \quad \beta = c_1 f_2 + \mathrm{const};$$

к такому же выводу придем при ${f_2}'f_1' = 0$.

Интегрируя уравнение (4.4) с $(pq) = (15)$:

$$\gamma' = \frac{\gamma - c_1 f_1}{f_3 - f_1}f_3',$$

получим $\gamma = c_1 f_3 + \mathrm{const}$; в итоге имеем (4.3):

$$\psi = c_1\left(f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3\right) + \mathrm{const}\,. \qquad \square$$

Теорема 4.2. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору*:

$$b_{ij} = c_2 g_{ij}, \quad c_2 = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. Последнее равенство является тензорным, т.е. справедливым в любой системе координат, поэтому достаточно проверить его в косонормальном репере (**??**), где уравнение $b_{ij,k} = 0$ принимает вид

$$d\bar b_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h\left(\bar b_{hq}\omega_{p\tilde h} + \bar b_{ph}\omega_{q\tilde h}\right) = 0. \tag{4.7}$$

Так как это уравнение получается из уравнения (4.4) при $\psi = \mathrm{const}$, то справедливы равенства (4.6):

$$\bar b_{i_1 5} = \bar b_{i_2 5} = \bar b_{i_1 i_2} = 0, \quad i_1 = 1,2, \quad i_2 = 3,4,$$

благодаря которым система (4.7) сводится к уравнениям

$$d\bar b_{12} = d\bar b_{34} = d\bar b_{55} = 0, \quad e_2\bar b_{34} - e_1\bar b_{12} = e_3\bar b_{55} - e_2\bar b_{34} = 0,$$

из которых следует $\bar b_{pq} = c_2\bar g_{pq}$, где матрица $(\bar g_{pq})$ определена каноническими формами (**??**) и множитель c_2 постоянен ввиду условия $b_{ij,k} = 0$ и ковариантного постоянства метрического тензора g_{ij}. Это доказывает теорему 4.2. $\square$

Так как векторное поле X является аффинным движением в H_{221}, если и только если $(L_X g)_{,k} = 0$, то из теоремы 4.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Всякое аффинное движение X в h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны есть инфинитезимальная гомотетия*: $L_X g = cg$, $c = \mathrm{const}$.

Поскольку любые два решения h_1 и h_2 уравнения Эйзенхарта (**??**) с одинаковой правой частью могут отличаться лишь на ковариантно постоянный тензор b, то из теоремы 4.1 и линейности уравнения (**??**) следует, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ может быть записано в виде $c_1 h + b$ или, в силу теоремы 4.2, в виде $c_1 h + c_2 g$, где $h = a + 2\varphi g$, g и a определены в косонормальном репере (**??**) каноническими формами (**??**), c_1, c_2 — постоянные. Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 4.4. *Векторное поле X является проективным движением в h-пространстве (H_{221}, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда*

$$L_X g = c_1 h + c_2 g \equiv c_1(a + 2\varphi g) + c_2 g, \tag{4.8}$$

где φ — определяющая функция проективного движения X, g и a определены в косонормальном репере (**??**) *каноническими формами* (**??**), *c_1, c_2 — произвольные постоянные.*

Теорема 4.5. *Если h-пространство (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

Доказательство. Если $(X_1, \dots, X_r)$ — базис алгебры Ли P_r, то

$$L_{X_s} g = \underset{s}{c_1} h + \underset{s}{c_2} g, \quad s = 1, \dots, r,$$

где одна из постоянных $\underset{s}{c_1}$, например, $\underset{1}{c_1}$, отлична от нуля (в противном случае P_r состоит из гомотетий). В новом базисе $Z_1 = X_1$, $Z_\tau = \underset{1}{c_1} X_\tau - \underset{\tau}{c_1} X_1$ имеем

$$L_{Z_\tau} g = \Big(\underset{1}{c_1}\underset{\tau}{c_2} - \underset{1}{c_2}\underset{\tau}{c_1}\Big) g, \quad \tau = 2, \dots, r. \qquad \square$$

4.2. Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{32\}$.

4.2.1. В этом разделе будет найдено общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве (H_{32}, g) непостоянной кривизны.

Теорема 4.6. *Любое решение (k, g, ψ) уравнения Эйзенхарта* (4.1), *равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ уравнению* (4.2), *в h-пространстве (H_{32}, g) типа $\{32\}$ непостоянной кривизны удовлетворяет условию*

$$\psi = c_1\left(\frac{3}{2} f_1 + f_2\right) + \mathrm{const} = c_1\varphi + \mathrm{const}, \tag{4.9}$$

где функция φ определена равенством (**??**), *c_1 — произвольная постоянная.*

Доказательство. Учитывая тензорный характер равенства (4.9), достаточно доказать его в каноническом косонормальном репере (**??**), где (4.2) принимает вид уравнения (4.4), в котором $\omega_{p\tilde{h}}$ определены формулами (**??**), а $\bar{b}_{pq}$ — компоненты тензора b в косонормальном репере (**??**).

Из условий интегрируемости (4.5) уравнения (4.4), собирая члены, содержащие базисные 2-формы $\theta_k \wedge \theta_l$, при $(pq) = (14)$ и $(kl) = (34)$ получим $\psi_{11} = 0$, затем при $(pq) = (11)$, $(kl) = (13)$ и $(pq) = (15)$, $(kl) = (34)$ найдем

$$B_1 \bar{b}_{11} = S_2 \bar{b}_{11} = 0.$$

Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то отсюда следует (**??**), и по теореме **??** пространство H_{32} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению. Поэтому $\bar{b}_{11} = \psi_{11} = 0$. Так же получим

$$\bar{b}_{12} = \bar{b}_{44} = \bar{b}_{i_1 i_2} = \psi_{12} = \psi_{44} = \psi_{i_1 i_2} = 0,$$

где $i_1 = 1, 2, 3$, $i_2 = 4, 5$.

Из (4.5) при $(pq) = (33)$, (24), (55) следуют равенства

$$S_1 \bar{b}_{33} = 0, \tag{4.10}$$

$$(e_2 \bar{b}_{45} - e_1 \bar{b}_{22}) \frac{B_1}{3(f_2 - f_1)} = e_1 \psi_{23}, \tag{4.11}$$

$$S_2\bar{b}_{55} = \psi_{55}. \tag{4.12}$$

С учетом полученных выше равенств из уравнения (4.4), где ω_{hs} определены формулами (**??**), при $(pq) = (35)$ получим $(Y_5\varphi)\bar{b}_{33} = 0$, а из (4.10) имеем $S_1\bar{b}_{33} = 0$.

Если $\bar{b}_{33} \neq 0$, то $S_1 = (Y_5\varphi) = 0$; отсюда

$$S_1 \equiv e_1Y_3(B_1) = S_2 \equiv e_2Y_5(Y_5\varphi) = 0.$$

Дифференцируя равенство $S_1 = 0$ по x^1, найдем $\varepsilon_1 = 0$; ввиду этого $B_1 = 0$. Следовательно, H_{32} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{33} = 0$.

Из уравнения (4.4) с учетом равенства $\bar{b}_{33} = 0$ при $(pq) = (23)$ найдем $e_1Y_3\bar{b}_{23} = 0$. Так же при $(pq) = (33)$ получим

$$e_1\bar{b}_{23}(Y_3\varphi) = Y_3\psi, \tag{4.13}$$

после этого из (4.4) при $(pq) = (12)$, (23) и уравнения (4.13) выводим $Y_1\bar{b}_{23} = Y_2\bar{b}_{23} = 0$.

Аналогично из (4.4) имеем

$$Y_4\bar{b}_{23} = Y_5\bar{b}_{23} = 0.$$

В итоге $Y_i\bar{b}_{23} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, 5$; отсюда следует $\bar{b}_{23} = \mathrm{const}$. Обозначим $\bar{b}_{23} = e_1c_1$, $c_1 \equiv \mathrm{const}$.

Из уравнения (4.4) при $(pq) = (11)$, (14), (24) имеем

$$Y_1\psi = Y_2\psi = Y_4\psi = 0.$$

Отсюда, используя формулы (**??**), найдем $\psi = \psi(x^3, x^5)$.

Интегрируя уравнение (4.13), где $\bar{b}_{23} = e_1c_1$, получим

$$\psi = \frac{3}{2}c_1f_1 + \gamma(x^5).$$

Из уравнения (4.4) при $(pq) = (25)$ следует $c_1(Y_5\varphi) = Y_5\psi$, отсюда после интегрирования имеем $\gamma = c_1f_2 + \mathrm{const}$. В итоге

$$\psi = c_1\left(\frac{3}{2}f_1 + f_2\right) + \mathrm{const} = c_1\varphi + \mathrm{const}\,. \qquad \square$$

Теорема 4.7. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h-пространстве (H_{32}, g) типа $\{32\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору*:

$$b_{ij} = c_2g_{ij}, \quad c_2 = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. Уравнение $b_{ij,k} = 0$ в косонормальном репере (**??**) имеет вид (4.7). Учитывая, что это уравнение получается из (4.4) при $\psi = \mathrm{const}$, с учетом полученных выше равенств

$$\bar{b}_{11} = \bar{b}_{12} = \bar{b}_{33} = \bar{b}_{44} = \bar{b}_{i_1i_2} = 0, \quad i_1 = 1, 2, 3;\ i_2 = 4, 5,$$

из (4.7) имеем

$$(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13})\frac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1} = 0, \tag{4.14}$$

$$(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{22})\frac{(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)} = 0, \tag{4.15}$$

$$(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13})\frac{Y_3\varphi}{f_2 - f_1} = 0. \tag{4.16}$$

Из уравнения (4.7) при $(pq) = (33)$, (35) найдем

$$e_1\bar{b}_{23}(Y_3\varphi) = 0, \quad e_1\bar{b}_{23}(Y_5\varphi) = 0.$$

Если $\bar{b}_{23} \neq 0$, то $(Y_3\varphi) = (Y_5\varphi) = 0$; отсюда $B_1 = S_2 = 0$, и по теореме **??** H_{32} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{23} = 0$.

Затем из (4.7) при $(pq) = (13)$, (22) получим

$$Y_ib_{13} = Y_ib_{22} = 0, \quad i = 1, \ldots, 5,$$

отсюда следует, что $\bar b_{13}$ и $\bar b_{22}$ постоянны. Так же доказывается постоянство компоненты $\bar b_{45}$.

Из уравнений (4.12) при $\psi = \mathrm{const}$ и (4.7) при $(pq) = (35)$ найдем

$$S_2\bar b_{55} = (Y_3\varphi)\bar b_{55} = 0.$$

Если $\bar b_{55} \neq 0$, то $(Y_3\varphi) \equiv B_1 = S_2 = 0$, и по теореме **??** пространство H_{32} имеет постоянную кривизну, поэтому $\bar b_{55} = 0$.

Обозначим $\bar b_{13} = e_1 c_2 = \mathrm{const}$. Из уравнений (4.14) и (4.16) имеем

$$(e_2\bar b_{45} - e_1\bar b_{13})Y_5\varphi = 0, \quad (e_2\bar b_{45} - e_1\bar b_{13})Y_3\varphi = 0.$$

Если $(e_2\bar b_{45} - e_1\bar b_{13}) \neq 0$, то $(Y_3\varphi) = (Y_5\varphi) = 0$, отсюда $B_1 = S_2 = 0$, и по теореме **??** пространство H_{32} имеет постоянную кривизну; следовательно,

$$e_2\bar b_{45} - e_1\bar b_{13} = 0, \quad \bar b_{45} = e_1e_2\bar b_{13} = e_2c_2.$$

Так же из уравнений (4.11) и (4.15) найдем $e_2\bar b_{45} - e_1\bar b_{22} = 0$, отсюда $\bar b_{22} = e_1c_2$. В итоге имеем $\bar b_{pq} = c_2\bar g_{pq}$, где матрица $(\bar g_{pq})$ определена каноническими формами (**??**) и множитель c_2 постоянен. □

Принимая во внимание, что векторное поле X является аффинным движением в (H_{32}, g), если и только если производная Ли $L_X g$ ковариантно постоянна, делаем следующий вывод (см. теорему 4.7).

Теорема 4.8. *Всякое аффинное движение X в h-пространстве (H_{32}, g) типа $\{32\}$ непостоянной кривизны является инфинитезимальной гомотетией: $L_X g = c_2 g$, $c_2 = \mathrm{const}$.*

Из теоремы 4.6 и линейности уравнения (4.2) следует, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h-пространстве (H_{32}, g) типа $\{32\}$ может быть записано в виде $c_1h + b$, где b — ковариантно постоянный тензор, или, в силу теоремы 4.7, в виде $c_1h + c_2g$, где $h = a + 2\varphi g$, φ дается формулой (**??**), g и a определены в косонормальном репере (**??**) каноническими формами (**??**), c_1, c_2 — постоянные. Отсюда вытекает следующий факт.

Теорема 4.9. *Векторное поле X является проективным движением в h-пространстве (H_{32}, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда выполняется равенство* (4.8)*, где φ — определяющая функция* (**??**) *проективного движения X; g и a определены в косонормальном репере* (**??**) *каноническими формами* (**??**)*, c_1, c_2 — произвольные постоянные.*

В итоге получаем следующую теорему (см. доказательство теоремы 4.5).

Теорема 4.10. *Если h-пространство (H_{32}, g) типа $\{32\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

4.3. Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{41\}$.

Теорема 4.11. *Любое решение (k, g, ψ) уравнения Эйзенхарта* (4.1)*, равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ уравнению* (4.2)*, в h-пространстве (H_{41}, g) типа $\{41\}$ непостоянной кривизны удовлетворяет условию*

$$\psi = c_1\left(2f_1 + \frac{1}{2}f_2\right) + \mathrm{const} = c_1\varphi + \mathrm{const}, \tag{4.17}$$

где функция φ определена равенством (**??**)*, c_1 — произвольная постоянная.*

Доказательство. Докажем равенство (4.17) в каноническом косонормальном репере (**??**), где уравнение (4.2) принимает вид (4.4), $\omega_{p\tilde h}$ определены уравнениями (**??**) и $\bar b_{pq}$ — компоненты тензора b в косонормальном репере (**??**).

Из условий интегрируемости (4.5) уравнений Эйзенхарта (4.4), выписывая коэффициенты при базисных 2-формах $\theta_\alpha \wedge \theta_\beta$, при $(pq) = (13)$ и $(\alpha\beta) = (24)$ найдем

$$\left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2 - f_1)^3}\right)\bar b_{11} = 0.$$

Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то отсюда следует (**??**), и по теореме **??** пространство H_{41} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{11} = 0$. Так же получим

$$\bar{b}_{12} = \bar{b}_{13} = \bar{b}_{15} = \bar{b}_{22} = \bar{b}_{25} = \bar{b}_{34} = \bar{b}_{35} = \bar{b}_{44} = \bar{b}_{45} = 0. \tag{4.18}$$

Используя равенства (4.18), из уравнения (4.4), где ω_{hs} определены формулами (**??**), (**??**) и (**??**), при $(pq) = (11)$, (12), (33), (34) и (35) найдем с учетом неравенств $\underset{4}{\xi}^4 \neq 0$, $\underset{5}{\xi}^5 \neq 0$:

$$\underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \psi = 0, \quad \underset{2}{\xi}^1 \partial_1 \psi + \underset{2}{\xi}^2 \partial_2 \psi = 0, \quad \underset{3}{\xi}^1 \partial_1 \psi + \underset{3}{\xi}^2 \partial_2 \psi + \underset{3}{\xi}^3 \partial_3 \psi = 0, \tag{4.19}$$

$$Y_i \bar{b}_{33} = 0, \quad i = 1, \ldots, 5, \tag{4.20}$$

$$\partial_4 \psi = 2 e_1 \bar{b}_{33} f_1', \quad \partial_5 \psi = \frac{1}{2} e_1 \bar{b}_{33} f_2'. \tag{4.21}$$

Из уравнений (4.19), используя формулы (**??**), выводим $\psi = \psi(x^4, x^5)$. Из (4.20) следует $\bar{b}_{33} = e_1 c_1 = \mathrm{const}$. Интегрируя уравнения (4.21), получим

$$\psi = c_1 \left(2 f_1 + \frac{f_2}{2} \right) + \mathrm{const} = c_1 \varphi + \mathrm{const}\,. \qquad \square$$

Теорема 4.12. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h-пространстве (H_{41}, g) типа $\{41\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору*:

$$b_{ij} = c_2 g_{ij}, \quad c_2 = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. В косонормальном репере (**??**) уравнение $b_{ij,k} = 0$ принимает вид (4.7). Условия его интегрируемости получаются из равенства (4.5) при $\psi = \mathrm{const}$ и имеют вид

$$\bar{b}_{ph} \Omega^h{}_q + \bar{b}_{hq} \Omega^h{}_p = 0. \tag{4.22}$$

Отсюда так же, как в предыдущих случаях, получим равенства (4.18) в h-пространстве H_{41} непостоянной кривизны. Далее, из (4.22) при $(pq) = (14)$, (33) следует

$$D \bar{b}_{24} = 0, \quad D \bar{b}_{33} = 0;$$

так как по теореме **??** в пространстве H_{41} непостоянной кривизны $D \neq 0$, то

$$\bar{b}_{24} = \bar{b}_{33} = 0.$$

Тогда из (4.7) при $(pq) = (14)$, (23), (55) найдем

$$d\bar{b}_{14} = 0, \quad d\bar{b}_{23} = 0, \quad d\bar{b}_{55} = 0,$$

т.е. $\bar{b}_{14}$, $\bar{b}_{23}$ и $\bar{b}_{55}$ — постоянные. Из (4.22) при $(pq) = (13)$ получаем

$$D(\bar{b}_{14} - \bar{b}_{23}) = 0;$$

отсюда при $D \neq 0$ имеем $\bar{b}_{14} = \bar{b}_{23}$, после этого из (4.7) при $(pq) = (45)$ имеем

$$(e_2 \bar{b}_{55} - e_1 \bar{b}_{14}) E_2 = 0, \quad (e_2 \bar{b}_{55} - e_1 \bar{b}_{14}) E_1 = 0.$$

Если $(e_2 \bar{b}_{55} - e_1 \bar{b}_{14}) \neq 0$, то $E_1 = E_2 = 0$; отсюда следует (**??**) и по теореме **??** пространство H_{41} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению. Поэтому

$$e_1 \bar{b}_{14} = e_1 \bar{b}_{23} = e_2 \bar{b}_{55}.$$

Положив $\bar{b}_{14} = e_1 c_2$, найдем в итоге $\bar{b}_{pq} = c_2 \bar{g}_{pq}$, где $(\bar{g}_{pq})$ определено формулой (**??**). $\square$

Из теоремы 4.12 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.13. *Всякое аффинное движение X, $(L_X g)_{,k} = 0$, в h-пространстве (H_{41}, g) типа $\{41\}$ непостоянной кривизны есть инфинитезимальная гомотетия*: $L_X g = cg$, $c = \mathrm{const}$.

Из теоремы 4.11 и линейности уравнения (**??**) вытекает, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h-пространстве (H_{41}, g) типа $\{41\}$ имеет вид $c_1 h + b$ или, в силу теоремы 4.12, $c_1 h + c_2 g$, где $h = a + 2\varphi g$, g и a определены в косонормальном репере‘(**??**) каноническими формами (**??**), c_1, c_2 — постоянные. Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 4.14. *Векторное поле X является проективным движением в h-пространстве (H_{41}, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда выполняется (4.8), где φ — определяющая функция проективного движения X, g и a определены в косонормальном репере (**??**) каноническими формами (**??**), c_1, c_2 — произвольные постоянные.*

Теорема 4.15. *Если h-пространство (H_{41}, g) типа $\{41\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

Теорема 4.15 вытекает из теоремы 4.14 (ср. доказательство аналогичной теоремы 4.5).

4.4. Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{5\}$.

Теорема 4.16. *Любое решение (k, g, ψ) уравнения Эйзенхарта (4.1), равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ уравнению (4.2), в h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны удовлетворяет условию*

$$\psi = c_1 \frac{5}{2} f + \mathrm{const} = c_1 \varphi + \mathrm{const}, \tag{4.23}$$

*где функция φ определена равенством (**??**), c_1 — произвольная постоянная.*

Доказательство. Докажем равенство (4.23) в каноническом косонормальном репере (**??**), где уравнение (4.2) примет вид (4.4), $\omega_{p\tilde{h}}$ определены формулами (**??**), а $\bar{b}_{pq}$ — компоненты тензора b в косорепере (**??**).

Дифференцируя уравнение (4.4) и учитывая равенство нулю квадрата внешнего дифференциала d, получим условия интегрируемости этого уравнения (4.5). Приравняв коэффициенты при базисной 2-форме $\theta_2 \wedge \theta_5$ в левой и правой частях равенства (4.5), при $(pq) = (14)$ найдем $e\Re^2 \bar{b}_{11} = 0$. Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то $\Re = 0$, и H_5 по теореме **??** имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{11} = 0$.

Аналогично, полагая в уравнении (4.5) последовательно $(pq, mn) = (11, 15)$, $(22, 14)$, $(15, 24)$, $(15, 23)$, $(22, 13)$, $(33, 14)$, $(34, 12)$, $(44, 13)$, $(44, 12)$ и $(45, 12)$, найдем при $\Re \neq 0$:

$$\psi_{11} = \bar{b}_{12} = \psi_{12} = \bar{b}_{13} = \psi_{13} = \bar{b}_{14} = \psi_{14} = \bar{b}_{22} = \psi_{22} = 0,$$
$$\bar{b}_{23} = \psi_{23} = \bar{b}_{35} = \psi_{35} = \bar{b}_{44} = \psi_{44} = \bar{b}_{45} = \bar{b}_{55} = 0;$$

затем при $(pq, mn) = (14, 12)$, $(34, 14)$, $(35, 24)$ выводим

$$\Re(\bar{b}_{15} - \bar{b}_{24}) = 0, \quad \Re(\bar{b}_{33} - \bar{b}_{24}) = 0, \quad \Re(\bar{b}_{33} - \bar{b}_{15}) = 0,$$

и так как $\Re \neq 0$ для пространства непостоянной кривизны, то

$$\bar{b}_{15} = \bar{b}_{24} = \bar{b}_{33} \equiv \mu.$$

Так же из (4.5) при $(pq, mn) = (15, 12), (34, 13)$ получим

$$\frac{3e\Re}{5} \bar{b}_{25} = \frac{3e\Re}{5} \bar{b}_{34} = \psi_{45},$$

отсюда ввиду $\Re \neq 0$ следует $\bar{b}_{25} = \bar{b}_{34} \equiv \nu$.

С учетом найденных равенств из уравнения Эйзенхарта (4.4) с ω_{hs}, определенными формулами (**??**), при $(pq) = (11)$, (12), (13), (44) найдем

$$Y_1 \psi = Y_2 \psi = Y_3 \psi = Y_4 \psi = 0 \tag{4.24}$$

и при $(pq) = (15)$, (33), (34) получим

$$d\mu + \frac{3e}{5} \nu (Y_5 \varphi) \theta_1 = (Y_5 \psi) \theta_1, \quad d\mu - \frac{2e}{5} \nu (Y_5 \varphi) \theta_1 = 0, \quad d\nu = 0. \tag{4.25}$$

Отсюда следует $\nu = \mathrm{const}$, $Y_5(\psi - e\nu\varphi) = 0$, что вместе с (4.24) и равенствами

$$Y_1 \varphi = Y_2 \varphi = Y_3 \varphi = Y_4 \varphi = 0,$$

вытекающими из (**??**) и (**??**), дает

$$Y_i(\psi - e\nu\varphi) = \underset{i}{\xi}^j \partial_j(\psi - e\nu\varphi) = 0$$

для всех $i = 1, \dots, 5$, и так как $\det(\underset{i}{\xi}^j) \neq 0$, вследствие независимости базисных векторных полей $Y_i = \underset{i}{\xi}^j \partial_j$, то

$$\psi = e\nu\varphi + \mathrm{const} \equiv c_1\varphi + \mathrm{const}\,. \qquad \square$$

Теорема 4.17. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору*:

$$b_{ij} = c_2 g_{ij}, \quad c_2 = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. В косонормальном репере (**??**) уравнение $b_{ij,k} = 0$ принимает вид (4.7). Из условий интегрируемости этого уравнения (4.5) при $\psi = \mathrm{const}$ так же, как в предыдущем случае, получим, что все компоненты $\bar{b}_{ij}$ равны нулю, кроме

$$\bar{b}_{15} = \bar{b}_{24} = \bar{b}_{33}.$$

Так как уравнение (4.7) при $(pq) = (33)$ имеет вид $d\bar{b}_{33} = 0$, то $\bar{b}_{33} = ec_2 = \mathrm{const}$. В итоге имеем $\bar{b}_{pq} = c_2\bar{g}_{pq}$, где матрица $(\bar{g}_{pq})$ определена каноническими формами (**??**), а множитель c_2 постоянен, что доказывает теорему 4.17. $\square$

Так как векторное поле X является аффинным движением в (H_5, g), если и только если производная Ли $(L_X g)$ ковариантно постоянна, то из теоремы 4.17 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.18. *Всякое аффинное движение X в h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны является инфинитезимальной гомотетией: $L_X g = cg$, $c = \mathrm{const}$.*

Из линейности уравнения Эйзенхарта (**??**) и теоремы 4.16 вытекает, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ представляется в виде $c_1 h + b$ или, в силу теоремы 4.17, в виде $c_1 h + c_2 g$, где $h = a + 2\varphi g$; здесь g и a определены в косонормальном репере (**??**) каноническими формами (**??**), c_1, c_2 — постоянные. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 4.19. *Векторное поле X является проективным движением в h-пространстве (H_5, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда выполняется равенство* (4.8)*, где φ — определяющая функция проективного движения X, g и a определены в косонормальном репере* (**??**) *каноническими формами* (**??**)*, c_1, c_2 — произвольные постоянные.*

Теорема 4.20. *Если h-пространство (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

Доказательство этой теоремы основано на теореме (4.19) (ср. доказательство теоремы 4.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминова А. В.* Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения// Гравит. теория относит. — 1970. — № 7. — С. 127–131.
2. *Аминова А. В.* О полях тяготения, допускающих группы проективных движений// Докл. АН СССР. — 1971. — *197*, № 4. — С. 807–809.
3. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. I// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 3—13.
4. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. II// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 14–20.
5. *Аминова А. В.* О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел/ Препринт ИТФ АН УССР 71-85Р. — Киев, 1971.
6. *Аминова А. В.* Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 295–316.

7. *Аминова А. В.* Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6.* — С. 317–346.
8. *Аминова А. В.* Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля// Гравит. теория относит. — 1976. — № 10. — С. 9–22.
9. *Аминова А. В.* Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности// Изв. вузов. Мат. — 1988. — № 1. — С. 3–13.
10. *Аминова А. В.* Группы преобразований римановых многообразий// Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ. — 1990. — *22.* — С. 97–165.
11. *Аминова А. В.* Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2 (290). — С. 107–164.
12. *Аминова А. В.* Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий// Усп. мат. наук. — 1995. — *50*, № 1. — С. 69–142.
13. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
14. *Аминова А. В.* Проективные симметрии и законы сохранения в K-пространствах, определяемых полями тяготения// Изв. вузов. Физика. — 2008. — *51*, № 4. — С. 30–37.
15. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 5. — С. 3–13.
16. *Аминова А. В.* Проективные симметрии гравитационных полей. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018.
17. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 7. — С. 3–28.
18. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2009. — *123.* — С. 58–80.
19. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств специального вида// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 5. — С. 97–102.
20. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. I. H-пространства типа $\{32\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2018. — № 4. — С. 21–31.
21. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. II. H-пространства типа $\{41\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 45–55.
22. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. III. H-пространства типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 56—66.
23. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* H-пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 4. — С. 4–12.
24. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 10. — С. 87–93.
25. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств H_5 типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2020. — № 1. — С. 4–11.
26. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О свойствах проективных алгебр Ли жестких h-пространств H_{32} типа $\{32\}$// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — *162*, № 2. — С. 111–119.
27. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Алгебры Ли проективных движений пятимерных h-пространств H_{221} типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 12. — С. 9–22.
28. *Буданов К. М., Султанов А. Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3—13.
29. *Гладуш В. Д.* Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы—-Клейна// Теор. мат. физ. — 2003. — *136*, № 3. — С. 480—495.
30. *Голиков В. И.* О геодезическом отображении полей тяготения общего вида// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — № 12. — С. 97–129.
31. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.
32. *Жукова Л. И.* Римановы пространства с проективной группой// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124.* — С. 13—18.

33. *Жукова Л. И.* Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай)// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 19–25.
34. *Жукова Л. И.* О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 26–30.
35. *Жукова Л. И.* Римановы пространства, допускающие проективные преобразования// Изв. вузов. Мат. — 1973. — № 6. — С. 37–41.
36. *Киселев А. С.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве-времени// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2010. — № 1. — С. 64–67.
37. *Киселев А. С., Кречет В. Г.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана—Вейля с идеальной жидкостью// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2011. — *3*, № 1. — С. 37–41.
38. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2. — М.: Наука, 1981.
39. *Кречет В. Г., Левкоева М. В., Садовников Д. В.* Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве// Вестн. РУДН. Сер. Физ. — 2001. — *1*, № 9. — С. 33—37.
40. *Кручкович Г. И.* Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1963. — № 24. — С. 74–87.
41. *Кручкович Г. И.* О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1967. — № 33. — С. 3—18.
42. *Петров А. З.* О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1949. — *109*, № 3. — С. 7–36.
43. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — Факториал, 1998.
44. *Рчеулишвили Г. Л.* Сферически-симметричный линейный элемент и векторы Киллинга в пятимерном пространстве// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 3. — С. 345—351.
45. *Рчеулишвили Г. Л.* Обобщенные векторы Киллинга в пятимерном лоренцевом пространстве// Теор. мат. физ. — 1997. — *112*, № 2. — С. 249—253.
46. *Синюков Н. С.* О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — *98*, № 1. — С. 21—23.
47. *Синюков Н. С.* Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 4. — С. 266—267.
48. *Синюков Н. С.* Эквидистантные римановы пространства// Научн. ежегод. Одесса. — 1957. — С. 133—135.
49. *Синюков Н. С.* Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 6. — С. 1312–1314.
50. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 4. — С. 781–782.
51. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — *169*, № 4. — С. 770—772.
52. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
53. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*. — С. 45–116.
54. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1956. — *108*, № 2. — С. 201–203.
55. *Солодовников А. С.* Геодезические классы пространств $V(K)$// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 1. — С. 33–36.
56. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — № 2. — С. 43–102.
57. *Трунев А. П.* Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы—Клейна// Науч. ж. Кубан. гос. агр. ун-та. — 2011. — *71*, № 7. — С. 1–26.
58. *Шарафутдинов В. А.* Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. — Новосибирск:: ИПЦ НГУ, 2018.
59. *Широков П. А.* Тензорное исчисление. — Казань: Изд-во КГУ, 1961.
60. *Широков П. А.* Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во КГУ, 1966.
61. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.

62. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
63. *Abe O.* Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza–Klein space-time// Nuovo Cim. B. — 1994. — *109*, № 6. — P. 659—673.
64. *Aminova A. V.* On geodesic mappings of Riemannian spaces// Tensor. — 1987. — *46.* — P. 179–186.
65. *Aminova A. V.* Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds// Tensor, N.S. — 1993. — *54.* — P. 91–100.
66. *Aminova A. V.* Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics// в кн.: In Memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. 3, part 2. — Изд-во Казан. ун-та: Казань, 1995. — С. 79–103.
67. *Aminova A. V.* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — *113*, № 3. — P. 367–470.
68. *Aminova A. V., Aminov N. A.-M.* Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type VI.1// J. Math. Sci. — 2009. — *158*, № 2. — P. 163–183.
69. *Anchordoqui L. A., Birman G. S.* Metric tensors for homogeneous, isotropic, five-dimensional pseudo-Riemannian models// Rev. Colomb. Mat. — 1998. — *32.* — P. 73–79.
70. *Becerril R., Matos T.* Bonnor solution in five-dimensional gravity// Phys. Rev. D. — 1990. — *41*, № 6. — P. 1895–1896.
71. *Beltrami E.* Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante// Ann. Mat. — 1868. — № 2. — P. 232–255.
72. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbation in Kaluza–Klein cosmologies// Astron. Nachr. — 1990. — *311*, № 3. — P. 151–154.
73. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbations in Kaluza–Klein cosmologies// Nuovo Cim. B. — 1991. — *106*, № 2. — P. 107–122.
74. *Bokhari A. H., Qadir A.* Symmetries of static, spherically symmetric space-times// J. Math. Phys. — 1987. — *28.* — P. 1019–1022.
75. *Calvaruso G., Marinosci R. A.* Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces// Balkan J. Geom. Appl. — 2003. — *8*, № 1. — P. 1–19.
76. *Coley A. A., Tupper B. O. J.* Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance// J. Math. Phys. — 1989. — *30.* — P. 2616–2625.
77. *Dacko P.* Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact Ricci potential/ `arXiv: 1308.6429 [math.DG]`.
78. *Dini U.* Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rapprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra// Ann. Mat. — 1869. — *3*, № 7. — P. 269–293.
79. *Dumitrescu T. T., Festuccia G., Seiberg N.* Exploring curved superspace/ `arXiv: 1205.1115v2 [hep.th]`.
80. *Fialowski A., Penkava M.* The moduli space of complex five-dimensional Lie algebras// J. Algebra. — 2016. — *458.* — P. 422—444.
81. *Fubini G.* Sui gruppi trasformazioni geodetiche// Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. — 1903. — *53*, № 2. — P. 261–313.
82. *Fukui T.* The motion of a test particle in the Kaluza–Klein-type of gravitational theory with variable mass// Astrophys. Space Sci. — 1988. — *141*, № 2. — P. 407–413.
83. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal invariance in physics// Rev. Mod. Phys. — 1962. — *34*, № 3. — P. 442–557.
84. *Gall L., Mohaupt T.* J. High Energy Phys. — 2018. — *2018.* — 53.
85. *Geroch R.* Limits of space-times// Commun. Math. Phys. — 1969. — *13.* — P. 180–193.
86. *Gezer A.* On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric// Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). — 2009. — *119*, № 3. — P. 345—350.
87. *Gross D. J., Perry M. J.* Magnetic monopoles in Kaluza–Klein theories// Nucl. Phys. — 1983. — *B226.* — P. 29–48.
88. *Guendelman E. I.* Kaluza–Klein–Casimir cosmology with decoupled heavy modes// Phys. Lett. B. — 1988. — *201*, № 1. — P. 39–41.
89. *Hall G. S., Rebouas M. J., Santos J., Teixeixa A. F. F.* On the algebraic structure of second order symmetric tensors in 5-dimensionai space-times// Gen. Rel. Gravit. — 1996. — *8*, № 9. — P. 1107–1113.

90. *Hicks J. W.* Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions// All Graduate Plan B and other Reports. — 2011. — *102.* — P. 1–90.
91. *Ho Choon-Lin, Ng Kin-Wang* Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza–Klein cosmology// Phys. Rev. D. — 1991. — *43*, № 10. — P. 3107–3111.
92. *Jadczyk A.* START in a five–dimensional conformal domain/ `arXiv: 1111.5540v2 [math-ph]`.
93. *Kiselev A. S., Krechet V. G.* Static distributions of matter in the five-dimensional Riemann—Weyl space// Russ. Phys. J. — 2012. — *55*, № 4. — P. 417—425.
94. *Knebelman M. S.* Homothetic mappings of Riemann spaces// Proc. Am. Math. Soc. — 1958. — *9*, № 6. — P. 927–928.
95. *Kokarev S. S.* Phantom scalar fields in five–dimensional Kaluza–Klein theory// Russ. Phys. J. — 1996. — *39*, № 2. — P. 146–152.
96. *Kollár J.* Einstein metrics on five-dimensional Seifert bundles// J. Geom. Anal. — 2005. — *15*, № 3. — P. 445–476.
97. *Königs M. G.* Sur les géodésiques a intégrales quadratiques// in: *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV. — Chelsea Publ., 1972. — P. 368—404.
98. *Kovacs D.* The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza–Klein// Gen. Rel. Gravit. — 1984. — *16*, № 7. — P. 645–655.
99. *Kowalski O.* Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leqslant 5$// Rozpravy CSAV, Rada MPV. — 1975. — № 85. — P. 1–61.
100. *Kramer D. Stephani H., MacCallum M., Herlt E.* Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
101. *Ladke L. S., Jaiswal V. K., Hiwarkar R. A.* Five-dimensional exact solutions of Bianchi type-I space-time in $f(R,T)$ theory of gravity// Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Techn. — 2014. — *3*, № 8. — P. 15332–15342.
102. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// Ann. Mat. — 1896. — *24*, № 2. — P. 255–300.
103. *Macedo P. G.* New proposal for a five-dimensional unified theory of classical fields of Kaluza–Klein type/ `arXiv: gr-qc/0101121`.
104. *Magazev A. A.* Casimir functions for five-dimensional Lie groups with a non–semi-Hausdorff space of orbits// Russ. Phys. J. — 2003. — *46*, № 9. — P. 912—920.
105. *Mankoc-Borstnik N., Pavsi M.* A systematic examination of five-dimensional Kaluza–Klein theory with sources consisting of point particles or strings// Nuovo Cim. — 1988. — *99A*, № 4. — P. 489–507.
106. *Marinosci R. A.* Classification of five-dimensional generalized pointwise symmetric Riemannian spaces// Geom. Dedic. — 1995. — *57.* — P. 11–53.
107. *Mikesh J.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky University, 2019.
108. *Mikesh J., Stepanova E.* A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$-structure as a model of abstract statistical manifold// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2014. — *45.* — P. 111—128.
109. *Mohanty G., Mahanta K. L., Bishi B. K.* Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field// Astrophys. Space Sci. — 2007. — *310.* — P. 273—276.
110. *Paiva F. M., Rebouca M. J., Teixeira A. F. F.* Limits of space–times in five dimensions and their relation to the Segre types// J. Math. Phys. — 1997. — *38.* — P. 4228–4236.
111. *Pan Yiwen* Rigid supersymmetry on five-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry/ `arXiv: 1308.1567v4 [hep.th]`.
112. *Pini A., Rodriguez-Gomez D., Schmudea J.* Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions/ `arXiv: 1504.04340v3 [het-th]`.
113. *Rcheulishvili G.* Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. — Miramare-Trieste: Preprint ICTP, IC/92/108, 1992.
114. *Rcheulishvili G. L.* The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space// J. Math. Phys. — 1992. — *33.* — P. 1103–1108.
115. *Rcheulishvili G. L.* Conformal Killing vectors in five-dimensional space/ `arXiv: gr-qc/9312004v1`.
116. *Rebouças M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* Classification of energy momentum tensors in $n > 5$ dimensional space-times: A review// Brazil. J. Phys. — 2004. — *34*, № 2A. — P. 535–543.
117. *Rodroguez-Vallarte M. C., Salgado G.* Five-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions// J. Geom. Phys. — 2016. — *100.* — P. 20—32.

118. *Santos J., Rebouças M. J., Teixeira A. F. F.* Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza—Klein-type theories// J. Math. Phys. — 1995. — *36.* — P. 3074–3084.
119. *Schur F.* Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen// Math. Ann. — 1886. — *27.* — P. 537–567.
120. *Starks S. A., Kosheleva O., Kreinovich V.* Kaluza–Klein 5D ideas made fully geometric/ `arXiv: 0506218v1 [physics.class-ph].`
121. *Varaksin O. L., Klishevich V. V.* Integration of Dirac equation in Riemannian spaces with five-dimensional group of motions// Russ. Phys. J. — 1997. — *40*, № 8. — P. 727—731.
122. *Wesson P. S.* A physical interpretation of Kaluza–Klein cosmology// Astrophys. J. — 1992. — *394*, № 1. — P. 19—24.
123. *Wesson P. S.* The properties of matter in Kaluza–Klein cosmology// Mod. Phys. Lett. A. — 1992. — *7*, № 11. — P. 921–926.
124. *Witten E.* Search for a realistic Kaluza–Klein theory// Nucl. Phys. B. — 1981. — *186.* — P. 412–428.
125. *Yano K.* On harmonic and Killing vectors// Ann. Math. — 1952. — *55.* — P. 38—45.
126. *Zeghib A.* On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds// Adv. Math. — 2016. — *297.* — P. 26—53.

Аминова Ася Васильевна
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `asya.aminova@kpfu.ru`

Хакимов Джамолиддин Рахмонович
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `dzhamoliddink@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 32–39
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-32-39

УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИИ ОРБИТ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ КИЛЛИНГА

© 2022 г. **Ж. О. АСЛОНОВ**

Аннотация. Статья является кратким обзором работ по теории векторных полей Киллинга, заданных на римановых многообразиях постоянной и неотрицательной кривизны.

***Ключевые слова*:** векторное поле, векторное поле Киллинга, орбиобразие, скобка Ли, слоение, риманово слоение.

ON THE GEOMETRY OF ORBITS OF KILLING VECTOR FIELDS

© 2022 **Zh. O. ASLONOV**

Abstract. This paper is a brief review of results in the theory of Killing vector fields defined on Riemannian manifolds of constant and nonnegative curvature.

***Keywords and phrases*:** vector field, Killing vector field, orbifold, Lie bracket, foliation, Riemannian foliation.

***AMS Subject Classification*:** 58K45, 17B66, 32S65

Изучение преобразований, которые сохраняют метрику пространства-времени, играет исключительно важную роль в математической физике. Достаточно сказать, что с такими преобразованиями связаны наиболее важные законы сохранения. Эти преобразования порождают так называемое векторное поле Киллинга. Векторные поле Киллинга в физике указывают на симметрию физической модели и помогают найти сохраняющиеся величины, такие как энергия, импульс. В теории относительности, например, если метрический тензор не зависит от времени, то в пространстве-времени существует времениподобный вектор Киллинга, с которым связана сохраняющаяся величина — энергия гравитационного поля. Название дано в честь немецкого математика В. Киллинга (1847–1923), открывшего группы Ли и многие их свойства параллельно с Софусом Ли.

Геометрию векторных полей Киллинга изучали многие ученые: W. Killing, В. Н. Берестовский, T. Adachi, Ю. Г. Никоноров, М. О. Катанаев, C. Beetle, M. Gurses, S. Maeda, S. Z. Nemeth, K. Nomizu, T. Oprea, K. Yano, S. Kobayashi и др.

В целом ряде областей физики, например, в теории электромагнитного поля, в теории тепла, в статической физике и в теории оптимального управления, нужно рассматривать не векторные поля, а семейство векторных полей. В этом случае основным объектом исследования является орбита семейства векторных полей. В настоящее время изучение геометрических и топологических свойств орбит векторных полей является одной из актуальных задач современной геометрии. Изучению геометрии орбит семейства гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с его важностью в различных разделах математики, такие как теория оптимального управления, дифференциальные игры и геометрия сингулярных слоений.

Работа выполнена при поддержке гранта фундаментальных исследований (проект ФЗ-2020092531).

В этой работе приведен обзор работ по геометрии и топологии орбит векторных полей Киллинга. Всюду под гладкостью понимается гладкость класса C^∞, если не указан конкретный класс.

Пусть D — семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M. Известно, что разбиение многообразия на орбиты является сингулярным слоением. Напомним определение сингулярного слоения (см. [19]).

Подмножество L многообразия M называется *слоем*, если

(i) существует такая дифференциальная структура σ на L, что гладкое многообразие (L, σ) является k-мерным погруженным подмногообразием многообразия M;

(ii) для локально связного топологического пространства N и для такого непрерывного отображения $f\colon N \to M$, что $f(N) \subset L$, отображение $f\colon N \to (L, \sigma)$ непрерывно.

Разбиение F многообразия M на слои называется гладким (класса C^r) сингулярным слоением (слоением с особенностями), если выполнены следующие условия:

(i) для каждой точки $x \in M$ существует такая C^r-карта (ψ, U), содержащая точку x, что $\psi(U) = V_1 \times V_2$, где V_1 — окрестность начала в $\mathbb{R}^k$, V_2 — окрестность начала в $\mathbb{R}^{n-k}$, k — размерность слоя, проходящего через точку x;

(ii) $\psi(x) = (0, 0)$;

(iii) для каждого слоя L, удовлетворяющего условию $L \cap U \neq \varnothing$, имеет место соотношение $L \cap U = \psi^{-1}(V_1 \times l)$, где $l = \{v \in V_2 : \psi^{-1}(0, v) \in L\}$.

Если размерности слоев слоения с особенностями одинаковы, то оно является регулярным слоением в смысле определения, данного в [20].

С геометрической точки зрения, важными классами слоений являются римановы слоения. Слоение F на римановом многообразии M называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остаётся ортогональной во всех своих точках ко всем слоям F (см. [18]).

Римановы слоения без особенностей впервые были введены и изучены Рейнхартом в [18]. Римановы слоения изучены многими математиками (см. [12–14, 16, 21]).

Римановы слоения с особенностями были введены и изучены в работах P. Molino [15] и А. Нарманова [6, 8].

Пусть M — гладкое связное риманово многообразие размерности n.

Определение 1. Векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований $t \to X^t(x)$, порожденная полем X, состоит из изометрий.

Пример 1. Рассмотрим на двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Для точки (x_0, y_0) преобразование $t \to X^t(x)$ для этих векторных полей имеют вид соответственно

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t, \\ y(t) = y_0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = x_0, \\ y(t) = y_0 + t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t, \\ y(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t. \end{cases} \qquad (1)$$

Первые два отображение являются параллельными переносами по направлению осей Ox и Oy соответственно, а последнее — вращением вокруг начала координат. Указанные отображения являются изометриями евклидовой плоскости, поэтому соответствующие векторные поля являются векторными полями Киллинга.

Пример 2. В трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ существует шесть линейно независимых полей Киллинга над полем вещественных чисел:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_4 &= z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, & X_5 &= -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}, & X_6 &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Группы преобразований, порожденные векторными полями X_1, X_2, X_3, являются группами параллельных переносов по направлению осей Ox, Oy и Oz соответственно, а последние три являются группами вращений вокруг осей Ox, Oy и Oz соответственно. Последние три поля являются также полями Киллинга на сфере S^2.

Пример 3. Рассмотрим трехмерную сферу S^3 в $\mathbb{R}^4 \cong x\mathbb{C}^2$ с индуцированной метрикой. Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — точка на сфере S^3. С помощью комплексных чисел трехмерную сферу можно записать следующим образом:

$$S^3 = \{(z_1, z_2); |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

где $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ векторное поле Киллинга

$$X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Легко проверить, что заданное векторное поле касается сферы. Для точки $(z_1, z_2) \in S^3$ интегральная кривая векторного поля X, выходящая из точки (z_1, z_2) при $t = 0$, имеет вид

$$\gamma(t) = \{(z_1 e^{it}, z_2 e^{it}),\ -\infty < t < \infty\}.$$

Очевидно, что интегральная кривая $\gamma(t)$ является окружностью. Семейство интегральных кривых векторного поля X порождает гладкое расслоение, которое называется расслоением Хопфа.

Векторное поле Киллинга обладают следующими свойствами (см. [4]):

(i) скобка Ли двух полей Киллинга является полем Киллинга;
(ii) линейная комбинация полей Киллинга над полем действительных чисел является полем Киллинга.

Поэтому множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M, обозначаемое $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел.

Приведем некоторые известные свойства векторных полей Киллинга.

Теорема 1 (см. [5, с. 224])**.** *Алгебра Ли $K(M)$ киллинговых векторных полей связного риманова многообразия M имеет размерность не более $\frac{1}{2}n(n+1)$, где $n = \dim M$. Если $\dim K(M) = \frac{1}{2}n(n+1)$, то M — многообразие постоянной кривизны.*

Теорема 2 (см. [4])**.** *Длина вектора Киллинга остается постоянной вдоль интегральной кривой векторного поля Киллинга.*

Теорема 3 (см. [4])**.** *Пусть X — векторное поле Киллинга на римановом многообразии (M, g). Интегральные кривые поля X являются геодезическими линиями тогда и только тогда, когда длина векторного поля $|X|$ постоянна на M.*

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема, которая дает необходимое и достаточное условие того, чтобы данное векторное поле в евклидовом пространстве было киллинговым.

Теорема 4. *Векторное поле*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

в $\mathbb{R}^n$ является векторным полем Киллинга тогда и только тогда, когда выполняется условия

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = 0, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Как показывает пример 1, интегральные кривые векторного поля Киллинга не всегда являются геодезическими линиями. Теорема 4 утверждает, что если длина векторного поля Киллинга постоянна на всем многообразии, то интегральные кривые являются геодезическими линиями.

В. Н. Берестовский и Ю. Г. Никоноров доказали (см. [4]), что если длина векторного поля Киллинга постоянна на всем многообразии, то интегральные кривые являются геодезическими линиями.

Следующее утверждение показывает, что на двумерном круговом цилиндре интегральные кривые векторного поля Киллинга всегда являются геодезическими линиями (см. [3]).

Теорема 5. *Интегральная кривая каждого гладкого векторного поля Киллинга на двумерном круговом цилиндре является геодезической линией.*

Замечание 1. Как показывает следующий пример, интегральные кривые векторного поля Киллинга на трехмерном круговом цилиндре не обязаны быть геодезическими линиями.

Пример 4. Пусть цилиндр $M = S^2 \times \mathbb{R}^1$ вложен в $\mathbb{R}^4$ с помощью следующих параметрических уравнений
$$x = \cos u \sin v, \quad y = \cos u \cos v, \quad z = \sin u, \quad w = t.$$
Рассмотрим векторное поле
$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$
в $\mathbb{R}^4$. По теореме 5 можно проверить, что рассматриваемое поле является полем Киллинга в $\mathbb{R}^4$. Кроме того, это поле касается M. Поэтому поле X является векторным полем Киллинга на M. Интегральные кривые, проходящие через точки (x_0, y_0, z_0, w_0) поля X, имеют вид
$$x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \quad y(t) = -x_0 \sin t + y_0 \cos t, \quad z(t) = z_0, \quad w(t) = w_0.$$
Если $z_0 \neq 0$, то эта кривая не является большой окружностью на S^2. Следовательно, она не является геодезической линией.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема.

Теорема 6 (см. [11])**.** *Пусть M — гладкое риманово многообразие размерности n, D — семейство гладких векторных полей Киллинга. Предположим, что орбиты семейства D имеют размерности, меньшие n. Тогда разбиение многообразия на орбиты является сингулярным римановым слоением.*

Рассмотрим векторные поля X и Y в $\mathbb{R}^4$, которые в декартовых координатах имеют следующий вид:
$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial w}, \quad Y = z\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial w}.$$
Согласно приведенной выше теореме 6 легко проверить, что эти поля являются векторными полями Киллинга. Обозначим через S^3 единичную сферу с индуцированной метрикой из $\mathbb{R}^4$, которая задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. Нетрудно проверить, что эти векторные поля касаются сферы S^3. Значит, эти поля являются векторными полями Киллинга на сфере S^3.

Теорема 7. *Семейство $D = \{X, Y\}$ вполне интегрируемо. Регулярные слои слоения F являются двумерными торами. Множество сингулярных слоев состоит из двух окружностей.*

Замечание 2. Векторные поля X и Y не имеют критических точек. Так как каждое векторное поле, касательное к двумерной сфере, обязательно имеет критическую точку на ней, орбита этого семейства не может быть двумерной сферой (см. [1]).

Замечание 3. Как следует из результатов работы [?], если семейство вполне интегрируемо, то орбита совпадает с интегральным подмногообразием.

Следующая теорема из [11] даёт полную классификацию геометрий орбит векторных полей Киллинга в трёхмерном евклидовом пространстве.

Теорема 8. *Пусть D — семейство векторных полей Киллинга в $\mathbb{R}^3$. Тогда орбиты этого семейства порождают слоение F, которое имеет один из следующих семи типов*:

1. *слоение F состоит из параллельных прямых*;
2. *слоение F состоит из концентрических окружностей, лежащих на параллельных плоскостях и прямой, которая является множеством центров*;

3. *слоение F состоит из винтовых линий, лежащих на концентрических круговых цилиндрах, одна из которых является осью цилиндров*;
4. *слоение F состоит из параллельных плоскостей*;
5. *слоение F состоит из концентрических сфер и точки* (*центр сфер*);
6. *слоение F состоит из концентрических круговых цилиндров и прямой* (*ось цилиндров*);
7. *слоение F имеет только один слой* $\mathbb{R}^3$.

В доказательстве теоремы будет использовано следующее предложение.

Теорема 9 (см. [7])**.** *Пусть F — сингулярное риманово слоение на полном римановом многообразии M, γ_0 — геодезическая, идущая из некоторой точки x_0 в некоторую точку y_0, ортогональная к F. Тогда для каждой точки $x \in L(x_0)$ существует геодезическая γ, идущая из x в некоторую точку слоя $L(y_0)$, причем ортогональная к F и имеющая длину, равную длине γ_0.*

Также в [7] приведены подробные примеры орбит векторных полей Киллинга для каждого пункта теоремы 8. Перечислим их.

1. Рассмотрим семейство векторных полей D, состоящее из одного векторного поля
$$X = 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - 3\frac{\partial}{\partial z}.$$
Нетрудно проверить, что векторное поле X является векторным полем Киллинга. Интегральные кривые векторного поля X порождают слоение, состоящее из параллельных прямых.
2. Пусть семейство D состоит из векторного поля
$$X = (1-z)\frac{\partial}{\partial y} + (y-4)\frac{\partial}{\partial z}.$$
Для векторного поля X выполняется условие теоремы 5, поэтому оно является векторным полем Киллинга. Слоение, порожденное интегральными кривыми векторного поля X, состоит из концентрических окружностей, лежащих на параллельных плоскостях. Векторное поле X порождает группу изометрий, которые являются вращениями вокруг прямой, состоящей из центров концентрических окружностей. Неподвижные точки заполняют прямую $y = 4$, $z = 1$.
3. Рассмотрим векторное поле
$$X = \left\{(3+z)\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} - (x-1)\frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$
Интегральные кривые векторного поля X порождают слоение, состоящее из винтовых линий, лежащих на круговых цилиндрах и прямой, которая является осью цилиндров.
4. Рассмотрим семейство, состоящее из двух векторных полей
$$D = \left\{(3-z)\frac{\partial}{\partial y} + (y-1)\frac{\partial}{\partial z},\ (2+z)\frac{\partial}{\partial y} + (y-7)\frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$
Нетрудно проверить, что каждое векторное поле из семейства D является векторным полем Киллинга. В этом случае орбиты семейства векторных полей D порождают слоение, состоящее из параллельных плоскостей.
5. Рассмотрим семейство, состоящее из двух векторных полей
$$D = \left\{(3-z)\frac{\partial}{\partial x} + (x-1)\frac{\partial}{\partial z},\ (1-x)\frac{\partial}{\partial y} + (y-1)\frac{\partial}{\partial x}\right\}.$$
Непосредственной проверкой можно показать, что для данных векторных полей выполняются условия теоремы 5, поэтому они являются векторными полями Киллинга. Орбиты семейства D порождает слоение, которое состоит из концентрических сфер и точки $(1,1,3)$, точка $(1,1,3)$ является центром всех сфер.
6. Рассмотрим семейство, состоящее из двух векторных полей
$$D = \left\{(5-z)\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z},\quad 2\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

Группа изометрий, порожденная векторными полями из семейства векторных полей D, состоит из композиции сдвигов и вращений вокруг оси $z = 5$, $y = 0$. Если рассмотреть орбиту, проходящую через точку, отличную от точки прямой, то она является цилиндром. Если точка лежит на прямой, тогда сама прямая является орбитой.

7. Теперь приведем пример семейства киллинговых векторных полей, каждая орбита которого совпадает с $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим семейство

$$D = \left\{-z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z},\ (2-z)\frac{\partial}{\partial y} + (y-1)\frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

Нетрудно проверить, что эти векторные поля являются векторными полями Киллинга. Однопараметрическая группа преобразований векторных полей из D состоит из вращений вокруг двух скрещивающихся прямых: ось Oy и прямая $z = 2$, $y = 1$.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -z & 0 & x \\ 0 & 2-z & y-1 \\ y-1 & -x & 0 \end{pmatrix}.$$

Третья строка матрицы A состоит из компонент векторного поля $[X, Y]$ и $\det A = 2x(1-y)$. Поэтому ранг матрицы A максимален во всех точках $\mathbb{R}^3$, кроме точек, лежащих на плоскостях $x = 0$ и $y = 1$. Следовательно, если точка p не лежит на этих плоскостях, то $\dim A_p(D) = 3$. Так как $\dim A_p(D) \leqslant \dim L(p)$, орбита $L(p)$ является трехмерным многообразием. Поэтому $L(p) = \mathbb{R}^3$.

В работе А. Нарманова и О. Касимова [17] исследованы структуры пространства слоев сингулярного слоения, которые порождаются орбитами векторных полей Киллинга.

Определение 2. Пусть F — сингулярное риманово слоение на полном римановом многообразии. Слоение F называется сингулярным римановым слоением с сечением,.если для каждой регулярной точки p множество $\sigma := \exp_p(H_pL)$ является полным погруженным подмногообразием, которое пересекает каждый слой ортогонально и в нем множество регулярных точек всюду плотно. Множество σ называется сечением.

Следующая теорема, доказанная в [17], является теоремой о достаточных условиях для того, чтобы слоение, порожденное орбитами векторных полей Киллинга, было слоением с сечением.

Теорема 10. *Пусть F — сингулярное слоение на $\mathbb{R}^n$, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга. Предположим, что все сингулярные слои изолированы, а размерность регулярных слоев равна $n-1$. Тогда слоение F является римановым слоением с сечением.*

Теорема 11. *Пусть F — сингулярное риманово слоение $\mathbb{R}^n$, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга, где $n = 2, 3$. Предположим, что размерность регулярных слоев равна $n-1$. Тогда слоение F является сингулярным римановым слоением с сечением.*

Во второй части статьи [17] доказано, что если орбиты векторных полей Киллинга порождают сингулярное риманово слоение с сечением, то множество орбит является гладким орбиобразием.

Обозначим через M связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Пусть U — открытое подмножество M, V — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и G — конечная группа C^r диффеоморфизмов V.

Карта орбиобразия в M — это набор из четырех элементов (U, V, G, φ), где $\varphi\colon V \to U$ — отображение, являющееся композицией двух отображений $\varphi := \tilde{\pi} \circ \pi$ где $\pi\colon V \to V/G$ — фактор-отображение на множество орбит, а $\tilde{\pi}\colon V/G \to V$ — произвольный гомеоморфизм.

Атласом класса C^r называется семейство карт $A = \{(U_\alpha, V_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha),\ \alpha \in J\}$ для которых выполнены условия:

(i) множество $\{(U_\alpha, \alpha \in J\}$ образует покрытие M;

(ii) для любых двух карт $(U_\alpha, V_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)$ и $(U_\beta, V_\beta, G_\beta, \varphi_\beta)$ из A, удовлетворяющих условию $U_\alpha \in U_\beta$, существует инъекция.

Максимальный атлас A класса C^r называется C^r-структурой дифференцируемого орбиобразия на M, и пара (M, A) называется дифференцируемым C^r-орбиобразием. Любой атлас класса C^r

однозначно определяет содержащий его максимальный атлас того же класса. Число n называется размерностью орбиобразия (M, A).

Иначе можно сказать, что орбиобразие — это топологическое пространство, локально гомеоморфное фактормножеству открытого подмножества евклидова пространства по действию конечной группы.

В работе А. Нарманова и О. Касимова [17] в случае сингулярного слоения, доказана следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть F — сингулярное слоение в $\mathbb{R}^n$, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга. Предположим, что слоение F является сингулярным римановым слоением с сечением. Тогда множество слоев F (множество орбит) является орбиобразием.*

А. Нармановым и С. Саитовой (см. [9]) введено понятие векторного поля Киллинга типа «перенос» или «вращение» и получены необходимые и достаточные условия коммутирования векторных полей Киллинга, приведена классификация орбит векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах, а также изучены различные свойства и необходимые и достаточные условия коммутирующих векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах.

Доказаны следующие теоремы (см. [9]).

Теорема 13. *Два векторных поля Киллинга X, Y, одно из которых порождает «вращение», а второе — «перенос», коммутируют тогда и только тогда, когда направление «переноса» поля Y параллельно подпространству N неподвижных точек поля X.*

Теорема 14. *Пусть X, Y — векторные поля Киллинга в $\mathbb{R}^n$, порождающие «вращения», и N_1, N_2 — множества неподвижных (особых) точек X, Y соответственно. Векторные поля X, Y коммутируют тогда и только тогда, когда либо $\dim N_1 = \dim N_2 = 0$ и $N_1 = N_2$, либо $\mathbb{R}^n = N_1 \otimes N_2$.*

Далее в работе исследована задача о классификации орбит семейства неприводимых векторных полей Киллинга.

Определение 3. Векторное поле Киллинга в евклидовом пространстве типа «вращение» называется неприводимым относительно данной системы координат, если множество неподвижных (особых) точек этого векторного поля является $(n-2)$-мерной координатной плоскостью. Векторное поле Киллинга в евклидовом пространстве типа «перенос» называется неприводимым, если направление переноса параллельно одной из координатных осей.

Приведем теорему о геометрии орбит векторных полей Киллинга в евклидовом пространстве при предположении, что семейство $B(D)$ состоит из неприводимых вращений и переносов (см. [17]).

Теорема 15. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ задано семейство D векторных полей Киллинга, а базисное семейство состоит из m неприводимых векторных полей. Тогда орбита L_p произвольной точки $p \in \mathbb{R}^n$ является одним из следующих подмногообразий евклидова пространства*:

(i) *k-мерной плоскостью, где $0 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$;*
(ii) *k-мерным тором $T^k = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$, где $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, [n/2]\}$;*
(iii) *k-мерной сферой S^k, где $0 \leqslant k \leqslant \min\{m, n-1\}$;*
(iv) *k-мерным торическим цилиндром $T^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$, где $k = k_1 + k_2$ и $k_2 \leqslant k \leqslant \min\{m, [n/2]\}$;*
(v) *k-мерным сферическим цилиндром $S^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$, где $k = k_1 + k_2$ и $k_2 \leqslant k \leqslant \min\{m, n-1\}$.*

В [9] изучается геометрия некоторых субмерсий, которые возникают при изучении геометрии векторных полей Киллинга, а именно, рассматривается семейство D, состоящее из n векторных полей Киллинга в $\mathbb{R}^n$, из которых k вращений, $n-k$ параллельных переносов, где $n = 2k + l$:

$$Y_i = \begin{cases} -x_i \dfrac{\partial}{\partial x_{i-1}} + x_{i-1} \dfrac{\partial}{\partial x_i}, & \text{если } i \text{ четно и } 1 < i \leqslant 2k, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

Показано, что базис минимальной алгебры $A(D)$ состоит из $n+k$ векторных полей

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad X_{n+s} = -x_{2s}\frac{\partial}{\partial x_{2s-1}} + x_{2s-1}\frac{\partial}{\partial x_{2s}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad s = 1, 2, \ldots, k.$$

Показано, что орбита семейства D для каждой точки совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$ и определена следующая субмерсия $\pi\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$:

$$\pi(t_1, t_2, \ldots, t_{n+k}) = X_{n+k}^{t_{n+k}}(\ldots(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O)\ldots)),$$

где O — начало координат в $\mathbb{R}^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1975.
2. *Аслонов Ж. О.* Геометрия орбит векторных полей// Докл. АН РУз. — 2011. — № 5. — С. 5–7.
3. *Аслонов Ж. О. Нарманов А.* Геометрия орбит векторных полей Киллинга// Узбек. мат. ж. — 2012. — № 2. — С. 77–85.
4. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях// Сиб. мат. ж. — 2008. — *49*, № 3. — С. 497–514.
5. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
6. *Нарманов А. Я.* О дифференциальной геометрии слоений с особенностями// Докл. АН РУз. — 1996. — № 3. — С. 6–7.
7. *Нарманов А. Я.* О трансверсальной структуре множеств управляемости симметричных систем управления// Диффер. уравн. — 1996. — *32*, № 6. — С. 780–783.
8. *Нарманов А. Я.* Структура орбит систем векторных полей и их предельные свойства/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Ташкент, 1998.
9. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии векторных полей Киллинга// Докл. АН РУз. — 2013. — № 5. — С. 3–5.
10. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.
11. *Narmanov A. Ya., Aslonov J. O.* On the geometry of the orbits of Killing vector fields/ `arXiv: 1203.3690 [math.DG]`.
12. *Hermann R.* The differential geometry of foliations, I// Ann. Math. — 1960. — *72*. — P. 445–457.
13. *Hermann R.* The differential geometry of foliations, II// J. Math. Mech. — 1962. — *11*. — P. 305–315.
14. *Molino P.* Orbit-like foliations// in: Geometric Study of Foliations. — Tokyo: World Scientific, 1993. — P. 97–119.
15. *Molino P.* Riemannian Foliations. — Boston: Birkhäuser, 1988.
16. *Morgan A.* Holonomy and metric properties of foliations in higher codimension// Proc. Am. Math. Soc. — 1976. — *58*. — P. 255–261.
17. *Narmanov A. Ya., Qosimov O. Y.* On the geometry of the set of orbits of Killing vector fields on Euclidean space// J. Geom. Symm. Phys. — 2020. — *55*. — P. 39–49.
18. *Reinhart B.* Foliated manifolds with bundle-like metrics// Ann. Math. — 1959. — *69*. — P. 119–132.
19. *Stefan P.* Accessible sets, orbits and foliations with singularities// Proc. London Math. Soc. (3). — 1974. — *29*. — P. 699–713.
20. *Tamura I.* Topology of Foliations: An Introduction. — Am. Math. Soc., 2006.
21. *Tondeur P.* Foliations on Riemannian Manifolds. — New York: Springer-Verlag, 1988.
22. *Tursunov B. A.* On the geometry of Riemannian submersions over orbit of Killing vector fields// Bull. Math. Stat. Res. — 2016. — *4*, № 2. — P. 102–107.

Аслонов Жасурбек Орзиевич
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `jasurbek05@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 40–51
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-40-51

УДК 517.977

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО СКАЛЯРНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВУМЯ НЕСИНХРОННЫМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

© 2022 г. **Л. М. БЕРЛИН, А. А. ГАЛЯЕВ, П. В. ЛЫСЕНКО**

Аннотация. Рассматривается задача оптимального скалярного управления системой из двух независимых гармонических осцилляторов. Для решения используются методы геометрической теории управления, исследуется вертикальная подсистема гамильтоновой системы. Оптимальные решения найдены в разных по количеству переключений классах управления. Аналитические результаты иллюстрируются моделированием.

Ключевые слова: геометрическая теория, оптимальное управление, гармонический осциллятор, принцип максимума Понтрягина, алгебра Ли.

GEOMETRIC APPROACH TO THE PROBLEM OF OPTIMAL SCALAR CONTROL OF TWO NONSYNCHRONOUS OSCILLATORS

© 2022 **L. M. BERLIN, A. A. GALYAEV, P. V. LYSENKO**

Abstract. The problem of optimal scalar control of a system of two independent harmonic oscillators is considered. For the solution, methods of geometric control theory are used. The vertical subsystem of the Hamiltonian system is examined. Optimal solutions are found in control classes with various number of switchings. Analytical results are illustrated by simulation.

Keywords and phrases: geometric theory, optimal control, harmonic oscillator, Pontryagin's maximum principle, Lie algebra.

AMS Subject Classification: 49K15, 22E60

1. Введение. Задачи управления динамическими колебательными системами, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими управляющее воздействие, широко представлены в различных приложениях в механике, технике и радиоэлектронике. В частности, в качестве группы осцилляторов может рассматриваться электрическая сеть, поведение всех контуров которой должно быть определено одним общим скалярным управлением. Целью управления является достижение системой требуемого состояния с оптимизацией заданного критерия качества. Для нахождения управления как функции времени необходимо решить задачу оптимального управления в условиях, когда размерность вектора управления значительно меньше, чем размерность фазового пространства состояний системы.

Фундаментом теории оптимального управления служит принцип максимума Понтрягина (ПМП), разработанный группой математиков во главе с Л. С Понтрягиным и изложенный в [5],

Работа выполнена при поддержке Программы развития молодежных научных школ Института проблем управления РАН 2020–2021.

и окружающие его исследования. В [2] В. Г. Болтянским впервые решена задача синтеза для одиночного осциллятора с критерием быстродействия с использованием ПМП. Задачи оптимального управления несколькими осцилляторами были поставлены в монографии Ф. Л. Черноусько [7], в которой также предлагаются приближенные методы по реализации управления для систем, содержащих колебательные и вращательные звенья. Далее, уже на основе этих методов, дается решение некоторых задач оптимального управления с использованием малых сил и задач управления колебаниями.

В данной работе будет применена геометрическая теория управления, возникшая в 1970-х гг., с геометрической интерпретацией ПМП. Такой подход использует методы теории групп и алгебр Ли, дифференциальной геометрии, а также симплектическую геометрию для исследования управляемых систем. Первый российский учебник [1] по данному направлению написан А. А. Аграчевым и Ю. Л. Сачковым.

В статье [3] показана управляемость системы N несинхронных осцилляторов и предложен алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления с критерием быстродействия. В статье [4] предложен алгоритм нахождения оптимального решения в классе трех переключений.

2. Постановка задачи оптимального скалярного управления двумя осцилляторами. Рассмотрим систему, состоящую из двух независимых осцилляторов с различными собственными частотами колебаний $\omega_1 \neq \omega_2$. В каждый из осцилляторов введено скалярное управляющее воздействие u. Уравнения динамики системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{q_1}(t) = p_1(t), \\ \dot{p_1}(t) = -\omega_1^2 q_1(t) + u(t), \\ \dot{q_2}(t) = p_2(t), \\ \dot{p_2}(t) = -\omega_2^2 q_2(t) + u(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $q_i \in C^2(0,T)$ — координата i-го осциллятора, а $p_i \in C^1(0,T)$ — его импульс, $i = 1, 2$. Управление ограничено по модулю:

$$|u| \leqslant \varepsilon, \quad u \in L^\infty(0,T). \tag{2}$$

В начальный момент времени осцилляторы находятся в состоянии покоя, т. е. обе фазовые координаты каждого осциллятора равны нулю:

$$q_i(0) = 0, \quad p_i(0) = 0, \quad i = \overline{1,2}. \tag{3}$$

Цель управления состоит в приведении системы осцилляторов в некоторый нефиксированный момент времени T в конечное состояние:

$$q_1(T) = 0, \quad p_1(T) = 1, \quad q_2(T) = 0, \quad p_2(T) = 0. \tag{4}$$

Рассматривается задача быстродействия:

$$T \to \min_u. \tag{5}$$

3. Управляемость системы двух несинхронных осцилляторов. Задача оптимального управления (1)—(5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{p_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -\omega_1^2 q_1 \\ p_2 \\ -\omega_2^2 q_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = (q_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathbb{R}^4 = M, \quad u \in [-\varepsilon, \varepsilon] = U, \tag{6}$$

$$x(0) = x_0 = (0,0,0,0), \quad x(T) = x_T = (0,1,0,0),$$

$$T = \int_0^T dt \to \min.$$

Система векторных полей данной задачи определяется следующим образом:

$$\mathcal{F}(x,u) = \{f_1 + uf_2 \mid u \in U\}, \tag{7}$$

$$f_1 = p_1\frac{\partial}{\partial q_1} + p_2\frac{\partial}{\partial q_2} - \omega_1^2 q_1\frac{\partial}{\partial p_1} - \omega_2^2 q_2\frac{\partial}{\partial p_2}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Аффинная система $\mathcal{F}$ является несимметричной ввиду наличия вектора сдвига f_1. Вопросы достижимости и управляемости для таких систем с геометрической точки зрения впервые были исследованы в статье Суссмана и Джарджевича [10].

Критерий для сильной достижимости дает следующая теорема.

Теорема 1 (Суссман, Джарджевич). *Аналитическая система $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ обладает свойством сильной достижимости в точке x тогда и только тогда, когда размерность идеала алгебры Ли, порожденной системой, совпадает с размерностью пространства состояний*

$$\dim \mathcal{L}_0(x) = n. \tag{8}$$

В [9, пример 3.16] показано применение теоремы 1 к линейным системам с ограничением на управление. Если внутренность U является непустым множеством, то ранговый критерий (8) обеспечивает свойство сильной достижимости для такой системы.

Для системы (6) справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Система* (1) *является сильно достижимой.*

Доказательство. Используем для доказательства теорему 1. В нашем случае для системы (7) идеал $\mathcal{L}_0$ имеет вид

$$\mathcal{L}_0 = \operatorname{span}\Big(f_2,\ [f_1,f_2],\ \big[f_1,[f_1,f_2]\big],\ \big[f_1,\big[f_1,[f_1,f_2]\big]\big]\Big). \tag{9}$$

Покажем это, выбрав, по определению идеала, из векторных полей f_1, f_2 и их скобок Ли такие, чтобы матрица, составленная из них, имела полный ранг, равный четырем (по размерности многообразия M). Для этого вычислим скобки Ли полей системы. Скобка Ли первого порядка равна

$$f_3 = [f_1,f_2] = -\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Скобки Ли второго порядка вычисляются в виде

$$f_4 = [f_1,f_3] = -\omega_1^2\frac{\partial}{\partial p_1} - \omega_2^2\frac{\partial}{\partial p_2}, \quad [f_2,f_3] = 0.$$

Единственная ненулевая скобка Ли третьего порядка равна

$$f_5 = [f_1,f_4] = \omega_1^2\frac{\partial}{\partial q_1} + \omega_2^2\frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Удостоверимся, что f_2, f_3, f_4, f_5 линейно независимы. Определитель матрицы, составленной из выбранных векторных полей, не равен нулю:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & -\omega_2^2 \\ \omega_1^2 & 0 & \omega_2^2 & 0 \end{pmatrix} = \omega_1^4 - 2\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_2^4 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 \neq 0,$$

так как $\omega_1 \neq \omega_2$ по условию задачи. Следовательно, выполнена теорема Суссмана—Джарджевича, и система является сильно достижимой. $\square$

На вопрос о глобальной управляемости линейной системы в нуле при наличии ограничений на управление вида $\mathcal{F}\{x,u\} = \{Ax + Bu \mid u \in U\}$ отвечает следующая теорема из [8].

Теорема 2 (ЛаСалль, Конти). *Автономная система (A,B,U) при $U \in \mathbb{R}^m$ и $\operatorname{int} U \neq \varnothing$ глобально управляема в нуле тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$.

(ii) $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leqslant 0$ *для каждого собственного значения* λ_i *матрицы* A.

Первое условие теоремы 2 эквивалентно ранговому критерию (8) теоремы 1. Кроме того, для системы (6) $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$. Таким образом, теорема 2 выполнена и система (6) является вполне управляемой.

Это можно доказать конкретным построением. Общее решение дифференциальных уравнений, описывающих систему (6), с начальными условиями $(q_1(0), p_1(0), q_2(0), p_2(0))$ имеет вид

$$q_1(t) = \frac{p_1(0)}{w_1}\sin(w_1 t) + q_1(0)\cos(w_1 t) + \frac{1}{w_1}\int\limits_0^t \sin(w_1(t-\tau))u(\tau)d\tau, \tag{10a}$$

$$p_1(t) = p_1(0)\cos(w_1 t) - q_1(0)w_1\sin(w_1 t) + \int\limits_0^t \cos(w_1(t-\tau))u(\tau)d\tau, \tag{10b}$$

$$q_2(t) = \frac{p_2(0)}{w_2}\sin(w_2 t) + q_2(0)\cos(w_2 t) + \frac{1}{w_2}\int\limits_0^t \sin(w_2(T-\tau))u(\tau)d\tau, \tag{10c}$$

$$p_2(t) = p_2(0)\cos(w_2 t) - q_2(0)w_2\sin(w_2 t) + \int\limits_0^t \cos(w_2(t-\tau))u(\tau)d\tau. \tag{10d}$$

Для управляемости системы осцилляторов нужно, чтобы в некоторый момент t_1 все фазовые координаты стали равными нулю для произвольных начальных условий. Перепишем систему в виде

$$-\frac{p_1(0)}{w_1}\sin(w_1 t) - q_1(0)\cos(w_1 t) = \frac{1}{w_1}\int\limits_0^t \sin(w_1(t-\tau))u(\tau)d\tau, \tag{11a}$$

$$-p_1(0)\cos(w_1 t) + q_1(0)w_1\sin(w_1 t) = \int\limits_0^t \cos(w_1(t-\tau))u(\tau)d\tau, \tag{11b}$$

$$-\frac{p_2(0)}{w_2}\sin(w_2 t) - q_2(0)\cos(w_2 t) = \frac{1}{w_2}\int\limits_0^t \sin(w_2(t-\tau))u(\tau)d\tau, \tag{11c}$$

$$-p_2(0)\cos(w_2 t) + q_2(0)w_2\sin(w_2 t) = \int\limits_0^t \cos(w_2(t-\tau))u(\tau)d\tau. \tag{11d}$$

В силу достижимости точка $(q_1(0), -p_1(0), q_2(0), -p_2(0))$ может быть достигнута из нуля за время t_0 при управлении $u_0(t)$. Тогда

$$q_1(0) = q_1(t_0) = \frac{1}{w_1}\int\limits_0^{t_0} \sin(w_1(t_0-\tau))u_0(\tau)d\tau, \tag{12a}$$

$$-p_1(0) = p_1(t_0) = \int\limits_0^{t_0} \cos(w_1(t_0-\tau))u_0(\tau)d\tau, \tag{12b}$$

$$q_2(0) = q_2(t_0) = \frac{1}{w_2}\int\limits_0^{t_0} \sin(w_2(t_0-\tau))u_0(\tau)d\tau, \tag{12c}$$

$$-p_2(0) = p_2(t_0) = \int\limits_0^{t_0} \cos(w_2(t_0 - \tau))u_0(\tau)d\tau. \tag{12d}$$

Подставляя в (11), получаем

$$\frac{1}{w_1}\int\limits_0^{t_0} \sin(w_1(t_1 - t_0 + \tau))u_0(\tau)d\tau = \frac{1}{w_1}\int\limits_0^{t_1} \sin(w_1(t_1 - \tau))u(\tau)d\tau, \tag{13a}$$

$$\int\limits_0^{t_0} \cos(w_1(t_1 - t_0 + \tau))u_0(\tau)d\tau = \int\limits_0^{t_1} \cos(w_1(t_1 - \tau))u(\tau)d\tau, \tag{13b}$$

$$\frac{1}{w_2}\int\limits_0^{t_0} \sin(w_2(t_1 - t_0 + \tau))u_0(\tau)d\tau = \frac{1}{w_2}\int\limits_0^{t_1} \sin(w_2(t_1 - \tau))u(\tau)d\tau, \tag{13c}$$

$$\int\limits_0^{t_0} \cos(w_2(t_1 - t_0 + \tau))u_0(\tau)d\tau = \int\limits_0^{t_1} \cos(w_2(t_1 - \tau))u(\tau)d\tau. \tag{13d}$$

Тогда при $t_1 = t_0$ и $u(t) = -u_0(t_0 - t)$ левая и правая части последней системы равны, т.е. система гарантированно может прийти в ноль из любой начальной точки, являясь, таким образом, управляемой.

Свойство управляемости можно показать с использованием теоремы Пуанкаре и того факта, что поле f_1 является бездивергентным,

$$\operatorname{div}_x f_1 = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial p_1}{\partial q_1} - \omega_1^2 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial q_2} - \omega_2^2 \frac{\partial q_2}{\partial p_2} = 0. \tag{14}$$

Это векторное поле на $\mathbb{R}^4$ является консервативным, т.е. сохраняет стандартный объём

$$\operatorname{Vol}(V) = \int\limits_V dq_1\, dp_1\, dq_2\, dp_2$$

тогда и только тогда, когда оно бездивергентно. Поэтому для f_1 будет выполнена следующая теорема.

Теорема 3 (Пуанкаре). *Пусть M — гладкое многообразие с формой объёма* Vol. *Пусть векторное поле $f \in \vec{(M)}$ полно, а его поток e^{tf} сохраняет объём. Пусть $W \subset M$, $W \subset \overline{\operatorname{int} W}$, есть подмножество конечной меры, инвариантное относительно f:*

$$\operatorname{Vol}(W) < \infty, \quad W \circ e^{tf} \subset W, \quad \forall t > 0.$$

Тогда все точки множества W устойчивы по Пуассону для поля f.

В качестве W выбирается множество, ограниченное поверхностью постоянной энергии:

$$E = \frac{\omega_1^2 q_1^2}{2} + \frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2 q_2^2}{2} + \frac{p_2^2}{2}.$$

Устойчивость по Пуассону векторного поля f_1 и знание о том, что $\mathcal{F}$ — система полного ранга, позволяет воспользоваться следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{F} \subset \operatorname{Vec}(M)$ — система полного ранга. Если векторное поле $f \in \mathcal{F}$ устойчиво по Пуассону, то поле $-f$ совместимо с системой $\mathcal{F}$.*

По определению это означает, что

$$\mathcal{A}_q(\mathcal{F} \cup -f_1) \subset \overline{\mathcal{A}_q(\mathcal{F})}. \tag{15}$$

Из совместимости полей f_1, $-f_1$ с исходной системой следует, что и поля

$$\pm f_2 = (f_1 \pm f_2) - f_1$$

совместимы с этой системой. А значит, все векторные поля симметричной системы

$$\operatorname{span}(f_1, f_2) = \{af_1 + bf_2 | a, b \in C^\infty\}$$

совместимы с исходной системой, что дает совпадение замыкания множеств достижимости исходной и расширенной симметричной систем. Как и исходная, симметричная система имеет полный ранг, а значит, они обе являются вполне управляемыми.

4. Решение задачи оптимального скалярного управления двумя осцилляторами.

4.1. Принцип максимума. Для решения рассматриваемой задачи оптимального управления применим принцип максимума Понтрягина (ПМП) для задачи быстродействия, являющегося частным случаем задачи со свободным терминальным временем T (см. [6]). Введем укороченный гамильтониан

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f(x, u) \rangle, \quad \lambda \in T^*M, \quad x = \pi(\lambda). \tag{16}$$

Теорема 4 (принцип максимума Понтрягина)**.** *Если траектория $x(t)$ и соответствующее управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, оптимальны, то существует такая кривая $\lambda_t \in \operatorname{Lip}([0, T], T^*M)$, $\pi(\lambda_t) = x(t)$, что для почти всех $t \in [0, T]$ выполнены следующие условия*:

(i) $\dot\lambda_t = \vec{h}_{u(t)}(\lambda_t)$,
(ii) $h_{u(t)}(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u(\lambda_t)$,
(iii) $\lambda_t \neq 0$,
(iv) $h_{u(t)}(\lambda_t) \equiv \mathrm{const} \geqslant 0$.

Для решения задачи введем соответствующие линейные на слоях кокасательного расслоения гамильтонианы

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i(x) \rangle.$$

Получаем неканонические координаты, построенные по векторным полям управляемой системы и их коммутаторам, что облегчает запись принципа максимума. Следовательно, укороченный гамильтониан можно переписать в виде

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_1 + uf_2 \rangle = h_1(\lambda) + uh_2(\lambda).$$

Выпишем утверждения ПМП согласно теореме 4.

(i) Гамильтонова система принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot{h_1} &= \{h_u, h_1\} = \{h_1 + uh_2, h_1\} = 0 + u\{h_2, h_1\} = -u\{h_1, h_2\} = -uh_3,\\
\dot{h_2} &= \{h_u, h_2\} = \{h_1 + uh_2, h_2\} = \{h_1, h_2\} + 0 = h_3,\\
\dot{h_3} &= \{h_u, h_3\} = \{h_1 + uh_2, h_3\} = \{h_1, h_3\} + u\{h_2, h_3\} = h_4 + 0,\\
\dot{h_4} &= \{h_u, h_4\} = \{h_1 + uh_2, h_4\} = \{h_1, h_4\} + u\{h_2, h_4\} = h_5 + 0,\\
\dot{h_5} &= \{h_u, h_5\} = \{h_1 + uh_2, h_5\} = \{h_1, h_5\} + u\{h_2, h_5\} = (-w_1^2 w_2^2)h_2 + (-w_1^2 - w_2^2)h_4.
\end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что если $X, Y \in \operatorname{Vec}(M)$, то $\{h_X, h_Y\} = h_{[X,Y]}$. Вспомогательные коммутаторы:

$$[f_2, f_3] = 0, \quad [f_2, f_4] = 0, \quad [f_1, f_5] = (-\omega_1^2 \omega_2^2) f_2 + (-\omega_1^2 - \omega_2^2) f_4.$$

(ii) Условие максимума:

$$h_1 + uh_2 \to \max_{u \in U}. \tag{17}$$

Следовательно, оптимальное управление имеет вид

$$u^* = \varepsilon \operatorname{sign} h_2. \tag{18}$$

Итак, получаем вертикальную подсистему гамильтоновой системы ПМП:

$$\dot{h}_1 = -uh_3, \quad \dot{h}_2 = h_3, \quad \dot{h}_3 = h_4, \quad \dot{h}_4 = h_5, \quad \dot{h}_5 = -\omega_1^2\omega_2^2 h_2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)h_4. \tag{19}$$

4.2. Исследование вертикальной подсистемы. Можем отдельно рассмотреть последние 4 уравнения системы (19) в силу того, что они не содержат h_1. Далее, разрешив подсистему, сможем проинтегрировать первое уравнение по известным u и h_3. Пусть

$$h = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & b & 0 \end{pmatrix},$$

где $a = -\omega_1^2\omega_2^2$, $b = -\omega_1^2 - \omega_2^2$. Тогда получаем систему

$$\dot{h} = A_0 h.$$

решение которой имеет вид

$$\vec{h} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ -\omega_1^2 \cos(\omega_1 t) \\ \omega_1^3 \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \cos(\omega_1 t) \\ \omega_1^2 \sin(\omega_1 t) \\ \omega_1^3 \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) \\ -\omega_2 \sin(\omega_2 t) \\ -\omega_2^2 \cos(\omega_2 t) \\ \omega_2^3 \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -\sin(\omega_2 t) \\ -\omega_2 \cos(\omega_2 t) \\ \omega_2^2 \sin(\omega_2 t) \\ \omega_2^3 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Таким образом, функция переключения $h_2(t)$ задается выражением

$$h_2(t) = C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) + C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t) \tag{21}$$

и, следовательно, согласно (18) оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \varepsilon \operatorname{sign}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) + C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t)). \tag{22}$$

Далее найдем первые интегралы системы (19).

4.3. Первые интегралы вертикальной подсистемы.

Лемма 3. *Система* (19) *не имеет первых интегралов в виде линейной комбинации* h_2, h_3, h_4, h_5, *но обладает двумя первыми интегралами* V_1, V_2 *в виде квадратичных форм*:

$$V_1 = \frac{a}{2}h_3^2 - \frac{b}{2}h_4^2 + \frac{1}{2}h_5^2 - ah_4h_2, \tag{23}$$

$$V_2 = -\frac{a}{2}h_2^2 - \frac{1}{2}h_4^2 - \frac{b}{2}h_3^2 + h_5h_3. \tag{24}$$

Лемма 4. *На решениях вертикальной подсистемы* (20) *существует функциональная связь между постоянными коэффициентами* c_i*:*

$$2V_1 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^4(c_1^2 + c_2^2) - \omega_2^4(c_3^2 + c_4^2)), \tag{25}$$

$$2V_2 = -(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2(c_1^2 + c_2^2) - \omega_2^2(c_3^2 + c_4^2)). \tag{26}$$

Следствие 1. *Из двух первых интегралов* (23), (24) *можно составить две неотрицательно определенные квадратичные формы*

$$V_1^+ = \omega_2^2 \frac{(\omega_1^2 h_2 + h_4)^2}{2} + \frac{(h_3\omega_1^2 + h_5)^2}{2}, \tag{27}$$

$$V_2^+ = \omega_1^2 \frac{(\omega_2^2 h_2 + h_4)^2}{2} + \frac{(\omega_2^2 h_3 + h_5)^2}{2}. \tag{28}$$

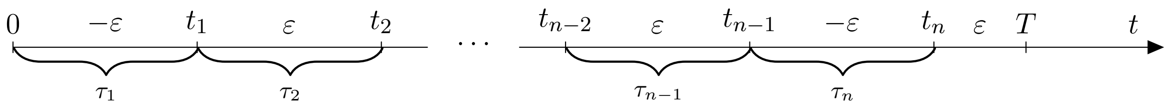

Рис. 1. Связь переменных τ и t для n переключений, начальное управление $-\varepsilon$

5. Исследование закона оптимального управления. Переключение управления будет происходить в моменты времени t_k, определяемые уравнением (22):

$$C_1\cos(\omega_1 t_k) + C_2\sin(\omega_1 t_k) + C_3\cos(\omega_2 t_k) + C_4\sin(\omega_2 t_k) = 0. \tag{29}$$

В [4] в классе трех переключений была получена параметрическая зависимость оптимального решения от ограничения, наложенного на управление. Стоит обратить внимание на то, что для значений $\varepsilon < \varepsilon_0 \approx 0{,}605$ оптимальное решение выпадает из класса трех переключений, и количество переключений становится равным четырем и более.

Обозначив через τ_k длительность интервала постоянства управления, запишем решение системы для двух осцилляторов с граничными условиями (3) и (4):

$$q_1(T) = \frac{1}{\omega_1}\int\limits_0^T \sin(\omega_1(T-t))u(t)dt = 0, \tag{30a}$$

$$p_1(T) = \int\limits_0^T \cos(\omega_1(T-t))u(t)dt = 1, \tag{30b}$$

$$q_2(T) = \frac{1}{\omega_2}\int\limits_0^T \sin(\omega_2(T-t))u(t)dt = 0, \tag{30c}$$

$$p_2(T) = \int\limits_0^T \cos(\omega_2(T-t))u(t)dt = 0. \tag{30d}$$

5.1. Уравнение в вариациях. Введем замену в обратном времени

$$\eta_1 = T - t_1, \quad \eta_2 = T - t_2, \quad \eta_3 = T - t_3. \tag{31}$$

Для того чтобы узнать зависимость критерия задачи $T(\varepsilon)$ в случае трех переключений, нужно исследовать систему, полученную из (10), при $m = 0, 1$,

$$\begin{cases} \cos(\omega_1 T) - 2\cos(\omega_1\eta_1) + 2\cos(\omega_1\eta_2) - 2\cos(\omega_1\eta_3) = -1, \\ \sin(\omega_1 T) - 2\sin(\omega_1\eta_1) + 2\sin(\omega_1\eta_2) - 2\sin(\omega_1\eta_3) = (-1)^m\frac{\omega_1}{\varepsilon}, \\ \cos(\omega_2 T) - 2\cos(\omega_2\eta_1) + 2\cos(\omega_2\eta_2) - 2\cos(\omega_2\eta_3) = -1, \\ \sin(\omega_2 T) - 2\sin(\omega_2\eta_1) + 2\sin(\omega_2\eta_2) - 2\sin(\omega_2\eta_3) = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Лемма 5. *Пусть для некоторого значения ε с учетом замены* (31) *существует оптимальное решение задачи быстродействия $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, T)$. Тогда для значения $\varepsilon + \delta\varepsilon$ при достаточно малом $\delta\varepsilon$ существует оптимальное решение задачи быстродействия $(\eta_1 + \delta\eta_1, \eta_2 + \delta\eta_2, \eta_3 + \delta\eta_3, T + \delta T)$, удовлетворяющее системе уравнений*

$$A_1 B_1 = D_1, \quad A_2 B_2 = D_2, \tag{33}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\sin\left(\omega_1\left(T+\frac{\delta T}{2}\right)\right) & 2\sin\left(\omega_1\left(\eta_1+\frac{\eta_1}{2}\right)\right) & -2\sin\left(\omega_1\left(\eta_2+\frac{\eta_2}{2}\right)\right) & 2\sin\left(\omega_1\left(\eta_3+\frac{\eta_3}{2}\right)\right) \\ \cos\left(\omega_1\left(T+\frac{\delta T}{2}\right)\right) & -2\cos\left(\omega_1\left(\eta_1+\frac{\eta_1}{2}\right)\right) & 2\cos\left(\omega_1\left(\eta_2+\frac{\eta_2}{2}\right)\right) & -2\cos\left(\omega_1\left(\eta_3+\frac{\eta_3}{2}\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\sin\left(\omega_2\left(T+\frac{\delta T}{2}\right)\right) & 2\sin\left(\omega_2\left(\eta_1+\frac{\eta_1}{2}\right)\right) & -2\sin\left(\omega_2\left(\eta_2+\frac{\eta_2}{2}\right)\right) & 2\sin\left(\omega_2\left(\eta_3+\frac{\eta_3}{2}\right)\right) \\ \cos\left(\omega_2\left(T+\frac{\delta T}{2}\right)\right) & -2\cos\left(\omega_2\left(\eta_1+\frac{\eta_1}{2}\right)\right) & 2\cos\left(\omega_2\left(\eta_2+\frac{\eta_2}{2}\right)\right) & -2\cos\left(\omega_2\left(\eta_3+\frac{\eta_3}{2}\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$B_1 = 2\begin{pmatrix} \sin\frac{\omega_1\delta T}{2} \\ \sin\frac{\omega_1\delta\eta_1}{2} \\ \sin\frac{\omega_1\delta\eta_2}{2} \\ \sin\frac{\omega_1\delta\eta_3}{2} \end{pmatrix}, \quad B_2 = 2\begin{pmatrix} \sin\frac{\omega_2\delta T}{2} \\ \sin\frac{\omega_2\delta\eta_1}{2} \\ \sin\frac{\omega_2\delta\eta_2}{2} \\ \sin\frac{\omega_2\delta\eta_3}{2} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{m+1}\dfrac{\omega_1\delta\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon+\delta\varepsilon)} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5. *Если для некоторого значения ε в некоторой окрестности оптимального решения задачи быстродействия $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, T)$ для блочной матрицы*

$$A_3 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

выполнено условие

$$\det A_3 \neq 0, \tag{34}$$

то функция $T(\varepsilon)$ в этой окрестности является непрерывной.

6. Моделирование. Проведем моделирование оптимального решения для случая трех переключений управления при значениях частот осцилляторов $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1{,}4$. Выберем ограничение на управление, равное $\varepsilon = 0{,}69$.

Численное решение системы (32) дает последовательность интервалов постоянства управления, из которых следуют времена переключений и полное время T:

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}07889841 \\ 0{,}41936284 \\ 1{,}77058325 \\ 0{,}63609919 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}07889841 \\ 2{,}49826125 \\ 4{,}2688445 \\ 4{,}90494369 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

В статье [4] описан способ нахождения констант C_i из уравнения для функции переключения (21). Теперь построим функцию $h_2(t)$ и соответствующее ей оптимальное управление (22), которые показаны на рис. 2.

Красным цветом на рис. 2 выделены точки, соответствующие полученным временам переключений (35). Видно, что они соответствуют нулям функции $h_2(t)$, т.е. для выбранного значения ε решение соответствует выбранному классу управления, состоящему из трех переключений. При приближении ε к ε_0 интервал $\tau_2 \to 0$, и необходимые условия теоремы 5 перестают выполняться, что показано на рис. 4, 5.

Промоделируем динамику системы (1) с полученным оптимальным управлением. На рис. 3 изображены фазовые портреты системы. Очевидно, система приходит в требуемые терминальные значения фазовых координат.

Для интервала значений $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1]$, в котором решение соответствует управлению с тремя переключениями, построим зависимости $\tau_i(\varepsilon)$, где $i = \overline{1,4}$.

Аналогичные вычисления можно провести для классов управления, состоящих из четырех, пяти и шести переключений. На рис. 5 показана зависимость оптимального решения T от ограничения на управление ε. Видно, что изменение класса переключений с шести на пять переключений

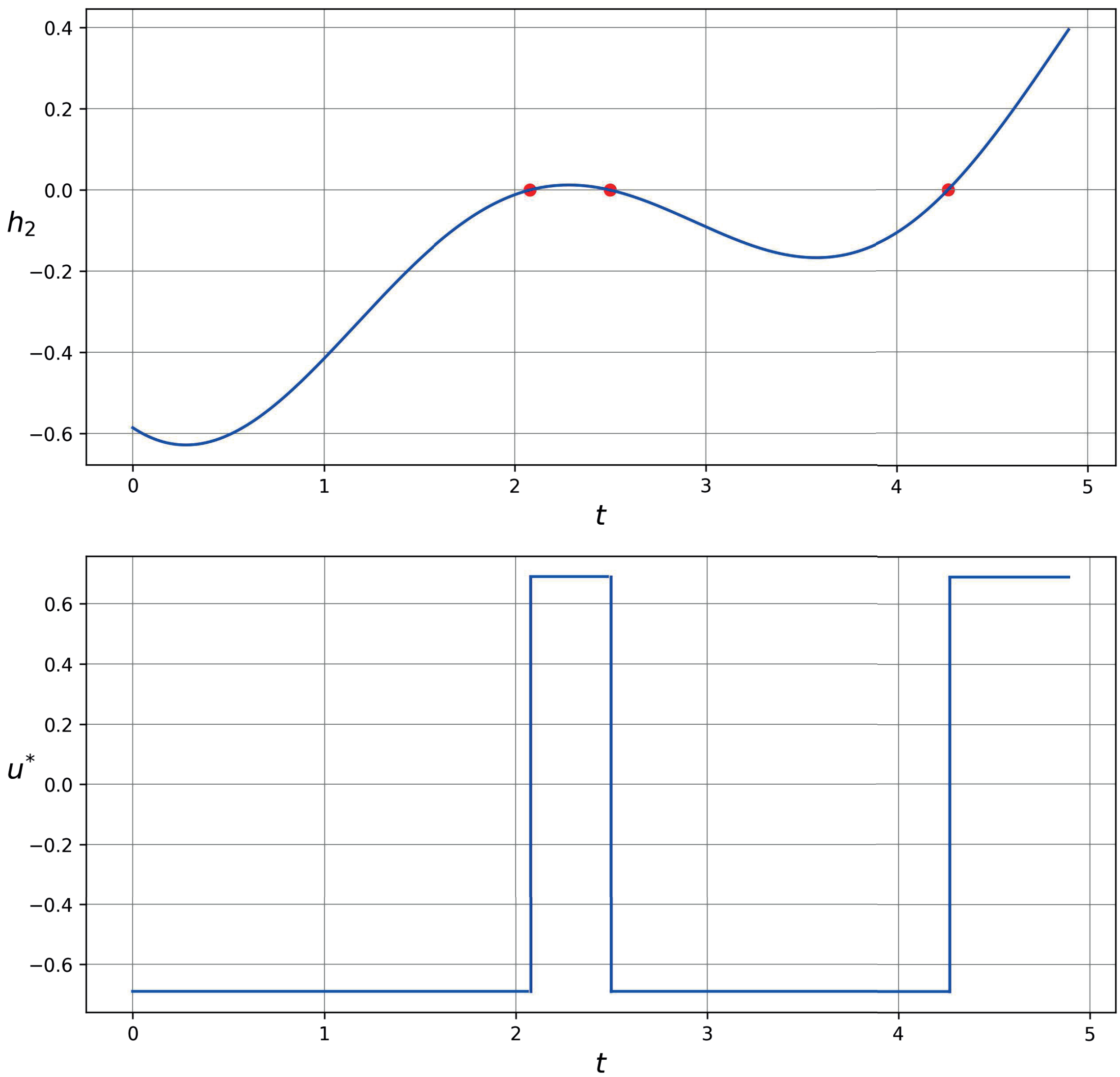

Рис. 2. Зависимость $h_2(t)$ и оптимальное управление u^* при $\varepsilon = 0{,}69$

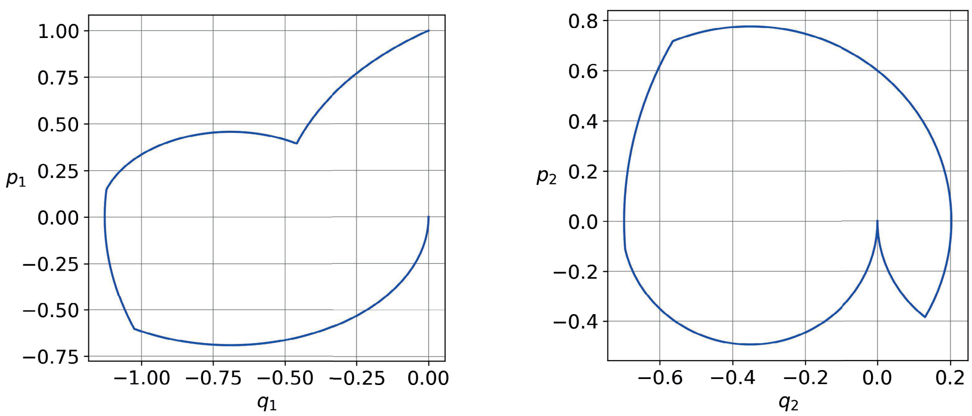

Рис. 3. Фазовые портреты первого и второго осцилляторов

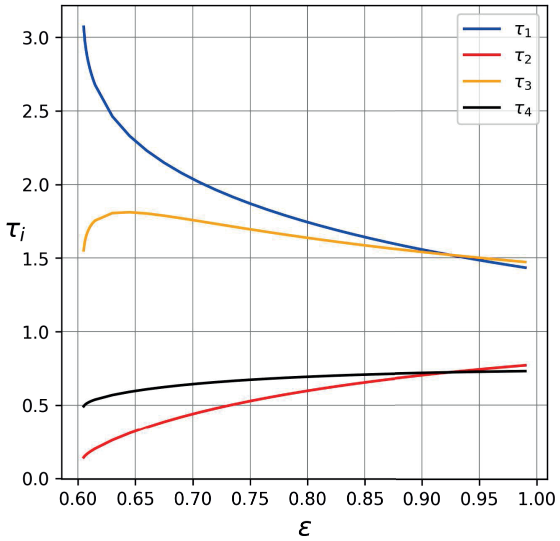

Рис. 4. Зависимость длительностей управления для трех переключений

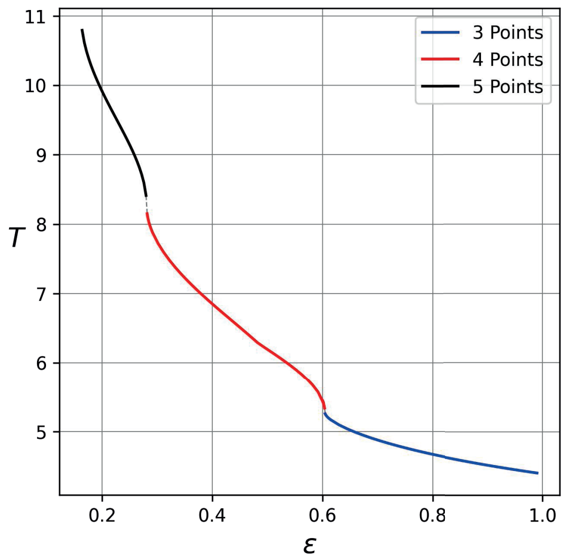

Рис. 5. Зависимость $T(\varepsilon)$

происходит при $\varepsilon_0 = 0{,}16$, с пяти на четыре — при $\varepsilon_0 = 0{,}281$, с четырех на три — при $\varepsilon_0 = 0{,}605$, как было сказано выше.

7. Заключение. В данной работе, посвященной поиску оптимального скалярного управления системой двух независимых несинхронных осцилляторов, были получены следующие результаты.

1. Задача исследована в терминах геометрической формулировки Принципа Максимума Понтрягина (ПМП).
2. Доказана глобальная управляемость системы с использованием теоремы Суссмана—Джарджевича.
3. Получена и исследована вертикальная подсистема гамильтоновой системы.
4. Для вертикальной гамильтоновой подсистемы найдены два первых интеграла в виде неотрицательных квадратичных форм.
5. Найдены необходимые условия для оптимальных длительностей интервалов управления как система алгебраических уравнений, полученных из уравнений Беллмана и условий максимума гамильтониана ПМП для разных классов управления: для трех, четырех и пяти переключений.
6. Проведено численное моделирование и найдены решения задачи быстродействия для различных значений ε, для случаев трех, четырех и пяти переключений управления; численно проиллюстрирована зависимость $T(\varepsilon)$.

Стоит отметить, что не всегда оптимальное решение находится в выбранном классе переключений, даже если для соседних значений ε оно этому классу удовлетворяет. Например, вместо четырех переключений оптимальным может оказаться управление, состоящее из двух переключений. Исследованию условий нахождения таких аномальных значений ε будет посвящена дальнейшая работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2005.
2. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.
3. *Галяев А. А.* Скалярное управление группой несинхронных осцилляторов// Автомат. телемех. — 2016. — *9*. — С. 3–18.
4. *Галяев А. А., Лысенко П. В.* О задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами// в кн.: Тр. 59 Всеросс. науч. конф. МФТИ. — Долгопрудный: МФТИ, 2016. — С. 1–13.

5. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961.
6. *Сачков Ю. Л.* Введение в геометрическую теорию управления. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
7. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980.
8. *Benzaid Z.* Global null controllability of perturbed linear systems with constrained controls// J. Math. Anal. Appl. — 1988. — *136.* — P. 201–216.
9. *Jakubczyk B.* Introduction to Geometric Nonlinear Control. Controllability of Lie Bracket. — Warsaw, 2001.
10. *Sussmann H. J., Jurdjevic V.* Controllability of nonlinear systems// J. Differ. Equations. — 1972. — *12.* — P. 95–116.

Берлин Леонид Михайлович
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: berlin.lm@phystech.edu

Галяев Андрей Алексеевич
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: galaev@ipu.ru

Лысенко Павел Владимирович
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: pashlys@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 52–57
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-52-57

УДК 512.6

УДВОЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ АЛГЕБР

© 2022 г. **В. М. БУРЛАКОВ, М. П. БУРЛАКОВ**

Аннотация. Построены алгебры, обобщающие кольцо комплексных кватернионов и алгебры гиперкомплексных чисел Клиффорда. Эти алгебры получаются из алгебр циклических чисел модифицированной процедурой удвоения. Доказаны их основные свойства, аналогичные свойствам квадратичных гиперкомплексных чисел.

Ключевые слова: линейные алгебры, кватернионы, гиперкомплексные числа, циклические алгебры, процедура удвоения, композиционные формы.

DOUBLING OF CYCLIC ALGEBRAS

© 2022 **V. M. BURLAKOV, M. P. BURLAKOV**

Abstract. In this paper, we construct algebras generalizing the ring of complex quaternions and algebras of hypercomplex Clifford numbers. These algebras are obtained from the algebras of cyclic numbers by a modified doubling procedure. Also, we prove basic properties of these algebras, which are similar to the properties of quadratic hypercomplex numbers.

Keywords and phrases: linear algebras, quaternions, hypercomplex numbers, cyclic algebras, doubling procedure, compositional forms.

AMS Subject Classification: 15A66, 15A69, 16S38

Одним из самых замечательных математических открытий XIX в., как нам об этом убедительно рассказал академик В. И. Арнольд, были кватернионы Гамильтона, которые нашли применение во многих областях математики и её приложений в теоретической физике (см. [1]). Над полем комплексных чисел алгебра кватернионов $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ получается процедурой удвоения Грейвса—Кэли, применённой к алгебре двойных комплексных чисел $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_2)$. Пусть $\boldsymbol{e}_1$ — образующий элемент алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_2)$, т.е. любое двойное комплексное число $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_2)$ записывается в виде $\boldsymbol{z} = z_0 + z_1\boldsymbol{e}_1$, где $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Добавим к двойным комплексным числам новый элемент $\boldsymbol{e}_2 \notin \mathbb{C}(\mathbb{Z}_2)$, такой, что $\boldsymbol{e}_2^2 = 1$, и составим линейные комбинации

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = (z_{00} + z_{01}\boldsymbol{e}_1) + (z_{10} + z_{11}\boldsymbol{e}_1) \cdot \boldsymbol{e}_2.$$

Множество таких линейных комбинаций образуют алгебру, если для любого $\boldsymbol{z} = z_0 + z_1\boldsymbol{e}_1$ положить $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{z} = \overline{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{e}_2$, где $\overline{\boldsymbol{z}} = z_0 - z_1\boldsymbol{e}_1$. Тогда

$$\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{a} \equiv (\boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{e}_2) \cdot (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{a}}_1) + (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{a}}_0) \cdot \boldsymbol{e}_2.$$

Полученная таким способом алгебра будет алгеброй комплексных кватернионов $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ (сам Гамильтон комплексные кватернионы называл бикватернионами, а физики эту алгебру стали называть алгеброй Паули).

В теории (комплексных) кватернионов ключевую родь играет определитель системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{z}_0 + \overline{\boldsymbol{a}}_1 \cdot \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{b}_0, \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{z}_0 + \overline{\boldsymbol{a}}_0 \cdot \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{b}_0, \end{cases}$$

ISSN 2782–4438

эквивалентной линейному алгебраическому уравнению $\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$; будем называть его *детерминантом* элемента $\boldsymbol{a}\in\mathbb{H}(\mathbb{C})$ и обозначать $\Delta(\boldsymbol{a})$.

Детерминант комплексных кватернионов обладает двумя основными свойствами: во-первых, $\Delta(\boldsymbol{a})\in\mathbb{C}$, хотя элементы этого определителя являются двойными комплексными числами; во-вторых, детерминант обладает мультипликативным свойством. Действительно, во-первых,

$$\Delta(\boldsymbol{a})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_0 & \overline{\boldsymbol{a}}_1\\ \boldsymbol{a}_1 & \overline{\boldsymbol{a}}_0\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}_0\cdot\overline{\boldsymbol{a}}_0-\boldsymbol{a}_1\cdot\overline{\boldsymbol{a}}_1=a_{00}^2-a_{01}^2-a_{10}^2+a_{11}^2\in\mathbb{C},$$

а во-вторых,

$$\Delta(\boldsymbol{a})\Delta(\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_0 & \overline{\boldsymbol{a}}_1\\ \boldsymbol{a}_1 & \overline{\boldsymbol{a}}_0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{b}_0 & \overline{\boldsymbol{b}}_1\\ \boldsymbol{b}_1 & \overline{\boldsymbol{b}}_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}_0+\overline{\boldsymbol{a}}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0\cdot\overline{\boldsymbol{b}}_1+\overline{\boldsymbol{a}}_1\cdot\overline{\boldsymbol{b}}_0\\ \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_0+\overline{\boldsymbol{a}}_0\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\overline{\boldsymbol{b}}_1+\overline{\boldsymbol{a}}_0\cdot\overline{\boldsymbol{b}}_0\end{vmatrix}=\Delta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

Таким образом, в алгебре (комплексных) кватернионов существует квадратичная форма, обладающая мультипликативным свойством. Именно наличием в алгебре (комплексных) кватернионов мультипликативной квадратичной формы обусловлены её разнообразные приложения, от евклидовой геометрии, где вращения в пространстве можно представить линейной кватернионной функцией, до квантовой теории поля при выводе уравнений Дирака для электронов и позитронов факторизацией волнового уравнения Клейна—Гордона.

Алгебры, у которых существует мультипликативная квадратичная форма, называются *композиционными* (см. [4]). Как показал Гурвиц, над любым полем существует всего четыре композиционные алгебры: само поле, а также алгебры двойных чисел, кватернионов и октав над этим полем. Если же не ограничиваться только квадратичными формами, то естественно поставить вопрос: существуют ли алгебры, у которых имеются мультипликативные формы степени выше 2?

Поиск алгебр с квадратичной мультипликативной формой, не являющейся квадратичной, приводит к такому обобщению процедуры удвоения, при котором алгебра двойных комплексных чисел $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_2)$ *заменяется циклической алгеброй произвольного порядка* $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$.

Чтобы применить процедуру удвоения к произвольной циклической алгебре, нужно прежде всего найти в $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ автоморфизм, заменяющий автоморфизм сопряжения двойных комплексных чисел. Таким автоморфизмом будет резольвентный оператор $\hat{\alpha}_m\colon\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)\to\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ [2], ставящий произвольному циклическому числу

$$\boldsymbol{z}=z_0+z_1\boldsymbol{e}_1+z_2\boldsymbol{e}_1^2+\ldots+z_{m-1}\boldsymbol{e}_1^{m-1}\in\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m),$$

где $\boldsymbol{e}_1$ — образующий элемент алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, циклическое число

$$\hat{\alpha}_m(\boldsymbol{z})=z_0+\alpha_m z_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_m^2 z_2\boldsymbol{e}_1^2+\ldots+\alpha_m^{m-1}z_{m-1}\boldsymbol{e}_1^{m-1}=\boldsymbol{z}(\alpha_m),$$

которое будем называть *резольвентой*, полагая

$$\alpha_m=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}.$$

Нетрудно видеть, что резольвентный оператор является автоморфизмом алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, т.е. для любых $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ справедливы тождества

$$\hat{\alpha}_m(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\hat{\alpha}_m(\boldsymbol{x})+\hat{\alpha}_m(\boldsymbol{y}),\quad \hat{\alpha}_m(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=\hat{\alpha}_m(\boldsymbol{x})\cdot\hat{\alpha}_m(\boldsymbol{y}),$$

и, кроме того, $\hat{\alpha}_m^m(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$, и, значит, резольвентный оператор обратим. Заметим ещё, что если $\hat{\alpha}_m(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}$, то $\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}\subset\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$.

В частном случае, когда $m=2$, резольвентный оператор совпадает с оператором сопряжения для двойных комплексных чисел. Поэтому естественно использовать резольвентный оператор для удвоения циклических чисел произвольного порядка.

Добавим к элементам алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ с образующим элементом $\boldsymbol{e}_1$ новый элемент $\boldsymbol{e}_2\notin\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, такой, что $\boldsymbol{e}_2^m=1$, и составим формальные линейные комбинации следующего вида:

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0+\boldsymbol{z}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{z}_2\cdot\boldsymbol{e}_2^2+\ldots\boldsymbol{z}_{m-1}\cdot\boldsymbol{e}_2^{m-1}=\sum_{k=0}^{m-1}(z_{k0}+z_{k1}\boldsymbol{e}_1+z_{k2}\boldsymbol{e}_1^2+\ldots+z_{km-1}\boldsymbol{e}_1^{m-1})\cdot\boldsymbol{e}_2^k.$$

Множество $\mathbf{B}_2^m$ таких линейных комбинаций образует алгебру, если для любого

$$\boldsymbol{z} = z_0 + z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_1^2 + \ldots + z_{m-1}\boldsymbol{e}_1^{m-1} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$$

задать следующие структурные тождества:

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\alpha_m) \cdot \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{z}(\alpha_m^{m-1}).$$

Тогда для любых $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a} \in \mathbf{B}_2^m$ имеем

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2^2 + \ldots \boldsymbol{z}_{m-1} \cdot \boldsymbol{e}_2^{m-1}) \cdot (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2^2 + \ldots \boldsymbol{a}_{m-1} \cdot \boldsymbol{e}_2^{m-1}) = \\
= (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{a}_{m-1}(\alpha_m) + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{a}_{m-2}(\alpha_m^2) + \ldots + \boldsymbol{z}_{m-1} \cdot \boldsymbol{a}_1(\alpha_m^{m-1})) + \\
+ (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{a}_0(\alpha_m) + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{a}_{m-1}(\alpha_m^2) + \ldots + \boldsymbol{z}_{m-1} \cdot \boldsymbol{a}_2(\alpha_m^{m-1})) \cdot \boldsymbol{e}_2 + \\
+ (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1(\alpha_m) + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{a}_0(\alpha_m^2) + \ldots + \boldsymbol{z}_{m-1} \cdot \boldsymbol{a}_3(\alpha_m^{m-1})) \cdot \boldsymbol{e}_2^2 + \ldots + \\
+ (\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{a}_{m-1} + \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{a}_{m-2}(\alpha_m) + \boldsymbol{z}_2 \cdot \boldsymbol{a}_{m-3}(\alpha_m^2) + \ldots + \boldsymbol{z}_{m-1} \cdot \boldsymbol{a}_0(\alpha_m^{m-1})) \cdot \boldsymbol{e}_2^{m-1}.
\end{gathered}$$

Определённая так алгебра называется *алгеброй бионов m-го порядка.*

Введём теперь в рассмотрение *детерминант элемента* $\boldsymbol{a} \in \mathbf{B}_2^m$:

$$\Delta(\boldsymbol{a}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 & \boldsymbol{a}_{m-1}(\alpha_m) & \boldsymbol{a}_{m-2}(\alpha_m^2) & \ldots & \boldsymbol{a}_1(\alpha_m^{m-1}) \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_0(\alpha_m) & \boldsymbol{a}_{m-1}(\alpha_m^2) & \ldots & \boldsymbol{a}_2(\alpha_m^{m-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m-1} & \boldsymbol{a}_{m-2}(\alpha_m) & \boldsymbol{a}_{m-3}(\alpha_m^2) & \ldots & \boldsymbol{a}_0(\alpha_m^{m-1}). \end{vmatrix}$$

Покажем, что для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{B}_2^m$, во-первых, $\Delta(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{C}$, хотя элементы этого определителя являются циклическими комплексными числами; во-вторых, детерминант обладает мультипликативным свойством.

Для доказательства первого утверждения заметим, что $\hat{\alpha}_m(\Delta(\boldsymbol{a})) = \Delta(\boldsymbol{a})$. Это тождество доказывается перестановкой строк и столбцов у $\hat{\alpha}_m(\Delta(\boldsymbol{a}))$. Например,

$$\hat{\alpha}_m(\Delta(\boldsymbol{a})) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) & \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) & \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) & \boldsymbol{a}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_0 & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = \Delta(\boldsymbol{a});$$

это и означает, что $\Delta(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{C}$. Доказательство второго утверждения получается непосредственным перемножением определителей. Например,

$$\Delta(\boldsymbol{a})\Delta(\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_0 & \boldsymbol{b}_2(\alpha_3) & \boldsymbol{b}_1(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_0(\alpha_3) & \boldsymbol{b}_2(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{b}_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_2(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3^2) \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3) + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3) & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_1(\alpha_3) \cdot \boldsymbol{b}_2(\alpha_3^2) + \boldsymbol{a}_0(\alpha_3^2) \cdot \boldsymbol{b}_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = \Delta(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}).$$

Таким образом, в алгебрах $\mathbf{B}_2^m$ существует форма степени m, обладающая мультипликативным свойством. Наличие в алгебрах бионов мультипликативной формы открывает возможности разнообразных приложений этих алгебр, подобных тем, которые присущи алгебре комплексных кватернионов. Например, мы получаем серию геометрических структур, в начале которой находится комплексное пространство с евклидовой структурой, реализованное на алгебре комплексных кватернионов $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. К другим приложениям относится описание симметрий в калибровочных полях, факторизация дифференциальных уравнений в частных производных любого порядка, отыскание топологических инвариантов и т. д.

Если к алгебре комплексных кватернионов применить ещё раз процедуру удвоения, то получится алгебра комплексных октав. Аналогично процедуру удвоения можно применить и к алгебрам бионов, в результате чего мы получим серию неассоциативных алгебр, первой из которых будет алгебра октав, получаемая удвоением алгебры $\mathbf{B}_2^2 = \mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Алгебра октав обобщает алгебру кватернионов в том смысле, что алгебра октав содержит алгебру кватернионов как свою подалгебру. Другое обобщение алгебры кватернионов доставляют гиперкомплексные числа Клиффорда, или альтернионы. Альтернионы получаются, если к образующим векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ добавлять новые базисные элементы, подчинённые тем же коммутационным тождествам, что и $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

Другими словами, алгебра альтернионов $\mathbf{A}_n(\mathbb{C})$ строится над линейным (комплексным) пространством $\mathbf{E}_n$, которое называется *подстилающим пространством* алгебры $\mathbf{A}_n(\mathbb{C})$. При этом в $\mathbf{E}_n$ существует базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, векторы которого удовлетворяют структурным уравнениям

$$\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_h = -\boldsymbol{e}_h \cdot \boldsymbol{e}_k, \quad \boldsymbol{e}_k^2 = \boldsymbol{e}_0 = 1,$$

так что базис линейного пространства алгебры $\mathbf{A}_n(\mathbb{C})$ образуют мономы $\boldsymbol{e}_{k_1} \cdot \boldsymbol{e}_{k_2} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{e}_{k_r}$, где $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leqslant n$. Таким образом, $\dim \mathbf{A}_n(\mathbb{C}) = 2^{\dim \mathbf{E}_n}$. В силу структурных уравнений для векторов $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \in \mathbf{E}_n \subset \mathbf{A}_n(\mathbb{C})$ справедливо следующее *фундаментальное тождество*:

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2.$$

Можно также показать, что алгебры альтернионов получаются тензорным произведением алгебр комплексных кватернионов и двойных комплексных чисел (см. [5]), а именно, имеет место изоморфизм

$$\mathbf{A}_n(\mathbb{C}) = \begin{cases} \underbrace{\mathbb{H}(\mathbb{C}) \otimes \ldots \otimes \mathbb{H}(\mathbb{C})}_{k} \otimes \mathbb{C}(\mathbb{Z}_2), & \text{если } n = 2k+1 \\ \underbrace{\mathbb{H}(\mathbb{C}) \otimes \ldots \otimes \mathbb{H}(\mathbb{C})}_{k}, & \text{если } n = 2k \end{cases}.$$

Алгебры бионов получают аналогичное обобщение, если для векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ некоторого базиса комплексного линейного пространства $\mathbf{E}_n$ задать следующие *структурные тождества*: $\boldsymbol{e}_1^m = \boldsymbol{e}_2^m = \ldots = \boldsymbol{e}_n = 1$ и

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_h = \alpha_m \boldsymbol{e}_h \cdot \boldsymbol{e}_k, & \text{если } k > h, \\ \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_h = \alpha_m^{m-1} \boldsymbol{e}_h \cdot \boldsymbol{e}_k, & \text{если } k < h, \end{cases}$$

Полученные таким образом алгебры называются *элементальными алгебрами* и обозначаются $\mathbf{B}_n^m$ (см. [2]). При этом $\mathbf{B}_n^2 = \mathbf{A}_n(\mathbb{C})$, поскольку $\alpha_2 = \alpha_2^{2-1} = -1$.

Алгебры $\mathbf{B}_n^m$ во многом аналогичны алгебрам альтернионов, как по своим свойствам, так и по приложениям.

Прежде всего, заметим, что базис линейного пространства алгебры $\mathbf{B}_n^m$ образуют мономы $\boldsymbol{e}_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \boldsymbol{e}_1^{k_1} \cdot \boldsymbol{e}_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{e}_n^{k_n}$, где $0 \leqslant k_r < m$, и, следовательно, $\dim \mathbf{B}_n^m = m^{\dim \mathbf{E}_n}$. В случае альтернионов показатели степени в базисных мономах могут быть равными либо нулю, либо единице, и потому базис в $\mathbf{A}_n$ образуют мономы $\boldsymbol{e}_{k_1 k_2 \ldots k_r} = \boldsymbol{e}_{k_1} \cdot \boldsymbol{e}_{k_2} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{e}_{k_r}$, где $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

Как и в случае алгебры альтернионов над трёхмерным подстилающим пространством, алгебры $\mathbf{B}_3^m$ имеют нетривиальный центр, порождаемый элементом $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2^{m-1} \cdot \boldsymbol{e}_3$. Это приводит к тому, что алгебры $\mathbf{B}_n^m$ представляют собой тензорные произведения алгебр $\mathbf{B}_2^m$ и $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, так что

$$\mathbf{B}_n^m = \begin{cases} \underbrace{\mathbf{B}_2^m \otimes \ldots \otimes \mathbb{H}_2^m}_{k} \otimes \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m), & \text{если } n = 2k+1, \\ \underbrace{\mathbf{B}_2^m \otimes \ldots \otimes \mathbf{B}_2^m}_{k}, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Покажем теперь, что в силу структурных уравнений алгебры $\mathbf{B}_n^m$ для произвольных векторов $\boldsymbol{z} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \in \mathbf{E}_n \subset \mathbf{B}_n^m$ справедливо следующее *фундаментальное тождество*:

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n)^m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m.$$

Возьмём сначала алгебру $\mathbf{B}_2^m$. Для любых векторов подстилающего пространства этой алгебры $\boldsymbol{x} = x_2\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{y} = y_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2$ справедливо перестановочное тождество

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2) = (y_1\boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}_m y_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2),$$

что проверяется перемножением. Нетрудно показать, что

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m = (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^m.$$

Действительно, имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned}(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^{m-2} \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = \\ &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^{m-2} \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}_m x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2) = \\ &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^{m-3} \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}_m x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2) = \\ &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^{m-3} \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}_m^2 x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^2 = \ldots = \\ &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}_m^{m-1} x_2\boldsymbol{e}_2) \cdot (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^{m-1} = (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^m,\end{aligned}$$

так как $\overline{\alpha}_m^{m-1} = \alpha_m$.

Теперь раскроем скобки в выражениях $(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m$ и $(x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^m$:

$$\begin{aligned}(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m = x_1^m + P_m^1(\alpha_m)x_1^{m-1}x_2\boldsymbol{e}_1^{m-1}\boldsymbol{e}_2 + P_m^2(\alpha_m)x_1^{m-2}x_2^2\boldsymbol{e}_1^{m-2}\boldsymbol{e}_2^2 + \ldots + \\ + P_m^h(\alpha_m)x_1^{m-h}x_2^h\boldsymbol{e}_1^{m-h}\boldsymbol{e}_2^h + \ldots + x_2^m,\end{aligned}$$

где $P_m^h(\alpha_m)$ — некоторые многочлены от α_m; они получаются в результате приведения подобных с учётом структурных тождеств. Кроме того,

$$\begin{aligned}(x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^m = x_1^m + \alpha_m P_m^1(\alpha_m)x_1^{m-1}x_2\boldsymbol{e}_1^{m-1}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_m^2 P_m^2(\alpha_m)x_1^{m-2}x_2^2\boldsymbol{e}_1^{m-2}\boldsymbol{e}_2^2 + \ldots + \\ + \alpha_m^h P_m^h(\alpha_m)x_1^{m-h}x_2^h\boldsymbol{e}_1^{m-h}\boldsymbol{e}_2^h + \ldots + x_2^m.\end{aligned}$$

Но

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m = (x_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_m x_2\boldsymbol{e}_2)^m,$$

и мы получаем следующие тождества:

$$P_m^h(\alpha_m) = \alpha_m^h P_m^h(\alpha_m) \quad \Longleftrightarrow \quad (1 - \alpha_m^h)P_m^h(\alpha_m) = 0,$$

так как $\alpha_m^h \neq 1$. Таким образом,

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)^m = x_1^m + x_2^n.$$

Допустим теперь, что это тождество выполняется для $n = k$, и покажем, что оно справедливо и для $n = k + 1$. Введём обозначение $\boldsymbol{e} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_k\boldsymbol{e}_k$ и заметим, что

$$\boldsymbol{e}_{k+1} \cdot \boldsymbol{e} = \alpha_m \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}_{k+1}, \quad \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}_{k+1} = \alpha_m^{m-1}\boldsymbol{e}_{k+1} \cdot \boldsymbol{e}.$$

Поэтому

$$(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_k\boldsymbol{e}^k + x_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1})^m = (\boldsymbol{e} + x_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1})^m = \boldsymbol{e}^m + x_{k+1}^m = = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m + x_{k+1}^m,$$

и фундаментальное тождество доказано по индукции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. — М.: МЦНМО, 2014.
2. *Бурлаков М. П.* Гамильтоновы алгебры. — М.: Граф Пресс, 2006.
3. *Бурлаков М. П., Бурлаков И. М., Гусева Н. И.* Очерки об алгебрах циклических чисел. — М.: Ким, 2020.
4. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
5. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. — М.: ГИТТЛ, 1955.

Бурлаков Валерий Михайлович
Пензенский государственный университет
E-mail: don.burlakoff@mail.ru

Бурлаков Михаил Петрович
Московский педагогический государственный университет
E-mail: burlakovmihail@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 58–67
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-58-67

УДК 519.175.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОМЕЧЕННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ГРАФОВ

© 2022 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. Асимптотически перечислены помеченные геодезические k-циклические кактусы. Получена асимптотика для числа помеченных связных геодезических унициклических, бициклических и трициклических n-вершинных графов. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что случайный помеченный связный унициклический, бициклический и трициклический граф является геодезическим графом, асимптотически равна 1/2, 3/20 и 1/30, соответственно. Найдена также вероятность того, что случайный помеченный связный k-циклический граф является геодезическим кактусом. Кроме того, доказано, что почти все помеченные связные геодезические трициклические графы являются кактусами.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, геодезический граф, кактус, k-циклический граф, асимптотика, случайный граф.

ASYMPTOTICAL ENUMERATION OF SOME LABELED GEODETIC GRAPHS

© 2022 **V. A. VOBLYI**

Abstract. We asymptotically enumerate labeled geodetic k-cyclic cacti and obtain asymptotics for the numbers of labeled connected geodetic unicyclic, bicyclic, and tricyclic n-vertex graphs. We prove that under the uniform probability distribution, the probabilities that a random labeled connected unicyclic, bicyclic, or tricyclic graph is a geodetic graph are asymptotically equal to 1/2, 3/20, and 1/30, respectively. In addition, we prove that almost all labeled connected geodetic tricyclic graphs are cacti.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, geodetic graph, cactus, k-cyclic graph, asymptotics, random graph.

AMS Subject Classification: 05C30

1. Введение.

Определение 1 (см. [12, с. 55]). *Цикломатическим числом* (*циклическим рангом*) связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин.

Определение 2. *k-Циклический граф* — это граф с цикломатическим числом, равным k.

Определение 3 (см. [17]). *Геодезическим* графом называется связный граф, у которого любая пара вершин связана единственной кратчайшей цепью (геодезической).

Определение 4. Для связного графа *точкой сочленения* называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным.

Определение 5 (см. [12, с. 41]). *Блок* — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения.

Определение 6 (см. [13, с. 93]). *Кактусом* называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле. Все блоки кактуса — ребра или простые циклы.

Определение 7 (см. [15]). Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу.

Геодезические графы используются при проектировании топологической структуры компьютерных сетей (см. [14]). В [1] перечислены помеченные связные геодезические планарные графы, а в [2] — помеченные связные геодезические графы с малым цикломатическим числом. В [8] найдено число помеченных геодезических k-циклических кактусов.

В статье асимптотически перечислены помеченные геодезические k-циклическиt кактусы. Найдена асимптотика для числа помеченных геодезических унициклических, бициклических и трициклических графов. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятности того, что случайный помеченный связный унициклический, бициклический и трициклический граф является геодезическим графом, асимптотически равны 1/2, 3/20 и 1/20, соответственно. Найдена также вероятность того, что случайный помеченный связный k-циклический граф является геодезическим кактусом. Кроме того, доказано, что почти все помеченные связные геодезические трициклические графы являются кактусами.

2. Асимптотическое перечисление графов.

Лемма 1 (см. [3]). *Введем обозначения*

$$p_q(z) = \sum_{i=0}^{q} c_i z^i, \quad A_n(m,q) = [z^{-1}]\frac{p_q(z)e^{nz}z^{-n}}{(1-z)^m},$$

где $[z^{-1}]$ *— оператор формального вычета* (см. [9, с. 25]. *При фиксированных* m, q *и* $n \to \infty$ *имеет место асимптотика*

$$A_n(m,q) \sim \frac{\sqrt{\pi}p_q(1)n^{n+m/2}}{n!2^{m/2}\Gamma((m+1)/2)}. \tag{1}$$

Лемма 2. *Введем обозначения*

$$p_q(z) = \sum_{i=0}^{q} c_i z^i, \quad B_n(m,q) = [z^{-1}]\frac{p_q(z)e^{nz}z^{-n}}{(1+z)^m}.$$

При фиксированных m, q *и* $n \to \infty$ *верна асимптотика*

$$B_n(m,q) \sim \frac{p_q(1)n^n}{n!2^m}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $U(a,b,z)$, $M(a,b,z)$ — вырожденные гипергеометрическаие функциии Трикоми. В [4] найдено разложение

$$\frac{e^{nz}}{(1-z)^m} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{p+m}}{p!}U(m,m+p+1,n)z^p.$$

Следовательно, получим

$$B_n(m,q) = [z^{-1}]\sum_{i=0}^{q}\frac{c_i z^i e^{nz}z^{-n}}{(1+z)^m} = \sum_{i=0}^{q}c_i[z^{-1}]\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-n)^{p+m}}{p!}U(m,m+p+1,-n)(-z)^p z^{i-n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{q}c_i(-1)^m\frac{n^{n+m-i-1}}{(n-i-1)!}U(m,n+m-i,-n).$$

В силу формулы связи (см. [16, с. 325]) имеем

$$\frac{1}{\Gamma(b)}M(a,b,z)=\frac{e^{\mp a\pi i}}{\Gamma(b-a)}U(a,b,z)+\frac{e^{\pm(b-a)\pi i}}{\Gamma(a)}e^{z}U(b-a,b,e^{\pm\pi i}z).$$

При $b-a=m$, $b=n+m-i$, $a=b-m=n-i$, $z=n$ найдем

$$U(m,n+m-i,-n)=\frac{(-1)^m\Gamma(n-i)}{\Gamma(n+m-i)}e^{-n}M(n-i,n+m-i,n)-\\ -\frac{(-1)^{n-i+m}\Gamma(n-i)}{\Gamma(m)}e^{-n}U(n-i,n+m-i,n). \quad (3)$$

Используем асимптотику для функций Куммера $M(a,b,z)$ и $U(a,b,z)$ (см. [13]). Пусть $\alpha=a/z$, $\beta=b/z$, $\mu=(b-a)/z$,

$$t_0=\frac{1}{2}(\beta+1-\sqrt{(\beta+1)^2-4\mu},\quad \tau=\frac{t_0}{\mu},$$
$$A=\mu(\tau-\ln\tau-1)-\alpha\ln(1-\mu\tau),\quad f_0=\sqrt{\frac{\mu}{\beta t_0^2-2\mu t_0+\mu}},\quad p_0=(1-t_0)f_0.$$

Тогда при $z\to\infty$ имеем асимптотику

$$M(a,b,z)\sim e^{z}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}z^{a-b}e^{-zA}f_0,\quad U(a,b+1,z)\sim z^{-a}e^{zA}p_0.$$

Для $M(n-i,n+m-i,n)$ при фиксированных m, i и $n\to\infty$ получим

$$\alpha=1-\frac{i}{n}\sim 1,\quad \beta=1+\frac{m-i}{n},\quad \mu=\frac{m}{n}\sim 1,\quad t_0\sim\frac{\mu}{\beta+1}\sim\frac{m}{2n},\quad \tau\sim\frac{1}{2},$$
$$f_0\sim\sqrt{\frac{\frac{m}{n}}{\frac{m^2}{4n^2}-\frac{m^2}{n^2}+\frac{m}{n}}}\sim\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3m}{4n}}}\sim 1+\frac{3m}{8n}\sim 1,$$
$$A\sim\frac{m}{n}\left(-\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{i}{n}\right)\ln\left(1-\frac{m}{2n}\right)\sim-\frac{m}{2n}+\frac{m}{n}\ln 2+\frac{m}{2n}=\frac{m}{n}\ln 2.$$

Так как при фиксированных c, d и $z\to\infty$ имеем

$$\frac{\Gamma(z+c)}{\Gamma(z+d)}\sim z^{c-d},$$

то

$$M(a,b,z)=M(n-i,n+m-i,n)\sim e^{n}\frac{\Gamma(n+m-i)}{\Gamma(n-i)}n^{-m}\frac{1}{2^m}\sim\frac{e^n}{2^m}.$$

Для $U(n-i,n+m-i,n)$ при фиксированных m, i и $n\to\infty$ найдем

$$\alpha=1-\frac{i}{n}\sim 1,\quad \beta=1+\frac{m-i-1}{n}\sim 1,\quad \mu=\frac{m-1}{n},\quad t_0\sim\frac{\mu}{\beta+1}\sim\frac{m-1}{2n},\quad \tau\sim\frac{1}{2},$$
$$p_0\sim\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\sqrt{\frac{\frac{m-1}{n}}{\frac{(m-1)^2}{4n^2}-\frac{(m-1)^2}{n^2}+\frac{m-1}{n}}}\sim\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3(m-1)}{4n}}}\sim 1+\frac{3(m-1)}{8n}\sim 1,$$
$$A\sim\frac{(m-1)}{n}\left(-\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{i}{n}\right)\ln\left(1-\frac{(m-1)}{2n}\right)\sim\frac{m-1}{n}\ln 2,$$
$$U(a,b+1,z)=U(n-i,n+m-i,n)\sim z^{-a}e^{zA}p_0\sim n^{i-n}2^{m-1}.$$

Подставляя асимптотику для $M(n-i,n+m-i,n)$, $U(n-i,n+m-i,n)$ в (3), применяя формулу Стирлинга для факториала и учитывая, что $(n+k)!/n!\sim n^k$ при фиксированном k и $n\to\infty$, получим

$$U(m,n+m-i,-n)\sim\frac{(-1)^m}{n^m}e^{-n}\frac{e^n}{2^m}-\frac{(-1)^{n-i+m}\Gamma(n-i)}{\Gamma(m)n!}n!e^{-n}2^{m-1}n^{i-n}\sim$$
$$\sim\frac{(-1)^m}{n^m2^m}-\frac{(-1)^{n-i+m}}{(m-1)!}n^{-i}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{-n}2^{m-1}n^{i-n}\sim$$
$$\sim\frac{(-1)^m}{n^m2^m}-\frac{(-1)^{n-i+m}}{(m-1)!}\sqrt{2\pi n}e^{-2n}2^{m-1}\sim\frac{(-1)^m}{n^m2^m}.$$

Следовательно, имеем

$$B_n(m,q)\sim\sum_{i=0}^{q}c_i(-1)^m\frac{n^{n+m-i-1}n!}{(n-i-1)!}\frac{(-1)^m}{n!n^m2^m}\sim\frac{p_q(1)n^n}{n!2^m}.$$ □

Теорема 1. *Для числа $GC(n,k)$ помеченных геодезических k-циклических кактусов с n вершинами при $n\to\infty$ верна асимптотическая формула*

$$GC(n,k)\sim\frac{\sqrt{\pi}n^{n+(3k-4)/2}}{2^{5k/2}k!\Gamma((k+1)/2)}. \tag{4}$$

Доказательство. В [8] получено выражение

$$GC(n,k)=\frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]e^{nz}\left(\frac{nz^2}{2(1-z^2)}\right)^k z^{-n}=\frac{n!n^{k-2}}{k!2^k}[z^{-1}]e^z\frac{z^{2k}}{(1-z^2)^k}z^{-n}.$$

Разложим последнюю дробь на элементарные дроби (см. [10, с. 41]):

$$\frac{1}{(1-z^2)^k}=\frac{A_1}{(1-z)}+\frac{A_2}{(1-z)^2}+\dots+\frac{A_k}{(1-z)^k}+\frac{B_1}{(1+z)}+\frac{B_2}{(1+z)^2}+\dots+\frac{B_k}{(1+z)^k}. \tag{5}$$

После умножения обеих частей равенства (5) на $(1-z^2)^k$, сокращения множителей в дробях и подстановки $z=1$ получим $A_k=1/2^k$. С помощью формул (1) и (2) найдем асимптотику при фиксированном k и $n\to\infty$:

$$GC(n,k)\sim\frac{n!n^{k-2}}{k!2^k}\left[\frac{A_1\sqrt{\pi}n^{n+1/2}}{n!2^{1/2}\Gamma(1)}+\dots+\frac{A_k\sqrt{\pi}n^{n+k/2}}{n!2^{k/2}\Gamma((k+1)/2)}+\frac{B_1n^n}{n!2}+\dots+\frac{B_kn^n}{n!2^k}\right]\sim$$
$$\sim\frac{n^{k-2}}{k!2^k}\frac{A_k\sqrt{\pi}n^{n+k/2}}{2^{k/2}\Gamma((k+1)/2)}=\frac{\sqrt{\pi}n^{n+(3k-4)/2}}{2^{5k/2}k!\Gamma((k+1)/2)}.$$ □

Следствие 1. *Для числа $G(n,1)$ помеченных связных геодезических унициклических графов с n вершинами при $n\to\infty$ верна асимптотическая формула*

$$G(n,1)\sim\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n-1/2}. \tag{6}$$

Доказательство. Так как все унициклические графы являются унициклическими кактусами, то формула (6) получается как следствие формулы (4) при $k=1$. □

Следствие 2. *Для числа $G(n,2)$ помеченных связных геодезических бициклических графов с n вершинами при $n\to\infty$ верна асимптотическая формула*

$$G(n,2)\sim\frac{1}{32}n^{n+1}. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку не существуют геодезические бициклические блоки (см. [2]), то все геодезические бициклические графы являются бициклическими кактусами. Поэтому требуемое утверждение получается как следствие формулы (4) при $k=2$. □

Лемма 3. *Пусть $U(a,b,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми. Тогда при фиксированных целых числах a, l и $b\to\infty$ имеем асимптотику*

$$U(a,b+l,b)\sim\frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma(\frac{a+1}{2})}. \tag{8}$$

Лемма 3 доказана в [5] при $l\leqslant 0$ и в [7] при $l\geqslant 0$.

Теорема 2. *Для числа $G(n,3)$ помеченных связных геодезических трициклических графов с n вершинами при $n\to\infty$ верна асимптотическая формула*

$$G(n,3)\sim\frac{1}{768}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2}\,. \tag{9}$$

Доказательство. Для числа $S(n,k)$ помеченных связных k-циклических графов с n вершинами в [5] получена формула

$$S(n,k)=\frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]e^{nz}Y_k\Big(n1!B_1'(z),\ n2!B_2'(z),\ \ldots,\ nk!B_k'(z)\Big)z^{-n}, \tag{10}$$

где $B_k(z)$ — экспоненциальная производящая функция для числа помеченных k-циклических блоков, а $Y_k(x_1,\ldots,x_k)$ — многочлены разбиений (многочлены Белла). Для этих многочленов известно выражение (см. [11, с. 173])

$$Y_k(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{\pi(k)}\frac{k!}{m_1!\ldots m_k!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1}\ldots\left(\frac{x_k}{k!}\right)^{m_k},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(k)$ числа k, т.е. по всем неотрицательным решениям $(m_1,m_2,\ldots,m_k)$ уравнения $m_1+2m_2+\cdots+km_k=k$, $m_i\geqslant 0$, $i=1,\ldots,k$.

Формула (10) верна не только для всего класса связных графов, но и для блочно-устойчивого его подкласса (см. [6]). В частности, формула (10) верна для класса геодезических графов (см. [6]).

В [2] из (10) получены выражения

$$G(n,3)=\frac{(n-1)!}{6}[z^{-1}]e^{nz}\left(\frac{n^2z^6}{8(1-z^2)^3}+\frac{z^3+2z^6}{(1-z^3)^5}\right)z^{-n}, \tag{11}$$

$$G(n,3)=\frac{n!}{24}\left(\sum_{i=0}^{[(n-7)/2]}\frac{(i+2)(i+1)n^{n-2i-6}}{4(n-2i-7)!}+\sum_{i=0}^{[(n-4)/3]}\frac{(3i+4)n^{n-3i-5}}{(n-3i-4)!}\binom{i+3}{3}\right).$$

Введем обозначения

$$S_1(n)=\frac{(n-1)!}{6}[z^{-1}]e^{nz}\frac{n^2z^6}{8(1-z^2)^3},\quad S_2(n)=\frac{n!}{24}\sum_{i=0}^{[(n-4)/3]}\frac{(3i+4)n^{n-3i-5}}{(n-3i-4)!}\binom{i+3}{3}.$$

В выражении (11) первое слагаемое соответствует унициклическим блокам, а второе — трициклическим блокам. Поэтому $S_1(n)$ равно числу трициклических кактусов, и по теореме 1

$$S_1(n)\sim\frac{1}{768}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2}\quad\text{при } n\to\infty. \tag{12}$$

При положительных слагаемых a_i имеем

$$\sum_{i=0}^{[(n-4)/3]}a_{3i}=a_0+a_3+\cdots\leqslant a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots\leqslant\sum_{i=0}^{n-4}a_i.$$

Так как все слагаемые в сумме для $S_2(n)$ положительны, получим

$$S_2(n) = \frac{n!}{24} \sum_{i=0}^{[(n-4)/3]} \frac{(3i+4)(i+3)(i+2)(i+1)n^{n-3i-5}}{6(n-3i-4)!} = \\ = \frac{n!}{24} \sum_{i=0}^{[(n-4)/3]} \frac{(3i+4)(3i+9)(3i+6)(3i+3)n^{n-3i-5}}{162(n-3i-4)!} \leqslant \\ \leqslant \frac{n!}{3888} \sum_{i=0}^{n-4} \frac{(i+4)(i+3)(i+6)(i+9)n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = M(n).$$

В соответствии с разложением

$$(i+4)(i+3)(i+6)(i+9) = \\ = (i+4)(i+3)(i+2)(i+1) + 12(i+3)(i+2)(i+1) + 64(i+2)(i+1) + 184(i+1) + 240$$

разобьем $M(n)$ на 5 слагаемых:

$$M(n) = M_1(n) + M_2(n) + M_3(n) + M_4(n) + M_5(n).$$

С помощью выражений для символа Похгаммера $(a)_i$

$$(a)_i = \frac{\Gamma(a+i)}{\Gamma(a)} = (-1)^i \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-i)}$$

найдем

$$M_1(n) = \sum_{i=0}^{n-4} \frac{(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = n^{n-5} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+4)!}{i!\Gamma(n-3-i)} \left(\frac{1}{n}\right)^i = \\ = n^{n-5} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(i+4)!\Gamma(4-n+i)}{i!\Gamma(n-3)\Gamma(4-n)} \left(\frac{1}{n}\right)^i = \frac{n^{n-5}}{(n-4)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(5+i)\Gamma(5)(4-n)_i}{\Gamma(5)i!} \left(-\frac{1}{n}\right)^i = \\ = \frac{24n^{n-5}}{(n-4)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(5)_i(4-n)_i}{i!} \left(-\frac{1}{n}\right)^i = \frac{24n^{n-5}}{(n-4)!}\ {}_2F_0\left(5,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right),$$

где ${}_2F_0(a,b;-;z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция. Аналогично получим

$$M_2(n) = 12 \sum_{i=0}^{n-4} \frac{(i+3)(i+2)(i+1)n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = 12n^{n-5} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+3)!}{i!\Gamma(n-3-i)} \left(\frac{1}{n}\right)^i = \\ = 12n^{n-5} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(4+i)\Gamma(4)\Gamma(4-n+i)}{i!\Gamma(4)\Gamma(n-3)\Gamma(4-n)} \left(\frac{1}{n}\right)^i = 72 \frac{n^{n-5}}{(n-4)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(4)_i(4-n)_i}{i!} \left(-\frac{1}{n}\right)^i = \\ = \frac{72n^{n-5}}{(n-4)!}\ {}_2F_0\left(4,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right),$$

$$M_3(n) = 64 \sum_{i=0}^{n-4} \frac{(i+2)(i+1)n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = 64n^{n-5} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+2)!}{i!\Gamma(n-3-i)} \left(\frac{1}{n}\right)^i = \\ = 64n^{n-5} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(3+i)\Gamma(3)\Gamma(4-n+i)}{i!\Gamma(3)\Gamma(n-3)\Gamma(4-n)} \left(\frac{1}{n}\right)^i = \frac{128n^{n-5}}{(n-4)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(3)_i(4-n)_i}{i!} \left(-\frac{1}{n}\right)^i = \\ = \frac{128n^{n-5}}{(n-4)!}\ {}_2F_0\left(3,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right),$$

$$M_4(n) = 184\sum_{i=0}^{n-4}\frac{(i+1)n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = 184n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+1)!}{i!\Gamma(n-3-i)}\left(\frac{1}{n}\right)^i =$$
$$= 184n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(2+i)\Gamma(2)\Gamma(4-n+i)}{i!\Gamma(2)\Gamma(n-3)\Gamma(4-n)}\left(\frac{1}{n}\right)^i = \frac{184n^{n-5}}{(n-4)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2)_i(4-n)_i}{i!}\left(-\frac{1}{n}\right)^i =$$
$$= \frac{184n^{n-5}}{(n-4)!}\ {}_2F_0\left(2,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right),$$

$$M_5(n) = 240\sum_{i=0}^{n-4}\frac{n^{n-i-5}}{(n-i-4)!} = 240n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i!}{i!\Gamma(n-3-i)}\left(\frac{1}{n}\right)^i =$$
$$= 240n^{n-5}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(1+i)\Gamma(1)\Gamma(4-n+i)}{i!\Gamma(1)\Gamma(n-3)\Gamma(4-n)}\left(\frac{1}{n}\right)^i = 240\frac{24n^{n-5}}{(n-4)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1)_i(4-n)_i}{i!}\left(-\frac{1}{n}\right)^i =$$
$$= \frac{240n^{n-5}}{(n-4)!}\ {}_2F_0\left(1,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right).$$

Используя соотношение

$$U(a,b,z) = z^{-a}{}_2F_0\left(a,\ a-b+1;\ -;\ -\frac{1}{z}\right)$$

между функциями ${}_2F_0(a,b;-;z)$ и $U(a,b,z)$ (см. [16, с. 328, 13.6.21]), получим:

$${}_2F_0\left(5,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right) = n^5U(5,n+2,n), \quad {}_2F_0\left(4,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right) = n^4U(4,n+1,n),$$
$${}_2F_0\left(3,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right) = n^3U(3,n,n), \quad {}_2F_0\left(2,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right) = n^2U(2,n-1,n),$$
$${}_2F_0\left(1,\ 4-n;\ -;\ -\frac{1}{n}\right) = nU(1,n-2,n).$$

Таким образом,

$$M(n) = M_1(n) + M_2(n) + M_3(n) + M_4(n) + M_5(n) =$$
$$= \frac{24n^n}{(n-4)!}U(5,n+2,n) + \frac{72n^{n-1}}{(n-4)!}U(4,n+1,n) + \frac{128n^{n-2}}{(n-4)!}U(3,n,n) +$$
$$+ \frac{184n^{n-3}}{(n-4)!}U(2,n-1,n) + \frac{240n^{n-4}}{(n-4)!}U(1,n-2,n).$$

Учитывая, что $n!/(n-k)! \sim n^k$ при фиксированном k и $n \to \infty$, с помощью формулы (8) получим следующую асимптотику при $n \to \infty$:

$$S_2(n) = \frac{n!}{3888}M(n) \sim \frac{24n!n^n}{3888(n-4)!}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{5/2}\Gamma(3)} + \frac{72n!n^{n-1}}{3888(n-4)!}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^2\Gamma(5/2)} +$$
$$+ \frac{128n!n^{n-2}}{3888(n-4)!}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{3/2}\Gamma(4/2)} + \frac{184n!n^{n-3}}{3888(n-4)!}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^1\Gamma(3/2)} + \frac{240n!n^{n-4}}{3888(n-4)!}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n)^{1/2}\Gamma(2/2)} \sim$$
$$\sim c_1n^{n+3/2} + c_2n^{n+1} + c_3n^{n+1/2} + c_4n^n + c_5n^{n-1/2} \sim Cn^{n+3/2}.$$

Теперь имеем

$$G(n,3) = S_1(n) + S_2(n),$$

где

$$S_1(n) \sim \frac{1}{768}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2}, \quad S_2(n) \leqslant Cn^{n+3/2};$$

так как
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_2(n)}{S_1(n)}=0,$$
то
$$G(n,3)\sim\frac{1}{768}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2}.\qquad\square$$

Так как при $n\to\infty$ асимптотика для числа помеченных связных геодезических трициклических графов (9) совпадает с асимптотикой для числа помеченных геодезических трициклических кактусов (12), то получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Почти все помеченные связные геодезические трициклические графы являются кактусами.*

Гипотеза 1. Для числа $G(n,k)$ помеченных связных геодезических k-циклических графов с n вершинами при фиксированном k и $n\to\infty$ верна асимптотика
$$G(n,k)\sim c(k)n^{n+(3k-4)/2},$$
где $c(k)$ — константа, зависящая от k, но не зависящая от n.

В частности,
$$c(1)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad c(2)=\frac{1}{32},\quad c(3)=\frac{1}{768}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
Таким образом, гипотеза верна для $1\leqslant k\leqslant 3$.

3. Вероятность.

Зададим на множестве помеченных связных k-циклических графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 4. *Пусть $P_1(n)$ — вероятность того, что случайный помеченный связный унициклический граф с n вершинами является геодезическим графом. Тогда при $n\to\infty$ верна асимптотическая формула*
$$P_1(n)\sim\frac{1}{2}.$$

Доказательство. Пусть $f(n,n+k)$ — число помеченных связных графов с n вершинами и $n+k$ ребрами. Э. Райт нашел асимптотику при $n\to\infty$ и $0\leqslant k=o(n^{1/3})$ (см. [19]):
$$f(n,n+k)\sim f_kn^{n+(3k-1)/2},\quad f_0=\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2},\quad f_k=\frac{\sqrt{\pi}3^k(k-1)!d_k}{2^{(5k-1)/2}\Gamma((3k/2)},\quad k\geqslant 1,$$
где d_k — коэффициенты Райта:
$$d_1=d_2=\frac{5}{36},\quad d_{k+1}=d_k+\sum_{s=1}^{k-1}\frac{d_sd_{k-s}}{(k+1)\binom{k}{s}},\quad k\geqslant 2.$$
Следовательно, с помощью формулы (6) получим при $n\to\infty$
$$P_1(n)=\frac{G(n,1)}{f(n,n)}\sim\frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n-1/2}}{\sqrt{\frac{\pi}{8}}n^{n-1/2}}=\frac{1}{2}.\qquad\square$$

Следствие 5. *Пусть $P_2(n)$ — вероятность того, что случайный помеченный связный бициклический граф с n вершинами является геодезическим графом. Тогда при $n\to\infty$ верна асимптотическая формула*
$$P_2(n)\sim\frac{3}{20}.$$

Доказательство. Э. Райт в [19] нашел асимптотику

$$f(n,n+1) \sim \frac{5}{24}n^{n+1}, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, с учетом формулы (7) получим при $n \to \infty$

$$P_2(n) = \frac{G(n,2)}{f(n,n+1)} \sim \frac{\frac{1}{32}n^{n+1}}{\frac{5}{24}n^{n+1}} = \frac{3}{20}. \qquad \square$$

Следствие 6. *Пусть $P_3(n)$ — вероятность того, что случайный помеченный связный трициклический граф с n вершинами является геодезическим графом. Тогда при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$P_3(n) \sim \frac{1}{30}.$$

Доказательство. С помощью асимптотики Э. Райта (см. [19])

$$f(n,n+2) \sim \frac{5}{128}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2}, \quad n \to \infty,$$

и формулы (9) имеем

$$P_3(n) = \frac{G(n,3)}{f(n,n+2)} \sim \frac{\frac{1}{768}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2}}{\frac{5}{128}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n^{n+5/2}} = \frac{1}{30}. \qquad \square$$

Следствие 7. *Пусть $\bar{P}_k(n)$ — вероятность того, что случайный помеченный связный k-циклический граф с n вершинами является геодезическим кактусом, а d_k — коэффициенты Райта. Тогда при фиксированном k и $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$\bar{P}_k(n) \sim \frac{\Gamma(\frac{3k-3}{2})}{8\Gamma(\frac{k+1}{2})3^{k-1}k!(k-2)!d_{k-1}} \text{ при } k \geqslant 2, \quad \bar{P}_1(n) \sim \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Применяя опять асимптотику Райта из [19] и формулу (4), получим при фиксированном $k \geqslant 2$ и $n \to \infty$

$$\bar{P}_k(n) \sim \frac{GC(n,k)}{f(n,n+k-1)} \sim \frac{\sqrt{\pi}n^{n+(3k-4)/2}}{2^{5k/2}k!\Gamma(\frac{k+1}{2})f_k n^{n+(3k-4)/2}} = \frac{\Gamma(\frac{3k-3}{2})}{8\Gamma(\frac{k+1}{2})3^{k-1}k!(k-2)!d_{k-1}}.$$

Так как при $k=1$ все связные унициклические графы являются кактусами, то из следствия 4 имеем $\bar{P}_1(n) \sim 1/2$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных геодезических планарных графов// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 3. — С. 336–341.
2. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных геодезических графов с малым цикломатическим числом// Мат. заметки. — 2017. — *101*, № 5. — С. 684–689.
3. *Воблый В. А.* Асимптотическое перечисление помеченных последовательно-параллельных тетрациклических графов// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *187*. — С. 31–35.
4. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных последовательно-параллельных трициклических графов// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *177*. — С. 132–136.
5. *Воблый В. А.* О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер// Дискр. анал. иссл. опер. — 2016. — *23*, № 2. — С. 5–20.
6. *Воблый В. А.* Второе соотношение Риддела и следствия из него// Дискр. анал. иссл. опер. — 2019. — *26*, № 1. — С. 20–32.
7. *Воблый В. А.* Об асимптотическое перечислении помеченных последовательно-параллельных k-циклических графов// Дискр. анал. иссл. опер. — 2022. — *29*, № 4. — С. 5–14.

8. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных геодезических k-циклических кактусов// Мат. XVIII Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». — Пенза, 2017. — С. 56–57.
9. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.
10. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1989.
11. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. — Наука, 1982.
12. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
13. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
14. *Frasser C. E.* k-Geodetic graphs and their application to the topological design of computer networks// Proc. Argentinian Workshop on Theoretical Computer Science, 28 JAIIO-WAIT'99, 1999. — P. 187–203.
15. *Mc Diarmid C., Scott A.* Random graphs from a block stable class// Eur. J. Combin. — 2016. — *58.* — P. 96–106.
16. NIST Handbook of Mathematical Functions. — New York: Cambridge Univ. Press, 2010.
17. *Stemple J. G., Watkins M. E.* On planar geodetic graphs// J. Combin. Theory. — 1968. — *4.* — P. 101–117.
18. *Temme N. M., Veling E. J. M.* Asymptotic expansions of Kummer hypergeometric functions with three parameters a, b and z/ `arXiv: 2202.12857v3 [math.CA]`.
19. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs// J. Graph Theory. — 1977. — *1*, № 4. — P. 317–330.

Воблый Виталий Антониевич
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 68–72
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-68-72

УДК 512.6

ПРОСТРАНСТВА С ПОЛИЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ

© 2022 г. **Н. И. ГУСЕВА, Е. В. ЛУКЬЯНОВА**

Аннотация. Рассматриваются пространства с полилинейными формами, степень которых больше двух. Группами движений таких пространств являются подгруппы полной линейной группы, преобразования которых сохраняют данную полилинейную форму. Отыскание таких групп упрощается, если полилинейная форма задаётся на линейном пространстве некоторой алгебры и обладает мультипликативным свойством относительно умножения в этой алгебре. Доказано, что такая форма существует в любой ассоциативной алгебре.

Ключевые слова: линейная алгебра, ассоциативная алгебра, мультипликативная функция, пространство с полилинейной формой, циклическая алгебра.

SPACES WITH POLYLINEAR FORMS

© 2022 **N. I. GUSEVA, E. V. LUKYANOVA**

Abstract. We consider spaces with multilinear forms whose degree is greater than two. The motion groups of such spaces are subgroups of the general linear group whose transformations preserve the given multilinear form. The search for such groups becomes simpler if the multilinear form is defined on the linear space of some algebra and possesses the multiplicative property with respect to multiplication in this algebra. We prove that such a form exists in any associative algebra.

Keywords and phrases: linear algebra, associative algebra, multiplicative function, space with multilinear form, cyclic algebra.

AMS Subject Classification: 15A66, 15A69, 16S38

О том, что геометрическая структура может быть основана на фундаментальной форме, у которой степень больше двух, впервые предположил Бернгард Риман в своей знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». «Случай, который можно было бы назвать следующим по простоте, — замечает Риман, — соответствует тем многообразиям, в которых линейный элемент представляется в виде корня четвёртой степени из дифференциального выражения четвёртой степени». Впрочем, дальше этот великий геометр XIX века отказывается от своего же замечания о геометрии не квадратичных фундаментальных форм: «Исследование этого более общего типа многообразий, правда, не потребовало бы введения каких-либо существенно новых принципов, но связано было бы со значительной потерей времени и едва ли позволило бы представить учение о многообразиях в особо своеобразном освещении; притом результаты не смогли бы быть сформулированы геометрически. Поэтому, — заключает Риман, — я позволю себе ограничиться многообразиями, для которых линейный элемент задаётся как квадратный корень из дифференциального выражения второй степени...» (см. [5]).

Однако и не квадратичные формы могут задавать на многообразиях и, в частности, на линейных пространствах свои специфические геометрические структуры. Некоторые из таких геометрических структур во многом похожи на геометрию евклидовых и псевдоевклидовых пространств, другие же могут удивить своей причудливостью, хотя и не лишены внутренней гармонии и специфической красоты.

Долгое время математики не обращали внимания на геометрические структуры, имеющие в качестве фундаментальной формы однородную функцию координат, степень которой больше двух. Этому были две причины. Во-первых, во времена Римана и позже, пока образцом для геометрических структур была евклидова геометрия, пространства с не квадратичной фундаментальной формой не имели какой-либо рациональной интерпретации, на что и указывает Риман, замечая, что результаты исследования пространств с не квадратичной формой «не смогли бы быть сформулированы геометрически».

Впрочем, после того как Феликс Клейн дал толкование геометрии как множества, на котором действует некоторая группа преобразований, вопрос об интерпретации той или иной геометрической структуры уже не имел принципиального значения. Но отыскание преобразований, сохраняющих ту или иную не квадратичную форму — задача нетривиальная. И потому без какого-либо «внешнего» стимула она не привлекала пристального внимания геометров.

Ситуация изменилась, когда ряд математиков и физиков-теоретиков в поисках тех или иных обобщений теории относительности обратились к финслеровой геометрии. В рамках таких исследований и понадобились пространства с не квадратичной фундаментальной формой (см. [4]).

Однако отыскание непрерывных групп преобразований, которые сохраняют ту или иную не квадратичную форму, представляет существенную трудность, и потому исследования пространств с не квадратичной фундаментальной формой, как правило, ограничивались несколькими частными случаями таких пространств.

Эту трудность можно преодолеть, если в качестве линейного пространства взять векторное пространство той или иной линейной алгебры и в качестве фундаментальной формы принять некоторую мультипликативную функцию, определённую на этой алгебре. Тогда группой преобразований, сохраняющих фундаментальную форму, будет такая подгруппа линейной группы данной алгебры, для которой коэффициенты элементарных линейных функций принимают единичное значение на фундаментальной форме (см. [1]).

Таким образом, задача отыскания непрерывных групп преобразований, сохраняющих форму какой-либо степени, в ряде случаев сводится к отысканию алгебр, обладающих той или иной мультипликативной функцией. Например, для квадратичных форм такими алгебрами являются алгебры комплексных чисел, кватернионов и октав, и более общо — алгебр гиперкомплексных чисел или альтернионов.

Можно ли отыскать какие-либо широкие классы линейных алгебр, в которых бы геометрическая структура порождалась мультипликативной функцией, подобно тому, как евклидова и псевдоевклидова геометрия порождается алгебрами альтернионов?

Покажем, что в любой ассоциативной алгебре существует однородная мультипликативная функция, степень которой совпадает с размерностью линейного пространства алгебры. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — какой-либо базис линейного пространства ассоциативной алгебры $\mathbf{A}$ над полем $\mathbb{R}$ и пусть c^r_{kh} — структурные константы, вычисленные в этом базисе:

$$\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_h = c^r_{kh}\boldsymbol{e}_r.$$

Рассмотрим линейное алгебраическое уравнение $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, которое в выбранном базисе будет иметь вид

$$(a^k\boldsymbol{e}_k) \cdot (x^h\boldsymbol{e}_h) = b^r\boldsymbol{e}_r$$

или

$$a^k c^r_{kh} x^h \boldsymbol{e}_r = b^r\boldsymbol{e}_r.$$

Определитель системы линейных уравнений $a^k c^r_{kh} x^h = b^r$, эквивалентных линейному алгебраическому уравнению $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, будем называть *левым детерминантом* элемента $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$ и обозначать $\Delta_L(\boldsymbol{a})$. Аналогично вводится в рассмотрение *правый детерминант* $\Delta_R(\boldsymbol{a})$ элемента $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$ как определитель системы линейных уравнений $a^h c^r_{kh} x^k = b^r$, эквивалентной линейному алгебраическому уравнению $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Теорема 1. *Детерминанты* $\Delta_L(\boldsymbol{a}) = \det(a^k c^r_{kh})$ *и* $\Delta_R(\boldsymbol{a}) = \det(a^h c^r_{kh})$ *произвольного элемента ассоциативной алгебры* $\mathbf{A}$ *являются мультипликативными функциями, т.е. для любых*

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{A}$ *имеем*

$$\Delta_L(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \Delta_L(\boldsymbol{a})\Delta_L(\boldsymbol{b}), \quad \Delta_R(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \Delta_R(\boldsymbol{a})\Delta_R(\boldsymbol{b}).$$

Доказательство. Для доказательства мультипликативного свойства левого детерминанта заметим, что в силу ассоциативности умножения в алгебре $\mathbf{A}$ справедливо тождество

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}).$$

Тогда, с одной стороны,

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{x} = (a^k b^h c^r_{kh}\boldsymbol{e}_r)\cdot(x^l\boldsymbol{e}_l) = a^k b^h c^r_{kh} c^m_{rl} x^l \boldsymbol{e}_m,$$

с другой стороны,

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}) = (a^k\boldsymbol{e}_k)\cdot(b^h c^r_{hl} x^l\boldsymbol{e}_r) = a^k b^h c^r_{hl} c^m_{kr} x^l \boldsymbol{e}_m,$$

т.е.

$$\Delta_L(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \det(a^k b^h c^r_{kh} c^m_{rl}) = \det(a^k b^h c^r_{hl} c^m_{kr}) = \det(b^h c^r_{hl})\det(a^k c^m_{kr}) = \Delta_L(\boldsymbol{a})\Delta_L(\boldsymbol{b}).$$

Аналогично доказывается мультипликативное свойство правых детерминантов элементов ассоциативной алгебры. Заметим ещё, что если ассоциативная алгебра к тому же коммутативна, то правый и левый детерминанты, очевидно, совпадают, и можно говорить просто о детерминанте элементов такой алгебры. □

Возьмём детерминант $\Delta_L(\boldsymbol{x})$ в качестве фундаментальной формы геометрической структуры на линейном пространстве ассоциативной алгебры. Тогда преобразования, сохраняющие форму $\Delta(\boldsymbol{x})$, будут порождаться линейными алгебраическими функциями $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ при условии, что $\Delta_L(\boldsymbol{a}) = 1$. Это сразу следует из мультипликативности:

$$\Delta_L(\boldsymbol{x}') = \Delta_L(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) = \Delta_L(\boldsymbol{a})\cdot\Delta_L(\boldsymbol{x}) = \Delta_L(\boldsymbol{x}).$$

При этом заметим, что множество элементов $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$ образуют подгруппу $\mathbf{G}_L(\mathbf{A})$ группы всех обратимых элементов алгебры $\mathbf{A}$ и, следовательно, преобразования линейного пространства алгебры, порождаемые линейными функциями $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ при условии $\Delta_L(\boldsymbol{a}) = 1$, образуют группу движений геометрической структуры с фундаментальной формой $\Delta_L(\boldsymbol{x})$.

Аналогично, на линейном пространстве ассоциативной алгебры $\mathbf{A}$ можно определить и геометрическую структуру, фундаментальной формой для которой будет правый детерминант $\Delta_R(\boldsymbol{x})$, а движения в этой геометрии будут определяться линейными алгебраическими функциями $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}$ при условии $\Delta_R(\boldsymbol{a}) = 1$.

Заметим ещё, что линейные алгебры можно рассматривать и над полем комплексных чисел. При этом теорема о мультипликативности детерминантов остаётся справедливой (так как при её доказательстве нигде не использовалось предположение, что $a^k, b^h, c^r_{kh} \in \mathbb{R}$). Для линейных пространств, получаемых овеществлением линейных комплексных пространств ассоциативных алгебр над полем комплексных чисел, в качестве фундаментальной формы можно принять модуль левого или правого детерминанта, поскольку модуль комплексного числа обладает свойством мультипликативности.

Примером геометрических структур, определяемых на линейном пространстве ассоциативной алгебры детерминантом текущего элемента, могут служить *циклические пространства* (см. [3]). Линейными алгебрами для циклических пространств будут алгебры циклических чисел или групповые алгебры $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ над полем $\mathbb{R}$ с циклической группой $\mathbb{Z}_m$. Такие алгебры порождаются одним элементом, и их произвольный элемент $\boldsymbol{x}$ может быть записан в виде

$$\boldsymbol{x} = x_0 + x_1\boldsymbol{e} + x_2\boldsymbol{e}^2 + \ldots + x_{m-1}\boldsymbol{e}^{m-1},$$

где $\boldsymbol{e}$ — порождающий элемент группы $\mathbb{Z}_m$ (т.е. $\boldsymbol{e}^m = 1$). Алгебра $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ коммутативна, поэтому правый и левый детерминанты текущего элемента этой алгебры совпадают и имеют следующий вид:

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & x_{m-2} & \ldots & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_{m-1} & \ldots & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \ldots & x_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & x_{m-3} & \ldots & x_0 \end{vmatrix}.$$

Такие определители называются *циркулянтами*; их мультипликативность можно проверить непосредственным перемножением.

Можно показать, что для экспоненты векторных элементов

$$\phi = \phi_1\boldsymbol{e} + \phi_2\boldsymbol{e}^2 + \ldots + \phi_{m-1}\boldsymbol{e}^{m-1}$$

справедливо тождество

$$\Delta(\exp(\phi_1\boldsymbol{e} + \phi_2\boldsymbol{e}^2 + \ldots + \phi_{m-1}\boldsymbol{e}^{m-1})) = 1,$$

так что движениями в циклических пространствах будут линейные преобразования, порождаемые линейными алгебраическими функциями $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}\cdot\exp\phi$.

Циклические алгебры можно рассматривать как над вещественным, так и над комплексным полем. При этом любую вещественную циклическую алгебру $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ можно рассматривать как подалгебру комплексной циклической алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ с одной и той же базовой группой $\mathbb{Z}_m$, т.е. $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m) \subset \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$. Но кроме вещественных циклических алгебр комплексные циклические алгебры содержат и другие подалгебры. В частности, алгебра $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ содержит вещественную подалгебру антициклических чисел $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$, образующий элемент $\boldsymbol{i}$ которой удовлетворяет структурному тождеству $\boldsymbol{i}^m = -1$. На линейном пространстве алгебры $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ можно ввести геометрическую структуру с детерминантом в качестве фундаментальной формы.

Геометрические структуры на циклических и антициклических алгебрах естественным образом обобщают евклидову и псевдоевклидову двумерную структуру, так как геометрия на алгебрах $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_2)$ и $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2) \equiv \mathbb{C}$ — это псевдоевклидова и евклидова планиметрии (о чём имеется обширная литература). В силу того, что циклические и антициклические пространства обобщают евклидову и псевдоевклидову плоскость, на циклических и антициклических пространствах можно определить не только циклическую длину векторов (или, как говорит Риман, — линейный элемент), но и циклический угол между векторами, который будет зависеть от $(m-1)$ параметров.

Конечно, пространства с не квадратичными фундаментальными формами не ограничиваются лишь ассоциативными алгебрами, в которых фундаментальная форма $\Delta_L(\boldsymbol{x})$ или $\Delta_R(\boldsymbol{x})$ имеет степень, равную размерности пространства. Зачастую бывает интереснее найти мультипликативную форму, степень которой меньше размерности пространства, на котором задаётся не квадратичная фундаментальная форма.

В ряде случаев такую форму можно определить на линейной алгебре, которая получается из другой алгебры при помощи обобщённой процедуры удвоения, аналогичной той, которую использовал Грейвс при построении алгебры кватернионов Гамильтона, удвоив алгебру комплексных чисел, и алгебры октав — удвоив алгебру кватернионов (см. [2]).

Такая процедура, применённая к циклическим алгебрам $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, даёт алгебры $\mathbf{B}_2^m$, в которых определитель $D(\boldsymbol{x})$ системы линейных уравнений над алгеброй $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, эквивалентных линейному алгебраическому уравнению $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a},\boldsymbol{x} \in \mathbf{B}_2^m$, будет комплекснозначной мультипликативной функцией (см. [2]). При этом степень фундаментальной формы $D(\boldsymbol{x})$ будет существенно меньше степени форм $\Delta_L(\boldsymbol{x})$ и $\Delta_R(\boldsymbol{x})$. Действительно, $\dim\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m) = m$, а $\dim\mathbf{B}_2^m = m^2$, поэтому $\deg\Delta_L(\boldsymbol{x}) = \deg\Delta_R(\boldsymbol{x}) = m^2$, в то время как $\deg D(\boldsymbol{x}) = m$.

Например, для алгебры кватернионов

$$\Delta_L(x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}) = \begin{vmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_3 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2,$$

в то время как

$$D((x_0 + x_1\boldsymbol{i} + (x_2 + x_3\boldsymbol{i})\boldsymbol{j}) = \begin{vmatrix} (x_0 + x_1\boldsymbol{i}) & -(x_2 - x_3\boldsymbol{i}) \\ (x_2 + x_3\boldsymbol{i}) & (x_0 - x_1\boldsymbol{i}) \end{vmatrix} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлаков И. М., Бурлаков М. П.* Геометрические структуры линейных алгебр. — LAMBERT, 2017.
2. *Бурлаков М. П.* Гамильтоновы алгебры. — М.: Граф Пресс, 2006.
3. *Бурлаков М. П., Бурлаков И. М., Гусева Н. И.* Очерки об алгебрах циклических чисел. — М.: Ким, 2020.
4. *Гарасько Г. И.* Начала финслеровой геометрии для физиков. — М.: Тетра, 2009.
5. *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии// в кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. — М.: Мир, 1979. — С. 20–33.

Гусева Надежда Ивановна
Московский педагогический государственный университет;
Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва
E-mail: ngus12@mail.ru

Лукьянова Елена Викторовна
Московский педагогический государственный университет
E-mail: lukyanovalv@list.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 73–80
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-73-80

УДК 514.13; 514.752

ТЕОРЕМА БЕЛЬТРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

© 2022 г. **А. В. КОСТИН**

Аннотация. Э. Бельтрами доказал теорему о взаимосвязи кривизн для семейств поверхностей вращения в трехмерном евклидовом пространстве, из которой следует, что если некоторая поверхность вращения M' ортогонально пересекает все поверхности, получаемые из одной поверхности постоянной кривизны M переносами вдоль оси вращения, то кривизна поверхности M' также постоянна и отличается от кривизны поверхности M только знаком. В данной работе получены аналоги этой теоремы для поверхностей вращения в трехмерном пространстве Минковского.

Ключевые слова: пространство Минковского, поверхность вращения, плоскость Лобачевского, плоскость де Ситтера, пространство постоянной кривизны, псевдосфера.

BELTRAMI THEOREM IN MINKOWSKI SPACE

© 2022 **A. V. KOSTIN**

Abstract. E. Beltrami proved a theorem on the relationship of curvatures for families of surfaces of revolution in the three-dimensional Euclidean space, which implies that if some surface of revolution M' orthogonally intersects all surfaces obtained from a surface of constant curvature M by translations along the rotation axis, then the curvature of the surface M' is also constant and differs from the curvature of the surface M only in sign. In this paper, we obtain analogs of this theorem for surfaces of revolution in the three-dimensional Minkowski space.

Keywords and phrases: Minkowski space, surface of revolution, Lobachevsky plane, de Sitter plane, space of constant curvature, pseudosphere.

AMS Subject Classification: 53A35, 53B30

1. Введение. Поверхности вращения постоянной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве исследовал Ф. Миндинг в [15–17]. В этих работах он нашел все типы меридианов поверхностей вращения постоянной положительной и постоянной отрицательной кривизны. Поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны Миндинг исследовал вплоть до нахождения формул тригонометрии геодезических треугольников. Эти результаты впоследствии были использованы Э. Бельтрами для построения первой интерпретации геометрии Лобачевского в 1868 г. (см. [9]). Но к поверхностям постоянной кривизны Бельтрами обращался неоднократно и до этой работы.

В 1864 г. в [8] Э. Бельтрами рассмотрел два семейства поверхностей вращения относительно одной и той же оси. Меридианы поверхностей вращения первого семейства он задавал с помощью дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \varphi;$$

меридианы второго семейства, каждая поверхность которого ортогонально пересекала поверхности первого семейства, задавались дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\varphi}.$$

В этом случае в точках пересечения поверхностей их кривизны K и K' удовлетворяют условию $K' = -K$. Отсюда, в частности, следует, что если поверхности первого семейства имеют постоянную кривизну, то кривизна поверхностей второго семейства также постоянна. Если в качестве поверхностей первого семейства выступают сферы, то поверхности второго семейства будут псевдосферами.

Приведем для удобства основные определения, используемые в настоящей работе. Будем рассматривать трехмерное псевдоевклидово пространство с метрикой

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 - (dz)^2, \tag{1}$$

называемое также трехмерным пространством Минковского. Для индефинитных квадратичных форм и определяемых с их помощью понятий, как и для положительно определенных форм, будем пользоваться обычными терминами: метрика, расстояние, длина отрезка. В зависимости от выбора квадратичной формы, задающей псевдоевклидову структуру в пространстве теории относительности (с одним минусом или с одним плюсом в каноническом виде), разные авторы поразному определяют пространственноподобные и времениподобные векторы, прямые и поверхности в псевдоевклидовых пространствах любой размерности. В данной статье условимся пространственноподобными векторами называть векторы, скалярный квадрат которых в метрике (1) положителен, а времениподобными — векторы, скалярный квадрат которых отрицателен. Векторы с равным нулю скалярным квадратом называются светоподобными или изотропными. Плоскости, нормали которых времениподобны, являются евклидовыми. Плоскости, нормали которых пространственноподобны, являются псевдоевклидовыми. Плоскости, нормали которых изотропны, называются изотропными или полуевклидовыми. Поверхности, касательные плоскости которых евклидовы, называются пространственноподобными. На таких поверхностях индуцируется риманова метрика. Поверхности, касательные плоскости которых псевдоевклидовы, называются времениподобными. Внутренняя геометрия на таких поверхностях псевдориманова. На поверхностях, касательные плоскости которых во всех точках изотропны, индуцируется полуриманова геометрия. Метрика на таких поверхностях вырождена. Вращения пространства вокруг времениподобных прямых являются эллиптическими. Орбиты точек являются с аффинной точки зрения эллипсами. В индуцированной метрике в своих плоскостях эти орбиты являются евклидовыми окружностями. В частом случае, когда оси вращения параллельны временной оси, в стандартных декартовых координатах орбиты будут окружностями и в евклидовой метрике

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \tag{2}$$

Вращения вокруг пространственноподобных прямых являются гиперболическими. Неизотропные орбиты точек с аффинной точки зрения представляются гиперболами. Орбиты точек при вращении вокруг изотропных прямых с аффинной точки зрения представляются параболами. Общая теория кривых и поверхностей трехмерного пространства Минковского изложена в [14] (см. также [4]). Собственно поверхностям вращения посвящена статья [7]. Необходимые сведения из гиперболической геометрии изложены в монографии Б. А. Розенфельда [5].

2. Основные результаты. Сформулируем основной результат работы. В работе рассматриваются пространственноподобные и времениподобные поверхности вращения и семейства таких поверхностей, полученные переносами вдоль пространственноподобных и времениподобных осей.

Теорема 1. *Пусть меридианы первого семейства поверхностей вращения с времениподобной осью Oz в плоскости Oxz задаются уравнением*

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{th}(\alpha),$$

где α является функцией от x, а меридианы второго семейства поверхностей с той же осью вращения задаются уравнением

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{cth}(\alpha).$$

Если поверхности первого семейства обладают постоянной кривизной, то кривизна каждой поверхности второго семейства также постоянна и отличается от кривизны поверхностей первого семейства только знаком.

Также будет приведено обобщение этой теоремы и аналогичные утверждения для других видов поверхностей вращения, доказательство которых аналогично доказательству теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 1 и ее обобщение. *Доказательство.* Поскольку решения уравнения

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{th}(\alpha)$$

отличаются только константой интегрирования, все поверхности вращения с такими меридианами будут получаться из одной поверхности M переносами вдоль оси вращения Oz. Из вида правой части этого уравнения следует, что в метрике (1) касательные плоскости поверхности во всех точках будут евклидовыми, а сама поверхность вращения будет пространственноподобной. Меридианы поверхностей второго семейства, определяемые уравнением

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{cth}(\alpha),$$

в метрике (1) будут ортогональны меридианам поверхностей вращения из первого семейства. Как следствие, сами поверхности второго семейства тоже будут ортогональны поверхностям первого семейства. Все поверхности второго семейства также будут получаться из одной поверхности M' переносами вдоль оси вращения Oz. Далее зафиксируем поверхности M и M'. Пусть γ — меридиан поверхности M, γ' — меридиан поверхности M', L — точка пересечения этих меридианов. Обозначим через R_1 модуль радиуса кривизны меридиана поверхности M в точке L, а через R_2 — модуль радиуса кривизны нормального сечения этой поверхности в направлении параллели в той же точке L. Сами главные радиусы кривизны поверхности M во всех точках принимают чисто мнимые значения. Кривизна меридиана первой поверхности $z = t(x)$ может быть найдена по формуле (см. [4])

$$k(x) = \frac{|t''(x)|}{\sqrt{|1-(t'(x))^2|^3}}. \tag{3}$$

Если наложить условие, что кривая пространственноподобна, то модуль в знаменателе можно опустить. Из (3) следует, что модуль радиуса кривизны меридиана поверхности M будет равен

$$R_1 = \frac{\sqrt{(1-(t'(x))^2)^3}}{|t''(x)|}. \tag{4}$$

Пусть нормаль к кривой γ в точке L, она же — касательная к кривой γ' в этой точке, пересекает ось вращения в точке N, а касательная к кривой γ в точке L (нормаль к кривой γ' в этой точке L) пересекает ось вращения в точке N'. Заметим, что ортогональность направлений на псевдоевклидовой плоскости Oxz (сопряженность относительно квадратичной формы $dx^2 - dz^2$) в стандартных декартовых координатах Oxz эквивалентна симметричности прямых с такими направлениями относительно изотропной прямой, проходящей через их точку пересечения. Обозначим через α гиперболический угол, который касательная к кривой γ в точке L образует с положительным направлением оси Ox. Из уравнения кривой γ следует, что

$$\operatorname{th}(\alpha) = \frac{dz}{dx}.$$

Во введенных выше обозначения имеем

$$\operatorname{th}(\alpha) = t'(x). \tag{5}$$

Рассмотрим треугольник NLN'. Прямая NL в метрике $ds^2 = dx^2 - dz^2$ ортогональна прямой NL', а прямая NN' ортогональна оси Ox. Значит, угол $N'NL$ равен α. Опустим из точки L перпендикуляр LP на ось вращения Oz. В прямоугольном треугольнике NLP гипотенуза NL, катет LP, $|LP| = |x|$, и противолежащий угол связаны следующим образом:

$$|NL| = R_2 = \frac{|x|}{|\operatorname{sh}\alpha|} = \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \operatorname{th}^2\alpha}}{|\operatorname{th}\alpha|}, \tag{6}$$

здесь x — абсцисса точки L, т.е. при положительных значениях x — расстояние от точки L до оси вращения. Из (4), (5), (6) получим:

$$R_1 \cdot R_2 = \frac{|x| \cdot (1 - (t'(x))^2)^2}{|t'(x)| \cdot |t''(x)|}. \tag{7}$$

Поскольку поверхность M пространственноподобна, ее кривизна K в точке L будет выражаться следующим образом:

$$K = -\frac{1}{R_1 \cdot R_2} = -\frac{|t'(x)| \cdot |t''(x)|}{|x| \cdot (1 - (t'(x))^2)^2}. \tag{8}$$

Найдем теперь модули главных радиусов кривизны поверхности M' в точке L. Пусть меридиан γ' поверхности M' задается следующим образом:

$$z = \theta(x), \quad y = 0. \tag{9}$$

Так как меридиан γ' поверхности M' в метрике $ds^2 = dx^2 - dz^2$ ортогонален всем кривым, задаваемым уравнением

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{th}(\alpha),$$

то в этом случае имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \theta'(x) = \frac{1}{t'(x)}. \tag{10}$$

В уравнении

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{cth}(\alpha)$$

правая часть всегда принимает значения по модулю большие единицы. Отсюда следует, что кривая γ' является времениподобной. Поэтому кривизна ее в стандартных декартовых координатах будет вычисляться по формуле:

$$k(x) = \frac{|\theta''(x)|}{\sqrt{((\theta'(x))^2 - 1)^3}}. \tag{11}$$

Обозначим через R_1' модуль радиуса кривизны меридиана γ' в точке L. Из последнего соотношения получим:

$$R_1' = \frac{\sqrt{((\theta'(x))^2 - 1)^3}}{|\theta''(x)|}. \tag{12}$$

Учитывая (10), имеем:

$$R_1' = \frac{\sqrt{(1/(t'(x))^2 - 1)^3}}{\frac{1}{|t'(x)|^2} \cdot |t''(x)|}, \tag{13}$$

или

$$R_1' = \frac{\sqrt{(1 - (t'(x))^2)^3}}{|t'(x)| \cdot |t''(x)|}. \tag{14}$$

В прямоугольном треугольнике NLN' катеты NL и NL' связаны следующим образом:

$$|N'L| = |NL| \cdot |\operatorname{th}\alpha|, \quad R_2 = \frac{|x|}{|\operatorname{sh}\alpha|} = \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \operatorname{th}^2\alpha}}{|\operatorname{th}\alpha|}. \tag{15}$$

Так как $R_2' = |N'L|$, а $R_2 = |NL|$, то отсюда имеем:

$$R_2' = R_2 \cdot |\operatorname{th}\alpha| = \frac{|x|}{|\operatorname{sh}\alpha|} = \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \operatorname{th}^2\alpha}}{|\operatorname{th}\alpha|} \cdot |\operatorname{th}\alpha|, \tag{16}$$

то есть

$$R_2' = |x| \cdot \sqrt{1 - t'(x)^2}. \tag{17}$$

Из (14), (17) получаем:

$$R_1' \cdot R_2' = \frac{|x| \cdot (1 - (t'(x))^2)^2}{|t'(x)| \cdot |t''(x)|}. \tag{18}$$

Следовательно,

$$R_1' \cdot R_2' = R_1 \cdot R_2. \tag{19}$$

Поверхность M' является времениподобной. Значит, ее кривизна в точке L будет равна

$$\frac{1}{R_1' \cdot R_2'} = \frac{1}{R_1 \cdot R_2} = -K > 0. \tag{20}$$

Если при этом кривизна поверхности M постоянна, то постоянной будет и кривизна поверхности M'. Теорема доказана. □

Очевидно, что теорема 1 может быть обобщена следующим образом.

Теорема 2. *Пусть дано семейство S поверхностей вращения, получающихся из одной поверхности вращения M параллельными переносами вдоль времениподобной оси вращения. Пусть касательные плоскости к поверхности M либо все евклидовы, либо все псевдоевклидовы. Если поверхность M' ортогонально пересекает все поверхности семейства S, то кривизна поверхности M' в каждой точке пересечения ее с любой поверхностью семейства S совпадает по абсолютной величине с кривизной пересекаемой поверхности и противоположна ей по знаку.*

4. Примеры поверхностей, полученных эллиптическим вращением. Рассмотрим случаи, когда меридианы поверхностей постоянной кривизны, полученных эллиптическим вращением, представляются элементарными функциями. Пусть в условиях теоремы 1 функция α имеет вид

$$\alpha = \operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \tag{21}$$

где a — положительная вещественная константа. Тогда первое семейство меридианов будет задаваться дифференциальным уравнением

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \tag{22}$$

Его решениями будут псевдоевклидовы полуокружности

$$z = \sqrt{x^2 + a^2} + \mathrm{const}. \tag{23}$$

Поверхность M в этом случае будет полусферой мнимого радиуса $a \cdot i$, $i^2 = -1$.

Ортогональные траектории семейства кривых, задаваемых уравнением (22), будут определяться из уравнения

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}. \tag{24}$$

Интегрируя его, получим:

$$z = \sqrt{x^2 + a^2} - a \cdot \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \mathrm{const}. \tag{25}$$

Решения будут времениподобными кривыми, обладающими постоянным отрезком касательной до времениподобной прямой, в данном случае, до самой оси Oz. На рис. 1 $x^1 = z$, $x^2 = x$, то есть база этой псевдоевклидовой трактрисы (ось Oz) расположена горизонтально.

Эта ось является общей асимптотой всех кривых ортогонального семейства. Кроме того, каждая кривая имеет еще изотропную асимптоту. Поверхность M' при этом будет воронкой де Ситтера—Широкова (см. [1, 2]), впервые рассмотренной П. А. Широковым в студенческой работе в 1917 г., тогда же рекомендованной к публикации, но вышедшей только в 1966 г. в сборнике избранных работ [6]. П. А. Широков строил поверхность из псевдосферы Бельтрами—Миндинга, придавая радиусам орбит чисто мнимые значения. Полученная поверхность локально несет на себе геометрию так называемой идеальной области плоскости Лобачевского, реализуемой вне

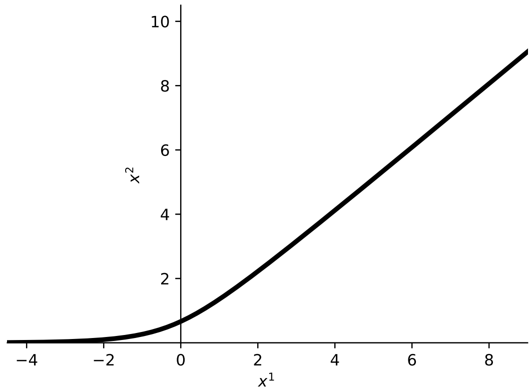

Рис. 1. Псевдоевклидова трактриса, у которой база и касательная являются прямыми одного типа.

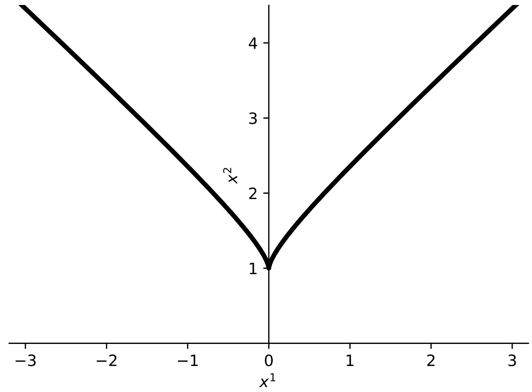

Рис. 2. Псевдоевклидова трактриса, у которой база и касательная являются прямыми разных типов.

абсолюта на проективной модели плоскости Лобачевского (см. [5]). Эта геометрия локально совпадает с двумерной геометрией де Ситтера. Глобально воронка де Ситтера—Широкова изометрична факторпространству идеальной области плоскости Лобачевского по действию дискретной группы орициклических вращений. Образующей этой группы является орициклическое вращение, совмещающее пару параллельных прямых идеальной области, то есть прямых с общей точкой на абсолюте. П. А. Широков формально не вкладывал поверхность в псевдоевклидово пространство. Его подход эквивалентен введению в пространстве индефинитной метрики

$$ds^2 = -(dx)^2 - (dy)^2 + (dz)^2. \tag{26}$$

Вследствие этого индуцированная на поверхности метрика и ее кривизна отличаются от метрики и кривизны рассмотренной в данной работе поверхности знаком. Это только формальное отличие, сводящееся к замене вещественных длин чисто мнимыми и наоборот. Впервые же модель двумерного пространства с индефинитной метрикой постоянной кривизны рассмотрел, по всей видимости, Гессе в [12].

Зададим семейство меридианов поверхностей вращения следующим образом:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \tag{27}$$

Решениями этого уравнения будут времениподобные кривые

$$z = \sqrt{x^2 - a^2} + \mathrm{const}. \tag{28}$$

Эти кривые являются псевдоевклидовыми окружностями вещественного радиуса a (точнее, их частями). Поверхность вращения M будет полусферой вещественного радиуса (если в правых частях уравнений (27), (28) поставить $\pm$ — то сферой вещественного радиуса). Ортогональные траектории семейства кривых (27), (28) будут иметь следующий вид:

$$z = \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + \mathrm{const}. \tag{29}$$

Эти кривые будут пространственноподобными, обладающими постоянным вещественным отрезком касательной до времениподобной оси OZ. На рис. 2 изображены две ветви такой псевдоевклидовой трактрисы. Каждая ветвь имеет изотропную асимптоту. Ось вращения, как и на рис. 1, расположена горизонтально, то есть здесь также $x^1 = z$, $x^2 = x$.

Кривизна поверхности M будет постоянной и положительной, а именно, $K = 1/a^2$; кривизна поверхности M' будет равна $K = -1/a^2$. Сама поверхность M' будет продолжением за ребро возврата псевдосферы Бельтрами—Миндинга. В трехмерном пространстве Лобачевского эту поверхность можно интерпретировать следующим образом. У касательного конуса к орисфере удалим вершину на абсолют (см. [13]). Часть конуса до линии касания с орисферой будет изометрична одной полости псевдосферы Бельтрами—Миндинга, часть конуса после линии касания будет изометрична рассматриваемой поверхности. Изометрические вложения класса C^∞ «полной» псевдосферы в восьмимерное сферическое пространство и семимерное евклидово пространство построил Д. Блануша (см. [10, 11]). Продолжение «полной псевдосферы» (т.е. конуса с вершиной на абсолюте расширенного трехмерного гиперболического пространства, или, что тоже самое, поверхности вращения прямой вокруг параллельной ей прямой) за абсолют является воронкой де Ситтера—Широкова. С касательными конусами к орисферам связаны и другие поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны.

5. Примеры поверхностей, полученных гиперболическим вращением. Аналогично теоремам 1 и 2 доказывается следующее утверждение, формулировка которого отличается от теоремы 2 только заменой времениподобной оси вращения на пространственноподобную. Как следствие, орбиты точек при вращении станут незамкнутыми.

Теорема 3. *Пусть дано семейство S поверхностей вращения, получающихся из одной поверхности вращения M параллельными переносами вдоль пространственноподобной оси вращения. Пусть касательные плоскости к поверхности M либо все евклидовы, либо все псевдоевклидовы. Если поверхность M' ортогонально пересекает все поверхности семейства S, то кривизна поверхности M' в каждой точке пересечения ее с любой поверхностью семейства S совпадает по абсолютной величине с кривизной пересекаемой поверхности и противоположна ей по знаку.*

В плоскости Oxz меридианы поверхностей вращения с осью Ox зададим следующим образом:

$$x = \sqrt{z^2 + a^2} - a \cdot \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{a} + \text{const}. \tag{30}$$

Эти меридианы, как и меридианы воронки де Ситтера—Широкова, имеют постоянный отрезок касательной до оси вращения, только в данном случае этот отрезок имеет вещественную длину a. Изображение этой псевдоевклидовой трактрисы то же, что и на рис. 1, только теперь $x^1 = x$, $x^2 = z$. Поверхности семейства S, полученные гиперболическими вращениями меридианов, глобально изометричны плоскости Лобачевского кривизны $K = -1/a^2$. Орбиты точек во внутренней геометрии поверхности являются орициклами. Поверхности, ортогонально пересекающие поверхности семейства S, являются частями сфер вещественного радиуса, центры которых расположены на оси Ox.

Зададим теперь в плоскости Oxz семейство меридианов поверхностей вращения с осью Ox следующим образом:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \tag{31}$$

Гиперболические вращения этих кривых образуют семейство сфер мнимого радиуса с центрами на оси Ox. Ортогональные траектории семейства (31) обладают постоянным отрезком касательной $a \cdot i$ до пространственноподобной оси Ox. На рис. 2 теперь $x^1 = x$, $x^2 = z$. Поверхность, полученная гиперболическим вращением такой кривой, является еще одним псевдоевклидовым аналогом псевдосферы: бабочкой де Ситтера—Широкова. Одна полость такой поверхности изометрична части идеальной области плоскости Лобачевского, заключенной между орициклом и абсолютом. Орбиты всех точек при вращении будут во внутренней геометрии поверхности орициклами. Винтовые движения псевдоевклидовых аналогов трактрисы в пространстве Минковского рассмотрены в [3].

6. Пример ортогональных семейств поверхностей, полученных изотропным вращением. Рассмотрим на вещественно-комплексной евклидовой плоскости с декартовой системой координат Oxy окружность $x^2 + y^2 = 1$ и пару мнимых изотропных прямых $x \pm i \cdot y = 0$. Формально определенная длина отрезка касательной к окружности до этих прямых будет постоянной. Замена $y \to y \cdot i$ даст вещественную интерпретацию этого свойства: псевдоевклидова окружность

$x^2 - y^2 = 1$ в метрике $ds^2 = dx^2 - dy^2$ обладает постоянным отрезком касательной до изотропных прямых $x \mp y = 0$, проходящих через ее центр. Аналогичное свойство, очевидно, выполняется и для окружности мнимого радиуса. Отсюда и из того факта, что касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, вытекает, что для семейства псевдоевклидовых окружностей фиксированного радиуса с центрами на изотропной прямой ортогональными траекториями будут тоже псевдоевклидовы окружности другого типа, радиусы которых по модулю равны радиусам окружностей исходного семейства. Изотропные вращения кривых дают сферы вещественного и мнимого радиуса трехмерного псевдоевклидова пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Костин А. В.* Об асимптотических линиях на псевдосферических поверхностях// Владикавказ. мат. ж. — 2019. — *21*, № 1. — С. 16–26.
2. *Костин А. В.* Эволюты меридианов и асимптотические на псевдосферах// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *169*. — С. 24–31.
3. *Костин А. В.* О геликоидах Дини в пространстве Минковского// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *180*. — С. 50–57.
4. *Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. — олгоград: Изд-во ВолГУ, 2011.
5. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
6. *Широков П. А.* Интерпретация и метрика квадратичных геометрий// в кн.: Избранные работы по геометрии. — Казань, 1966. — С. 15–179.
7. *Barros M., Caballero M., Ortega M.* Rotational surfaces in $\mathbb{L}^3$ and solutions of the nonlinear sigma model// Commun. Math. Phys. — 2009. — *290*, № 2. — P. 437–477.
8. *Beltrami E.* Intorno ad alcune proprietà delle superficie rivoluzione// Ann. Mat. Pura Appl. Ser. I. — 1864. — *VI*. — P. 171–179.
9. *Beltrami E.* Saggio di interpretrazione della geometria non-Euklidea// Giorn. Mat. — 1868. — *VI*. — P. 284–322.
10. *Blanusha D.* C^∞-Isometric imbeddings of the hyperbolic plane and of cylinders with hyperbolic metric in spherical spaces// Ann. Math. Pura Appl. — 1962. — *57*. — P. 321–337.
11. *Blanusha D.* C^∞-Isometric imbeddings of cylinders with hyperbolic metric in Euclidean 7-space// Glas. Mat.-Fiz. Astron. — 1956. — *11*, № 3-4. — P. 243–246.
12. *Hesse L. O.* Über ein Übertragungsprinzip// J. Reine Angew. Math. — 1866. — *66*. — P. 15–21.
13. *Kostin A. V.* Some generalization of the shadow problem in the Lobachevsky space// Ukr. Math. J. — 2021. — *73*, № 1. — P. 61–68.
14. *Lopez R.* Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz–Minkowski space// Int. Electron. J. Geom. — 2014. — *7*, № 1. — P. 44–107.
15. *Minding F.* Ueber die Biegung krummer Flächen// J. Reine Angew. Math. — 1838. — *18*. — P. 365–368.
16. *Minding F.* Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse// J. Reine Angew. Math. — 1839. — *19*. — P. 370–387.
17. *Minding F.* Beiträge zur Theorie der kürzerten Linien auf krummen Flächen// J. Reine Angew. Math. — 1840. — *20*. — P. 323–327.

Костин Андрей Викторович
Елабужский институт Казанского федерального университета
E-mail: kostin_andrei@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 81–94
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-81-94

УДК 517.9; 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ГЛАДКОГО КОНЕЧНОМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ. II. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К n-МЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Статья является второй частью работы об интегрируемости общих классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким n-мерным многообразиям. Первая часть работы: Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении к гладкому n-мерному многообразию// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — Т. 214. — С. 82–106.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF SMOOTH FINITE-DIMENSIONAL MANIFOLDS. II. EQUATIONS OF MOTION ON THE TANGENT BUNDLE OF AN n-DIMENSIONAL MANIFOLD IN A POTENTIAL FORCE FIELD

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. This paper is the second part of the work on the integrability of general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on the tangent bundles of n-dimensional manifolds. The first part of the paper is: Integrable homogeneous dynamical systems with dissipation on the tangent bundles of smooth finite-dimensional manifolds. I. Equations of geodesics on the tangent bundle of a smooth n-dimensional manifold// Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **214** (2022), pp. 82–106.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

2. Уравнения движения на касательном расслоении к n-мерному многообразию в потенциальном силовом поле

2.1. Приведенная система. Случай I. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в виде (**??**) (случай I). Уравнения (**??**) примут вид (**??**). Уравнения геодезических (**??**) после соответствующего выбора кинематических соотношений (**??**) почти всюду эквивалентны составной системе (**??**), (**??**) на многообразии $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ (более общие утверждения см. в [7, 8, 41, 46, 70]).

В общем случае кинематические соотношения (**??**) (с $n(n-1)/2$ «произвольными» функциями $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до $n^2(n+1)/2$ различных коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Несколько модифицировав систему (**??**), (**??**), получим систему *консервативную*. В отличие от системы (**??**)) наличие силового поля характеризуется гладким коэффициентом $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (2.1). В данном случае вводится внешнее гладкое силовое поле $\tilde{F}(z_n,\ldots,z_1;\alpha)=(0,\ldots,0,F(\alpha))$, направленное вдоль оси $\dot z_n$.

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\dot\alpha=-z_n, \tag{2.1a}$$

$$\begin{aligned}\dot z_n={}&F(\alpha)+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_{n-1}^2+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_2^2+\ldots+\\&+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned}\tag{2.1b}$$

$$\begin{aligned}\dot z_{n-1}={}&\Big[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2-\ldots-\\&-\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned}\tag{2.1c}$$

. . . .

$$\begin{aligned}\dot z_2={}&\Big[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)+Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2z_n-f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)+Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2z_{n-1}-\ldots-\\&-f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)+Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2z_3-\\&-\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned}\tag{2.1d}$$

$$\begin{aligned}\dot z_1={}&\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1z_n-f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]z_1z_{n-1}-\\&-f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta)+Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]z_1z_{n-2}-\ldots-\\&-f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\Big]z_1z_2,\end{aligned}\tag{2.1e}$$

$$\dot\beta_1=z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{2.1f}$$

$$\dot\beta_2=z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{2.1g}$$

$$\dot\beta_3=z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{2.1h}$$

. . . . ,

$$\dot\beta_{n-1}=z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{2.1i}$$

Система (2.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha+F(\alpha)+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\ldots+\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2=0, \tag{2.2a}$$

$$\ddot\beta_1+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2+\ldots+\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2=0, \tag{2.2b}$$

$$\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{2.2c}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \\ + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\end{gathered} \tag{2.2d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots + \\ + \Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\end{gathered} \tag{2.2e}$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0. \tag{2.2f}$$

2.2. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай I.

Предложение 2.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств* (**??**), *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_1(z_n,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad V(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da. \tag{2.3}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (2.3) в силу системы (2.1) дает

$$\begin{gathered}2F(\alpha)z_n + 2\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\Big] z_{n-1}^2 z_n + \ldots + \\ + 2\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha) + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Big] z_1^2 z_n + \\ - 2\left[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\Big] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right] \frac{z_{n-2}^2 z_{n-1}}{f_1(\alpha)} - \ldots - \\ - 2\left[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big] + \right. \\ \left. + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\right] \frac{z_1^2 z_{n-1}}{f_1(\alpha)} - \ldots - \\ - 2\left[f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big] + \right. \\ \left. + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\right] \times \\ \times \frac{z_1^2 z_2}{f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})} - 2F(\alpha)z_n \equiv 0,\end{gathered}$$

поскольку выполнена система $n(n-1)/2$ дифференциальных равенств (**??**). □

Предложение 2.2. *Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.1) при условиях предложения **??** дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_n\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 2.3. *Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.1) при условиях предложения **??** дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\,\Psi_1(\beta_1)-$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\}z_{n-1}f(\alpha)\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\,\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$

что и доказывает предложение. □

В дальнейшем также было бы логично доказать аналогичное предложение и по условиям существования гладкого первого интеграла вида

$$\Phi_4(z_{n-3},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)=C_4=\mathrm{const},$$

получив предложение с номером 2.3+1 и т. д. Но мы по предположению индукции опустим некоторое конечное число таких шагов, изменив номер следующего предложения на лишь единицу, получив предложение 2.4. Поэтому далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 2.4. *Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.1) при рассматриваемых условиях дает

$$z_1z_n\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+$$
$$+z_1z_{n-1}f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+\ldots+$$
$$+z_1z_2f(\alpha)g(\beta_1)\ldots r(\beta_{n-3})\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-3}(\beta_{n-3})\times$$
$$\times\left[(-1)^n\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+\frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})+(-1)^{n+1}\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ …, $\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}}=\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+\frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}),$$

что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 2.1. Если выполнена группа $n(n-1)/2$ дифференциальных равенств (**??**), а также $n-1$ групп условий (**??**), (**??**), …, (**??**), то выполнены равенства

$$\begin{gathered}
\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{11}(\alpha),\quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1),\quad \ldots,\\
\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\\
\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1),\quad \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),\quad \ldots,\\
\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2});
\end{gathered}$$

следовательно, в системе (2.1) появляется независимая подсистема порядка $2n-1$, состоящая из первых $2n-1$ уравнений (уравнение для $\dot\beta_{n-1}$ отделяется):

$$\dot\alpha=-z_n, \tag{2.4a}$$

$$\begin{aligned}
\dot z_n=F(\alpha)&+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_{n-1}^2+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2+\ldots+\\
&+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned}\tag{2.4b}$$

$$\begin{aligned}
\dot z_{n-1}=\Big[2\Gamma_1(\alpha)+Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n&-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1)z_{n-2}^2-\ldots-\\
&-\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned}\tag{2.4c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}
\dot z_2=\Big[2\Gamma_1(\alpha)+Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2z_n&-f_1(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2z_{n-1}-\ldots-\\
&-f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})+Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2z_3-\\
&-\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned}\tag{2.4d}$$

$$\begin{aligned}
\dot z_1=\Big[2\Gamma_1(\alpha)+Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1z_n&-f_1(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]z_1z_{n-1}-\\
&-f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma_3(\beta_2)+Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]z_1z_{n-2}-\ldots-\\
&-f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+Di_1(\beta_{n-2})\Big]z_1z_2,
\end{aligned}\tag{2.4e}$$

$$\dot\beta_1=z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{2.4f}$$

$$\dot\beta_2=z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{2.4g}$$

$$\dot\beta_3=z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{2.4h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\dot\beta_{n-2}=z_2f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{2.4i}$$

$$\dot\beta_{n-1}=z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{2.5}$$

Предложение 2.5. *Если выполнены условия предложений* 2.2, 2.3, …, 2.4, *то система* (2.4), (2.5) *имеет первый интеграл вида* (**??**), *где после взятия интеграла вместо постоянных* C_{n-1}, C_n *можно формально подставить левые части соответствующих первых интегралов.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 2.2, 2.3, …, 2.4, то, система (2.4), (2.5) обладает первыми интегралами (**??**), (**??**), …, (**??**), количество которых равно $n-1$. Нам понадобятся лишь два последних первых интеграла. Рассмотрим два уровня C_{n-1} и C_n соответствующих первых интегралов. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_n}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - C_n^2}}. \tag{2.6}$$

Угол β_{n-1} будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (2.4), (2.5):

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{z_1}{z_2}i(\beta_{n-2}).$$

Используя в этом уравнении равенство (2.6), получим требуемое утверждение. □

Прямым следствием предложений 2.1, …, 2.5 является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия предложений* 2.1, …, 2.4, *то система* (2.4), (2.5) *обладает полным набором независимых первых интегралов вида* (2.3), (**??**), (**??**), …, (**??**), (**??**), *количество которых равно* $n+1$.

Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет доказан ниже.

2.3. Приведенная система. Случай II. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в виде (**??**) (случай II). Уравнения (**??**) примут вид (**??**). Уравнения геодезических (**??**) после соответствующего выбора кинематических соотношений (**??**) почти всюду эквивалентны составной системе (**??**), (**??**) на многообразии $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ (более общие утверждения см. в [54, 56, 60, 72]).

В общем случае кинематические соотношения (**??**) (с $n(n-1)/2+1$ «произвольными» функциями $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$) не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до $n^2(n+1)/2+1$ различных коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Несколько модифицировав систему (**??**), (**??**), получим систему *консервативную.* Именно, введем гладкое (внешнее) силовое поле (в отличие от системы (**??**))

$$\tilde F(z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}) \\ F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}) \\ \vdots \\ F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_n(\alpha)f_n(\alpha) \end{pmatrix}$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ примет следующий вид:

$$\dot\alpha = z_nf_n(\alpha), \tag{2.7a}$$

$$\begin{aligned}\dot z_n = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f_n(\alpha)\Big[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+Df_n(\alpha)\Big]z_n^2 -&\\ -\frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_{n-1}^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots -&\\ -\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,&\end{aligned} \tag{2.7b}$$

$$\begin{aligned}\dot z_{n-1} = F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n -&\\ -\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots -&\\ -\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,&\end{aligned} \tag{2.7c}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned}
\dot z_2 = F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\dots r_1(\beta_{n-3})-\\
- f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)+Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2z_n-\\
- f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)+Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2z_{n-1}-\dots-\\
- f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\dots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)+Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2z_3-\\
- \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\dots\frac{r^2_2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z^2_1,
\end{aligned}\tag{2.7d}$$

$$\begin{aligned}
\dot z_1 = F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\dots i_1(\beta_{n-2})-\\
- f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1z_n-\\
- f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]z_1z_{n-1}-\\
- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta)+Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]z_1z_{n-2}-\dots-\\
- f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\dots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\Big]z_1z_2,
\end{aligned}\tag{2.7e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha),\tag{2.7f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\tag{2.7g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2),\tag{2.7h}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\tag{2.7i}$$

$$\dot\beta_{n-1} = z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\dots i_1(\beta_{n-2}).\tag{2.7j}$$

Система (2.7) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha - F_n(\alpha)f^2_n(\alpha)+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_1+\dots+\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1}=0,\tag{2.8a}$$

$$\ddot\beta_1 - F_{n-1}(\beta_1)f^2_1(\alpha)+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_2+\dots+\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1}=0,\tag{2.8b}$$

$$\begin{aligned}
\ddot\beta_2 - F_{n-2}(\beta_2)f^2_2(\alpha)g^2_1(\beta_1)+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2+\\
+\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_3+\dots+\Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1}=0,
\end{aligned}\tag{2.8c}$$

$$\begin{aligned}
\ddot\beta_3 - F_{n-3}(\beta_3)f^2_3(\alpha)g^2_2(\beta_1)h^2_1(\beta_2)+2\Gamma^3_{\alpha3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3+2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3+2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3+\\
+\Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_4+\dots+\Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1}=0,
\end{aligned}\tag{2.8d}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\begin{aligned}
\ddot\beta_{n-2} - F_2(\beta_{n-2})f^2_{n-2}(\alpha)g^2_{n-3}(\beta_1)h^2_{n-4}(\beta_2)\dots r^2_1(\beta_{n-3})+\\
+2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-2}+2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}+\dots+\\
+\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1}=0,
\end{aligned}\tag{2.8e}$$

$$\begin{aligned}
\ddot\beta_{n-1} - F_1(\beta_{n-1})f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\dots i^2_1(\beta_{n-2})+2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-1}+\\
+2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1}+\dots+\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1}=0.
\end{aligned}\tag{2.8f}$$

2.4. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай II.

Предложение 2.6. *Если всюду на области определения справедлива система $n(n-1)/2+1$ дифференциальных равенств* (**??**), *то система* (2.7) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_1(z_n,\dots,z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-1}) = z^2_1+\dots+z^2_n+V(\alpha,\beta)=C_1=\mathrm{const},\tag{2.9}$$

$$V(\alpha,\beta)=V_n(\alpha)+\sum_{k=1}^{n-1}V_{n-k}(\beta_k)=-2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F_n(a)da-2\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\beta_{k,0}}^{\beta_k}F_{n-k}(b)db.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (2.9) в силу системы (2.7) дает

$$\begin{gathered}
2z_nF_n(\alpha)f_n(\alpha)+2z_{n-1}F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha)+2z_{n-2}F_{n-2}(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1)+\\
+2z_{n-3}F_{n-3}(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2)+\ldots+2z_2F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})+\\
+2z_1F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2})-2f_n(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_n(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_n^3-\\
-2\left[f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)\Big]+f_1^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_{n-1}^2z_n}{f_n(\alpha)}-\ldots-\\
-2\left[f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)\Big]+\right.\\
\left.+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_n}{f_n(\alpha)}-\\
-2\left[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)\Big]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_{n-2}^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\ldots-\\
-2\left[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]+\right.\\
\left.+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\ldots-\\
-2\left[f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\right]+\right.\\
\left.+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\right]\times\\
\times\frac{z_1^2z_2}{f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})}-\\
-2z_nF_n(\alpha)f_n(\alpha)-2z_{n-1}F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha)-2z_{n-2}F_{n-2}(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1)-\\
-2z_{n-3}F_{n-3}(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2)-\ldots-\\
-2z_2F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})-\\
-2z_1F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2})\equiv 0,
\end{gathered}$$

поскольку выполнена система $n(n-1)/2+1$ дифференциальных равенств (**??**). □

Следующие утверждения справедливы в более общем виде, но мы ограничимся следующими.

Предложение 2.7. *Пусть $F_{n-k}(\beta_k)\equiv 0$, $k=1,\ldots,n-1$. Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.7) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.7) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_n(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 2.8. *Пусть $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 2, \ldots, n-1$. Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.7) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.7) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_n(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_n\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\,\Psi_1(\beta_1) -$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\} z_{n-1} f(\alpha)\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\,\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$

что и доказывает предложение. □

В дальнейшем было бы логично доказать аналогичное предложение и по условиям существования гладкого первого интеграла вида

$$\Phi_4(z_{n-3}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const},$$

получив предложение с номером 2.8+1 и т. д. Но мы по предположению индукции опустим некоторое конечное число таких шагов, изменив номер следующего предложения на лишь единицу и получим предложение 2.9. Поэтому далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 2.9. *Пусть $F_1(\beta_{n-1}) \equiv 0$. Если выполнены условия предложения* **??**, *то система* (2.7) *имеет гладкий первый интеграл вида* (**??**).

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (**??**) в силу системы (2.7) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_n(\alpha)z_1z_n\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right] +$$
$$+ z_1z_{n-1}f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) + \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right] +$$
$$\ldots + z_1z_2f(\alpha)g(\beta_1)\ldots r(\beta_{n-3})\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-3}(\beta_{n-3})\times$$
$$\times\left[(-1)^n\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) + (-1)^{n+1}\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ …, $\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}} = \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}),$$

что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 2.2. Пусть $F_1(\beta_{n-1}) \equiv F_1^0 = \mathrm{const}$. Если выполнена группа $n(n-1)/2+1$ дифференциальных равенств (??), а также $n-1$ групп условий (??), (??), ..., (??), то выполнены равенства

$$\begin{gathered}
\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) = \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha), \quad \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) = \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta_1), \quad \ldots, \\
\Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta) = \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \\
\Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta) = \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta_1), \quad \Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta) = \Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta_1,\beta_2), \quad \ldots, \\
\Gamma_{n-1,n-1}^{1}(\alpha,\beta) = \Gamma_{n-1,n-1}^{1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta) = \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2});
\end{gathered}$$

следовательно, в системе (2.7) появляется независимая подсистема порядка $2n-1$, состоящая из первых $2n-1$ уравнений (уравнение для $\dot\beta_{n-1}$ отделяется):

$$\dot\alpha = z_n f_n(\alpha), \tag{2.10a}$$

$$\begin{aligned}
\dot z_n = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha)z_{n-1}^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta_1)z_2^2 - \ldots - \\
- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned} \tag{2.10b}$$

$$\begin{aligned}
\dot z_{n-1} = F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta_1)z_{n-2}^2 - \ldots - \\
- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1,n-1}^{1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned} \tag{2.10c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\begin{aligned}
\dot z_2 = F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}) - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2 z_n - \\
- f_1(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2 z_{n-1} - \ldots - \\
- f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2 z_3 - \\
- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned} \tag{2.10d}$$

$$\begin{aligned}
\dot z_1 = F_1^0 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}) - f_n(\alpha)\Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1 z_n - \\
- f_1(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]z_1 z_{n-1} - \\
- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]z_1 z_{n-2} - \ldots - \\
- f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di_1(\beta_{n-2})\Big]z_1 z_2,
\end{aligned} \tag{2.10e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{2.10f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{2.10g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{2.10h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\dot{\beta}_{n-2} = z_2 f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{2.10i}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{2.11}$$

Предложение 2.10. *Пусть* $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. *Если выполнены условия предложений* **??**, **??**, ..., **??**, *то система* (2.10), (2.11) *имеет первый интеграл вида* (**??**), *где после взятия интеграла вместо постоянных* C_{n-1}, C_n *можно формально подставить левые части соответствующих первых интегралов.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений **??**, **??**, ..., **??**, то, система (2.10), (2.11) обладает первыми интегралами (**??**), (**??**), ..., (**??**), количество которых равно $n-1$. Нам понадобятся лишь два последних первых интеграла. Рассмотрим два уровня C_{n-1} и C_n соответствующих первых интегралов. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_n}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - C_n^2}}. \tag{2.12}$$

Угол β_{n-1} будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (2.10), (2.11):

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{z_1}{z_2} i(\beta_{n-2}).$$

Используя в этом уравнении равенство (2.12), получим требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 2.6, ..., 2.10 является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия предложений* 2.6, ..., 2.9, *то система* (2.10), (2.11) *обладает полным набором независимых первых интегралов вида* (2.9), (**??**), (**??**), ..., (**??**), (**??**), *количество которых равно* $n+1$.

Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показан ниже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
2. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
3. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
6. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
11. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.

14. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы теории колебаний. — М.: Наука, 1988.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.

41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле// Докл. РАН. — 2015. — *460*, № 2. — С. 165–169.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
54. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
55. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
56. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2016. — *470*, № 3. — С. 288–292.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
63. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.

67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
70. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
71. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
72. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
73. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.
74. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959.* — 080001.
75. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
76. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 95–128
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-95-128

УДК 512.7

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ, КВАНТОВАНИЕ И ЗАДАЧИ ВОКРУГ ГИПОТЕЗЫ ЯКОБИАНА. III. АВТОМОРФИЗМЫ, ТОПОЛОГИЯ ПОПОЛНЕНИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ

© 2022 г. **А. М. ЕЛИШЕВ, А. Я. КАНЕЛЬ-БЕЛОВ, Ф. РАЗАВИНИЯ, Ц.-Т. ЮЙ, В. ЧЖАН**

Посвящается памяти Евгения Соломоновича Голода

Аннотация. Работа является третьей частью обзора результатов, касающихся квантового подхода к некоторым классическим аспектам некоммутативных алгебр. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *213.* — С. 110–144. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *214.* — С. 107–126. Продолжение будет опубликовано в следующих выпусках.

***Ключевые слова*:** автоморфизм, квантование, гипотеза о Якобиане.

POLYNOMIAL AUTOMORPHISMS, QUANTIZATION, AND JACOBIAN CONJECTURE RELATED PROBLEMS. III. AUTOMORPHISMS, AUGMENTATION TOPOLOGY, AND APPROXIMATION

© 2022 **A. M. ELISHEV, A. Ya. KANEL-BELOV, F. RAZAVINIA, J.-T. YU, W. ZHANG**

Abstract. This paper is the third part of a review of results concerning the quantization approach to the some classical aspects of noncommutative algebras. The first part is: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **213** (2022), pp. 110–144. The second part is: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **214** (2022), pp. 107–126. Continuation will be published in future issues.

***Keywords and phrases*:** automorphism, quantization, Jacobian conjecture.

***AMS Subject Classification*:** 14R10, 18G85

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00177).

CONTENTS

Chapter 3. Automorphisms, augmentation topology, and approximation 96
3.1. Introduction and Main Results 96
3.2. Varieties of Automorphisms 100
3.3. Jacobian Conjecture in Any Characteristic, Kanel-Belov–Kontsevich Conjecture, and Approximation 101
3.4. Automorphisms of the Polynomial Algebra and the Bodnarchuk–Rips Approach 107
3.5. The Bodnarchuk–Rips Approach to Automorphisms of $\mathrm{TAut}(K\langle x_1, \dots, x_n\rangle)$ $(n > 2)$ . . . 111
3.6. Some Open Questions Concerning the Tame Automorphism Group 120
References 120

Chapter 3

AUTOMORPHISMS, AUGMENTATION TOPOLOGY, AND APPROXIMATION

3.1. Introduction and Main Results

This chapter is dedicated to the review of results of Kanel-Belov, Yu and Elishev on the geometry of the Ind-schemes $\operatorname{Aut}\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ and $\operatorname{Aut}\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ of automorphisms of the polynomial algebra and the free associative algebra over an algebraically closed field, with the number of generators > 2. The inner character of Ind automorphisms of these Ind-schemes, together with the negative resolution of the automorphism group lifting problem, was established in [123].

3.1.1. Automorphisms of $K[x_1, \dots, x_n]$ and $K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Let K be a field. The main objects of this study are the K-algebra automorphism groups $\operatorname{Aut} K[x_1, \dots, x_n]$ and $\operatorname{Aut} K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ of the (commutative) polynomial algebra and the free associative algebra with n generators, respectively. The former is equivalent to the group of all polynomial one-to-one mappings of the affine space $\mathbb{A}^n_K$. Both groups admit a representation as a colimit of algebraic sets of automorphisms filtered by total degree (with morphisms in the direct system given by closed embeddings) which turns them into topological spaces with Zariski topology compatible with the group structure. The two groups carry a power series topology as well, since every automorphism φ may be identified with the n-tuple $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ of the images of generators. This topology plays an especially important role in the applications, and it turns out—as reflected in the main results of this study—that approximation properties arising from this topology agree well with properties of combinatorial nature.

Ind-Groups of polynomial automorphisms play a central part in the study of the Jacobian conjecture of O. Keller as well as a number of problems of similar nature. One outstanding example is provided by a recent conjecture of Kanel-Belov and Kontsevich (BKK conjecture; see [41, 42], which asks whether the group

$$\mathrm{Sympl}(\mathbb{C}^{2n}) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{2n}])$$

of complex polynomial automorphisms preserving the standard Poisson bracket

$$\{x_i,\ x_j\} = \delta_{i,n+j} - \delta_{i+n,j}$$

is isomorphic[1] to the group of automorphisms of the nth Weyl algebra W_n

$$W_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\big\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\big\rangle / I,$$
$$I = \big(x_i x_j - x_j x_i,\ y_i y_j - y_j y_i,\ y_i x_j - x_j y_i - \delta_{ij}\big).$$

[1]In fact, the conjecture seeks to establish an isomorphism $\mathrm{Sympl}(K^{2n}) \simeq \mathrm{Aut}(W_n(K))$ for any field K of characteristic zero in a functorial manner.

The physical meaning of the Kanel-Belov–Kontsevich conjecture is the invariance of the polynomial symplectomorphism group of the phase space under the procedure of deformation quantization.

The BKK conjecture was conceived during a successful search for a proof of stable equivalence of the Jacobian conjecture and a well-known conjecture of Dixmier stating that $\mathrm{Aut}(W_n) = \mathrm{End}(W_n)$ over any field of characteristic zero. In the papers [41,42], a particular family of homomorphisms (in effect, monomorphisms) $\mathrm{Aut}(W_n(\mathbb{C})) \to \mathrm{Sympl}(\mathbb{C}^{2n})$ was constructed, and a natural question whether those homomorphisms were in fact isomorphisms was raised. The aforementioned morphisms, independently studied by Tsuchimoto to the same end, were in actuality defined as restrictions of morphisms of the saturated model of Weyl algebra over an algebraically closed field of *positive* characteristic—an object which contains $W_n(\mathbb{C})$ as a proper subalgebra. One of the defined morphisms turned out to have a particularly simple form over the subgroup of the so-called tame automorphisms, and it was natural to assume that morphism was the desired BKK isomorphism (at least for the case of algebraically closed base field). Central notion of the construction is the notion of infinitely large prime number (in the sense of hyperintegers), which arises as the sequence $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ of positive characteristics of finite fields comprising the saturated model. This leads to the following natural problem (see [41]).

Problem 3.1.1. Prove that the BKK morphism is independent of the choice of the infinite prime $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

The general formulation of this question presented in [41] is as follows.

For a commutative ring R define

$$R_\infty = \varinjlim \left(\prod_p R' \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \;/\; \bigoplus_p R' \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right),$$

where the direct limit is taken over the filtered system of all finitely generated subrings $R' \subset R$ and the product and the sum are taken over all primes p. This larger ring possesses a unique "nonstandard Frobenius" endomorphism

$$\mathrm{Fr} : R_\infty \to R_\infty, \quad (a_p)_{\text{primes } p} \mapsto (a_p^p)_{\text{primes } p}.$$

The Kanel-Belov–Kontsevich construction returns a morphism

$$\psi_R : \mathrm{Aut}(W_n(R)) \to \mathrm{Sympl}\, R_\infty^{2n}$$

such that there exists a unique homomorphism

$$\phi_R : \mathrm{Aut}(W_n)(R) \to \mathrm{Aut}(P_n)(R_\infty)$$

satisfying the condition $\psi_R = \mathrm{Fr}_* \circ \phi_R$, where $\mathrm{Fr}_* : \mathrm{Aut}(P_n)(R_\infty) \to \mathrm{Aut}(P_n)(R_\infty)$ is the Ind-group homomorphism induced by the Frobenius endomorphism of the coefficient ring and P_n is the commutative Poisson algebra, i.e., the polynomial algebra in $2n$ variables equipped with additional Poisson structure (so that $\mathrm{Aut}(P_n(R))$ is just the group $\mathrm{Sympl}(R^{2n})$ of Poisson structure-preserving automorphisms).

Question 3.1.2. In the above formulation, does the image of ϕ_R belong to

$$\mathrm{Aut}(P_n)(i(R) \otimes \mathbb{Q}),$$

where $i : R \to R_\infty$ is the tautological inclusion? In other words, does there exist a unique homomorphism

$$\phi_R^{\mathrm{can}} : \mathrm{Aut}(P_n)(R) \to \mathrm{Aut}(P_n)(R \otimes \mathbb{Q})$$

such that $\psi_R = \mathrm{Fr}_* \circ i_* \circ \phi_R^{\mathrm{can}}$.

Comparing the two morphisms ϕ and φ defined using two different free ultrafilters, we obtain a "loop" element $\phi\varphi^{-1}$ of $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{Aut}(W_n))$ (i.e., an automorphism which preserves the structure of infinite dimensional algebraic group). Describing this group would provide a solution to this question.

In the spirit of the above we propose the following conjecture.

Conjecture 3.1.3. All automorphisms of the Ind-group $\mathrm{Sympl}(\mathbb{C}^{2n})$ are inner.

A similar conjecture may be stated for $\mathrm{Aut}(W_n(\mathbb{C}))$.

The automorphism groups of Weyl algebras and their generalizations, as well as automorphisms of certain algebras of vector fields, were studied in the works of Bavula [23–25]. Reduction to positive characteristic was proved both fruitful and essential in the context of Weyl algebra. One of the precursors to the study of these algebras in characteristic p was the paper [22].

We are focused on the investigation of the group $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(K[x_1,\dots,x_n]))$ and the corresponding noncommutative (free associative algebra) case. This way of thinking has its roots in the realm of universal algebra and universal algebraic geometry and was conceived in the pioneering work of Boris Plotkin. A more detailed discussion can be found in [39].

Wild automorphisms and the lifting problem. In 2004, the celebrated Nagata conjecture over a field K of characteristic zero was proved by Shestakov and Umirbaev (see [180, 183]) and a stronger version of the conjecture was proved by Umirbaev and Yu (see [200]). Let K be a field of characteristic zero. Every wild $K[z]$-automorphism (wild $K[z]$-coordinate) of $K[z][x,y]$ is wild viewed as a K-automorphism (K-coordinate) of $K[x,y,z]$. In particular, the Nagata automorphism $\bigl(x-2y(y^2+xz)-(y^2+xz)^2z,\ y+(y^2+xz)z, z\bigr)$ (the Nagata coordinates $x-2y(y^2+xz)-(y^2+xz)^2z$ and $y+(y^2+xz)z$) are wild. In [200], the following related question was raised.

The lifting problem. *Can an arbitrary wild automorphism* (*wild coordinate*) *of the polynomial algebra $K[x,y,z]$ over a field K be lifted to an automorphism* (*coordinate*) *of the free associative algebra $K\langle x,y,z\rangle$?*

In the paper [38] based on the degree estimate (see [137, 143]), Belov-Kanel and Yu proved that any wild z-automorphism including the Nagata automorphism cannot be lifted as a z-automorphism (moreover, it was proved in [44] that every z-automorphism of $K\langle x,y,z\rangle$ is stably tame and becomes tame after adding at most one variable). It means that if every automorphism can be lifted, then it provides an obstruction z' to z-lifting and the question to estimate such an obstruction is naturally raised.

In view of the above, we may state the following problem.

The automorphism group lifting problem. *Is* $\mathrm{Aut}(K[x_1,\dots,x_n])$ *isomorphic to a subgroup of* $\mathrm{Aut}(K\langle x_1,\dots,x_n\rangle)$ *under the natural abelianization?*

The following examples show this problem is interesting and nontrivial.

Example 3.1.4. There is a surjective homomorphism (taking the absolute value) from $\mathbb{C}^*$ onto $\mathbb{R}^+$. But $\mathbb{R}^+$ is isomorphic to the subgroup $\mathbb{R}^+$ of $\mathbb{C}^*$ under the homomorphism.

Example 3.1.5. There is a surjective homomorphism (taking the determinant) from $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ onto $\mathbb{R}^*$. But obviously $\mathbb{R}^*$ is isomorphic to the subgroup $\mathbb{R}^*I_n$ of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

In this paper we prove that the automorphism group lifting problem has a negative answer.

The lifting problem and the automorphism group lifting problem are closely related to the Kanel-Belov–Kontsevich conjecture (see Sec. 3.3.1).

Consider a symplectomorphism $\varphi: x_i \to P_i$, $y_i \to Q_i$. It can be lifted to some automorphism $\widehat{\varphi}$ of the quantized algebra $W_\hbar[[\hbar]]$:

$$\widehat{\varphi}: x_i \to P_i + P_i^1\hbar + \dots + P_i^m\hbar^m;\ y_i \to Q_i + Q_i^1\hbar + \dots + Q_i^m\hbar^m.$$

The point is to choose a lift $\widehat{\varphi}$ in such a way that the degree of all P_i^m and Q_i^m would be bounded. If this is true, then the BKK conjecture is also true.

3.1.2. Main results.

The main results of this paper are as follows.

Theorem 3.1.6. *Any* Ind*-scheme automorphism φ of* $\mathrm{NAut}(K[x_1,\dots,x_n])$ *for $n \geqslant 3$ is inner, i.e., is a conjugation via some automorphism.*

Theorem 3.1.7. *Any* Ind*-scheme automorphism φ of* $\mathrm{NAut}(K\langle x_1,\dots,x_n\rangle)$ *for $n \geqslant 3$ is semi-inner* (see Definition 3.1.11).

We denote by NAut the group of *nice* automorphisms, i.e., automorphisms that can be approximated by tame automorphisms (see Definition 3.3.2). In the case of zero characteristic, every automorphism is nice.

For the group of automorphisms of a semigroup a number of similar results on set-theoretical level was obtained previously by Kanel-Belov, Lipyanski, and Berzinsh (see [39, 43]). All these questions (including Aut(Aut) investigation) take root in the realm of Universal Algebraic Geometry and were proposed by B. Plotkin. Equivalence of two algebras having the same generalized identities and isomorphism of first order means semi-inner properties of automorphisms (for details, see [39, 43]).

Automorphisms of tame automorphism groups. Regarding the tame automorphism group, something can be done on the group- theoretic level. In the paper of H. Kraft and I. Stampfli (see [133]) the automorphism group of the tame automorphism group of the polynomial algebra was thoroughly studied. In [133], conjugation of elementary automorphisms via translations plays an important role. The results of our study are different. We describe the group $\mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}_0)$ of the group TAut_0 of tame automorphisms preserving the origin (i.e., taking the augmentation ideal onto an ideal which is a subset of the augmentation ideal). This is technically more difficult, and will be universally and systematically done for both commutative (polynomial algebra) case and noncommutative (free associative algebra) case. We observe a few problems in the shift conjugation approach for the noncommutative (free associative algebra) case, as it was for commutative case in [133]. Any evaluation on a ground field element can return zero, for example, in the Lie polynomial $[[x, y], z]$. Note that the calculations of $\mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}_0)$ (respectively, $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{TAut}_0)$ and $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{Aut}_0)$) imply also the same results for $\mathrm{Aut}(\mathrm{TAut})$ (respectively, $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{TAut})$ and $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{Aut})$) according to the approach of this article via stabilization by the torus action.

Theorem 3.1.8. *Any automorphism φ of $\mathrm{TAut}_0(K[x_1, \ldots, x_n])$ (in the group-theoretic sense) for $n \geqslant 3$ is inner, i.e. is a conjugation via some automorphism.*

Theorem 3.1.9. *The group $\mathrm{TAut}_0(K[x_1, \ldots, x_n])$ is generated by the automorphism*

$$x_1 \to x_1 + x_2x_3, \quad x_i \to x_i, \quad i \neq 1,$$

and linear substitutions if $\mathrm{char}(K) \neq 2$ and $n > 3$.

Let $G_N \subset \mathrm{TAut}(K[x_1, \ldots, x_n])$ and $E_N \subset \mathrm{TAut}(K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$ be tame automorphism subgroups preserving the Nth power of the augmentation ideal.

Theorem 3.1.10. *Any automorphism φ of G_N (in the group-theoretic sense) for $N \geqslant 3$ is inner, i.e., is given by a conjugation via some automorphism.*

Definition 3.1.11. An *anti-automorphism* Ψ of a K-algebra B is a vector-space automorphism such that $\Psi(ab) = \Psi(b)\Psi(a)$. For example, transposition of matrices is an anti-automorphism. An anti-automorphism of the free associative algebra A is a *mirror anti-automorphism* if it sends x_ix_j to x_jx_i for some fixed i and j. If a mirror anti-automorphism θ acts identical on all generators x_i, then for any monomial $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ we have

$$\theta(x_{i_1} \cdots x_{i_k}) = x_{i_k} \cdots x_{i_1}.$$

Such an anti-automorphism will be generally referred to as *the* mirror anti-automorphism.

An automorphism of $\mathrm{Aut}(A)$ is *semi-inner* if it can be expressed as a composition of an inner automorphism and a conjugation by a mirror anti-automorphism.

Theorem 3.1.12.

(a) *Any automorphisms φ of $\mathrm{TAut}_0(K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$ and also $\mathrm{TAut}(K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$ (in the group-theoretic sense) for $n \geqslant 4$ are semi-inner, i.e., are conjugations via some automorphism and/or mirror anti-automorphism.*

(b) *The same is true for E_n, $n \geqslant 4$.*

The case of $\mathrm{TAut}(K\langle x, y, z\rangle)$ is substantially more difficult. We can treat it only on Ind-scheme level, but even then it is the most technical part of the paper (see Sec. 3.5.2). For the two-variable case, a similar proposition is probably invalid.

Theorem 3.1.13.

(a) *Let* $\operatorname{char}(K) \neq 2$. *Then* $\operatorname{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\operatorname{TAut}(K\langle x,y,z\rangle))$ (*respectively,* $\operatorname{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\operatorname{TAut}_0(K\langle x,y,z\rangle))$) *is generated by conjugation by an automorphism or a mirror anti-automorphism.*

(b) *The same is true for* $\operatorname{Aut}_{\mathrm{Ind}}(E_3)$.

We denote by TAut the tame automorphism group and by $\operatorname{Aut}_{\mathrm{Ind}}$ the group of Ind-scheme automorphisms (see Sec. 3.2.2).

Approximation allows us to formulate the celebrated Jacobian conjecture for any characteristic.

Lifting of the automorphism groups. In this paper, we prove that the automorphism group of polynomial algebra over an arbitrary field K cannot be embedded into the automorphism group of free associative algebra induced by the natural abelianization.

Theorem 3.1.14. *Let K be an arbitrary field, $G = \operatorname{Aut}_0(K[x_1,\dots,x_n])$ and $n > 2$. Then G cannot be isomorphic to any subgroup H of* $\operatorname{Aut}(K\langle x_1,\dots,x_n\rangle)$ *induced by the natural abelianization. The same is true for* $\operatorname{NAut}(K[x_1,\dots,x_n])$.

3.2. Varieties of Automorphisms

3.2.1. Elementary and tame automorphisms. Let P be a polynomial that is independent of x_i with i fixed. The automorphism

$$x_i \to x_i + P, \quad x_j \to x_j \quad \text{for } i \neq j$$

is called *elementary.* The group generated by linear automorphisms and elementary ones for all possible P is called the *tame automorphism group* (or *subgroup*) TAut and elements of TAut are *tame automorphisms.*

3.2.2. Ind-Schemes and Ind-groups.

Definition 3.2.1. An Ind-*variety* M is the direct limit of algebraic varieties $M = \varinjlim\{M_1 \subseteq M_2 \cdots\}$. An Ind-*scheme* is an Ind-variety which is a group such that the group inversion is a morphism $M_i \to M_{j(i)}$ of algebraic varieties, and the group multiplication induces a morphism from $M_i \times M_j$ to $M_{k(i,j)}$. A map φ is a *morphism* of an Ind-variety M to an Ind-variety N, if $\varphi(M_i) \subseteq N_{j(i)}$ and the restriction φ to M_i is a morphism for all i. Monomorphisms, epimorphisms and isomorphisms are defined similarly in a natural way.

Example 3.2.2. M is the group of automorphisms of the affine space and M_j are the sets of all automorphisms in M with degree $\leqslant j$.

Problem 3.2.3. Investigate growth functions of Ind-varieties. For example, the dimension of varieties of polynomial automorphisms of degree $\leqslant n$.

Note that coincidence of growth functions of $\operatorname{Aut}(W_n(\mathbb{C}))$ and $\operatorname{Sympl}(\mathbb{C}^{2n})$ would imply the Kanel-Belov–Kontsevich conjecture (see [41]).

Definition 3.2.4. The ideal I generated by variables x_i is called the *augmentation ideal.* For a fixed positive integer $N > 1$, the *augmentation subgroup* H_N is the group of all automorphisms φ such that $\varphi(x_i) \equiv x_i \mod I^N$. The larger group $\hat{H}_N \supset H_N$ is the group of automorphisms whose linear part is scalar, and $\varphi(x_i) \equiv \lambda x_i \mod I^N$ (λ is independent of i). We often say an arbitrary element of the group $\hat{H}_N$ is an automorphism that is homothety modulo (the Nth power of) the augmentation ideal.

3.3. Jacobian Conjecture in Any Characteristic, Kanel-Belov–Kontsevich Conjecture, and Approximation

3.3.1. Approximation problems and Kanel-Belov–Kontsevich conjecture. Let us give formulation of the Kanel-Belov–Kontsevich conjecture:

$$\mathbf{BKKC}_n : \mathrm{Aut}(W_n) \simeq \mathrm{Sympl}(\mathbb{C}^{2n}).$$

A similar conjecture can be stated for endomorphisms:

$$\mathbf{BKKC}_n : \mathrm{End}(W_n) \simeq \mathrm{Sympl}\,\mathrm{End}(\mathbb{C}^{2n}).$$

If the Jacobian conjecture JC_{2n} is true, then the respective conjunctions over all n of the two conjectures are equivalent.

It is natural to approximate automorphisms by tame ones. There exists such an approximation up to terms of any order for polynomial automorphisms as well as Weyl algebra automorphisms, symplectomorphisms etc. However, the naive approach fails.

It is known that $\mathrm{Aut}(W_1) \equiv \mathrm{Aut}_1(K[x,y])$ where Aut_1 stands for the subgroup of automorphisms of Jacobian determinant one. However, considerations from [177] show that Lie algebra of the first group is the algebra of derivations of W_1 and thus possesses no identities apart from the ones of the free Lie algebra, another coincidence of the vector fields which diverge to zero, and has polynomial identities. These cannot be isomorphic (see [41, 42]). In other words, this group has two coordinate systems, which are relatively nonsmooth but relatively integral. One system is constructed from the coefficients of differential operators in a fixed basis of generators, while its counterpart is provided by the coefficients of polynomials, which are the images of the basis $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$.

In [177], functionals on $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ were considered in order to define the Lie-algebra structure. In the spirit of this paper, we state the following conjecture.

Conjecture 3.3.1. The natural limit of $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ is zero.

This means that the definition of the Lie algebra admits some sort of functoriality problem and it depends on the presentation of (reducible) Ind-scheme.

In his remarkable paper, Yu. Bodnarchuk established Theorem 3.1.6 by using Shafarevich's results for the tame automorphism subgroup and for the case where the Ind-scheme automorphism is regular in the sense that it sends coordinate functions to coordinate functions (see [55]). In this case, the tame approximation works (as well as for the symplectic case), and the corresponding method is similar to ours. We present it here in order to make the text more self-contained, as well as for the purpose of tackling the noncommutative (that is, the free associative algebra) case. Note that in general, for regular functions, if the Shafarevich-style approximation were valid, then the Kanel-Belov–Kontsevich conjecture would follow directly, which is impossible.

In the sequel, we do not assume regularity in the sense of [55] but only assume that the restriction of a morphism on any subvariety is a morphism again. Note that morphisms of Ind-schemes $\mathrm{Aut}(W_n) \to \mathrm{Sympl}(\mathbb{C}^{2n})$ have this property, but are not regular in the sense of Bodnarchuk (see [55]).

We use the idea of singularity which allows us to prove the augmentation subgroup structure preservation, so that the approximation works in this case.

Consider the isomorphism $\mathrm{Aut}(W_1) \cong \mathrm{Aut}_1(K[x,y])$. It has a strange property. Let us add a small parameter t. Then an element arbitrary close to zero with respect to t^k does not go to zero arbitrarily, so it is impossible to make tame limit! There is a sequence of convergent product of elementary automorphisms, which is not convergent under this isomorphism. Exactly the same situation happens for W_n. These effects cause problems in perturbative quantum field theory.

3.3.2. Jacobian conjecture in an arbitrary characteristic. Recall that the Jacobian conjecture in zero characteristic states that any polynomial endomorphism $\varphi : K^n \to K^n$ with constant Jacobian is globally invertible.

A naive attempt to directly transfer this formulation to positive characteristic fails because of the counterexample $x \mapsto x - x^p$ ($p = \mathrm{char}\,K$), whose Jacobian is everywhere 1 but which is evidently not invertible. Approximation provides a way to formulate a suitable generalization of the Jacobian conjecture to any characteristic and put it in a framework of other questions.

Definition 3.3.2. An endomorphism $\varphi \in \mathrm{End}(K[x_1, \ldots, x_n])$ is *good* if for any m, there exist $\psi_m \in \mathrm{End}(K[x_1, \ldots, x_n])$ and $\phi_m \in \mathrm{Aut}(K[x_1, \ldots, x_n])$ such that

(i) $\varphi = \psi_m \phi_m$;
(ii) $\psi_m(x_i) \equiv x_i \mod (x_1, \ldots, x_n)^m$.

An automorphism $\varphi \in \mathrm{Aut}(K[x_1, \ldots, x_n])$ is *nice* if for any m there exist $\psi_m \in \mathrm{Aut}(K[x_1, \ldots, x_n])$ and $\phi_m \in \mathrm{TAut}(K[x_1, \ldots, x_n])$ such that

(i) $\varphi = \psi_m \phi_m$;
(ii) $\psi_m(x_i) \equiv x_i \mod (x_1, \ldots, x_n)^m$, i.e. $\psi_m \in H_m$.

Anick proved (see [8]) that if $\mathrm{char}(K) = 0$, any automorphism is nice. However, this is unclear in positive characteristic.

Question 3.3.3. Is any automorphism over arbitrary field nice?

Ever good automorphism has Jacobian 1, and all such automorphisms are good—and even nice—if $\mathrm{char}(K) = 0$. This observation allows for the following question to be considered a generalization of the Jacobian conjecture to positive characteristic.

Jacobian conjecture in any characteristic: *Is any good endomorphism over arbitrary field an automorphism?*

Similar notions can be formulated for the free associative algebra. That justifies the following question.

Question 3.3.4. Is any automorphism of free associative algebra over arbitrary field nice?

Question 3.3.5 (version of free associative positive characteristic case of JC)**.** Is any good endomorphism of the free associative algebra over arbitrary field an automorphism?

3.3.3. Approximation for the automorphism group of affine spaces. Approximation is the most important tool utilized in this paper. In order to perform it, we have to prove that $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{Aut}_0(K[x_1, \ldots, x_n])$ preserves the structure of the augmentation subgroup.

The proof method utilized in theorems below works for commutative associative and free associative case. It is a problem of considerable interest to develop similar statements for automorphisms of other associative algebras, such as the commutative Poisson algebra (for which the Aut functor returns the group of polynomial symplectomorphisms); however, the situation there is somewhat more difficult.

Assume that φ is an Ind-automorphism (in either commutative of free associative case) such that it stabilizes point-wise the set T of automorphisms corresponding to the standard diagonal action of the maximal torus (in the next section we will see that this implies that φ also stabilizes every tame automorphism). The following two continuity theorems, for the commutative and the free associative cases, respectively, constitute the foundation of the approximation technique.

Theorem 3.3.6. *Let $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{Aut}_0(K[x_1, \ldots, x_n]))$ and let $H_N \subset \mathrm{Aut}_0(K[x_1, \ldots, x_n])$ be the subgroup of automorphisms which are identity modulo the ideal $(x_1, \ldots, x_n)^N$, $N > 1$. Then $\varphi(H_N) \subseteq H_N$.*

Theorem 3.3.7. *Let $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{Aut}_0(K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle))$ and let H_N be again the subgroup of automorphisms which are identity modulo the ideal $(x_1, \ldots, x_n)^N$. Then $\varphi(H_N) \subseteq H_N$.*

Corollary 3.3.8. *In both commutative and free associative cases under the assumptions above one has $\varphi = \mathrm{Id}$.*

Proof. Every automorphism can be approximated via the tame ones, i.e., for any ψ and any N there exists a tame automorphism ψ'_N such that $\psi {\psi'_N}^{-1} \in H_N$. □

Therefore, the main point is why $\varphi(H_N) \subseteq H_N$ whenever φ is and Ind-automorphism.

Proof of Theorem 3.3.6. The method of proof is based upon the following useful fact from algebraic geometry.

Lemma 3.3.9. *Let $\varphi : X \to Y$ be a morphism of affine varieties and $A(t) \subset X$ be a curve (or rather, a one-parameter family of points) in X. Assume that $A(t)$ does not tend to infinity as $t \to 0$. Then the image $\varphi A(t)$ under φ also does not tend to infinity as $t \to 0$.*

The proof is straightforward and is left to the reader.

We now put the above fact to use. For $t > 0$ let

$$\hat{A}(t) : \mathbb{A}^n_K \to \mathbb{A}^n_K$$

be a one-parameter family of invertible linear transformations of the affine space preserving the origin. A curve $A(t) \subset \mathrm{Aut}_0(K[x_1, \dots, x_n])$ of polynomial automorphisms whose points are linear substitutions corresponds to $\hat{A}(t)$. Assume that the ith eigenvalue of $A(t)$ also tends to zero as $t \to 0$ for t^{k_i}, $k_i \in \mathbb{N}$. Such a family will always exist.

Now we assume that the degrees $\{k_i,\ i = 1, \dots n\}$ of singularity of eigenvalues at zero are such that for every pair (i, j), if $k_i \neq k_j$, then there exists a positive integer m such that

$$\text{either } k_i m \leqslant k_j \text{ or } k_j m \leqslant k_i.$$

The largest number m possessing this property is called the *order* of $A(t)$ at $t = 0$. Since all k_i are positive integers, the order equals the integer part of $k_{\max}/k_{\min}$.

Let $M \in \mathrm{Aut}_0(K[x_1, \dots, x_n])$ be a polynomial automorphism.

Lemma 3.3.10. *The curve $A(t)MA(t)^{-1}$ has no singularity at zero for any diagonalizable $A(t)$ of order $\leqslant N$ if and only if $M \in \hat{H}_N$, where $\hat{H}_N$ is the subgroup of automorphisms which are homothety modulo the augmentation ideal.*

Proof. The "if" part is elementary, for if $M \in \hat{H}_N$, the action of $A(t)MA(t)^{-1}$ upon any generator x_i (with i fixed)[1] is given by

$$A(t)MA(t)^{-1}(x_i) = \lambda x_i + t^{-k_i} \sum_{l_1+\dots+l_n=N} a_{l_1\dots l_n} t^{k_1 l_1+\dots+k_n l_n} x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} + S_i(t, x_1, \dots, x_n),$$

where λ is the homothety ratio of (the linear part of) M and S_i is polynomial in $x_1, \dots, x_n$ of total degree greater than N. Now, for any choice of $l_1, \dots, l_n$ in the sum, the expression

$$k_1 l_1 + \dots + k_n l_n - k_i \geqslant k_{\min} \sum l_j - k_i = k_{\min} N - k_i \geqslant 0$$

for every i, so whenever t tends to zero, the coefficient will not tend to infinity. Obviously the same argument applies to higher-degree monomials within S_i.

The other direction is slightly less elementary; assuming that $M \notin \hat{H}_N$, we need to show that there is a curve $A(t)$ such that conjugation of M by it produces a singularity at zero. We distinguish between two cases.

Case 1. The linear part $\bar{M}$ of M is not a scalar matrix. Then after a suitable change of basis (see the footnote), it is not a diagonal matrix and has a nonzero entry in the position (i, j). Consider the diagonal matrix $A(t) = D(t)$ such that on all positions on the main diagonal except jth it has t^{k_i} and on jth position it has t^{k_j}. Then $D(t)\bar{M}D^{-1}(t)$ has (i, j) entry with the coefficient $t^{k_i - k_j}$ and if $k_j > k_i$ it has a singularity at $t = 0$.

Let also $k_i < 2k_j$. Then the nonlinear part of M does not produce singularities and cannot compensate the singularity of the linear part.

[1]Without loss of generality, we may assume that the coordinate functions x_i correspond to the principal axes of $\hat{A}(t)$.

Case 2. The linear part $\bar{M}$ of M is a scalar matrix. Then conjugation cannot produce singularities in the linear part and we as before are interested in the smallest nonlinear term. Let $M \in H_N \backslash H_{N+1}$. Performing a basis change if necessary, we may assume that

$$\varphi(x_1) = \lambda x_1 + \delta x_2^N + S,$$

where S is a sum of monomials of degree $\geqslant N$ with coefficients in K.

Let $A(t) = D(t)$ be a diagonal matrix of the form $(t^{k_1}, t^{k_2}, t^{k_1}, \ldots, t^{k_1})$ and let $(N+1)\cdot k_2 > k_1 > N \cdot k_2$. Then in $A^{-1}MA$ the term δx_2^N will be transformed into $\delta x_2^N t^{Nk_2 - k_1}$, and all other terms are multiplied by $t^{lk_2 + sk_1 - k_1}$ with $(l,s) \neq (1,0)$ and $l,s > 0$. In this case, $lk_2 + sk_1 - k_1 > 0$ and we are done with the proof of Lemma 3.3.10. $\square$

The next lemma is proved by direct computation. Recall that for $m > 1$, the group G_m is defined as the group of all tame automorphisms preserving the mth power of the augmentation ideal.

Lemma 3.3.11.

(a) $[G_m, G_m] \subset H_m$, $m > 2$. *There exist elements* $\varphi \in H_{m+k-1} \backslash H_{m+k}$, $\psi_1 \in G_k$, *and* $\psi_2 \in G_m$ *such that* $\varphi = [\psi_1, \psi_2]$.

(b) $[H_m, H_k] \subset H_{m+k-1}$.

(c) *Let* $\varphi \in G_m \backslash H_m$ *and* $\psi \in H_k \backslash H_{k+1}$, $k > m$. *Then* $[\varphi, \psi] \in H_k \backslash H_{k+1}$.

Proof. (a) Consider elementary automorphisms

$$\begin{aligned} &\psi_1 : x_1 \mapsto x_1 + x_2^k, \quad x_2 \mapsto x_2, \quad x_i \mapsto x_i, \quad i > 2; \\ &\psi_2 : x_1 \mapsto x_1, \qquad\quad x_2 \mapsto x_2 + x_1^m, \quad x_i \mapsto x_i, \quad i > 2. \end{aligned}$$

We set $\varphi = [\psi_1, \psi_2] = \psi_1^{-1}\psi_2^{-1}\psi_1\psi_2$. Then

$$\begin{aligned} \varphi : x_1 &\mapsto x_1 - x_2^k + (x_2 - (x_1 - x_2^k)^m)^k, \\ x_2 &\mapsto x_2 - (x_1 - x_2^k)^m + (x_1 - x_2^k + (x_2 - (x_1 - x_2^k)^m)^k)^m, \quad x_i \mapsto x_i, \quad i > 2. \end{aligned}$$

It is easy to see that if either k or m is relatively prime with $\mathrm{char}(K)$, then not all terms of degree $k + m - 1$ vanish. Thus $\varphi \in H_{m+k-1} \backslash H_{m+k}$.

Now assume that $\mathrm{char}(K) \nmid m$; then, obviously, $m - 1$ is relatively prime with $\mathrm{char}(K)$. Consider the mappings

$$\begin{aligned} &\psi_1 : x_1 \mapsto x_1 + x_2^k, \quad x_2 \mapsto x_2, \qquad\qquad\quad x_i \mapsto x_i, \quad i > 2; \\ &\psi_2 : x_1 \mapsto x_1, \qquad\quad x_2 \mapsto x_2 + x_1^{m-1}x_3, \quad x_i \mapsto x_i, \quad i > 2. \end{aligned}$$

Set again $\varphi' = [\psi_1, \psi_2] = \psi_1^{-1}\psi_2^{-1}\psi_1\psi_2$. Then φ' acts as

$$\begin{aligned} &x_1 \mapsto x_1 - x_2^k + \Big(x_2 - (x_1 - x_2^k)^{m-1}x_3\Big)^k = x_1 - k(x_1 - x_2^k)^{m-1}x_2^{k-1}x_3 + S, \\ &x_2 \mapsto x_2 - (x_1 - x_2^k)^{m-1}x_3 + \Big(x_1 - x_2^k + (x_2 - (x_1 - x_2^k)^{m-1}x_3)^k\Big)^{m-1} x_3, \\ &x_i \mapsto x_i, \quad i > 2; \end{aligned}$$

here S stands for a sum of terms of degree $\geqslant m + k$. Again we see that $\varphi \in H_{m+k-1} \backslash H_{m+k}$.

(b) Let

$$\psi_1 : x_i \mapsto x_i + f_i; \quad \psi_2 : x_i \mapsto x_i + g_i$$

for $i = 1, \ldots, n$; here f_i and g_i do not have monomials of degrees less than or equal to m and k, respectively. Then, modulo terms of degree $\geqslant m + k$, we have

$$\psi_1\psi_2 : x_i \mapsto x_i + f_i + g_i + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} g_j,$$

so that modulo terms of degree $\geqslant m + k - 1$ we get

$$\psi_1\psi_2 : x_i \mapsto x_i + f_i + g_i, \quad \psi_2\psi_1 : x_i \to x_i + f_i + g_i.$$

Therefore, $[\psi_1, \psi_2] \in H_{m+k-1}$.

(c) If $\varphi(I^m) \subseteq I^m$ and $\psi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 + g_1, \ldots, x_n + g_n)$ is such that for some i_0 the polynomial g_{i_0} contains a monomial of total degree k (and all g_i do not contain monomials of total degree less than k), then, by evaluating the composition of automorphisms directly, one sees that the commutator is given by

$$[\varphi, \psi] : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 + g_1 + S_1, \ldots, x_n + g_n + S_n)$$

with S_i containing no monomials of total degree $<k+1$. Then the image of x_{i_0} is x_{i_0} modulo polynomial of height k. □

Corollary 3.3.12. *Let* $\Psi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{NAut}(K[x_1, \ldots, x_n]))$*. Then* $\Psi(G_n) = G_n$ *and* $\Psi(H_n) = H_n$*.*

Corollary 3.3.12 together with Proposition 3.4.5 of the next section imply Theorem 3.3.6, for every nice automorphism, by definition, can be approximated by tame ones. Note that in characteristic zero every automorphism is nice (Anick's theorem). □

Proof of Corollary 3.3.12. For simplicity, we set $\operatorname{char} K = 0$, so that NAut coincides with Aut owing to Anick's theorem.

Let φ be an Ind-automorphism which stabilizes point-wise the standard action of the maximal torus.

1. We first note (and give a proof further along the text) that in this case φ also stabilizes point-wise the set of all tame automorphisms.

2. It follows from the singularity trick that $\varphi(\hat{H}_N) \subseteq \hat{H}_N$ (the inverse inclusion is also true due to the invertibility of φ). Namely, if $f = \varphi(g)$ is an automorphism in $\varphi(\hat{H}_N)$ but not in $\hat{H}_N$ then there is a curve $A(t)$ of order $\leqslant N$ such that $A(t) \circ f \circ A(t)^{-1}$ admits a singularity at $t = 0$. But then

$$\varphi^{-1}(A(t) \circ f \circ A(t)^{-1}) = A(t) \circ \varphi^{-1}(f) \circ A(t)^{-1}$$

(this equality holds due to the preservation of tame automorphisms) also admits a singularity at zero, which is a contradiction.

It is a fairly easy exercise to show that for all N we have

$$\varphi(\hat{H}_{N+1} \backslash \hat{H}_N) = \hat{H}_{N+1} \backslash \hat{H}_N.$$

3. Now we demonstrate that $\varphi(\hat{H}_N \backslash H_N) = \hat{H}_N \backslash H_N$ which together with the preceding results will allow us to descend from homothety to identity modulo N.

A. First, let $N > 2$. Assume thatr $g \in \hat{H}_N \backslash H_N$. We take a tame automorphism f which is given by the sum of the identity map and a nonzero term of height two. Consider the automorphism

$$g_f = f \circ g \circ f^{-1}.$$

It is easy to see that $g_f \in \hat{H}_2$: as the linear part of g is given by a scalar matrix not equal to the identity matrix, the degree two component of $g \circ f^{-1}$ is proportional to the homothety ratio $\lambda \neq 1$, therefore the composition with f cannot compensate it.

On the other hand, if $\varphi(g) \in H_N$, i.e., the linear part of $\varphi(g)$ is the identity map, then the degree-two component of $\varphi(g_f) = f \circ \varphi(g) \circ f^{-1}$ (this expression is again due to point-wise preservation of tame automorphisms) is equal to zero, which contradicts the relation $\varphi(\hat{H}_{N+1} \backslash \hat{H}_N) = \hat{H}_{N+1} \backslash \hat{H}_N$.

B. Now let $N = 2$. Assume that $g \in \hat{H}_2 \backslash H_2$ is a nontrivial homothety plus a term of height two. The automorphism g can be approximated by tame automorphisms, in particular there exists a tame automorphism ξ such that $\xi \circ g \in H_3$. The Case A implies that $\varphi(\xi \circ g) = \xi \circ \varphi(g)$ is also in H_3. Since the linear part of g is given by a nontrivial homothety, which means that ξ scales it back to the identity matrix in order to approximate g up to terms of height three, then the left action by ξ^{-1} reverses the scaling, so that the linear part of $\xi^{-1} \circ \xi \circ \varphi(g) = \varphi(g)$ is given by a nontrivial homothety, which implies $\varphi(g) \in \hat{H}_2 \backslash H_2$.

4. Finally, combining all of the results, we get $\varphi(H_N) = H_N$, $N > 1$ as desired. □

3.3.4. Lifting of automorphism groups.

3.3.4.1. Lifting of automorphisms from $\mathrm{Aut}(K[x_1,\ldots,x_n])$ *to* $\mathrm{Aut}(K\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$.

Definition 3.3.13. In the sequel, an action of the n-dimensional torus $\mathbb{T}^n$ on $\mathbb{K}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ (the number of generators coincides with the dimension of the torus) is said to be *linearizable* if it is conjugate to the standard diagonal action given by

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n):(x_1,\ldots,x_n)\mapsto(\lambda_1x_1,\ldots,\lambda_nx_n).$$

The following result is a direct free associative analog of a well-known theorem of Białynicki-Birula (see [51, 52]). We will make frequent reference of the classical (commutative) case as well, which appears as Theorem 3.4.1 in the text.

Theorem 3.3.14. *Any effective action of the n-torus on $\mathbb{K}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ is linearizable.*

The proof is somewhat similar to that of Theorem 3.4.1, with a few modifications. We present it in Chapter **??**.

The following proposition is a consequence of Theorem 3.3.14.

Proposition 3.3.15. *Let T^n be the standard torus action on $K[x_1,\ldots,x_n]$ and $\widehat{T}^n$ be its lifting to an action on the free associative algebra $K\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$. Then $\widehat{T}^n$ is also given by the standard torus action.*

Consider the roots $\widehat{x_i}$ of this action. They are liftings of the coordinates x_i. We must prove that they generate the whole associative algebra.

Due to the reducibility of this action, all elements are products of eigenvalues of this action. Hence it suffices to prove that eigenvalues of this action can be presented as a linear combination of this action. This can be done similarly to [51]. Note that all propositions of the previous section hold for the free associative algebra. Proof of Theorem 3.3.7 is similar. Hence we have the following theorem.

Theorem 3.3.16. *Any* Ind*-scheme automorphism φ of* $\mathrm{Aut}(K\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ *for $n\geqslant 3$ is inner, i.e., is a conjugation by some automorphism.*

Therefore, we see that the group lifting (in the sense of isomorphism induced by the natural abelianization) implies an analog of Theorem 3.3.6.

This also implies that any automorphism group lifting, if exists, satisfies the approximation properties.

Proposition 3.3.17. *Assume that*

$$\Psi:\mathrm{Aut}(K[x_1,\ldots,x_n])\to\mathrm{Aut}(K\langle z_1,\ldots,z_n\rangle)$$

is a group homomorphism such that its composition with the natural map

$$\mathrm{Aut}(K\langle z_1,\ldots,z_n\rangle)\to\mathrm{Aut}(K[x_1,\ldots,x_n])$$

(induced by the projection $K\langle z_1,\ldots,z_n\rangle\to K[x_1,\ldots,x_n]$) is the identity map.

1. *The coordinate change Ψ provides a correspondence between the standard torus actions $x_i\mapsto\lambda_ix_i$ and $z_i\mapsto\lambda_iz_i$.*
2. *The images of elementary automorphisms*

$$x_j\mapsto x_j,\quad j\neq i,\quad x_i\mapsto x_i+f(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n)$$

are elementary automorphisms of the form

$$z_j\mapsto z_j,\quad j\neq i,\quad z_i\mapsto z_i+f(z_1,\ldots,\widehat{z_i},\ldots,z_n).$$

Hence the image of a tame automorphism is a tame automorphism.

3. *$\psi(H_n)=G_n$. Hence ψ induces a map between the completion of the groups of* $\mathrm{Aut}(K[x_1,\ldots,x_n])$ *and* $\mathrm{Aut}(K\langle z_1,\ldots,z_n\rangle)$ *with respect to the augmentation subgroup structure.*

Proof of Theorem 3.1.14. Any automorphism (including wild automorphisms such as the Nagata example) can be approximated by a product of elementary automorphisms with respect to augmentation topology. In the case of the Nagata automorphism corresponding to

$$\mathrm{Aut}(K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle),$$

all such elementary automorphisms fix all coordinates except x_1 and x_2. Because of items 2 and 3 of Proposition 3.3.17, the lifted automorphism would be an automorphism induced by an automorphism of $K\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ fixing x_3. However, it is impossible to lift the Nagata automorphism to such an automorphism due to the main result of [38]. Theorem 3.1.14 is proved. $\square$

3.4. Automorphisms of the Polynomial Algebra and the Bodnarchuk–Rips Approach

Assume that

$$\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(K[x_1, \ldots, x_n])) \quad \text{or} \quad \Psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}(K[x_1, \ldots, x_n]))$$
$$\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}_0(K[x_1, \ldots, x_n])) \quad \text{or} \quad \Psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}_0(K[x_1, \ldots, x_n])).$$

3.4.1. Reduction to the case where Ψ is identical on SL_n. We follow [133] and [55] using the classical Białynicki-Birula theorem (see [51, 52]).

Theorem 3.4.1 (Białynicki-Birula). *Any effective action of torus $\mathbb{T}^n$ on $\mathbb{C}^n$ is linearizable* (cf. Definition 3.3.13).

Remark 3.4.2. An effective action of $\mathbb{T}^{n-1}$ on $\mathbb{C}^n$ is linearizable (see [51,52]). There is a conjecture whether any action of $\mathbb{T}^{n-2}$ on $\mathbb{C}^n$ is linearizable, established for $n = 3$. For codimension >2, there are positive-characteristic counterexamples (see [18]).

Remark 3.4.3. By considering periodic elements in $\mathbb{T}$, Kraft and Stampfli proved (see [133]) that an effective action T possesses the following property: if $\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut})$ is a group automorphism, then the image of T (as a subgroup of Aut) under Ψ is an algebraic group. In fact, their proof is also applicable for the free associative algebra case. We use this result.

Returning to the case of automorphisms $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}\,\mathrm{Aut}$ preserving the Ind-group structure, we now consider the standard action $x_i \mapsto \lambda_i x_i$ of the n-dimensional torus $\mathbb{T} \leftrightarrow T^n \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$ on the affine space $\mathbb{C}^n$. Let H be the image of T^n under φ. Then by Theorem 3.4.1, H is conjugate to the standard torus T^n via some automorphism ψ. Composing φ with this conjugation, we come to the case where φ is the identity on the maximal torus. Then we have the following assertion.

Corollary 3.4.4. *Without loss of generality, it suffices to prove Theorem 3.1.6 for the case where* $\varphi|_{\mathbb{T}} = \mathrm{Id}$.

Now we are in the situation when φ preserves all linear mappings $x_i \mapsto \lambda_i x_i$. We must prove that it is the identity.

Proposition 3.4.5 (E. Rips, private communication)**.** *Let $n > 2$. Assume that φ preserves the standard torus action on the commutative polynomial algebra. Then φ preserves all elementary transformations.*

Corollary 3.4.6. *Let φ satisfy the conditions of Proposition* 3.4.5. *Then φ preserves all tame automorphisms.*

Proof of Proposition 3.4.5. We state a few elementary lemmas.

Lemma 3.4.7. *Consider the diagonal action $T^1 \subset T^n$ given by automorphisms*

$$\alpha : x_i \mapsto \alpha_i x_i, \quad \beta : x_i \mapsto \beta_i x_i.$$

Let $\psi : x_i \mapsto \sum_{i,J} a_{iJ}x^J$, $i = 1, \dots, n$, *where* $J = (j_1, \dots, j_n)$ *is the multi-index,* $x^J = x^{j_1} \cdots x^{j_n}$. *Then*

$$\alpha \circ \psi \circ \beta : x_i \mapsto \sum_{i,J} \alpha_i a_{iJ} x^J \beta^J,$$

In particular,

$$\alpha \circ \psi \circ \alpha^{-1} : x_i \mapsto \sum_{i,J} \alpha_i a_{iJ} x^J \alpha^{-J}.$$

Applying Lemma 3.4.7 and comparing the coefficients, we obtain the following assertion.

Lemma 3.4.8. *Consider the diagonal* T^1 *action* $x_i \mapsto \lambda x_i$. *Then the set of automorphisms commuting with this action is exactly the set of linear automorphisms.*

Similarly (using Lemma 3.4.7), we obtain Lemmas 3.4.9, 3.4.12, and 3.4.13.

Lemma 3.4.9.

(a) *Consider the following* T^2 *action*:

$$x_1 \mapsto \lambda\delta x_1, \quad x_2 \mapsto \lambda x_2, \quad x_3 \mapsto \delta x_3, \quad x_i \mapsto \lambda x_i, \quad i > 3.$$

Then the set S *of automorphisms commuting with this action is generated by the following automorphisms*:

$$x_1 \mapsto x_1 + \beta x_2 x_3, \quad x_i \mapsto \varepsilon_i x_i, \quad i > 1, \quad (\beta, \varepsilon_i \in K).$$

(b) *Consider the following* T^{n-1} *action*:

$$x_1 \mapsto \lambda^I x_1, \quad x_j \mapsto \lambda_j x_j, \quad j > 1, \quad \lambda^I = \lambda_2^{i_2} \cdots \lambda_n^{i_n}.$$

Then the set S *of automorphisms commuting with this action is generated by the following automorphisms*:

$$x_1 \mapsto x_1 + \beta \prod_{j=2}^{n} x_j^{i_j}, \quad \beta \in K.$$

Remark 3.4.10. A similar statement for the free associative case is true, but one has to consider the set $\hat{S}$ of automorphisms $x_1 \mapsto x_1 + h$, $x_i \mapsto \varepsilon_i x_i$, $i > 1$ ($\varepsilon \in K$, and the polynomial $h \in K\langle x_2, \dots, x_n \rangle$ has total degree J; in the free associative case it is not just monomial anymore).

Corollary 3.4.11. *Assume that* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}(K[x_1, \dots, x_n]))$ *stabilizes all elements from* $\mathbb{T}$. *Then* $\varphi(S) = S$.

Lemma 3.4.12. *Consider the following* T^1 *action*:

$$x_1 \mapsto \lambda^2 x_1, \quad x_i \mapsto \lambda x_i, \quad i > 1.$$

Then the set S *of automorphisms commuting with this action is generated by the following automorphisms:*

$$x_1 \mapsto x_1 + \beta x_2^2, \quad x_i \mapsto \lambda_i x_i, \quad i > 2, \quad \beta, \lambda_i \in K.$$

Lemma 3.4.13. *Consider the set* S *defined in the previous lemma. Then* $[S, S] = \{uvu^{-1}v^{-1}\}$ *consists of the following automorphisms*:

$$x_1 \mapsto x_1 + \beta x_2 x_3, \quad x_2 \mapsto x_2, \quad x_3 \mapsto x_3, \quad \beta \in K.$$

Lemma 3.4.14. *Let* $n \geqslant 3$. *Consider the following set of automorphisms:*

$$\psi_i : x_i \mapsto x_i + \beta_i x_{i+1} x_{i+2}, \quad \beta_i \neq 0, \quad x_k \mapsto x_k, \quad k \neq i,$$

for $i = 1, \dots, n-1$. *(Numeration is cyclic, so, for example,* $x_{n+1} = x_1$.*) Let* $\beta_i \neq 0$ *for all* i. *Then each of* ψ_i *can be uniquely simultaneously conjugated by a torus action to*

$$\psi_i' : x_i \mapsto x_i + x_{i+1} x_{i+2}, \quad x_k \mapsto x_k, \quad k \neq i,$$

for $i = 1, \dots, n$.

Proof. Let $\alpha : x_i \mapsto \alpha_i x_i$. Then by Lemma 3.4.7 we obtain

$$\alpha \circ \psi_i \circ \alpha^{-1} : x_i \mapsto x_i + \beta_i x_{i+1} x_{i+2} \alpha_{i+1}^{-1} \alpha_{i+2}^{-1} \alpha_i, \quad \alpha \circ \psi_i \circ \alpha^{-1} : x_k \mapsto x_k$$

for $k \neq i$. Comparing the coefficients of the quadratic terms, we see that it suffices to solve the system

$$\beta_i \alpha_{i+1}^{-1} \alpha_{i+2}^{-1} \alpha_i = 1, \ i = 1, \ldots, n-1.$$

Since $\beta_i \neq 0$ for all i, this system has a unique solution. □

Remark 3.4.15. In the case of a free associative algebra, one must consider $\beta x_2 x_3 + \gamma x_3 x_2$ instead of $\beta x_2 x_3$.

Proposition 3.4.5 follows from Lemmas 3.4.8, 3.4.9, 3.4.12, 3.4.13, 3.4.14, and 3.4.16 (see below). Note that we have proved an analog of Theorem 3.1.6 for tame automorphisms. □

3.4.2. The Rips lemma.

Lemma 3.4.16 (E. Rips)**.** *Let* $\operatorname{char}(K) \neq 2$, $|K| = \infty$. *Linear transformations and* ψ_i' *defined in Lemma 3.4.14 generate the whole tame automorphism group of* $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Proof of Lemma 3.4.16. Let G be the group generated by elementary transformations as in Lemma 3.4.14. We must prove that is isomorphic to the tame automorphism subgroup fixing the augmentation ideal. We need some preliminaries. □

Lemma 3.4.17. *Linear transformations of* K^3 *and*

$$\psi : x \mapsto x, \ y \mapsto y, \ z \mapsto z + xy$$

generate all mappings of the form

$$\phi_m^b(x, y, z) : x \mapsto x, \ y \mapsto y, \ z \mapsto z + bx^m, \quad b \in K.$$

Proof of Lemma 3.4.17. We proceed by induction. Assume that Suppose we have an automorphism

$$\phi_{m-1}^b(x, y, z) : x \mapsto x, \ y \mapsto y, \ z \mapsto z + bx^{m-1}.$$

Conjugating by the linear transformation ($z \mapsto y$, $y \mapsto z$, $x \mapsto x$), we obtain the automorphism

$$\phi_{m-1}^b(x, z, y) : x \mapsto x, \ y \mapsto y + bx^{m-1}, \ z \mapsto z.$$

Composing this on the right by ψ, we get the automorphism

$$\varphi(x, y, z) : x \mapsto x, \ y \mapsto y + bx^{m-1}, \ z \mapsto z + yx + x^m.$$

Note that

$$\phi_{m-1}(x, y, z)^{-1} \circ \varphi(x, y, z) : x \mapsto x, \ y \mapsto y, \ z \mapsto z + xy + bx^m.$$

Now we see that

$$\psi^{-1} \phi_{m-1}(x, y, z)^{-1} \circ \varphi(x, y, z) = \phi_m^b.$$ □

Corollary 3.4.18. *Let* $\operatorname{char}(K) \nmid n$ *(in particular,* $\operatorname{char}(K) \neq 0$*) and* $|K| = \infty$. *Then* G *contains all the transformations*

$$z \mapsto z + bx^k y^l, \ y \mapsto y, \ x \mapsto x$$

such that $k + l = n$.

Proof. For any invertible linear transformation

$$\varphi : x \mapsto a_{11}x + a_{12}y, \ y \mapsto a_{21}x + a_{22}y, \ z \mapsto z; \quad a_{ij} \in K,$$

we have

$$\varphi^{-1} \phi_m^b \varphi : x \mapsto x, \ y \mapsto y, \ z \mapsto z + b(a_{11}x + a_{12}y)^m.$$

Note that sums of such expressions contain all the terms of the form $bx^k y^l$. □

3.4.3. Generators of the tame automorphism group.

Theorem 3.4.19. *If* $\mathrm{char}(K) \neq 2$ *and* $|K| = \infty$*, then linear transformations and*

$$\psi : x \mapsto x,\ y \mapsto y,\ z \mapsto z + xy$$

generate all mappings of the form

$$\alpha_m^b(x, y, z) : x \mapsto x,\ y \mapsto y,\ z \mapsto z + byx^m, \quad b \in K.$$

Proof of Theorem 3.4.19. Observe that

$$\alpha = \beta \circ \phi_m^b(x, z, y) : x \mapsto x + by^m,\ y \mapsto y + x + by^m,\ z \mapsto z,$$

where $\beta : x \mapsto x$, $y \mapsto x + y$, $z \mapsto z$. Then

$$\gamma = \alpha^{-1}\psi\alpha : x \mapsto x,\ y \mapsto y,\ z \mapsto z + xy + 2bxy^m + by^{2m}.$$

Composing with ψ^{-1} and ϕ_{2m}^{2b} we obtain the required fact:

$$\alpha_m^{2b}(x, y, z) : x \mapsto x,\ y \mapsto y,\ z \mapsto z + 2byx^m, \quad b \in K. \qquad \square$$

Corollary 3.4.20. *Let* $\mathrm{char}(K) \nmid n$ *and* $|K| = \infty$*. Then* G *contains all transformations of the form*

$$z \mapsto z + bx^k y^l,\ y \mapsto y,\ x \mapsto x$$

such that $k = n + 1$*.*

The proof is similar to the proof of Corollary 3.4.18. Note that either n or $n + 1$ is not a multiple of $\mathrm{char}(K)$ so we have the following assertion.

Lemma 3.4.21. *If* $\mathrm{char}(K) \neq 2$*, then linear transformations and*

$$\psi : x \mapsto x,\ y \mapsto y,\ z \mapsto z + xy$$

generate all mappings of the form

$$\alpha_P : x \mapsto x,\ y \mapsto y,\ z \mapsto z + P(x, y), \quad P(x, y) \in K[x, y].$$

We have proved Lemma 3.4.16 for the three variable case.

In order to treat the case $n \geqslant 4$, we need the following lemma.

Lemma 3.4.22. *Let* $M(\vec{x}) = a\prod x_i^{k_i}$*,* $a \in K$*,* $|K| = \infty$*,* $\mathrm{char}(K) \nmid k_i$ *for at least one of* k_i*'s. Consider the linear transformations*

$$f : x_i \mapsto y_i = \sum a_{ij}x_j, \quad \det(a_{ij}) \neq 0,$$

and monomials $M_f = M(\vec{y})$*. Then the linear span of* M_f *for various* f *contains all homogenous polynomials of degree* $k = \sum k_i$ *in* $K[x_1, \ldots, x_n]$*.*

Proof. Lemma 3.4.22 is a direct consequence of the following fact. Let S be a homogenous subspace of $K[x_1, \ldots, x_n]$ invariant with respect to GL_n of degree m. Then $S = S_{m/p^k}^{p^k}$, $p = \mathrm{char}(K)$, S_l is the space of all polynomials of degree l. $\square$

Lemma 3.4.16 follows from Lemma 3.4.22 in a similar way as in the proofs of Corollaries 3.4.18 and 3.4.20.

3.4.4. Aut(TAut) **in the general case.** Now we consider the case where $\mathrm{char}(K)$ is arbitrary, i.e., the remaining case $\mathrm{char}(K) = 2$. Still $|K| = \infty$. Although we are unable to prove an analog of Proposition 3.4.5, we can still play on the relations.

Let

$$M = a \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{k_i}$$

be a monomial, $a \in K$. For polynomial $P(x, y) \in K[x, y]$ we define the elementary automorphism

$$\psi_P : x_i \mapsto x_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad x_n \mapsto x_n + P(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

We have $P = \sum M_j$ and ψ_P can be naturally decomposed as the product of commuting ψ_{M_j}. Let $\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}(K[x, y, z]))$ stabilize linear mappings and ϕ (the automorphism ϕ was defined in Lemma 3.4.17). Then, according to Corollary 3.4.11, $\Psi(\psi_P) = \prod \Psi(\psi_{M_j})$. If $M = ax^n$, then due to Lemma 3.4.17, we have $\Psi(\psi_M) = \psi_M$. We must prove the same for other type of monomials.

Lemma 3.4.23. *Let M be a monomial. Then $\Psi(\psi_M) = \psi_M$.*

Proof. Let $M = a \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{k_i}$. Consider the automorphism

$$\alpha : x_i \mapsto x_i + x_1, \quad i = 2, \ldots, n-1; \quad x_1 \mapsto x_1, \quad x_n \mapsto x_n.$$

Then

$$\alpha^{-1} \psi_M \alpha = \psi_{x_1^{k_1} \prod_{i=2}^{n-1} (x_i + x_1)^{k_i}} = \psi_Q \psi_{a x_1^{\sum_{i=2}^{n-1} k_i}}.$$

Here the polynomial

$$Q = x_1^{k_1} \left(\prod_{i=2}^{n-1} (x_i + x_1)^{k_i} - a x_1^{\sum k_i} \right).$$

It has the form $Q = \sum_{i=2}^{n-1} N_i$, where N_i are monomials such that none of them is proportional to a power of x_1.

According to Corollary 3.4.11, $\Psi(\psi_M) = \psi_{bM}$ for some $b \in K$. We need only to prove that $b = 1$. Assume the contrary, i.e., $b \neq 1$. Then

$$\Psi(\alpha^{-1} \psi_M \alpha) = \left(\prod_{[N_i, x_1] \neq 0} \Psi(\psi_{N_i}) \right) \circ \Psi(\psi_{a x_1^{\sum_{i=2}^{n-1} k_i}}) = \left(\prod_{[N_i, x_1] \neq 0} \psi_{b_i N_i} \right) \circ \psi_{a x_1^{\sum_{i=2}^{n-1} k_i}}$$

for some $b_i \in K$. On the other hand,

$$\Psi(\alpha^{-1} \psi_M \alpha) = \alpha^{-1} \Psi(\psi_M) \alpha = \alpha^{-1} \psi_{bM} \alpha = \left(\prod_{[N_i, x_1] \neq 0} \psi_{b N_i} \right) \circ \psi_{a x_1^{\sum_{i=2}^{n-1} k_i}}.$$

Comparing the factors $\psi_{a x_1^{\sum_{i=2}^{n-1} k_i}}$ and $\psi_{a x_1^{\sum_{i=2}^{n-1} k_i}}$ in the last two products we get $b = 1$. Lemma 3.4.23 and hence Proposition 3.4.5 are proved. □

3.5. The Bodnarchuk–Rips Approach to Automorphisms of $\mathrm{TAut}(K\langle x_1, \ldots, x_n \rangle)$ $(n > 2)$

Now we consider the free associative case. We treat the case $n > 3$ on the group-theoretic level and the case $n = 3$ on the Ind-scheme level. Note that if $n = 2$, then

$$\mathrm{Aut}_0(K[x, y]) = \mathrm{TAut}_0(K[x, y]) \simeq \mathrm{TAut}_0(K\langle x, y \rangle) = \mathrm{Aut}_0(K\langle x, y \rangle)$$

and description of automorphism group of such objects is known due to J. Déserti.

3.5.1. The automorphisms of the tame automorphism group of $K\langle x_1,\dots,x_n\rangle$, $n\geqslant 4$.

Proposition 3.5.1 (E. Rips, private communication)**.** *Let $n>3$ and let φ preserve the standard torus action on the free associative algebra $K\langle x_1,\dots,x_n\rangle$. Then φ preserves all elementary transformations.*

Corollary 3.5.2. *Let φ satisfy the conditions of Proposition 3.5.1. Then φ preserves all tame automorphisms.*

For free associative algebras, we note that any automorphism preserving the torus action preserves also the symmetric

$$x_1\mapsto x_1+\beta(x_2x_3+x_3x_2),\quad x_i\mapsto x_i,\quad i>1,$$

and the skew symmetric

$$x_1\mapsto x_1+\beta(x_2x_3-x_3x_2),\quad x_i\mapsto x_i,\quad i>1,$$

elementary automorphisms. The first property follows from Lemma 3.4.12. The second one follows from the fact that skew symmetric automorphisms commute with automorphisms of the following type

$$x_2\mapsto x_2+x_3^2,\quad x_i\mapsto x_i,\quad i\neq 2,$$

and this property distinguishes them from elementary automorphisms of the form

$$x_1\mapsto x_1+\beta x_2x_3+\gamma x_3x_2,\quad x_i\mapsto x_i,\quad i>1.$$

Theorem 3.1.7 follows from the fact that the forms $\beta x_2x_3+\gamma x_3x_2$ corresponding to general bilinear multiplication

$$*_{\beta,\gamma}:(x_2,\ x_3)\to \beta x_2x_3+\gamma x_3x_2$$

lead to associative multiplication if and only if $\beta=0$ or $\gamma=0$; the approximation also applies (see Sec. 3.3.3).

First, assume that $n=4$ and consider $K\langle x,y,z,t\rangle$.

Proposition 3.5.3. *The group G containing all linear transformations and mappings*

$$x\mapsto x,\ y\mapsto y,\ z\mapsto z+xy,\ t\mapsto t$$

contains also all transformations of the form

$$x\mapsto x,\ y\mapsto y,\ z\mapsto z+P(x,y),\ t\mapsto t.$$

Proof. It suffices to prove that G contains all transformations of the form

$$x\mapsto x,\ y\mapsto y,\ z\mapsto z+aM,\ t\mapsto t,\quad a\in K,$$

where M is a monomial.

Step 1. Let

$$M=a\prod_{i=1}^m x^{k_i}y^{l_i}\quad\text{or}\quad M=a\prod_{i=1}^m y^{l_0}x^{k_i}y^{l_i}\quad\text{or}\quad M=a\prod_{i=1}^m x^{k_i}y^{l_i}\quad\text{or}\quad M=a\prod_{i=1}^m x^{k_i}y^{l_i}x^{k_{m+1}}.$$

Define the height $H(M)$ of M as the number of segments involved of a specific generator—such as x^k—in the word M. For example,

$$H\left(a\prod_{i=1}^m x^{k_i}y^{l_i}x^{k_{m+1}}\right)=2m+1.$$

Using induction on $H(M)$, one can reduce to the case where $M=yx^k$. Let $M=M'x^k$ such that $H(M')<H(M)$. (The case where $M=M'y^l$ is similar.) Let

$$\phi:x\to x,\ y\to y,\ z\to z+M',\ t\to t;\quad \alpha:x\to x,\ y\to y,\ z\to z,\ t\to t+zx^k.$$

Then

$$\phi^{-1}\circ\alpha\circ\phi:x\to x,\ y\to y,\ z\to z,\ t\to t-M+zx^k.$$

The automorphism $\phi^{-1} \circ \alpha \circ \phi$ is the composition of automorphisms

$$\beta : x \to x,\ y \to y,\ z \to z,\ t \to t - M \quad \text{and} \quad \gamma : x \to x,\ y \to y,\ z \to z,\ t \to t + zx^k.$$

Observe that β is conjugate to the automorphism

$$\beta' : x \to x,\ y \to y,\ z \to z - M,\ t \to t$$

by a linear automorphism

$$x \to x,\ y \to y,\ z \to t,\ t \to z.$$

Similarly, γ is conjugate to the automorphism

$$\gamma' : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + yx^k,\ t \to t.$$

We have thus reduced to the case where $M = x^k$ or $M = yx^k$.

Step 2. Consider the automorphisms

$$\alpha : x \to x,\ y \to y + x^k,\ z \to z,\ t \to t \quad \text{and} \quad \beta : x \to x,\ y \to y,\ z \to z,\ t \to t + azy.$$

Then

$$\alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha : x \to x,\ y \to y,\ z \to z,\ t \to t + azx^k + azy.$$

It is a composition of the automorphism

$$\gamma : x \to x,\ y \to y,\ z \to z,\ t \to t + azx^k,$$

which is conjugate to the needed automorphism

$$\gamma' : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + yx^k,\ t \to t$$

and an automorphism

$$\delta : x \to x,\ y \to y,\ z \to z,\ t \to t + azy,$$

which is conjugate to the automorphism

$$\delta' : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + axy,\ t \to t$$

and then to the automorphism

$$\delta'' : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + xy,\ t \to t$$

(using similarities). We have reduced the problem to proving the statement

$$G \ni \psi_M, \quad M = x^k \quad \text{for all } k.$$

Step 3. Obtain the automorphism

$$x \to x,\ y \to y + x^n,\ z \to z,\ t \to t.$$

This problem is similar to the commutative case of $K[x_1, \dots, x_n]$ (cf. Sec. 3.4).

Proposition 3.5.3 is proved. □

Returning to the general case $n \geqslant 4$, let us formulate Remark 3.4.10 as follows.

Lemma 3.5.4. *Consider the following T^{n-1} action:*

$$x_1 \to \lambda^I x_1, \quad x_j \to \lambda_j x_j, \quad j > 1; \quad \lambda^I = \lambda_2^{i_2} \cdots \lambda_n^{i_n}.$$

Then the set S of automorphisms commuting with this action is generated by the following automorphisms:

$$x_1 \to x_1 + H, \quad x_i \to x_i; \quad i > 1,$$

where H is any homogenous polynomial of total degree $i_2 + \cdots + i_n$.

Proposition 3.5.3 and Lemma 3.5.4 imply the following assertion.

Corollary 3.5.5. *Let* $\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}_0(K\langle x_1,\dots,x_n\rangle))$ *stabilize all elements of torus and linear automorphisms*

$$\phi_P : x_n \to x_n + P(x_1,\dots,x_{n-1}), \quad x_i \to x_i, \quad i = 1,\dots,n-1.$$

Let $P = \sum_I P_I$*, where* P_I *is the homogenous component of* P *of multi-degree* I*. Then the following assertions hold*:

9(a) $\Psi(\phi_P) : x_n \to x_n + P^\Psi(x_1,\dots,x_{n-1})$, $x_i \to x_i$, $i = 1,\dots,n-1$.

9(b) $P^\Psi = \sum_I P_I^\Psi$; *here* P_I^Ψ *is homogenous of multi-degree* I.

9(c) *If* I *has positive degree with respect to one or two variables, then* $P_I^\Psi = P_I$.

Let $\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}_0(K\langle x_1,\dots,x_n\rangle))$ stabilize all elements of torus and linear automorphisms,

$$\phi : x_n \to x_n + P(x_1,\dots,x_{n-1}), \quad x_i \to x_i, \quad i = 1,\dots,n-1.$$

Let

$$\varphi_Q : x_1 \to x_1,\ x_2 \to x_2,\ x_i \to x_i + Q_i(x_1,x_2), \quad i = 3,\dots,n-1, \quad x_n \to x_n;$$

$Q = (Q_3,\dots,Q_{n-1})$. Then $\Psi(\varphi_Q) = \varphi_Q$ by Proposition 3.5.3.

Lemma 3.5.6.

(a) $\varphi_Q^{-1} \circ \phi_P \circ \varphi_Q = \phi_{P_Q}$, *where*

$$P_Q(x_1,\dots,x_{n-1}) = P\Big(x_1,x_2,x_3+Q_3(x_1,x_2),\dots,x_{n-1}+Q_{n-1}(x_1,x_2)\Big).$$

(b) *Let* $P_Q = P_Q^{(1)} + P_Q^{(2)}$ *and* $P_Q^{(1)}$ *consist of all terms containing one of the variables* $x_3,\dots,x_{n-1}$*, and let* $P_Q^{(1)}$ *consist of all terms containing just* x_1 *and* x_2*. Then*

$$P_Q^\Psi = P_Q^\Psi = P_Q^{(1)\Psi} + P_Q^{(2)\Psi} = P_Q^{(1)\Psi} + P_Q^{(2)}.$$

Lemma 3.5.7. *If* $P_Q^{(2)} = R_Q^{(2)}$ *for all* Q*, then* $P = R$.

Proof. It suffices to prove that if $P \neq 0$, then $P_Q^{(2)} \neq 0$ for appropriate $Q = (Q_3,\dots,Q_{n-1})$. Let $m = \deg(P)$, $Q_i = x_1^{2^{i+1}m} x_2^{2^{i+1}m}$. Let $\hat{P}$ be the highest-degree component of P, then $\hat{P}(x_1,x_2,Q_3,\dots,Q_{n-1})$ is the highest-degree component of $P_Q^{(2)}$. It suffices to prove that

$$\hat{P}(x_1,x_2,Q_3,\dots,Q_{n-1}) \neq 0.$$

Let $x_1 \prec x_2 \prec x_2 \prec \dots \prec x_{n-1}$ be the standard lexicographic order. Consider the lexicographically minimal term M of $\hat{P}$. It is easy to see that the term $M\big|_{Q_i \to x_i}$, $i = 3, n-1$, cannot cancel with any other term $N\big|_{Q_i \to x_i}$, $i = 3, n-1$, of $\hat{P}(x_1,x_2,Q_3,\dots,Q_{n-1})$. Therefore, $\hat{P}(x_1,x_2,Q_3,\dots,Q_{n-1}) \neq 0$. □

Lemmas 3.5.6 and 3.5.7 imply the following assertion.

Corollary 3.5.8. *Let* $\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}_0(K\langle x_1,\dots,x_n\rangle))$ *stabilize all elements of torus and linear automorphisms. Then* $P^\Psi = P$*, and* Ψ *stabilizes all elementary automorphisms and, therefore, the entire group* $\mathrm{TAut}_0(K\langle x_1,\dots,x_n\rangle)$.

Proposition 3.5.9. *Let* $n \geqslant 4$ *and let* $\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}_0(K\langle x_1,\dots,x_n\rangle))$ *stabilize all elements of torus and linear automorphisms. Then either* $\Psi = \mathrm{Id}$ *or* Ψ *acts as conjugation by the mirror anti-automorphism.*

Let $n \geqslant 4$. Let $\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}_0(K\langle x_1,\dots,x_n\rangle))$ stabilize all elements of torus and linear automorphisms. Denote by EL an elementary automorphism

$$EL : x_1 \to x_1,\ \dots,\ x_{n-1} \to x_{n-1},\ x_n \to x_n + x_1x_2$$

(all other elementary automorphisms of this form, i.e., $x_k \to x_k + x_i x_j$, $x_l \to x_l$ for $l \neq k$ and $k \neq i$, $k \neq j$, $i \neq j$, are conjugate to one another by permutations of generators).

We must prove that $\Psi(EL) = EL$ or $\Psi(EL) : x_i \to x_i$, $i = 1, \ldots, x_{n-1}$, $x_n \to x_n + x_2 x_1$. The latter corresponds to Ψ being the conjugation with the mirror anti-automorphism of $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.

For some $a, b \in K$, we define $x *_{a,b} y = axy + byx$. Then, in any of the above two cases,

$$\Psi(EL) : x_i \to x_i; \quad i = 1, \ldots, x_{n-1}, \quad x_n \to x_n + x_1 *_{a,b} x_2$$

for some a and b.

The following lemma is elementary.

Lemma 3.5.10. *The operation* $* = *_{a,b}$ *is associative if and only if* $ab = 0$.

The associator of x, y, and z is defined as follows:

$$\{x, y, z\}_* \equiv (x * y) * z - x * (y * z) = ab(zx - xz)y + aby(xz - zx) = ab[y, [x, z]].$$

Now we are ready to prove Proposition 3.5.9. For simplicity, we treat only the case $n = 4$, the general case is considered similarly. Consider the automorphisms

$$\begin{aligned} \alpha &: x \to x, \quad y \to y, \quad z \to z + xy, \quad t \to t, \\ \beta &: x \to x, \quad y \to y, \quad z \to z, \quad t \to t + xz, \\ h &: x \to x, \quad y \to y, \quad z \to z, \quad t \to t - xz; \end{aligned}$$

here $h = \beta^{-1}$. Then

$$\gamma = h\alpha^{-1}\beta\alpha = [\beta, \alpha] : x \to x, \ y \to y, \ z \to z, \ t \to t - x^2 y.$$

Note that α is conjugate to β via a generator permutation

$$\kappa : x \to x, \ y \to z, \ z \to t, \ t \to y, \quad \kappa \circ \alpha \circ \kappa^{-1} = \beta$$

and

$$\Psi(\gamma) : x \to x, \ y \to y, \ z \to z, \ t \to t - x * (x * y).$$

Let

$$\begin{aligned} \delta &: x \to x, \ y \to y, \ z \to z + x^2, \ t \to t, \\ \epsilon &: x \to x, \ y \to y, \ z \to z, \ t \to t + zy. \end{aligned}$$

Let $\gamma' = \epsilon^{-1}\delta^{-1}\epsilon\delta$. Then

$$\gamma' : x \to x, \ y \to y, \ z \to z, \ t \to t - x^2 y.$$

On the other hand we have

$$\varepsilon = \Psi(\epsilon^{-1}\delta^{-1}\epsilon\delta) : x \to x, \ y \to y, \ z \to z, \ t \to t - (x^2) * y.$$

We also have $\gamma = \gamma'$. Equality $\Psi(\gamma) = \Psi(\gamma')$ is equivalent to the equality $x * (x * y) = x^2 * y$. This implies $x * y = xy$ and we are done.

3.5.2. The group $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{TAut}(K\langle x, y, z\rangle))$**.** This is the most technically loaded part of the present study. At the moment we are unable to accomplish the objective of describing the whole group $\mathrm{Aut}\,\mathrm{TAut}(K\langle x, y, z\rangle)$. In this section we will determine only its subgroup $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}\,\mathrm{TAut}_0(K\langle x, y, z\rangle)$, i.e., the group of Ind-scheme automorphisms, and prove Theorem 3.1.13. We use the approximation results of Sec. 3.3.3. In what follows, we assume that $\mathrm{char}(K) \neq 2$. As in the preceding chapter, $\{x, y, z\}_*$ denotes the associator of x, y, and z with respect to a fixed binary linear operation $*$, i.e.,

$$\{x, y, z\}_* = (x * y) * z - x * (y * z).$$

Proposition 3.5.11. *Let* $\Psi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{TAut}_0(K\langle x, y, z\rangle))$ *stabilize all linear automorphisms. Let*

$$\phi : x \to x, \ y \to y, \ z \to z + xy.$$

Then either

$$\Psi(\phi) : x \to x, \ y \to y, \ z \to z + axy \quad \text{or} \quad \Psi(\phi) : x \to x, \ y \to y, \ z \to z + byx$$

for some $a, b \in K$.

Proof. Consider the automorphism
$$\phi : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + xy.$$
Then
$$\Psi(\phi) : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + x * y,$$
where $x * y = axy + byx$. Let $a \neq 0$. We can make the star product $* = *_{a,b}$ into $x * y = xy + \lambda yx$ by conjugation with the mirror anti-automorphism and appropriate linear substitution. Therefore, we need to prove that $\lambda = 0$, which implies $\Psi(\phi) = \phi$. □

The following two lemmas are proved by straightforward computation.

Lemma 3.5.12. *Let $A = K\langle x, y, z\rangle$. Let $f * g = fg + \lambda fg$. Then*
$$\{f, g, h\}_* = \lambda[g, [f, h]].$$
In particular,
$$\{f, g, f\}_* = 0, \quad f * (f * g) - (f * f) * g = -\{f, f, g\}_* = \lambda[f, [f, g]],$$
$$(g * f) * f - g * (f * f) = \{g, f, f\}_* = \lambda[f, [f, g]].$$

Lemma 3.5.13. *Let*
$$\varphi_1 : x \to x + yz,\ y \to y,\ z \to z; \quad \varphi_2 : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + yx; \quad \varphi = \varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}\varphi_2\varphi_1.$$
Then modulo terms of order $\geqslant 4$ *we have*
$$\varphi : x \to x + y^2x,\ y \to y,\ z \to z - y^2z \quad \textit{and} \quad \Psi(\varphi) : x \to x + y * (y * x),\ y \to y,\ z \to z - y * (y * z).$$

Lemma 3.5.14.

(a) *Let $\phi_l : x \to x$, $y \to y$, $z \to z + y^2x$. Then*
$$\Psi(\phi_l) : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + y * (y * x).$$
(b) *Let $\phi_r : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + xy^2$. Then*
$$\Psi(\phi_r) : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + (x * y) * y.$$

Proof. According to the results of the previous section we have
$$\Psi(\phi_l) : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + P(y, x),$$
where $P(y, x)$ is homogenous of degree 2 with respect to y and degree 1 with respect to x. We have to prove that $H(y, x) = P(y, x) - y * (y * x) = 0$.

Let
$$\tau : x \to z,\ y \to y,\ z \to x; \quad \tau = \tau^{-1}, \quad \phi' = \tau\phi_l\tau^{-1} : x \to x + y^2z,\ y \to y,\ z \to z.$$
Then
$$\Psi(\phi_l') : x \to x + P(y, z),\ y \to y,\ z \to z.$$
Let
$$\phi_l'' = \phi_l\phi_l' : x \to x + P(y, z),\ y \to y,\ z \to z + P(y, x)$$
modulo terms of degree $\geqslant 4$.

Let $\tau : x \to x - z$, $y \to y$,$z \to z$ and φ_2 and φ be the automorphisms described in Lemma 3.5.13. Then
$$T = \tau^{-1}\phi_l^{-1}\tau\phi_l'' : x \to x,\ y \to y,\ z \to z$$
modulo terms of order $\geqslant 4$. On the other hand,
$$\Psi(T) : x \to x + H(y, z) - H(y, x),\ y \to y,\ z \to z + P$$
modulo terms of order $\geqslant 4$. Since $\deg_y(H(y, x) = 2$, $\deg_x(H(y, x)) = 1$, we get $H = 0$.

The proof of (b) is similar. □

Lemma 3.5.15.

(a) *Let*

$$\psi_1 : x \to x + y^2,\ y \to y,\ z \to z; \quad \psi_2 : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + x^2.$$

Then

$$[\psi_1, \psi_2] = \psi_2^{-1}\psi_1^{-1}\psi_2\psi_1 : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + y^2x + xy^2,$$
$$\Psi([\psi_1, \psi_2]) : x \to x,\ y \to y,\ z \to z + (y * y) * x + x * (y * y).$$

(b) *We have*

$$\phi_l^{-1}\phi_r^{-1}[\psi_1, \psi_2] : x \to x,\ y \to y,\ z \to z$$

modulo terms of order $\geqslant 4$ *but*

$$\Psi\left(\phi_l^{-1}\phi_r^{-1}[\psi_1, \psi_2]\right) : x \to x,\ y \to y,$$
$$z \to z + (y * y) * x + x * (y * y) - (x * y) * y - y * (y * x) = z + 4\lambda[x[x, y]]$$

modulo terms of order $\geqslant 4$.

Proof. The assertion (a) can be obtained by direct computation; the assertion (b) follows from (a) and Lemma 3.5.12. □

Proposition 3.5.11 follows from Lemma 3.5.15.

We need several auxiliary lemmas. The first lemma is an analog of the hiking procedure from [34, 122].

Lemma 3.5.16. *Let K be algebraically closed and let $n_1, \dots, n_m$ be positive integers. Then there exist $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$ and $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ such that*

(i) $\sum k_i = 1$ *modulo* $\operatorname{char}(K)$ (*if* $\operatorname{char}(K) = 0$, *then* $\sum k_i = 1$).

(ii) $\sum\limits_i k_i^{n_j}\lambda_i = 0$ *for all* $j = 1, \dots, m$.

For $\lambda \in K$, we define an automorphism $\psi_\lambda : x \to x, y \to y, z \to \lambda z$.

The next lemma provides for some translation between the language of polynomials and the group action language. It is similar to the hiking process (see [34, 122]).

Lemma 3.5.17. *Let $\varphi \in K\langle x, y, z\rangle$. Let $\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = y + \sum\limits_i R_i + R'$, and $\varphi(z) = z + Q$. Let $\deg(R_i) = N$, let the degrees of all monomials in R' be greater than N, and let the degrees of all monomials in Q be greater than or equal to N. Finally, assume that $\deg_z(R_i) = i$ and the z-degree of all monomials of R_1 are greater than 0. Then the following assertions hold*:

(a) $\psi_\lambda^{-1}\varphi\psi_\lambda : x \to x,\ y \to y + \sum\limits_i \lambda^i R_i + R'',\ z \to z + Q'$. *Also the total degree of all monomials involving R' is greater than N, and the degree of all monomials of Q is greater than or equal to N.*

(b) *Let* $\phi = \prod \left(\psi_{\lambda_i^{-1}}\varphi\psi_{\lambda_i}\right)^{k_i}$. *Then*

$$\phi : x \to x,\ y \to y + \sum_i R_i\lambda_i^{k_i} + S,\ z \to z + T,$$

where the degree of all monomials of S is greater than N and the degree of all monomials of T is greater than or equal to N.

Proof. Assertion (a) is proved by adirect computation and (b) is a consequence of (a). □

Remark 3.5.18. In the case of zero characteristic, the condition of K being algebraically closed can be dropped. After hiking for several steps, we must prove the following assertion.

Lemma 3.5.19. *Let $\operatorname{char}(K) = 0$ and n be a positive integer. Then there exist $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$ and $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ such that*

(i) $\sum k_i = 1$;
(ii) $\sum_i k_i^n \lambda_i = 0$.

Using this lemma, we can cancel all terms in the product in Lemma 3.5.17 except for constant terms. The proof of Lemma 3.5.19 for any field of zero characteristic can be obtained by using the following observation.

Lemma 3.5.20.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^n - \sum_j \left(\lambda_1+\dots+\widehat{\lambda_j}+\dots+\lambda_n\right)^n + \dots + {} + (-1)^{n-k}\sum_{i_1<\dots<i_k}(x_{i_1}+\dots+x_{i_k})^n + \dots + (-1)^{n-1}\left(x_1^n+\dots+x_n^n\right) = n!\prod_{i=1}^{n} x_i,$$

and if $m<n$, then

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^m - \sum_j \left(\lambda_1+\dots+\widehat{\lambda_j}+\dots+\lambda_n\right)^m + \dots + {} + (-1)^{n-k}\sum_{i_1<\dots<i_k}(x_{i_1}+\dots+x_{i_k})^m + \dots + (-1)^{n-1}\left(x_1^m+\dots+x_n^m\right) = 0.$$

Lemma 3.5.20 allows one to replace the nth powers by product of constants; after this Lemma 3.5.19 becomes obvious.

Lemma 3.5.21. *Let $\varphi: x\to x+R_1$, $y\to y+R_2$, $z\to z'$, such that the total degree of all monomials in R_1 and R_2 is greater than or equal to N. Then for $\Psi(\varphi): x\to x+R_1'$, $y\to y+R_2'$, $z\to z''$ with the total degree of all monomials in R_1' and R_2' also greater than or equal to N.*

The proof is similar to the proof of Theorem 3.3.6.

Lemmas 3.5.21, 3.5.17, and 3.5.16 imply the following statement.

Lemma 3.5.22. *Let $\varphi_j\in \mathrm{Aut}_0(K\langle x,y,z\rangle)$, $j=1,2$, such that*

$$\varphi_j(x)=x,\quad \varphi_j(y)=y+\sum_i R_i^j+R_j',\quad \varphi_j(z)=z+Q_j.$$

Let $\deg(R_i^j)=N$. Assume that the degree of all monomials in R_j' is greater than N, while the degree of all monomials in Q is greater than or equal to N; $\deg_z(R_i)=i$, and the z-degree of all monomials in R_1 is positive. Let $R_0^1=0$ and $R_0^2\neq 0$. Then $\Psi(\varphi_1)\neq\varphi_2$.

Consider the automorphism

$$\phi: x\to x,\ y\to y,\ z\to z+P(x,y).$$

Let $\Psi\in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}\,\mathrm{TAut}_0(k\langle x,y,z\rangle)$ stabilize the standard torus action pointwise. Then

$$\Psi(\phi): x\to x,\ y\to y,\ z\to z+Q(x,y).$$

We introduce the notation $\bar\Psi(P)=Q$. We prove that $\bar\Psi(P)=P$ for all P if Ψ stabilizes all linear automorphisms and $\bar\Psi(xy)=xy$. We proceed by strong induction on the total degree. The base of induction corresponds to $k=1$ and $l=1$.

Lemma 3.5.23. *If $\bar\Psi(P)=P$ for all monomials $P(x,y)$ of total degree $<k+l$, then $\bar\Psi(x^ky^l)=x^ky^l$.*

Proof. Let

$$\phi: x\to x,\ y\to y,\ z\to z+x^ky^l,\quad \varphi_1: x\to x+y^l,\ y\to y,\ z\to z,$$
$$\varphi_2: x\to x,\ y\to y+x^k,\ z\to z,\quad \varphi_3: x\to x,\ y\to y,\ z\to z+xy,$$
$$h: x\to x,\ y\to y,\ z\to z-x^{k+1}.$$

Then for $k>1$ and $l>1$ we have

$$g=h\varphi_3^{-1}\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}\varphi_3\varphi_1\varphi_2:$$
$$x\mapsto x-y^l+(y-(x-y^l)^k)^l,\quad y\mapsto y-(x-y^l)^k+(x-y^l+(y-(x-y^l)^k)^l)^k,$$
$$z\mapsto z-xy-x^{k+1}+(x-y^l)(y-(x-y^l)^k).$$

Observe that the heights of $g(x)-x$, $g(y)-y$, and $g(z)-z$ are at least $k+l-1$ for $k>1$ or $l>1$. Then we use Theorem 3.3.6 and the induction step. Applying Ψ implies the result since $\Psi(\varphi_i)=\varphi_i$, $i=1,2,3$, and $\varphi(H_N)\subseteq H_N$ for all N. $\square$

Let
$$M_{k_1,\dots,k_s}=x^{k_1}y^{k_2}\cdots y^{k_s}\quad\text{or}\quad M_{k_1,\dots,k_s}=x^{k_1}y^{k_2}\cdots x^{k_s}$$
for even and odd s, respectively, and $k=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$. Then
$$M_{k_1,\dots,k_s}=M_{k_1,\dots,k_{s-1}}y^{k_s}\quad\text{or}\quad M_{k_1,\dots,k_s}=M_{k_1,\dots,k_{s-1}}x^{k_s}$$
for even s and odd s, reapectively.

We prove that $\bar\Psi(M_{k_1,\dots,k_s})=M_{k_1,\dots,k_s}$. By induction we assume that $\bar\Psi(M_{k_1,\dots,k_{s-1}})=M_{k_1,\dots,k_{s-1}}$.

For any monomial $M=M(x,y)$, we define the automorphism
$$\varphi_M: x\to x,\ y\to y,\ z\to z+M$$
and the automorphisms
$$\phi_k^e: x\to x,\ y\to y+zx^k,\ z\to z\quad\text{and}\quad \phi_k^o: x\to x+zy^k,\ y\to y,\ z\to z.$$
We present the case of even s (the case for odd s is similar).

Let $D^e_{zx^k}$ be a derivation of $K\langle x,y,z\rangle$ such that
$$D^e_{zx^k}(x)=0,\quad D^e_{zx^k}(y)=zx^k,\quad D^e_{zx^k}(z)=0.$$
Similarly, let $D^o_{zy^k}$ be a derivation of $K\langle x,y,z\rangle$ such that
$$D^o_{zy^k}(y)=0,\quad D^o_{zx^k}(x)=zy^k,\quad D_{zy^k}(z)^o=0.$$
The following lemma is proved by a direct computation.

Lemma 3.5.24. *Let*
$$u={\phi^e_{k_s}}^{-1}\varphi(M_{k_1,\dots,k_{s-1}})^{-1}\phi^e_{k_s}\varphi(M_{k_1,\dots,k_{s-1}})$$
for even s and
$$u={\phi^o_{k_s}}^{-1}\varphi(M_{k_1,\dots,k_{s-1}})^{-1}\phi^o_{k_s}\varphi(M_{k_1,\dots,k_{s-1}})$$
for odd s. Then
$$u: x\to x,\ y\to y+M_{k_1,\dots,k_s}+N',\ z\to z+D^e_{zx^k}(M_{k_1,\dots,k_{s-1}})+N$$
for even s and
$$u: x\to x+M_{k_1,\dots,k_s}+N',\ y\to y,\ z\to z+D^o_{zx^k}(M_{k_1,\dots,k_{s-1}})+N$$
for odd s, where N and N' are sums of terms of degree $>k=\sum\limits_{i=1}^{s}k_i$.

Let
$$\psi(M_{k_1,\dots,k_s}): x\to x,\ y\to y,\ z\to z+M_{k_1,\dots,k_s},$$
$$\alpha_e: x\to x,\ y\to y-z,\ z\to z,$$
$$\alpha_o: x\to x-z,\ y\to y,\ z\to z.$$
Let $P_M=\Psi(M)-M$. We prove that $P_M=0$. Let
$$v=\psi(M_{k_1,\dots,k_s})^{-1}\alpha_e\psi(M_{k_1,\dots,k_s})u\alpha_e^{-1}\quad\text{or}\quad v=\psi(M_{k_1,\dots,k_s})^{-1}\alpha_o\psi(M_{k_1,\dots,k_s})u\alpha_o^{-1}$$
for even and odd s, respectively.

The following lemma is also proved by a direct computation.

Lemma 3.5.25.

(a) *We have*

$$v : x \to x,\ y \to y + H,\ z \to z + H_1 + H_2$$

for even s and

$$v : x \to x + H,\ y \to y,\ z \to z + H_1 + H_2$$

for odd s.

(b) *We have*

$$\Psi(v) : x \to x,\ y \to y + P_{M_{k_1,\dots,k_s}} + \widetilde{H},\ z \to z + \widetilde{H_1} + \widetilde{H_2}$$

for even s and

$$\Psi(v) : x \to x + P_{M_{k_1,\dots,k_s}} + \widetilde{H},\ y \to y,\ z \to z + \widetilde{H_1} + \widetilde{H_2}$$

for odd s, where H_2 and $\widetilde{H_2}$ are the sums of terms of degree greater than $k = \sum\limits_{i=1}^{s} k_i$, H and $\widetilde{H}$ are the sums of terms of degree $\geqslant k$ and positive z-degree, and H_1 and $\widetilde{H_1}$ are the sums of terms of degree k and positive z-degree.

Proof of Theorem 3.1.13. The assertion (b) follows from (a). To prove (a), we show that $\bar{\Psi}(M) = M$ for any monomial $M(x,y)$ and for any $\Psi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{TAut}(\langle x,y,z\rangle))$ stabilizing the standard torus action T^3 and ϕ. The automorphism $\Psi(\Phi_M)$ has the form described in Lemma 3.5.25. But in this case Lemma 3.5.22 implies $\bar{\Psi}(M) - M = 0$. □

3.6. Some Open Questions Concerning the Tame Automorphism Group

As the conclusion of the paper, we would like to raise the following questions.

1. Is it true that any automorphism φ of $\mathrm{Aut}(K\langle x_1,\dots,x_n\rangle)$ (in the group-theoretic sense, that is, not necessarily an automorphism preserving the Ind-scheme structure) for $n = 3$ is semi-inner, i.e., is a conjugation by some automorphism or mirror anti-automorphism?
2. Is it true that $\mathrm{Aut}(K\langle x_1,\dots,x_n\rangle)$ is generated by affine automorphisms and the automorphism $x_n \to x_n + x_1x_2$, $x_i \to x_i$, $i \neq n$? For $n \geqslant 5$, it seems to be easier and the answer is probably positive; however, for $n = 3$ the answer is known to be negative (cf. [82,193]). For $n \geqslant 4$, we believe the answer is positive.
3. Is it true that $\mathrm{Aut}(K[x_1,\dots,x_n])$ is generated by linear automorphisms and automorphism $x_n \to x_n + x_1x_2$, $x_i \to x_i$, $i \neq n$? For $n = 3$, the answer is negative (see the proof of the Nagata conjecture; [180,183,200]). For $n \geqslant 4$, it is plausible that the answer is positive.
4. Is any automorphism φ of $\mathrm{Aut}(K\langle x,y,z\rangle)$ (in the group-theoretic sense) semi-inner?
5. Is it true that the conjugation in Theorems 3.1.8 and 3.1.12 can be done by some tame automorphism? Assume that $\psi^{-1}\varphi\psi$ is tame for any tame φ. Does it follow that ψ is tame?
6. Prove Theorem 3.1.13 for $\mathrm{char}(K) = 2$. Does it hold on the set-theoretic level, i.e., $\mathrm{Aut}(\mathrm{TAut}(K\langle x,y,z\rangle))$ are generated by conjugations by an automorphism or the mirror anti-automorphism?

Similar questions can be formulated for nice automorphisms.

BIBLIOGRAPHY

1. *Abdesselam A.* The Jacobian conjecture as a problem of perturbative quantum field theory// Ann. H. Poincaré. — 2003. — *4*, № 2. — P. 199–215.
2. *Abhyankar S., Moh T.* Embedding of the line in the plane// J. Reine Angew. Math. — 1975. — *276*. — P. 148–166.
3. *Amitsur S. A.* Algebras over infinite fields// Proc. Am. Math. Soc. — 1956. — *7*. — P. 35–48.
4. *Amitsur S. A.* A general theory of radicals, III. Applications// Am. J. Math. — 1954. — *75*. — P. 126–136.
5. *Alev J., Le Bruyn L.* Automorphisms of generic 2 by 2 matrices// in: Perspectives in Ring Theory. — Springer, 1988. — P. 69–83.

6. *Amitsur A. S., Levitzki J.* Minimal identities for algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1950. — *1.* — P. 449–463.
7. *Amitsur A. S., Levitzki J.* Remarks on minimal identities for algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1951. — *2.* — P. 320–327.
8. *Anick D. J.* Limits of tame automorphisms of $k[x_1, \dots, x_n]$// J. Algebra. — 1983. — *82*, № 2. — P. 459–468.
9. *Artamonov V. A.* Projective metabelian groups and Lie algebras// Izv. Math. — 1978. — *12*, № 2. — C. 213–223.
10. *Artamonov V. A.* Projective modules over universal enveloping algebras// Math. USSR Izv. — 1985. — *25*, № 3. — C. 429.
11. *Artamonov V. A.* Nilpotence, projectivity, decomposability// Sib. Math. J. — 1991. — *32*, № 6. — C. 901–909.
12. *Artamonov V. A.* The quantum Serre problem// Russ. Math. Surv. — 1998. — *53*, № 4. — C. 3–77.
13. *Artamonov V. A.* Automorphisms and derivations of quantum polynomials// in: Recent Advances in Lie Theory (*Bajo I., Sanmartin E.*, eds.). — Heldermann Verlag, 2002. — P. 109–120.
14. *Artamonov V. A.* Generalized derivations of quantum plane// J. Math. Sci. — 2005. — *131*, № 5. — C. 5904–5918.
15. *Artamonov V. A. Quantum polynomials* in: Advances in Algebra and Combinatorics. — Singapore: World Scientific, 2008. — P. 19–34.
16. *Artin M.* Noncommutative Rings. — Preprint, 1999.
17. *Arzhantsev I., Kuyumzhiyan K., Zaidenberg M.* Infinite transitivity, finite generation, and Demazure roots// Adv. Math. — 2019. — *351.* — P. 1–32.
18. *Asanuma T.* Non-linearizable algebraic k^*-actions on affine spaces. — Preprint, 1996.
19. *Backelin E.* Endomorphisms of quantized Weyl algebras// Lett. Math. Phys. — 2011. — *97*, № 3. — P. 317–338.
20. *Bass H.* A non-triangular action of G_a on A^3// J. Pure Appl. Algebra. — 1984. — *33*, № 1. — P. 1–5.
21. *Bass H., Connell E. H., Wright D.* The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — *7*, № 2. — P. 287–330.
22. *Bavula V. V.* A question of Rentschler and the Dixmier problem// Ann. Math. (2). — 2001. — *154*, № 3. — P. 683–702.
23. *Bavula V. V.* Generalized Weyl algebras and diskew polynomial rings/ `arXiv:1612.08941 [math.RA]`.
24. *Bavula V. V.* The group of automorphisms of the Lie algebra of derivations of a polynomial algebra// J. Alg. Appl. — 2017. — *16*, № 5. — 1750088.
25. *Bavula V. V.* The groups of automorphisms of the Lie algebras of formally analytic vector fields with constant divergence// C. R. Math. — 2014. — *352*, № 2. — P. 85–88.
26. *Bavula V. V.* The inversion formulae for automorphisms of Weyl algebras and polynomial algebras// J. Pure Appl. Algebra. — 2007. — *210.* — P. 147–159.
27. *Bavula V. V.* The inversion formulae for automorphisms of polynomial algebras and rings of differential operators in prime characteristic// J. Pure Appl. Algebra. — 2008. — *212*, № 10. — P. 2320–2337.
28. *Bavula V. V.* An analogue of the conjecture of Dixmier is true for the algebra of polynomial integro-differential operators// J. Algebra. — 2012. — *372.* — P. 237–250.
29. *Bavula V. V.* Every monomorphism of the Lie algebra of unitriangular polynomial derivations is an authomorphism// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. — 2012. — *350*, № 11–12. — P. 553–556.
30. *Bavula V. V.* The Jacobian conjecture$_{2n}$ implies the Dixmier problem$_n$/ `arXiv:math/0512250[math.RA]`.
31. *Beauville A., Colliot-Thelene J.-L., Sansuc J.-J., and Swinnerton-Dyer P.* Varietes stablement rationnelles non rationnelles// Ann. Math. — 1985. — *121.* — P. 283–318.
32. *Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D.* Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures// Ann. Phys. — 1978. — *111*, № 1. — P. 61–110.
33. *Belov A.* Linear recurrence equations on a tree// Math. Notes. — 2005. — *78*, № 5. — C. 603–609.
34. *Belov A.* Local finite basis property and local representability of varieties of associative rings.// Izv. Math. — 2010. — *74.* — C. 1–126.
35. *Belov A., Bokut L., Rowen L., Yu J.-T.* The Jacobian conjecture, together with Specht and Burnside-type problems// in: Automorphisms in Birational and Affine Geometry. — Springer, 2014. — P. 249–285.
36. *Belov A., Makar-Limanov L., Yu J. T.* On the generalised cancellation conjecture// J. Algebra. — 2004. — *281.* — P. 161–166.

37. *Belov A., Rowen L. H., Vishne U.* Structure of Zariski-closed algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 2012. — *362*. — P. 4695–4734.
38. *Belov-Kanel A., Yu J.-T.* On the lifting of the Nagata automorphism// Selecta Math. — 2011. — *17*. — P. 935–945.
39. *Kanel-Belov A., Berzins A., Lipyanski R.* Automorphisms of the semigroup of endomorphisms of free associative algebras// Int. J. Algebra Comp. — 2007. — *17*, № 5/6. — P. 923–939.
40. *Belov-Kanel A., Elishev A.* On planar algebraic curves and holonomic D-modules in positive characteristic// J. Algebra Appl. — 2016. — *15*, № 8. — 1650155.
41. *Belov-Kanel A., Kontsevich M.* Automorphisms of the Weyl algebra// Lett. Math. Phys. — 2005. — *74*, № 2. — P. 181–199.
42. *Belov-Kanel A., Kontsevich M.* The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture// Moscow Math. J. — 2007. — *7*, № 2. — C. 209–218.
43. *Belov-Kanel A., Lipyanski R.* Automorphisms of the endomorphism semigroup of a polynomial algebra// J. Algebra. — 2011. — *333*, № 1. — P. 40–54.
44. *Belov-Kanel A., Yu J.-T.* Stable tameness of automorphisms of $F\langle x, y, z\rangle$ fixing z// Selecta Math. — 2012. — *18*. — P. 799–802.
45. *Bergman G. M.* Centralizers in free associative algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *137*. — P. 327–344.
46. *Bergman G. M.* The diamond lemma for ring theory// Adv. Math. — 1978. — *29*, № 2. — P. 178–218.
47. *Berson J., van den Essen A., Wright D.* Stable tameness of two-dimensional polynomial automorphisms over a regular ring// Adv. Math. — 2012. — *230*. — P. 2176–2197.
48. *Birman J.* An inverse function theorem for free groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1973. — *41*. — P. 634–638.
49. *Bonnet P., Vénéreau S.* Relations between the leading terms of a polynomial automorphism// J. Algebra. — 2009. — *322*, № 2. — P. 579—599.
50. *Berzins A.* The group of automorphisms of semigroup of endomorphisms of free commutative and free associative algebras/ `arXiv: abs/math/0504015 [math.AG]`.
51. *Białynicki-Birula A.* Remarks on the action of an algebraic torus on k^n, I// Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1966. — *14*. — P. 177–181.
52. *Białynicki-Birula A.* Remarks on the action of an algebraic torus on k^n, II// Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1967. — *15*. — P. 123–125.
53. *Białynicki-Birula A.* Some theorems on actions of algebraic groups// Ann. Math. — 1973. — *98*, № 3. — P. 480–497.
54. *Bitoun T.* The p-support of a holonomic D-module is lagrangian, for p large enough/ `arXiv: 1012.4081 [math.AG]`.
55. *Bodnarchuk Yu.* Every regular automorphism of the affine Cremona group is inner// J. Pure Appl. Algebra. — 2001. — *157*. — P. 115–119.
56. *Bokut L., Zelmanov E.* Selected works of A. I. Shirshov. — Springer, 2009.
57. *Bokut L. A.* Embedding Lie algebras into algebraically closed Lie algebras// Algebra Logika. — 1962. — *1*. — C. 47–53.
58. *Bokut L. A.* Embedding of algebras into algebraically closed algebras// Dokl. Akad. Nauk. — 1962. — *145*, № 5. — C. 963–964.
59. *Bokut L. A.* Theorems of embedding in the theory of algebras// Colloq. Math. — 1966. — *14*. — P. 349–353.
60. *Brešar M., Procesi C., Špenko Š.* Functional identities on matrices and the Cayley–Hamilton polynomial/ `arXiv: 1212.4597 [math.RA]`.
61. *Campbell L. A.* A condition for a polynomial map to be invertible// Math. Ann. — 1973. — *205*, № 3. — P. 243–248.
62. *Cohn P. M.* Subalgebras of free associative algebras// Proc. London Math. Soc. — 1964. — *3*, № 4. — P. 618–632.
63. *Cohn P. M.* Progress in free associative algebras// Isr. J. Math. — 1974. — *19*, № 1-2. — P. 109–151.
64. *Cohn P. M.* A brief history of infinite-dimensional skew fields// Math. Sci. — 1992. — *17*. — P. 1–14.
65. *Cohn P. M.* Free Rings and Their Relations. — Academic Press, 1985.

66. *Czerniakiewicz A. J.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — *160.* — P. 393–401.
67. *Czerniakiewicz A. J.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — *171.* — P. 309–315.
68. *Danielewski W.* On the cancellation problem and automorphism groups of affine algebraic varieties. — Warsaw: Preprint, 1989.
69. *De Bondt M., van den Essen A.* The Jacobian conjecture for symmetric Druzkowski mappings. — University of Nijmegen, 2004.
70. *De Bondt M., van den Essen A.* A reduction of the Jacobian conjecture to the symmetric case// Proc. Am. Math. Soc. — 2005. — *133*, № 8. — P. 2201–2205.
71. *De Concini C., Procesi C.* A characteristic free approach to invariant theory// in: Young Tableaux in Combinatorics, Invariant Theory, and Algebra. — Elsevier, 1982. — P. 169–193.
72. *Déserti J.* Sur le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine// J. Algebra. — 2006. — *297.* — P. 584–599.
73. *Dicks W.* Automorphisms of the free algebra of rank two// Contemp. Math. — 1985. — *43.* — P. 63–68.
74. *Dicks W., Lewin J.* Jacobian conjecture for free associative algebras// Commun. Algebra. — 1982. — *10*, № 12. — P. 1285–1306.
75. *Dixmier J.* Sur les algebres de Weyl// Bull. Soc. Math. France. — 1968. — *96.* — P. 209–242.
76. *Dodd C.* The p-cycle of holonomic D-modules and auto-equivalences of the Weyl algebra/ `arXiv: 1510.05734 [math.OC]`.
77. *Donkin S.* Invariants of several matrices// Inv. Math. — 1992. — *110*, № 1. — P. 389–401.
78. *Donkin S.* Invariant functions on matrices// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1993. — *113*, № 1. — P. 23–43.
79. *Drensky V., Yu J.-T.* A cancellation conjecture for free associative algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 2008. — *136*, № 10. — P. 3391–3394.
80. *Drensky V., Yu J.-T.* The strong Anick conjecture// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 2006. — *103.* — P. 4836–4840.
81. *Drensky V., Yu J.-T.* Coordinates and automorphisms of polynomial and free associative algebras of rank three// Front. Math. China. — 2007. — *2*, № 1. — P. 13–46.
82. *Drensky V., Yu J.-T.* The strong Anick conjecture is true// J. Eur. Math. Soc. — 2007. — *9.* — P. 659–679.
83. *Drużkowski L.* An effective approach to Keller's Jacobian conjecture// Math. Ann. — 1983. — *264*, № 3. — P. 303–313.
84. *Drużkowski L.* The Jacobian conjecture: symmetric reduction and solution in the symmetric cubic linear case// Ann. Polon. Math. — 2005. — *87*, № 1. — P. 83–92.
85. *Drużkowski L. M.* New reduction in the Jacobian conjecture// in: Effective Methods in Algebraic and Analytic Geometry. — Kraków: Univ. Iagel. Acta Math., 2001. — P. 203–206.
86. *Elishev A.* Automorphisms of polynomial algebras, quantization and Kontsevich conjecture/ PhD Thesis — Moscow Institute of Physics and Technology, 2019.
87. *Elishev A., Kanel-Belov A., Razavinia F., Yu J.-T., Zhang W.* Noncommutative Białynicki-Birula theorem./ `arXiv: 1808.04903 [math.AG]`.
88. *Elishev A., Kanel-Belov A., Razavinia F., Yu J.-T., Zhang W.* Torus actions on free associative algebras, lifting and Białynicki-Birula type theorems/ `arXiv: 1901.01385 [math.AG]`.
89. *van den Bergh M.* On involutivity of p-support// Int. Math. Res. Not. — 2015. — *15.* — P. 6295–6304.
90. *van den Essen A.* The amazing image conjecture/ `arXiv: 1006.5801 [math.AG]`.
91. *van den Essen A., de Bondt M.* Recent progress on the Jacobian conjecture// Ann. Polon. Math. — 2005. — *87.* — P. 1–11.
92. *van den Essen A., de Bondt M.* The Jacobian conjecture for symmetric Drućkowski mappings// Ann. Polon. Math. — 2005. — *86*, № 1. — P. 43–46.
93. *van den Essen A., Wright D., Zhao W.* On the image conjecture// J. Algebra. — 2011. — *340.* — P. 211— 224.
94. *Fox R. H.* Free differential calculus, I. Derivation in the free group ring// Ann. Math. (2). — 1953. — *57.* — P. 547–560.
95. *Gizatullin M. Kh., Danilov V. I.* Automorphisms of affine surfaces, I// Izv. Math. — 1975. — *9*, № 3. — C. 493–534.

96. *Gizatullin M. Kh., Danilov V. I.* Automorphisms of affine surfaces, II// Izv. Math. — 1977. — *11*, № 1. — C. 51–98.
97. *Gorni G., Zampieri G.* Yagzhev polynomial mappings: on the structure of the Taylor expansion of their local inverse// Polon. Math. — 1996. — *64.* — P. 285–290.
98. *Fedosov B.* A simple geometrical construction of deformation quantization// J. Differ. Geom. — 1994. — *40*, № 2. — P. 213–238.
99. *Frayne T., Morel A. C., Scott D. S.* Reduced direct products// J. Symb. Logic.. — *31*, № 3. — P. 1966.
100. *Fulton W., Harris J.* Representation Theory. A First Course. — Springer-Verlag, 1991.
101. *Furter J.-P., Kraft H.* On the geometry of the automorphism groups of affine varieties/ `arXiv:1809.04175 [math.AG]`.
102. *Gutwirth A.* The action of an algebraic torus on the affine plane// Trans. Am. Math. Soc. — 1962. — *105*, № 3. — P. 407–414.
103. *Jung H. W. E.* Über ganze birationale Transformationen der Ebene// J. Reine Angew. Math. — 1942. — *184.* — P. 161–174.
104. *Kaliman S., Koras M., Makar-Limanov L., Russell P.* C^*-actions on C^3 are linearizable// Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. — 1997. — *3.* — P. 63–71.
105. *Kaliman S., Zaidenberg M.* Families of affine planes: the existence of a cylinder// Michigan Math. J. — 2001. — *49.* — P. 353–367.
106. *Kuroda S.* Shestakov–Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism// Tôhoku Math. J. — 2010. — *62.* — P. 75–115.
107. *Kuzmin E., Shestakov I. P.* Nonassociative structures// Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Probl. Mat. Fundam. Napr. — 1990. — *57.* — C. 179–266.
108. *Karas' M.* Multidegrees of tame automorphisms of C^n// Dissert. Math. — 2011. — *477.*
109. *Khoroshkin A., Piontkovski D.* On generating series of finitely presented operads/ `arXiv:1202.5170 [math.QA]`.
110. *Kambayashi T.* Pro-affine algebras, Ind-affine groups and the Jacobian problem// J. Algebra. — 1996. — *185*, № 2. — P. 481–501.
111. *Kambayashi T.* Some basic results on pro-affine algebras and Ind-affine schemes// Osaka J. Math. — 2003. — *40*, № 3. — P. 621–638.
112. *Kambayashi T., Russell P.* On linearizing algebraic torus actions// J. Pure Appl. Algebra. — 1982. — *23*, № 3. — P. 243–250.
113. *Kanel-Belov A., Borisenko V., Latysev V.* Monomial algebras// J. Math. Sci. — 1997. — *87*, № 3. — C. 3463–3575.
114. *Kanel-Belov A., Elishev A.* On planar algebraic curves and holonomic $\mathcal{D}$-modules in positive characteristic/ `arXiv:1412.6836 [math.AG]`.
115. *Kanel-Belov A., Elishev A., Yu J.-T.* Independence of the B-KK isomorphism of infinite prime/ `arXiv:1512.06533 [math.AG]`.
116. *Kanel-Belov A., Elishev A., Yu J.-T.* Augmented polynomial symplectomorphisms and quantization/// `arXiv:1812.02859 [math.AG]`.
117. *Kanel-Belov A., Grigoriev S., Elishev A., Yu J.-T., Zhang W.* Lifting of polynomial symplectomorphisms and deformation quantization// Commun. Algebra. — 2018. — *46*, № 9. — P. 3926–3938.
118. *Kanel-Belov A., Malev S., Rowen L.* The images of noncommutative polynomials evaluated on 2×2 matrices// Proc. Am. Math. Soc. — 2012. — *140.* — P. 465–478.
119. *Kanel-Belov A., Malev S., Rowen L.* The images of multilinear polynomials evaluated on 3×3 matrices// Proc. Am. Math. Soc. — 2016. — *144.* — P. 7–19.
120. *Kanel-Belov A., Razavinia F., Zhang W.* Bergman's centralizer theorem and quantization// Commun. Algebra. — 2018. — *46*, № 5. — P. 2123–2129.
121. *Kanel-Belov A., Razavinia F., Zhang W.* Centralizers in free associative algebras and generic matrices/ `arXiv:1812.03307 [math.RA]`.
122. *Kanel-Belov A., Rowen L. H., Vishne U.* Full exposition of Specht's problem// Serdica Math. J. — 2012. — *38.* — P. 313–370.
123. *Kanel-Belov A., Yu J.-T., Elishev A.* On the augmentation topology of automorphism groups of affine spaces and algebras// Int. J. Algebra Comput. * — 2018. — *28*, № 08. — P. 1449–1485.
124. *Keller B.* Notes for an Introduction to Kontsevich's Quantization Theorem, 2003.

125. *Keller O. H.* Ganze Cremona Transformationen// Monatsh. Math. Phys. — 1939. — *47*, № 1. — P. 299–306.
126. *Kolesnikov P. S.* The Makar-Limanov algebraically closed skew field// Algebra Logic. — 2000. — *39*, № 6. — C. 378–395.
127. *Kolesnikov P. S.* Different definitions of algebraically closed skew fields// Algebra Logic. — 2001. — *40*, № 4. — C. 219–230.
128. *Kontsevich M.* Deformation quantization of Poisson manifolds// Lett. Math. Phys. — 2003. — *66*, № 3. — P. 157–216.
129. *Kontsevich M.* Holonomic D-modules and positive characteristic// Jpn. J. Math. — 2009. — *4*, № 1. — P. 1–25.
130. *Koras M., Russell P.* C^*-actions on C^3: The smooth locus of the quotient is not of hyperbolic type// J. Alg. Geom. — 1999. — *8*, № 4. — P. 603–694.
131. *Kovalenko S., Perepechko A., Zaidenberg M.* On automorphism groups of affine surfaces// in: Algebraic Varieties and Automorphism Groups. — Math. Soc. Jpn., 2017. — P. 207–286.
132. *Kraft H., Regeta A.* Automorphisms of the Lie algebra of vector fields// J. Eur. Math. Soc. — 2017. — *19*, № 5. — P. 1577–1588.
133. *Kraft H., Stampfli I.* On automorphisms of the affine Cremona group// Ann. Inst. Fourier. — 2013. — *63*, № 3. — P. 1137–1148.
134. *Kulikov V. S.* Generalized and local Jacobian problems// Izv. Math. — 1993. — *41*, № 2. — C. 351–365.
135. *Kulikov V. S.* The Jacobian conjecture and nilpotent maps// J. Math. Sci. — 2001. — *106*, № 5. — C. 3312–3319.
136. *Levy R., Loustaunau P., Shapiro J.* The prime spectrum of an infinite product of copies of Z// Fundam. Math. — 1991. — *138*. — P. 155–164.
137. *Li Y.-C., Yu J.-T.* Degree estimate for subalgebras// J. Algebra. — 2012. — *362*. — P. 92–98.
138. *Gaiotto D., Witten E.* Probing quantization via branes/ `arXiv:2107.12251 [hep-th]`.
139. *Lothaire M.* Combinatorics on Words. — Cambridge Univ. Press, 1997.
140. *Makar-Limanov L.* A new proof of the Abhyankar–Moh-=Suzuki theorem/ `arXiv:1212.0163 [math.AC]`.
141. *Makar-Limanov L.* Automorphisms of a free algebra with two generators// Funct. Anal. Appl. — 1970. — *4*, № 3. — C. 262–264.
142. *Makar-Limanov L.* On automorphisms of Weyl algebra// Bull. Soc. Math. France. — 1984. — *112*. — P. 359–363.
143. *Makar-Limanov L., Yu J.-T.* Degree estimate for subalgebras generated by two elements// J. Eur. Math. Soc. — 2008. — *10*. — P. 533–541.
144. *Makar-Limanov L.* Algebraically closed skew fields// J. Algebra. — 1985. — *93*, № 1. — P. 117–135.
145. *Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U.* Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables// J. Algebra. — 2009. — *322*, № 9. — P. 3318–3330.
146. *Markl M., Shnider S., Stasheff J.* Operads in Algebra, Topology, and Physics. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2002.
147. *Miyanishi M., Sugie T.* Affine surfaces containing cylinderlike open sets// J. Math. Kyoto Univ. — 1980. — *20*. — P. 11–42.
148. *Nagata M.* On the automorphism group of $k[x, y]$. — Tokyo: Kinokuniya, 1972.
149. *Nielsen J.* Die Isomorphismen der allgemeinen, undendlichen Gruppen mit zwei Eerzeugenden// Math. Ann. — 1918. — *78*. — P. 385–397.
150. *Nielsen J.* Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen// Math. Ann. — 1924. — *91*. — P. 169–209.
151. *Ol'shanskij A. Yu.* Groups of bounded period with subgroups of prime order// Algebra and Logic. — 1983. — *21*. — C. 369–418.
152. *Peretz R.* Constructing polynomial mappings using non-commutative algebras// in: Affine Algebraic Geometry. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2005. — P. 197–232.
153. *Piontkovski D.* Operads versus Varieties: a dictionary of universal algebra. — Preprint, 2011.
154. *Piontkovski D.* On Kurosh problem in varieties of algebras// J. Math. Sci. — 2009. — *163*, № 6. — C. 743–750.
155. *Razmyslov Yu. P.* Algebras satisfying identity relations of Capelli type// Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. — 1981. — *45*. — C. 143–166, 240.

156. *Razmyslov Yu. P.* Identities of Algebras and Their Representations. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1994.
157. *Razmyslov Yu. P., Zubrilin K. A.* Nilpotency of obstacles for the representability of algebras that satisfy Capelli identities, and representations of finite type// Russ. Math. Surveys — 1993. — *48.* — C. 183–184.
158. *Reutenauer C.* Applications of a noncommutative Jacobian matrix// J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — *77.* — P. 634–638.
159. *Rowen L. H.* Graduate Algebra: Noncommutative View. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2008.
160. *Moh T.-T.* On the global Jacobian conjecture for polynomials of degree less than 100. — Preprint, 1983.
161. *Moh T.-T.* On the Jacobian conjecture and the configurations of roots// J. Reine Angew. Math. — 1983. — *340.* — P. 140–212.
162. *Moyal J. E.* Quantum mechanics as a statistical theory// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1949. — *45*, № 1. — P. 99–124.
163. *Orevkov S. Yu.* The commutant of the fundamental group of the complement of a plane algebraic curve// Russ. Math. Surv. — 1990. — *45*, № 1. — C. 221–222.
164. *Orevkov S. Yu.* An example in connection with the Jacobian conjecture// Math. Notes. — 1990. — *47*, № 1. — C. 82–88.
165. *Orevkov S. Yu.* The fundamental group of the complement of a plane algebraic curve// Sb. Math. — 1990. — *65*, № 1. — C. 267–267.
166. *Plotkin B.* Varieties of algebras and algebraic varieties// Israel J. Math. — 1996. — *96*, № 2. — P. 511–522.
167. *Plotkin B.* Algebras with the same (algebraic) geometry/ `arXiv: math/0210194 [math.GM]`.
168. *Popov V. L.* Around the Abhyankar-Sathaye conjecture/ `arXiv: 1409.6330 [math.AG]`.
169. *Procesi C.* Rings with Polynomial Identities. — Marcel Dekker, 1973.
170. *Procesi C.* The invariant theory of $n \times n$ matrices// Adv. Math. — 1976. — *19*, № 3. — P. 306–381.
171. *Razar M.* Polynomial maps with constant Jacobian// Israel J. Math. — 1979. — *32*, № 2-3. — P. 97–106.
172. *Robinson A.* Non-Standard Analysis. — Princeton Univ. Press, 2016.
173. *Rosset S.* A new proof of the Amitsur–Levitzki identity// Israel J. Math. — 1976. — *23*, № 2. — P. 187–188.
174. *Rowen L. H.* Graduate Algebra: Noncommutative View. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2008.
175. *Schofield A. H.* Representations of Rings over Skew Fields. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
176. *Schwarz G.* Exotic algebraic group actions// C. R. Acad. Sci. Paris — 1989. — *309.* — P. 89–94.
177. *Shafarevich I. R.* On some infinite-dimensional groups, II// Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Mat. — 1981. — *45*, № 1. — C. 214–226.
178. *Sharifi Y.* Centralizers in Associative Algebras/ Ph.D. thesis, 2013.
179. *Shestakov I. P.* Finite-dimensional algebras with a nil basis// Algebra Logika. — 1971. — *10.* — C. 87–99.
180. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* Degree estimate and two-generated subalgebras of rings of polynomials// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17.* — P. 181–196.
181. *Shestakov I., Umirbaev U.* The Nagata automorphism is wild// Proc. Natl. Acad. Sci. — 2003. — *100*, № 22. — P. 12561–12563.
182. *Shestakov I., Umirbaev U.* Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17*, № 1. — P. 181–196.
183. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17.* — P. 197–220.
184. *Umirbaev U., Shestakov I.* Subalgebras and automorphisms of polynomial rings// Dokl. Ross. Akad. Nauk — 2002. — *386*, № 6. — C. 745–748.
185. *Shpilrain V.* On generators of L/R^2 Lie algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1993. — *119.* — P. 1039–1043.
186. *Singer D.* On Catalan trees and the Jacobian conjecture// Electron. J. Combin. — 2001. — *8*, № 1. — 2.
187. *Shpilrain V., Yu J.-T.* Affine varieties with equivalent cylinders// J. Algebra. — 2002. — *251*, № 1. — P. 295–307.
188. *Shpilrain V., Yu J.-T.* Factor algebras of free algebras: on a problem of G. Bergman// Bull. London Math. Soc. — 2003. — *35.* — P. 706–710.
189. *Suzuki M.* Propiétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébraique de l'espace C^2// J. Math. Soc. Jpn. — 1974. — *26.* — P. 241–257.

190. *Tsuchimoto Y. Preliminaries on Dixmier conjecture* Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A. Math. — 2003. — *24.* — P. 43–59.
191. *Tsuchimoto Y.* Endomorphisms of Weyl algebra and p-curvatures// Osaka J. Math. — 2005. — *42*, № 2. — P. 435–452.
192. *Tsuchimoto Y.* Auslander regularity of norm based extensions of Weyl algebra/// `arXiv: 1402.7153 [math.AG]`.
193. *Umirbaev U.* On the extension of automorphisms of polynomial rings// Sib. Math. J. — 1995. — *36*, № 4. — C. 787–791.
194. *Umirbaev U. U.* On Jacobian matrices of Lie algebras// в кн.: Proc. 6 All-Union Conf. on Varieties of Algebraic Systems. — Magnitogorsk, 1990. — C. 32–33.
195. *Umirbaev U. U.* Shreer varieties of algebras// Algebra Logic. — 1994. — *33.* — C. 180–193.
196. *Umirbaev U. U.* Tame and wild automorphisms of polynomial algebras and free associative algebras. — Preprint MPIM 2004–108..
197. *Umirbaev U.* The Anick automorphism of free associative algebras// J. Reine Angew. Math. — 2007. — *605.* — P. 165–178.
198. *Umirbaev U. U.* Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras in three variables// J. Reine Angew. Math. — 2006. — *600.* — P. 203–235.
199. *Umirbaev U. U.* Defining relations for automorphism groups of free algebras// J. Algebra. — 2007. — *314.* — P. 209–225.
200. *Umirbaev U. U., Yu J.-T.* The strong Nagata conjecture// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 2004. — *101.* — P. 4352–4355.
201. *Urech C., Zimmermann S.* Continuous automorphisms of Cremona groups/ `arXiv: 1909.11050 [math.AG]`.
202. *van den Essen A.* Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. — Birkhäuser, 2012.
203. *van der Kulk W.* On polynomial rings in two variables// Nieuw Arch. Wisk. (3) — 1953. — *1.* — P. 33–41.
204. *Vitushkin A. G.* A criterion for the representability of a chain of σ-processes by a composition of triangular chains// Math. Notes — 1999. — *65*, № 5-6. — C. 539–547.
205. *Vitushkin A. G.* On the homology of a ramified covering over C^2// Math. Notes. — 1998. — *64*, № 5. — C. 726–731.
206. *Vitushkin A. G.* Evaluation of the Jacobian of a rational transformation of C^2 and some applications// Math. Notes — 1999. — *66*, № 2. — C. 245–249.
207. *Wedderburn J. H. M.* Note on algebras// Ann. Math. — 1937. — *38.* — P. 854–856.
208. *Wright D.* The Jacobian conjecture as a problem in combinatorics/ `arXiv:math/0511214 [math.CO]`.
209. *Wright D.* The Jacobian conjecture: Ideal membership questions and recent advances// Contemp. Math. — 2005. — *369.* — P. 261–276.
210. *Yagzhev A. V.* Finiteness of the set of conservative polynomials of a given degree// Math. Notes. — 1987. — *41*, № 2. — C. 86—88.
211. *Yagzhev A. V.* Nilpotency of extensions of an abelian group by an abelian group// Math. Notes. — 1988. — *43*, № 3-4. — C. 244–245.
212. *Yagzhev A. V.* Locally nilpotent subgroups of the holomorph of an abelian group// Mat. Zametki — 1989. — *46*, № 6. — C. 118.
213. *Yagzhev A. V.* A sufficient condition for the algebraicity of an automorphism of a group// Algebra Logic. — 1989. — *28*, № 1. — C. 83–85.
214. *Yagzhev A. V.* The generators of the group of tame automorphisms of an algebra of polynomials// Sib. Mat. Zh. — 1977. — *18*, № 1. — P. 222–225.
215. *Wang S.* A Jacobian criterion for separability// J. Algebra. — 1980. — *65*, № 2. — P. 453–494.
216. *Wright D.* On the Jacobian conjecture// Ill. J. Math. — 1981. — *25*, № 3. — P. 423–440.
217. *Yagzhev A. V.* Invertibility of endomorphisms of free associative algebras// Math. Notes. — 1991. — *49*, № 3–4. — C. 426—430.
218. *Yagzhev A. V.* Endomorphisms of free algebras// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 1. — C. 133—141.
219. *Yagzhev A. V.* On the algorithmic problem of recognizing automorphisms among endomorphisms of free associative algebras of finite rank// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 1. — C. 142–146.
220. *Yagzhev A. V.* Keller's problem// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 5. — C. 747–754.

221. *A. V. Yagzhev* Engel algebras satisfying Capelli identities// в кн.: Proceedings of Shafarevich Seminar. — Moscow: Steklov Math. Inst., 2000. — С. 83–88 (in Russian).
222. *A. V. Yagzhev* Endomorphisms of polynomial rings and free algebras of different varieties// в кн.: Proceedings of Shafarevich Seminar. — Moscow: Steklov Math. Inst., 2000. — С. 15–47 (in Russian).
223. *Yagzhev A. V.* Invertibility criteria of a polynomial mapping. — Unpublished (in Russian).
224. *Zaks A.* Dedekind subrings of $K[x_1, \dots, x_n]$ are rings of polynomials// Israel J. Math. — 1971. — *9*. — P. 285–289.
225. *Zelmanov E.* On the nilpotence of nilalgebras// Lect. Notes Math. — 1988. — *1352*. — P. 227–240.
226. *Zhao W.* New proofs for the Abhyankar–Gurjar inversion formula and the equivalence of the Jacobian conjecture and the vanishing conjecture// Proc. Am. Math. Soc. — 2011. — *139*. — P. 3141–3154.
227. *Zhao W.* Mathieu subspaces of associative algebras// J. Algebra. — 2012. — *350*. — P. 245–272.
228. *Zhevlakov K. A., Slin'ko A. M., Shestakov I. P., Shirshov A. I.* Nearly Associative Rings. — Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
229. *Zubrilin K. A.* Algebras that satisfy the Capelli identities// Sb. Math. — 1995. — *186*, № 3. — С. 359–370.
230. *Zubrilin K. A.* On the class of nilpotence of obstruction for the representability of algebras satisfying Capelli identities// Fundam. Prikl. Mat. — 1995. — *1*, № 2. — С. 409–430.
231. *Zubrilin K. A.* On the Baer ideal in algebras that satisfy the Capelli identities// Sb. Math. — 1998. — *189*. — С. 1809–1818.
232. *Zaidenberg M. G.* On exotic algebraic structures on affine spaces// in: Geometric Complex Analysis. — World Scientific, 1996. — P. 691–714.
233. *Zhang W.* Alternative proof of Bergman's centralizer theorem by quantization/ Master thesis — Bar-Ilan University, 2017.
234. *Zhang W.* Polynomial automorphisms and deformation quantization/ Ph.D. thesis — Bar-Ilan University, 2019.
235. *Zubkov A. N.* Matrix invariants over an infinite field of finite characteristic// Sib. Math. J. — 1993. — *34*, № 6. — С. 1059–1065.
236. *Zubkov A. N.* A generalization of the Razmyslov–Procesi theorem// Algebra Logic. — 1996. — *35*, № 4. — С. 241–254.

Елишев Андрей Михайлович
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: ame1511@mail.ru

Канель-Белов Алексей Яковлевич
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: kanelster@gmail.com

Razavinia Farrokh
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: farrokh.razavinia@gmail.com

Jie-Tai Yu
Шэньчженьский университет, Шэньчжень, Китайская народная республика
E-mail: yujt@hkucc.hku.hk

Wenchao Zhang
Школа математики и статистики, Университет Хуэйчжоу, Китайская народная республика
E-mail: zhangwc@hzu.edu.cn

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.