ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 214 (2022)

Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 214 (2022)

Дата публикации 8 августа 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года Выходит 15 раз в год

Редакторы-составители выпуска	А. В. Аргучинцев, М. В. Фалалеев, М. В. Шамолин
Научный редактор выпуска	Е. Е. Букжалёв
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782-4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-3-20
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-21-29
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-30-36
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-37-43
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-44-52
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-53-59
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-60-68
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-69-75
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-76-81
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-82-106
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-107-126

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 214

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ, КОМБИНАТОРИКА

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 3–20
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-3-20

УДК 514.763

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. III. ФОРМЫ КРИВИЗНЫ ПЯТИМЕРНЫХ ЖЕСТКИХ h-ПРОСТРАНСТВ В КОСОНОРМАЛЬНОМ РЕПЕРЕ

© 2022 г. **А. В. АМИНОВА, Д. Р. ХАКИМОВ**

Аннотация. Работа посвящена имеющей многочисленные геометрические и физические приложения проблеме исследования многомерных псевдоримановых многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Настоящая статья является третьей частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *212*. — С. 10–29. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *213*. — С. 10–37. Продолжение будет опубликовано в следующих выпусках.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h-пространство, система дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнение Киллинга, проективная алгебра Ли.

LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE MOTIONS OF FIVE-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES. III. CURVATURE FORMS OF FIVE-DIMENSIONAL RIGID h-SPACES IN A SKEW-NORMAL FRAME

© 2022 **A. V. AMINOVA, D. R. KHAKIMOV**

Abstract. This work is devoted to the problem of studying multidimensional pseudo-Riemannian manifolds that admit Lie algebras of infinitesimal projective (in particular, affine) transformations, wider than Lie algebras of infinitesimal homotheties. Such manifolds have numerous geometric and physical applications. This paper is the third part of the work. The first part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *212*. — P. 10–29. The second part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *213*. — P. 10–37. Continuation will be published in future issues.

Keywords and phrases: differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space, system of partial differential equations, nonhomothetical projective motion, Killing equation, projective Lie algebra.

AMS Subject Classification: 53Z05

3. Формы кривизны пятимерных жестких h-пространств в косонормальном репере

Для получения максимальных аффинной и проективной групп (алгебр Ли) нужно найти общее решение уравнений Эйзенхарта в каждом из найденных h-пространств, что приводит к необходимости рассмотрения условий интегрируемости этих уравнений, включающих тензор кривизны R. В частности, нужно выделить пространства постоянной кривизны S^n, допускающие максимальную n^2+2n-мерную проективную группу, строение которой хорошо известно (см., например, [13, гл. 4]).

Цель этого раздела — определить все пятимерные жесткие h-пространства непостоянной кривизны, вычислив с помощью структурных уравнений Картана формы кривизны найденных пространств в адаптированном косонормальном репере и получив необходимые и достаточные условия постоянства кривизны.

3.1. Формы кривизны h-пространств типа $\{221\}$.

3.1.1. Исследуем h-пространства H_{221} типа $\{221\}$. Метрика g h-пространства H_{221} и соответствующая билинейная форма $a = h - 2\varphi g$ определяются каноническими формами (**??**), причем выполняются уравнения (**??**), в которых вместо λ_1, λ_2, λ_3 подставлены соответственно f_1, f_2, f_3:

$$Y_1\varphi = Y_3\varphi = 0, \tag{3.1}$$

$$df_1 = e_1(Y_2\varphi)\theta_1, \quad df_2 = e_2(Y_4\varphi)\theta_3, \quad df_3 = 2e_3(Y_5\varphi)\theta_5, \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \omega_{14} = \dfrac{Y_4\varphi}{f_2 - f_1}\theta_1, \quad \omega_{15} = \dfrac{Y_5\varphi}{f_3 - f_1}\theta_1, \quad \omega_{21} = (Y_2\varphi)\theta_2, \quad \omega_{23} = \dfrac{Y_2\varphi}{f_2 - f_1}\theta_3, \\ \omega_{24} = \dfrac{Y_4\varphi}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 + \dfrac{Y_4\varphi}{f_2 - f_1}\theta_2 - \dfrac{Y_2\varphi}{(f_2 - f_1)^2}\theta_3 + \dfrac{Y_2\varphi}{f_2 - f_1}\theta_4, \\ \omega_{25} = \dfrac{Y_5\varphi}{(f_3 - f_1)^2}\theta_1 + \dfrac{Y_5\varphi}{f_3 - f_1}\theta_2 + \dfrac{Y_2\varphi}{f_3 - f_1}\theta_5, \\ \omega_{35} = \dfrac{Y_5\varphi}{f_3 - f_2}\theta_3, \quad \omega_{43} = (Y_4\varphi)\theta_4, \\ \omega_{45} = \dfrac{Y_5\varphi}{(f_3 - f_2)^2}\theta_3 + \dfrac{Y_5\varphi}{f_3 - f_2}\theta_4 + \dfrac{Y_4\varphi}{f_3 - f_2}\theta_5, \end{cases} \tag{3.3}$$

где

$$\varphi = f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3 \tag{3.4}$$

— определяющая функция проективного движения типа $\{221\}$, $\omega_{ij} = \gamma_{jik}\theta^k$ есть 1-форма связности в косонормальном репере (Y_h),

$$f_1 = \varepsilon_1 x^2 + (1 - \varepsilon_1)\kappa_1, \quad f_2 = \varepsilon_2 x^4 + (1 - \varepsilon_2)\kappa_2, \quad f_3 = \mu(x^5),$$

ε_1 и ε_2 принимают значения 0 и 1, κ_1, κ_2 — постоянные, $e_1, e_2, e_3 = \pm 1$.

Используя первое структурное уравнение Картана

$$d\theta_i = -\sum_{j=1}^{5} e_j\omega_{ij} \wedge \theta_{\bar{j}} \tag{3.5}$$

(см. [13, с. 102]) и формулы (3.3), найдем

$$\begin{aligned}
d\theta_1 &= -e_1(Y_2\varphi)\theta_1\wedge\theta_2 - \frac{e_2(Y_4\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_1}\theta_1\wedge\theta_5,\\
d\theta_2 &= -\frac{e_2(Y_4\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{(f_3-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_5 - \frac{e_2(Y_4\varphi)}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_3 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_1}\theta_2\wedge\theta_5,\\
d\theta_3 &= -\frac{e_1(Y_2\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_3 - e_2(Y_4\varphi)\theta_3\wedge\theta_4 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_2}\theta_3\wedge\theta_5,\\
d\theta_4 &= \frac{e_1(Y_2\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_1(Y_2\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_4 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{(f_3-f_2)^2}\theta_3\wedge\theta_5 - \frac{e_3(Y_5\varphi)}{f_3-f_2}\theta_4\wedge\theta_5,\\
d\theta_5 &= -\frac{e_1(Y_2\varphi)}{f_3-f_1}\theta_1\wedge\theta_5 - \frac{e_2(Y_4\varphi)}{f_3-f_2}\theta_3\wedge\theta_5.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Введем обозначения

$$A_1\equiv Y_2\varphi,\quad A_2\equiv Y_4\varphi,\quad A_3\equiv Y_5\varphi,$$
$$C_1\equiv e_1Y_2(Y_2\varphi),\quad C_2\equiv e_2Y_4(Y_4\varphi),\quad C_3\equiv e_3Y_5(Y_5\varphi).$$

Дифференцируя внешним образом равенство

$$df_1 = e_1(Y_2\varphi)\theta_1\equiv e_1A_1\theta_1$$

(см. (3.2)) и сравнивая результат с

$$dA_1 = \theta^lY_lY_2\varphi = \theta^l[Y_l,Y_2]+\theta^lY_2Y_l\varphi,$$

с учетом (3.1) и (**??**)получим

$$dA_1 = C_1\theta_1 - e_1A_1^2\theta_2 - A_1\left(e_2\frac{A_2}{f_2-f_1}\theta_3 + e_3\frac{A_3}{f_3-f_1}\theta_5\right).$$

Так же вычисляются dA_2 и dA_3.

Дифференцируя уравнения (3.3) и используя (3.6), найдем

$$d\omega_{12} = -C_1\theta_1\wedge\theta_2 + \frac{e_2A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3 + \frac{e_3A_1A_3}{(f_3-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_5,\quad d\omega_{13}=0,$$

$$\begin{aligned}
d\omega_{14} = -\frac{e_1A_1A_2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_2 - \frac{C_2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_3 + \frac{e_2A_2^2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_4 -&\\
-\left(\frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)} - \frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)}\right)\theta_1\wedge\theta_5&,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_{15} = -\frac{e_1A_1A_3}{f_3-f_1}\theta_1\wedge\theta_2 - \left(\frac{e_2A_2A_3}{(f_3-f_1)(f_2-f_1)} - \frac{e_2A_2A_3}{(f_3-f_1)(f_2-f_3)}\right)\theta_1\wedge\theta_3 -&\\
-\left(\frac{C_3}{f_3-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5&,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_{23} = \frac{C_1}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_1A_1^2}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_3 - \frac{e_2A_1A_2}{f_2-f_1}\theta_3\wedge\theta_4 +&\\
+\left(\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)} - \frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)}\right)\theta_3\wedge\theta_5&,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_{24} = \frac{e_1A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_2 - \left(\frac{C_1}{(f_2-f_1)^2} + \frac{C_2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_3 + \left(\frac{C_1}{f_2-f_1} + \frac{e_2A_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_4 +&\\
+\left(\frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)^2(f_3-f_2)} - \frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)^2(f_3-f_1)} - \frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5 -&
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{C_2}{f_2-f_1}-\frac{e_1A_1^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_3+\left(\frac{e_2A_2^2}{f_2-f_1}-\frac{e_1A_1^2}{f_2-f_1}\right)\theta_2\wedge\theta_4+$$
$$+\left(\frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)}-\frac{e_3A_2A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)}\right)\theta_2\wedge\theta_5-\frac{e_2A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_3\wedge\theta_4-$$
$$-\left(\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)^2(f_3-f_1)}-\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)^2(f_3-f_2)}+\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)^2}\right)\theta_3\wedge\theta_5+$$
$$\left(\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)}-\frac{e_3A_1A_3}{(f_2-f_1)(f_3-f_2)}\right)\theta_4\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{25}=\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_2+\left(\frac{e_2A_2A_3}{(f_3-f_1)^2(f_2-f_3)}-\frac{e_2A_2A_3}{(f_3-f_1)^2(f_2-f_1)}\right)\theta_1\wedge\theta_3+$$
$$+\left(\frac{e_2A_2A_3}{(f_2-f_1)^2(f_3-f_1)}\right)\theta_1\wedge\theta_3-\left(\frac{C_3}{(f_3-f_1)^2}-\frac{2e_3A_3(A_3)}{(f_3-f_1)^3}-\frac{C_1}{f_3-f_1}\right)\theta_1\wedge\theta_5+$$
$$+\left(\frac{e_2A_3(A_2)}{(f_3-f_1)(f_2-f_3)}-\frac{e_2A_3(A_2)}{(f_3-f_1)(f_2-f_1)}\right)\theta_2\wedge\theta_3-$$
$$-\left(\frac{C_3}{f_3-f_1}+\frac{e_1A_1^2}{f_3-f_1}-\frac{e_3A_3(A_3)}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_5-$$
$$-\left(\frac{e_2A_1(A_2)}{(f_3-f_1)(f_2-f_1)}+\frac{e_2A_1(A_2)}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\right)\theta_3\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{34}=-\frac{e_1A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3-C_2\theta_3\wedge\theta_4+\frac{e_3A_2A_3}{(f_3-f_2)^2}\theta_3\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{35}=-\left(\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)(f_2-f_1)}+\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)(f_1-f_3)}\right)\theta_1\wedge\theta_3-$$
$$-\frac{e_2A_2A_3}{f_3-f_2}\theta_3\wedge\theta_4-\left(\frac{C_3}{f_3-f_2}-\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2}\right)\theta_3\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{45}=-\left(\frac{e_1A_3(A_1)}{(f_3-f_2)^2(f_2-f_1)}-\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_3-$$
$$-\left(\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)^2(f_1-f_3)}\right)\theta_1\wedge\theta_3-\left(\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)(f_2-f_1)}+\frac{e_1A_1A_3}{(f_3-f_2)(f_1-f_3)}\right)\theta_1\wedge\theta_4-$$
$$-\left(\frac{e_1A_1A_2}{(f_3-f_2)(f_1-f_2)}+\frac{e_1A_1A_2}{(f_3-f_2)(f_3-f_1)}\right)\theta_1\wedge\theta_5+\frac{e_2A_2A_3}{(f_3-f_2)^2}\theta_3\wedge\theta_4+$$
$$+\left(\frac{C_2}{f_3-f_2}-\frac{C_3}{(f_3-f_2)^2}+\frac{2e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^3}\right)\theta_3\wedge\theta_5-$$
$$-\left(\frac{C_3}{f_3-f_2}-\frac{e_3A_3(A_3)}{(f_3-f_2)^2}+\frac{e_2A_2^2}{f_3-f_2}\right)\theta_4\wedge\theta_5.$$

3.1.2. Пользуясь полученными соотношениями и вторым структурным уравнением Картана

$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}+\sum_{l=1}^{5}e_l\omega_{il}\wedge\omega_{\tilde{l}j} \tag{3.7}$$

(см. [13, с. 102]), вычислим 2-форму кривизны Ω_{ij} h-пространства типа $\{221\}$:

$$\Omega_{12}=-\left(C_1+\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_2,\quad \Omega_{13}=-\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\theta_1\wedge\theta_3,$$
$$\Omega_{14}=-\left(\frac{C_2}{f_2-f_1}+\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_3-\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\theta_1\wedge\theta_4,$$

$$\Omega_{15} = -\left(\frac{C_3}{f_3-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5,$$
$$\Omega_{23} = \left(\frac{C_1}{f_2-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)}\right)\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^(f_3-f_2)}\theta_2\wedge\theta_3,$$

$$\Omega_{24} = -\left(\frac{C_1}{(f_2-f_1)^2} + \frac{C_2}{(f_2-f_1)^2} + \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_3 + \\ + \left(\frac{C_1}{f_2-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)}\right)\theta_1\wedge\theta_4 - \left(\frac{C_2}{f_2-f_1} + \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_3 - \\ - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)}\theta_2\wedge\theta_4, \quad (3.8)$$

$$\Omega_{25} = -\left(\frac{C_3}{(f_3-f_1)^2} - \frac{2e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^3} - \frac{C_1}{f_3-f_1}\right)\theta_1\wedge\theta_5 - \left(\frac{C_3}{f_3-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_5,$$
$$\Omega_{34} = -\left(C_2 + \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2}\right)\theta_3\wedge\theta_4, \quad \Omega_{35} = -\left(\frac{C_3}{f_3-f_2} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2}\right)\theta_3\wedge\theta_5,$$
$$\Omega_{45} = -\frac{C_3}{(f_3-f_2)^2}\theta_3\wedge\theta_5 + \left(\frac{C_2}{f_3-f_2} + \frac{2e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^3}\right)\theta_3\wedge\theta_5 - \left(\frac{C_3}{f_3-f_2} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2}\right)\theta_4\wedge\theta_5.$$

3.1.3. Запишем 2-форму кривизны в виде

$$\Omega_{ij} \equiv \sum_{(kl)} K_{ijkl}\theta_k\wedge\theta_l, \quad k,l = 1,\dots,5,\ k<l, \quad (3.9)$$

и положим $K_{ijij} \equiv \rho_{ij}$; тогда предыдущая формула примет вид

$$\Omega_{ij} = \rho_{ij}\theta_i\wedge\theta_j + \sum_{(kl)\neq(ij)} K_{ijkl}\theta_k\wedge\theta_l, \quad i,j,k,l = 1,\dots,5,\ i<j,\ k<l, \quad (3.10)$$

где в силу (3.8)

$$\rho_{12} = -C_1 - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2}, \quad \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = -\frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)},$$
$$\rho_{34} = -C_2 - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2}, \quad \rho_{15} = \rho_{25} = -\frac{C_3}{f_3-f_1} + \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2},$$
$$\rho_{35} = \rho_{45} = -\frac{C_3}{f_3-f_2} + \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^2},$$

а из коэффициентов K_{ijkl} при $(kl)\neq(ij)$ отличны от нуля только следующие:

$$K_{1413} = -\frac{C_2}{f_2-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)^2}, \quad K_{2313} = \frac{C_1}{f_2-f_1} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)},$$
$$K_{2413} = -\frac{C_1+C_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)^2}, \quad K_{2414} = K_{2313}, \quad K_{2423} = K_{1413},$$
$$K_{2515} = -\frac{C_3}{(f_3-f_1)^2} + \frac{2e_3A_3^2}{(f_3-f_1)^3} + \frac{C_1}{f_3-f_1}, \quad K_{4535} = -\frac{C_3}{(f_3-f_2)^2} + \frac{2e_3A_3^2}{(f_3-f_2)^3} + \frac{C_2}{f_3-f_2}.$$

Теорема 3.1. *Для того, чтобы h-пространство H_{221} типа $\{221\}$ было пространством постоянной кривизны K, $\Omega_{ij} = K\theta_i\wedge\theta_j$, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$K_{1413} = K_{2313} = K_{2515} = 0,$$

что равносильно

$$C_1 = \frac{e_3(f_2-f_1)A_3^2}{(f_3-f_1)^2(f_3-f_2)}, \quad C_2 = -\frac{e_3(f_2-f_1)A_3^2}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)^2}, \quad C_3 = \frac{e_3(2f_3-f_1-f_2)A_3^2}{(f_1-f_3)(f_2-f_3)}; \quad (3.11)$$

при этом $K_{ijkl} = 0$ *для всех* $(kl) \neq (ij)$,

$$\Omega_{ij} = \rho\theta_i \wedge \theta_j, \quad \rho_{ij} = -\frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} \equiv \rho = K; \tag{3.12}$$

здесь $i, j, k, l = 1, \ldots, 5$, $i < j$, $k < l$.

Доказательство. Необходимость условий $K_{1413} = K_{2313} = K_{2515} = 0$ следует из соотношения $\Omega_{ij} = K\theta_i \wedge \theta_j$, определяющего пространство постоянной кривизны K. Если выполняется (3.11), то $\rho_{ij} = \rho_{kl}$ для всех $i, j, k, l = 1, \ldots, 5$, $i < j$, $k < l$. Введя обозначение $\rho_{ij} \equiv \rho$, найдем

$$\Omega_{ij} = \rho\theta_i \wedge \theta_j,$$

где по теореме Шура $\rho = \mathrm{const} \equiv K$ (см. [119]). □

3.2. Формы кривизны h-пространств типа $\{32\}$.

3.2.1. В данном разделе исследуются h-пространства типа $\{32\}$. Метрика g h-пространства H_{32} и соответствующая билинейная форма $a = h - 2\varphi g$ определяются каноническими формами (**??**), при этом выполняются уравнения (**??**), где λ_1, λ_2 заменены на f_1, f_2:

$$Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_4\varphi = 0, \tag{3.13}$$

$$df_1 = \frac{2}{3}e_1(Y_3\varphi)\theta_1, \quad df_2 = e_2(Y_5\varphi)\theta_4, \tag{3.14}$$

$$\begin{cases} \omega_{12} = \dfrac{1}{3}(Y_3\varphi)\theta_1, \quad \omega_{13} = -(Y_3\varphi)\theta_2, \quad \omega_{15} = \dfrac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1}\theta_1, \\ \omega_{25} = \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 + \dfrac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1}\theta_2, \quad \omega_{32} = (Y_3\varphi)\theta_3, \quad \omega_{34} = \dfrac{Y_3\varphi}{f_2 - f_1}\theta_4, \\ \omega_{35} = \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^3}\theta_1 + \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^2}\theta_2 + \dfrac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1}\theta_3 - \dfrac{Y_3\varphi}{(f_2 - f_1)^2}\theta_4 + \dfrac{Y_3\varphi}{f_2 - f_1}\theta_5, \\ \omega_{45} = -(Y_5\varphi)\theta_5; \end{cases} \tag{3.15}$$

здесь

$$\varphi = \frac{3}{2}f_1 + f_2 \tag{3.16}$$

— определяющая функция проективного движения типа $\{32\}$, ω_{ij} — 1-форма связности в косонормальном репере (Y_h),

$$f_1 = \varepsilon_1 x^3 + (1 - \varepsilon_1)\kappa_1, \quad f_2 = \varepsilon_2 x^5 + (1 - \varepsilon_2)\kappa_2,$$

ε_1 и ε_2 принимают значения 0 или 1, κ_1, κ_2 — постоянные, $e_1, e_2 = \pm 1$.

3.2.2. Используя формулы (3.15), из первого структурного уравнения Картана (3.5) найдем

$$\begin{cases} d\theta_1 = -\dfrac{4e_1(Y_3\varphi)}{3}\theta_1 \wedge \theta_2 - \dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_4, \\ d\theta_2 = -\dfrac{2e_1(Y_3\varphi)}{3}\theta_1 \wedge \theta_3 - \dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_4 - \dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_2 \wedge \theta_4, \\ d\theta_3 = -\dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^3}\theta_1 \wedge \theta_4 - \dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^2}\theta_2 \wedge \theta_4 - \dfrac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_3 \wedge \theta_4, \\ d\theta_4 = -\dfrac{e_1(Y_3\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_4 - e_2(Y_5\varphi)\theta_4 \wedge \theta_5, \\ d\theta_5 = \dfrac{e_1(Y_3\varphi)}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_4 - \dfrac{e_1(Y_3\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_5. \end{cases} \tag{3.17}$$

Введем обозначения

$$B_1 \equiv Y_3\varphi, \quad B_2 \equiv Y_5\varphi, \quad S_1 \equiv e_1 Y_3(Y_3\varphi), \quad S_2 \equiv e_2 Y_5(Y_5\varphi).$$

Дифференцируя первое из равенств (3.14):

$$df_1 = \frac{2}{3}e_1(Y_3\varphi)\theta_1 \equiv \frac{2}{3}e_1B_1\theta_1$$

и принимая во внимание, что

$$dB_1 = \theta^l Y_l Y_3 \varphi = \theta^l [Y_l, Y_3] + \theta^l Y_3 Y_l \varphi,$$

с учетом (3.13) и (**??**) получим

$$dB_1 = S_1\theta_1 - \frac{4e_1B_1^2}{3}\theta_2 - \frac{e_2B_1B_2}{f_2 - f_1}\theta_4. \tag{3.18}$$

Так же найдем

$$dB_2 = S_2\theta_4 - e_2B_2^2\theta_5 - \frac{e_1B_1B_2}{f_1 - f_2}\theta_1. \tag{3.19}$$

Дифференцируя (3.15) и пользуясь (3.17), (3.18) и (3.19), получим формулы

$$d\omega_{12} = 0, \quad d\omega_{13} = -S_1\theta_1 \wedge \theta_2 + \frac{2e_1B_1^2}{3}\theta_1 \wedge \theta_3 + \frac{e_2B_1B_2}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_4,$$

$$d\omega_{14} = 0, \quad d\omega_{15} = -\frac{4e_1B_1B_2}{3(f_2 - f_1)}\theta_1 \wedge \theta_2 - \frac{S_2}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_4 + \frac{e_2B_2^2}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_5,$$

$$d\omega_{23} = -S_1\theta_1 \wedge \theta_3 + \frac{e_2B_1B_2}{(f_2 - f_1)^3}\theta_1 \wedge \theta_4 + \frac{4e_1B_1^2}{3}\theta_2 \wedge \theta_3 + \frac{e_2B_1B_2}{(f_2 - f_1)^2}\theta_2 \wedge \theta_4, \quad d\omega_{24} = 0,$$

$$\begin{aligned} d\omega_{25} = \frac{e_1B_1B_2}{3(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_2 - \frac{2e_1B_1B_2}{3(f_2 - f_1)}\theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{S_2}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_4 + \\ + \frac{e_2B_2^2}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_5 - \frac{S_2}{f_2 - f_1}\theta_2 \wedge \theta_4 + \frac{e_2B_2^2}{f_2 - f_1}\theta_2 \wedge \theta_5, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$d\omega_{34} = \left(\frac{S_1}{f_2 - f_1} + \frac{e_1B_1^2}{3(f_2 - f_1)^2}\right)\theta_1 \wedge \theta_4 - \frac{4e_1B_1^2}{3(f_2 - f_1)}\theta_2 \wedge \theta_4 - \frac{e_2B_1B_2}{f_2 - f_1}\theta_4 \wedge \theta_5,$$

$$\begin{aligned} d\omega_{35} = \frac{e_1B_1B_2}{(f_2 - f_1)^3}\theta_1 \wedge \theta_2 + \frac{e_1B_1B_2}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_3 - \left(\frac{S_2}{(f_2 - f_1)^3} + \frac{S_1}{(f_2 - f_1)^2}\right)\theta_1 \wedge \theta_4 + \\ + \frac{2e_1B_1^2}{3(f_2 - f_1)^3}\theta_1 \wedge \theta_4 + \left(\frac{S_1}{f_2 - f_1} + \frac{e_2B_2^2}{(f_2 - f_1)^3} - \frac{e_1B_1^2}{3(f_2 - f_1)^2}\right)\theta_1 \wedge \theta_5 - \\ - \left(\frac{S_2}{(f_2 - f_1)^2} - \frac{4e_1B_1^2}{3(f_2 - f_1)^2}\right)\theta_2 \wedge \theta_4 + \left(\frac{e_2B_2^2}{(f_2 - f_1)^2} - \frac{4e_1B_1^2}{3(f_2 - f_1)}\right)\theta_2 \wedge \theta_5 - \\ - \frac{S_2}{f_2 - f_1}\theta_3 \wedge \theta_4 + \frac{e_2B_2^2}{f_2 - f_1}\theta_3 \wedge \theta_5 - \frac{e_2B_1B_2}{(f_2 - f_1)^2}\theta_4 \wedge \theta_5, \end{aligned}$$

$$d\omega_{45} = -\frac{e_1B_1B_2}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_4 - S_2\theta_4 \wedge \theta_5.$$

Применив второе структурное уравнение Картана (3.7) и формулы (3.15), (3.20), вычислим компоненты 2-формы кривизны Ω_{ij} h-пространства H_{32} типа $\{32\}$:

$$\Omega_{12} = \frac{e_1B_1^2}{3}\theta_1 \wedge \theta_2, \quad \Omega_{13} = -S_1\theta_1 \wedge \theta_2 + \frac{e_1B_1^2}{3}\theta_1 \wedge \theta_3, \quad \Omega_{14} = 0,$$

$$\Omega_{15} = -\frac{S_2}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_4, \quad \Omega_{23} = -S_1\theta_1 \wedge \theta_3 + \frac{e_1B_1^2}{3}\theta_2 \wedge \theta_3, \quad \Omega_{24} = -\frac{e_1B_1^2}{3(f_2 - f_1)}\theta_1 \wedge \theta_4,$$

$$\Omega_{25} = -\left(\frac{S_2}{(f_2 - f_1)^2} - \frac{e_1B_1^2}{3(f_2 - f_1)^2}\right)\theta_1 \wedge \theta_4 - \frac{e_1B_1^2}{3(f_2 - f_1)}\theta_1 \wedge \theta_5 - \frac{S_2}{f_2 - f_1}\theta_2 \wedge \theta_4,$$

$$\Omega_{34} = \left(\frac{S_1}{f_2 - f_1} + \frac{e_1B_1^2}{3(f_2 - f_1)^2}\right)\theta_1 \wedge \theta_4 - \frac{e_1B_1^2}{3(f_2 - f_1)}\theta_2 \wedge \theta_4, \tag{3.21}$$

$$\Omega_{35} = -\left(\frac{S_2}{(f_2-f_1)^3} + \frac{S_1}{(f_2-f_1)^2} - \frac{2e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_4 + \\ + \left(\frac{S_1}{f_2-f_1} - \frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5 - \left(\frac{S_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_4 - \\ - \frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)}\theta_2\wedge\theta_5 - \frac{S_2}{f_2-f_1}\theta_3\wedge\theta_4,$$

$$\Omega_{45} = -S_2\theta_4\wedge\theta_5.$$

3.2.3. Представим 2-форму кривизны в виде (3.9), где $K_{ijij}\equiv\rho_{ij}$ и, благодаря (3.21),

$$\rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{23}=\frac{e_1B_1^2}{3},\quad \rho_{45}=-S_2,\quad \rho_{14}=\rho_{15}=\rho_{24}=\rho_{25}=\rho_{34}=\rho_{35}=0,$$

а ненулевые коэффициенты K_{ijkl} при $(kl)\neq(ij)$ определяются равенствами

$$K_{1312}=K_{2313}=-S_1,\quad K_{1514}=K_{2524}=K_{3534}=-\frac{S_2}{(f_2-f_1)},$$

$$K_{2414}=K_{2515}=K_{3424}=K_{3525}=-\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)},$$

$$K_{2514}=K_{3524}=-\frac{S_2}{(f_2-f_1)^2}+\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2},\quad K_{3414}=\frac{S_1}{f_2-f_1}+\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2},$$

$$K_{3514}=-\frac{S_2}{(f_2-f_1)^3}-\frac{S_1}{(f_2-f_1)^2}+\frac{2e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^3},\quad K_{3515}=\frac{S_1}{f_2-f_1}-\frac{e_1B_1^2}{3(f_2-f_1)^2}.$$

Теорема 3.2. *H-пространство H_{32} типа $\{32\}$ является пространством постоянной кривизны K, т.е. $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$K_{1514}=K_{2414}=0,$$

равносильные равенствам

$$B_1=S_2=0; \tag{3.22}$$

при этом $K_{ijkl}=0$ для всех $(kl)\neq(ij)$, т.е. $\Omega_{ij}=0$, и любое h-пространство H_{32} типа $\{32\}$ постоянной кривизны является плоским.

Доказательство. Из формулы $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, определяющей пространство постоянной кривизны K, следует, в частности, что $K_{1514}=K_{2414}=0$, т.е. (3.22).

Наоборот, если выполняется (3.22), то $\rho_{ij}=\rho_{kl}=0$, для всех $i,j,k,l=1,\dots,5$, $i<j$, $k<l$; при этом $S_1\equiv e_1Y_3(B_1)=0$ и, следовательно, $\Omega_{ij}=0$ для всех $i,j=1,\dots,5$, поэтому $K=0$ и пространство H_{32} является плоским. □

3.3. Формы кривизны h-пространств типа $\{41\}$.

3.3.1. Рассмотрим h-пространства типа $\{41\}$. Канонические формы a_{ij} и g_{ij} задаются формулами (**??**), причем выполняются уравнения (**??**), где $\lambda_1=f_1$, $\lambda_2=f_2$:

$$Y_1\varphi=Y_2\varphi=Y_3\varphi=0, \tag{3.23}$$

$$df_1=\frac{1}{2}(Y_4\varphi)\theta_1,\quad df_2=2(Y_5\varphi)\theta_5, \tag{3.24}$$

$$
\begin{cases}
\omega_{13} = \dfrac{1}{2}(Y_4\varphi)\theta_1, \quad \omega_{14} = -(Y_4\varphi)\theta_2, \quad \omega_{15} = \dfrac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1}\theta_1, \\
\omega_{24} = -(Y_4\varphi)\theta_3, \quad \omega_{25} = \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 + \dfrac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1}\theta_2, \\
\omega_{34} = -(Y_4\varphi)\theta_4, \quad \omega_{35} = \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^3}\theta_1 + \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^2}\theta_2 + \dfrac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1}\theta_3, \\
\omega_{45} = \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^4}\theta_1 + \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^3}\theta_2 + \dfrac{Y_5\varphi}{(f_2 - f_1)^2}\theta_3 + \dfrac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1}\theta_4 + \dfrac{Y_4\varphi}{f_2 - f_1}\theta_5;
\end{cases}
\tag{3.25}
$$

здесь

$$
\varphi = 2f_1 + \frac{1}{2}f_2 \tag{3.26}
$$

— определяющая функция проективного движения типа $\{41\}$, ω_{ij} есть 1-форма связности в косонормальном репере (Y_h),

$$
f_1 = \varepsilon x^4 + (1 - \varepsilon)\kappa, \quad f_2 = f_2(x^5),
$$

ε принимает значения 0 или 1, κ — постоянная, $e_1, e_2 = \pm 1$. Используя первое структурное уравнение Картана (3.5) и формулы (3.25), найдем

$$
\begin{aligned}
d\theta_1 &= -\frac{3e_1(Y_4\varphi)}{2}\theta_1 \wedge \theta_2 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_5, \\
d\theta_2 &= -e_1(Y_4\varphi)\theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_5 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_2 \wedge \theta_5, \\
d\theta_3 &= -\frac{e_1(Y_4\varphi)}{2}\theta_1 \wedge \theta_4 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^3}\theta_1 \wedge \theta_5 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^2}\theta_2 \wedge \theta_5 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_3 \wedge \theta_5, \\
d\theta_4 &= -\frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^4}\theta_1 \wedge \theta_5 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^3}\theta_2 \wedge \theta_5 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)^2}\theta_3 \wedge \theta_5 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_4 \wedge \theta_5, \\
d\theta_5 &= -\frac{e_1(Y_4\varphi)}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_5.
\end{aligned}
$$

Положим

$$
E_1 \equiv Y_4\varphi, \quad E_2 \equiv Y_5\varphi, \quad J_1 \equiv e_1 Y_4(Y_4\varphi), \quad J_2 \equiv e_2 Y_5(Y_5\varphi) \tag{3.27}
$$

и продифференцируем ω_{ij} (см. (3.25)):

$$
d\omega_{12} = 0, \quad d\omega_{13} = 0, \quad d\omega_{14} = -J_1\theta_1 \wedge \theta_2 + E_1^2\theta_1 \wedge \theta_3 + \frac{e_2E_1E_2}{(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_5,
$$

$$
d\omega_{15} = -\frac{3e_1E_1E_2}{2(f_2 - f_1)}\theta_1 \wedge \theta_2 - \left(\frac{J_2}{f_2 - f_1} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2 - f_1)^2}\right)\theta_1 \wedge \theta_5, \quad d\omega_{23} = 0,
$$

$$
d\omega_{24} = -J_1\theta_1 \wedge \theta_3 + \frac{e_1E_1^2}{2}\theta_1 \wedge \theta_4 + \frac{e_2E_1E_2}{(f_2 - f_1)^3}\theta_1 \wedge \theta_5 + \frac{3e_1E_1^2}{2}\theta_2 \wedge \theta_3 + \frac{e_2E_1E_2}{(f_2 - f_1)^2}\theta_2 \wedge \theta_5,
$$

$$
d\omega_{25} = -\frac{e_1E_1E_2}{f_2 - f_1}\theta_1 \wedge \theta_3 - \left(\frac{J_2}{(f_2 - f_1)^2} - \frac{2e_2E_2^2}{(f_2 - f_1)^3}\right)\theta_1 \wedge \theta_5 - \left(\frac{J_2}{f_2 - f_1} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2 - f_1)^2}\right)\theta_2 \wedge \theta_5,
$$

$$
d\omega_{34} = -J_1\theta_1 \wedge \theta_4 + \frac{e_2E_1E_2}{(f_2 - f_1)^4}\theta_1 \wedge \theta_5 + \frac{3e_1E_1^2}{2}\theta_2 \wedge \theta_4 + \frac{e_2E_1E_2}{(f_2 - f_1)^3}\theta_2 \wedge \theta_5 + \frac{e_2E_1E_2}{(f_2 - f_1)^2}\theta_3 \wedge \theta_5,
$$

$$
\begin{aligned}
d\omega_{35} = \frac{e_1E_1E_2}{2(f_2 - f_1)^3}\theta_1 \wedge \theta_2 &+ \frac{e_1E_1E_2}{2(f_2 - f_1)^2}\theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{e_1E_1E_2}{2(f_2 - f_1)}\theta_1 \wedge \theta_4 - \\
&- \left(\frac{J_2}{(f_2 - f_1)^3} - \frac{3e_2E_2^2}{(f_2 - f_1)^4}\right)\theta_1 \wedge \theta_5 - \left(\frac{J_2}{(f_2 - f_1)^2} - \frac{2e_2E_2^2}{(f_2 - f_1)^3}\right)\theta_2 \wedge \theta_5 - \\
&- \left(\frac{J_2}{f_2 - f_1} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2 - f_1)^2}\right)\theta_3 \wedge \theta_5,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\omega_{45} = {} & \frac{e_1 E_2 E_1}{(f_2-f_1)^4}\theta_1\wedge\theta_2 + \frac{e_1 E_2 E_1}{(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_3 + \frac{e_1 E_2 E_1}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4 + \\
& + \left(\frac{J_1}{(f_2-f_1)} - \frac{J_2}{(f_2-f_1)^4} + \frac{4e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^5} - \frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5 - \\
& - \left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^3} + \frac{3e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)} - \frac{3e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_2\wedge\theta_5 - \\
& - \left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_3\wedge\theta_5 - \left(\frac{J_2}{f_2-f_1} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_4\wedge\theta_5.
\end{aligned}
$$

3.3.2. Вычислив дифференциал равенства

$$df_1 = e_1(Y_4\varphi)\theta_1 \equiv e_1E_1\theta_1$$

(см. (3.24)) и сравнив полученное с

$$dE_1 = \theta^l Y_l Y_4\varphi = \theta^l[Y_l, Y_4] + \theta^l Y_4 Y_l\varphi,$$

с учетом (3.23) и (**??**) имеем

$$dE_1 = J_1\theta_1 - \frac{3}{2}e_1E_1^2\theta_2 - \frac{e_2E_1E_2}{f_2-f_1}\theta_5.$$

Так же получается dE_2.

Применив второе структурное уравнение Картана (3.7), найдем 2-форму кривизны Ω_{ij} h-пространства типа $\{41\}$:

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{12} = -\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_2, \quad \Omega_{13} = \left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_2 - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3, \\
&\Omega_{14} = -\left(J_1 + \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_1\wedge\theta_2 + \left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4, \\
&\Omega_{15} = -\left(\frac{J_2}{f_2-f_1} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5, \quad \Omega_{23} = \left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_2\wedge\theta_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{24} = {} & -\left(J_1 + \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_1\wedge\theta_3 + \left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_4 + \\
& + \left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_2\wedge\theta_3 - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_2\wedge\theta_4, \quad (3.28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{25} = -\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_5 - \left(\frac{J_2}{f_2-f_1} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_5, \\
&\Omega_{34} = -\left(J_1 + \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_1\wedge\theta_4 + \left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_2\wedge\theta_4 - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_3\wedge\theta_4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{35} = {} & -\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^3} + \frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)} - \frac{3e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_1\wedge\theta_5 - \\
& - \left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_2\wedge\theta_5 - \left(\frac{J_2}{f_2-f_1} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_3\wedge\theta_5,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{45} = {} & \left(\frac{J_1}{(f_2-f_1)} - \frac{J_2}{(f_2-f_1)^4} + \frac{4e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^5} - \frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5 - \\
& - \left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^3} + \frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)} - \frac{3e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}\right)\theta_2\wedge\theta_5 -
\end{aligned}
$$

$$-\left(\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2}-\frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\right)\theta_3\wedge\theta_5-\left(\frac{J_2}{f_2-f_1}-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_4\wedge\theta_5.$$

Теорема 3.3. *Для того чтобы h-пространство H_{41} типа $\{41\}$ было пространством постоянной кривизны K, т.е. $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, необходимо и достаточно выполнение условия $K_{1312}=0$, что равносильно выполнению равенства*

$$D\equiv\frac{e_1E_1^2}{2}-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}=0; \tag{3.29}$$

при этом $K_{ijkl}=0$, $\rho_{ij}=0$ для всех (ij) и $(kl)\neq(ij)$, т.е. $\Omega_{ij}=0$, и любое h-пространства H_{41} типа $\{41\}$ постоянной кривизны является плоским.

Доказательство. Запишем 2-форму кривизны в виде (3.9), где $\rho_{ij}\equiv K_{ijij}$ и, в силу (3.28),

$$\begin{gathered}\rho_{12}=-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}=\rho_{13}=\rho_{14}=\rho_{23}=\rho_{24}=\rho_{34},\\ \rho_{15}=-\frac{J_2}{f_2-f_1}+\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^2}=\rho_{25}=\rho_{35}=\rho_{45},\end{gathered} \tag{3.30}$$

а ненулевые K_{ijkl} при $(kl)\neq(ij)$ имеют вид

$$\begin{gathered}K_{1312}=\frac{e_1E_1^2}{2}-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3},\quad K_{1412}=-J_1-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4},\\ K_{1413}=K_{1312}=K_{2313},\quad K_{2413}=K_{1412},\quad K_{2414}=K_{1312}=K_{2423},\\ K_{2515}=-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2}+\frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3},\quad K_{3414}=K_{1412},\\ K_{3515}=-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^3}-\frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)}+\frac{3e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4},\\ K_{3525}=K_{2515},\quad K_{4525}=K_{3515},\quad K_{4535}=K_{2515},\\ K_{4515}=\frac{J_1}{f_2-f_1}-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^4}-\frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)^2}+\frac{4e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^5}.\end{gathered} \tag{3.31}$$

Полагая $K_{ijkl}=0$ при $(k,l)\neq(i,j)$, $i,j,k,l=1,\dots,5$, получим пять условий:

$$\frac{e_1E_1^2}{2}-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}\equiv D=0, \tag{3.32}$$

$$-J_1-\frac{e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}=0, \tag{3.33}$$

$$-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^2}+\frac{2e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^3}=0, \tag{3.34}$$

$$-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^3}-\frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)}+\frac{3e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^4}=0, \tag{3.35}$$

$$\frac{J_1}{f_2-f_1}-\frac{J_2}{(f_2-f_1)^4}-\frac{e_1E_1^2}{2(f_2-f_1)^2}+\frac{4e_2E_2^2}{(f_2-f_1)^5}=0. \tag{3.36}$$

С учетом формул (3.26), (3.27) и (**??**) уравнение (3.32) принимает вид

$$\frac{4e_1\varepsilon^2}{(f_2-f_1)E^2}-\frac{e_2}{2(f_2-f_1)^7}\left(\frac{df_2}{dx^5}\right)^2=0; \tag{3.37}$$

дифференцируя его по x^3, найдем $\varepsilon=0$, после этого из (3.37) получим $f_2=\mathrm{const}$, откуда следует

$$E_1=E_2=0,\quad J_1\equiv e_1Y_4(E_1)=0,\quad J_2\equiv e_2Y_5(E_2)=0.$$

При этом условия (3.32)–(3.36) выполняются тождественно; кроме того, $\rho_{ij} \equiv 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, 5$, и, следовательно, $\Omega_{ij} = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, 5$, поэтому $K = 0$, и пространство H_{41} является плоским. □

3.4. Формы кривизны h-пространств типа $\{5\}$.

3.4.1. В данном разделе исследуются пятимерные псевдоримановы h-пространства H_5 типа $\{5\}$. Метрика g пространства H_5 и соответствующая билинейная форма $a = h - 2\varphi g$ задаются каноническими формами (**??**) в подходящем косонормальном репере, причем справедливы уравнения (**??**), в которых произведена замена λ на f:

$$Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_3\varphi = Y_4\varphi = 0, \tag{3.38}$$

$$df = \frac{2}{5}e(Y_5\varphi)\ \theta_1, \tag{3.39}$$

$$\begin{cases} \omega_{23} = \dfrac{1}{5}(Y_5\varphi)\ \theta_1, \quad \omega_{14} = \dfrac{3}{5}(Y_5\varphi)\theta_1, \quad \omega_{51} = (Y_5\varphi)\ \theta_2, \\ \omega_{52} = (Y_5\varphi)\theta_3, \quad \omega_{53} = (Y_5\varphi)\ \theta_4, \quad \omega_{54} = (Y_5\varphi)\ \theta_5; \end{cases} \tag{3.40}$$

остальные компоненты связности ω_{ij} равны нулю. Здесь

$$\varphi = \frac{5}{2}f \tag{3.41}$$

— определяющая функция проективного движения типа $\{5\}$; $f = \varepsilon x^5 + (1-\varepsilon)\alpha$; α — постоянная; $e = \pm 1$.

Используя первое структурное уравнение Картана (3.5) и формулы (3.40), найдем

$$\begin{gathered} d\theta_1 = -\frac{8}{5}e(Y_5\varphi)\ \theta_1 \wedge \theta_2, \quad d\theta_2 = -\frac{6}{5}e(Y_5\varphi)\ \theta_1 \wedge \theta_3, \\ d\theta_3 = -\frac{4}{5}e(Y_5\varphi)\ \theta_1 \wedge \theta_4, \quad d\theta_4 = -\frac{2}{5}e(Y_5\varphi)\theta_1 \wedge \theta_5, \quad d\theta_5 = 0. \end{gathered} \tag{3.42}$$

Введем обозначения

$$\Re \equiv Y_5\varphi, \quad \aleph \equiv eY_5(Y_5\varphi).$$

Учитывая, что квадрат внешнего дифференциала равен нулю, продифференцируем равенство (3.39):

$$df = \frac{2}{5}e(Y_5\varphi)\theta_1 \equiv \frac{2}{5}e\Re\ \theta_1$$

и результат сравним с

$$d\Re = \theta^l Y_l Y_5\varphi = \theta^l [Y_l, Y_5]\varphi + \theta^l Y_5 Y_l \varphi,$$

где (см. [13, с. 101])

$$[Y_l, Y_5] \equiv \nabla_{Y_l} Y_5 - \nabla_{Y_5} Y_l = \sum_{l=1}^{n} e_k(\gamma_{kl5} - \gamma_{k5l})Y_{\tilde{k}};$$

в нашем случае (см. (**??**))

$$[Y_1, Y_5] = -\frac{2}{5}(Y_5\varphi)Y_2, \quad [Y_2, Y_5] = -\frac{4}{5}(Y_5\varphi)Y_3, \quad [Y_3, Y_5] = -\frac{6}{5}(Y_5\varphi)Y_4, \quad [Y_4, Y_5] = -\frac{8}{5}(Y_5\varphi)Y_5;$$

остальные скобки Ли равны нулю. В итоге с учетом (3.38) получим

$$d\Re = C\ \theta_1 - \frac{8}{5}eA^2\ \theta_2.$$

3.4.2. Дифференцируя равенства (3.40) и пользуясь (3.42), найдем

$$\begin{gathered} d\omega_{14}=0, \quad d\omega_{23}=0, \quad d\omega_{51}=\aleph\theta_1\wedge\theta_2-\frac{6}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_3,\\ d\omega_{52}=\aleph\theta_1\wedge\theta_3-\frac{4}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_4-\frac{8}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_3,\\ d\omega_{53}=\aleph\theta_1\wedge\theta_4-\frac{2}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_5-\frac{8}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_4,\\ d\omega_{54}=\aleph\theta_1\wedge\theta_5-\frac{8}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_5. \end{gathered} \tag{3.43}$$

Используя (3.40), (3.43) и второе структурное уравнение Картана (3.7), вычислим коэффициенты 2-формы кривизны Ω_{ij} h-пространства типа $\{5\}$:

$$\begin{gathered} \Omega_{12}=\Omega_{13}=\Omega_{23}=0, \quad \Omega_{14}=\frac{3}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_2, \quad \Omega_{24}=\frac{3}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_3,\\ \Omega_{34}=\frac{3}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_4, \quad \Omega_{51}=\aleph\ \theta_1\wedge\theta_2-\frac{3}{5}e\Re^2\ \theta_1\wedge\theta_3,\\ \Omega_{52}=\aleph\theta_1\wedge\theta_3-\frac{3}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_4-\frac{3}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_3,\\ \Omega_{53}=\aleph\theta_1\wedge\theta_4-\frac{3}{5}e\Re^2\theta_1\wedge\theta_5-\frac{3}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_4,\\ \Omega_{54}=\aleph\theta_1\wedge\theta_5-\frac{3}{5}e\Re^2\theta_2\wedge\theta_5. \end{gathered} \tag{3.44}$$

3.4.3. Запишем 2-форму кривизны в виде (3.10):

$$\Omega_{ij}=\rho_{ij}\theta_i\wedge\theta_j+\sum_{(kl)\neq(ij)}K_{ijkl}\theta_k\wedge\theta_l, \quad i,j,k,l=1,\dots,, \quad i<j,\ k<l,$$

где, в силу (3.44), $\rho_{ij}=0$ для всех i, j, а из коэффициентов K_{ijkl} при $(kl)\neq(ij)$ не равны нулю только следующие:

$$\begin{gathered} K_{1412}=\frac{3}{5}e\Re^2=K_{2413}=K_{3414}=K_{1513}=K_{2514}=K_{2523}=K_{3515}=K_{3524}=K_{4525},\\ K_{1512}=-\aleph=K_{2513}=K_{3514}=K_{4515}. \end{gathered}$$

Теорема 3.4. *Для того чтобы h-пространство H_5 типа $\{5\}$ было пространством постоянной кривизны K, т.е. $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, необходимо и достаточно выполнение условия $K_{1412}=0$, что равносильно*

$$\Re=0; \tag{3.45}$$

при этом $\Omega_{ij}\equiv0$, т.е. любое h-пространство H_5 типа $\{5\}$ постоянной кривизны является плоским ($K=0$).

Доказательство. Необходимость условия $K_{1412}=0$ следует из формулы $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, определяющей пространство постоянной кривизны K.

Если выполняется условие (3.45), то $Y_5\varphi=0$, поэтому $\aleph=0$ и $K_{ijkl}=0$ для всех $(kl)\neq(ij)$, $i,j,k,l=1,\dots,5$; $i<j$, $k<l$, при этом кривизна $\Omega_{ij}\equiv0$, и H_5 является пространством постоянной нулевой кривизны, т.е. плоским пространством. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминова А. В.* Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения// Гравит. теория относит. — 1970. — № 7. — С. 127–131.
2. *Аминова А. В.* О полях тяготения, допускающих группы проективных движений// Докл. АН СССР. — 1971. — *197*, № 4. — С. 807–809.
3. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. I// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 3—13.

4. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. II// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 14–20.
5. *Аминова А. В.* О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел/ Препринт ИТФ АН УССР 71-85Р. — Киев, 1971.
6. *Аминова А. В.* Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 295–316.
7. *Аминова А. В.* Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 317–346.
8. *Аминова А. В.* Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля// Гравит. теория относит. — 1976. — № 10. — С. 9–22.
9. *Аминова А. В.* Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности// Изв. вузов. Мат. — 1988. — № 1. — С. 3–13.
10. *Аминова А. В.* Группы преобразований римановых многообразий// Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ. — 1990. — *22*. — С. 97–165.
11. *Аминова А. В.* Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2 (290). — С. 107–164.
12. *Аминова А. В.* Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий// Усп. мат. наук. — 1995. — *50*, № 1. — С. 69–142.
13. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
14. *Аминова А. В.* Проективные симметрии и законы сохранения в K-пространствах, определяемых полями тяготения// Изв. вузов. Физика. — 2008. — *51*, № 4. — С. 30–37.
15. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 5. — С. 3–13.
16. *Аминова А. В.* Проективные симметрии гравитационных полей. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018.
17. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 7. — С. 3–28.
18. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2009. — *123*. — С. 58–80.
19. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств специального вида// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 5. — С. 97–102.
20. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. I. H-пространства типа $\{32\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2018. — № 4. — С. 21–31.
21. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. II. H-пространства типа $\{41\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 45–55.
22. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. III. H-пространства типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 56—66.
23. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* H-пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 4. — С. 4–12.
24. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 10. — С. 87–93.
25. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств H_5 типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2020. — № 1. — С. 4–11.
26. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О свойствах проективных алгебр Ли жестких h-пространств H_{32} типа $\{32\}$// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — *162*, № 2. — С. 111–119.
27. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Алгебры Ли проективных движений пятимерных h-пространств H_{221} типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 12. — С. 9–22.
28. *Буданов К. М., Султанов А. Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3—13.

29. *Гладуш В. Д.* Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы—-Клейна// Теор. мат. физ. — 2003. — *136*, № 3. — С. 480—495.
30. *Голиков В. И.* О геодезическом отображении полей тяготения общего вида// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — № 12. — С. 97–129.
31. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.
32. *Жукова Л. И.* Римановы пространства с проективной группой// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124.* — С. 13—18.
33. *Жукова Л. И.* Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай)// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124.* — С. 19–25.
34. *Жукова Л. И.* О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124.* — С. 26–30.
35. *Жукова Л. И.* Римановы пространства, допускающие проективные преобразования// Изв. вузов. Мат. — 1973. — № 6. — С. 37–41.
36. *Киселев А. С.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве-времени// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2010. — № 1. — С. 64–67.
37. *Киселев А. С., Кречет В. Г.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана—Вейля с идеальной жидкостью// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2011. — *3*, № 1. — С. 37–41.
38. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2. — М.: Наука, 1981.
39. *Кречет В. Г., Левкоева М. В., Садовников Д. В.* Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве// Вестн. РУДН. Сер. Физ. — 2001. — *1*, № 9. — С. 33—37.
40. *Кручкович Г. И.* Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1963. — № 24. — С. 74–87.
41. *Кручкович Г. И.* О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1967. — № 33. — С. 3—18.
42. *Петров А. З.* О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1949. — *109*, № 3. — С. 7–36.
43. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — Факториал, 1998.
44. *Рчеулишвили Г. Л.* Сферически-симметричный линейный элемент и векторы Киллинга в пятимерном пространстве// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 3. — С. 345—351.
45. *Рчеулишвили Г. Л.* Обобщенные векторы Киллинга в пятимерном лоренцевом пространстве// Теор. мат. физ. — 1997. — *112*, № 2. — С. 249—253.
46. *Синюков Н. С.* О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — *98*, № 1. — С. 21—23.
47. *Синюков Н. С.* Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 4. — С. 266—267.
48. *Синюков Н. С.* Эквидистантные римановы пространства// Научн. ежегод. Одесса. — 1957. — С. 133—135.
49. *Синюков Н. С.* Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 6. — С. 1312–1314.
50. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 4. — С. 781–782.
51. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — *169*, № 4. — С. 770—772.
52. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
53. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств// Усп. мат. наук. — 1956. — *11.* — С. 45–116.
54. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1956. — *108*, № 2. — С. 201–203.
55. *Солодовников А. С.* Геодезические классы пространств $V(K)$// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 1. — С. 33–36.
56. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — № 2. — С. 43–102.

57. *Трунев А. П.* Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы—Клейна// Науч. ж. Кубан. гос. агр. ун-та. — 2011. — *71*, № 7. — С. 1–26.
58. *Шарафутдинов В. А.* Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. — Новосибирск:: ИПЦ НГУ, 2018.
59. *Широков П. А.* Тензорное исчисление. — Казань: Изд-во КГУ, 1961.
60. *Широков П. А.* Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во КГУ, 1966.
61. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.
62. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
63. *Abe O.* Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza–Klein space-time// Nuovo Cim. B. — 1994. — *109*, № 6. — P. 659—673.
64. *Aminova A. V.* On geodesic mappings of Riemannian spaces// Tensor. — 1987. — *46*. — P. 179–186.
65. *Aminova A. V.* Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds// Tensor, N.S. — 1993. — *54*. — P. 91–100.
66. *Aminova A. V.* Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics// в кн.: In Memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. 3, part 2. — Изд-во Казан. ун-та: Казань, 1995. — С. 79–103.
67. *Aminova A. V.* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — *113*, № 3. — P. 367–470.
68. *Aminova A. V., Aminov N. A.-M.* Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type VI.1// J. Math. Sci. — 2009. — *158*, № 2. — P. 163–183.
69. *Anchordoqui L. A., Birman G. S.* Metric tensors for homogeneous, isotropic, five-dimensional pseudo-Riemannian models// Rev. Colomb. Mat. — 1998. — *32*. — P. 73–79.
70. *Becerril R., Matos T.* Bonnor solution in five-dimensional gravity// Phys. Rev. D. — 1990. — *41*, № 6. — P. 1895–1896.
71. *Beltrami E.* Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante// Ann. Mat. — 1868. — № 2. — P. 232–255.
72. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbation in Kaluza–Klein cosmologies// Astron. Nachr. — 1990. — *311*, № 3. — P. 151–154.
73. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbations in Kaluza–Klein cosmologies// Nuovo Cim. B. — 1991. — *106*, № 2. — P. 107–122.
74. *Bokhari A. H., Qadir A.* Symmetries of static, spherically symmetric space-times// J. Math. Phys. — 1987. — *28*. — P. 1019–1022.
75. *Calvaruso G., Marinosci R. A.* Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces// Balkan J. Geom. Appl. — 2003. — *8*, № 1. — P. 1–19.
76. *Coley A. A., Tupper B. O. J.* Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance// J. Math. Phys. — 1989. — *30*. — P. 2616–2625.
77. *Dacko P.* Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact Ricci potential/ `arXiv: 1308.6429 [math.DG]`.
78. *Dini U.* Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rapprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra// Ann. Mat. — 1869. — *3*, № 7. — P. 269–293.
79. *Dumitrescu T. T., Festuccia G., Seiberg N.* Exploring curved superspace/ `arXiv: 1205.1115v2 [hep.th]`.
80. *Fialowski A., Penkava M.* The moduli space of complex five-dimensional Lie algebras// J. Algebra. — 2016. — *458*. — P. 422—444.
81. *Fubini G.* Sui gruppi trasformazioni geodetiche// Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. — 1903. — *53*, № 2. — P. 261–313.
82. *Fukui T.* The motion of a test particle in the Kaluza–Klein-type of gravitational theory with variable mass// Astrophys. Space Sci. — 1988. — *141*, № 2. — P. 407–413.
83. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal invariance in physics// Rev. Mod. Phys. — 1962. — *34*, № 3. — P. 442–557.
84. *Gall L., Mohaupt T.* J. High Energy Phys. — 2018. — *2018*. — 53.
85. *Geroch R.* Limits of space-times// Commun. Math. Phys. — 1969. — *13*. — P. 180–193.
86. *Gezer A.* On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric// Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). — 2009. — *119*, № 3. — P. 345—350.

87. *Gross D. J., Perry M. J.* Magnetic monopoles in Kaluza–Klein theories// Nucl. Phys. — 1983. — *B226.* — P. 29–48.
88. *Guendelman E. I.* Kaluza–Klein–Casimir cosmology with decoupled heavy modes// Phys. Lett. B. — 1988. — *201*, № 1. — P. 39–41.
89. *Hall G. S., Rebouas M. J., Santos J., Teixeixa A. F. F.* On the algebraic structure of second order symmetric tensors in 5-dimensionai space-times// Gen. Rel. Gravit. — 1996. — *8*, № 9. — P. 1107–1113.
90. *Hicks J. W.* Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions// All Graduate Plan B and other Reports. — 2011. — *102.* — P. 1–90.
91. *Ho Choon-Lin, Ng Kin-Wang* Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza–Klein cosmology// Phys. Rev. D. — 1991. — *43*, № 10. — P. 3107–3111.
92. *Jadczyk A.* START in a five–dimensional conformal domain/ `arXiv: 1111.5540v2 [math-ph]`.
93. *Kiselev A. S., Krechet V. G.* Static distributions of matter in the five-dimensional Riemann—Weyl space// Russ. Phys. J. — 2012. — *55*, № 4. — P. 417—425.
94. *Knebelman M. S.* Homothetic mappings of Riemann spaces// Proc. Am. Math. Soc. — 1958. — *9*, № 6. — P. 927–928.
95. *Kokarev S. S.* Phantom scalar fields in five–dimensional Kaluza–Klein theory// Russ. Phys. J. — 1996. — *39*, № 2. — P. 146–152.
96. *Kollár J.* Einstein metrics on five-dimensional Seifert bundles// J. Geom. Anal. — 2005. — *15*, № 3. — P. 445–476.
97. *Königs M. G.* Sur les géodésiques a intégrales quadratiques// in: *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV. — Chelsea Publ., 1972. — P. 368—404.
98. *Kovacs D.* The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza–Klein// Gen. Rel. Gravit. — 1984. — *16*, № 7. — P. 645–655.
99. *Kowalski O.* Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leqslant 5$// Rozpravy CSAV, Rada MPV. — 1975. — № 85. — P. 1–61.
100. *Kramer D. Stephani H., MacCallum M., Herlt E.* Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
101. *Ladke L. S., Jaiswal V. K., Hiwarkar R. A.* Five-dimensional exact solutions of Bianchi type-I space-time in $f(R,T)$ theory of gravity// Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Techn. — 2014. — *3*, № 8. — P. 15332–15342.
102. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// Ann. Mat. — 1896. — *24*, № 2. — P. 255–300.
103. *Macedo P. G.* New proposal for a five-dimensional unified theory of classical fields of Kaluza–Klein type/ `arXiv: gr-qc/0101121`.
104. *Magazev A. A.* Casimir functions for five-dimensional Lie groups with a non–semi-Hausdorff space of orbits// Russ. Phys. J. — 2003. — *46*, № 9. — P. 912—920.
105. *Mankoc-Borstnik N., Pavsi M.* A systematic examination of five-dimensional Kaluza–Klein theory with sources consisting of point particles or strings// Nuovo Cim. — 1988. — *99A*, № 4. — P. 489–507.
106. *Marinosci R. A.* Classification of five-dimensional generalized pointwise symmetric Riemannian spaces// Geom. Dedic. — 1995. — *57.* — P. 11–53.
107. *Mikesh J.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky University, 2019.
108. *Mikesh J., Stepanova E.* A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$-structure as a model of abstract statistical manifold// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2014. — *45.* — P. 111—128.
109. *Mohanty G., Mahanta K. L., Bishi B. K.* Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field// Astrophys. Space Sci. — 2007. — *310.* — P. 273—276.
110. *Paiva F. M., Rebouca M. J., Teixeira A. F. F.* Limits of space–times in five dimensions and their relation to the Segre types// J. Math. Phys. — 1997. — *38.* — P. 4228–4236.
111. *Pan Yiwen* Rigid supersymmetry on five-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry/ `arXiv: 1308.1567v4 [hep.th]`.
112. *Pini A., Rodriguez-Gomez D., Schmudea J.* Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions/ `arXiv: 1504.04340v3 [het-th]`.
113. *Rcheulishvili G.* Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. — Miramare-Trieste: Preprint ICTP, IC/92/108, 1992.
114. *Rcheulishvili G. L.* The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space// J. Math. Phys. — 1992. — *33.* — P. 1103–1108.

115. *Rcheulishvili G. L.* Conformal Killing vectors in five-dimensional space/ arXiv: gr-qc/9312004v1.
116. *Rebouças M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* Classification of energy momentum tensors in $n > 5$ dimensional space-times: A review// Brazil. J. Phys. — 2004. — *34*, № 2A. — P. 535–543.
117. *Rodroguez-Vallarte M. C., Salgado G.* Five-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions// J. Geom. Phys. — 2016. — *100.* — P. 20—32.
118. *Santos J., Rebouças M. J., Teixeira A. F. F.* Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza—Klein-type theories// J. Math. Phys. — 1995. — *36.* — P. 3074–3084.
119. *Schur F.* Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen// Math. Ann. — 1886. — *27.* — P. 537–567.
120. *Starks S. A., Kosheleva O., Kreinovich V.* Kaluza–Klein 5D ideas made fully geometric/ arXiv: 0506218v1 [physics.class-ph].
121. *Varaksin O. L., Klishevich V. V.* Integration of Dirac equation in Riemannian spaces with five-dimensional group of motions// Russ. Phys. J. — 1997. — *40*, № 8. — P. 727—731.
122. *Wesson P. S.* A physical interpretation of Kaluza–Klein cosmology// Astrophys. J. — 1992. — *394*, № 1. — P. 19—24.
123. *Wesson P. S.* The properties of matter in Kaluza–Klein cosmology// Mod. Phys. Lett. A. — 1992. — *7*, № 11. — P. 921–926.
124. *Witten E.* Search for a realistic Kaluza–Klein theory// Nucl. Phys. B. — 1981. — *186.* — P. 412–428.
125. *Yano K.* On harmonic and Killing vectors// Ann. Math. — 1952. — *55.* — P. 38—45.
126. *Zeghib A.* On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds// Adv. Math. — 2016. — *297.* — P. 26—53.

Аминова Ася Васильевна
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 21–29
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-21-29

УДК 519.1

КОМБИНАТОРНЫЕ ПОЛИНОМЫ И ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ

© 2022 г. **А. А. БАЛАГУРА, О. В. КУЗЬМИН**

Аннотация. В работе перечислительные свойства комбинаторных полиномов композиций, обобщающих B-полиномы, использованы для обобщенного перечисления множества деревьев.

***Ключевые слова*:** комбинаторный полином, дерево, перечисление деревьев.

COMBINATORIAL POLYNOMIALS AND ENUMERATION OF TREES

© 2022 **A. A. BALAGURA, O. V. KUZMIN**

Abstract. In this paper, enumeration properties of combinatorial composition polynomials that generalize B-polynomials are used for the generalized enumeration of the set of trees.

***Keywords and phrases*:** combinatorial polynomial, tree, enumeration of trees.

***AMS Subject Classification*:** 06A06, 05C05, 05C31, 05E05

1. Введение. Сегодня вопросы перечисления деревьев занимают значимую часть в задачах перечислительной комбинаторике. Деревья являются достаточно универсальными математическими объектами и многие задачи могут быть выражены в терминах перечисления деревьев по различным параметрам. Деревья играют важную роль в современных подходах анализа данных. Задание весовой функции на множестве ребер или вершин дерева позволяет строить различные вероятностные модели и применять их в задачах принятия решения. В анализе данных, в частности, деревья используются при построении алгоритмов кластеризации. В программировании деревья используют для построения алгоритмов различных обходов графов, находящих применение в построении моделей логистики, анализе социальных сетей и пр. Деревья применяют в качестве модели описания структур данных в теории информационных систем, в задачах разбиения и классификации, в теории кодирования для построения оптимальных кодов, в биологических задачах, относящихся к деревьям эволюции, в генетике и пр.

В настоящее время сформировано множество подходов к перечислению деревьев. Подробный обзор подходов и результатов содержится в [2, 3, 12]. Кроме классических методов, используется модифицированные методы производящих функций [2, 4] экспоненциальные структуры [12], перечисление с помощью полиномов [1] и др. [6, 8, 9]. Данная работа посвящена перечислению изучаемого подмножества деревьев с помощью комбинаторных полиномов разбиений и композиций. Рассматриваемые в настоящей статье деревья, в которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух преемников, встречаются в работах многих математиков, в том числе Р. Стенли [12], О. В. Кузьмин [2]. В п. 2 вводятся основные понятия и определения. В п. 3 приводятся результаты авторов [1] перечисления множества деревьев с помошью B- и P-полиномов. В п. 4 построены алгоритмы кодирования и декодирования плоских деревьев [3]. Результаты и подходы п. 3 и 4 используются в п. 5 для перечисления с весами множества деревьев.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Иркутской области проекта № 20-41-385001).

2. Основные понятия. Нам понадобятся следующие определения и обозначения (см., например [3]).

Кортежем длины n называется упорядоченный набор целых неотрицательных чисел $(i_1, \ldots, i_n)$. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Введем обозначение

$$I(a_1, \ldots, a_n) = \Big\{(i_1, \ldots, i_n) \;\Big|\; i_j \leqslant a_j,\ i_j \leqslant i_{j+1},\ 1 \leqslant j \leqslant n\Big\};$$

множество I назовем множеством *неубывающих кортежей.* Положим $X(a_1, \ldots, a_n) = |I(a_1, \ldots, a_n)|$. Формулы вычисления мощности этого множества получены в [3].

Разбиением натурального числа n называется набор натуральных чисел в сумме составляющих n, причем порядок слагаемых не важен. Если

$$n = \sum_{i=1}^{n} i r_i,$$

то последовательность $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ называется *типом разбиения* (см. [12]).

Композицией натурального числа n на k натуральных слагаемых называется набор натуральных чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, в сумме составляющих n, причем порядок слагаемых важен (см. [2]). Далее в данной работе договоримся считать, что слагаемые, равные 1, не влияют на порядок слагаемых в композиции.

Нам понадобятся комбинаторные полиномы разбиений. Пусть $g = (g_1, g_2, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ — последовательности формальных переменных.

Известен явный вид A- и B-полиномов (см., например, [2]):

$$A_{nk}(g) = n! \sum_{n,k} \prod_{i=2}^{n-k+1} g_i^{r_i} \big[r_i!\,(i!)^{r_i}\big]^{-1}, \quad n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

где суммирование ведется по всем разбиения натурального n на k натуральных слагаемых, т.е. по всем таким наборам $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-k+1})$ целых неотрицательных чисел, что

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} r_i = k, \qquad \sum_{i=1}^{n-k+1} i r_i = n,$$

$$B_{nk}(g) = (-1)^{n-k} \big[(k-1)!\, g_1^{2n-k}\big]^{-1} \sum_{2n-2k,n-k} (-1)^{r_1}\; r_1!\,(2n-k-r_1-1)! \times \prod_{i=1}^{n-k+1} g_i^{r_i} \big[r_i!\,(i!)^{r_i}\big]^{-1},$$

$n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Дополнительно полагают $A_{n,n}(g) = g_1^n$, $B_{n,n}(g) = g_1^{-n}$, $n \geqslant 1$.

Рассмотрим важные обобщения A- и B-полиномов: полиномы, построенные по двум последовательностям разбиений — полиномы Тушара (или T-полиномы) и P-полиномы (см. [7], а также [5, 10, 11]). Известен явный вид T- и P-полиномов (см., например, [2]):

$$T_{nk}(x, y) = n! \sum_{n \rhd k} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}\, y_i^{r_i} \big[k_i!\, r_i!\,(i!)^{k_i + r_i}\big]^{-1}, \quad n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

где суммирование ведется по всем таким наборам целых неотрицательных чисел, что

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = k, \quad \sum_{i=1}^{n} i(k_i + r_i) = n.$$

Дополнительно полагают $T_{00}(x, y) = 1$. Эти полиномы изучаются также в [10].

Р-полиномы имеют вид (см. [7])

$$P_{nk}(x,y) = (-1)^{n-k}\big[k!\,x_1^{2n-k}\big]^{-1} \sum_{2n-2k \rhd n-k} (-1)^{k_1+\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} k_1!\,(2n-k-k_1-1)!\times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} i r_i + k\Big) x_i^{k_i}\, y_i^{r_i}\,\big[k_i!\,r_i!\,(i!)^{k_i+r_i}\big]^{-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Дополнительно полагают $P_{nn}(x,y) = x_1{}^{-n}$, $n \geqslant 1$.

Корневое дерево можно определить рекурсивно. Корневое дерево d — это такое множество вершин, что одна специально выбранная вершина называется *корнем* дерева d, оставшиеся вершины (исключая корень) разбиты на $m \geqslant 0$ непересекающихся непустых множеств, каждое из которых является деревом (см. [2]). Вершины, не имеющие преемников, называются *концевыми вершинами.* Вершины, имеющие преемников, называют *внутренними вершинами.* В настоящей работе там, где это специально оговорено, рассматриваются плоские деревья (см. [12]), т.е. поддеревья в любой вершине линейно упорядочены.

Пусть $n \geqslant 2$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим $D(n,k)$ — множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин. Присвоим каждой концевой вершине дерева метку, занумеровав вершины числами $1, 2, \ldots, n$. Повторяем следующую процедуру до тех пор, пока все вершины кроме корня не окажутся помеченными [12]. Пометим числом $n+1$ такую вершину v, что

(i) вершина v не помечена, а все ее преемники помечены и
(ii) среди всех непомеченных вершин, все преемники которых помечены, v является вершиной, имеющей преемника с наименьшей меткой.

Полученное дерево называется *помеченным.*

Обозначим через $\bar{D}(n,k)$ множество непомеченных плоских корневых деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин. Обозначим через $\bar{D}(n,k,r_1,\ldots,r_n)$ множество деревьев $d \in \bar{D}(n,k)$, имеющих в точности r_i вершин степени i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Будем придерживаться введенных в [1] обозначений: $v(n,k)$ — количество вершин в дереве d, не считая корень, $w(n,k)$ — количество внутренних вершин в дереве d, не считая корень, $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Плоские деревья. Остановимся на перечислении множества плоских деревьев. Результаты этого пункта имеют как самостоятельное значение, так и применяются далее в п. 5. В рамках рассматриваемого подхода приводятся результаты перечисления подмножества непомеченных корневых плоских деревьев (см. [3]). Предложен алгоритм построения и кодирования всего множества рассматриваемых деревьев. Предложенные алгоритмы позволили доказать существование взаимно однозначного соответствия между изучаемым множеством деревьев и множеством неубывающих кортежей.

Поскольку в рассматриваемых деревьях важен порядок внутренних вершин, чтобы его зафиксировать будем придерживаться известного способа обхода дерева по правилу 1.

Правило 1. Будем обходить дерево в соответствии с df-порядком (см. [12]), т.е. в глубину, начиная от корня, совершая обход слева направо.

Назовем типом дерева $d \in \bar{D}(n,k)$ последовательность $(n_1, n_2, \ldots, n_{w(n,k)})$ степеней внутренних вершин дерева, без учета корня при обходе дерева по правилу 1. Обозначим через $\tilde{D}(n,k,n_1,n_2,\ldots,n_{w(n,k)})$ множество деревьев $d \in \bar{D}(n,k)$ типа $(n_1, n_2, \ldots, n_{w(n,k)})$.

Опишем способ кодирования деревьев неубывающими кортежами.

Алгоритм 1 (кодирования дерева)**.**
Вход алгоритма: диаграмма дерева $d \in \bar{D}(n,k)$.
Выход алгоритма: код дерева $a_1, \ldots, a_{w(n,k)}$.

Обходим дерево по правилу 1, пусть $v_1, \ldots, v_{w(n,k)}$ — последовательность обхода его внутренних вершин (за исключением корня). Для всех внутренних вершин v_i, $1 \leqslant i \leqslant w(n,k)$, выполняем подсчет числа $c(v_i)$ концевых вершин, пройденных до внутренней вершины v_i, и кодируем вершину v_i: $a_i := c(v_i) + 1$.

Отметим, что из алгоритма 1 следует, что код дерева является неубывающим кортежем длины $w(n,k)$.

Для описания алгоритма декодирования зададим дерево в виде графа $T = \langle V, R\rangle$, где V — множество вершин, R — множество ребер. Множество V считаем упорядоченным в соответствии с порядком обхода вершин дерева по правилу 1.

Алгоритм 2 (декодирования дерева)**.**

Вход алгоритма: код дерева $a_1, \ldots, a_{w(n,k)}$, тип дерева $(n_1, \ldots, n_{w(n,k)})$.

Выход алгоритма: дерево $T \in \bar{D}(n,k)$, $T = \langle V, R\rangle$.

Пусть $V = \{v_0\}$, R — пустое множество. Строим все k преемников корня: добавляем вершины $v_1, \ldots, v_k$ в V, ребра $(v_0, v_1), \ldots, (v_0, v_k)$ в R.

Для $1 \leqslant i \leqslant w(n,k)$, обходя по правилу 1 построенное дерево, отсчитываем a_i концевых вершин, строим n_i преемников у a_i-й вершины: добавляем элементы $v_{k+(n_1+\ldots+n_{i-1})+1}, \ldots, v_{k+(n_1+\ldots+n_i)+1}$ после a_i-й вершины в V, переобозначаем a_i-ю вершину символом w_{a_i}, добавляем элементы $(w_{a_i}, v_{k+(n_1+\ldots+n_{i-1})+1}), \ldots, (w_{a_i}, v_{k+(n_1+\ldots+n_i)+1})$ в R.

Введем обозначение для множества всех возможных значений i-й метки деревьев из рассматриваемого множества:

$$A_i = \Big\{a_i :\ d \in \bar{D}(n, k, n_1, n_2, \ldots, n_{w(n,k)})\Big\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant w(n,k).$$

Далее для идентификации принадлежности типов деревьев (и соответственно композиций) к которым относятся множества меток внутренних вершин будут введены дополнительные индексы.

Пусть $1 \leqslant i \leqslant n-k-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-k-i$. Введем следующие обозначения: если

$${}^i n^j = \left({}^i n_1^j,\ {}^i n_2^j,\ \ldots,\ {}^i n_{n-k}^j\right)$$

— некоторая композиция, то ${}^i A_1^j,\ \ldots,\ {}^i A_{n-k}^j$ — множества меток деревьев типа $\left({}^i n_1^j, {}^i n_2^j, \ldots, {}^i n_{n-k}^j\right)$, где ${}^i A_t^j$ — множество возможных меток t-й вершины дерева, $1 \leqslant t \leqslant n-k$.

Опишем алгоритм построения кодов деревьев всего множества $\bar{D}(n,k)$, который позволяет построить все множество деревьв (по кодам по алгоритму 2) и свести задачу о подсчете мощности множества $\bar{D}(n,k)$ к задаче о подсчете мощности множества неубывающих кортежей.

Алгоритм 3 (кодирование множества $\bar{D}(n,k)$)**.**

Вход алгоритма: n, k.

Выход алгоритма: все типы ${}^i n^j$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$, $0 \leqslant j \leqslant n-k-i$ деревьев из множества $\bar{D}(n,k)$, множества меток ${}^i A_1^j,\ {}^i A_2^j,\ \ldots,\ {}^i A_{n-k-i}^j$.

Пусть ${}^0 n_1^0 = \ldots = {}^0 n_{n-k}^0 = 2$, ${}^0 A_p^0 = \{1, \ldots, k+p-1\}$, $1 \leqslant p \leqslant n-k$. Для i от 1 до $(n-k-1)$

$${}^i n_1^0 = \ldots = {}^i n_{n-k-i-1}^0 = 2, \quad {}^i n_{n-k-i}^0 = i+2, \quad {}^i n_{n-k-i+1}^0 = \ldots = {}^i n_{n-k}^0 = 1,$$

$${}^i A_1^0 = \{1, 2, \ldots, k\}, \quad {}^i A_2^0 = \{1, 2, \ldots, k+1\},\ \ldots,\ {}^i A_{n-k-i}^0 = \{1, 2, \ldots, n-i-1\}.$$

Выполняем алгоритм пока $n_1 \neq i+2$. Для j от 1 до $(n-k-i)$

$${}^i n_1^j := {}^i n_1^{j-1}, \quad \ldots, \quad {}^i n_{n-k-i-j-1}^j := {}^i n_{n-k-i-j-1}^{j-1},$$

$${}^i n_{n-k-i-j}^j := {}^i n_{n-k-i-j}^{j-1} + 1, \quad {}^i n_{n-k-i-j+1}^j := {}^i n_{n-k-i-j+1}^{j-1} - 1,$$

$${}^i n_{n-k-i-j+2}^j := \ldots := {}^i n_{n-k}^j := 1.$$

Для m от 1 до $(n-k-i)$ и $m \neq n-k-i-j+1$

$${}^i A_m^j := {}^i A_m^{j-1}, \quad {}^i A_{n-k-i-j+1}^j := {}^i A_{n-k-i-j+1}^{j-1} \cup \left\{\left|{}^i A_{n-k-i-j+1}^{j-1}\right| + 1\right\}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant k \leqslant n$, $d \in \bar{D}(n,k,n_1,\ldots,n_t)$, $2 \leqslant t \leqslant n-k$, а дереву d типа $(n_1,\ldots,n_t)$ соответствует композиция $\left({}^i n_1^j,\ \ldots,\ {}^i n_t^j\right)$ и множества меток ${}^i A_1^j$, ${}^i A_2^j$, $\ldots$, ${}^i A_t^j$, которые получены по алгоритму 1. Обозначим $a_s = \left|{}^i A_s^j\right|$, $1 \leqslant s \leqslant t$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. $|\bar{D}(n,k,n_1,n_2,\ldots,n_t)| = X(a_1,\ldots,a_t)$.

4. Неплоские деревья. Приведем доказанные в [1] результаты о перечислении с весами множества неплоских деревьев. Схему доказательства теоремы **??**, приведенную в [1] будем использовать в п. 5.

Обозначим через π_n множество всех n-перестановок, π_n^k — множество перестановок $\pi \in \pi_n$, имеющих в точности k циклов. Поставим в соответствие каждому дереву $d \in D(n,k)$ перестановку $\pi(d) \in \pi_n^k$ по следующему правилу.

Правило 2. Пусть $(p_1^i,\ldots,p_j^i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ — последовательность всех концевых вершин дерева d (записанных в порядке появления), у которых первым предком после корня является i-й преемник корня $(2 \leqslant j \leqslant n-1)$ или эта вершина сама является i-м преемником корня $(j=1)$. Тогда $\pi(d) = (p_1^1,\ldots,p_{i_1}^1)\ldots(p_1^k,\ldots,p_{i_k}^k)$, где $\sum\limits_{m=1}^{k} i_m = n$.

Для $k \geqslant 2$ дерево d назовем *k-пререстановочным*, если поставленная ему в соответствие по правилу 2 перестановка $\pi(d)$ имеет в точности k циклов.

Поставим в соответствие каждому дереву $D \in D(n)$ перестановку $\pi(D) \in \pi_n$ по следующему правилу.

Правило 3. Пусть $(p_1,\ldots,p_n)$ — последовательность всех концевых вершин дерева D (записанных в порядке появления). Тогда $\pi(D) = (p_1,\ldots,p_n)$.

Перестановку $\pi(D) = (p_1,\ldots,p_n)$ назовем *перестановкой дерева* D.

Пусть $g_1 \neq 0$, $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$. На рассматриваемом множестве деревьев введем весовые функции по следующим правилам.

Правило 4. Пусть $g_i g_1^{-1}$, $i \geqslant 2$, — вес вершины дерева, имеющей i преемников; g_1^{-1} — вес вершины дерева, не имеющей преемников.

Правило 5. Пусть $x_i x_1^{-1}$, $i \geqslant 2$, — вес вершины дерева, обладающей свойством А и имеющей i преемников; x_1^{-1} — вес вершины дерева, обладающей свойством А и не имеющей преемников; $y_i x_1^{-1}$, $i \geqslant 2$, — вес вершины дерева, обладающей свойством В и имеющей i преемников; y_1^{-1} — вес вершины дерева, обладающей свойством В и не имеющей преемников. Отметим, что если вершина обладает каким-либо свойством, то будем считать что все ее преемники обладают этим свойством.

Для $d \in D(n,k)$ считаем вес дерева d равным произведению весов всех его вершин кроме корня, для $D \in D(n)$ — произведению весов всех его вершин. Вес множества деревьев положим равным сумме весов всех составляющих его элементов.

Для $d \in D(n,k)$ обозначим через $D_i(n,k)$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$, множество всех деревьев $d \in D(n)$, у которых в точности i внутренних вершин, не считая корень и k преемников корня. Обозначим через $g(A)$ вес множества A, и через $g(a)$ — вес a, $a \in A$.

Нам понадобятся следующий известный результат (см., например, [1, 6, 7, 12]).

Предложение. *Число всех разбиений* $\mathbf{n}$ *на* k *непустых блоков равно*

$$S(n,k) = n! \sum_{n,k} \prod_{i=1}^{n-k+1} \left[r_i!\,(i!)^{r_i}\right]^{-1},$$

где $S(n,k)$ *— обобщенные числа Стирлинга второго рода,* $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Пусть весовая функция определяется правилом 3. В [1] найдена новая интерпретация В-полиномов, которую дает следующая теорема.

Теорема 2. *Для $n,k\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, суммарный вес всех различных k-перестановочных n-деревьев d равен $(-1)^{n-k}B_{n,k}(g)$. Суммарный вес всех n-деревьев D, имеющих различные перестановки, равен $(-1)^{n-1}B_{n,1}(g)$.*

Пусть весовая функция определяется правилом 4. В условиях теоремы 2, верна интерпретацию P-полиномов (см. [1]).

Следствие. *Для $n,k\in\mathbb{N}$, $n,k\geqslant 2$, суммарный вес всех различных l-перестановочных ($l=k,k+1,\dots,n$) n-деревьев d, у которых k преемников корня, обладает свойством A, а остальные свойством B, равен $(-1)^{n-k}P_{n,k}(g)$.*

5. Перечисление с весами плоских деревьев. Остановимся на перечислении с весами множества $D(n,k)$. Деревья этого множества помеченны и не являются плоскими. Рассмотрим все плоские деревья, получающиеся из каждого дерева $d\in D(n,k)$. Зададим вес каждого плоского дерева по правилу 6.

Правило 6. Пусть ${}^ig^i_jg_1^{-1}$, $i\geqslant 2$, — вес вершины дерева, имеющей i преемников и код j, поставленный ей в соответствие по алгоритму 1; ${}^ig_1^{-1}$ — вес i-й (при df-обходе среди концевых вершин) вершины дерева, не имеющей преемников.

Отметим, что все плоские деревья данного дерева помечены таким же образом, как исходное неплоское дерево. Поэтому в рамках нашего подхода нет смысла рассматривать помеченные плоские деревья для одного исходного дерева. Нормируем вес множества плоских деревьев построенных по исходному дереву, разделив вес этого множества деревьев на мощность множества всех деревьев, имеющих такие же степени внутренних вершин.

Пусть $d\in\bar{D}(n,k)$; считаем вес дерева d равным произведению весов всех его вершин, кроме корня. Вес дерева $d\in D(n,k)$ считаем равным сумме весов всех его плоских деревьев, деленного на $|\tilde{D}(n,k,r_1,\dots,r_n)|$. Вес множества деревьев из $D(n,k)$ положим равным сумме весов всех составляющих его элементов. Обозначим через $W(A)$ вес множества A, через $W(a)$ — вес a, $a\in A$.

Пусть весовая функция определяется правилом 6.

Теорема 3. *Для $n,k\in\mathbb{N}$, $n,k\geqslant 2$*

$$W(D(n,k))=\prod_{i=1}^{n}{}^ig_1\sum_{2n-2k;n-k}\;\sum_{(i_1,\dots,i_{n-k})\in I}\frac{(2n-k-m-1)!}{(k-1)!n_1!\dots n_{n-k}!(n-k-m)!|\tilde{I}|}\prod_{j=1}^{n-k}\frac{{}^{i_j}g_{n_j}}{{}^{i_j}g_{n_j}},\qquad(1)$$

где первое суммирование ведется по всем композициям натурального $2n-2k$ на $n-k$ натуральных слагаемых, т.е. по всем таким наборам $(n_1,n_2,\dots,n_{n-k})$ натуральных чисел, что

$$\sum_{i=1}^{n-k}n_i=2n-2k,$$

второе суммирование ведется по всем кортежам $(i_1,\dots,i_{n-k})\in I$, которые построены по каждой из композиций по алгоритму 3, $m=m(n_1,\dots,n_{n-k})$ — число n_i, $1\leqslant i\leqslant n-k$, равных 1, $\tilde{I}$ — множество кортежей $(i_1,\dots,i_n)\in I$, построенных по всем композициям, относящимся к одному разбиению.

Доказательство. Рассмотрим множество $D(n,k)$. В [1] приведено комбинаторное доказательство формулы

$$|D(n,k)|=\sum_{2n-2k,n-k}\frac{(2n-k-r_1-1)!}{(k-1)!}\prod_{i=2}^{n-k+1}\left[r_i!\,(i!)^{r_i}\right]^{-1},\quad n\geqslant 2,\quad 1\leqslant k\leqslant n.\qquad(2)$$

Поскольку правило 6 учитывает степени внутренних вершин и их порядок, комбинаторная формула перечисления деревьев должна содержать эти параметры. Выразим число разбиений **n**-множества на k блоков типа $(0,r_2,\dots,r_{n-k+1})$ через композиции. Докажем, что для $n\geqslant 2$, $1\leqslant k\leqslant n$

искомое число разбиений равно

$$\sum_{n;k} n!\,\big[n_1!\dots n_k!\,k!\big]^{-1},$$

где суммирование ведется по всем композициям n на k слагаемых, соответствующих типу разбиения. Тогда согласно предложению, нужно доказать, что

$$\sum_{n;k} n!\big[n_1!\dots n_k!\,k!\big]^{-1} = n!\prod_{i=2}^{n-k+1}\big[r_i!\,(i!)^{r_i}\big]^{-1}. \tag{3}$$

Действительно, пусть $(0, r_2, \dots, r_{n-k+1})$ — тип разбиения $\mathbf{n}$-множества на k блоков. Рассмотрим все композиции $(n_1, \dots n_k)$ числа n в виде суммы k слагаемых, в которых число слагаемых, равных i, равно r_i, $1 \leqslant i \leqslant n-k+1$. Согласно определению разбиения, соответствующие ему композиции будут отличаться только порядком слагаемых. Очевидно, что $n!\big[n_1!\dots n_k!\big]^{-1}$ — число способов упорядоченных разбиения n-множества на блоки длины $n_1, \dots, n_k$. Поскольку число способов упорядочить k блоков равно $k!$, мы рассматриваем неупорядоченные разбиения, просуммируем все способы разбиения $\mathbf{n}$-множества на k блоков по композициям, соответствующим зафиксированному разбиению. Тем самым доказана справедливость (3).

Теперь перепишем формулу (2) в другом виде, с учетом формулы (3), останавливаясь на перечислительном смысле каждого ее сомножителя. По определению $D(n,k)$, каждое дерево d имеет в точности n концевых вершин, k преемников корня и любая внутренняя вершина рассматриваемых нами деревьев имеет не менее двух преемников. Тогда

$$w(n,k) \in \{n-k, n-k-1, \dots, 0\},$$
$$w(n,k) = v(n,k) - n, \quad v(n,k) \in \{2n-k, 2n-k-1, \dots, n\}.$$

Поскольку

$$D(n,k) = \bigcup_{i=0}^{n-2} D_i(n,k), \quad D_i(n,k) \cap D_j(n,k) = \emptyset,\ i \neq j,$$

то

$$|D(n,k)| = \sum_{i=0}^{n-k} |D_i(n,k)|.$$

Рассмотрим $d \in D_{n-k-i}(n,k)$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$. Тогда $v(n,k) = 2n-k-i$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$. Из определения $D(n,k)$ следует, что $|D_{n-k-i}(n,k)|$ — число всех разбиений $\mathbf{2n-k-i}$ на $n-k-i+1$ блоков ($w(n)$ и корень), у которых нет блоков длины один и блок разбиения, содержащий элемент с максимальной меткой, имеет длину k. Поскольку элемент с максимальной меткой фиксирован, исключим его из рассмотрения. Рассмотрим чило всех разбиений $\mathbf{2n-k-1-i}$ на $n-k-i$ блоков, у которых нет блоков длины 1 и хотя бы один блок разбиения имеет длину $k-1$. Для блока длины $k-1$ существует в точности $(k-1)!$ способов записи. Согласно предложению 1, для каждого искомого разбиения остального множества $\mathbf{2n-2k-i}$ на $n-k-i$ блоков существует в точности

$$\prod_{i=2}^{n-k+1}\big[r_i!\,(i!)^{r_i}\big]^{-1}$$

способов записи, где $(0, r_2, \dots, r_{n-k+1})$ тип разбиения. Разбиение множества $\mathbf{2n-2k}$ на $n-k$ блоков получится из разбиения множества $\mathbf{2n-2k-i}$ на $n-k-i$ блоков, у которых $n_1 = 0$, добавлением i блоков длины 1. Заметим, что в этом случае для каждого разбиения $r_1 = n-k-m$, где m — число внутренних вершин дерева d. Тогда имеем

$$|D(n,k)| = \sum_{i=0}^{n-k} |D_{n-k-i}(n,k)| = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{2n-2k,n-k}'' \frac{(2n-k-i-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} \left[r_i!\,(i!)^{r_i}\right]^{-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{2n-2k;n-k}'' \frac{(2n-k-i-1)!}{(k-1)!\,n_1!\,\ldots n_{n-k}!\,(n-k-i)!}, \quad (4)$$

где $2 \leqslant k \leqslant n$, $i \leqslant n-k$. В первой формуле внутреннее суммирование ведется по всем таким разбиениям $(2n-2k)$ на $(n-k)$ слагаемых, у которых $r_1 = i$, во второй формуле внутреннее суммирование ведется по всем таким композициям $(2n-2k)$ на $(n-k)$ слагаемых, у которых $n_1 = i$. Из неравенства $0 \leqslant i \leqslant n-k$ следует, что $0 \leqslant r_1 \leqslant n-k$. Тогда (4) равно

$$\sum_{2n-2k;n-k} \frac{(2n-k-m-1)!}{(k-1)!\,n_1!\,\ldots n_{n-k}!\,(n-k-m)!}, \quad n \geqslant 2, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad (5)$$

где суммирование ведется по всем композициям $2n-2k$ на $n-k$ слагаемых, а m — число слагаемых в композиции, равных 1 (свое для каждой композиции).

Теперь перейдем к заданию весовой функции. Для каждого $d \in D(n,k)$ построим все плоские деревья, получающиеся из него. Каждое плоское дерево помечено таким же образом как и d. Зададим вес каждого плоского дерева по правилу 5. Каждой композиции $(n_1, \ldots, n_{n-k})$ соответствует последовательность степеней внутренних вершин дерева при df-обходе, все множество кодов деревьев строится по алгоритму 3. Таким образом, каждое $d \in D(n,k)$ расщепляется на некоторое множество плоских деревьев. Согласно правилу 5 и особенностям задания весовой функции, вес такого плоского дерева d_j равен

$$\prod_{i=1}^{n} {}^{i}g_1 \prod_{j=1}^{n-k} \frac{{}^{i_j}g_{n_j}}{{}^{i_j}g_{n_j}}.$$

Отметим, что $\tilde{I}$ — мощность множества плоских деревьев, на которые расщепляются деревья с последовательностью степеней внутренних вершин $(n_1, \ldots, n_{n-k})$, вычисляется по алгоритму 3. Согласно правилу 6 разделим вес каждого дерева на вес множества деревьев с последовательностью степеней внутренних вершин, принадлежащих одному типу исходного разбиения, тогда из (5) получим формулу (1). Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балагура А. А., Кузьмин О. В.* Перечислительные свойства комбинаторных полиномов разбиений// Дискр. анал. исслед. опер. — 2011. — *18*, № 1. — С. 3–14.
2. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
3. *Balagura A. A., Kuzmin O. V.* Encoding and decoding algorithms for unlabeled trees// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012027.
4. *Balagura A. A., Kuzmin O. V.* Generalised Pascal pyramids and their reciprocals// Discr. Math. Appl. — 2007. — *17*, № 6. — P. 619–628.
5. *Chow C.-O., Mansour T.* On the real-rootedness of generalized Touchard polynomials// Appl. Math. Comput. — 2015. — *254*. — P. 204–209.
6. *Kuzmin O. V., Balagura A. A., Kuzmina V. V., Khudonogov I. A.* Partially ordered sets and combinatory objects of the pyramidal structure// Adv. Appl. Discr. Math. — 2019. — *20*, № 2. — P. 229–236.
7. *Kuzmin O. V., Leonova O. V.* On analytical conjugacy of Touchard polynomials and the polynomials quasi-orthogonal to them// Discr. Math. Appl. — 2002. — *12*, № 1. — P. 97–103.
8. *Kuzmin O. V., Seregina M. V.* Plane sections of the generalised Pascal pyramid and their interpretations// Discr. Math. Appl. — 2010. — *20*, № 4. — P. 377–389.
9. *Kuzmin O. V., Starkov B. A.* Application of hierarchical structures based on binary matrices with the generalized arithmetic of Pascal's triangle in route building problems// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012030.

10. *Marcellan F., Jabee S., Shadab M.* Analytical properties of Touchard-based hybrid polynomials via operational techniques// Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. — 2021. — *44*, № 1. — P. 223–242.
11. *Mihoubi M., Maamra M. S.* Touchard polynomials, partial Bell polynomials and polynomials of binomial type// J. Phys. Conf. Ser. — 2011. — *14*, № 3. — 11.3.1.
12. *Stanley R.* Enumerated Combinatorics. Vol. 2. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.

Балагура Анна Александровна
Иркутский государственный университет
E-mail: irk25@rambler.ru

Кузьмин Олег Викторович
Иркутский государственный университет
E-mail: quzminov@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 30–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-30-36

УДК 519.716

ОБ ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ E-ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА 2

© 2022 г. А. С. ЗИНЧЕНКО, Б. П. ИЛЬИН, В. И. ПАНТЕЛЕЕВ, Л. В. РЯБЕЦ

Аннотация. В работе рассматриваются классы множества мультифункций ранга 2, замкнутые относительно суперпозиции по объединению и оператора разветвления по предикату равенства. Показано, что множество мультифункций, которые ни на одном наборе значений переменных не принимают значение 0, содержит 76 замкнутых классов.

Ключевые слова: замыкание, предикат равенства, мультифункция, замкнутое множество, суперпозиция, предполное множество.

ON A SET OF E-CLOSED CLASSES OF MULTIFUNCTIONS ON A TWO-ELEMENT SET

© 2022 A. S. ZINCHENKO, B. P. ILYIN, V. I. PANTELEEV, L. V. RIABETS

Abstract. In this paper, we consider closed classes of multifunctions defined on a two-element set and their closure operator based on the composition operator by union and the equality predicate branching operator. We show that the set of multifunctions that does not take the value of zero at any set of variables contains 76 E-closed classes.

Keywords and phrases: closure, equality predicate, multifunction, closed set, composition, precomplete set.

AMS Subject Classification: 03B50, 08A99

1. Введение. В работе рассматривается множество M_2 мультифункций ранга 2, замкнутое относительно суперпозиции по объединению и оператора замыкания с разветвлением по предикату равенства (E-оператора). E-оператор относится к категории «сильных» операторов замыкания и позволяет, действуя вместе с суперпозицией, получать конечные или счетные классификации. Исследование действия E-оператора на множестве булевых функций, частичных булевых функций и на множестве функций многозначной логики можно посмотреть в [1–3].

В [5] для множества мультифункций ранга 2 описаны множества K_1–K_{11} и показано, что они являются E-предполными в M_2 и других E-предполных множеств нет. Там же рассмотрена структура множества K_9 и показано, что оно содержит 21 E-замкнутый класс. В [4] показано, что K_5 (множество частичных булевых функций) содержит 100 E-замкнутых классов, а в [6] найдена структура K_6 — множества гиперфункций ранга 2, — содержащего 78 E-замкнутых классов. Классификация мультифункций ранга 2 относительно принадлежности E-предполным множествам проведена в [7].

В настоящей работе показано, что множество мультифункций, которые ни на одном наборе значений переменных не принимают значение 0 (множество K_7), состоит из 76 E-замкнутых классов.

2. Основные понятия. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Множество M_2 всех мультифункций ранга 2 и определяется следующим образом:

$$M_{2,n} = \bigl\{f \mid f\colon E_2^n \to 2^{E_2}\bigr\}, \quad M_2 = \bigcup_n M_{2,n}.$$

В дальнейшем изложении не будем различать множество из одного элемента и элемент этого множества. Для множества E_2 будем использовать обозначение «$-$» (прочерк), а для пустого множества — «$*$».

Множество M_2 содержит множество гиперфункций (H_2), множество частичных булевых функций (O_2^*) и множество функций алгебры логики (O_2).

$$H_{2,n} = \bigl\{f \mid f\colon E_2^n \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\}\bigr\}, \quad H_2 = \bigcup_n H_{2,n},$$

$$O_{2,n}^* = \bigl\{f \mid f\colon E_2^n \to E_2 \cup \{\varnothing\}\bigr\}, \quad O_2^* = \bigcup_n O_{2,n}^*,$$

$$O_{2,n} = \bigl\{f \mid f\colon E_2^n \to E_2\bigr\}, \qquad O_2 = \bigcup_n O_{2,n}.$$

Все двоичные наборы из множества E_2^n будем считать упорядоченными в соответствии с натуральным порядком, $\tilde{0}$ — набор, состоящий из одних 0, а $\tilde{1}$ — набор, состоящий из одних 1. Мультифункцию f, зависящую от n переменных, будем записывать в виде вектора $(\tau_{\tilde{0}}, \ldots, \tau_{\tilde{1}})$ длины 2^n, где каждый элемент $\tau_{\tilde{\sigma}}$ есть $f(\tilde{\sigma})$, $\tilde{\sigma} \in E_2^n$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f_1(x_1, \ldots, x_m)$, …, $f_n(x_1, \ldots, x_m)$ — мультифункции. Суперпозиция

$$f\bigl(f_1(x_1, \ldots, x_m),\ \ldots,\ f_n(x_1, \ldots, x_m)\bigr)$$

задает мультифункцию $g(x_1, \ldots, x_m)$ следующим образом: если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Определенный таким образом оператор будем называть суперпозицией по объединению (S_U-суперпозицией). Он позволяет находить значение мультифункции на наборах, составленных из элементов множества 2^{E_2}, рассматривая элемент набора как функцию-константу.

Будем говорить, что мультифункция $g(x_1, \ldots, x_n)$ получается из мультифункций $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью оператора разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется соотношение:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В дальнейшем в работе будем использовать предложенную в [5] терминологию ES_U-замыкания множества мультифункций. Для краткости и в соответствии с [1] будем вместо термина «ES_U-замыкание» использовать термин «E-замыкание».

3. E-замкнутые классы множества K_7. В [5] показано, что M_2 содержит 11 предполных E-замкнутых множеств. Рассмотрим одно из таких предполных множеств мультифункций

$$K_7 = \bigl\{f \mid f(\tilde{\alpha}) \in \{*, 1, -\},\ \tilde{\alpha} \in E_2^n\bigr\}.$$

Рассмотрим следующие подмножества множества K_7, где $\tilde{\alpha} \in E_2^n$:

$$D_1 = \{f \mid f(\tilde{1}) \in \{1, -\}\};$$

$$D_2 = \{f \mid f(\tilde{1}) \in \{*, -\}\};$$

$$D_3 = \{f \mid (f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(*, *), (*, 1), (*, -), (1, *), (-, *)\}\};$$

$$D_4 = \{f \mid f(\tilde{0}) \in \{-\}\};$$

$$D_5 = \{f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(*, *), (*, -), (-, *), (-, -)\}\};$$

$$D_6 = \{f \mid (f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(-,1),(*,*),(1,*),(-,*)\}\};$$
$$D_7 = \{f \mid f(\tilde{1}) \in \{-\}\};$$
$$D_8 = \{f \mid f(\tilde{0}) \in \{*\}\};$$
$$D_9 = \{f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(*,*),(1,*),(*,1),(-,*),(*,-)\}\};$$
$$D_{10} = \{f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(*,*),(1,*),(*,1),(1,1)\}\};$$
$$D_{11} = \{f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(1,1),(1,-),(-,1),(-,-)\}\};$$
$$D_{12} = \{f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(1,-),(-,1),(-,-)\}\};$$
$$D_{13} = \{f \mid (f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(*,*),(-,-)\}\}.$$

Утверждение 1. *Множества $D_1 - D_{13}$ являются E-замкнутыми классами.*

Доказательство. Свойство E-замкнутости для множеств D_1, D_2, D_3, D_4, D_6, D_7 и D_8 очевидно. В [4] показано, что множество D_{10} является E-замкнутым классом. В [6] показана E-замкнутость классов D_{11} и D_{12}.

Покажем справедливость утверждения для множества D_5. Пусть мультифункции

$$f, f_1, \ldots, f_m \in D_5$$

и мультифункция

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f\big(f_1(x_1, \ldots, x_n),\ \ldots,\ f_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

не принадлежит множеству D_5. Тогда найдется такой набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что

$$\big(g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ g(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)\big) \in \big\{(1,-),(-,1),(*,1),(1,*),(1,1)\big\}.$$

Рассмотрим случай, когда $(g(\tilde{\alpha}), g(\overline{\tilde{\alpha}})) = (1,*)$. Если $g(\tilde{\alpha}) = 1$, то для всех i выполняется $f_i(\tilde{\alpha}) \neq *$. В таком случае все $f_i(\tilde{\alpha}) = -$, и мультифункция f на всех прочерках дает 1. Следовательно, среди всех значений функции f обязательно найдется одна 1, тогда $f \notin D_5$. Получили противоречие. Аналогичным образом можно получить противоречия для других вариантов значений функции g. Следовательно, $g(x_1, \ldots, x_n) \in D_5$.

Пусть $g(x_1, \ldots, x_n)$ получена из мультифункций $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью оператора разветвления по предикату равенства и $f_1, f_2 \in D_5$.

Рассмотрим значения $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $g(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ и компоненты наборов с номерами i и j:

(i) если $\alpha_i = \alpha_j$, то $\overline{\alpha}_i = \overline{\alpha}_j$. Тогда $g(\tilde{\alpha}) = f_1(\tilde{\alpha})$ и $g(\overline{\tilde{\alpha}}) = f_1(\overline{\tilde{\alpha}})$;

(ii) если $\alpha_i \neq \alpha_j$, то $\overline{\alpha}_i \neq \overline{\alpha}_j$. Тогда $g(\tilde{\alpha}) = f_2(\tilde{\alpha})$ и $g(\overline{\tilde{\alpha}}) = f_2(\overline{\tilde{\alpha}})$.

Таким образом, значения мультифункции $g(\tilde{x})$ на противоположных наборах совпадают с соответствующими значениями мультифункции $f_1(\tilde{x})$ или $f_2(\tilde{x})$, следовательно, $g(\tilde{x}) \in D_5$. Таким образом, множество D_5 является E-замкнутым классом мультифункций. Аналогичным образом можно показать E-замкнутость множеств D_9 и D_{13}. □

Аналогично предложению 1 из [6] несложно показать, что любой E-замкнутый класс мультифункций может быть представлен множеством мультифункций, зависящих не более чем от двух аргументов. Таким образом, задача описания всех E-замкнутых классов сводится к построению всех замкнутых множеств двухместных мультифункций.

При получении мультифункции $f(x_1, \ldots, x_n)$ через мультифункции $f_1, \ldots f_k$, зависящих не более чем от n переменных, с помощью операторов суперпозиции и разветвления по предикату равенства может потребоваться использовать промежуточные функции, зависящие более чем от n переменных.

Пример. Пусть $f_1 = (*1-1)$, $f_2 = (*-11)$. Построим все возможные варианты суперпозиций мультифункций f_1, f_2 при условии, что не будем использовать мультифункции от трех и более аргументов:

$$(**11), \quad (*111), \quad (*1*1), \quad (**-1), \quad (***1), \quad (*-*1).$$

При использовании E-оператора с двухместными мультифункциями мы не получим мультифункцию $f_3 = (* - -1)$. Но при использовании трехместной мультифункции g можно получить f_3 :

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2), & \text{если } x_1 = x_3; \\ f_2(x_1, x_2), & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$f_3(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2)).$$

В связи с рассмотренным выше примером, для работы с функциями, зависящими не более чем от двух переменных, нужно уточнить определения используемых операторов.

Пусть мультифункции f, g_1, g_2, h_1 и h_2 зависят только от двух переменных. Будем говорить, что мультифункция f получается из функций g_1, g_2, h_1, h_2 с помощью операции обобщенного разветвления по предикату равенства (Ex-оператор), если для всех двоичных наборов (α_1, α_2) выполняются следующие условия (в порядке приоритета):

(i) если $h_1(\alpha_1, \alpha_2)$ или $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = *$, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = *;$$

(ii) если $h_1(\alpha_1, \alpha_2), h_2(\alpha_1, \alpha_2) \in E_2$, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2), & \text{при } h_1(\alpha_1, \alpha_2) = h_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

(iii) если $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = -$ или $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = -$, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

Для краткости будем использовать обозначение

$$f(x_1, x_2) = Ex(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2), h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)).$$

Также ограничим действие суперпозиции. Далее будем рассматривать суперпозиции только следующего вида:

$$g_1(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)).$$

В операторах в качестве функций h_1 и h_2 допускается использование селекторных функций.

Использование операторов обобщенного разветвления по предикату равенства и ограниченной суперпозиции позволило организовать компьютерные вычисления, в результате которых было получено 76 различных множеств, являющихся подмножествами K_7.

Для доказательства того, что эти классы попарно различны, классу Q сопоставим вектор $v_Q = (\gamma_Q^1, \ldots, \gamma_Q^{13})$ принадлежности множествам $D_1 - D_{13}$, где $\gamma_Q^i = 1$, если класс принадлежит множеству D_i и $\gamma_Q^i = 0$ в противном случае. Очевидно, что из функций некоторого класса K, у которого в позиции l вектор v_K содержит 1, нельзя E-замыканием получить класс K', для которого вектор $v_{K'}$ в этой же позиции содержит 0.

В таблице 1 представлен список E-замкнутых классов, полученных в результате компьютерных вычислений. Столбец I содержит номер класса, столбец II — его обозначение, столбец III — порождающее множество этого класса, столбец IV — вектор принадлежности класса множествам D_1–D_{13}.

Обозначения классов вида A, B соответствуют E классам частичных булевых функций из [4], вида U, V — классам гиперфункций ранга 2 из [6]. Классы Q_i представляют уникальные классы множества K_7.

В столбце IV представлены 76 различных векторов; таким образом, все 76 указанных классов различны. Значит, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Число E-замкнутых классов мультифункций, являющихся подмножествами K_7, не менее* 76.

Вложимость рассматриваемых классов представлена на диаграмме (см. рис. 1).

Таблица 1

I	II	III	IV
1	B_{18}	$(* * **)$	0110110111001
2	C_1	(1111)	1100000001100
3	U_{16}	$(- - --)$	1001101000111
4	Q_1	$(* - -*)$	0110110100001
5	Q_2	$(- * *-)$	1001101000001
6	Q_3	$(- * **)$	0111110010000
7	A_{30}	$(*1 * *)$	0110010111000
8	Q_4	$(* - **)$	0110110110000
9	A^*_{28}	$(* * *1)$	1110000111000
10	V^*_{25}	$(- - 11)$	1101010000110
11	Q_5	$(* * *-)$	1010101110000
12	V^*_{24}	$(- - 1-)$	1001001000110
13	A_{25}	$(*11*)$	0110010101000
14	Q_6	$(- - -*)$	0111110000000
15	A^*_{27}	$(*111)$	1110000101000
16	V^*_{23}	(-111)	1101010000100
17	Q_7	$(- - *-)$	1001101000000
18	V^*_{22}	$(-11-)$	1001001000100
19	Q_8	$(* - --)$	1010101100000
20	D_{13}	$(* * **), (- * *-)$	0000100000001
21	Q_9	$(* - **), (* - -*)$	0110110100000
22	Q_{10}	$(-1 * *)$	0111010010000
23	Q_{11}	$(* - *1)$	1110000110000
24	Q_{12}	$(*1 * -)$	1010001110000
25	Q_{13}	$(*1 * *), (* - **)$	0110010110000
26	A_{21}	$(1 * **)$	0110010011000
27	V^*_{20}	$(1 - 1-)$	1000001000110
28	Q_{14}	$(* * **), (- * **)$	0110110010000
29	A^*_{29}	$(* * **), (* * *1)$	0110000111000
30	Q_{15}	$(* * **), (* * *-)$	0010100110000
31	V^*_{19}	$(- - 11), (- - 1-)$	1001000000110
32	A_{14}	$(111*)$	0110010001000
33	A_{16}	$(1 * *1)$	1100000001000
34	V^*_{16}	$(1 - 11)$	1100000000100
35	V^*_{17}	$(111-)$	1000001000100
36	Q_{16}	$(* * **), (- - -*)$	0110110000000
37	A_{26}	$(* * **), (*111)$	0110000101000
38	Q_{17}	$(* * **), (* - --)$	0010100100000
39	Q_{18}	$(- * **), (- * *-)$	0001100000000
40	V^*_{15}	$(-111), (-11-)$	1001000000100
41	Q_{19}	$(* * *-), (- * *-)$	1000101000000
42	Q_{20}	$(-11*)$	0111010000000
43	Q_{21}	$(* - 1*)$	0110010100000
44	Q_{22}	$(- * *1)$	1101010000000
45	Q_{23}	$(* - 11)$	1110000100000
46	Q_{24}	$(-1 * -)$	1001001000000
47	Q_{25}	$(*11-)$	1010001100000
48	A_{22}	$(* * *1), (1 * **)$	0110000011000
49	Q_{26}	$(* * *-), (- * **)$	0010100010000
50	D_{12}	$(1 - 1-), (- - 11)$	1000000000110
51	Q_{27}	$(* * **), (* - *1)$	0110000110000
52	Q_{28}	$(* * *1), (* * *-)$	1010000110000
53	A_{15}	$(*111), (1 * **)$	0110000001000
54	Q_{29}	$(* - --), (- * **)$	0010100000000
55	Q_{30}	$(1 - **)$	0110010010000
56	Q_{31}	$(* * **), (*1 * -)$	0010000110000
57	D_{10}	$(* * **), (1 * *1)$	0100000001000
58	D_5	$(* * **), (- - *-)$	0000100000000
59	D_{11}	$(1111), (111-)$	1000000000100
60	Q_{32}	$(* * **), (* - 11)$	0110000100000
61	Q_{33}	$(- * **), (- * *1)$	0101010000000
62	Q_{34}	$(* * *1), (*11-)$	1010000100000
63	Q_{35}	$(- * *1), (- * *-)$	1001000000000
64	Q_{36}	$(* - *1), (1 * **)$	0110000010000
65	D_9	$(* * *-), (1 * **)$	0010000010000
66	Q_{37}	$(1 - 1*)$	0110010000000
67	Q_{38}	$(1 - *1)$	1100000000000
68	D_7	$(1 * *-)$	1000001000000
69	D_8	$(* * **), (*11-)$	0010000100000
70	D_4	$(- * **), (-1 * -)$	0001000000000
71	D_6	$(* * **), (- * *1)$	0100010000000
72	Q_{39}	$(* - 11), (1 * **)$	0110000000000
73	D_3	$(*11-), (1 * **)$	0010000000000
74	D_2	$(* * **), (1 - *1)$	0100000000000
75	D_1	$(* * *1), (1 * *-)$	1000000000000
76	K_7	$(* * **), (1 * *-)$	0000000000000

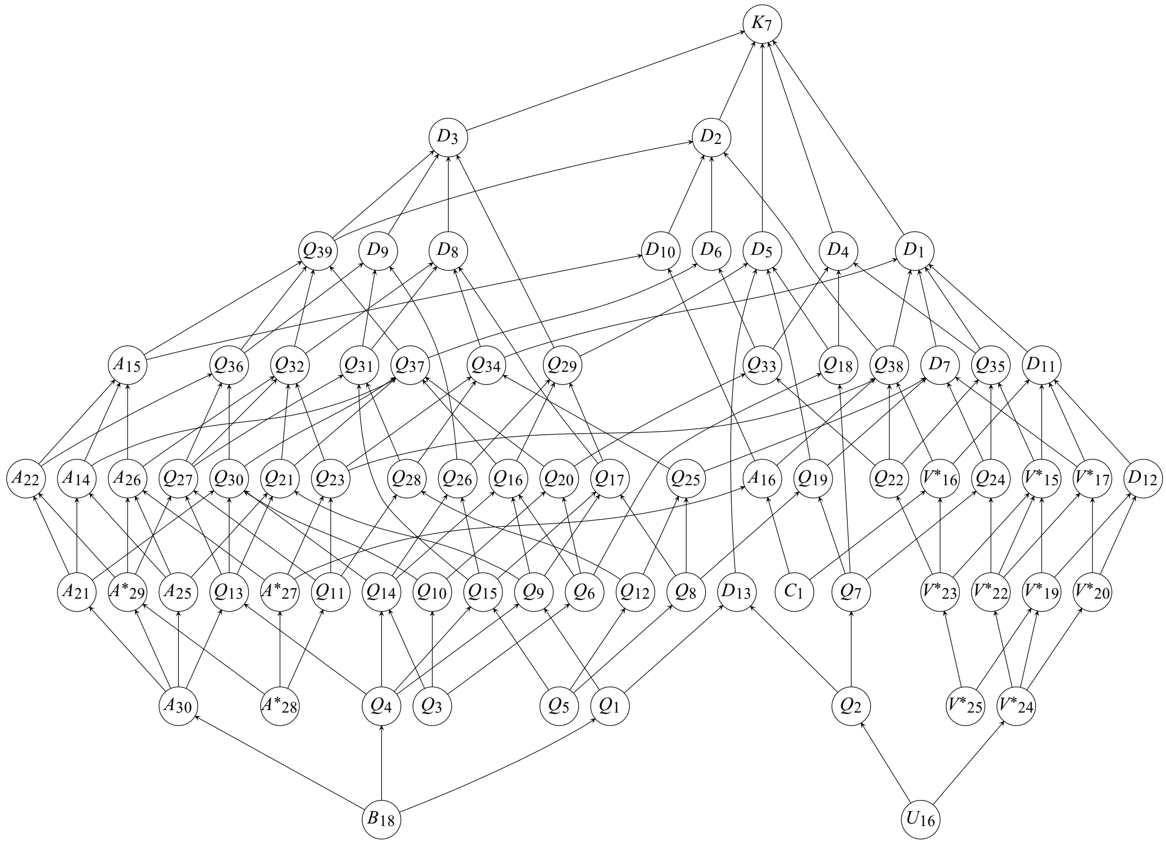


Рис. 1

Теорема 2. *Для любого множества Q множество мультифункций, полученное из элементов Q с помощью операторов обобщенного разветвления по предикату равенства и ограниченной суперпозиции, является подмножеством E-замыкания Q.*

Доказательство. Покажем, что каждую мультифункцию, полученную с помощью операторов обобщенного разветвления по предикату равенства и ограниченной суперпозиции, можно представить формулой с использованием операторов E-замыкания — суперпозиции и оператора с разветвлением по предикату равенства.

Пусть

$$f(x,y,z,t) = \begin{cases} g_1(x,y), & \text{если } z = t,\\ g_2(x,y), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим мультифункцию $U(x,y)$ следующим образом:

$$U(x,y) = f\big(x, y, h_1(x,y), h_2(x,y)\big)$$

и вычислим ее возможные значения для различных значений гиперфункций h_1 и h_2 на некотором наборе (α_1,α_2). Пусть $h_1(\alpha_1,\alpha_2) = \tau_1$ и $h_2(\alpha_1,\alpha_2) = \tau_2$. Рассмотрим все варианты значений τ_1 и τ_2.

(i) Пусть $\tau_1 \in E_2$ и $\tau_2 \in E_2$; тогда

$$U(\alpha_1,\alpha_2) = f(\alpha_1,\alpha_2,\tau_1,\tau_2) = \begin{cases} g_1(\alpha_1,\alpha_2), & \text{если } \tau_1 = \tau_2,\\ g_2(\alpha_1,\alpha_2), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(ii) Пусть $\tau_1 = -$ и $\tau_2 \in E_2$. Подставим значения

$$U(\alpha_1,\alpha_2) = f(\alpha_1,\alpha_2,-,\tau_2) = f(\alpha_1,\alpha_2,0,\tau_2) \cup f(\alpha_1,\alpha_2,1,\tau_2) = g_1(\alpha_1,\alpha_2) \cup g_2(\alpha_1,\alpha_2).$$

Аналогичным образом рассматривается случай $\tau_1 \in E_2$ и $\tau_2 = -$.

(iii) Пусть $\tau_1 = -$ и $\tau_2 = -$; тогда

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, -, -) = \\ = f(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0) \cup f(\alpha_1, \alpha_2, 0, 1) \cup f(\alpha_1, \alpha_2, 1, 0) \cup f(\alpha_1, \alpha_2, 1, 1) = g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

(iv) Пусть $\tau_1 = *$ и $\tau_2 \in E_2$ или $\tau_2 = -$. Подставим значения

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, *, \tau_2) = *.$$

Аналогичным образом рассматриваются другие случаи со значением $*$.

Таким образом, значения гиперфункции U на рассматриваемом наборе совпадают со значениями оператора обобщенного разветвления по предикату равенства, построенному для функций g_1, g_2, h_1 и h_2. □

Теорема 3. *Количество E-замкнутых классов множества K_7 равно* 76.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что число E-замкнутых классов мультифункций не превосходит 76. Теорема 1 дает обратную оценку. □

Полученное в [5] E-предполное множество K_8 — мультифункции, не принимающие ни на одном наборе значение 1, — является двойственным к рассматриваемому K_7, соответственно, оно также содержит 76 E-замкнутых классов.

Таким образом, из одиннадцати E-предполных множеств $K_1 - K_{11}$ в множестве мультифункций ранга два известна структура пяти: K_5–K_9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченков С. С.* Операторы замыкания с разветвлением по предикату// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. мех. — 2003. — *6.* — С. 37–39.
2. *Марченков С. С.* Оператор E-замыкания на множестве частичных функций многозначной логики// Мат. вопр. киберн. — 2013. — *19.* — С. 227–238.
3. *Марченков С. С.* Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций// Дискр. мат. — 2008. — *20*, № 3. — С. 80–88.
4. *Матвеев С. А.* Построение всех E-замкнутых классов частичных булевых функций// Мат. вопр. киберн. — 2013. — *18.* — С. 239–244.
5. *Panteleev V. I., Riabets L. V.* The completeness criterion for closure operator with the equality predicate branching on the set of multioperations on two-element set// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2019. — *29.* — С. 68–85.
6. *Panteleev V. I., Riabets L. V.* E-Closed sets of hyperfunctions on two-element set// Ж. Сиб. фед. ун-та. Сер. Мат. физ. — 2020. — *13*, № 2. — С. 231–241.
7. *Panteleev V. I., Riabets L. V.* Classification of multioperations of rank 2 by E-precomplete sets// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2020. — *34.* — С. 93–108.

Зинченко Анна Сергеевна
Иркутский государственный университет
E-mail: `azinchenko@gmail.com`

Ильин Борис Петрович
Иркутский государственный университет
E-mail: `ilin_bp@math.isu.ru`

Пантелеев Владимир Иннокентьевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `vl.panteleyev@gmail.com`

Рябец Леонид Владимирович
Иркутский государственный университет
E-mail: `l.riabets@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 37–43
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-37-43

УДК 519.714.24

О КЛАССЕ ПОЛИНОМИАЛЬНО УСТОЙЧИВЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

© 2022 г. **О. В. ЗУБКОВ**

Аннотация. Приведены основные свойства полиномиально устойчивых булевых функций. Показано, что любую полиномиально устойчивую функцию можно представить в виде суммы бесповторных в элементарном базисе слагаемых. Рассмотрены связи между полиномиально устойчивыми и симметрическими булевыми функциями. Доказан критерий полиномиальной устойчивости.

Ключевые слова: оператор для булевых функций, полином Жегалкина, бесповторная формула, полиномиальная устойчивость, симметрическая булева функция, вес двоичного набора.

ON THE CLASS OF POLYNOMIALLY STABLE BOOLEAN FUNCTIONS

© 2022 **O. V. ZUBKOV**

Abstract. The basic properties of polynomially stable Boolean functions are examined. We prove that any polynomially stable function can be represented as the sum of terms that are nonrepetitive in an elementary basis. Relationships between polynomially stable and symmetric Boolean functions are discussed and a criterion for polynomial stability is proved.

Keywords and phrases: operator for Boolean functions, Zhegalkin polynomial, repetition-free formula, polynomial stability, symmetric Boolean function, weight of a binary set.

AMS Subject Classification: 93B50

1. Полиномиально устойчивые булевы функции. В работе [1] введен в рассмотрение класс полиномиально устойчивых булевых функций, обладающих рядом интересных свойств. Предварительно определим оператор P на множестве булевых функций одинаковой размерности.

Пусть $f(x_1 \ldots, x_n)$ — булева функция, заданная своим вектором длины 2^n. Построим для нее полином Жегалкина и натуральным образом упорядочим его коэффициенты. Получим двоичный вектор h длины 2^n, в котором h_i соответствует наличию или отсутствию слагаемого, для которого двоичное представление i является маской по включению. Если вектор коэффициентов полинома Жегалкина был получен методом треугольника, то вектор h находится на его диагонали. Таким образом, вектору f естественным образом ставится в соответствие вектор (и булева функция) h. Обозначим $h = P(f)$.

В [1] доказаны следующие свойства оператора P:

1. $P(f \oplus g) = P(f) \oplus P(g)$.
2. Если $x_{i_1}, \ldots x_{i_n}$ — произвольная перестановка переменных, то
$$P(f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})) = P(f)(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}).$$

Далее под $f^0_{x_i}$ и $f^1_{x_i}$ будем понимать соответственно нулевую и единичную остаточную по аргументу x_i функции f.

3. $P(f) = \overline{x}_i P(f^0_{x_i}) \oplus x_i(P(f^0_{x_i} \oplus f^1_{x_i}))$ для любой x_i.

   Далее для наглядности будем при переходе к остаточным вместо $f = \overline{x}_i f^0_{x_i} \oplus x_i f^1_{x_i}$ записывать

$$f = \begin{pmatrix} f^0_{x_i} \\ f^1_{x_i} \end{pmatrix}.$$

Тогда данное свойство будет иметь вид

$$P(f) = \begin{pmatrix} P(f^0_{x_i}) \\ P(f^0_{x_i} \oplus f^1_{x_i}) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

4. Оператор P является инволютивным, то есть $P(P(f)) = f$.

Определение 1. Будем говорить, что булева функция f является полиномиально устойчивой, если $P(f) = f$.

5. Для любой булевой функции f верно, что $f \oplus P(f)$ полиномиально устойчива.

Определение 2. Будем говорить, что f принадлежит классу полиномиально устойчивой функции $f \oplus P(f)$. Для этой функции введем обозначение: $c(f) = f \oplus P(f)$.

6. $P(f) = f \oplus c(f)$, $c(f \oplus g) = c(f) \oplus c(g)$. Если f — полиномиально устойчивая, то $c(f) = 0$ и любая перестановка переменных у полиномиально устойчивой функции оставляет ее полиномиально устойчивой.
7. Если

$$f = \begin{pmatrix} f^0_{x_i} \\ f^1_{x_i} \end{pmatrix}$$

   является полиномиально устойчивой, то верно, что $f^0_{x_i}$ — полиномиально устойчивая и $f^1_{x_i}$ принадлежит классу $f^0_{x_i}$. Действительно, так как $f = P(f)$, то

$$\begin{pmatrix} f^0_{x_i} \\ f^1_{x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(f^0_{x_i}) \\ P(f^0_{x_i} \oplus f^1_{x_i}) \end{pmatrix}.$$

   Значит, $f^0_{x_i} = P(f^0_{x_i})$ и $f^0_{x_i}$ полиномиально устойчивая. Далее,

$$f^1_{x_i} = P(f^0_{x_i} \oplus f^1_{x_i}) = P(f^0_{x_i}) \oplus P(f^1_{x_i}),$$

   то есть

$$f^0_{x_i} = f^1_{x_i} \oplus P(f^1_{x_i}).$$

   Последнее равенство говорит, что $f^1_{x_i}$ принадлежит классу $f^0_{x_i}$.
8. Пусть f и $c(f)$ зависят от $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$. Тогда функция $\overline{x}_i c(f) \oplus x_i f$ является полиномиально устойчивой, причем в ее класс входит функция $\overline{x}_i f \oplus x_i f$ с фиктивным аргументом x_i.

   Для этого заметим следующее:

$$P\begin{pmatrix} c(f) \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(c(f)) \\ P(c(f) \oplus f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(f) \\ c(f) \oplus P(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(f) \\ f \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \oplus P\begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P(f) \\ P(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \oplus P(f) \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(f) \\ f \end{pmatrix}.$$

9. Множество полиномиально устойчивых функций от n аргументов образует абелеву группу по операции $\oplus$, которую обозначим G_n.

   Если $f \in G_n$ и $g \in G_n$, то $P(f \oplus g) = P(f) \oplus P(g) = f \oplus g$, то есть G_n замкнута по операции $\oplus$.

   $P(0) = 0$, то есть нейтральный по $\oplus$ элемент $\in G_n$.

   Для любой $f \in G_n$ она является сама к себе обратной по $\oplus$.
10. Пусть f — полиномиально устойчивая от n аргументов и множество булевых функций $K(f)$ — класс ее функций, то есть из того, что $g \in K(f)$, следует, что $c(g) = f$. Тогда $K(f)$ является классом смежности по подгруппе G_n.

Действительно, пусть f' — произвольная полиномиально устойчивая функция из G_n и $g \in K(f)$. Согласно пункту 8, хотя бы одна такая функция, равная

$$\begin{pmatrix} f^1_{x_i} \\ f^1_{x_i} \end{pmatrix},$$

существует. Рассмотрим, какому классу принадлежит $g \oplus f'$:

$$c(g \oplus f') = c(g) \oplus c(f') = c(g) \oplus 0 = c(g) = f,$$

то есть $g \oplus f' \in K(f)$. Обратно, пусть $g' \in K(f)$; покажем, что существует такая $f' \in G_n$, что $g' = g \oplus f'$. Очевидно, что $f' = g \oplus g'$; покажем, что f' полиномиально устойчива:

$$P(f') = P(g \oplus g') = P(g) \oplus P(g') = g \oplus c(g) \oplus g' \oplus c(g') = g \oplus f \oplus g' \oplus f = g \oplus g' = f'.$$

Пусть $f \otimes g$ — кронекерово произведение функции f на функцию g (в векторе f заменим все единицы на вектор g, а все нули — на вектор из нулей такой же длины, как и вектор g).

11. Верно, что $P(f \otimes g) = P(f) \otimes P(g)$. Покажем это при помощи матиндукции по числу аргументов функции f. $P(0 \otimes g) = P(0) \otimes P(g)$ — получится вектор из нулей, длина которого равна длине вектора g. $P(1 \otimes g) = P(1) \otimes P(g) = P(g)$:

$$P(f \otimes g) = P\begin{pmatrix} f^0_{x_1} \otimes g \\ f^1_{x_1} \otimes g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(f^0_{x_1} \otimes g) \\ P((f^0_{x_1} \otimes g) \oplus (f^1_{x_1} \otimes g)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(f^0_{x_1} \otimes g) \\ P((f^0_{x_1} \oplus f^1_{x_1}) \otimes g) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} P(f^0_{x_1}) \otimes P(g) \\ P(f^0_{x_1} \oplus f^1_{x_1}) \otimes P(g)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(f^0_{x_1}) \\ P((f^0_{x_1} \oplus f^1_{x_1})) \end{pmatrix} \otimes P(g) = P(f) \otimes P(g).$$

12. Если f и g полиномиально устойчивы, то $f \otimes g$ также полиномиально устойчива. Действительно, $P(f \otimes g) = P(f) \otimes P(g) = f \otimes g$.

2. Представление полиномиально устойчивых функций суммами бесповторных в элементарном базисе слагаемых. В [2] показано, что свойство 12 и тот факт, что функции конъюнкция и дизъюнкция являются полиномиально устойчивыми, логически влекут, что бесповторная конъюнкция двух полиномиально устойчивых функций $f(x_1, \ldots, x_k) \& g(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ является полиномиально устойчивой. Из этого вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ разбито на подмножества $X_1, X_2, \ldots, X_m$ так, что $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $X_1 \cup \ldots \cup X_m = X$. Тогда бесповторная конъюнкция дизъюнкций переменных каждого класса разбиения вида*

$$\left(\bigvee_{x_i \in X_1} x_i\right) \cdot \left(\bigvee_{x_i \in X_2} x_i\right) \cdot \ldots \cdot \left(\bigvee_{x_i \in X_m} x_i\right) \tag{2}$$

является полиномиально устойчивой.

Пример 1. Пусть $n = 6$ и $X = \{x_1, x_4\} \cup \{x_2, x_5, x_6\} \cup \{x_3\}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $(x_1 \vee x_4) \cdot (x_2 \vee x_5 \vee x_6) \cdot x_3$ является полиномиально устойчивой.

Множество функций, представимых в виде бесповторных формул вида (2) образует базисное множество для полиномиально устойчивых функций. Это вытекает следует из следующего утверждения.

Утверждение 2. *Любую полиномиально устойчивую функцию, за исключением тождественного нуля, можно представить* (*возможно, несколькими способами*) *в виде суммы бесповторных конъюнкций вида* (2).

Доказательство. Покажем, как можно найти указанное представление для произвольной полиномиально устойчивой функции f. Разложим f по двум переменным:

$$f = \begin{pmatrix} f^0_{x_i} \\ f^1_{x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{0\,0}_{x_i x_j} \\ f^{0\,1}_{x_i x_j} \\ f^{1\,0}_{x_i x_j} \\ f^{1\,1}_{x_i x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(f^{0\,1}_{x_i x_j}) \\ f^{0\,1}_{x_i x_j} \\ f^{1\,0}_{x_i x_j} \\ f^{1\,1}_{x_i x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(g_1) \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix},$$

где $g_1 = f^{0\,1}_{x_i x_j}$. Рассмотрим функцию

$$g = \begin{pmatrix} c(g_1) \\ g_1 \\ g_1 \\ g_1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$c\begin{pmatrix} g_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(g_1) \\ g_1 \end{pmatrix},$$

то функция g является полиномиально устойчивой. Полиномиально устойчивая функция

$$\begin{pmatrix} c(g_1) \\ g_1 \end{pmatrix} = f^0_{x_i}$$

зависит от переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Подставим в эту функцию вместо переменной x_j выражение $x_i \vee x_j$ и получим формулу

$$\Phi = f^0_{x_i}\big(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_{j-1},\ x_i \vee x_j,\ x_{j+1}, \ldots,\ x_n\big).$$

Покажем, что эта формула реализует функцию g. Действительно,

$$\Phi^{0\,0}_{x_i x_j} = f^{0\,0}_{x_i x_j} = c(g_1), \quad \Phi^{0\,1}_{x_i x_j} = \Phi^{1\,0}_{x_i x_j} = \Phi^{1\,1}_{x_i x_j} = f^{0\,1}_{x_i x_j} = g_1.$$

Далее рассмотрим функцию $h = f \oplus g$. Так как h является суммой двух полиномиально устойчивых функций, то и сама она полиномиально устойчива. Очевидно, что $h^0_{x_i} = 0$,

$$h^1_{x_i} = \begin{pmatrix} g_2 \oplus g_1 \\ g_3 \oplus g_1 \end{pmatrix},$$

и так как $c\big(h^1_{x_1}\big) = 0$, то и сама $h^1_{x_i}$ тоже полиномиально устойчивая. При этом $h = x_i \cdot h^1_{x_i}$. В итоге получаем, что любую полиномиально устойчивую булеву функцию $f = g \oplus h$ можно представить в виде формулы над двумя полиномиально устойчивыми функциями меньшей размерности $f^0_{x_i}$ и $h^1_{x_i}$:

$$f = f^{0 (x_i \vee x_j)}_{x_i x_j} \oplus x_i \cdot h^1_{x_i}. \tag{3}$$

Далее воспользуемся математической индукцией по числу аргументов функции f. Если в разложении (3) оба остаточных члена являются унарными, то первое слагаемое превращается в дизъюнкцию, а второе в конъюнкцию двух переменных. Оба эти слагаемых имеют вид (2). Если $f^0_{x_i}$ и $h^1_{x_i}$ не унарные, то каждую из них представим в виде суммы слагаемых вида (2) и подставим это представление в (3) для основной функции f. В левой части полученной формулы вместо одной из переменных появится дизъюнкция двух переменных, в правой части формулы каждое слагаемое умножится на x_i. И в том и в другом случае каждое слагаемое полученной формулы сохранит вид (2). □

3. Критерий полиномиальной устойчивости булевых функций.

Теорема 1. *Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является полиномиально устойчивой тогда и только тогда, когда любая её нулевая остаточная является полиномиально устойчивой, и количество единиц в векторе f на всех наборах, кроме последнего, четно.*

Доказательство. Докажем, что значение последнего бита функции $P(f)$ равно сумме по mod2 всех битов исходной функции f. Для этого поочередно разложим её по каждой переменной при помощи формулы (1):

$$P(f) = \begin{pmatrix} P(f^0_{x_1}) \\ P(f^0_{x_1}) \oplus P(f^1_{x_1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(f^{0\,0}_{x_1 x_2}) \\ P(f^{0\,0}_{x_1 x_2}) \oplus P(f^{0\,1}_{x_1 x_2}) \\ P(f^{0\,0}_{x_1 x_2}) \oplus P(f^{1\,0}_{x_1 x_2}) \\ P(f^{0\,0}_{x_1 x_2}) \oplus P(f^{1\,0}_{x_1 x_2}) \oplus P(f^{0\,1}_{x_1 x_2}) \oplus P(f^{1\,1}_{x_1 x_2}) \end{pmatrix}.$$

Проведя это разложение по всем переменным, на последней позиции в функции $P(f)$ получим

$$\bigoplus_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} P(f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)).$$

Так как для нульместных функций $P(0)=0$ и $P(1)=1$, то получим, что

$$P(f)(1,\ldots,1)=\bigoplus_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n),$$

что и требовалось доказать. Теперь перейдем к доказательству основного утверждения теоремы. Пусть f — полиномиально устойчива. Тогда все её нулевые остаточные так же полиномиально устойчивы. Далее, так как $P(f)=f$, то из вышедоказанного свойства получим, что

$$f(1,\ldots,1)=P(f)(1,\ldots,1)=\bigoplus_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n).$$

Отсюда получаем, что

$$\bigoplus_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\neq(1,\ldots,1)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0,$$

что и требовалось. Обратно, пусть все нулевые остаточные функции f являются полиномиально устойчивыми и

$$\bigoplus_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\neq(1,\ldots,1)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0.$$

Покажем, что тогда $P(f)=f$.

Для любого набора $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\neq(1,\ldots,1)$ найдется по крайней мере одна нулевая остаточная, в которую этот набор входит, а значит, $P(f)(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, так как эта нулевая остаточная полиномиально устойчива. Но равенство

$$\bigoplus_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\neq(1,\ldots,1)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0$$

эквивалентно равенству

$$\bigoplus_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=f(1,\ldots,1),$$

а значит, по вышедоказанному свойству, $f(1,\ldots,1)=P(f)(1,\ldots,1)$, то есть функции $P(f)$ и f совпадают на всех наборах. □

Пример 2. Рассмотрим полиномиально устойчивую булеву функцию

$$f=(0110\ 1101\ 1100\ 1001).$$

Её нулевые остаточные (0110 1101), (0110 1100), (0111 1110) и (0110 1010) являются полиномиально устойчивыми. Количество единиц в векторе f на всех позициях, кроме последней, равно 8, то есть четно.

4. Симметрические полиномиально устойчивые булевы функции. Выше уже было показано, что любая полная бесповторная конъюнкция элементарных дизъюнкций вида

$$\bigwedge(x_{i_1}\vee x_{i_2}\vee\ldots\vee x_{i_k})$$

является полиномиально устойчивой. Далее было показано, что любую полиномиально устойчивую функцию можно представить (возможно, несколькими способами) в виде суммы таких бесповторных конъюнкций. Таким образом, достаточно интересным является вопрос минимизации представления произвольной полиномиально усточивой функции в классе таких сумм. При рассмотрении вопросов минимизации было замечено, что большую роль здесь могут играть симметрические полиномиально устойчивые булевы функции. Например, для случая четырех переменных, кроме полной дизъюнкции $x_1\vee x_2\vee x_3\vee x_4$, все остальные бесповторные конъюнкции естественным образом разбиваются на классы, такие, что сумма внутри каждого класса равна одной и той же симметрической функции:

$$x1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \oplus x_2(x_1 \vee x_3 \vee x_4) \oplus x_3(x_1 \vee x_2 \vee x_4) \oplus x_4(x_1 \vee x_2 \vee x_3) = (0000\ 0001\ 0001\ 0110),$$
$$(x_1 \vee x_2)x_3x_4 \oplus x_1x_2(x_3 \vee x_4) = (0000\ 0001\ 0001\ 0110),$$
$$(x_1 \vee x_3)x_2x_4 \oplus x_1x_3(x_2 \vee x_4) = (0000\ 0001\ 0001\ 0110),$$
$$(x_1 \vee x_4)x_2x_3 \oplus x_1x_4(x_2 \vee x_3) = (0000\ 0001\ 0001\ 0110),$$
$$(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) \oplus (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_4) \oplus (x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3) \oplus x_1x_2x_3x_4 = (0000\ 0001\ 0001\ 0110).$$

В связи с этим содержательным является вопрос о количестве симметрических полиномиально устойчивых функций, и их виде. Для начала полезно рассмотреть симметрические функции элементарного вида, такие, что они на всех наборах равны 0, за исключением наборов одного фиксированного веса w, на которых они равны 1. Например, упомянутая выше функция (0000 0001 0001 0110) равна 0 везде, кроме наборов веса 3. Обозначим функцию от n аргументов, такую, что она равна 1 только на наборах веса w через $f(n, w)$. Очевидно, что при $n < w$ эта функция равна тождественно нулевой, а при $n = w$ она будет равна 1 только на последнем наборе. То есть при $n \leqslant w$ функция $f(n, w)$ всегда полиномиально устойчива. Содержательный интерес вызывает следующий вопрос: при каких условиях $f(n, w)$ является полиномиально устойчивой для $n > w$? При этом следует учитывать, что если в какой-то момент $f(n, w)$ не является полиномиально устойчивой, то и для любого $k > n$ $f(k, w)$ так же не является полиномиально устойчивой, так как любая нулевая остаточная у полиномиально устойчивой функции так же должна быть полиномиально устойчивой, а $f(n, w)$ является нулевой остаточной у $f(n + 1, w)$ и так далее. Рассмотрим первые значения n и w: $f(1, 1) = (01)$ — полиномиально устойчива, $f(2, 1) = (0110)$ — полиномиально устойчива, $f(3, 1) = (0110\ 1000)$ — не полиномиально устойчива. $f(2, 2) = (0001)$ — полиномиально устойчива, $f(3, 2) = (0001\ 0110)$ — не полиномиально устойчива. $f(3, 3) = (0000\ 0001)$ — полиномиально устойчива, $f(4, 3) = (0000\ 0001\ 0001\ 0110)$ — полиномиально устойчива, $f(5, 3) = (0000\ 0001\ 0001\ 0110\ 0001\ 0110\ 0110\ 1000)$ — полиномиально устойчива, $f(6, 3) = (0000\ 0001\ 0001\ 0110\ 0001\ 0110\ 0110\ 1000\ 0001\ 0110\ 0110\ 1000\ 0110\ 1000\ 1000\ 0000)$ — полиномиально устойчива, $f(7, 3)$ полиномиально устойчивой не является. Видно, что вопрос не является тривиальным. Общее описание полиномиально устойчивых булевых функций указанного вида дано в следующей теореме:

Теорема 2. *Пусть число $w+1$ делится на 2^k и не делится на 2^{k+1}. Тогда все функции $f(i, w)$ для i от 0 до $w + 2^k - 1$ включительно будут полиномиально устойчивыми, а $f(w + 2^k, w)$ и все последующие будут не полиномиально устойчивыми.*

Доказательство. Рассмотрим бесконечную последовательность весов двоичных наборов при их натуральном упорядочении:

$$0\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 3\ 1\ 2\ 2\ 3\ 2\ 3\ 3\ 4 \ldots$$

Эта последовательность в энциклопедии целочисленных последовательностей OEIS (см. [3] и онлайн-версию) имеет номер A000120. Данная последовательность строится следующим образом: на нулевом шаге берем 0 и далее на каждом последующем шаге последовательность получается из предыдущей путем приписывания в её конец этой же последовательности с увеличением каждого её элемента на 1. Если взять префикс этой последовательности длины 2^n и заменить в ней все числа, равные w на 1, а остальные на 0, то получим $f(n, w)$. Пусть для $(n - 1)$-го шага построения этой последовательности среди первых 2^{n-1} её элементов имеется $D(n - 1, w)$ чисел w. Тогда на n-м шаге среди первых 2^n элементов будет $D(n - 1, w) + D(n - 1, w - 1)$ чисел w, так как в добавленной второй половине каждое число из первой половины увеличено на 1. В совокупности с условиями $D(w, 0) = 1$ и $D(w, w) = 1$, получаем, что $D(n, w)$ равно обычному биномиальному коэффициенту $\binom{n}{w}$. Таким образом, для фиксированного w, в функции $f(n, w)$ будет $\binom{n}{w}$ единиц. Исходя из критерия, доказанного в теореме 1, нас будет итересовать четность количества чисел w среди первых $2^n - 1$ элементов последовательности A000120. То есть нас будет интересовать треугольник Паскаля по модулю 2, называемый также треугольником Серпинского. В этом треугольнике будем выделять строки, столбцы и диагонали. За счет симметричности треугольника Паскаля, соответствующие столбцы и диагонали совпадают. Найдем первое $n > w$, такое, что $\binom{n}{w}$ нечетно. Для этого в треугольнике Серпинского рассмотрим столбец с номером w (нумерация столбцов с 0), и в этом столбце найдем первую единицу, стоящую не на верхней диагонали треугольника. Пусть строка треугольника Серпинского, в которой находится эта первая встреченная единица, имеет номер T (нумерация строк с 0), $T > w$. Покажем, что все $f(i, w)$ для i от 0 до $T - 1$ являются полиномиально устойчивыми, а $f(T, w)$ — не полиномиально устойчивая. Действительно, мы уже зафиксировали, что $f(w, w)$ — полиномиально устойчива. Так как для любой $f(n, w)$ все её нулевые остаточные в силу симметричности равны $f(n - 1, w)$, то для того, чтобы $f(n, w)$ была полиномиально устойчивой, требуется согласно критерию теоремы 1 полиномиальная устойчивость предыдущей $f(n - 1, w)$ и четность биномиального коэффициента $\binom{n}{w}$. Если он четен, то и $f(n, w)$ будет полиномиально устойчива, если он нечетен, то и $f(n, w)$ и все последующие $f(n + i, w)$ не будут полиномиально устойчивыми, то есть все $f(i, w)$ для i от 0 до $T - 1$ являются полиномиально устойчивыми, а $f(T, w)$ и все последующие — не полиномиально устойчивы. Итак, пусть $2^{n-1} \leqslant w < 2^n - 1$. В силу самоподобия треугольника Серпинского, а также того, что его строки с номерами $2^i - 1$ полностью заполнены единицами, можно заметить, что треугольная область, состоящая из столбцов с номерами $2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \ldots, 2^n - 1$, ограниченных снизу $(2^n - 1)$-й строкой, совпадает с треугольной областью, состоящей из столбцов $0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1$, ограниченных снизу $(2^{n-1} - 1)$-й строкой. Если $w = 2^{n-1} - 1$, то в этом столбце первая единица встретится в строке номер $2^n - 1$, то есть $T = 2^n - 1 = w + 2^{n-1}$ — это первое значение, на котором $f(T, w)$ будет не полиномиально устойчивой. Так как в этом случае $w + 1$ делится на 2^{n-1} и не делится на 2^n, то утверждение теоремы верно. Иначе, если $w > 2^{n-1} - 1$, то перейдем от рассмотрения этого столбца к рассмотрению равного ему в пределах рассматриваемых треугольных областей столбца $w - 2^{n-1}$ и повторим предыдущее рассуждение. В результате вычитания некоторого количества старших степеней двойки число w преобразуется к виду $2^k - 1$, что означает, что первая единица в столбце номер w встретится на строке номер $w + 2^k - 1$. Так как $w + 1$ в этом случае делится на 2^k, но не делится на 2^{k+1}, то теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубков О. В.* О классе полиномиально устойчивых булевых функций и их свойствах// Мат. 5 Российской школы-семинара «Синтаксис и семантика логических систем» (8–12 августа 2017, Улан-Удэ). — Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2017. — С. 87–91.
2. *Зубков О. В.* Представление полиномиально устойчивых функций суммами бесповторных в элементарном базисе слагаемых// Мат. 6 Междунар. школы-семинара «Синтаксис и семантика логических систем» (11–16 августа 2019, Ханх, Монголия). — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2019. — С. 48–52.
3. *Sloane N. J. A., Plouffe S.* The encyclopedia of integer sequences. — San Diego: Academic Press, 1995.

Зубков Олег Владимирович
Иркутский государственный университет
E-mail: `oleg.zubkov@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 44–52
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-44-52

УДК 519.1, 519.2

КОМБИНАТОРНАЯ СХЕМА СЛУЧАЙНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКИ НЕСКОЛЬКИХ ТИПОВ

© 2022 г. **Н. А. КОЛОКОЛЬНИКОВА, Р. Р. ГИЛЬМАНШИН**

Аннотация. С помощью A-схемы последовательных испытаний рассмотрены два варианта случайного размещения частиц в ячейки r типов. В одном из этих вариантов среди ячеек каждого типа имеются помеченные. Найден явный вид распределения числа непустых ячеек в одном из вариантов, а также числа непустых помеченных ячеек — в другом, получены числовые характеристики, доказаны предельные теоремы.

Ключевые слова: случайное размещение, частица, ячейка, схема последовательных испытаний, успех, неуспех, вероятность.

COMBINATORIAL SCHEME OF RANDOM PLACEMENT OF PARTICLES INTO CELLS OF SEVERAL TYPES

© 2022 **N. A. KOLOKOLNIKOVA, R. R. GILMANSHIN**

Abstract. Based on the A-scheme of sequential trials, we examine two variants of random placement of particles in cells of r types. In one of these variants, there exist marked cells of each type. We find an explicit distribution of the number of nonempty cells in one of the variants and a distribution of the number of nonempty marked cells in the other, obtain numerical characteristics of these distributions, and prove limit theorems.

Keywords and phrases: random placement, particle, cell, scheme of sequential trials, success, failure, probability.

AMS Subject Classification: 60E05, 60C05, 60E10

1. Введение. Как известно, задачи о случайных размещениях служат моделями многих задач, возникающих в экономике, теории массового обслуживания, теории управления и т. д. Простейшая модель основана на использовании так называемой «классической задачи о дробинках» [5], в которой предполагается, что любая из размещаемых частиц (дробинок) может попасть с одинаковой вероятностью в любую ячейку (ящик). Существует немало работ, в которых рассматриваются различные обобщения «классической схемы размещения». Многие авторы (например, [1,7]) изучали различные обобщения «классической схемы», рассматривая размещения в полиномиальной схеме, размещения частиц комплектами и т. д. Один вариант зависимого размещения частиц рассмотрен в статье [6]. При решении некоторых задач удобно использовать специальные схемы последовательных испытаний (B-схема, A-схема, Ф-схема и др.). Применение этих схем позволяет записывать в явном виде распределение изучаемой случайной величины, находить характеристики и исследовать асимптотическое поведение распределения. Покажем это, используя так называемую A-схему последовательных испытаний. В данной работе предполагается, что размещение частиц производится в ячейки r типов. Изучение распределения числа непустых (и пустых) ячеек было начато в работе [4] ($r = 2$). В настоящей статье, кроме того, рассматривается вариант размещения частиц при наличии помеченных ячеек. Находится явный вид распределения числа непустых (и пустых) ячеек. Для получения предельных распределений применяются результаты, полученные для так называемых Ф-распределений в работе [3].

2. Специальные комбинаторные схемы. Следуя [2, 3], опишем некоторые комбинаторные схемы.

2.1. А-схема последовательных испытаний. Предположим, что проводятся испытания типа «успех-неуспех», и после каждого успеха вероятность следующего успеха (а значит, и неуспеха) может меняться. После неуспеха изменения вероятностей не происходит. Такая схема называется A-схемой последовательных испытаний.

Пусть ξ_n — число успехов в n испытаниях, проводимых в условиях A-схемы, p_i — вероятность $(i+1)$-го успеха, т.е.

$$p_i = P\{\xi_{n+1} = i+1 \mid \xi_n = i\}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Положим

$$q_i = P\{\xi_{n+1} = i \mid \xi_n = i\} = 1 - p_i.$$

Теорема 1. *Если последовательные испытания проводятся в условиях A-схемы, то*

$$\begin{aligned} &P\{\xi_n = 0\} = A_0^n, \\ &P\{\xi_n = k\} = A_k^n \prod_{i=0}^{k-1} p_i, \quad k = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь A_k^n — обобщенные числа Стирлинга второго рода, построенные на базе $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$. Эти числа могут быть определены рекуррентным соотношением

$$A_k^n = A_{k-1}^{n-1} + q_k A_k^{n-1}, \quad k = \overline{0, n}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Кроме того, полагаем

$$A_n^n = 1, \ n = \overline{0, \infty}, \quad A_k^n = 0, \text{ если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Укажем одно свойство обобщенных чисел Стирлинга. Пусть числа A_k^n построены на базе $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$, а числа $\overline{A_k^n}$ — на базе $\{cq_i\}_{i=0}^{\infty}$, где $c = \mathrm{const}$. Тогда

$$\overline{A_k^n} = c^{n-k} A_k^n. \tag{2}$$

2.2. Ф-схема последовательных испытаний. Проводятся испытания типа «успех-неуспех». Как и ранее, обозначим через ξ_n число успехов в n испытаниях. Предполагаем, что условные вероятности успехов имеют такую структуру:

$$\begin{gathered} p_{ni} = P\{\xi_n = i+1 \mid \xi_{n-1} = i\} = 1 - P\{\xi_n = i \mid \xi_{n-1} = i\} = \alpha_{n-1}(C - i), \\ i = \overline{(0, \min(C, n-1)}, \quad n = (1, \infty). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь C — некоторое большое натуральное число (которое в дальнейшем можем устремлять к бесконечности), α_{n-1} $(n = \overline{1, \infty})$ — вообще говоря, произвольные положительные числа, удовлетворяющие условию $0 \leqslant \alpha_{n-1}(C - i) \leqslant 1$ при каждом i. Тогда распределение величины ξ_n имеет вид (см. [3])

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i (C)_k, \quad k = \overline{0, \min(C, n)}, \quad n = \overline{1, \infty}, \tag{4}$$

где

$$(C)_0 = 1, \quad (C)_k = \prod_{j=0}^{n-1} (C - j), \ k \geqslant 1$$

Φ_k^n — комбинаторные числа, которые могут быть определены следующим образом:

$$\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - C + k\right) \Phi_k^{n-1}, \quad k = \overline{0, n}, \quad n = \overline{1, \infty},$$

причем

$$\Phi_n^n = 1,\ n = \overline{0,\infty}, \quad \Phi_k^n = 0,\ \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Замечание 1. Если $\alpha_{n-1} = \alpha$ при всех n, то распределение (4) можно рассматривать как частный случай распределения (1).

Укажем некоторые результаты, полученные для Ф-распределений вида (4) и приведенные в [3].

Лемма 1. *При любых натуральных C, n все m корней многочлена*

$$\Phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} P\{\xi_n = k\} x^k,$$

где $m = \min(C, n)$, действительны и неположительны.

Отсюда следует, что величина ξ_n представима в виде суммы независимых случайных индикаторов.

При любом натуральном n для математического ожидания $E\xi_n$ и дисперсии $D\xi_n$ справедливы равенства:

$$E\xi_n = C\left(1 - \prod_{i=0}^{n-1}(1-\alpha_i)\right), \tag{5}$$

$$D\xi_n = C(C-1)\prod_{i=0}^{n-1}(1-2\alpha_i) + C\prod_{i=0}^{n-1}(1-\alpha_i) - C^2\prod_{i=0}^{n-1}(1-\alpha_i)^2. \tag{6}$$

Введем обозначение

$$x_{nk} = \frac{k - E\xi_n}{\sqrt{D\xi_n}}.$$

Теорема 2. *Найдется такая абсолютная константа $0 < d < \infty$, что*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant \min(C,n)} \left| \sqrt{D\xi_n} P\{\xi_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}} \right| < \frac{d}{\sqrt{D\xi_n}}. \tag{7}$$

Следствие 1. *Для того чтобы при $C, n \to \infty$ равномерно относительно k $(k = 0, 1, \ldots)$ имело место соотношение*

$$\sqrt{D\xi_n} P\{\xi_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}} \to 0, \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы $D\xi_n \to \infty$.

Следствие 2. *Для того чтобы при $C, n \to \infty$ равномерно по x $(-\infty < x < \infty)$ имело место соотношение*

$$P\left\{\frac{\xi_n - E\xi_n}{\sqrt{D\xi_n}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt, \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы $D\xi_n \to \infty$.

3. Размещение частиц в r совокупностей ячеек. Число непустых ячеек. Предположим, что имеется N ячеек, которые могут быть представлены в виде r непересекающихся совокупностей соответственно объема $N_1, N_2, \ldots, N_r$ (очевидно, что $N_1 + N_2 + \ldots + N_r = N$). В этих ячейках случайным образом размещаются n частиц. Каждая из размещаемых частиц с вероятностью a_i попадает в i-ю совокупность ячеек,

$$i = \overline{1, r}, \quad \sum_{i=1}^{r} a_i = 1.$$

Попав в какую-либо совокупность ячеек, частица с одинаковой вероятностью может оказаться в любой ячейке этой совокупности (т. е. попадание в каждую ячейку первой совокупности возможно с вероятностью $1/N_1$, в любую ячейку второй совокупности — $1/N_2$ и т. д.).

Пусть ξ_n — общее число непустых ячеек после размещения n частиц, $\mu_0 = \mu_0(N, n)$ — число ячеек, оставшихся пустыми.

Не умаляя общности, можем считать, что частицы последовательно «бросаются» в совокупность из N ячеек. Под успехом будем понимать попадание очередной частицы в пустую ячейку, под неуспехом — попадание в ячейку, где уже находится по меньшей мере одна частица. Пусть p_k — вероятность $(k+1)$-го успеха, $k = 0, 1, \ldots$ Очевидно, что

$$p_0 = \sum_{i=1}^{r} a_i = 1.$$

Вероятность второго успеха находится следующим образом:

$$p_1 = a_1^2 \frac{N_1 - 1}{N_1} + a_1 \sum_{j=2}^{r} a_j \frac{N_1}{N_1} + a_2^2 \frac{N_2 - 1}{N_2} + a_2 \sum_{j=1, j\neq 2}^{r} a_j \frac{N_2}{N_2} + \ldots +$$

$$+ a_r^2 \frac{N_r - 1}{N_r} + a_r \sum_{j=1}^{r-1} a_j \frac{N_r}{N_r} = \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{j=1}^{r} a_j - \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i} = 1 - \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}.$$

Продолжая процесс нахождения вероятностей p_k, предполагая, что

$$k \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} N_i,$$

получим

$$p_k = \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_i^{k-j} \left(\sum_{m=1, m\neq i}^{r} a_m \right)^j \frac{N_i - (k-j)}{N_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_i^{k-j} \left(\sum_{m=1, m\neq i}^{r} a_m \right)^j - k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i} \sum_{j=0}^{k} \binom{k-1}{j} a_i^{k-1-j} \left(\sum_{m=1, m\neq i}^{r} a_m \right)^j =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i \left(\sum_{m=1}^{r} a_m \right)^k - k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i} \left(\sum_{m=1}^{r} a_m \right)^{k-1}.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = 1,$$

то

$$p_k = 1 - k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}. \tag{10}$$

Поскольку вероятности успехов меняются после каждого успеха, то находимся в условиях A-схемы последовательных испытаний, и распределение числа непустых ячеек — это распределение числа успехов в n испытаниях, которое определяется формулой (1). В данном случае базовые элементы, из которых строятся числа A_k^n, имеют вид

$$q_k = k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}, \quad k \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} N_i.$$

Введем обозначение

$$S = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i};$$

тогда

$$p_k = 1 - kS, \quad q_k = kS, \quad k \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} N_i. \tag{11}$$

Это значит, что в силу формулы (2), имеет место равенство $A_k^n = S^{n-k} a_k^n$: если база для построения обобщенных чисел Стирлинга второго рода имеет вид $\{q_i\}_{i=0}^{\infty} = \{i\}_{i=0}^{\infty}$, то эти числа становятся числами Стирлинга второго рода a_k^n. Итак,

$$P\{\xi_n = k\} = S^{n-k} a_k^n \prod_{i=0}^{k-1} (1 - iS), \quad k = \overline{1, n}, \quad n \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} N_i. \tag{12}$$

Поскольку

$$\mu_0 = \mu_0(N, n) = N - \xi_n,$$

то согласно формуле (12)

$$P\{\mu_0(N, n) = k\} = S^{n-N+k} a_{N-k}^n \prod_{i=0}^{N-k-1} (1 - iS).$$

Данное распределение, как и предыдущее, имеет место, если

$$n \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} N_i.$$

Замечание 2. Если существуют такие N_i, что $n > N_i$, то формулы для нахождения вероятностей p_k при $k > N_i$ становятся очень громоздкими. Приведем их для случая, когда имеется лишь два типа ячеек, т. е. $r = 2$.

1. Пусть $N_1 < n \leqslant N_2$. Тогда при $i \leqslant N_1$ вероятности p_i имеют вид (10), а при $i > N_1$

$$p_i = 1 - i\left(\frac{a_1^2}{N_1} + \frac{a_2^2}{N_2}\right) - \frac{1}{N_1} \sum_{j=0}^{i-N_1} \binom{i}{j} a_1^{i+1-j} a_2^j (N_1 - i + j) - \frac{1}{N_2} \sum_{j=0}^{i-N_1-1} \binom{i}{j} a_1^{i-j} a_2^{j+1} (N_2 - j).$$

2. Если $n > \min(N_1, N_2)$, то при $i > \min(N_1, N_2)$ вероятности p_i удобнее вычислять по общей формуле

$$p_i = \sum_{j=\max(0, i-N_1)}^{\min(i, N_2)} \binom{i}{j} a_1^{i-j+1} a_2^j \frac{N_1 - (i-j)}{N_1} + \sum_{j=\max(0, i-N_2)}^{\min(i, N_1)} \binom{i}{j} a_2^{i-j+1} a_1^j \frac{N_2 - (i-j)}{N_1}.$$

4. Размещение частиц в r совокупностей ячеек при наличии помеченных ячеек. Как и в рассмотренном выше случае, полагаем, что имеется r непересекающихся совокупностей ячеек соответственно объема $N_1, N_2, \ldots, N_r$ $(N_1 + N_2 + \ldots + N_r = N)$. При этом в каждой совокупности некоторые ячейки являются помеченными. Количество помеченных ячеек равно соответственно $M_1, M_2, \ldots, M_r$. Как и ранее, в N ячейках случайным образом размещаются n частиц. Каждая из размещаемых частиц с вероятностью a_i попадает в i-ю совокупность ячеек, $i = \overline{1, r}$,

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = 1.$$

Попав в какую-либо совокупность ячеек, частица с одинаковой вероятностью может оказаться в любой ячейке этой совокупности.

Пусть η_n — общее число непустых ячеек среди помеченных после размещения n частиц. Предположим, что

$$n \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} M_i.$$

Для нахождения явного вида распределения величины η_n будем, как и ранее, считать, что частицы последовательно «бросаются» в совокупность из N ячеек. Под успехом понимаем попадание очередной частицы в пустую помеченную ячейку, под неуспехом — попадание в любую другую ячейку (или непомеченную или помеченную ячейку, в которой уже находится по меньшей мере одна частица). Пусть p_k — вероятность $(k+1)$-го успеха, $k = 0, 1, \ldots$ Нетрудно убедиться, что

$$p_0 = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{M_i}{N_i}, \quad p_1 = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{M_i}{N_i} - \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}.$$

Продолжая процесс нахождения вероятностей p_k, предполагая, что

$$k \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant r} M_i,$$

получим

$$p_k = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{M_i}{N_i} \left(\sum_{m=1}^{r} a_m\right)^k - k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i} \left(\sum_{m=1}^{r} a_m\right)^{k-1}.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = 1,$$

то

$$p_k = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{M_i}{N_i} - k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}.$$

Введем обозначения:

$$U = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{M_i}{N_i}, \quad S = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}.$$

Тогда $p_k = U - kS$,

$$k \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant r} M_i.$$

Поскольку вероятности успехов меняются после каждого успеха (находимся в условиях A-схемы), то распределение числа непустых помеченных ячеек — это распределение числа успехов в n испытаниях, определяемое формулами (1):

$$P\{\eta_n = 0\} = A_0^n$$

$$P\{\eta_n = k\} = A_k^n \prod_{i=0}^{k-1} p_i, \quad k = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, \min_{1\leqslant i\leqslant r} M_i}.$$

В данном случае базовые элементы, из которых строятся числа A_k^n, имеют вид

$$q_k = 1 - U + kS, \quad k \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant r} M_i.$$

Число пустых помеченных ячеек после размещения n частиц $\mu_0 = \mu_0(M, n) = M - \eta_n$, где $M = M_1 + M_2 + \ldots + M_r$, имеет распределение

$$P\{\mu_0 = k\} = A_{M-k}^n \prod_{i=0}^{M-k-1} p_i, \quad k = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, \min_{1\leqslant i\leqslant r} M_i}.$$

5. Числовые характеристики. Математическое ожидание и дисперсия величины ξ_n в соответствии с формулами (5) и (6) запишутся в виде

$$E\xi_n = \frac{1}{S}(1 - (1 - S)^n);$$

$$D\xi_n = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{S} - 1\right)(1 - 2S)^n + \frac{1}{S}(1 - S)^n - \frac{1}{S^2}(1 - S)^{2n}.$$

При этом

$$E\mu_0(N, n) = N - \frac{1}{S}(1 - (1 - S)^n); \quad D\mu_0(N, n) = D\xi_n.$$

В частном случае, когда $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = 1/r$, $N_1 = N_2 = \ldots = N_r = N/r$, получим известные результаты для числа пустых ячеек [5].

Пусть $N, n \to \infty$. Тогда для получим асимптотическое представление

$$E\xi_n = \frac{1}{S}(1 - e^{-nS}(1 - (nS^2)/2))(1 + o(1)); \tag{13}$$

$$D\xi_n = \frac{1}{S} e^{-nS}(1 - e^{-nS}(nS + 1))(1 + o(1)). \tag{14}$$

Для случайной величины η_n (числа непустых помеченных ячеек) имеем:

$$E\eta_n = \frac{U}{S}(1-(1-S)^n);$$
$$D\eta_n = \frac{U}{S}\left(\frac{U}{S}-1\right)(1-2S)^n + \frac{U}{S}(1-S)^n - \frac{U^2}{S^2}(1-S)^{2n}.$$

При $N, n \to \infty$ получаем для $E\eta_n$ и $D\eta_n$ результаты, мало отличающиеся от (13) и (14) соответственно:

$$E\eta_n = \frac{U}{S}\left(1-e^{-nS}\left(1-\frac{nS^2}{2}\right)\right)(1+o(1));$$
$$D\eta_n = \frac{U}{S}e^{-nS}(1-e^{-nS}(UnS+1))(1+o(1)).$$

6. Предельные теоремы.

6.1. Предельные распределения величины ξ_n. Прежде всего, отметим, что имеет место утверждение теоремы 2 (оценка (7)). Поскольку

$$n \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant r} N_i,$$

то, согласно (11), $p_n = 1-nS$, $q_n = nS$. Это значит, что $0 \leqslant nS \leqslant 1$, т. е., если $n\to\infty$, то $S \to 0$. Возможны два случая:

(i) $nS \to \mathrm{const} < 1$,
(ii) $nS \to 0$.

Случай $nS \to \delta$, $0<\delta<1$.

Теорема 3. *Пусть $nS \to \delta$, $0<\delta<1$, если $n\to\infty$, $S\to 0$. Тогда соотношение* (8) *выполняется равномерно относительно k $(k=0,1,\ldots)$.*

Доказательство. Используя формулу (14) и условия теоремы, устанавливаем, что $D\xi_n \to \infty$. Это значит, что справедливо следствие 1 теоремы 2. Таким образом, имеет место сходимость (8). При этом $E\xi_n$ и $D\xi_n$ находятся соответственно по формулам (13) и (14). □

На основании следствия 2 теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $nS \to \delta$, $0<\delta<1$, если $n\to\infty$, $S\to 0$. Тогда сходимость* (9) *является равномерной относительно по x $(-\infty < x < \infty)$.*

Случай $nS \to 0$. Если $nS\to 0$, то из формул (13) и (14) могут быть получены более удобные асимптотические представления:

$$E\xi_n = \frac{1}{S}\left(nS - \frac{n^2S^2}{2} + \frac{nS^2}{2} + \frac{n^3S^3}{6} + o(n^3S^3)\right) = n - \frac{n^2S^2}{2} + \frac{nS}{2} + \frac{n^3S^2}{6} + o(n^3S^2), \tag{15}$$

$$D\xi_n = \frac{1}{S}\left(\frac{n^2S^2}{2} - \frac{nS^2}{2} - \frac{5n^3S^3}{6} + o(n^3S^3)\right) = \frac{n^2S}{2} - \frac{nS}{2} - \frac{5n^3S^2}{6} + o(n^3S^2) \tag{16}$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\frac{n^2}{S} \to \lambda < \infty,$$

т.е. дисперсия остается ограниченной при $nS\to 0$. Пусть

$$p_\lambda(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left|P\{\xi=k\} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|$$

— расстояние по вариации между распределением величины ξ и распределением Пуассона с параметром λ. Известно, что представление случайной величины ξ в виде суммы независимых случайных индикаторов дает возможность оценить $p_\lambda(\xi)$ следующим образом:

$$p_\lambda(\xi) \leqslant E\xi - D\xi.$$

Тогда, используя формулы (15) и (16), получим

$$p_\lambda(n-\xi_n) \leqslant \frac{2n^3S^2}{3} + o(n^3S^2),$$

т.е.

$$p_\lambda(n-\xi_n) = O(n^3S^2) = o(1).$$

Это означает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Если при $n \to \infty$, $S \to 0$ выполнено условие*

$$\frac{n^2S}{2} \to \lambda < \infty,$$

то

$$P\{\xi_n = n-k\} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \geqslant 0$$

или

$$P\{\mu_0(N,n) = N-n+k\} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \geqslant 0.$$

На основании следствий теоремы 2 заключаем следующее.

Теорема 6. *Пусть $n, N \to \infty$, причем*

$$n \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant r} N_i,$$

и выполнено условие $n^2S \to \infty$. Тогда имеют место соотношения (8) *и* (9).

6.2. Предельные распределения величины η_n. Приведём некоторые предельные теоремы для распределения величины η_n. Обозначим

$$x_{nk} = \frac{k - E\eta_n}{\sqrt{D\eta_n}}.$$

Теорема 7. *Пусть $n \to \infty$, $S \to 0$, $U \to \gamma$ $(0 < \gamma < 1)$. Тогда при $nS \to \delta$ $(0 < \delta < 1)$ равномерно относительно k $(k = 0, 1, \ldots)$ имеет место соотношение*

$$\sqrt{D\eta_n}P\{\eta_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_{nk}^2/2} \to 0.$$

Теорема 8. *Пусть $n \to \infty$, $S \to 0$, $U \to \gamma$ $(0 < \gamma < 1)$. Тогда при $nS \to \delta$ $(0 < \delta < 1)$ равномерно по x $(-\infty < x < \infty)$ имеет место сходимость*

$$P\left\{\frac{\eta_n - E\eta_n}{\sqrt{D\eta_n}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

Рассмотрим случай, когда $U \to 1$, $n^2S/2 \to \lambda < \infty$, т.е. дисперсия остается ограниченной при $nS \to 0$. Тогда

$$p_\lambda(n-\xi_n) = O(n^3S^2) = o(1).$$

Это означает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Если при $n \to \infty$, $S \to 0$, $U \to 1$ выполнено условие*

$$\frac{n^2S}{2} \to \lambda < \infty,$$

то

$$P\{\eta_n = n-k\} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \geqslant 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватутин В. А., Михайлов В. Г.* Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами// Теор. вероят. примен. — 1982. — *27*, № 4. — С. 684–692.
2. *Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А., О. В. Кузьмин, Платонов М. Л.* Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. — Иркутск.: Изд-во ИГУ, 1990.
3. *Колокольникова Н. А.* Предельные теоремы для числа успехов в одной схеме зависимых испытаний. — Деп. в ВИНИТИ РАН. — № 649В 92. — 1992. — 208 с..
4. *Колокольникова Н. А.* Случайные размещения частиц в ячейки нескольких типов// в кн.: Прикладные задачи дискретного анализа. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2019. — С. 55–63.
5. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. — М.: Наука, 1975.
6. *Севастьянов Б. А.* Об одной схеме зависимых размещений// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. — 1981. — № 2. — С. 37–41.
7. *Чистяков В. П.* Дискретные предельные распределения в задаче о дробинках с произвольными вероятностями попадания в ящики// Мат. заметки. — 1967. — *1*, № 1. — С. 9–16.

Колокольникова Наталья Арсеньевна
Иркутский государственный университет
E-mail: `k_n_a_05@mail.ru`

Гильманшин Роман Ралифович
Иркутский государственный университет
E-mail: `m944@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 53–59
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-53-59

УДК 519.1

КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ПИРАМИДЫ ПАСКАЛЯ И ПОСТРОЕНИЕ НАВИГАЦИОННЫХ МАРШРУТОВ

© 2022 г. **О. В. КУЗЬМИН, Б. А. СТАРКОВ**

Аннотация. В статье описываются методы математического аппарата иерархических структур. Приводится определение обобщенной пирамиды Паскаля и рассматриваются суммы элементов ее плоских сечений. Указываются рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют эти суммы, а также перечислительные интерпретации изучаемых комбинаторных объектов. Описываются комбинаторные пути на целочисленных решетках и применение рекуррентных соотношений для оценки числа отклонений траектории движения беспилотного летательного аппарата от заданного вектора движения.

***Ключевые слова*:** комбинаторный анализ, треугольник Паскаля, обобщенная пирамида Паскаля, рекуррентное свойство, целочисленная решетка, траектория движения.

COMBINATORIAL PROPERTIES OF FLAT SECTIONS OF THE GENERALIZED PASCAL'S PYRAMID AND CONSTRUCTION OF NAVIGATION ROUTES

© 2022 **O. V. KUZMIN, B. A. STARKOV**

Abstract. The article describes the methods of the mathematical apparatus of hierarchical structures. The definition of the generalized Pascal pyramid is given and the sums of the elements of its flat sections are considered. Recurrence relations that these sums satisfy, as well as enumerative interpretations of the combinatorial objects under study are shown. Combinatorial paths on integer lattices and the use of recurrence relations to estimate the number of deviations of the trajectory of an unmanned aerial vehicle from a given motion vector are described.

***Keywords and phrases*:** combinatorial analysis, Pascal's triangle, generalized Pascal's pyramid, recurrent property, integer lattice, trajectory.

***AMS Subject Classification*:** 06A06, 03G10

1. Введение. Комбинаторное моделирование — это процесс, который позволяет нам определить подходящую математическую модель для переформулирования проблемы. Эти комбинаторные модели обеспечат с помощью комбинаторной теории операции, необходимые для решения исходной проблемы (см. [1]).

Можно выделить два основных круга проблем в области комбинаторного моделирования: разработка методов, предназначенных в первую очередь для создания новых и анализа известных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Иркутской области (проект № 20-41-385001).

комбинаторных объектов [9], и приложения комбинаторных чисел в задачах теории вероятностей и математической статистики.

Так, например, в [2] рассматривается метод моделирования комбинаторных последовательностей с использованием особых последовательностей таблиц, состоящих из целых положительных чисел. Эти последовательности называются T-моделями и строятся рекурсивно с помощью специальных отображений. Для T-моделей вводятся q-аналоги, позволяющие моделировать отвечающие им q-аналоги комбинаторных последовательностей. Также определяются частично упорядоченные множества и соответствующие им T-диаграммы. С помощью этих частично упорядоченных множеств и T-диаграмм рассматриваются многочисленные дополнительные свойства моделируемых комбинаторных последовательностей.

В монографии [7] излагаются классические и модифицированные модели исследования дискретных последовательностей на основе аппарата сингулярного разложения. Строятся и исследуются дискретные модели идентификации структурных свойств процессов. Разрабатываются схемы реализации алгоритмических моделей исследования дискретных последовательностей в вычислительной среде на базе сингулярного разложения.

Теория вероятностей и математическая статистика служат наиболее естественными областями приложения комбинаторики. Достаточно перспективным представляется применение комбинаторных методов при построении дискретных моделей случайных величин и случайных процессов (см., например, [3, 5, 8]).

Разработка новых и модификация известных методов математического аппарата, предназначенного для исследования иерархических структур типа обобщенной пирамиды Паскаля, рассматриваемых как частный случай частично упорядоченных множеств, позволяет создавать новые способы и инструменты анализа и построения комбинаторных моделей дискретных объектов и/или их систем. При этом разработанные методы анализа иерархических структур на основе обобщения элементов плоского сечения пирамиды Паскаля по модулю простого числа и рекуррентных правил [11, 15–17] позволяют находить новые комбинаторные свойства известных дискретных объектов, таких как графы и пути на целочисленных решетках, служащих математическими моделями навигационных маршрутов. Полученные комбинаторные свойства возможно использовать при решении ряда задач:

1. Распознавания и представления информации.
2. Интеллектуального машинного зрения.
3. Дихотомической классификационной модели — бинарного дерева принятия решений для оптимизации автономного поиска и навигации кибернетических систем.
4. Поиск оптимальных взвешенных траекторий на решетках с запрещенными позициями и неполной информацией.
5. Построение взвешенных деревьев принятия решений.

Деревья решений являются одним из наиболее эффективных инструментов интеллектуального анализа данных и предсказательной аналитики, которые позволяют решать задачи классификации и регрессии.

Основополагающие идеи, послужившие толчком к появлению и развитию деревьев решений, были заложены в 1950-х годах в области исследований моделирования человеческого поведения с помощью компьютерных систем. Среди них следует выделить работы К. Ховеленда [13] и Е. Ханта и др. [14].

Дальнейшее развитие деревьев решений как самообучающихся моделей для анализа данных связано с именами Джона Р. Куинлена [18, 19], который разработал алгоритм ID3 и его усовершенствованные модификации C4.5 и C5.0, а также Лео Бреймана и др. [12], который предложил алгоритм CART и метод случайного леса.

Как показано в [6], посредством задания весов, множества запрещенных вершин (запрещенных позиций) и последующего стягивания ребер, иерархическая треугольная структура, называемая обобщенным треугольником Паскаля [5], может быть преобразована в соответствующее дерево решений.

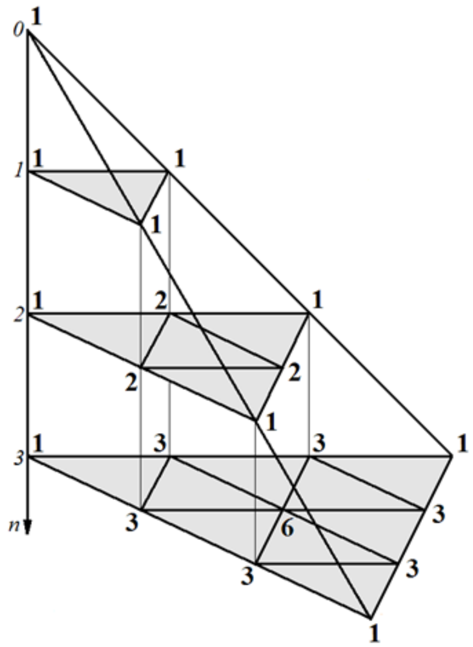


Рис. 1. Горизонтальные сечения пирамиды Паскаля ($\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\psi = 0$).

Как показывает практика, исследование и программная реализация алгоритмов поиска пути в графе представляют актуальность и научно-практический интерес. как теоретическое, так и важное практическое значение имеет разработка алгоритмов поиска оптимальной траектории перемещения груза в пространстве с препятствиями с учетом угловой ориентации [4, 10].

2. Плоские сечения обобщенной пирамиды Паскаля. Обобщенной пирамидой Паскаля (ОПП) называется [5] трехгранный пирамидальный массив, элементы которого для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$V(n,k,l) = \alpha_{n,k-1,l}V(n-1,k-1,l) + \beta_{n,k,l-1}V(n-1,k,l-1) + \gamma_{n,k,l}V(n-l,k,l) \tag{1}$$

с граничными условиями $V(0,0,0) = V_0$; $V(n,k,l) = 0$, если $\min(n,k,l,n-k-l) < 0$.

Совместим вершину ОПП с началом прямоугольной декартовой системы координат в пространстве, а его элементы — с точками решетки первого октанта, имеющими неотрицательные координаты [16]. При этом числа n расположим по оси абсцисс, k — по оси ординат, l — по оси аппликат. Тем самым устанавливается соответствие между точками решетки и элементами ОПП, которая будет ограничена плоскостями $k = 0$, $l = 0$ и $n - k - l = 0$. Рассмотрим произвольное плоское сечение ОПП, представляющее собой некоторый треугольник. Обозначим углы, образованные этим сечением с осями ординат и аппликат, через ϕ и ψ соответственно. Тогда уравнение сечения будет иметь вид:

$$n + \operatorname{tg}\phi k + \operatorname{tg}\psi l = c, \tag{2}$$

где c здесь и далее обозначает некоторую постоянную.

Общий вид семейств сечений ОПП в зависимости от значений углов ϕ и ψ можно продемонстрировать на частном случае — обычной пирамиды Паскаля (см. рис. 1—3).

Разумеется, без геометрического представления результатов, изучаемые объекты, которые возникали в разное время и из разных по своей природе задач, создавали впечатление разрозненности. Геометрический метод представления комбинаторных объектов в качестве элементов обобщенных пирамид Паскаля позволяет единым образом выявлять новые свойства и интерпретации этих объектов. Так, например, рассмотрение элементов, расположенных на плоских сечениях обычной и обобщенной пирамид Паскаля, позволяет получать новые рекуррентные соотношения и производящие функции для ряда хорошо известных комбинаторных чисел и их некоторых

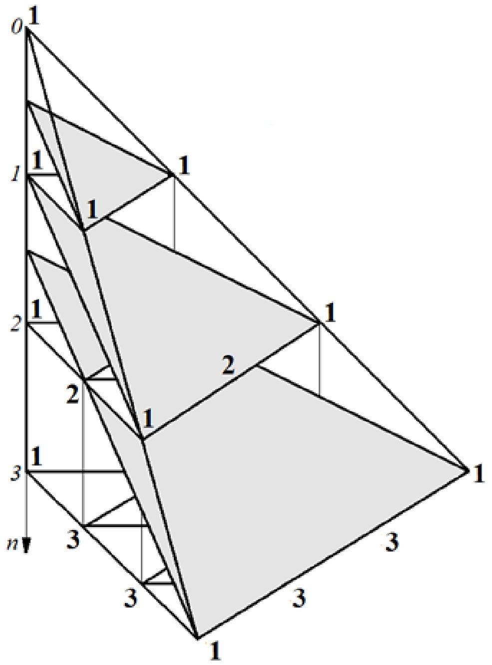


Рис. 2. Нисходящие сечения пирамиды Паскаля ($\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\psi = -1/2$).

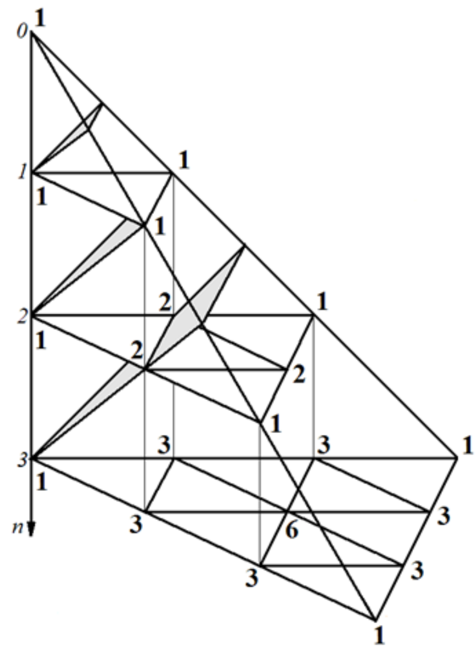


Рис. 3. Восходящие сечения пирамиды Паскаля ($\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\psi = 1$).

обобщений. Изучение сечений и частей обобщенной пирамиды Паскаля позволяет устанавливать новые соотношения между известными объектами, переносить свойства одних объектов на другие, а также получать новые объекты, ранее не изученные.

3. Свойства и перечислительные интерпретации. Пронумеруем все параллельные между собой сечения ОПП, заданные уравнением (2), начиная от вершины пирамиды, и рассмотрим последовательность $\{S_N \operatorname{tg}\phi\}$, $\operatorname{tg}\psi$, $N \in \mathbb{N}_0$ сумм всех элементов таких сечений.

Пусть X обозначает сумму элементов $x(x_1, x_2, x_3)$. Рассмотрим оператор $\odot w_{w_1,w_2,w_3}(X)$, который каждому слагаемому $x(x_1, x_2, x_3)$ суммы X ставит в соответствие слагаемое $w_{x_1+w_1,x_2+w_2,x_3+w_3}x(x_1, x_2, x_3)$ суммы $\odot w_{w_1,w_2,w_3}(X)$.

Рассмотрим последовательность сумм:

$$\left\{S_N\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)\right\}, \quad p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{N}, \quad \frac{p_i}{q_i} > -1, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Для частично упорядоченного множества $\{a, b, c\}$ символом $\operatorname{mid}(a, b, c)$ будем обозначать его «средний» элемент, которому предшествует минимальный и за которым следует максимальный элементы этого множества.

Обозначим

$$\begin{aligned}
S_N &= S_N\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right),\\
M_n &= \min\left(q, \frac{q}{q_1}(p_1 + q_1), \frac{q}{q_2}(p_2 + q_2)\right),\\
M_x &= \max\left(q, \frac{q}{q_1}(p_1 + q_1), \frac{q}{q_2}(p_2 + q_2)\right),\\
M_d &= \operatorname{mid}\left(q, \frac{q}{q_1}(p_1 + q_1), \frac{q}{q_2}(p_2 + q_2)\right).
\end{aligned} \tag{4}$$

Для последовательности сумм (3) справедливо следующее рекуррентное соотношение [16]:

$$S_N = \odot\alpha_{1,0,0}S_{N-(q/q_1)(p_1+q_1)} + \odot\beta_{1,0,0}S_{N-(q/q_2)(p_2+q_2)} + \odot\gamma_{1,0,0}S_{N-q} \tag{5}$$

с начальными условиями $S_0 = V_0$, $S_1 = S_2 = \ldots = S_{M_n-1} = 0$; S_I, $I = M_n, \ldots, M_d - 1$ задаются соотношениями

$$S_I = \begin{cases} \odot\alpha_{1,0,0}S_{I-(q/q_1)(p_1+q_1)}, & M_n = (q/q_1)(p_1+q_1), \\ \odot\beta_{1,0,0}S_{I-(q/q_2)(p_2+q_2)}, & M_n = (q/q_2)(p_2+q_2), \\ \odot\gamma_{1,0,0}S_{I-q}, & M_n = q; \end{cases} \tag{6}$$

а S_J, $J = M_d, \ldots, M_x - 1$ задаются соотношениями

$$S_I = \begin{cases} \odot\alpha_{1,0,0}S_{J-(q/q_1)(p_1+q_1)} + \odot\beta_{1,0,0}S_{J-(q/q_2)(p_2+q_2)}, & M_x = q, \\ \odot\alpha_{1,0,0}S_{J-(q/q_1)(p_1+q_1)} + \odot\gamma_{1,0,0}S_{J-q}, & M_x = (q/q_2)(p_2+q_2), \\ \odot\beta_{1,0,0}S_{I-(q/q_2)(p_2+q_2)} + \odot\gamma_{1,0,0}S_{J-q}, & M_x = (q/q_1)(p_1+q_1). \end{cases} \tag{7}$$

Указанные рекуррентные соотношения позволяют привести следующую биологическую интерпретацию сечения ООП, обобщающую приведенную в [1].

Дискретное множество переменного состава, элементы которого способны рождаться, умирать и переходить из одной качественной категории в другую, называем популяцией. Не уменьшая общности рассмотрения, считаем, что первоначально популяция однородна — состоит из одинаковых элементов, обладающих двумя доминирующими свойствами: A и B. Развитие популяции рассматриваем дискретно по итогам его последовательных этапов, номера которых $N \geqslant 1$, и по двойным номерам элементов (r, m) — степеням обладания элементом свойствами A и B соответственно $(r, m \geqslant 0, r + m \leqslant N)$. Пусть элементы $(r+1, m)$-го вида порождаются по прошествии $(q/q_1)(p_1+q_1)$ этапов развития популяции, элементы $(r, m+1)$-го вида порождаются по прошествии $(q/q_2)(p_2+q_2)$ этапов развития популяции, а элементы (r, m)-го вида порождаются по прошествии q этапов развития популяции, то есть ориентируемся на эволюцию без отступлений. Тогда числа $V(N/q - (p_2/q_2)m - (p_1/q_1)r, r, m)$ и операторы $\odot\alpha_{1,0,0}$, $\odot\beta1,0,0$ и $\odot\gamma1,0,0$ в соотношениях (5) (6) (7) могут быть интерпретированы следующим образом.

$V(N/q - (p_2/q_2)m - (p_1/q_1)r, r, m)$ есть объем (количество) элементов (r, m)-го вида в итоге N-го этапа; $\odot\alpha_{1,0,0}$ есть оператор, производящий коэффициенты, представляющие собой доли от объема $V(N/q - (p_2/q_2)m - (p_1/q_1)r, r, m)$, в котором элементы (r, m)-го вида породили элементы $(r+1, m)$-го вида по прошествии $(q/q_1)(p_1+q_1)$ этапов развития популяции; $\odot\beta_{1,0,0}$ есть оператор, производящий коэффициенты, представляющие собой доли от объема $V(N/q-(p_2/q_2)m-(p_1/q_1)r, r, m)$, в котором элементы (r, m)-го вида породили элементы $(r, m+1)$-го вида по прошествии $(q/q_2)(p_2+q_2)$ этапов развития популяции; $\odot\gamma_{1,0,0}$ есть оператор, производящий коэффициенты, представляющие собой доли от объема, в котором сохранились элементы (r, m)-го вида по прошествии q этапов развития популяции.

4. Пути на целочисленной решетке. Рассмотрим комбинаторные конфигурации, связанные с перечислением путей на решетках [20]. Решетка является частично упорядоченным множеством [15], в котором каждое двухэлементное подмножество имеет точные как верхнюю, так и нижнюю грани. Также решетки можно рассматривать как некоторые комбинаторные конфигурации, то есть конечное множество точек, прямых, плоскостей, связанных между собой. Пути на решетках (см. рис. 4), начинающиеся обычно в начале координат, являются последовательностями точек целочисленной решетки плоскости с некоторыми ограничениями на приращение координат при переходе от одной точки к следующей. Другими словами, рассматривается последовательность шагов, состовляющих данный путь, причем под шагом понимается упорядоченная пара чисел, показывающая взаимное расположение соседних точек пути. В данной статье будет показана возможность применения комбинаторных свойств сечений ОПП для определения количества путей, разветвляющихся на q-ом этапе движения киберфизической системы.

Рассмотрим конкретный тип путей на решетках.

Пусть $v_0, \ldots, v_n$ — такая последовательность точек из Z^2, что:

(i) $v_0 = (0, j_0)$;

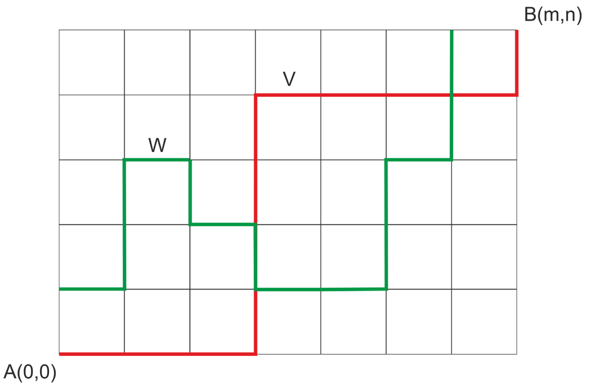


Рис. 4. Комбинаторные пути на целочисленной решетке.

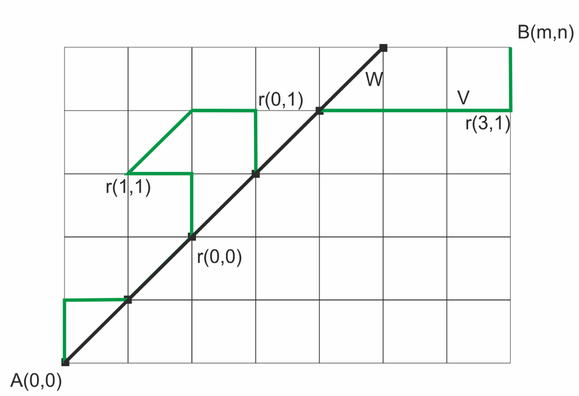


Рис. 5. Отклонение траектории V от целевого вектора W.

(ii) $v_{(k+1)} - v_k = (1,0)$ или $(0,-1)$, $0 < k < l$;
(iii) $\mathrm{alt}(v_k) < 0$, $0 < k < l$, где $\mathrm{alt}(v_k)$ — высота точки v_k.

Тогда $v_0, \ldots, v_n$ называется путем без уровней с началом v_0 и концом v_n и обозначается $v = \langle v_0, \ldots, v_n \rangle (j_0)$. Пусть $M_{(i,j)}$ — множество всех путей v, y, которых $\mathrm{alt}(v_0) = i$, $\mathrm{alt}(v_n) = j$ и $i < \mathrm{alt}(p) < j$ для $p < v$. Множество $M_{(k,0)}$ будем называть множеством путей Мак-Магона.

5. Отклонения в траектории движения. Рассмотрим область действия некоторой киберфизической системы, например, беспилотного летательного аппарата (БПЛА). Разделим область поиска на квадратные секторы (на рис. 5 секторы представляют собой упорядоченный вектор последовательных точек решетки) и зададим целевой вектор маршрута дрона (на рис. 5 целевой вектор обозначен путем W). Во время выполнения поставленной задачи дрон может отклоняться от целевого вектора маршрута [17]. При рассмотрении двумерного случая отклонение траектории движения от целевого вектора рассматривается как по вертикали (свойство A), так и по горизонтали (свойство B).

По аналогии с биологической интерпретацией ООП возможно составить перечислительную интерпретацию диагональных сечений для подсчета числа отклонений (r, m)-го вида на q-м этапе работы БПЛА (прямая задача), так и на основе имеющейся информации об отклонениях траектории движения на всех q этапах работы БПЛА вычислить коэффициенты α, β, γ в соотношении (1) (обратная задача). Решение прямой задачи позволит находить число отклонений определенного типа (r, m) на нужном этапе работы. В задачах геолокационного поиска максимум отклонения от направляющего вектора движения может служить целевой функцией, что дает возможность использовать комбинаторные объекты ООП в качестве метрики оценки эффективности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982.
2. *Бондаренко Л. Н.* Моделирование комбинаторных последовательностей// Образовательные ресурсы и технологии. — 2019. — *2*, № 27. — С. 64–73.
3. *Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А., Кузьмин О. В., Платонов М. Л.* Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1990.
4. *Корытов М. С.* Декомпозиция обобщенных координат при решении задач оптимизации траектории перемещения груза// Вестн. МАДИ. — 2010. — *3*, № 22. — С. 32–35.
5. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
6. *Кузьмин О. В., Аталян А. В.* Деревья принятия решений в задачах диагностики и прогнозирования// в кн.: Прикладные задачи дискретного анализа. — Изд-во ИГУ, 2019. — С. 64–79.
7. *Кузьмин О. В., Кедрин В. С.* Сингулярное разложение в моделях дискретных последовательностей. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014.

8. *Платонов М. Л.* Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. — М.: Наука, 1979.
9. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. — М.: Мир, 1980.
10. *Щербаков В. С., Корытов М. С.* Алгоритм поиска оптимальной траектории перемещения груза в пространстве с препятствиями с учетом угловой ориентации на основе генетического подхода// Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. — 2011. — *2*, № 49. — С. 14–20.
11. *Balagura A. A., Kuzmin O. V.* Generalised Pascal pyramids and their reciprocals// Discr. Math. Appl. — 2007. — *17*, № 6. — P. 619–628.
12. *Breiman L., Friedman J., Olshen R., Stone C.* Classification and Regression Trees. — Wadsworth, Belmont, CA, 1984.
13. *Hovland C. I.* Computer simulation of thinking// Am. Psychologist. — 1960. — *15*, № 11. — P. 687–693.
14. *Hunt E. B., Marin J., Stone P. J.* Experiments in Induction. — New York: Academic Press, 1966.
15. *Kuzmin O. V., Balagura A. A., Kuzmina V. V., Khudonogov I. A.* Partially ordered sets and combinatory objects of the pyramidal structure// Adv. Appl. Discr. Math. — 2019. — *20*, № 2. — P. 229–236.
16. *Kuzmin O. V., Seregina M. V.* Plane sections of the generalised Pascal pyramid and their interpretations// Discr. Math. Appl. — 2010. — *20*, № 4. — P. 377–389.
17. *Kuzmin O. V., Starkov B. A.* Application of hierarchical structures based on binary matrices with the generalized arithmetic of Pascal's triangle in route building problems// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012030.
18. *Quinlan J. R.* Induction of decision trees// Machine Learning. — 1986. — *1*, № 1. — P. 81–106.
19. *Quinlan J. R.* Programs for Machine Learning. — Waltham: Morgan Kaufmann, 1993.
20. *Stanley R.* Enumerated Combinatorics. Vol. 1. — Cambridge Univ. Press, 1997.

Кузьмин Олег Викторович
Иркутский государственный университет
E-mail: `quzminov@mail.ru`

Старков Борис Алексеевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `stsibrus@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 60–68
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-60-68

УДК 512.563+004.056.55

СЦЕНАРИЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ В КАЧЕСТВЕ ИСТОЧНИКА КЛЮЧЕВОГО МАТЕРИАЛА ДЛЯ ОДНОРАЗОВОГО ШИФРОБЛОКНОТА

© 2022 г. **В. Е. МУЦЕНЕК**

Аннотация. Описан сценарий применения социальных сетей в качестве средства доставки ключевого материала для одноразового шифроблокнота. Рассмотрены технические возможности социальной сети по доставке открытого текста, возможности автоматизации захвата данных социальной сети клиентскими приложениями для последующей обработки с точки зрения относительно криптостойкости.

Ключевые слова: информационная безопасность, одноразовый шифроблокнот, криптоанализ, социальная сеть.

THE SCENARIO OF USING A SOCIAL NETWORK AS A SOURCE OF KEY MATERIAL FOR THE ONE-TIME PAD

© 2022 **V. E. MUTSENEK**

Abstract. The scenario of use of social media as a mean for delivery of key material for the one-time pad is described. Technical capabilities of social media to deliver plain text, capabilities of automatic intercept of data from social media, and matters of cryptographic strength are considered.

Keywords and phrases: information security, one-time pad, cryptoanalysis, social media.

AMS Subject Classification: 06E30, 94D10

1. Задачи исследования. Появление социальных сетей, их укрепление в роли средств распространения информации оказали значительное влияние на процессы, происходящие в обществе. Предположим, что эволюция поведенческих шаблонов человека, вызванная влиянием современных информационных технологий, могла внести изменения и в технологии скрытой передачи информации. Данная работа ставит целью поиск ответов на вопросы:

1. Как могла трансформироваться классическая система тайной связи с появлением социальных сетей.
2. Существует ли возможность использования современных технологий распространения информации в сети Интернет для создания и поддержки классических систем тайной связи.
3. Насколько безопасны с точки зрения криптоанализа предложенные за последние несколько лет схемы одноразовых шифроблокнотов (ОШБ).

2. Объект исследования. Системы тайной связи длительное время эффективно использовались для организации канала передачи информации. Во второй половине XX в. системы тайной связи активно задействовали технические и криптографические средства.

Подробная характеристика систем тайной связи, применявшихся в XX в., дана В. В. Гребенниковым в [3]. Классическая система тайной связи включает устройство набора (кодирования), передатчик и приёмник. Отмечается, что в подобных системах «наверное, ни один элемент безопасной связи агента с Центром не применялся так часто, как ОШБ» [3, с. 82]. Существует возможность пренебречь шифрованием, если факт передачи сообщения можно скрыть [3, сс. 82, 86]. В качестве одного из каналов связи упоминается «односторонняя речевая радиопередача, которая давала возможность принимать шпионские сообщения на обычный КВ радиоприемник в диапазоне 3—30 Мгц» [3, с. 83]. Развитие односторонней системы связи в этом диапазоне привело к сокращению времени передачи сообщения с 1 часа до 10 минут. Появление систем ближней агентурной связи сократило время передачи до 3 секунд. Для канала этого типа в качестве способа сокрытия упоминается зашумление радиоэфира ложными радиопередачами [3, с. 85].

Надёжность системы, по мнению Гребенникова, обеспечивается при соблюдении условий:

1. *Безопасность*: содержимое сообщения должно быть непонятным для любого, кроме получателя. ОШБ и криптоалгоритмы должны защитить сообщение от прочтения противником, даже если оно перехвачено.
2. *Персональность*: сообщение не должно быть доступным никому, кроме получателя.
3. *Неизвестность*: наличие линии и техники связи между агентом и резидентом должно быть никому не известным.
4. *Маскировка*: осуществление связи не должно отличаться от обычных действий. Для скрытого обмена информацией в интернете нужно использовать бесплатные программы, стандартные почтовые ящики, системы общего пользования и цифровые тайники [3, с.86].

Система тайной связи, как отмечает Гребенников, должна удовлетворять следующим требованиям.

1. Прекращение передачи, если один из участников связи обнаружен, поскольку нельзя давать ссылку на человека на другой стороне канала связи. Содержание сообщения является вторичным по отношению к безопасности агента.
2. Использование наилучших из имеющихся физических или электронных методов сокрытия. Система всегда должна использовать самую передовую технику, доступную в настоящее время.
3. Использование стойкого криптоалгоритма для шифрования сообщений.
4. Устройства должны быть портативными и совместимыми с различными компьютерными аппаратными платформами.
5. Преемственность предыдущих и новейших технических решений с оптимальной гибкостью, что позволяет при наличии будущих улучшений безопасности читать сообщения старых систем скрытой связи [3, с. 88, 89].

Примем перечисленные характеристики как признаковое описание классической системы тайной связи.

3. Сравнение признаковых характеристик. Между социальной сетью и радиоканалами, использовавшимися во временной односторонней и ближней агентурной системах связи, можно провести несколько параллелей. В ситуации, когда социальная сеть используется без обратной связи, создаётся симплексный канал, подобный системе временной односторонней связи. Обе среды передачи не защищены от перехвата. В обоих случаях информационное пространство можно зашумить ложными сообщениями, затруднив обнаружение. Время передачи информации по сети Интернет сравнимо с временем работы систем ближней агентурной связи. Современные бытовые вычислительные устройства могут выступать в роли передатчика и приёмника, не вызывая подозрений, позволяют обеспечить гибкость, сохраняя неизменной аппаратную часть при совершенствовании программной. Между поколениями вычислительной техники для обеспечения обратной совместимости поддерживается преемственность на уровне стандартов.

4. Условия применения. Важным с точки зрения безопасности шифрования является ответ на вопрос, можно ли применить сообщение социальной сети в качестве криптографического ключа. Очевидным предположением является то, что само сообщение ключом являться не может в силу возможности своего обнаружения. Средние длины сообщений Twitter составляют от 15 символов для языков с иероглифической письменностью до 28-30 символов для языков с алфавитной письменностью, по утверждениям различных СМИ и самого Twitter за 2012—2018 годы. Это даёт возможность использовать сообщения в качестве исходного материала для создания ключа с помощью гаммирования с вектором инициализации, вносимым в криптосистему независимо от сообщения. От отправителя в этом случае требуется запоминание вектора инициализации.

Условие неизвестности выполнимо при использовании только бытовых устройств. Вспомогательным фактором для обеспечения неизвестности может быть использование легко запоминающегося исходного материала, чтобы не возникало необходимости вести лишние записи. Краткое сообщение Twitter, статус или краткое сообщение любой другой социальной сети по своему объёму подходит для быстрого запоминания.

Запоминаемость исходного материала может использоваться в качестве дополнительного преимущества в условиях отложенной отправки сообщения. В условиях непосредственной отправки, при наличии стабильного соединения с сетью Интернет, сбор исходного материала может осуществляться «на лету» автоматизированным способом, например через запрос `users.get` API ВКонтакте.

В условиях информационного противоборства возможно ограничение доступа к какой-либо социальной сети, а в каналах связи могут происходить отказы оборудования, профилактические и ремонтные работы, а также атаки типа «отказ в обслуживании». Независимые резервные каналы доставки исходного материала могут быть сформированы сервисами кросс-постинга, предоставлящими услуги по одновременной, синхронной, запланированной заранее публикации в несколько социальных сетей. Кросс-постинг может осуществляться и с помощью приложений, использующих API социальных сетей.

Источник исходного материала для генерации ключа должен быть таким, чтобы обращение к нему не выделялось среди постоянных привычек участника системы тайной связи. Для человека, активно интересующегося политикой, естественным может выглядеть регулярный просмотр страниц официальных политических деятелей, например, даже Президента своей страны. Для человека, увлекающегося эстрадной музыкой, естественным поведением в социальной сети является просмотр страниц любимого музыкального коллектива. Для учёного-математика не вызовет подозрений просмотр страниц с математическими головоломками или страниц-счётчиков простых чисел (например `@primesdaily` или `@primetweetbot`). Встречаются в социальных сетях и страницы, публикующие преимущественно сообщения отвлечённого характера, без привязки к актуальной новостной повестке (примеры: `@deathstarpr` — сообщения от лица PR персонала Галактической Империи из киноэпопеи «Звёздные войны», `@thetweetofgod` — высказывания от лица Бога, `@ohwonka` — сообщения от лица выдуманного персонажа Вилли Вонка, причём текст сообщений последнего преимущественно передавался с помощью изображений, вероятно, чтобы избежать индексации поисковыми роботами). Среди ботов, по длине или содержанию сообщений удовлетворяющих параметрам каналов передачи исходного материала, могут быть и боты-словари (например, `@everyword`, публиковавший по одному словарному слову в день с 2007 по 2014). Результаты исследований [2, 4, 14] позволяют утверждать, что регулярное посещение интернет-ресурсов не является чем-то необычным и поэтому может не вызывать подозрений.

Факты использования шифрования по определённым протоколам и осуществления тайной связи не должен демаскироваться обращениями к серверам арбитража (в этом случае предположения о принадлежности серверов арбитража дополнительно демаскируют связи абонентов).

5. Общая характеристика ОШБ. Можно ожидать, что для связи в подобных ситуациях стороны постараются использовать проверенный, стойкий, нетребовательный к вычислительным ресурсам алгоритм, способный эффективно работать в программном исполнении, легко воспроизводимый с помощью любых существующих интерпретаторов и сред разработки. Для поддержки такого алгоритма должно быть достаточно функций арифметико-логических устройств, составляющих элементную базу гражданской микроэлектроники. Требования к программной среде вариативны, поскольку среди мобильных устройств наблюдается широкое разнообразие операционных систем. Однако для снижения заметности системы целесообразно, чтобы вычисления в ней могли проводиться без применения специальных программ, и задействовали вместо этого скриптовые языки программирования, интерпретаторы или электронные таблицы. Из существующих алгоритмов, удовлетворяющих этим требованиям, одноразовый блокнот является наиболее известным и распространённым.

Попытки актуализировать использование одноразового блокнота в последнее время предпринимались неоднократно. В некоторых случаях одноразовый блокнот применялся не как самостоятельная криптосистема, а как составная часть стеганографических систем [15]. Другие попытки были направлены на модификацию алгоритма Вернама с целью решения проблем распределения и повторного использования ключей [6], и на специфические применения одноразовых блокнотов (для шифрования данных облачного хранилища [8], в качестве средства защиты канала связи с БПЛА [1], в качестве схемы шифрования в квантовой криптографии [17]).

Квантовые компьютеры всё ещё остаются только экспериментальными устройствами, поэтому связанные с ними реализации одноразовых блокнотов не представляют интереса с точки зрения данной работы. Также в контексте систем тайной связи не представляют интереса реализации одноразового блокнота, в которых ключ не передаётся или стороны обмена сообщениями дефакто начинают и заканчивают обмен личной встречей (как в случае с БПЛА).

Говоря об одноразовых блокнотах, нельзя не вспомнить системы шифрования с открытым ключом, такие как EPOC-2, который в комбинации с одноразовым блокнотом был сочтён семантически безопасным, устойчивым к атакам на основе подобранного шифротекста (IND-CCA2 или NM-CCA2), и тем не менее в отношении которого было доказано существование атаки по двум побочным каналам: на основе сообщений об ошибке [12] и по времени выполнения [19]. В алгоритме EPOC-2 ключи генерируются с помощью параметра безопасности и двух простых чисел p и q.

В ходе исследования были изучены несколько алгоритмов одноразового блокнота. Все они обладали уязвимостями, большинство которых по характеру можно отнести к уязвимостям архитектуры. Рассмотрим различные схемы применения ОШБ подробнее.

6. ОШБ с арбитром ключей. Схема, представленная в работе [7], ориентирована на защиту локального устройства. Разработчики допускают использование схемы при обмене сообщениями и предлагают в этом случае распределять ключи между абонентами с применением существующих криптографических протоколов. Отличительной особенностью схемы является хэширование ключей и хранение отпечатков ключей (Key Foot Prints) в устройстве, для контроля подачи на вход шифра уже однажды использованного ключа. Способов распределения списков отпечатков ключей между абонентами системы связи не предлагается.

Развивая мысль, высказанную Бансимба и др., отметим: идея применения хэш-значений от ключей для контроля применимости может быть воплощена в виде третьей стороны обмена сообщениями, назовём её «арбитр ключей». Основная функция «арбитра ключей» — приём и публикация отпечатков ключей. Отметим, что «арбитр ключей», отпечатки которых основаны на известных функциях хэширования, может по мере развития методов криптоанализа оказаться уязвимым к атакам, направленным на поиск коллизий и прообразов. Также наличие в системе шифрования «арбитра ключей» демаскирует факт передачи сообщения, так как без обращения к арбитру с хэш-кодом в качестве аргумента операция шифрования становится неосуществима. По времени обращения к арбитру, регистрируемому средствами перехвата трафика, и событиям системного журнала устройства может быть определён диапазон хэш-значений для проведённых в окрестности события операций шифрования.

7. Стеганографическая система на основе ОШБ. Пелоси, Кесслер и Браун в [15] предложили реализацию платформы рабочей среды адаптивной стеганографической системы с применением одноразового блокнота. Разработанное ими программное решение не обеспечивает распределения ключей. Также в рекомендациях по применению обозначена необходимость использования компьютера, изолированного от сетей общего пользования и международного информационного обмена. Таким образом, данная стеганографическая система неудобна для применения в качестве системы тайной связи.

8. ОШБ на основе дополнений двоек. Вариант одноразового блокнота был предложен в [13]. Алгоритм выполняется в двоичном алфавите и включает две операции. Первый шаг состоит из сложения ASCII кодов символов открытого текста P, представленных в двоичном виде, с ключом (простым числом в двоичном алфавите) K, и вычисления второго дополнения к результату этой операции. Затем из результата первого этапа вычитается P:

$$C_i = ((P_i + K)^C + 1_2) - P_i. \tag{1}$$

Указанные операции описаны в алгоритме как выполняемые посимвольно. Таким образом, схема (1) не представляет интереса с точки зрения криптостойкости, так как в предложенном алгоритме осуществляется по сути отображение алфавита открытого текста в алфавит шифротекста. Схема также не содержит усовершенствований в части управления ключами. Использование её без модификаций нецелесообразно, так как в шифротексте сохранятся статистические зависимости, присущие языку человеческого общения. Однако если соблюсти принципы построения классического одноразового блокнота, а именно длину ключа выбрать равной длине исходного сообщения, можно обеспечить ослабление зависимости результата от исходного текста. Ключ тем не менее нельзя будет использовать повторно.

9. ОШБ с примитивной стеганографией. Группой исследователей из Universiti Sains Malaysia и The Islamia University of Bahawalpur была предложена схема одноразового блокнота, сочетающая шифрование с примитивной стеганографией. Основная цель работы заключалась в уходе от необходимости генерировать уникальный ключ каждый раз, когда выполняется новое шифрование. Схема устойчива к атаке по известному открытому тексту. Схема [6] представляет собой блочный симметричный шифр, выполняющийся в несколько этапов. Алфавитом исходного текста и шифротекста является 8-битная таблица символов. Первый этап включает формирование ключа шифрования K из набора ключей: n-байтного K_A и однобайтного K_B:

$$K = K_{A_1} \oplus K_{A_2} \oplus \ldots \oplus K_{A_n} \oplus K_B. \tag{2}$$

Исходный текст P дополняется спереди случайным вектором R, кратным длине блока:

$$M = (R\&P). \tag{3}$$

На втором этапе осуществляется блочное шифрование в режиме сцепки блоков:

$$\begin{cases} C_1 = M_i \oplus K, \\ C_{i+1} = M_i \oplus C_i \oplus K. \end{cases} \tag{4}$$

На дешифрование блоки шифротекста подаются в обратном порядке.

Предложенная схема вносит достаточный уровень диффузии. Демонстрационный пример тем не менее содержит несколько особенностей, делающих схему, используемую непосредственно в нём, уязвимой. Во-первых, длина ключа, получаемого из двух источников (как минимум один из которых является естественным генератором случайных чисел), сводится в итоге к длине блока. Длина блока в демонстрационном примере равна длине кода символа в таблице символов.

Стойкость схемы, работающей в алфавите языка человеческого общения, в данном случае будет ограничена разрядностью таблицы символов, и для 8-битного ключа составит всего 2^8. Вычисление всего текста в рассмотренном примере не требуется для проверки гипотезы о ключе, достаточно лишь заключительных блоков. Разумно предположить, что стойкость будет возрастать при увеличении разрядности таблицы символов, если не брать во внимание особенности кодирования. Например, в UTF-16 символы основной латиницы содержат нулевые байты в конце (таким образом, половина бит ключа может быть заранее известна). Ещё одна уязвимость может быть связана с ограниченностью алфавита языка человеческого общения фиксированным набором символов. В обычных сообщениях, не включающих специальные символы, алфавит существенно ограничен. Подход, уравнивающий блок символу, фактически сводит для одного блока пространство размещений с повторениями из 2^n символов к нескольким десяткам заранее известных словарных комбинаций. Поэтому ограничение длины блока одним символом в (2)—(4) нежелательно.

10. ОШБ в режиме сцепки блоков. Схемы [11, 16] используют хэш-функцию и блочный алгоритм шифрования для преобразования открытого текста A в шифротекст B. Схема [11] в демонстрационном примере опирается на SHA-1 и AES с длинами дайджеста и блока 64-бита. Схема [16] опирается соответственно на DES и MD5.

На подготовительном этапе из 64-битного ключа шифрования K с помощью функции преобразования X формируется вектор инициализации:

$$B_0 = X(K). \tag{5}$$

Вычислению каждого блока шифротекста B_i предшествует вычисление ключа K_i с помощью хэш-функции:

$$K_i = H(B_{i-1}, K), \quad B_i = E_{K_i}(A_i). \tag{6}$$

В качестве X в (5) может быть использована комбинация простых операций сдвига, замены, сложения по модулю 2. Дешифрование осуществляется поблочно от начала к концу сообщения, с подготовительными операциями (5) и (6).

Схема [11] позволяет минимизировать риски, связанные с недостаточностью длины ключа, характерные для традиционных ОШБ. В некоторых условиях схема даёт возможность для атаки на последний цикл вычислений алгоритма на основе пары открытого и зашифрованного текстов. Так, файлы формата png завершаются последовательностью байт 49 45 4E 44 AE 42 60 82. В этом случае для 64-разрядного блока взломщику становится известны B_n и A_n. Это является достаточным условием для осуществления атаки со сложностью не более чем 2^{16} (см. [5, с. 54]), в результате которой злоумышленнику может стать известен ключ K_n. Теоретические основы осуществления атак нахождения коллизий для SHA-1 были известны ещё с 2005 г. (см. [18]). Возможности реализации комбинированной атаки по нахождению K при обнаруженных B_{n-1} и K_n будут зависеть от примененных в схеме алгоритмов.

11. Многослойный ОШБ. Сложный способ многослойного шифрования по схеме одноразового блокнота предложен Бросас, Сайсон и Медина в [9]. В схеме используется случайный вектор инициализации IV, формирующий последовательность S, участвующую в преобразовании ключевого материала K в ключ первого слоя $CK1$, из которого через цепочку сдвигов получается $CK2$:

$$\begin{gathered} S_n = S_{n-1} \oplus (IV_{n+1} \oplus K_{n+1}) \bmod 256, \\ CK_n = CK_{n-1} \oplus (S_{n+1} \oplus K_{n+1}) \bmod 256, \\ \begin{cases} CK1_0 = CK1 < 1, \\ CK1_1 = CK1_0 <<< 3, \\ CK1_2 = CK1_1 <<<<< 5, \\ CK2 = CK1_2, \end{cases} \end{gathered} \tag{7}$$

где символ $<$ означает сдвиг на 1 бит влево.

Первый слой шифра [9] состоит из замены открытого текста, по таблице кодирования ДНК. Результатом является шифротекст первого слоя $CT1$. На втором слое $CT1$ подвергается операции сложению по модулю 2 с ключом $CK1$, и поступает на вход функции обратной связи. $CT3$ порождается сложением $CT2$ по модулю 2 с $CK2$. Эти операции авторы алгоритма называют «Cross over technique». Третий слой составлен из трёх итераций комбинированного шифра, в котором результат предыдущей итерации складывается по модулю с $CK2$, затем подаётся на функцию обратной связи и сдвигается на два бита влево.

Дешифрование в схеме [9] начинается с обращения трёх итераций третьего слоя, с $CT5$ и $CK2$ в качестве исходных данных, продолжается обращением операций второго слоя, и завершается обращением первого слоя.

Алгоритм [9] показал соответствие строгому лавинному критерию, однако есть особенности, недостаточно раскрытые авторами этой схемы. В частности, не ясно, с какой целью в (11) сдвиг осуществляется двумя последовательными циклами ($CK2$ в демонстрационном примере представлен как совокупный результат сдвигов $CK1$ на 3 и 5 бит). Сдвиг в третьем слое в демонстрационном примере при вычислении CT5 выполнен на три, а не на два разряда. Схема подразумевает идентичность операции по получению $CT4$ из $CT3$ и $CK2$ операции по получению $CT3$ из $CT2$ и $CK2$, однако фактическая связь между $CK3$ и $CK4$ в демонстрационном примере не отслеживается, поскольку применение обратной связи недостаточно подробно описано: OFB на вход подаются шифротекст и ключ $CK2$, однако нет упоминаний о том, что в ней используется как вектор инициализации.

Чтобы продемонстрировать важность криптостойкой функции обратной связи в рассматриваемой схеме, примем упрощение для функции обратной связи $OFB(CT) = CT$.

Для 8-битного укороченного сообщения получим:

$$CT5_n = CT3_{(n+4) \bmod 8} \oplus CK2_{(n+2) \bmod 8} \oplus CK2_n,$$

соответственно для сообщения длиной 256 бит:

$$CT5_n = CT3_{(n+4) \bmod 256} \oplus CK2_{(n+2) \bmod 256} \oplus CK2_n.$$

Учитывая, что $CK2$ получен в результате сдвига $CK1$ на 8 разрядов, имеем

$$\begin{aligned}
&CT2_n = CT1_n \oplus CK2_{(n+8) \bmod 256},\\
&CT3_n = CT1_n \oplus CK2_{(n+8) \bmod 256} \oplus CK2_n,\\
&CT5_n = CT1_{(n+4) \bmod 256} \oplus CK2_{(n+12) \bmod 256} \oplus CK2_{(n+4) \bmod 256} \oplus CK2_{(n+2) \bmod 256} \oplus CK2_n.
\end{aligned} \tag{8}$$

Напомним, что $CT1$ представляет собой результат кодирования по ДНК-таблице замен, что подразумевает отображение символов исходного текста в набор словарных конструкций длиной 8 бит. Они будут иметь те же частотные характеристики, что и символы языка человеческого общения. Согласно (8) для подобного упрощения могут существовать слабые ключи $CK2$, в которых биты повторяются с периодом 8. Тогда третий слой становится не более чем предсказуемой перестановкой результата вычисления второго слоя.

В условиях рассмотренного упрощения результат всего шифрования оказывается зависим от результата вычисления $CK2_{(n+12) \bmod 256} \oplus CK2_{(n+4) \bmod 256} \oplus CK2_{(n+2) \bmod 256} \oplus CK2_n$, и при слабом ключе $CK2$ становится либо инверсией, либо прямым отображением $CT1$ со сдвигом.

Дальнейшее развитие работы Бросас и др., выраженное в [10], так же не предоставляет гарантированно надёжного решения проблемы выбора векторов инициализации для функций обратной связи. В частности, предлагается использовать в качестве гаммы и векторов инициализации время отправки сообщения и стартовый адрес сообщения в памяти устройства. Это ведёт к появлению уязвимостей, обусловленных возможностью отслеживания времени отправки сообщения и адреса сообщения в оперативной памяти, а также связанных с особенностями выделения оперативной памяти вычислительным задачам.

Исполняемый код можно заставить размещаться по предсказуемым адресам как минимум в трёх случаях. Первый, и наиболее очевидный, это загрузка по адресам, выделяемым из адресного пространства, зарезервированного за отладчиком. Второй, предполагающий особые параметры сборки исполняемого файла или его модификацию, это манипуляции с базовым адресом образа исполняемого файла и таблицами релокации (вплоть до отключения их использования). Третий, предполагающий использование самомодифицирующегося вредоносного программного обеспечения, это манипуляция доступным адресным пространством (принудительное ограничение доступного адресного пространство через размещение в памяти недублируемых страниц, порождаемых множеством вредоносных вычислительных задач). В любом из трёх перечисленных условий адрес в области данных, где может храниться шифруемое сообщение, становится предсказуемым.

12. Выводы. Таким образом, можно утверждать, что существует техническая возможность использования информационного пространства социальных сетей в качестве среды распространения информации, являющейся исходным материалом для криптографических ключей системы тайной связи. Ответ на вопрос, используется ли эта техническая возможность, требует накопления и анализа дополнительной информации и лежит за рамками данного исследования. Организация системы тайной связи с помощью шифроблокнота, элементы которого распространяются в зашумленном информационном пространстве социальных сетей, не требует наличия специальных устройств. Поведение абонента подобной системы в повседневном режиме укладывается в шаблоны поведения пользователей социальных сетей. Поведение в процессе подготовки к отправке сообщения сформирует цепочку событий, часть которой может быть зафиксирована подсистемами регистрации событий компьютерных систем.

Среди рассмотренных схем шифрования с применением технологии одноразовых блокнотов, наиболее применимы для систем тайной связи с передачей элементов исходного материала через социальную сеть алгоритмы [11] и [9, 10]. Из них только [9, 10] не требует твёрдых навыков программирования, достаточно стоек, может быть реализован на интерпретаторах и в приложениях электронных таблиц. Однако [9, 10] недостаточно качественно описан. Помимо этого стоит отметить, что все рассмотренные алгоритмы обладали уязвимостями, большинство которых по характеру можно отнести к уязвимостям архитектуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авдонин И. А., Будько М. Б., Грозов В. А.* Организация защиты данных, передаваемых между беспилотным летательным аппаратом и наземной станцией управления, на основе шифра Вернама// Науч.-техн. вестн. информ. технол. мех. опт. — 2016. — № 5. — С. 850–855.
2. *Артамошкин М.* Отбор признаков пользователя социальной сети для построения модели машинного обучения. `https://blog.zverit.com/`.
3. *Гребенников В. В.* Американская криптология. История спецсвязи. — М.: Литрес: Самиздат, 2019.
4. *Дужникова А. С.* Социальные сети: современные тенденции и типы пользования// Мониторинг общественного мнения. — 2010. — № 5 (99). — С. 238–251.
5. *Жуков К. Д.* Обзор атак на AES-128: к пятнадцатилетию стандарта AES// Прикл. дискр. мат. — 2017. — № 35. — С. 48–62.
6. *Abiodun E. O., Aman J., Oludare I. A., Humaira A.* An enhanced practical difficulty of one-time pad algorithm resolving the key management and distribution problem// in: Lect. Notes Eng. Comput. Sci./ Proc. Int. Multiconf. of Engineers and Computer Scientists (Hong Kong, March 14–16, 2018), 2018. — P. 409–415.
7. *Bansimba G. R., Babindamana R. F., Peter A. G.* A new approach in one time pad key management// Res. J. Math. Comput. Sci. — 2019. — *3*, № 17. — P. 1–8.
8. *Blackledge J. et al.* Secrecy and randomness: encoding cloud data locally using a one-time pad// Int. J. Adv. Security. — 2017. — *10*, № 3–4. — P. 167–181.
9. *Brosas D. G., Sison A. M., Medina R. P.* Strengthening the Vernam cipher algorithm using multilevel encryption techniques// Int. J. Sci. Technol. Res. — 2019. — *8*, № 10. — P. 601–606.
10. *Brosas D. G., Sison A. M., Medina R. P., Hernandez A.* Analysis of the randomness performance of the proposed stream cipher based cryptographic algorithm// 11th IEEE Control and System Graduate Research Colloquium (Shah Alam, Malaysia, 2020), 2020. — P. 76–81.
11. *Chandrakar S., Tiwari S., Shree Jain B.* An innovative approach for implementation of one-time pads// Int. J. Comput. Appl. — 2014. — *89*, № 13. — P. 35–37.
12. *Dent A. W.* Implementation attack against EPOC-2 public-key cryptosystem// Electr. Lett. — 2002. — № 38. — P. 412–413.
13. *Devipriya M., Sasikala G.* A new technique for one time pad security scheme with complement method// Int. J. Adv. Res. Comput. Sci. Software Eng. — 2015. — *5*, № 6. — P. 220–223.
14. *Limaye S., Thadathil R..* Influence of social media on behavior patterns// Proc. Natl. Conf. on Research In Information Technology And Management (Bangalore, 2016), 2016. — P. 1–4.
15. *Pelosi M. J., Kessler G., Brown M. S. S.* One-time pad encryption steganography system// Proc. Conf. "Annual ADFSL Conference on Digital Forensics, Security and Law" (Daytona Beach, Florida, 2016), 2016. — P. 131–154.

16. *Tang S., Liu F.* A one-time pad encryption algorithm based on one-way hash and conventional block cipher// Proc. 2 Int. Conf. on Consumer Electronics, Communications and Networks, 2012. — P. 72–74.
17. *Upadhyay G., Nene M. J.* One time pad generation using quantum superposition states// Proc. IEEE Int. Conf. on Recent Trends in Electronics, Information, and Communication Technology (Bangalore, 2016), 2016. — P. 1882–1886.
18. *Wang X., Yin Y. L., Yu H.* Finding collisions in the full SHA-1// Adv. Cryptology. — 2005. — *3621*. — P. 17–36.
19. *Zhou Y., Feng D.* Side-channel attacks: ten years after its publication and the impacts on cryptographic module security testing/ Cryptology ePrint Archive, Report 2005/388. `https://ia.cr/2005/388`.

Муценек Витус Евгеньевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `comsecsurvey@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 69–75
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-69-75

УДК 519.142.1

ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БИНАРНЫХ МАТРИЦ, СОСТАВЛЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ОБОБЩЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ, И ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2022 г. **Б. А. СТАРКОВ**

Аннотация. В статье описывается метод составления бинарных матриц на основе обобщения треугольника Паскаля. Описывается способ параметризации данных бинарных матриц путем выбора определенных образующих и описываются свойства и особенности данного построения. Приводится известный метод построения бинарной матрицы путем редуцирования треугольника Паскаля по простому или составному модулю и осуществляется его сравнение с методом, предложенным в данной статье. Рассматриваются фрактальные свойства указанных бинарных матриц, приводятся возможные применения фрактальных свойств.

Ключевые слова: комбинаторный анализ, треугольник Паскаля, обобщенная пирамида Паскаля, рекуррентное свойство, фрактал, фрактальная размерность.

FRACTAL PROPERTIES OF BINARY MATRICES CONSTRUCTED USING THE GENERALIZED PASCAL'S TRIANGLE AND APPLICATIONS

© 2022 **B. A. STARKOV**

Abstract. In this paper, we describe a method for composing binary matrices based on the generalization of Pascal's triangle. The method of parameterization of these binary matrices by choosing certain generatrices is discussed and the properties of this construction are examined. We also present a well-known method for constructing a binary matrix by reducing the Pascal triangle by a simple or composite modulus and compare it with the method proposed in this paper. The fractal properties of these binary matrices are considered, and possible applications of fractal properties are presented.

Keywords and phrases: combinatorial analysis, Pascal's triangle, generalized Pascal's pyramid, recurrent property, fractal, fractal dimension.

AMS Subject Classification: 05E99, 15B34

1. Введение. Развитие комбинаторной математики вызвало большой интерес к изучению арифметических и геометрических свойств так называемых «арифметических треугольников» [4, 8, 13, 14]. Классическим примером таких треугольников является треугольник Паскаля. Проводятся исследования как самого треугольника Паскаля, так и его плоских и пространственных аналогов и обобщений [12, 13].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Иркутской области (проект № 20-41-385001).

В статье представлены бинарные матрицы, являющиеся классом комбинаторных конфигураций на основе треугольника Паскаля и которые могут рассматриваться как частично упорядоченные множества, даны их перечисленные интерпретации, которые используются для оценки процессов со свойством самоподобия. Комбинаторные конфигурации, моделирующие сложные системы, подсистемы которых подобны общему дизайну системы, содержат фрактальные структуры, свойства которых помогают описывать и идентифицировать различные характеристики природных процессов, в частности, длину береговой линии.

В данной работе указывается связь между треугольником Паскаля и специальным классом фрактальных структур на основе бинарных матриц, при помощи которой становится возможным уникально идентифицировать пополняющиеся множества элементов произвольной природы и учитывать характеристики таких множеств.

Математическая наука эффективно решает множество технических задач и естественно-научных проблем, среди которых экологические вопросы имеют особое значение. Построение эффективной экологической безопасности невозможно без инструментов оценки степени ущерба от стихийных бедствий. Разработаны математические модели для учета распространения пожаров на основе механики многофазных сред [5] и расчета контуров лесных пожаров [2]. Метод построения бинарных матриц на основе треугольника Паскаля и расчета коэффициента, описывающего фрактальные структуры таких матриц, позволяет находить новые свойства лесных пожаров, процессы которых содержат свойство самоподобия.

2. Построение $(0,1)$-матрицы при помощи арифметики треугольника Паскаля. Матрицы, состоящие полностью из элементов 0 и 1 [10, 17], называются бинарными, или $(0,1)$-матрицами, и представляют собой важный класс матриц, которые успешно используются в различных разделах математики. Таким образом, бинарные матрицы определяют и/или представляют бинарные отношения. Граф — хорошо известный дискретный объект — может быть представлен как двоичная матрица, например, как матрица смежности или матрица инцидентности.

В этой статье описываются метод построения двоичных матриц путем задания определенных последовательностей элементов (образующих) и арифметики треугольника Паскаля, а также некоторые их свойств.

Рассмотрим способ построения бинарной матрицы [14] типа треугольника Паскаля. Эта матрица формируется при помощи горизонтальных и вертикальных образующих (первые строка и столбец), состоящих из двоичных символов 0, 1, а также рекуррентного правила расчета элементов бинарной матрицы.

Представим треугольник Паскаля в виде прямоугольной таблицы:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & . \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & . \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

Используя известное правило треугольника Паскаля (элементы, не лежащие на образующей, равны сумме элементов слева и сверху), построим бинарную матрицу, которую будем называть треугольником типа Паскаля [14] с образующими [1 1 0 1 1], [1 1 0 1 0]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Представим элементы образующей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в виде конечной последовательности букв, составлющие слово $W = x_1 x_2 \ldots x_n$. В комбинаторике слов [6] на множестве слов над данным алфавитом определена ассоциативная операция конкатенации (приписывания) слов, которую мы будем называть умножением слов. Понятие степени слова вводится по отношению к этой операции естественным образом. Слово, не являющееся степенью никакого другого слова, называется примитивным. Если $W = Z^n$, где Z — примитивно и $n > 1$, то Z называется корнем W.

Шаблоном образующей будем называть последовательность элементов корня слова W, составленного из элементов данной образующей. Так, для образующей [1 1 0 1 1 0] ее шаблоном будет являться последовательность [1 1 0]. Для образующей [1 1 0 1 0 0] не найдется такого примитивного слова Z, при котором для $n > 1$, $W = Z^n$; в этом случае образующая [1 1 0 1 0 0] будет одновременно являться собственным шаблоном.

Отметим, что шаблон в образующей может повториться частично при его последнем вхождении, например в образующей [1 1 0 1 1 0 1] шаблон [1 1 0] входит дважды полностью и один раз в виде его начала. Как следствие, можно при необходимости формировать образующие четной или нечетной длины.

Очевидно, что для построения бинарной матрицы с арифметикой треугольника Паскаля достаточно задать две последовательности символов, формирующих первую строку и первый столбец. При расширении такой прямоугольной таблицы становится очевидным рекуррентное свойство данной матрицы: каждый новый элемент зависит только от двух элементов, уже вычисленных ранее. Перечислим способы построения матрицы с арифметикой треугольника Паскаля, основанных на выборе образующих:

1. Горизонтальная образующая длины n с данным шаблоном длины $k < n$ и диагонально симметричная ей вертикальная образующая формируют квадратную бинарную матрицу размерности $n \times n$.
2. Горизонтальная образующая длины n с данным шаблоном длины $k = n$ и диагонально симметричная ей вертикальная образующая формируют квадратную бинарную матрицу размерности $n \times n$.
3. Горизонтальная образующая длины n и вертикальная образующая длины m с данными шаблонами длины $k < n$, $l < m$ соответственно формируют бинарную матрицу размерности $m \times n$.
4. Горизонтальная образующая размера n с шаблоном длины $k = n$, вертикальная образующая размера m с шаблоном длины $l = m$ формируют бинарную матрицу размерности $m \times n$.

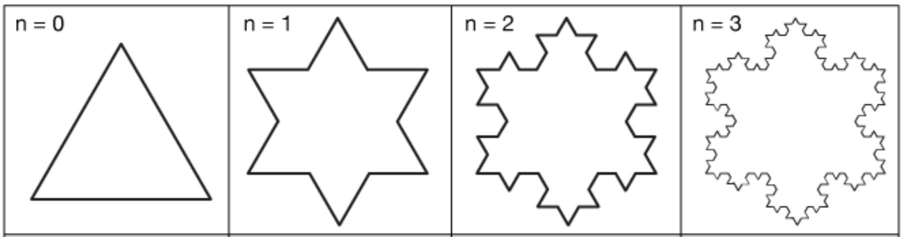
При расширении такой прямоугольной таблицы становится очевидным рекуррентное свойство данной матрицы: каждый новый элемент зависит только от двух элементов, уже вычисленных ранее. Понятно, что вычисление сколько-нибудь большой таблицы по заданной образующей займет некоторое количество времени. Гораздо удобнее составить компьютерную программу, принимающую определенные входные данные и выводящую готовую таблицу.

3. Фрактальные структуры. Многие важные процессы и объекты природы не могут быть описаны классической геометрией. Эти объекты или процессы либо нерегулярны, либо крайне фрагментированы. Никакая поверхность в Евклиде не представляет адекватно границы облаков или грубых турбулентных следов. В 1975 году Бенуа Б. Мандельброт представил семейство форм под названием фракталы [15] или фрактальные множества, которые используются для описания этих сложных структур природы.

Согласно Мандельброту [15] фрактал — это форма, состоящая из частей, в чем-то похожих на целое. Рассмотрим геометрический объект, который будет фракталом (рис. 1).

Первоначально понятие фрактала в физике возникло в связи с проблемой определения длины береговой линии [16]. Было обнаружено, что с уменьшением масштаба длина аппроксимирующей кривой имеет тенденцию неограниченно увеличиваться. Однако значение $a = N(\delta) \cdot \delta^d$, где $d = \mathrm{const} > 1$, остается неизменным. Константа d представляет собой фрактальную размерность береговой линии и может использоваться для однозначного описания береговых линий. Оказалось, что для побережья Англии постоянная $d = 1{,}24$. Таким образом, величина постоянной d характеризует степень изрезанности береговой линии.

В 1984 году Стивен Вольфрам связал в своей работе треугольник Паскаля, редуцированный по модулю 2 (рис. 2), с работой клеточных автоматов [18]. Эти системы были исследованы как простые математические модели природных процессов (таких как рост снежинок), которые демонстрируют явление «самоорганизации».



Number of sides (N)	3	12	48	192
Side length (S)	1	1/3	1/9	1/27
Perimeter length (P)	3	4	5.33	9.11

Рис. 1. Формирование снежинки Коха.

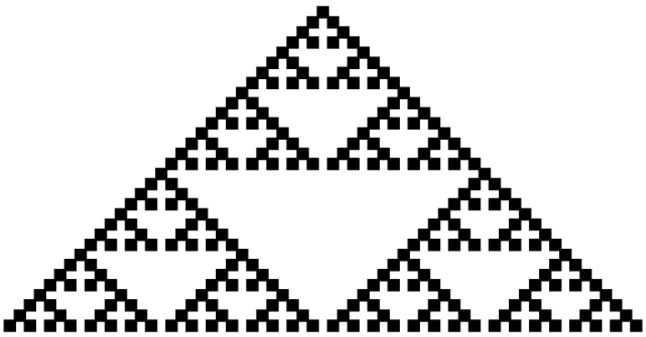


Рис. 2. Треугольник Паскаля, редуцированный по модулю 2.

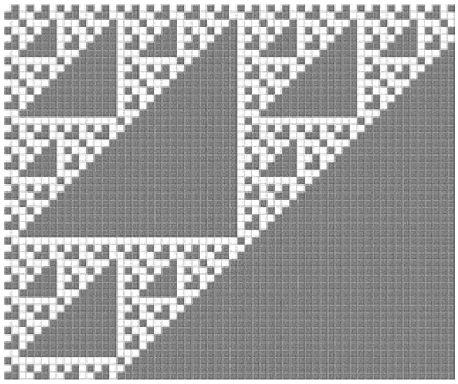


Рис. 3. Фрактальная структура с шаблоном [1 0].

В 1990 г. Б. А. Бондаренко опубликовал монографию [1], в которой рассматривал рекуррентные последовательности вида

$$T_{n,k} = \sum_{i=0}^{l} a_i T_{n-1,k-i}$$

с определенными начальными условиями. В эту схему укладываются треугольник Паскаля, обобщенный треугольник Паскаля, треугольники Люка, Фибоначчи. В работе Бондаренко показываются фрактальные структуры различных треугольников и подсчитаны коэффициенты подобия треугольника Паскаля, элементы которого взяты по $\mathrm{mod}\,p$ при различных простых p.

В литературе, посвященной свойствам и приложениям треугольника Паскаля и его обобщений (см., напр., [4, 8, 12]), можно встретить анализ элементов треугольника Паскаля по конечному модулю, в частности по простому модулю p, которые образуют некоторые геометрические треугольные решетки — фракталы (рис. 3), играющие значительную роль при анализе различных структур и процессов. Для того чтобы обнаружить свойство самоподобности треугольника Паскаля по модулю p, следует использовать достаточно большое число строк треугольника Паскаля.

Фракталы являются мощным средством для анализа и формирования геометрических структур в самых различных областях математики и физики. В [3] фракталы применяются для инженерного синтеза случайных антенных решеток.

В отличие от редуцирования треугольника Паскаля по конечному или составному модулю, в данной работе излагается иной метод формирования фрактальных структур — выбор по определенному правилу бинарной образующей(их) и основанное на ней дальнейшее построение бинарной матрицы с арифметикой треугольника Паскаля. Таким образом, фрактал на рисунке 2 можно получить не только редуцированием треугольника Паскаля по модулю 2, но и с помощью первого способа построения бинарной матрицы с арифметикой треугольника Паскаля с шаблоном [1 0]. Серый квадрат — ноль, белый квадрат — единица.

Стоит отметить, что, используя различные способы построения образующих, можно получить фракталы, не получаемые редуцированием треугольника Паскаля по модулю p. В матрице 100×100 есть 2^{199} способов выбрать горизонтальную и вертикальную образующие, и, как результат, возможно построить такое же количество фрактальных структур.

Таким образом, метод построения бинарной матрицы с использованием образующих позволяет получить значительно больше различных фрактальных структур, чем метод приведения по модулю p.

4. Фрактальная размерность. Существует несколько определений размерности. Одна из размерностей, геометрическая, выражает минимальное число координат, необходимых для однозначного определения положения точки на прямой, плоскости и в пространстве. Другая, топологическая размерность, при которой размерность любого множества на единицу больше, чем размерность разреза, делящего его на две связные части. Указанные размерности могут быть только целыми. Так, оба определения размерности означают, что линия одномерна, плоскость двумерна, объемное геометрическое тело трехмерно. Кроме указанных размерностей, существуют и другие понятия размерностей. Одно из них — размерность самоподобия. Пусть n — число одинаковых частей, на которые разбивается данный самоподобный объект, имеющих в m раз меньший пространственный размер. Тогда размерность самоподобия D можно определить формулой:

$$D = \frac{\ln n}{\ln m}. \tag{1}$$

Используя введенное понятие, легко определить, что размерность самоподобия квадрата, последовательно деленного на четыре равных квадрата, равна $\ln 4/\ln 2 = 2$, размерность самоподобия куба равна $\ln 8/\ln 2 = 3$.

Многие технические и природные процессы содержат в определенной мере фрактальные структуры, а их фрактальные размерности могут быть расчитаны на основе выборки данных при помощи фрактального анализа. Фрактальная размерность имеет много практических приложений в различных областях, включающих нейробиологию [11], анализ изображений [7], физику [9].

5. Обобщенная пирамида Паскаля и учет развития популяции. Другой известный комбинаторный объект, позволяющий эффективно моделировать свойства и процессы природно-технических систем, — это обобщение пирамиды Паскаля [4, 8, 12]. Для этой комбинаторной модели будет дано определение и предоставлены перечислительные интерпретации в терминах развития популяции.

Пирамида Паскаля представляет собой комбинаторно-алгебраическую структуру (рис. 4), элементами которой являются триномиальные коэффициенты,

$$\binom{n}{k,l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}, \tag{2}$$

которые используются в разложении степени тринома

$$(x_0 + x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k,l} x_0^k x_1^l x_2^{n-k-l}.$$

Следует отметить, что число n в соотношении (2) указывает количество сечений пирамиды Паскаля, k — номер строки сечения, а l номер его столбца.

Для триномиальных коэффициентов справедливо рекуррентное соотношение:

$$\binom{n+1}{k,l} = \binom{n}{k-1,l} + \binom{n}{k,l-1} + \binom{n}{k,l}. \tag{3}$$

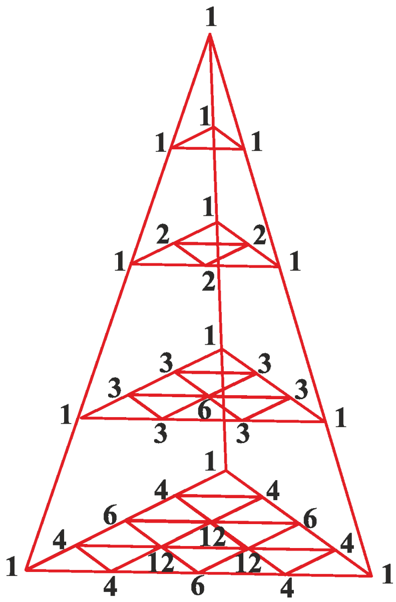


Рис. 4. Пирамида Паскаля.

Рекуррентное соотношение (3) позволяет сделать вывод, что любой внутренний элемент пирамиды Паскаля, стоящий в n-м сечении, равен сумме трех элементов, расположенных в углах треугольника пирамиды $(n-1)$-го сечения пирамиды.

Рассмотрим также расширенную комбинаторную структуру, основанную на пирамиде Паскаля. Обобщенная пирамида Паскаля представляет собой трехгранный пирамидальный массив, элементы которого для неотрицательных целых чисел n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям [4]:

$$V(n,k,l) = \alpha_{n,k-1,l}V(n-1,k-1,l) + \beta_{n,k,l-1}V(n-1,k,l-1) + \gamma_{n,k,l}V(n-l,k,l) \tag{4}$$

с граничными условиями $V(0,0,0) = V_0$; $V(n,k,l) = 0$, если $\min(n,k,l,n-k-l) < 0$. Число V_0 на вершине обобщенной пирамиды Паскаля задается произвольно. Значения $\alpha_{n,k,l}$, $\beta_{n,k,l}$, $\gamma_{n,k,l}$, входящие в соотношение (4), называются весовыми коэффициентами.

Обобщенная пирамида Паскаля допускает перечислительную интерпретацию, согласно которой $V(n,k,l)$ используется для вычисления объема элементов (k,l) [4] вида в результате n-го этапа развития популяции. Под популяцией подразумевается дискретное множество переменного состава, элементы которого способны рождаться, умирать и переходить из одной качественной категории в другую. Развитие популяции рассматривается дискретно, и популяция состоит из однотипных элементов с двумя свойствами A и B со степенями k, l соответственно. Развитие популяции обеспечивает эволюцию без отклонений, то есть элемент (k,l) может генерировать на каждой стадии только элементы либо (k,l), либо $(k+1,l)$, либо $(k,l+1)$. Числа $V(n,k,l)$ и весовые коэффициенты $\alpha_{n,k,l}$, $\beta_{n,k,l}$, $\gamma_{n,k,l}$ в соотношении (2) могут быть интерпретированы следующим образом: $V(n,k,l)$ — объем (количество) элементов (k,l)-го вида в итоге n-го этапа; $\alpha_{n,k,l}$ — доля от объема $V(n-1,k,l)$, в котором элементы (k,l)-го вида породили элементы $(k+1,l)$-го вида на протяжении n-го этапа; $\beta_{n,k,l}$ — доля от объема $V(n-1,k,l)$, в котором элементы (k,l)-го вида породили элементы $(k,l+1)$-го вида на протяжении n-го этапа; $\gamma_{n,k,l}$ — доля элементов (k,l)-го вида, сохранившаяся от объема $V(n-1,k,l)$ на протяжении n-го этапа.

Представляется перспективным метод идентификации и описания схемы развития популяции при помощи фрактального анализа.

Нетрудно заметить, что каждое сечение пирамиды Паскаля представляет собой частный случай треугольника Паскаля, так же как каждое сечение обобщенной пирамиды Паскаля является обобщенным треугольником Паскаля. Представим каждое сечение обобщенной пирамиды Паскаля с бинарной арифметикой в виде бесконечной прямоугольной таблицы, дополнив недостающие элементы при помощи повторения шаблона первых столбца и строки. По аналогии с построениями в разделе 2, каждому сечению обобщенной пирамиды Паскаля можно поставить в соответствие бинарную матрицу, фрактальную размерность которой можно рассчитать при помощи формулы (1). Таким образом, каждой обобщенной пирамиде Паскаля, моделирующей развитие популяции, возможно сопоставить последовательность фрактальных размерностей $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$, при этом F_i, $i = \overline{1, n}$ уникально идентифицирует состояние популяции на n-м этапе развития.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бондаренко Б. А.* Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фрактали, графы и приложения. — Ташкент: Фан, 1990.
2. *Доррер Г. А.* Математические модели динамики лесных пожаров. — М.: Лесная промышленность, 1979.
3. *Ким Й., Джаггард Д. Л.* Фрагментарно-самоподобные (фрактальные) случайные решетки// Тр. Ин-та инж. электротехн. электрон. — 1986. — *74*. — С. 124–126.
4. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
5. *Нигматулин Р. Н.* Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978.
6. *Шур А. М.* Комбинаторика слов. — Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2003.
7. *Al-Kadi O.S, Watson D.* Texture analysis of aggressive and nonaggressive lung tumor CE CT images// IEEE Trans. Biomed. Eng. — 2008. — *55*, № 7. — P. 1822–1830.
8. *Balagura A. A., Kuzmin O. V.* Generalised Pascal pyramids and their reciprocals// Discr. Math. Appl. — 2007. — *17*, № 6. — P. 619–628.
9. *Dubuc B., Quiniou J., Roques-Carmes C., Tricot C., Zucker S.* Evaluating the fractal dimension of profiles// Phys. Rev. A. — 1989. — *39*, № 3. — P. 1500–1512.
10. *Fulkerson D. R.* Zero-one matrices with zero trace// Pac. J. Math. — 1960. — *10*. — P. 831–836.
11. *King R. D.* Characterization of atrophic changes in the cerebral cortex using fractal dimensional analysis// Brain Imaging Behav. — 2009. — *3*, № 2. — P. 154–166.
12. *Kuzmin O. V., Balagura A. A., Kuzmina V. V., Khudonogov I. A.* Partially ordered sets and combinatory objects of the pyramidal structure// Adv. Appl. Discr. Math. — 2019. — *20*, № 2. — P. 229–236.
13. *Kuzmin O. V., Seregina M. V.* Plane sections of the generalized Pascal pyramid and their interpretations// Discr. Math. Appl. — 2010. — *20*, № 4. — P. 377–389.
14. *Kuzmin O. V., Starkov B. A.* Application of hierarchical structures based on binary matrices with the generalized arithmetic of Pascal's triangle in route building problems// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012030.
15. *Mandelbrot B. B.* Fractals: Form, Chance and Dimension. — Echo Point Books & Media, 2020.
16. *Richardson L. F.* The problem of contiguity: an appendix to statistics of deadly quarrels// Gen. Syst. Yearbook. — 1961. — *6*. — P. 139–187.
17. *Ryser H. J.* Matrices of zeros and ones// Bull. Am. Math. Soc. — 1960. — *66*. — P. 442–464.
18. *Wolfram S.* Geometry of binomial coefficients// Am. Math. Month. — 1984. — *91*. — P. 566–571.

Старков Борис Алексеевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `stsibrus@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 76–81
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-76-81

УДК 514.76

ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ ГЛАВНЫМИ КРИВИЗНАМИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ V^{n+1}

© 2022 г. **Е. Ю. КУЗЬМИНА**

Аннотация. Рассматриваются гиперповерхности в E^{n+1}, для которых найден тонкий веер. Показано, что он есть только для гиперповерхностей в E^{n+1} с постоянными или пропорциональными главными кривизнами, различными между собой. Выяснены условия существования гиперповерхностей в евклидовом пространстве V^{n+1}, главные кривизны которых постоянны (в предположении, что все главные кривизны различны между собой).

Ключевые слова: G-структуры, дифференцируемое многообразие, структурная функция, тонкий веер, инициальная пара.

HYPERSURFACES WITH CONSTANT PRINCIPAL CURVATURES IN EUCLIDEAN SPACE V^{n+1}

© 2022 **E. Yu. KUZMINA**

Abstract. Hypersurfaces in E^{n+1} for which a thin fan is found are considered. It is shown that it exists only for hypersurfaces in E^{n+1} with constant or proportional principal curvatures that differ from each other. The conditions for the existence of hypersurfaces in the Euclidean space V^{n+1}, whose main curvatures are constant (assuming that all the main curvatures are different from each other), are clarified.

Keywords and phrases: G-structures, differentiable manifold, structural function, thin fan, initial pair.

AMS Subject Classification: 53A05

1. Введение. Среди всех расслоений G-структуры, определяемые как редукции расслоения реперов $F(M)$ дифференцируемого многообразия M к линейной группе $G \subset GL(n)$ играют значительную роль в современной дифференциальной геометрии. Впервые понятие G-структуры введено Черном в [11], который привел в своей обзорной статье [12] много задач из различных разделов дифференциальной геометрии, сводящихся к задачам в теории G-структур. Понятие G-структуры позволяет описывать большинство геометрических структур единым методом, однако общих теорем о G-структурах мало, причем даже для конкретной группы Ли ответить на некоторые вопросы достаточно трудно. Основные результаты по проблеме интегрируемости G-структур получены Стернбергом [17] и Гийеминым [13]. Монна в [16] исследовал более широкий класс h-плоских структур, используемых в теории контактных многообразий.

При рассмотрении автоморфизмов и локальных автоморфизмов геометрических структур выделяются различия между структурами конечного и бесконечного типов. Для структуры конечного типа Стернбергом [14] было показано, что группа автоморфизмов является группой Ли.

Поэтому изучение транзитивных структур конечного типа сводится к задачам из геометрии однородных пространств группы Ли. При рассмотрении локально-транзитивных G-структур исследование сводится к изучению пар алгебр Ли [3, 5].

Одним из наиболее простых отображений, не имеющих обратного, является вложение, которое определяет пару структур. G-структуры на подмногообразиях строились в различных работах. Так, в [16] рассмотрена связь между контактными и симплектическими многообразиями. Часто приемы построения канонических или полуканонических реперов [7, 8] можно интерпретировать в терминах теории пар структур, имеющих общую базу. В этом случае подструктура B_0 является редукцией G-структуры B к подгруппе $H \subset G$.

Наиболее важным инвариантом G-структуры является структурная функция, введенная Бернардом в [10] и принимающая свои значения в когомологиях Спенсера. Необходимым, а в инвалютивном случае и достаточным, условием интегрируемости G-структуры является обращение её в нуль. В случае унитарной структурной группы это условие позволяет выделить кэлеровы многообразия.

Однако интересные результаты можно получить только в случае постоянного значения структурной функции, что позволяет выделить лишь достаточно узкий класс структур, не имеющих неголономного продолжения. При обобщении понятия автоморфизма Грушко [2] получен класс сопряженно транзитивных структур, для которых структурная функция уже не является постоянной. Для этого класса введен инвариант, называемый тонким веером и приведен критерий однородности геометрической структуры. Отметим, что такие структуры устойчивы относительно операций расширения структурной группы и неголономного продолжения [4].

Введение понятия инициальной пары [1] позволяет рассматривать подмногообразия в теории G-структур и посредством обобщения тонкого веера геометрической структуры на пару G-структур [9] выделять сопряженно транзитивные подмногообразия в E^{n+1}.

С гиперповерхностью M в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1} можно связать канонический репер $\{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n, \overline{e}_{n+1}\}$ такой, что вектор $\overline{e}_{n+1}$ в любой точке A гиперповерхности M направлен по нормали к поверхности, а векторы $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$ — по касательным к линиям кривизны, принятым за координатные линии. Заметим, что n различных главных направлений в окрестности точки A однозначно определяется только в случае различных главных кривизн в точке A (см., напр., [15]), поэтому предполагаем, что в каждой точке гиперповерхности M значения главных кривизн различны между собой. Через B_0 обозначим множество таких реперов во всех точках гиперповерхности M. Через $\mathcal{B}$ обозначим риманову структуру в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}. Очевидно, $B_0 \subset \mathcal{B}$ — инициальная пара, для которой структурная функция сводится к инвариантам канонического репера.

В данной работе приводится построение тонкого веера для гиперповерхностей, на которых можно задать канонический репер, и показывается, что он существует только для поверхностей малых размерностей ($\dim E^{n+1} \leqslant 3$). Веер первого порядка существует для гиперповерхностей с постоянными значениями инвариантов канонического репера и гиперповерхностей с пропорциональными между собой инвариантами канонического репера. Поверхностями, обладающими тонким веером, являются окружность и логарифмическая спираль в E^2, цилиндр, конус и цилиндрическая поверхность, образующая которой — логарифмическая спираль в E^3 (см. [6]).

Классификация гиперповерхностей с постоянными главными кривизнами в евклидовом пространстве V^{n+1} приводит к задаче описания представлений V компактных групп Ли G и векторов $v \in V$ с единичными стационарными подгруппами [15].

2. Построение тонкого веера в E^{n+1}. С каждой гиперповерхностью в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве можно связать пару структур $B_0 \subset B$ следующим образом.

Пусть M_1 — область U в $\mathbb{R}^n$, $M_2 = E^{n+1}$. Пусть в M_2 задана поверхность $\overline{r} = \overline{r}(u)$, где $\overline{r}\colon M_1 \to M_2$. Определим на M_1 абсолютный параллелизм $G_0 = e$. За ω_1 возьмем $\theta = Adu$, $u \in M_1$, $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица порядка n. Получили e-структуру на M_1.

Рассмотрим плоскую $O(n+1)$-структуру B_2 в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве M_2 с формой смещения $\omega_2 = g^{-1}dx$, где $g \in G$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n\}$ — стандартный репер в $V_1 = \mathbb{R}^n$, $\{\overline{E}_1, \overline{E}_2, \dots, \overline{E}_{n+1}\}$ — стандартный ортонормированный репер в $V_2 = \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\psi\colon M_1 \to O(n+1)$ — такое отображение, что $\psi(u) = \{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n, \overline{e}_{n+1}\}$, где $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ — ортонормированный репер в $\mathbb{R}^{n+1}$, $u \in M_1$ такой, что $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ касаются M_1, а $\overline{e}_{n+1}$ — нормаль к поверхности.

Тогда формула

$$f(u) = (\overline{r}(u), \psi(u))$$

задает морфизм структур $f\colon B_1 \to B_2$, если $\psi(u) = Adu = d\overline{r}$ и $A = \sqrt{g}$, где g — матрица первой квадратичной формы поверхности $r(u)$.

Пусть $l\colon V_1 \to V_2$ вложение такое, что $l\overline{F_i} = \overline{E_i}$, $i = \overline{1,n}$. Очевидно, что

$$\overline{r_i} = \sum_{\alpha} a_{\alpha_i} \overline{e}_\alpha, \quad i, \alpha = \overline{1,n}, \quad \overline{N} = \overline{e}_{n+1},$$

где $\overline{N}$ — нормаль к поверхности $\overline{r} = \overline{r}(u)$.

Рассмотрим теперь прямое произведение G-структур $B = B_1 \times B_2$. Тогда $V = V_1 + V_2$, $M = M_1 + M_2$, форма смещения $\omega = (A(u)du, u \in M_1, g^{-1}dx)$. В качестве V_0 выберем линейное подпространство $\{v, lv \mid v \in V_1\} \subset V$, представляющее собой линейную оболочку векторов $\{\overline{E_1} + \overline{F_1}, \overline{E_2} + \overline{F_2}, \dots, \overline{E_n} + \overline{F_n}\}$. Через M_0 обозначим подпространство $\{u, \overline{r}(u) \mid u \in M_1\} \subset M$. Тогда $B_0 \subset B$ представляет собой график отображения

$$B_0 = \{u, (\overline{r}(u), \psi(u) \mid u \in M_1)\}, \quad G_0 = e.$$

Найдем относительные гомологии Спенсера данной пары $B_0 \subset B$ структур.

Запишем линейное отображение $\gamma\colon V \to \hat{G}$ такое, что $\gamma V_0 \subset \hat{G}_0$ и $\gamma(\overline{E}_i + \overline{F}_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$, то есть $\gamma\overline{E}_i = -\gamma\overline{F}_i$. Пусть $\partial\gamma(v_1, v_2) = \gamma v_1 v_2 - \gamma v_2 v_1$ — граничные элементы в пространстве $\overline{(\Lambda^2 V^* \oplus V)}$. Тогда с учетом условия $\overline{Q}(V_0, V_0)?V_0$ пространство относительных гомологий Спенсера изоморфно прямой сумме пространств $\Lambda^2 V_2^* \oplus V_1 + \Lambda^2 V_1^* \oplus V_1 + V_1^* \oplus V_2^* \oplus V_1 + V_1^* \oplus V_2^* \oplus V_2$.

Изоморфизм задается формулой

$$\langle \overline{Q}(x, \overline{E}_{n+1}), y\rangle + \langle \overline{Q}(y, \overline{E}_{n+1}), x\rangle, \quad x, y \in V.$$

Подсчитаем теперь структурную функцию пары $B_0 \subset B$ структур. Пусть s — горизонтальная площадка в точке $x \in M_0$ такая, что $s(\overline{E}_p + \overline{F}_p)$, $p = \overline{1,n}$, касается структуры B_0, например,

$$s\overline{E}_j = (0, 0, 0, g\overline{E}_i); s\overline{F}_j = (0, A^{-1}\overline{F}_j, g\mu\overline{F}_j, 0),$$

где $i = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{1,n}$, $\mu\colon \mathbb{R}^n \to o(n+1)$.

Положим $\mu\overline{F}_\alpha = \mu^p \overline{F}_{q\alpha}$, $\alpha = \overline{1,n}$, $q, p = \overline{1, n+1}$. Тогда получаем следующие ненулевые элементы пространства $\overline{H}^{\lambda_1 - 1}(V, G; V_0, G_0)$:

$$\overline{Q}(\overline{E}_i, \overline{F}_j) = -\mu\overline{F}_j\overline{E}_i = \mu^p_{ij}\overline{F}_p;$$
$$\overline{Q}(\overline{F}_i, \overline{F}_j) = \partial A_{A^{-1}\overline{F}_i} \circ A^{-1}\overline{F}_j - \partial A_{A^{-1}\overline{F}_i} \circ A^{-1}\overline{F}_i.$$

Рассмотрим теперь три возможные группы N_0:

I. $N_0 = G_0 = e$**.** В этом случае получаем, что $\overline{H} = l, a(x) = 1$. Условие $\overline{Q}(x)^{a(y)} = \overline{Q}(y)$ выполняется только при постоянных значениях μ^p_{ij}. В частности, тонкий веер существует для поверхностей с постоянными главными кривизнами.

II. $N_0 = \Lambda(n+1)$**.** Пусть $\mu\colon \mathbb{R}^n \to o(n+1)$ — такое отображение, что $\overline{Q}(v_1, v_2) = -\mu(v_2)v_1$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Если отображение $a(x)\colon U_b \to N_0$ удовлетворяет условиям

$$a(b) = 1, \quad R_g U_b = U_b, \quad a(R_g x) = g^{-1}a(x), \quad g \in G, \quad x \in U_b,$$
$$\overline{\varphi}(y) = \overline{\varphi}(b)^{a(y)}, \quad y \in U_b,$$

то отображение $a(x)$ можно задать следующим образом:

$$a(x) = \frac{k_1(x)}{k_1(y)} = \frac{k_2(x)}{k_2(y)} = \dots = \frac{k_n(x)}{k_n(y)},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — главные кривизны в точках x и y гиперповерхности μ_0 и $\overline{H} = e$. Веер первого приближения определен для гиперповерхностей, у которых главные кривизны связаны соотношениями

$$k_\alpha(y) = k_\alpha k_1(y), \quad \alpha = \overline{1,n}.$$

Теперь подсчитаем значение функции $\overline{\Gamma}$ на векторах $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_n$, $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$. Очевидно, что

$$\overline{\Gamma E}_1 = \overline{\Gamma E}_2 = \ldots = \overline{\Gamma E}_{n+1} = 0,$$

$$\overline{\Gamma F}_i = \frac{\partial a}{\partial u_i} = -\frac{\partial k_i(x)/\partial u_i}{k_i(x)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Предположим теперь, что множество вееров первого приближения содержится в одной орбите группы N_0. Это означает выполнение равенства $\overline{\varphi}(y) = \overline{\varphi}(b)^{a(y)}$. Действие отображения a на структурных константах уже посчитано, вычислим теперь действие отображения a на функции $\overline{\Gamma}$:

$$\overline{\Gamma}_x^{a(y)} \overline{E}_i = 0, \quad i = \overline{1, n+1};$$

$$\overline{\Gamma}^{a(y)} \overline{F}_i = Ad_{a(y)} \overline{\Gamma}(a^{-1}(y)\overline{F}_i) = \frac{k_1(y)}{k_1(x)} \cdot \frac{\partial k_1(x)/\partial u_i}{k(x)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Должно выполняться условие

$$\overline{\Gamma}^{a(y)} \overline{F}_i = \overline{F}_y \overline{F}_i - \gamma \overline{F}_i.$$

Так как $\overline{\Gamma}^{a(y)} \overline{E}_i = 0$, $i = \overline{1, n+1}$, то $\gamma \overline{E}_i = 0$, следовательно, $\gamma \overline{F}_i = 0$, то есть в случае тонкого веера кривизны гиперповерхности дополнительно связаны соотношениями

$$\frac{k_i(y) \cdot \partial k_i(x)/\partial u_j}{k_i^2(x)} = \frac{\partial k_i(y)/\partial u_j}{k_i(y)},$$

или

$$\frac{\partial k_i(y)}{\partial u_j} = c_{ij} k_i^2(y), \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Решая эту систему дифференциальных уравнений в частных производных, получаем, что

$$k_i(y) = -\frac{1}{\sum_{j=1}^n c_{ij} u_j + c_{i,n+1}},$$

где c_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1, n+1}$ — произвольные постоянные, одновременно не равные нулю.

III. Предположим, что

$$N_0 \supset \left\{ \begin{pmatrix} A & & 0 & \\ & & A & & 0 \\ 0 & & & & \\ & & 0 & & A \end{pmatrix} \right\},$$

где $A \in O(n) \times \lambda$, λ — число, отличное от нуля. Пусть $\mu\colon \mathbb{R}^n \to o(n+1)$ — такое отображение, что

$$\overline{Q}(v_1, v_2) = \mu(v_2) v_1; \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, \quad v_2 = l v_1;$$

$$\overline{Q}(\overline{E}_{n+1}, v_2) = -\mu(v_2) \overline{E}_{n+1}.$$

Отображение $a : U_b \to N_0$ ищем в виде

$$a(y) = \left\{ \begin{pmatrix} A & & 0 & \\ & & A & & 0 \\ 0 & & & & \\ & & 0 & & A \end{pmatrix} \right\}.$$

Из условия $\overline{Q}(x)^{a(y)} = \overline{Q}(y)$ получаем

$$\overline{Q}_x^{a(y)}(v_1, v_2) = A\overline{Q}_x(A^{-1}v_1, A^{-1}v_2) = -A_\mu(A^{-1}v_2)A^{-1}v_1;$$

$$\overline{Q}_x^{a(y)}(\overline{E}_{n+1}, v_2) = \lambda \overline{Q}(\lambda^{-1}\overline{E}_{n+1}, A^{-1}v_2) = \overline{Q}(\overline{E}_{n+1}, A^{-1}v_2) = -\mu(A^{-1}v_2)\overline{E}_{n+1}.$$

Очевидно, что $\overline{H} = e$. Действительно, на A и λ имеем условия:

$$A_\mu(A^{-1}v_2)A^{-1}v_1 = \mu(v_2)v_1; \quad \mu(A^{-1}v_2)\overline{E}_{n+1} = \mu(v_2)\overline{E}_{n+1},$$

т.е. $\mu(A^{-1}y) = \mu(y)$ или $A = J$.

На отображение $a(x)$ получаем условия

$$-A\mu_x(A^{-1}v_2)A^{-1}v_1 = -\mu_y(v_2)v_1; \quad \mu_y(v_2)\overline{E}_{n+1} = \mu_x(A^{-1}v_2)\overline{E}_{n+1},$$

из которых получаем, что

$$A\mu_x(A^{-1}v_2) = \mu_x(A^{-1}v_2)A.$$

Так как матрица $\mu(v_2)$ в общем случае произвольна (мы предполагаем только, что её собственные числа различны), то перестановочность матриц A и $\mu(v_2)$ означает, что A — скалярная матрица, то есть случай III свелся к случаю II.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для гиперповерхностей в E^{n+1}, $n \geqslant 2$, тонкий веер существует в случае либо постоянных главных (различных между собой) кривизн, либо главных кривизн, пропорциональных между собой.*

3. Существование гиперповерхностей с постоянными главными кривизнами в евклидовом пространстве V^{n+1}. Выясним теперь, существуют ли такие поверхности, главные кривизны которых постоянны (в предположении, что все главные кривизны различны между собой).

Рассмотрим в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве V^{n+1} n-мерную поверхность $\overline{r} = \overline{r}(u)$.

Уравнения дифференцируемых перемещений репера $\overline{r}, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ на поверхности $\overline{r} = \overline{r}(u)$ запишем в следующем виде:

$$d\bar{r} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad i, j = \overline{1, n+1},$$

где $\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j \omega^k$ считаем постоянными числами.

Введем матрицу $\Gamma = (\Gamma_{ik}^j)$, $\Gamma_{ik}^j = \langle \Gamma \bar{E}_k \bar{E}_i, \bar{E}_j \rangle$. Запишем уравнения структуры:

$$d\omega^i = \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^i, \quad d\omega_i^j = \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j.$$

Тогда

$$d(\Gamma_{ik}^j \omega^k) = \Gamma_{i\beta}^\alpha \omega^\beta \wedge \Gamma_{\alpha\gamma}^j \omega^\gamma;$$
$$\Gamma_{ik}^j \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^k = \Gamma_{i\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^j \omega^\beta \wedge \omega^\gamma;$$
$$\Gamma_{ik}^j \Gamma_{\alpha\gamma}^k \omega^\alpha \wedge \omega^\gamma = \Gamma_{i\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^j \omega^\beta \wedge \omega^\gamma.$$

Приравниваем коэффициенты при $\omega^\beta \wedge \omega^\gamma$:

$$\Gamma_{ik}^j (\Gamma_{\beta\gamma}^k - \Gamma_{\gamma\beta}^k) = \Gamma_{i\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^j - \Gamma_{i\gamma}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^j,$$

или в общем виде:

$$\Gamma(\Gamma \bar{E}_\beta - \Gamma \bar{E}_\gamma) = [\Gamma \bar{E}_\beta, \Gamma \bar{E}_\gamma]. \tag{1}$$

Пусть теперь в V^{n+1} задана ортогональная структура $\mathcal{B} = o(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1}$. На многообразии B рассмотрим дифференциальную систему

$$\omega^{n+1} = 0, \quad \omega_i^j = \Gamma_{ik}^j \omega^k, \ k = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Замыкание дифференциальной системы дает еще два уравнения:

$$\omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^{n+1} = 0, \quad \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j = \Gamma_{ik}^j \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^k,$$

т.е.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{n+1} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = 0, \quad \Gamma_{i\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^j \omega^\beta \wedge \omega^\gamma = \Gamma_{ik}^j \Gamma_{\alpha\beta}^k \omega^\alpha \wedge \omega^\beta.$$

Это означает, что $\Gamma_{\alpha\beta}^{n+1}$ симметричны по $\alpha, \beta \leqslant n$, $k = \overline{1, n}$. Из последнего уравнения следует равенство (3).

Всякий n-мерный интегральный элемент, проектирующийся изоморфно на V_0, имеет вид

$$E = \{sv + j\gamma v \mid v \in V_0\},$$

где V_0 — линейная оболочка, натянутая на векторы

$$\{\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots, \bar{E}_n\} \subset \bar{E}^{n+1}; \quad \gamma \in V_0^* \otimes o(n+1).$$

Из второго уравнения системы (2) следует, что $\gamma_i^j(v) = \Gamma_{ik}^j v_k$. Следовательно, интегральный элемент E определяется однозначно и размерность расслоения таких интегральных элементов равна размерности B.

Рассмотрим конкретный интегральный элемент:

$$E_0 = \{su + j_b\gamma_0 u \mid u \in V_0\}, \quad \gamma_0 \in \Gamma, \quad b \in B_0.$$

Если $0 \subset U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{n-1} \subset V_0$ — квазирегулярный флаг, $\dim U_i = i$, то полярный к $E_0(U_i)$ элемент имеет вид: $H_i = \{sw + \lambda\}$, где $w \in V$, $\lambda \in o(n+1)$. При этом из первого уравнения системы (2) следует, что $w \in V_0$, из второго уравнения системы (2) — $\lambda_i^j(w) = \Gamma_{ik}^j \omega^k$.

Следовательно, элемент E_0 — ординарный. В силу теоремы Картана—Кэлера существует n-мерное интегральное многообразие, проходящее через точку b с касательной плоскостью E_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грушко П. Я.* Морфизмы геометрических структур// Мат. заметки. — 1977. — *22*, № 5. — С. 844–849.
2. *Грушко П. Я.* О проблеме сопряженной эквивалентности Картана// Сиб. мат. ж. — 1981. — *22*, № 1. — С. 68–80.
3. *Грушко П. Я.* Сопряженно транзитивные структуры конечного типа// Изв. вузов. Мат. — 1981. — № 2. — С. 24–29.
4. *Грушко П. Я.* Сопряженно транзитивные структуры// Сиб. мат. ж. — 1983. — *24*, № 1. — С. 68–78.
5. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.
6. *Кузьмина Е. Ю.* Некоторые примеры пар геометрических структур в классической дифференциальной геометрии. — Деп. в ВИНИТИ СССР. 06.06.1984. — 06.06.1984.— № 4752-84.
7. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1953. — *2*. — С. 275–382..
8. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.
9. *Шилов Г. Е.* Математический анализ функции нескольких вещественных переменных. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1972.
10. *Bernard D.* Sur la geometrie differentielle des G-structures// Ann. Inst. Fourier. — 1960. — *10*. — P. 153–273.
11. *Chern S. S.* Pseudo-groupes continus infinis// in: Géométrie différentielle. V. LII. — Colloques Internationale du C.N.R.S., Strasbourg, 1953. — P. 119–136.
12. *Chern S. S* The geometry of G-structures// Bull. Am. Math. Soc. — 1966. — *72*. — P. 167–219.
13. *Guillemin V.* The integrability problem for G-structures// Trans. Am. Math. Soc. — 1965. — *116*. — P. 544–560.
14. *Hsiang W. C., Hsiang W. Y.* Differentiable action of compact connected classical groups, II// Ann. Math. — 1970. — *92*. — P. 189–223.
15. *Kuzmina E. Yu.* Representations of simple Lie algebras with vectors having a zero stationary subalgebra// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012031.
16. *Monna G.* Integrabilite des structures de presque contact// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1980. — *291*. — P. 215–217.
17. *Singer I. M., Sternberg S.* The infinite groups of Lie and Cartan. Part 1. The transitive groups// J. Anal. Math. — 1965. — *15*. — P. 1–114.

Кузьмина Елена Юрьевна

Иркутский государственный университет

E-mail: `quzminov@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 82–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-82-106

УДК 517.9; 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ГЛАДКОГО КОНЕЧНОМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ. I. УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ГЛАДКОГО n-МЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Во многих задачах динамики возникают системы, пространствами положений которых являются n-мерными многообразиями. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения. Рассматриваемые динамические системы обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В работе показана интегрируемость более общих классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким n-мерным многообразиям.

***Ключевые слова*:** динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF SMOOTH FINITE-DIMENSIONAL MANIFOLDS. I. EQUATIONS OF GEODESICS ON THE TANGENT BUNDLE OF A SMOOTH n-DIMENSIONAL MANIFOLD

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In many problems of dynamics, systems arise whose position spaces are four-dimensional manifolds. Naturally, the phase spaces of such systems are the tangent bundles of the corresponding manifolds. Dynamical systems considered have variable dissipation, and the complete list of first integrals consists of transcendental functions expressed in terms of finite combinations of elementary functions. In this paper, we prove the integrability of more general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on tangent bundles of four-dimensional manifolds.

***Keywords and phrases*:** dynamical system, nonconservative field, integrability, transcendental first integral.

***AMS Subject Classification*:** 34Cxx, 70Cxx

1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к гладкому n-мерному многообразию

Напомним ряд результатов, без которых рассмотрение систем с диссипацией невозможно (см. [3, 11, 12, 15, 28]).

1.1. Обозначения. Рассмотрим гладкое n-мерное риманово многообразие M^n с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, \ldots, x^n)$ на многообразии порождает гладкую аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим также касательное расслоение $T_*M^n\{z_n, \ldots, z_1; x^1, \ldots, x^n\}$ к гладкому многообразию M^n, где $z = (z_n, \ldots, z_1)$ — координаты в касательном пространстве.

Если $z_i = \dot{x}^i$, $i = 1, \ldots, n$ (точкой обозначена производная по натуральному параметру), то уравнения геодезических линий примут вид

$$\begin{gathered}\ddot{x}^i + \Gamma^i_{11}(x)(\dot{x}^1)^2 + 2\Gamma^i_{12}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^2) + \ldots + 2\Gamma^i_{1n}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^n) + +\Gamma^i_{22}(x)(\dot{x}^2)^2 + \\ + 2\Gamma^i_{23}(x)(\dot{x}^2)(\dot{x}^3) + \ldots + 2\Gamma^i_{2n}(x)(\dot{x}^2)(\dot{x}^n) + \ldots + \Gamma^i_{n-1,n-1}(x)(\dot{x}^{n-1})^2 + \\ + 2\Gamma^i_{n-1,n}(x)(\dot{x}^{n-1})(\dot{x}^n) + \Gamma^i_{nn}(x)(\dot{x}^n)^2 = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Обозначим для наглядности в случае n-мерного многообразия координаты $(x^1 \ldots, x^n)$ через (α, β), $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$. Тогда уравнения (1.1) на касательном расслоении $T_*M^n\big\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_{n-1}; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\big\}$ примут следующий вид:

$$\begin{gathered}\ddot{\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \ldots + 2\Gamma^\alpha_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^\alpha_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \ldots + 2\Gamma^\alpha_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + 2\Gamma^\alpha_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \ldots + 2\Gamma^\alpha_{2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \\ + \Gamma^\alpha_{n-2,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}^2 + 2\Gamma^\alpha_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \end{gathered} \tag{1.2a}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_1 + \Gamma^1_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \ldots + 2\Gamma^1_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^1_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^1_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \ldots + 2\Gamma^1_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + 2\Gamma^1_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \ldots + 2\Gamma^1_{2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \\ + \Gamma^1_{n-2,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}^2 + 2\Gamma^1_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \end{gathered} \tag{1.2b}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_2 + \Gamma^2_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^2_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \ldots + 2\Gamma^2_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^2_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \ldots + 2\Gamma^2_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^2_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + 2\Gamma^2_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \ldots + 2\Gamma^2_{2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \\ + \Gamma^2_{n-2,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}^2 + 2\Gamma^2_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \end{gathered} \tag{1.2c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_{n-1} + \Gamma^{n-1}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^{n-1}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^{n-1}_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^{n-1}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + 2\Gamma^{n-1}_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \\ + \Gamma^{n-1}_{n-2,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}^2 + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} + \Gamma^{n-1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0. \end{gathered} \tag{1.2d}$$

Пример 1.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, когда метрика на n-мерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$-мерного пространства, уравнения (1.2) примут вид

$$\ddot{\alpha} - \Big[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2\sin^2\beta_1 + \dot{\beta}_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 + \ldots + \dot{\beta}_{n-1}^2\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2}\Big]\sin\alpha\cos\alpha = 0, \tag{1.3a}$$

$$\ddot\beta_1 + 2\dot\alpha\dot\beta_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \\ - \left[\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_2\sin^2\beta_3 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \quad (1.3b)$$

$$\ddot\beta_2 + 2\dot\alpha\dot\beta_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left[\dot\beta_3^2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_3 + \dot\beta_5^2\sin^2\beta_3\sin^2\beta_4 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0, \quad (1.3c)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\ddot\beta_{n-2} + 2\dot\alpha\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} - \\ - \dot\beta_{n-1}^2\sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-2} = 0, \quad (1.3d)$$

$$\ddot\beta_{n-1} + 2\dot\alpha\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}} = 0, \quad (1.3e)$$

т.е. $n(n-1)$ ненулевых коэффициентов связности равны

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha, \quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1,$$
$$\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2, \quad \ldots, \quad \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2},$$
$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1, \quad \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) = -\sin^2\beta_2\sin\beta_1\cos\beta_1, \quad \ldots,$$
$$\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-2}, \quad \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$
$$\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_2\cos\beta_2, \quad \ldots, \quad \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_2\cos\beta_2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \quad \ldots,$$
$$\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}, \quad \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-2},$$
$$\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \quad \ldots, \quad \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}.$$

Пример 1.2. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, но когда метрика на n-мерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. [2, 4, 35, 37]), уравнения (1.2) примут следующий вид:

$$\ddot\alpha - \left[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \quad (1.4a)$$

$$\ddot\beta_1 + \dot\alpha\dot\beta_1\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - \\ - \left[\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_2\sin^2\beta_3 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \quad (1.4b)$$

$$\ddot\beta_2 + \dot\alpha\dot\beta_2\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left[\dot\beta_3^2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_3 + \dot\beta_5^2\sin^2\beta_3\sin^2\beta_4 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0, \quad (1.4c)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\ddot\beta_{n-2} + \dot\alpha\dot\beta_{n-2}\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} - \\ - \dot\beta_{n-1}^2\sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-2} = 0, \quad (1.4\text{d})$$

$$\ddot\beta_{n-1} + \dot\alpha\dot\beta_{n-1}\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}} = 0, \quad (1.4\text{e})$$

т.е. $n(n-1)$ ненулевых коэффициентов связности равны

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1,$$

$$\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2, \quad \ldots, \quad \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2},$$

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, \quad \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1,$$

$$\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) = -\sin^2\beta_2\sin\beta_1\cos\beta_1, \quad \ldots, \quad \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-2},$$

$$\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, \quad \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$

$$\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_2\cos\beta_2, \quad \ldots, \quad \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_2\cos\beta_2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, \quad \Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \quad \ldots, \quad \Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}},$$

$$\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-2},$$

$$\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, \quad \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \quad \ldots, \quad \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}.$$

1.2. Замены координат касательного пространства. Исследуем структуру уравнений (1.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^n. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия, которую можно обратить:

$$\dot x^i = \sum_{j=1}^n R^{ij}(x)z_j, \quad z_j = \sum_{i=1}^n T_{ji}(x)\dot x^i; \quad (1.5)$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i,j = 1,\ldots,n$, — функции от $x^1,\ldots,x^n$, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем уравнения (1.5) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^n (ср. [5,6,9,26,27]).

Справедливы следующие тождества:

$$\dot z_j = \sum_{i=1}^n \dot T_{ji}\dot x^i + \sum_{i=1}^n T_{ji}\ddot x^i, \quad \dot T_{ji} = \sum_{k=1}^n T_{ji,k}\dot x^k, \quad (1.6)$$

где $T_{ji,k} = \partial T_{ji}/\partial x^k$, $j,i,k = 1,\ldots,n$. Подставляя в (1.6) уравнения (1.1), получим

$$\dot z_i = \sum_{j,k=1}^n T_{ij,k}\dot x^j\dot x^k - \sum_{j,p,q=1}^n T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot x^p\dot x^q; \quad (1.7)$$

при этом в последней системе вместо $\dot x^i$, $i = 1,\ldots,n$, надо подставить формулы (1.5), и правые части соотношений (1.7) будут квадратичными формами по $z_1,\ldots,z_n$ (см. также [10,14,17,20,23]).

Другими словами, равенство (1.7) можно переписать в виде

$$\dot z_i + \sum_{j,k=1}^n Q_{ijk}\dot x^j\dot x^k\Big|_{(1.5)} = 0, \quad (1.8)$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{n} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{1.9}$$

Непосредственно из формул (1.7) следует следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Система* (1.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (1.5), (1.7).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1.1) к эквивалентной системе уравнений (1.5), (1.7) зависит как от замены переменных (1.5) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

В частности, для примеров 1.1, 1.2 получаем следующие утверждения.

Следствие 1.1. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, *когда метрика на n-мерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего* $(n+1)$*-мерного пространства* (*см. пример* 1.1), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.3), *примет следующий вид*:

$$\dot\alpha = -z_n, \tag{1.10a}$$

$$\dot z_n = -\frac{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}{\cos\alpha\sin\alpha}, \tag{1.10b}$$

$$\dot z_{n-1} = \frac{z_{n-1}z_n}{\cos\alpha\sin\alpha} + \frac{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}{\cos\alpha\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{1.10c}$$

$$\dot z_{n-2} = \frac{z_{n-2}z_n}{\cos\alpha\sin\alpha} - \frac{z_{n-2}z_{n-1}}{\cos\alpha\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \frac{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}{\cos\alpha\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{1.10d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot z_1 = \frac{z_1}{\cos\alpha\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^{s+1}z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{1.10e}$$

$$\dot\beta_1 = \frac{z_{n-1}}{\cos\alpha\sin\alpha}, \tag{1.10f}$$

$$\dot\beta_2 = -\frac{z_{n-2}}{\cos\alpha\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{1.10g}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot\beta_{n-1} = (-1)^n\frac{z_1}{\cos\alpha\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}, \tag{1.10h}$$

если первое и группу последних $n-1$ уравнений системы (1.10) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Следствие 1.2. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, *когда метрика на n-мерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий* (*см.* [19, 25, 31, 42], *а также пример* 1.2), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.4), *примет следующий вид*:

$$\dot\alpha = -z_n, \tag{1.11a}$$

$$\dot z_n = -(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.11b}$$

$$\dot z_{n-1} = z_{n-1}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{1.11c}$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{1.11d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{z}_1 = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^{s+1}z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{1.11e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.11f}$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{1.11g}$$

....

$$\dot{\beta}_{n-1} = (-1)^n z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}, \tag{1.11h}$$

если первое и группу последних $n-1$ уравнений системы (1.11) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Очевидно, что системы (1.10) и (1.11) имеют аналитический первый интеграл

$$z_1^2+\ldots+z_n^2 = \text{const}, \tag{1.12}$$

т.е., в других координатах для системы (1.11)

$$\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}_1^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dot{\beta}_2^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\beta_1+\dot{\beta}_3^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2+\ldots+$$
$$+\dot{\beta}_{n-1}^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2} = \text{const},$$

а для системы (1.10) — аналитический первый интеграл

$$\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}_1^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\dot{\beta}_2^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta_1+\dot{\beta}_3^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2+\ldots+$$
$$+\dot{\beta}_{n-1}^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2} = \text{const}.$$

1.3. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай I. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в следующем виде (случай I):

$$\begin{aligned}
&\dot{\alpha} = -z_n,\\
&\dot{\beta}_1 = z_{n-1}f_1(\alpha),\\
&\dot{\beta}_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\\
&\dot{\beta}_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}),
\end{aligned} \tag{1.13}$$

где $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения.

Такие координаты z_1, …, z_n в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности (см. [22, 27, 36, 47]):

$$\ddot{\alpha}+\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2+\ldots+\Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.14a}$$

$$\ddot{\beta}_1+2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1+\Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2+\ldots+\Gamma_{n-1,n-1}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.14b}$$

$$\ddot{\beta}_2+2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2+2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2+\Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2+\ldots+\Gamma_{n-1,n-1}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.14c}$$

$$\ddot{\beta}_3+2\Gamma_{\alpha 3}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3+2\Gamma_{13}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3+2\Gamma_{23}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3+$$
$$+\Gamma_{44}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2+\ldots+\Gamma_{n-1,n-1}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.14d}$$

....

$$\ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots + \\ + \Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0, \tag{1.14e}$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0; \tag{1.14f}$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (1.13) уравнения (1.7) примут вид

$$\dot{z}_1 = \left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] z_1 z_n - \\ - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] z_1 z_{n-1} - \\ - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] z_1 z_{n-2} - \ldots - \\ - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] z_1 z_2, \tag{1.15a}$$

$$\dot{z}_2 = \left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] z_2 z_n - \\ - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] z_2 z_{n-1} - \ldots - \\ - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right] z_2 z_3 - \\ - \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r^2_2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z^2_1, \tag{1.15b}$$

....

$$\dot{z}_{n-1} = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] z_{n-1} z_n - \frac{f^2_2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2_1(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z^2_{n-2} - \ldots - \\ - \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z^2_1, \tag{1.15c}$$

$$\dot{z}_n = f^2_1(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z^2_{n-1} + f^2_2(\alpha)g^2_1(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z^2_{n-2} + \ldots + \\ + f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z^2_1, \tag{1.15d}$$

здесь, как и далее,

$$DQ(q) = \frac{d\ln|Q(q)|}{dq},$$

и уравнения геодезических (1.14) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.13) почти всюду эквивалентны составной системе (1.13), (1.15) на многообразии $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (1.13), (1.15) порядка $2n$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

Следствие 1.3. *Если $f_k(\alpha)$, $k = 1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.14), *может быть приведена к следующему виду*:

$$\dot{\alpha} = -z_n, \tag{1.16a}$$

$$\dot{z}_n = f^2_1(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z^2_{n-1} + f^2_2(\alpha)g^2_1(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z^2_2 + \ldots + \\ + f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z^2_1, \tag{1.16b}$$

$$\dot z_{n-1} = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] z_{n-1}z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots - \\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2, \tag{1.16c}$$

. . . .

$$\dot z_2 = \left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] z_2 z_n - \\ - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] z_2 z_{n-1} - \ldots - \\ - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right] z_2 z_3 - \\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2, \tag{1.16d}$$

$$\dot z_1 = \left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] z_1 z_n - \\ - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] z_1 z_{n-1} - \\ - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] z_1 z_{n-2} - \ldots - \\ - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] z_1 z_2, \tag{1.16e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{1.16f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{1.16g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{1.16h}$$

. . . .

$$\dot\beta_{n-2} = z_2 f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{1.16i}$$

$$\dot\beta_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{1.17}$$

Если при этом аффинная связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ при всех i,j,k не зависит от угла β_{n-1}, то происходит отделение независимой подсистемы (1.16) *порядка* $2n-1$.

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям $z_1,\ldots,z_n$ первого интеграла более общего вида, нежели (1.12):

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\leqslant j}}^{n} a_{ij}(\alpha,\beta)z_i z_j = \mathrm{const}, \tag{1.18}$$

не требуя даже положительной определенности матрицы $(a_{ij}(\alpha,\beta))$, но мы пока ограничимся следующим случаем (см. также [1, 13, 21, 29]).

Предложение 1.2. *Если всюду на своей области определения справедлива система* $n(n-1)/2$ *дифференциальных равенств*

$$2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.19a}$$

. . . .

$$2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha) + \\ + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.19b}$$

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.19c}$$

. . . .

$$
\begin{gathered}
f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\right]+\\
+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\equiv 0,
\end{gathered}
\tag{1.19d}
$$

....

$$
\begin{gathered}
f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\right]+\\
+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\equiv 0,
\end{gathered}
\tag{1.19e}
$$

то система (1.16), (1.17) *имеет аналитический первый интеграл*

$$
\Phi_1(z_n,\ldots,z_1)=z_1^2+\ldots+z_n^2=C_1^2=\mathrm{const}\,.
\tag{1.20}
$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.20) в силу системы (1.16), (1.17) дает

$$
\begin{gathered}
2\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\Big]z_{n-1}^2z_n+\ldots+\\
+2\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Big]z_1^2z_n-\\
-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_{n-2}^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\\
-2\Bigg[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]+\\
+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Bigg]\frac{z_1^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}-\\
-2\Bigg[f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\Big]+\\
+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Bigg]\frac{z_1^2z_2}{f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})}\equiv 0,
\end{gathered}
$$

поскольку выполнена система $n(n-1)/2$ дифференциальных равенств (1.19). □

Согласно предложению 1.2 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.3) и (1.4) из примеров 1.1 и 1.2, соответственно, и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.20).

Следствие 1.4. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$, *когда метрика на* n*-мерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего* $(n+1)$*-мерного пространства* (*см. также пример* 1.1), *однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических* (1.3) *и имеющая первый интеграл вида* (1.20), *примет следующий вид*:

$$
\dot\alpha=-z_n,
\tag{1.21a}
$$

$$
\dot z_n=-(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},
\tag{1.21b}
$$

$$
\dot z_{n-1}=z_{n-1}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}+(z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},
\tag{1.21c}
$$

$$
\begin{gathered}
\dot z_{n-2}=z_{n-2}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}-z_{n-2}z_{n-1}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\\
-(z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},
\end{gathered}
\tag{1.21d}
$$

....

$$\dot z_1 = z_1 z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + {}$$

$$+ z_1 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s+1} z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{1.21e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{1.21f}$$

$$\dot\beta_2 = -z_{n-2}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{1.21g}$$

....

$$\dot\beta_{n-1} = (-1)^n z_1 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R}, \tag{1.21h}$$

если первое и группу последних $n-1$ уравнений системы (1.21) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Следствие 1.5. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$, *но когда метрика на n-мерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий* (*см.* [38, 43, 48, 50, 51], *а также пример* 1.2), *однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических* (1.4) *и имеющая первый интеграл вида* (1.20), *примет следующий вид*:

$$\dot\alpha = -z_n, \tag{1.22a}$$

$$\dot z_n = -(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \tag{1.22b}$$

$$\dot z_{n-1} = z_{n-1}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + (z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{1.22c}$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - {}$$

$$- (z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{1.22d}$$

....

$$\dot z_1 = z_1 z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + {}$$

$$+ z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s+1} z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{1.22e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{1.22f}$$

$$\dot\beta_2 = -z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{1.22g}$$

....

$$\dot\beta_{n-1} = (-1)^n z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R}, \tag{1.22h}$$

если первое и группу последних $n-1$ уравнений системы (1.22) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Системы (1.10) и (1.11) получаются из систем (1.21) и (1.22) при $\nu_1=-1$ и $\nu_1=0$ соответственно.

Важно заметить, что, на первый взгляд, при интегрировании системы равенств (1.19) должны получиться $n(n-1)/2$ произвольных постоянных, определяющие $n(n-1)/2$-параметрические семейства искомых систем вида (1.21) и (1.22). Но, оказывается, система равенств (1.19) определяет не более чем $n(n-1)/2$-параметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае возможно найти лишь однопараметрические искомые семейства.

Система равенств (1.19) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.20) (или см. ниже (**??**)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [16, 44, 52, 74, 76]). Но, как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ системы равенств (1.19) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.20) системы (1.16), (1.17) уравнений геодезических. Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (1.19) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.16), (1.17) выполнение условий

$$f_1(\alpha)\equiv\ldots\equiv f_{n-1}(\alpha)=f(\alpha); \tag{1.23}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять $(n-1)(n-2)/2$ преобразованным уравнениям из системы равенств (1.19):

$$2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)+g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{1.24a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{gathered}2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)+\\ +g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\equiv 0,\end{gathered} \tag{1.24b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{gathered}g^2_{n-3}(\beta_1)h^2_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\right]+\\ +g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\equiv 0.\end{gathered} \tag{1.24c}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности; ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 1.3. *Если выполнены свойства* (1.23), (1.24) *и при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\equiv\ldots\equiv\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha), \tag{1.25}$$

то система (1.16), (1.17) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}\;\Phi_0(\alpha)=C_2=\mathrm{const}, \tag{1.26}$$

где

$$\Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.26) в силу системы (1.16), (1.17) при условиях (1.23)–(1.25) дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 1.4. *Если выполнены условия предложения* 1.3, *а также условия*

$$g_1(\beta_1) \equiv \ldots \equiv g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1) \tag{1.27}$$

и при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{1.28}$$

то система (1.16), (1.17) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\;\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{1.29}$$

где

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.29) в силу системы (1.16), (1.17) при условиях (1.27), (1.28), а также в условиях предложения 1.3 дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Psi_1(\beta_1) -$$
$$- \left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\} z_{n-1}f(\alpha)\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$

что и доказывает предложение. □

В дальнейшем было бы логично доказать аналогичное предложение и по условиям существования гладкого первого интеграла вида

$$\Phi_4(z_{n-3},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\;\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const},$$

получив предложение с номером 1.4+1 и т. д. Но мы по предположению индукции опустим некоторое конечное число таких шагов, изменив номер следующего предложения на лишь единицу: 1.5. Поэтому далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 1.5. *Если выполнены условия предложений* 1.3, 1.4, …, *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{1.30}$$

то система (1.16), (1.17) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_n(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}, \tag{1.31}$$

где

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\Gamma_{n-1}(b)db\right\}, \quad i(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2}).$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.31) в силу системы (1.16), (1.17) при рассматриваемых условиях дает

$$z_1 z_n \Psi_1(\beta_1)\dots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+$$
$$+z_1 z_{n-1} f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\dots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+\dots+$$
$$+z_1 z_2 f(\alpha)g(\beta_1)\dots r(\beta_{n-3})\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\dots\Psi_{n-3}(\beta_{n-3})\times$$
$$\times\left[(-1)^n\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+\frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})+(-1)^{n+1}\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ …, $\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}}=\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+\frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}),$$

что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 1.1. Если выполнена группа $n(n-1)/2$ дифференциальных равенств (1.19), а также $n-1$ групп условий (1.25), (1.28), …, (1.30), то выполнены равенства

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{11}(\alpha),\quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1),\quad \dots,$$
$$\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),$$
$$\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1),\quad \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),\quad \dots,$$
$$\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),\quad \dots$$
$$\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),$$

а значит в системе (1.16), (1.17) появляется независимая подсистема порядка $2n-1$, состоящая из первых $2n-1$ уравнений (уравнение для $\dot\beta_{n-1}$ отделяется):

$$\dot\alpha=-z_n, \tag{1.32a}$$

$$\dot z_n=f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_{n-1}^2+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2+\ldots+$$
$$+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})z_1^2, \tag{1.32b}$$

$$\dot z_{n-1}=[2\Gamma_1(\alpha)+Df_1(\alpha)]\,z_{n-1}z_n-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1)z_{n-2}^2-\ldots-$$
$$-\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})z_1^2, \tag{1.32c}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot z_2=\Big[2\Gamma_1(\alpha)+Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2z_n-f_1(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2z_{n-1}-\ldots-$$
$$-f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\dots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})+Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2z_3-$$
$$-\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\dots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})z_1^2, \tag{1.32d}$$

$$\dot z_1 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df_{n-1}(\alpha)\Big] z_1 z_n - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big] z_1 z_{n-1} -$$

$$- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh_{n-3}(\beta_2)\Big] z_1 z_{n-2} - \ldots -$$

$$- f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di_1(\beta_{n-2})\Big] z_1 z_2, \tag{1.32e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{1.32f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{1.32g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{1.32h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\dot\beta_{n-2} = z_2 f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{1.32i}$$

$$\dot\beta_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{1.33}$$

Предложение 1.6. *Если выполнены условия предложений* 1.3, 1.4, …, 1.5, *то система* (1.32), (1.33) *имеет первый интеграл*

$$\Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\, db = C_{n+1} = \mathrm{const}, \tag{1.34}$$

где после взятия интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно формально подставить левые части соответствующих первых интегралов.

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.3, 1.4, …, 1.5, то система (1.32), (1.33) обладает $n-1$ первыми интегралами (1.26), (1.29), …, (1.31). Нам понадобятся лишь два последних первых интеграла.

Далее, рассмотрим два уровня C_{n-1} и C_n соответствующих первых интегралов. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_n}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - C_n^2}}. \tag{1.35}$$

Будем искать угол β_{n-1} из следующего уравнения, полученного из системы (1.32), (1.33):

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{z_1}{z_2} i(\beta_{n-2}).$$

Воспользовавшись в этом уравнении равенством (1.35), получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.2, …, 1.6 является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия предложений* 1.2, …, 1.5, *то система* (1.32), (1.33) *обладает полным набором независимых первых интегралов вида* (1.20), (1.26), (1.29), …, (1.31), (1.34), *количество которых равно* $n+1$.

Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показан ниже.

1.4. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай II. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в следующем виде (случай II):

$$\dot\alpha = z_n f_n(\alpha), \tag{1.36a}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{1.36b}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{1.36c}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{1.36d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}), \tag{1.36e}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения.

Такие координаты z_1, $\ldots$, z_n в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (см. также [53, 55, 57, 58]) с $n(n-1)+1$ ненулевыми коэффициентами связности:

$$\ddot{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.37a}$$

$$\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.37b}$$

$$\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.37c}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \\ + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\end{gathered} \tag{1.37d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots + \\ + \Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\end{gathered} \tag{1.37e}$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0; \tag{1.37f}$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (1.36) уравнения (1.7) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 = &- f_n(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] z_1 z_n - \\ &- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] z_1 z_{n-1} - \\ &- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] z_1 z_{n-2} - \ldots - \\ &- f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] z_1 z_2,\end{aligned} \tag{1.38a}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 = &- f_n(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] z_2 z_n - \\ &- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] z_2 z_{n-1} - \ldots - \\ &- f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right] z_2 z_3 - \\ &- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2,\end{aligned} \tag{1.38b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_{n-1} = &- f_n(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] z_{n-1} z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_{n-2}^2 - \ldots - \\ &- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2,\end{aligned} \tag{1.38c}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_n = &- f_n(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)\right] z_n^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) z_{n-1}^2 - \\ &- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) z_{n-2}^2 - \ldots - \\ &- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2;\end{aligned} \tag{1.38d}$$

здесь, как и далее, $DQ(q) = d\ln|Q(q)|/dq$, и уравнения геодезических (1.37) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.36) почти всюду эквивалентны составной систем (1.36), (1.38) на многообразии $T_*M^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (1.36), (1.38) порядка $2n$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

Следствие 1.6. *Если $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.37)*, может быть приведена к следующему виду*:

$$\dot\alpha = z_n f_n(\alpha), \tag{1.39a}$$

$$\begin{aligned}\dot z_n = -f_n(\alpha)\Big[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)\Big]z_n^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_{n-1}^2 -\\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots -\\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{1.39b}$$

$$\begin{aligned}\dot z_{n-1} = -f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots -\\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{1.39c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}\dot z_2 = -f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2z_n -\\ - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2z_{n-1} - \ldots -\\ - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2z_3 -\\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned} \tag{1.39d}$$

$$\begin{aligned}\dot z_1 = -f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1z_n -\\ - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]z_1z_{n-1} -\\ - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]z_1z_{n-2} - \ldots -\\ - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big]z_1z_2,\end{aligned} \tag{1.39e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{1.39f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{1.39g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{1.39h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{1.39i}$$

$$\dot\beta_{n-2} = z_2f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{1.39j}$$

$$\dot\beta_{n-1} = z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{1.40}$$

Если при этом аффинная связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ при всех i, j, k не зависит от угла β_{n-1}, то происходит отделение независимой подсистемы (1.39) *порядка $2n-1$.*

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям $z_1, \ldots, z_n$ первого интеграла более общего вида, нежели (1.12):

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leqslant j}}^{n} a_{ij}(\alpha, \beta) z_i z_j = \mathrm{const}, \tag{1.41}$$

не требуя даже положительной определенности матрицы $(a_{ij}(\alpha, \beta))$, но мы пока ограничимся следующим случаем (см. также [63, 64, 66, 67]).

Предложение 1.7. *Если всюду на своей области определения справедлива следующая система* $n(n-1)/2+1$ *дифференциальных равенств*:

$$f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)\Big] + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv 0, \tag{1.42a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)\Big] &+ \\ + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{\alpha}(\alpha, \beta) &\equiv 0, \end{aligned} \tag{1.42b}$$

$$f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)\Big] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \tag{1.42c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big] &+ \\ + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{1}(\alpha, \beta) &\equiv 0, \end{aligned} \tag{1.42d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} f_{n-2}^2(\alpha) g_{n-3}^2(\beta_1) h_{n-4}^2(\beta_2) \ldots r_1^2(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big] &+ \\ + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) &\equiv 0, \end{aligned} \tag{1.42e}$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_n(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \tag{1.42f}$$

то система (1.39), (1.40) *имеет аналитический первый интеграл*

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 = C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{1.43}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.43) в силу системы (1.39), (1.40) дает

$$-2f_n(\alpha)\Big[\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_n(\alpha)|}{d\alpha}\Big] z_n^3 - 2\left[f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)\Big] + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta)\right] \frac{z_{n-1}^2 z_n}{f_n(\alpha)} - \ldots -$$

$$-2\left[f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)\Big] + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{\alpha}(\alpha, \beta)\right] \frac{z_1^2 z_n}{f_n(\alpha)} -$$

$$-2\left[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)\Big] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\right] \frac{z_{n-2}^2 z_{n-1}}{f_1(\alpha)} - \ldots -$$

$$\begin{aligned} -2\Bigg[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big] &+ \\ + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{1}(\alpha, \beta)\Bigg] &\frac{z_1^2 z_{n-1}}{f_1(\alpha)} - \ldots - \end{aligned}$$

$$-2\Bigg[f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\dots r_1^2(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma_{n-2,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\Big]+$$

$$+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta)\Bigg]\times$$

$$\times\frac{z_1^2z_2}{f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\dots r_1(\beta_{n-3})}\equiv 0,$$

поскольку выполнена система $n(n-1)/2+1$ дифференциальных равенств (1.42). □

Пример 1.3. Уравнения (1.2) геодезических в n-мерном пространстве Лобачевского (с координатами $x_1=\beta_1,\dots,x_{n-1}=\beta_{n-1},y=\alpha$) примут вид

$$\ddot{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\Big(\dot{\alpha}^2-\dot{\beta}_1^2-\dots-\dot{\beta}_{n-1}^2\Big)=0,\quad \ddot{\beta}_1-\frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_1=0,\quad \dots,\quad \ddot{\beta}_{n-1}-\frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1}=0, \tag{1.44}$$

т.е. ненулевые коэффициенты связности равны

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha},\quad \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)=\dots=\Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\alpha},\quad \Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta)=\dots=\Gamma_{\alpha,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha}.$$

Согласно предложению 1.7 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.44) из примера 1.3 и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.43).

Следствие 1.7. *В случае геодезических в n-мерном пространстве Лобачевского с координатами $x_1=\beta_1,\dots,x_{n-1}=\beta_{n-1},y=\alpha$ (см. также пример* 1.3) *n-параметрическая система, эквивалентная при $\nu_1\neq 0$, $\alpha\neq 0$ уравнениям геодезических* (1.44) *и имеющая первый интеграл вида* (1.43) *примет следующий вид*:

$$\dot{\alpha}=z_n\nu_1\alpha, \tag{1.45a}$$

$$\dot{z}_n=-z_{n-1}^2\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}-\dots-z_1^2\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_n}, \tag{1.45b}$$

$$\dot{z}_{n-1}=z_{n-1}z_n\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}, \tag{1.45c}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\dot{z}_1=z_1z_n\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_n}, \tag{1.45d}$$

$$\dot{\beta}_1=z_{n-1}\frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}}, \tag{1.45e}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\dot{\beta}_{n-1}=z_1\frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_n}},\quad \nu_1,\dots,\nu_n\in\mathbb{R}, \tag{1.45f}$$

если первое и группу последних $n-1$ уравнений системы (1.45) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Важно заметить, что при интегрировании системы равенств (1.42) должны получиться на первый взгляд $n(n-1)/2+1$ произвольных постоянных, определяющие $(n(n-1)/2+1)$-параметрические семейства искомых систем вида (1.45). Оказывается, однако, что система равенств (1.42) определяет не более чем $(n(n-1)/2+1)$-параметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае возможно найти лишь n-параметрические искомые семейства.

Система равенств (1.42) по-прежнему может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.43) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (ср. [59, 61, 68, 69]). Но, как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

По-прежнему актуально следующее замечание. Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ системы дифференциальных равенств (1.42) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.43) для системы (1.39), (1.40) уравнений геодезических. Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Для систем с диссипацией условия (1.42) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.39), (1.40) выполнение условия

$$f_1(\alpha) \equiv \ldots \equiv f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha); \tag{1.46}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять $(n-1)(n-2)/2$, вообще говоря, преобразованным уравнениям из системы равенств (1.42):

$$2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) + g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha, \beta) \equiv 0, \tag{1.47a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{gathered} 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \\ + g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha, \beta) \equiv 0, \end{gathered} \tag{1.47b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{gathered} g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big] + \\ + g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha, \beta) \equiv 0. \end{gathered} \tag{1.47c}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности; ограничения на функции $f(\alpha)$, $f_n(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 1.8. *Если выполнены свойства* (1.46), (1.47), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{1.48}$$

то система (1.39), (1.40) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\, \Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{1.49}$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\}.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.49) в силу системы (1.39), (1.40) при условиях (1.46)–(1.48) дает

$$-f_n(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_n\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 1.9. *Если выполнены условия предложения* 1.8, *а также условия*

$$g_1(\beta_1) \equiv \ldots \equiv g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1) \tag{1.50}$$

и при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{1.51}$$

то система (1.39), (1.40) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_3(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\;\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{1.52}$$

где

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.52) в силу системы (1.39), (1.40) при условиях (1.50), (1.51) и условиях предложения 1.8 дает

$$-f_n(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Psi_1(\beta_1)-$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\}z_{n-1}f(\alpha)\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$

что и доказывает предложение. □

В дальнейшем было бы логично доказать аналогичное предложение и по условиям существования гладкого первого интеграла вида

$$\Phi_4(z_{n-3},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\;\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const},$$

получив предложение с номером 1.9+1 и т. д. Но мы по предположению индукции опустим некоторое конечное число таких шагов, изменив номер следующего предложения на лишь единицу, получив предложение 1.10. Итак, далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 1.10. *Если выполнены условия предложений* 1.8, 1.9, … *и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{1.53}$$

то система (1.39), (1.40) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_n(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}, \tag{1.54}$$

где

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\Gamma_{n-1}(b)db\right\},\quad i(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2}).$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.54) в силу системы (1.39), (1.40) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_n(\alpha)z_1z_n\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+$$
$$+z_1z_{n-1}f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+\ldots+$$

$$+ z_1 z_2 f(\alpha) g(\beta_1) \ldots r(\beta_{n-3}) \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \ldots \Psi_{n-3}(\beta_{n-3}) \times$$
$$\times \left[(-1)^n \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d \ln |i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}} \right] \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) + (-1)^{n+1} \frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}} \right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$, …, $\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}} = \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d \ln |i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}} \right] \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}),$$

что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 1.2. Если выполнена группа $n(n-1)/2+1$ дифференциальных равенств (1.42), а также $n-1$ групп условий (1.25), (1.28), …, (1.30), то выполнены равенства

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha), \quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1), \quad \ldots, \quad \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),$$
$$\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1), \quad \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2), \ \ldots, \ \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),$$

а значит в системе (1.39), (1.40) появляется независимая подсистема порядка $2n-1$, состоящая из первых $2n-1$ уравнений (уравнение для $\dot\beta_{n-1}$ отделяется):

$$\dot\alpha = z_n f_n(\alpha), \tag{1.55a}$$

$$\begin{aligned} \dot z_n = &-\frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma^\alpha_{11}(\alpha) z_{n-1}^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1) z_2^2 - \ldots - \\ &- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) z_1^2, \end{aligned} \tag{1.55b}$$

$$\begin{aligned} \dot z_{n-1} = &-f_n(\alpha) \Big[2\Gamma_1(\alpha) + D f_1(\alpha) \Big] z_{n-1} z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1) z_{n-2}^2 - \ldots - \\ &- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) z_1^2, \end{aligned} \tag{1.55c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\begin{aligned} \dot z_2 = &-f_n(\alpha) \Big[2\Gamma_1(\alpha) + D f_{n-2}(\alpha) \Big] z_2 z_n - f_1(\alpha) \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + D g_{n-3}(\beta_1) \Big] z_2 z_{n-1} - \ldots - \\ &- f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \ldots s_1(\beta_{n-4}) \Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + D r_1(\beta_{n-3}) \Big] z_2 z_3 - \\ &- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \ldots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) z_1^2, \end{aligned} \tag{1.55d}$$

$$\begin{aligned} \dot z_1 = &-f_n(\alpha) \Big[2\Gamma_1(\alpha) + D f_{n-1}(\alpha) \Big] z_1 z_n - f_1(\alpha) \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + D g_{n-2}(\beta_1) \Big] z_1 z_{n-1} - \\ &- f_2(\alpha) g_1(\beta_1) \Big[2\Gamma_3(\beta_2) + D h_{n-3}(\beta_2) \Big] z_1 z_{n-2} - \ldots - \\ &- f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \ldots r_1(\beta_{n-3}) \Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + D i_1(\beta_{n-2}) \Big] z_1 z_2, \end{aligned} \tag{1.55e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1} f_1(\alpha), \tag{1.55f}$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \tag{1.55g}$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \tag{1.55h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{1.55i}$$

$$\dot{\beta}_{n-2} = z_2 f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{1.55j}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{1.56}$$

Предложение 1.11. *Если выполнены условия предложений* 1.8, 1.9, …, 1.10*, то система* (1.55)*,* (1.56) *имеет первый интеграл*

$$\Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\, db = C_{n+1} = \mathrm{const}, \tag{1.57}$$

где после взятия интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно формально подставить левые части соответствующих первых интегралов.

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.8, 1.9, …, 1.10, то, значит, система (1.55), (1.56) обладает первыми интегралами (1.49), (1.52), …, (1.54), количество которых равно $n-1$. Нам понадобятся лишь два последних первых интеграла.

Рассмотрим два уровня C_{n-1} и C_n соответствующих первых интегралов. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_n}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - C_n^2}}. \tag{1.58}$$

Угол β_{n-1} будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (1.55), (1.56):

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{z_1}{z_2} i(\beta_{n-2}).$$

Используя в этом уравнении равенство (1.58), получим требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.2, …, 1.6 является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Если выполнены условия предложений* 1.7, …, 1.10*, то система* (1.55)*,* (1.56) *обладает полным набором независимых первых интегралов вида* (1.43)*,* (1.49)*,* (1.52)*, …,* (1.54)*,* (1.57)*, состоящим из $n+1$ первых интегралов.*

Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показан ниже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
2. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
3. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
6. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.

8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
11. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы теории колебаний. — М.: Наука, 1988.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.

35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле// Докл. РАН. — 2015. — *460*, № 2. — С. 165–169.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
54. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
55. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
56. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2016. — *470*, № 3. — С. 288–292.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.

61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
63. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
70. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
71. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
72. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
73. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.
74. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
75. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
76. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 107–126
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-107-126

УДК 512.7

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ, КВАНТОВАНИЕ И ЗАДАЧИ ВОКРУГ ГИПОТЕЗЫ ЯКОБИАНА. II. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КВАНТОВАНИЯ ТЕОРЕМЫ БЕРГМАНА О ЦЕНТРАЛИЗАТОРЕ

© 2022 г. **А. М. ЕЛИШЕВ, А. Я. КАНЕЛЬ-БЕЛОВ, Ф. РАЗАВИНИЯ, Ц.-Т. ЮЙ, В. ЧЖАН**

Посвящается памяти Евгения Соломоновича Голода

Аннотация. Целью данного обзора является систематизация результатов, касающихся квантового подхода к некоторым классическим аспектам некоммутативных алгебр, особенно к гипотезе о якобиане. Работа начинается с квантования доказательства теоремы Бергмана о централизации, затем обсуждаются автоморфизмы автоморфизмов INd-схем и вопросы аппроксимации. Последняя глава посвящена связи между теоремами типа Бернсайда теории PI и гипотезой Якоби (подход Ягжева). В данном выпуске публикуется вторая часть работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *213*. — С. 110–144. Продолжение будет опубликовано в следующих выпусках.

***Ключевые слова*:** автоморфизм, квантование, гипотеза о Якобиане.

POLYNOMIAL AUTOMORPHISMS, QUANTIZATION, AND JACOBIAN CONJECTURE RELATED PROBLEMS. II. QUANTIZATION PROOF OF BERGMAN'S CENTRALIZER THEOREM

© 2022 **A. M. ELISHEV, A. Ya. KANEL-BELOV, F. RAZAVINIA, J.-T. YU, W. ZHANG**

Abstract. The purpose of this review is the collection and systematization of results concerning the quantization approach to the some classical aspects of non-commutative algebras, especially to the Jacobian conjecture. We start with quantization proof of Bergman centralizing theorem, then discourse authomorphisms of INd-schemes authomorphisms, then go to aproximation issues. Last chapter dedicated to relations between PI-theory Burnside type theorems and Jacobian Conjecture (Jagzev approach). This issue contains the second part of the work. The first part is: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **213** (2022), pp. 110–144. Continuation will be published in future issues.

***Keywords and phrases*:** automorphism, quantization, Jacobian conjecture.

***AMS Subject Classification*:** 14R10, 18G85

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00177).

CONTENTS

Chapter 2

QUANTIZATION PROOF OF BERGMAN'S CENTRALIZER THEOREM

We first give a brief summary of the background of two well-known centralizer theorems in the power series ring and in the free associative algebra, i.e., Cohn's centralizer theorem and Bergman's centralizer theorem.

2.1. Centralizer Theorems

This section is a relatively independent part of the paper, and only sketches proofs with classic tools, while the following sections will focus on the new proof of Bergman's centralizer theorem.

Throughout this section, X is a finite set of noncommutative variables, and k is a field. Let X^* denote the free monoid generated by X. Let $k\langle X\rangle$ and $k\langle X\rangle$ denote the k-algebra of formal series and noncommutative polynomials (i.e., the free associative algebra over k) in X, respectively. Both elements of $k\langle\langle X\rangle\rangle$ and $k\langle X\rangle$ have the form

$$a = \sum_{\omega\in X^*} a_\omega \omega,$$

where $a_\omega \in k$ is the coefficient of the word w in a, but they have different details inside the above formula. An element of $k\langle X\rangle$ is only a finite sum of words, while there are infinitely many terms of the sum for an element in $k\langle\langle X\rangle\rangle$. The multiplication of elements in $k\langle\langle X\rangle\rangle$ is the concatenation of words and normal multiplication of coefficients. We can only combine the coefficients which have the same corresponding words for addition. The *length* $|\omega|$ of a word $\omega \in X^*$ is the number of letters inside ω.

Now we can define the valuation

$$\nu : k\langle\langle X\rangle\rangle \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

as follows: $\nu(0) = \infty$ and if $a = \sum\limits_{\omega\in X^*} a_\omega\omega \neq 0$, then $\nu(a) = \min\{|\omega| : a_\omega \neq 0\}$. Note that if ω is constant, then $\nu(\omega) = 0$ and $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$ for all a, b in $k\langle\langle X\rangle\rangle$.

For the words valuation, there is an easy but quite useful lemma [178].

Lemma 2.1.1 (Levi's Lemma). *Let $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \in X^*$ be nonzero with $|\omega_2| \geqslant |\omega_4|$. If $\omega_1\omega_2 = \omega_3\omega_4$, then $\omega_2 = \omega\omega_4$ for some $\omega \in X^*$.*

The proof is trivial by backward induction on $|\omega_2|$ since ω_2 has the same last letter as ω_4. Next lemma extends Levi's lemma to $k\langle\langle X\rangle\rangle$, and we post the result as follows.

Lemma 2.1.2 (see [139, Lemma 9.1.2]). *Let $a, b, c, d \in k\langle\langle X\rangle\rangle$ be nonzero. If $\nu(a) \geqslant \nu(c)$ and $ab = cd$, then $a = cq$ for some $q \in k\langle\langle X\rangle\rangle$.*

Proof. We can fix a word u which appears in b and $|u| = \nu(b)$. Suppose v is any nonzero word appearing in d, then we have

$$|v| \geqslant \nu(d) = \nu(a) + \nu(b) - \nu(c) \geqslant \nu(b) = |u|. \tag{2.1.1}$$

Let w be any word in X^*. The coefficient of wu in ab is $\sum\limits_{rs=wu} a_r b_s$, where a_r and b_s are the coefficients of the words r, s which appear in a, b respectively. Similarly, the coefficient of wu in cd is $\sum\limits_{yz=wu} c_y d_z$. Since $ab = cd$, we have

$$\sum_{rs=wu} a_r b_s = \sum_{yz=wu} c_y d_z. \tag{2.1.2}$$

By the inequality 2.1.1, we have $|z| \geqslant |u|$, and $|s| \geqslant |u|$ by the definition of u. Thus $rs = wu$ and $yz = wu$ imply $s = s_1 u$ and $z = z_1 u$ for some $s_1, z_1 \in X^*$, by Levi's lemma. Hence $rs_1 = yz_1 = w$ and we can rewrite the formula 2.1.2 as

$$\sum_{rs_1=w} a_r b_{s_1 u} = \sum_{yz_1=w} c_y d_{z_1 u}. \tag{2.1.3}$$

Let

$$b' = \sum_{s_1 \in X^*} b_{s_1 u} s_1, \quad d' = \sum_{z_1 \in X^*} b_{z_1 u} z_1.$$

Then the equation gives $ab' = cd'$. The constant term of b' is $b_u \neq 0$ and hence b' is invertible in $k\langle\langle X\rangle\rangle$. Hence if we let $q = d'b'^{-1}$, then $a = cq$. □

2.1.1. Cohn's centralizer theorem. With the help of the preceding lemmas, we could post and prove this well-known centralizer theorem of k-algebra of formal series by P. M. Cohn.

Theorem 2.1.3 (Cohn's Centralizer Theorem, [62]). *If $a \in k\langle\langle X\rangle\rangle$ is not a constant, then the centralizer $C(a; k\langle\langle X\rangle\rangle) \cong k[\![x]\!]$, where $k[\![x]\!]$ is the algebra of formal power series in the variable x.*

Proof. Let $C := C(a; k\langle\langle X\rangle\rangle)$. Let a_0 be the constant term of a, then it is clear that $C = C(a - a_0; k\langle\langle X\rangle\rangle)$. So we may assume that the constant term of a is zero. Thus we have a nonempty set $A = \{c \in C : \nu(c) > 0\}$ because $a \in C$ and so there exists $b \in A$ such that $\nu(b)$ is minimal. An easy observation is that $k[\![b]\!] \cong k[\![x]\!]$. Because suppose $\sum_{i \geqslant m} \beta_i b^i = 0, \beta_i \in k, \beta_m \neq 0$, then we must have $\infty = \nu(\sum_{i\geqslant m} \beta_i b^i) = \nu(b^m) = m\nu(b)$, which is absurd. So we just need to show that $C = k[\![b]\!]$. Assume that an element $c \in C$ is not constant. Our first claim is that there exist $\beta_i \in k$ such that

$$\nu(c - \sum_{i=0}^{n} \beta_i b^i) \geqslant (n+1)\nu(b). \tag{2.1.4}$$

The proof is by induction on n. let β_0 be the constant term of c. Then $c - \beta_0 \in A$ and thus $\nu(c - \beta_0) \geqslant \nu(b)$, by the minimality of b. This proves the $n = 0$ case for the inequality 2.1.4.

Now we need the second claim to complete this induction proof. Our second claim is following: suppose that the constant term of an element $a \in k\langle\langle X\rangle\rangle$ is zero and $b, c \in C \setminus \{0\}$. If $\nu(c) \geqslant \nu(b)$, then $c = bd$ for some $d \in C$. In fact, since the constant term of an element $a \in k\langle\langle X\rangle\rangle$ is zero we have $\nu(a) \geqslant 1$. Thus for n large enough, we have $\nu(a^n) = n\nu(a) \geqslant \nu(c)$. we also have $a^n c = ca^n$ because $c \in C$. Thus, by lemma 2.1.2, $a^n = cq$ for some $q \in k\langle\langle X\rangle\rangle$. Hence, $cqb = a^n b = ba^n$ and since $\nu(c) \geqslant \nu(b)$, we have $c = bd$, for some $d \in k\langle\langle X\rangle\rangle$, by lemma 2.1.2. Finally,

$$bad = abd = ac = ca = bda,$$

which gives $ad = da$, i.e. $d \in C$.

Now let us continue to prove the first claim. Suppose we have found $\beta_0, \dots, \beta_n \in k$ such that $\nu(c - \sum_{i=0}^n \beta_i b^i) \geqslant (n+1)\nu(b)$. Then since $(n+1)\nu(b) = \nu(b^{n+1})$, we have $c - \sum_{i=0}^n \beta_i b^i = b^{n+1} d$ for some $d \in C$, by the second claim we proved above. If d is a constant, we are done because then $c \in k[b] \subset k[\![b]\!]$. Otherwise, let β_{n+1} be the constant term of d. Then $d - \beta_{n+1} \in A$ and hence

$\nu(d-\beta_{n+1}) > \nu(b)$ by the minimality of b. Therefore, by the first claim, $d-\beta_{n+1} = bd'$ for some $d' \in C$. Hence

$$c - \sum_{i=0}^{n} \beta_i b^i = b^{n+1}d = b^{n+1}(bd' + \beta_{n+1}) = b^{n+2}d' + \beta_{n+1}b^{n+1},$$

which gives $c - \sum_{i=0}^{n+1} \beta_i b^i = b^{n+2}d'$. Hence

$$\nu(c - \sum_{i=0}^{n+1} \beta_i b^i) = \nu(b^{n+2}d') = (n+2)\nu(b) + \nu(d') \geqslant (n+2)\nu(b).$$

This completes the induction, then we are done because $\nu(c - \sum_{i\geqslant 0} \beta_i b^i) = \infty$ and so $c = \sum_{i\geqslant 0} \beta_i b^i \in k[\![b]\!]$. $\square$

2.1.2. Bergman's centralizer theorem. Now since $k\langle X\rangle \subset K\langle\langle X\rangle\rangle$, it follows from the above theorem that if $a \in k\langle X\rangle$ is not constant, then $C(a; k\langle X\rangle)$ is commutative because $C(a; k\langle\langle X\rangle\rangle)$ is commutative. The next theorem is our main goal which shows that there is a similar result for $C(a; k\langle X\rangle)$.

Theorem 2.1.4 (Bergman's Centralizer Theorem, [45])**.** *If $a \in k\langle X\rangle$ is not constant, then the centralizer $C(a; k\langle X\rangle) \cong k[x]$, where $k[x]$ is the polynomial algebra in one variable x.*

We will not fully recover the original proof of Bergman's centralizer theorem since this is not our main idea. However, we would take some necessary result in his original proof [45] which helps us to finish the proof of that the centralizer is integrally closed. This will be shown in the Subsection 2.4.3.

First of all, we need to emphasize that the proof of Cohn's centralizer theorem is included. Here is a sketch of the proof.

For simplicity, we denote by $C := C(a; k\langle X\rangle)$ the centralizer of a which from now on is not a constant. Recall that the centralizer C is also commutative. Moreover, C is finitely generated, as module over $k[a]$ or as algebra. Then since $k\langle X\rangle$ is a 2-fir (free ideal rings, cf. Lemma 1.5 in [45]), and the center of a 2-fir is integrally closed, we obtain that the centralizer of a is integrally closed in its field of fractions after using the lifting to $k\langle X\rangle \otimes k(x)$ (where x is a free variable). Then our aim is to show that C is a polynomial ring over k. In order to get this fact we shall study homomorphisms of C into polynomial rings. By using "infinite" words, we obtained an embedding from C into polynomial rings by lexicographically ordered semigroup algebras, which completes this sketch of the proof. Indeed, any subalgebra not equal to k of a polynomial algebra $k[x]$ that is integrally closed in its own field of fractions is of form $k[y]$ (by Lüroth's theorem).

We conclude this section by pointing out that the method of "infinite" words inspires us to find a possibility to prove Bergman's centralizer theorem by deformation quantization. In the next section, we will establish this new approach of quantization for generic matrices.

2.2. Reduction to Generic Matrix

In this section, we will establish an important theorem which gives a relation of commutative subalgebras in the free associative algebra and the algebra of generic matrices. Let $k\langle X\rangle$ be the free associative algebra over a field k generated by a finite set $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$ of s indeterminates, and let $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$ be the algebra of $n \times n$ generic matrices generated by the matrices X_ν. The canonical homomorphism $\pi : k\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \to k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$ shows in last section.

We claim that if we have a commutative subalgebra of rank two in the free associative algebra $k\langle X\rangle$, then we also have a commutative subalgebra of rank two if we consider a reduction to generic matrices of big enough order n. We also call two elements of a free algebra *algebraically independent* if the subalgebra generated by these two elements is a free algebra of rank two. Otherwise we will call them *algebraically dependent*.

In other words, if we have a commutative subalgebra $k[f,g]$ of rank two in the free associative algebra, then we have to prove that its projection to generic matrices of some order also has rank two. i.e. $\pi(f), \pi(g)$ do not have any relations.

We need following theorem:

Theorem 2.2.1. *Let $k\langle X\rangle$ be the free associative algebra over a field k generated by a finite set X of indeterminates. If $k\langle X\rangle$ has a commutative subalgebra with two algebraically independent generators $f, g \in k\langle X\rangle$, then the subalgebra of n by n generic matrices generated by reduction of f and g in $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$ also has rank two for big enough n.*

Proof. Assume $k[f,g]$ be a commutative subalgebra generated by $f, g \in k\langle X\rangle \setminus k$ with rank two. We denote $\bar{f}, \bar{g} \in k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$ to be the generic matrices of f and g respectively after reduction (**??**) of algebra of generic matrices with $n \times n$. The rank of $k\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle$ must be $\leqslant 2$ (i.e. it must be 1 or 2). Suppose the rank is 1, then for any two elements $a, b \in k\langle f, g\rangle$, there exists a minimal polynomial $P(x,y) \in k[x,y]$ (x, y are two free variables) with degree m such that $P(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ because the algebra of generic matrices is a domain by Theorem **??**. On the other hand, by Amitsur-Levitzki Theorem **??**, there exists no polynomial with degree less than $2n$, such that $P(\bar{a}, \bar{b}) = 0$. This leads to be a contradiction if we choose $n > [m/2]$. □

Recall from the section 2.1.2 that the centralizer $C := C(a; k\langle X\rangle)$ of $a \in k\langle X\rangle \setminus k$ is a commutative subalgebra of $k\langle X\rangle$, so from the above theorem, we conclude that if the centralizer is a subalgebra in $k\langle X\rangle$ of rank two then the π-image subalgebra of C has also rank two.

However, we prefer discussing this general case of subalgebras instead of just consider a centralizer subalgebra. Furthermore, we want to prove that there is no commutative subalgebras of the free associative algebra $k\langle X\rangle$ of rank greater than or equal to two.

2.3. Quantization Proof of Rank One

Up to our knowledge, there is no new proofs has been appeared after Bergman [45] for almost fifty years. We are using a method of deformation quantization presented by M. Kontsevich to give an alternative proof of Bergman's centralizer theorem. In this section [120], we got that the centralizer is a commutative domain of transcendence degree one.

Let $k\langle X\rangle$ be the free associative algebra over a field k generated by s free variables $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$. Now, we concentrate on our proof that there is no commutative subalgebras of rank greater than or equal to two. From the homomorphism $\pi : k\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \to k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$ and Theorem 2.2.1, we are moving our goal from the elements of $k\langle X\rangle$ to the algebra of generic matrices $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$, and we consider the quantization of this algebra and its subalgebras.

Let A, B be two commuting generic matrices in $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$ which are algebraically independent, i.e. $\operatorname{rank} k\langle A, B\rangle = 2$. We have the following theorem.

Theorem 2.3.1. *Let A, B be two commuting generic matrices in $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$ with* $\operatorname{rank} k\langle A, B\rangle = 2$*, and let $\hat{A}$ and $\hat{B}$ be quantized images (by sending multiplications to star products by means of Kontsevich's formal quantization) of A and B respectively by considering lifting A and B in $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle[\![\mathfrak{h}]\!]$. Then $\hat{A}$ and $\hat{B}$ do not commute. Moreover,*

$$\frac{1}{\mathfrak{h}}[\hat{A}, \hat{B}]_\star \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathfrak{h}}\{\lambda_1, \mu_1\} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\mathfrak{h}}\{\lambda_n, \mu_n\} \end{pmatrix} \mod \mathfrak{h} \tag{2.3.1}$$

where λ_i and μ_i are eigenvalues(weights) of A and B respectively.

To prove this theorem, we need some preparations. It is not easy to directly compute such two generic matrices with order n. However, if we can diagonalize those matrices, then computation will be easier. So first of all, we should show the possibilities. Without loss of generality, we may assume that one of the generic matrices B is diagonal if we have a proper choice of basis of the algebra of generic matrices. Now consider the other generic matrix A which we mentioned above.

Remark 2.3.2. *The generic matrix A may not be diagonalizable over $k[x_{ij}^{(\nu)}]$, but it can be diagonalized over some integral extension of the algebra $k[x_{ij}^{(\nu)}]$ with $i, j = 1, \ldots, n; \nu = 1, \ldots, s$.*

Remark 2.3.3. *Any non-scalar element A of the algebra of generic matrices must have distinct eigenvalues. In fact, by Amitsur's Theorem* **??**, *namely, the algebra of generic matrices is an domain, if the minimal polynomial is not a central polynomial, then the algebra can be embedded to a skew field. Hence, the minimal polynomial is irreducible, and the eigenvalues are pairwise different.*

Lemma 2.3.4. *Let $\hat{A} \equiv A_0 + \mathfrak{h}A_1 (\operatorname{mod} \mathfrak{h}^2)$ be the quantized image of a generic matrix $A \in k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$, where A_0 is diagonal with distinct eigenvalues. Then, the quantized images $\hat{A}$ can be diagonalized over some finite extension of $k[x_{ij}^{(\nu)}]$.*

Proof. Without loss of generality, suppose A_0 is a diagonal generic matrix with distinct eigenvalues. We want to show that there exists an invertible generic matrix P, such that PAP^{-1} is diagonal. Now we consider their images on $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle[\![\mathfrak{h}]\!]$, we may assume $\hat{P} = I + \mathfrak{h}T$ and the conjugation inverse $\hat{P}^{-1} = I - \mathfrak{h}T \mod \mathfrak{h}^2$ (where I is the identity matrix). Then we have

$$(I + \mathfrak{h}T)(A_0 + \mathfrak{h}A_1)(I - \mathfrak{h}T) = A_0 + \mathfrak{h}([T, A_0] + A_1) \mod \mathfrak{h}^2,$$

and we need to solve the equation $[T, A_0] = -A_1$.

This is clear since A_0 is diagonal. Let $A_0 = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $T = (t_{ij})_{n\times n}$ and $A_1 = (a_{ij})_{n\times n}$, then we have $[T, A_0] = ((\lambda_i - \lambda_j)\, t_{ij})_{n\times n}$. Hence,

$$T = (t_{ij})_{n\times n} = \left(-\frac{a_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}\right)_{n\times n}.$$

So far, we have determined the $\mathfrak{h}$ term of the matrix $\hat{A}$. Hence, we may assume $\hat{A} \equiv A_0 + \mathfrak{h}^2 A_2 \mod \mathfrak{h}^3$, then we continue to cancel the $\mathfrak{h}^2$ term. Let $\hat{P}_2 = I + \mathfrak{h}^2 T_2$, and the conjugation inverse $\hat{P}_2^{-1} = I - \mathfrak{h}^2 T_2$. Then, we have

$$(I + \mathfrak{h}^2 T_2)(A_0 + \mathfrak{h}^2 A_2)(I - \mathfrak{h}^2 T_2) = A_0 + \mathfrak{h}^2([T_2, A_0] + A_2) \mod \mathfrak{h}^3,$$

Hence, T_2 is determined by equation $[T_2, A_0] = -A_2 = (a_{ij}^{(2)})_{n\times n}$. Similar computation give all entries of T_2, namely

$$T_2 = \left(-\frac{a_{ij}^{(2)}}{\lambda_i - \lambda_j}\right)_{n\times n}.$$

Continue this process to cancel the term of $\mathfrak{h}^3$ etc., we obtain equations $[T_i, A_0] = -A_i$ for $i = 3, 4, 5 \ldots$. This leads to the result that A could be diagonalized over the extension $k[x_{ij}^{(\nu)}][\frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}]$. □

Now A, B are two algebraically independent but commuting generic matrices in $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$. From previous discussion, we may assume A and B can be both diagonalized over an integral extension of $k[x_{ij}^{(\nu)}]$. Consider result of diagonalization in $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle[\![\mathfrak{h}]\!]$ and then we compute the quantization commutator of two quantized generic matrices over $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle[\![\mathfrak{h}]\!]$. Now we can complete the proof of Theorem 2.3.1.

Proof of Theorem 2.3.1. We have shown that A, B can be both diagonalized over some finite extension of $k[x_{ij}^{(\nu)}]$, then consider result of diagonalization with the quantization form in $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle[\![\mathfrak{h}]\!]$, i.e., we can write them into specific forms modulo $\mathfrak{h}^2$ as follows:

$$\hat{A} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \mathfrak{h} \begin{pmatrix} \delta_1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & \delta_n \end{pmatrix} \mod \mathfrak{h}^2$$

$$\hat{B} \equiv \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} + \mathfrak{h} \begin{pmatrix} \nu_1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & \nu_n \end{pmatrix} \mod \mathfrak{h}^2.$$

Then we can compute the quantization commutator,

$$[\hat{A}, \hat{B}]_\star := \hat{A} \star \hat{B} - \hat{B} \star \hat{A} \equiv \begin{pmatrix} \{\lambda_1, \mu_1\} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \{\lambda_n, \mu_n\} \end{pmatrix} + \mathfrak{h}\vec{\lambda} \star \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} - \mathfrak{h} \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \star \vec{\lambda}$$

$$+ \mathfrak{h} \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \star \vec{\mu} - \mathfrak{h}\vec{\mu} \star \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} + \mathfrak{h}^2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \right\} \mod \mathfrak{h}^2.$$

Note that all terms have empty diagonals except the first term, and hence the quantization commutator $[\hat{A}, \hat{B}]_\star \neq 0 \mod \mathfrak{h}^2$, which completes the proof of the theorem by multiplying $\frac{1}{\mathfrak{h}}$ on two sides of above equation. □

Remark 2.3.5. *Suppose λ_i and δ_i, $i = 1, \ldots, n$ are algebraically dependent. Then there are polynomials P_i in two variables such that $P_i(\lambda_i, \delta_i) = 0$. Put*

$$P(x, y) = \prod_{i=1}^{n} P_i(x, y).$$

Then $P(A, B)$ is diagonal matrix having zeros on the main diagonal, i.e. $P(A, B) = 0$. It means that if $\operatorname{rank} k\langle A, B\rangle = 2$ then λ_i, δ_i are algebraically independent for some i.

Let us conclude this section by pointing out the whole process of this proof. Recall that we have the free associative algebra $k\langle X\rangle$ over a field k, if we have a commutative subalgebra of rank two generated by $a, b \in k\langle X\rangle$, then we may have a commutative subalgebra of the algebra of generic matrices $k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$ of rank two generated by A, B (they are images of a homomorphism $\pi : k\langle X\rangle \to k\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$). Consider the element $0 = [a, b]$ of the free associative algebra $k\langle X\rangle$, homomorphism π and canonical quantization homomorphism q sending multiplications to star products, we yield that

$$0 = q\pi([a, b]) = q[A, B] = [\hat{A}, \hat{B}]_\star.$$

This leads a contradiction to Theorem 2.3.1 which shows that $[\hat{A}, \hat{B}]_\star \neq 0$. So we obtain the following result.

Theorem 2.3.6. *There is no commutative subalgebras of rank $\geqslant 2$ in the free associative algebra $k\langle X\rangle$.* □

The centralizer ring is commutative from our discussion in section 2.1.2, and from the above theorem, it is of rank 1. So it is a commutative subalgebra with form $k[x]$ for some $x \in k\langle X\rangle \setminus k$. We will show it implies Bergman's centralizer theorem 2.1.4 in the next section.

2.4. Centralizers Are Integrally Closed

We have shown that the centralizer C is a commutative domain of transcendence degree one. For us, it was the most interesting part of the proof of the Bergman's centralizer theorem. However, we have to prove the fact that C is integrally closed in order to complete the proof of Bergman's Centralizer Theorem. In our this work [121], our proofs are based on the characteristic free instead of very rich and advanced P. Cohn and G. Bergman's noncommutative divisibility theorem, we use generic matrices reduction, the invariant theory of characteristic zero by C. Procesi [170] and the invariant theory of positive characteristic by A. N. Zubkov [235, 236] and S. Donkin [77, 78].

2.4.1. Invariant theory of generic matrices. We will try to review some useful facts in the invariant theory of generic matrices.

Consider the algebra $\mathbb{A}_{n,s}$ of s-generated generic matrices of order n over the ground field k. Let $a_\ell = (a_{ij}^\ell), 1 \leqslant i, j \leqslant n, 1 \leqslant \ell \leqslant s$ be its generators. Let $R = k[a_{ij}^\ell]$ be the ring of entries coefficients. Consider an action of matrices $M_n(k)$ on matrices in R by conjugation, namely $\varphi_B : B \mapsto MBM^{-1}$. It is well-known (refer to [169,170,235]) that the invariant function on this matrix can be expressed as a polynomial over traces $\operatorname{tr}(a_{i1}, \ldots, a_{is})$. Any invariant on $\mathbb{A}_{n,s}$ is a polynomial of $\operatorname{tr}(a_{i1}, \ldots, a_{in})$. Note that the conjugation on B induces an automorphism φ_B of the ring R. Namely, $M(a_{ij})^\ell M^{-1} = (a'^{\ell}_{ij})$, and $\varphi_B(M)$ of R induces automorphism on $M_n(R)$. And for any $x \in \mathbb{A}_{n,s}$, we have

$$\varphi_B(x) = MxM^{-1} = \operatorname{Ad}_M(x).$$

Consider $\varphi_B(x) = \operatorname{Ad}_M^{-1} \varphi_M(x)$. Then any element of the algebra of generic matrices is invariant under $\varphi_M(x)$.

When dealing with matrices in characteristic 0, it is useful to think that they form an algebra with a further unary operation the *trace*, $x \mapsto tr(x)$. One can formalize this as follows [60]:

Definition 2.4.1. *An algebra with trace is an algebra equipped with an additional trace structure, that is a linear map* $\operatorname{tr} : R \to R$ *satisfying the following properties*

$$\operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba), a \operatorname{tr}(b) = \operatorname{tr}(b)a, \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(a)b) = \operatorname{tr}(a)\operatorname{tr}(b) \quad \textit{for all } a, b \in R.$$

There is a well-known fact as follows.

Theorem 2.4.2. *The algebra of generic matrices with trace is an algebra of concomitants, i.e. subalgebra of $M_n(R)$ is an invariant under the action $\varphi_M(x)$.*

This theorem was first proved by C. Procesi in [170] for the ground field k of characteristic zero. If k is a field of positive characteristic, we have to use not only traces, but also characteristic polynomials and their linearization (refer to [77, 78]). Relations between these invariants are discovered by C. Procesi [169,170] for characteristic zero and A. N. Zubkov [235,236] for characteristic p. C. de Concini and C. Procesi also generalized a characteristic free approach to invariant theory [71].

Let us denote by $k_T\{X\}$ the algebra of generic matrices with traces. After above discussions, we have the following proposition.

Proposition 2.4.3. *Let n be a prime number, then the centralizer of $A \in k_T\{X\}$ is rationally closed in $k_T\{X\}$ and integrally closed in $k_T\{X\}$.*

2.4.2. Centralizers are integrally closed. Let $k\langle X\rangle$ be the free associative algebra as noted. Here we will prove the following theorem.

Theorem 2.4.4. *The centralizer C of non-trivial element f in the free associative algebra is integrally closed.*

Let $g, P, Q \in C := C(f; F_z)$, and suppose $gQ^m = P^m$ for some positive integer m, i.e. in localization $g = \frac{P^m}{Q^m}$. Then there exists $h \in C$, such that $h^m = g$. This means that the centralizer C is integral closed.

Consider the homomorphism π from the free associative algebra F_s to the algebra of generic matrices with traces $k_T\{X\}$. Let us denote by $\bar{g}$ the image $\pi(g)$. Then we have following proposition.

Proposition 2.4.5. *Consider the homomorphism $\pi : F_s \to k_T\{X\}$. Let the order of matrices be a prime number $p \gg 0$. $\overline{g} = \pi(g), \overline{P} = \pi(P)$ and $\overline{Q} = \pi(Q)$. Then there exists $\overline{h} \in k_T\{X\}$ such that*

(1) $\bar{h}^m = \overline{g}$;
(2) $\bar{h} = \frac{\overline{P}}{\overline{Q}}$;
(3) $\bar{h} \in \overline{C}$, *where* $\overline{C} = \pi(C)$.

Proof. (1) and (2) follows from Proposition 2.4.3 that the algebra of generic matrices with traces of form is integral closed. Prove (3). Note that all eigenvalues of $\bar{g}$ are pairwise different due to Proposition **??**. So is $\bar{f}$. Hence $\bar{f}, \bar{g}$ are diagonalizable and $\bar{h}$ can be diagonalized in the same eigenvectors basis. Hence, by Proposition **??**, $\bar{h}$ commutes with $\bar{f}$, i.e., $\bar{h} \in \overline{C}$. □

Now we have to prove that $\bar{h}$ in fact belongs to the algebra of generic matrices without trace. We use the local isomorphism to get rid of traces.

Definition 2.4.6 (Local isomorphism)**.** *Let $\mathbb{A}$ be an algebra with generators $a_1, \dots, a_s$ homogeneous respect this set of generators, and let $\mathbb{A}'$ be an algebra with generators $a_1', \dots, a_s'$ homogeneous respect this set of generators. We say that $\mathbb{A}$ and $\mathbb{A}'$ are locally L-isomorphic if there exist a linear map $\varphi : a_i \to a_i'$ on the space of monomials of degree $\leqslant 2L$, and in this case for any two elements $b_1, b_2 \in A$ with highest term of degree $\leqslant L$, we have*

$$b_i = \sum_j M_{ij}(a_1, \dots, a_s), b_i' = \sum_j M_{ij}(a_1', \dots, a_s'),$$

where M_{ij} are monomials, and for $b = b_1 \cdot b_2, b' = b_1' \cdot b_2'$, we have $\varphi(b) = b'$.

We need following lemmas, and propositions:

Lemma 2.4.7 (Local isomorphism lemma)**.** *For any L, if s is big enough prime, then the algebra of generic upper triangular matrices $\mathbb{U}_s$ is locally L-isomorphic to the free associative algebra. Also reduction on the algebra of generic matrices of degree n provides an isomorphism up to degree $\leqslant 2s$.*

Let us remind a well-known and useful fact.

Proposition 2.4.8. *The trace of every element in $\mathbb{U}_s$ of any characteristic is zero.*

In fact, we also proved

Proposition 2.4.9. *If $n > n(L)$, then the algebra of generic matrices (without traces) is L-locally integrally closed.*

Lemma 2.4.10. *Consider the projection $\overline{\pi}$ of the algebra of generic matrices with trace to $\mathbb{U}_s$, sending all traces to zero. Then we have*

$$\overline{\pi}(\overline{h})^m = \overline{\pi}(g).$$

Proof of Theorem 2.4.4. Let p be a big enough prime number. For example, we can set $p \geqslant 2(\deg(f) + \deg(g) + \deg(P) + \deg(Q))$. Because space of $k_T\{X\}$ of degree $\leqslant p$ is isomorphic to space of free associative algebra. We have element h corresponding to $\bar{h}$ up to this isomorphism. Due to local isomorphism, $h^m = g$, $h = P/Q$, i.e. $hQ = P$. Also we have h commutes with f, i.e. $h \in C$. □

2.4.3. Completion of the proof.

From last two subsections, we have the following proposition:

Proposition 2.4.11. *Let p be a big enough prime number, and $k\{X\}$ the algebra of generic matrices of order p. For any $A \in k\{X\}$, the centralizer of A is rationally closed and integrally closed in $k\{X\}$ over the center of $k\{X\}$.*

In our previous paper [120], we establish that the centralizer in the algebra of generic matrices is a commutative ring of transcendence degree one. According to Proposition 2.4.11, $C(A)$ is rationally closed and integrally closed in $k\{X\}$. If p is big enough, then $k\{X\}$ is L-locally integrally closed.

Now we need one fact from the Bergman's paper [45]. Let X be a totally ordered set, W be the free semigroup with identity 1 on set X. We have the following lemma.

Lemma 2.4.12 (Bergman)**.** *Let $u, v \in W \setminus \{1\}$. If $u^\infty > v^\infty$, then we have*

$$u^\infty > (uv)^\infty > (vu)^\infty > v^\infty.$$

Proof (*Bergman*). It suffices to show that the whole inequality is implied by $(uv)^\infty > (vu)^\infty$. Suppose $(uv)^\infty > (vu)^\infty$, then we have following

$$(vu)^\infty = v(uv)^\infty > v(vu)^\infty = v^2(uv)^\infty > v^2(vu)^\infty = \cdots v^\infty.$$

Similarly, we obtain $(uv)^\infty < u^\infty$. $\square$

Similarly, we also have inequalities with "$\geqslant$" replaced by "$=$" or "$\leqslant$."

Remark 2.4.13. *Similar constructions are used in [113] for Burnside type problems or the height theorem of Shirshov.*

Now let R be the semigroup algebra on W over field k, i.e. $R = F_s$ is the free associative algebra. Consider $z \in \overline{W}$ be an infinite period word, and we denote $R_{(z)}$ be the k-subspace of R generated by words u such that $u = 1$ or $u^\infty \leqslant z$. Let $I_{(z)}$ be the k-subspace spanned by words u such that $u \neq 1$ and $u^\infty < z$. Using Lemma 2.4.12, we can get that $R_{(z)}$ is a subring of R and I_z is a two-sided ideal in $R_{(z)}$. It follows that $R_{(z)}/I_{(z)}$ will be isomorphic to a polynomial ring $k[v]$.

Proposition 2.4.14 (Bergman). *If $C \neq k$ is a finitely generated subalgebra of F_s, then there is a homomorphism f of C in to polynomial algebra over k in one variable, such that $f(C) \neq k$.*

Proof (*Bergman*). First let us totally order X. Let G be a finite set of generators for C and let z be maximum over all monomials $u \neq 1$ with nonzero coefficient in elements of G of u^∞. Then we have $G \subseteq R_{(z)}$ and hence $C \subseteq R_{(z)}$, and the quotient map $f : R_{(z)} \to R_{(z)}/I_{(z)} \cong k[v]$ is nontrivial on C. $\square$

Now we can complete the proof of Bergman's centralizer theorem.

Proof. Consider homomorphism from the Proposition 2.4.14. Because C is centralizer of F_s, it has transcendence degree 1. Consider homomorphism ρ send C to the ring of polynomial. The homomorphism has kernel zero, otherwise $\rho(C)$ will have smaller transcendence degree. Note that C is integrally closed and finitely generated, hence it can be embedded into polynomial ring of one indeterminate. Since C is integrally closed, it is isomorphic to polynomial ring of one indeterminate.

Consider the set of system of C_ℓ, ℓ-generated subring of C such that $C = \cup_\ell C_\ell$. Let $\overline{C_\ell}$ be the integral closure of C_ℓ. Consider set of embedding of C_ℓ to ring of polynomial, then $\overline{C_\ell}$ are integral closure of those images, $\overline{C_\ell} = k[z_\ell]$, where z_ℓ belongs to the integral closure of C_ℓ. Consider sequence of z_ℓ. Because $k[z_\ell] \subseteq k[z_{\ell+1}]$, and degree of $z_{\ell+1}$ is strictly less than the degree of z_ℓ. Hence this sequence stabilizes for some element x. Then $k[z]$ is the needed centralizer. $\square$

2.4.4. On the rationality of subfields of generic matrices. We will discuss some approaches to the following open problem.

Problem 2.4.15. *Consider the algebra of generic matrices $k\{X\}$ of order s. Consider* $\mathrm{Frac}(k\{X\})$, *and K a subfield of* $\mathrm{Frac}(k\{X\})$ *of transcendence degree one over the base field k. Is it true that K is isomorphic to a rational function over k, namely $K \cong k(t)$?*

Let $k\{X\}$ be the algebra of generic matrices of a big enough prime order $s := p$. Let Λ be the diagonal generic matrix $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ in $k\{X\}$, where transcendence degrees satisfy in $\mathrm{Trdeg}\, k[\lambda_i] = 1$. Let N be another generic matrix, whose coefficients are algebraically independent from $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. It means that if R is a ring of all coefficients of N, with $\mathrm{Trdeg}(R) = s^2$, then

$$\mathrm{Trdeg}\, R[\lambda_1, \ldots, \lambda_s] = s^2 + \mathrm{Trdeg}\, k[\lambda_1, \ldots, \lambda_s].$$

Proposition 2.4.16. *We consider the conjugation of generic matrices $\overline{f}$ and $\overline{g}$.*

(a) *Let $k[f_{ij}]$ be a commutative ring and $I = \langle f_{1i} \rangle \lhd k[f_{ij}]$ $(i > 1)$ be an ideal of $k[f_{ij}]$. Then $k[f_{11}] \cap I = 0$.*

(b) *Let $k[f_{ij}, g_{ij}]$ be a commutative ring and $J = \langle f_{1j}, g_{1j} \rangle \lhd k[f_{ij}, g_{ij}]$ $(i, j > 1)$. For any algebraic function P satisfies $P(f_{11}, g_{11}) = 0$, which means f and g algebraically depends on e_1, then $k[f_{11}, g_{11}] \cap J = 0$.*

Corollary 2.4.17. *Let $\mathbb{A}$ be an algebra of generic matrices generated by $a_1, \dots, a_s, a_{s+1}$. Let $f \in k[a_1, \dots, a_s]$, $\varphi = a_{s+1} f a_{s+1}^{-1}$. Let $I = \langle \varphi_{1i} \rangle \lhd k[a_1, \dots, a_{s+1}]$. Then $k[\varphi_{11}] \cap I = 0$.*

Proof. Note that $f = \tau \Lambda \tau^{-1}$ for some τ and a diagonal matrix Λ by proposition 2.4.16. Then $\varphi = (a_{n+1}\tau)\Lambda(a_{n+1}\tau)^{-1}$ and we can treat $(a_{n+1}\tau)$ as a generic matrix. ☐

Theorem 2.4.18. *Let $C := C(f; F_n)$ be the centralizer ring of $f \in F_n \setminus k$. $\overline{C}$ is the reduction of generic matrices, and $\overline{\overline{C}}$ is the reduction on first eigenvalue action. Then $\overline{\overline{C}} \cong C$.*

Proof. Let us recall that we already have $\overline{C} \cong C$ in [120]. If we have $P(g_1, g_2) = 0$, then clearly $P(\lambda_1(g_1), \lambda_2(g_2)) = 0$ in the reduction on first eigenvalue action. Suppose $\overline{\overline{P(g_1, g_2)}} = 0$. Then $P(g_1, g_2)$ is an element of generic matrices with at least one zero eigenvalue. Because minimal polynomial is irreducible, that implies that $P(g_1, g_2) = 0$. It means any reduction satisfying λ_1 satisfies completely. That what we want to prove. ☐

Consider $\overline{C}$, for any $\overline{g} = (g_{ij}) \in \overline{C}$. Investigate g_{11}. Suppose there is a polynomial P with coefficients in k, such that $P(f, g) = 0$. We can make a proposition about intersection of the ideals even sharper.

Let $J = \langle f_{1j}, g_{1j} \rangle$ $(j > 1)$ be an ideal of the commutative subalgebra $k[f_{ij}, g_{ij}]$, then $k[f_{11}, g_{11}] \cap J = 0$.

From the discussion above and the theorem 2.4.18, we have the following proposition.

Proposition 2.4.19.

$$k[f_{11}, g_{11}] \mod J \cong k[f, g]$$

Proof. We have mod J matrices from the following form:

$$\overline{\overline{f}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}, \overline{\overline{g}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Then for any $H(\overline{\overline{f}}, \overline{\overline{g}}) \mod J$, we have

$$\overline{\overline{f}} = \begin{pmatrix} H(\lambda_1, \lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

☐

Now we present an approach as follows. Consider $k(f, g)$. Let us extend the algebra of generic matrices by new matrix T, independent from all others. Consider conjugation of $k(f, g)$ by T, $Tk(f, g)T^{-1}$, and consider $\tilde{f} = TfT^{-1}$ and $\tilde{g} = TgT^{-1}$. By Corollary 2.4.17, we have

$$P(g_{11}, f_{11}) = 0 \mod J.$$

On the other hand, we have

$$k[f_{11}, g_{11}] \cap J = 0,$$

which means that

$$P(f_{11}, g_{11}) = 0 \mod J.$$

Put f_{11} and g_{11} be polynomial over commutative ring generated by all entries of $k[f, g]$ and T. Hence $\mathrm{Frac}(k(f, g))$ can be embedded into fractional field of rings of polynomials. According to Lüroth theorem, $\mathrm{Frac}(k(f, g))$ (hence $\mathrm{Frac}(C)$) is isomorphic to fields of rational functions in one variable.

This will not guarantee rationality of our field, and there are counter examples in this situation. However, this approach seems to be useful for highest term analysis.

BIBLIOGRAPHY

1. *Abdesselam A.* The Jacobian conjecture as a problem of perturbative quantum field theory// Ann. H. Poincaré. — 2003. — *4*, № 2. — P. 199–215.
2. *Abhyankar S., Moh T.* Embedding of the line in the plane// J. Reine Angew. Math. — 1975. — *276.* — P. 148–166.
3. *Amitsur S. A.* Algebras over infinite fields// Proc. Am. Math. Soc. — 1956. — *7.* — P. 35–48.
4. *Amitsur S. A.* A general theory of radicals, III. Applications// Am. J. Math. — 1954. — *75.* — P. 126–136.
5. *Alev J., Le Bruyn L.* Automorphisms of generic 2 by 2 matrices// in: Perspectives in Ring Theory. — Springer, 1988. — P. 69–83.
6. *Amitsur A. S., Levitzki J.* Minimal identities for algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1950. — *1.* — P. 449–463.
7. *Amitsur A. S., Levitzki J.* Remarks on minimal identities for algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1951. — *2.* — P. 320–327.
8. *Anick D. J.* Limits of tame automorphisms of $k[x_1, \ldots, x_n]$// J. Algebra. — 1983. — *82*, № 2. — P. 459–468.
9. *Artamonov V. A.* Projective metabelian groups and Lie algebras// Izv. Math. — 1978. — *12*, № 2. — C. 213–223.
10. *Artamonov V. A.* Projective modules over universal enveloping algebras// Math. USSR Izv. — 1985. — *25*, № 3. — C. 429.
11. *Artamonov V. A.* Nilpotence, projectivity, decomposability// Sib. Math. J. — 1991. — *32*, № 6. — C. 901–909.
12. *Artamonov V. A.* The quantum Serre problem// Russ. Math. Surv. — 1998. — *53*, № 4. — C. 3–77.
13. *Artamonov V. A.* Automorphisms and derivations of quantum polynomials// in: Recent Advances in Lie Theory (*Bajo I., Sanmartin E.*, eds.). — Heldermann Verlag, 2002. — P. 109–120.
14. *Artamonov V. A.* Generalized derivations of quantum plane// J. Math. Sci. — 2005. — *131*, № 5. — C. 5904–5918.
15. *Artamonov V. A.* *Quantum polynomials* in: Advances in Algebra and Combinatorics. — Singapore: World Scientific, 2008. — P. 19–34.
16. *Artin M.* Noncommutative Rings. — Preprint, 1999.
17. *Arzhantsev I., Kuyumzhiyan K., Zaidenberg M.* Infinite transitivity, finite generation, and Demazure roots// Adv. Math. — 2019. — *351.* — P. 1–32.
18. *Asanuma T.* Non-linearizable algebraic k^*-actions on affine spaces. — Preprint, 1996.
19. *Backelin E.* Endomorphisms of quantized Weyl algebras// Lett. Math. Phys. — 2011. — *97*, № 3. — P. 317–338.
20. *Bass H.* A non-triangular action of G_a on A^3// J. Pure Appl. Algebra. — 1984. — *33*, № 1. — P. 1–5.
21. *Bass H., Connell E. H., Wright D.* The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — *7*, № 2. — P. 287–330.
22. *Bavula V. V.* A question of Rentschler and the Dixmier problem// Ann. Math. (2). — 2001. — *154*, № 3. — P. 683–702.
23. *Bavula V. V.* Generalized Weyl algebras and diskew polynomial rings/ `arXiv:1612.08941 [math.RA]`.
24. *Bavula V. V.* The group of automorphisms of the Lie algebra of derivations of a polynomial algebra// J. Alg. Appl. — 2017. — *16*, № 5. — 1750088.
25. *Bavula V. V.* The groups of automorphisms of the Lie algebras of formally analytic vector fields with constant divergence// C. R. Math. — 2014. — *352*, № 2. — P. 85–88.
26. *Bavula V. V.* The inversion formulae for automorphisms of Weyl algebras and polynomial algebras// J. Pure Appl. Algebra. — 2007. — *210.* — P. 147–159.
27. *Bavula V. V.* The inversion formulae for automorphisms of polynomial algebras and rings of differential operators in prime characteristic// J. Pure Appl. Algebra. — 2008. — *212*, № 10. — P. 2320–2337.
28. *Bavula V. V.* An analogue of the conjecture of Dixmier is true for the algebra of polynomial integro-differential operators// J. Algebra. — 2012. — *372.* — P. 237–250.

29. *Bavula V. V.* Every monomorphism of the Lie algebra of unitriangular polynomial derivations is an authomorphism// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. — 2012. — *350*, № 11–12. — P. 553–556.
30. *Bavula V. V.* The Jacobian conjecture$_{2n}$ implies the Dixmier problem$_n$/ `arXiv:math/0512250[math.RA]`.
31. *Beauville A., Colliot-Thelene J.-L., Sansuc J.-J., and Swinnerton-Dyer P.* Varietes stablement rationnelles non rationnelles// Ann. Math. — 1985. — *121*. — P. 283–318.
32. *Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D.* Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures// Ann. Phys. — 1978. — *111*, № 1. — P. 61–110.
33. *Belov A.* Linear recurrence equations on a tree// Math. Notes. — 2005. — *78*, № 5. — C. 603–609.
34. *Belov A.* Local finite basis property and local representability of varieties of associative rings.// Izv. Math. — 2010. — *74*. — C. 1–126.
35. *Belov A., Bokut L., Rowen L., Yu J.-T.* The Jacobian conjecture, together with Specht and Burnside-type problems// in: Automorphisms in Birational and Affine Geometry. — Springer, 2014. — P. 249–285.
36. *Belov A., Makar-Limanov L., Yu J. T.* On the generalised cancellation conjecture// J. Algebra. — 2004. — *281*. — P. 161–166.
37. *Belov A., Rowen L. H., Vishne U.* Structure of Zariski-closed algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 2012. — *362*. — P. 4695–4734.
38. *Belov-Kanel A., Yu J.-T.* On the lifting of the Nagata automorphism// Selecta Math. — 2011. — *17*. — P. 935–945.
39. *Kanel-Belov A., Berzins A., Lipyanski R.* Automorphisms of the semigroup of endomorphisms of free associative algebras// Int. J. Algebra Comp. — 2007. — *17*, № 5/6. — P. 923–939.
40. *Belov-Kanel A., Elishev A.* On planar algebraic curves and holonomic D-modules in positive characteristic// J. Algebra Appl. — 2016. — *15*, № 8. — 1650155.
41. *Belov-Kanel A., Kontsevich M.* Automorphisms of the Weyl algebra// Lett. Math. Phys. — 2005. — *74*, № 2. — P. 181–199.
42. *Belov-Kanel A., Kontsevich M.* The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture// Moscow Math. J. — 2007. — *7*, № 2. — C. 209–218.
43. *Belov-Kanel A., Lipyanski R.* Automorphisms of the endomorphism semigroup of a polynomial algebra// J. Algebra. — 2011. — *333*, № 1. — P. 40–54.
44. *Belov-Kanel A., Yu J.-T.* Stable tameness of automorphisms of $F\langle x, y, z\rangle$ fixing z// Selecta Math. — 2012. — *18*. — P. 799–802.
45. *Bergman G. M.* Centralizers in free associative algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *137*. — P. 327–344.
46. *Bergman G. M.* The diamond lemma for ring theory// Adv. Math. — 1978. — *29*, № 2. — P. 178–218.
47. *Berson J., van den Essen A., Wright D.* Stable tameness of two-dimensional polynomial automorphisms over a regular ring// Adv. Math. — 2012. — *230*. — P. 2176–2197.
48. *Birman J.* An inverse function theorem for free groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1973. — *41*. — P. 634–638.
49. *Bonnet P., Vénéreau S.* Relations between the leading terms of a polynomial automorphism// J. Algebra. — 2009. — *322*, № 2. — P. 579—599.
50. *Berzins A.* The group of automorphisms of semigroup of endomorphisms of free commutative and free associative algebras/ `arXiv:abs/math/0504015 [math.AG]`.
51. *Białynicki-Birula A.* Remarks on the action of an algebraic torus on k^n, I// Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1966. — *14*. — P. 177–181.
52. *Białynicki-Birula A.* Remarks on the action of an algebraic torus on k^n, II// Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1967. — *15*. — P. 123–125.
53. *Białynicki-Birula A.* Some theorems on actions of algebraic groups// Ann. Math. — 1973. — *98*, № 3. — P. 480–497.
54. *Bitoun T.* The p-support of a holonomic D-module is lagrangian, for p large enough/ `arXiv:1012.4081 [math.AG]`.
55. *Bodnarchuk Yu.* Every regular automorphism of the affine Cremona group is inner// J. Pure Appl. Algebra. — 2001. — *157*. — P. 115–119.

56. *Bokut L., Zelmanov E.* Selected works of A. I. Shirshov. — Springer, 2009.
57. *Bokut L. A.* Embedding Lie algebras into algebraically closed Lie algebras// Algebra Logika. — 1962. — *1.* — C. 47–53.
58. *Bokut L. A.* Embedding of algebras into algebraically closed algebras// Dokl. Akad. Nauk. — 1962. — *145*, № 5. — C. 963–964.
59. *Bokut L. A.* Theorems of embedding in the theory of algebras// Colloq. Math. — 1966. — *14.* — P. 349–353.
60. *Brešar M., Procesi C., Špenko Š.* Functional identities on matrices and the Cayley–Hamilton polynomial/ `arXiv:1212.4597 [math.RA]`.
61. *Campbell L. A.* A condition for a polynomial map to be invertible// Math. Ann. — 1973. — *205*, № 3. — P. 243–248.
62. *Cohn P. M.* Subalgebras of free associative algebras// Proc. London Math. Soc. — 1964. — *3*, № 4. — P. 618–632.
63. *Cohn P. M.* Progress in free associative algebras// Isr. J. Math. — 1974. — *19*, № 1-2. — P. 109–151.
64. *Cohn P. M.* A brief history of infinite-dimensional skew fields// Math. Sci. — 1992. — *17.* — P. 1–14.
65. *Cohn P. M.* Free Rings and Their Relations. — Academic Press, 1985.
66. *Czerniakiewicz A. J.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — *160.* — P. 393–401.
67. *Czerniakiewicz A. J.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — *171.* — P. 309–315.
68. *Danielewski W.* On the cancellation problem and automorphism groups of affine algebraic varieties. — Warsaw: Preprint, 1989.
69. *De Bondt M., van den Essen A.* The Jacobian conjecture for symmetric Druzkowski mappings. — University of Nijmegen, 2004.
70. *De Bondt M., van den Essen A.* A reduction of the Jacobian conjecture to the symmetric case// Proc. Am. Math. Soc. — 2005. — *133*, № 8. — P. 2201–2205.
71. *De Concini C., Procesi C.* A characteristic free approach to invariant theory// in: Young Tableaux in Combinatorics, Invariant Theory, and Algebra. — Elsevier, 1982. — P. 169–193.
72. *Déserti J.* Sur le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine// J. Algebra. — 2006. — *297.* — P. 584–599.
73. *Dicks W.* Automorphisms of the free algebra of rank two// Contemp. Math. — 1985. — *43.* — P. 63–68.
74. *Dicks W., Lewin J.* Jacobian conjecture for free associative algebras// Commun. Algebra. — 1982. — *10*, № 12. — P. 1285–1306.
75. *Dixmier J.* Sur les algebres de Weyl// Bull. Soc. Math. France. — 1968. — *96.* — P. 209–242.
76. *Dodd C.* The p-cycle of holonomic D-modules and auto-equivalences of the Weyl algebra/ `arXiv:1510.05734 [math.OC]`.
77. *Donkin S.* Invariants of several matrices// Inv. Math. — 1992. — *110*, № 1. — P. 389–401.
78. *Donkin S.* Invariant functions on matrices// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1993. — *113*, № 1. — P. 23–43.
79. *Drensky V., Yu J.-T.* A cancellation conjecture for free associative algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 2008. — *136*, № 10. — P. 3391–3394.
80. *Drensky V., Yu J.-T.* The strong Anick conjecture// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 2006. — *103.* — P. 4836–4840.
81. *Drensky V., Yu J.-T.* Coordinates and automorphisms of polynomial and free associative algebras of rank three// Front. Math. China. — 2007. — *2*, № 1. — P. 13–46.
82. *Drensky V., Yu J.-T.* The strong Anick conjecture is true// J. Eur. Math. Soc. — 2007. — *9.* — P. 659–679.
83. *Drużkowski L.* An effective approach to Keller's Jacobian conjecture// Math. Ann. — 1983. — *264*, № 3. — P. 303–313.
84. *Drużkowski L.* The Jacobian conjecture: symmetric reduction and solution in the symmetric cubic linear case// Ann. Polon. Math. — 2005. — *87*, № 1. — P. 83–92.

85. *Drużkowski L. M.* New reduction in the Jacobian conjecture// in: Effective Methods in Algebraic and Analytic Geometry. — Kraków: Univ. Iagel. Acta Math., 2001. — P. 203–206.
86. *Elishev A.* Automorphisms of polynomial algebras, quantization and Kontsevich conjecture/ PhD Thesis — Moscow Institute of Physics and Technology, 2019.
87. *Elishev A., Kanel-Belov A., Razavinia F., Yu J.-T., Zhang W.* Noncommutative Białynicki-Birula theorem./ `arXiv: 1808.04903 [math.AG].`
88. *Elishev A., Kanel-Belov A., Razavinia F., Yu J.-T., Zhang W.* Torus actions on free associative algebras, lifting and Białynicki-Birula type theorems/ `arXiv: 1901.01385 [math.AG].`
89. *van den Bergh M.* On involutivity of p-support// Int. Math. Res. Not. — 2015. — *15.* — P. 6295–6304.
90. *van den Essen A.* The amazing image conjecture/ `arXiv: 1006.5801 [math.AG].`
91. *van den Essen A., de Bondt M.* Recent progress on the Jacobian conjecture// Ann. Polon. Math. — 2005. — *87.* — P. 1–11.
92. *van den Essen A., de Bondt M.* The Jacobian conjecture for symmetric Druźkowski mappings// Ann. Polon. Math. — 2005. — *86*, № 1. — P. 43–46.
93. *van den Essen A., Wright D., Zhao W.* On the image conjecture// J. Algebra. — 2011. — *340.* — P. 211—224.
94. *Fox R. H.* Free differential calculus, I. Derivation in the free group ring// Ann. Math. (2). — 1953. — *57.* — P. 547–560.
95. *Gizatullin M. Kh., Danilov V. I.* Automorphisms of affine surfaces, I// Izv. Math. — 1975. — *9*, № 3. — C. 493–534.
96. *Gizatullin M. Kh., Danilov V. I.* Automorphisms of affine surfaces, II// Izv. Math. — 1977. — *11*, № 1. — C. 51–98.
97. *Gorni G., Zampieri G.* Yagzhev polynomial mappings: on the structure of the Taylor expansion of their local inverse// Polon. Math. — 1996. — *64.* — P. 285–290.
98. *Fedosov B.* A simple geometrical construction of deformation quantization// J. Differ. Geom. — 1994. — *40*, № 2. — P. 213–238.
99. *Frayne T., Morel A. C., Scott D. S.* Reduced direct products// J. Symb. Logic.. — *31*, № 3. — P. 1966.
100. *Fulton W., Harris J.* Representation Theory. A First Course. — Springer-Verlag, 1991.
101. *Furter J.-P., Kraft H.* On the geometry of the automorphism groups of affine varieties/ `arXiv: 1809.04175 [math.AG].`
102. *Gutwirth A.* The action of an algebraic torus on the affine plane// Trans. Am. Math. Soc. — 1962. — *105*, № 3. — P. 407–414.
103. *Jung H. W. E.* Über ganze birationale Transformationen der Ebene// J. Reine Angew. Math. — 1942. — *184.* — P. 161–174.
104. *Kaliman S., Koras M., Makar-Limanov L., Russell P.* C^*-actions on C^3 are linearizable// Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. — 1997. — *3.* — P. 63–71.
105. *Kaliman S., Zaidenberg M.* Families of affine planes: the existence of a cylinder// Michigan Math. J. — 2001. — *49.* — P. 353–367.
106. *Kuroda S.* Shestakov–Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism// Tôhoku Math. J. — 2010. — *62.* — P. 75–115.
107. *Kuzmin E., Shestakov I. P.* Nonassociative structures// Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Probl. Mat. Fundam. Napr. — 1990. — *57.* — C. 179–266.
108. *Karas' M.* Multidegrees of tame automorphisms of C^n// Dissert. Math. — 2011. — *477.*
109. *Khoroshkin A., Piontkovski D.* On generating series of finitely presented operads/ `arXiv: 1202.5170 [math.QA].`
110. *Kambayashi T.* Pro-affine algebras, Ind-affine groups and the Jacobian problem// J. Algebra. — 1996. — *185*, № 2. — P. 481–501.
111. *Kambayashi T.* Some basic results on pro-affine algebras and Ind-affine schemes// Osaka J. Math. — 2003. — *40*, № 3. — P. 621–638.
112. *Kambayashi T., Russell P.* On linearizing algebraic torus actions// J. Pure Appl. Algebra. — 1982. — *23*, № 3. — P. 243–250.

113. *Kanel-Belov A., Borisenko V., Latysev V.* Monomial algebras// J. Math. Sci. — 1997. — *87*, № 3. — C. 3463–3575.
114. *Kanel-Belov A., Elishev A.* On planar algebraic curves and holonomic $\mathcal{D}$-modules in positive characteristic/ `arXiv:1412.6836 [math.AG]`.
115. *Kanel-Belov A., Elishev A., Yu J.-T.* Independence of the B-KK isomorphism of infinite prime/ `arXiv:1512.06533 [math.AG]`.
116. *Kanel-Belov A., Elishev A., Yu J.-T.* Augmented polynomial symplectomorphisms and quantization/// `arXiv:1812.02859 [math.AG]`.
117. *Kanel-Belov A., Grigoriev S., Elishev A., Yu J.-T., Zhang W.* Lifting of polynomial symplectomorphisms and deformation quantization// Commun. Algebra. — 2018. — *46*, № 9. — P. 3926–3938.
118. *Kanel-Belov A., Malev S., Rowen L.* The images of noncommutative polynomials evaluated on 2×2 matrices// Proc. Am. Math. Soc. — 2012. — *140*. — P. 465–478.
119. *Kanel-Belov A., Malev S., Rowen L.* The images of multilinear polynomials evaluated on 3×3 matrices// Proc. Am. Math. Soc. — 2016. — *144*. — P. 7–19.
120. *Kanel-Belov A., Razavinia F., Zhang W.* Bergman's centralizer theorem and quantization// Commun. Algebra. — 2018. — *46*, № 5. — P. 2123–2129.
121. *Kanel-Belov A., Razavinia F., Zhang W.* Centralizers in free associative algebras and generic matrices/ `arXiv:1812.03307 [math.RA]`.
122. *Kanel-Belov A., Rowen L. H., Vishne U.* Full exposition of Specht's problem// Serdica Math. J. — 2012. — *38*. — P. 313–370.
123. *Kanel-Belov A., Yu J.-T., Elishev A.* On the augmentation topology of automorphism groups of affine spaces and algebras// Int. J. Algebra Comput. * — 2018. — *28*, № 08. — P. 1449–1485.
124. *Keller B.* Notes for an Introduction to Kontsevich's Quantization Theorem, 2003.
125. *Keller O. H.* Ganze Cremona Transformationen// Monatsh. Math. Phys. — 1939. — *47*, № 1. — P. 299–306.
126. *Kolesnikov P. S.* The Makar-Limanov algebraically closed skew field// Algebra Logic. — 2000. — *39*, № 6. — C. 378–395.
127. *Kolesnikov P. S.* Different definitions of algebraically closed skew fields// Algebra Logic. — 2001. — *40*, № 4. — C. 219–230.
128. *Kontsevich M.* Deformation quantization of Poisson manifolds// Lett. Math. Phys. — 2003. — *66*, № 3. — P. 157–216.
129. *Kontsevich M.* Holonomic D-modules and positive characteristic// Jpn. J. Math. — 2009. — *4*, № 1. — P. 1–25.
130. *Koras M., Russell P.* C^*-actions on C^3: The smooth locus of the quotient is not of hyperbolic type// J. Alg. Geom. — 1999. — *8*, № 4. — P. 603–694.
131. *Kovalenko S., Perepechko A., Zaidenberg M.* On automorphism groups of affine surfaces// in: Algebraic Varieties and Automorphism Groups. — Math. Soc. Jpn., 2017. — P. 207–286.
132. *Kraft H., Regeta A.* Automorphisms of the Lie algebra of vector fields// J. Eur. Math. Soc. — 2017. — *19*, № 5. — P. 1577–1588.
133. *Kraft H., Stampfli I.* On automorphisms of the affine Cremona group// Ann. Inst. Fourier. — 2013. — *63*, № 3. — P. 1137–1148.
134. *Kulikov V. S.* Generalized and local Jacobian problems// Izv. Math. — 1993. — *41*, № 2. — C. 351–365.
135. *Kulikov V. S.* The Jacobian conjecture and nilpotent maps// J. Math. Sci. — 2001. — *106*, № 5. — C. 3312–3319.
136. *Levy R., Loustaunau P., Shapiro J.* The prime spectrum of an infinite product of copies of Z// Fundam. Math. — 1991. — *138*. — P. 155–164.
137. *Li Y.-C., Yu J.-T.* Degree estimate for subalgebras// J. Algebra. — 2012. — *362*. — P. 92–98.
138. *Gaiotto D., Witten E.* Probing quantization via branes/ `arXiv:2107.12251 [hep-th]`.
139. *Lothaire M.* Combinatorics on Words. — Cambridge Univ. Press, 1997.
140. *Makar-Limanov L.* A new proof of the Abhyankar–Moh-=Suzuki theorem/ `arXiv:1212.0163 [math.AC]`.

141. *Makar-Limanov L.* Automorphisms of a free algebra with two generators// Funct. Anal. Appl. — 1970. — *4*, № 3. — C. 262–264.
142. *Makar-Limanov L.* On automorphisms of Weyl algebra// Bull. Soc. Math. France. — 1984. — *112.* — P. 359–363.
143. *Makar-Limanov L., Yu J.-T.* Degree estimate for subalgebras generated by two elements// J. Eur. Math. Soc. — 2008. — *10.* — P. 533–541.
144. *Makar-Limanov L.* Algebraically closed skew fields// J. Algebra. — 1985. — *93*, № 1. — P. 117–135.
145. *Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U.* Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables// J. Algebra. — 2009. — *322*, № 9. — P. 3318–3330.
146. *Markl M., Shnider S., Stasheff J.* Operads in Algebra, Topology, and Physics. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2002.
147. *Miyanishi M., Sugie T.* Affine surfaces containing cylinderlike open sets// J. Math. Kyoto Univ. — 1980. — *20.* — P. 11–42.
148. *Nagata M.* On the automorphism group of $k[x, y]$. — Tokyo: Kinokuniya, 1972.
149. *Nielsen J.* Die Isomorphismen der allgemeinen, undendlichen Gruppen mit zwei Eerzeugenden// Math. Ann. — 1918. — *78.* — P. 385–397.
150. *Nielsen J.* Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen// Math. Ann. — 1924. — *91.* — P. 169–209.
151. *Ol'shanskij A. Yu.* Groups of bounded period with subgroups of prime order// Algebra and Logic. — 1983. — *21.* — C. 369–418.
152. *Peretz R.* Constructing polynomial mappings using non-commutative algebras// in: Affine Algebraic Geometry. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2005. — P. 197–232.
153. *Piontkovski D.* Operads versus Varieties: a dictionary of universal algebra. — Preprint, 2011.
154. *Piontkovski D.* On Kurosh problem in varieties of algebras// J. Math. Sci. — 2009. — *163*, № 6. — C. 743–750.
155. *Razmyslov Yu. P.* Algebras satisfying identity relations of Capelli type// Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. — 1981. — *45.* — C. 143–166, 240.
156. *Razmyslov Yu. P.* Identities of Algebras and Their Representations. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1994.
157. *Razmyslov Yu. P., Zubrilin K. A.* Nilpotency of obstacles for the representability of algebras that satisfy Capelli identities, and representations of finite type// Russ. Math. Surveys — 1993. — *48.* — C. 183–184.
158. *Reutenauer C.* Applications of a noncommutative Jacobian matrix// J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — *77.* — P. 634–638.
159. *Rowen L. H.* Graduate Algebra: Noncommutative View. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2008.
160. *Moh T.-T.* On the global Jacobian conjecture for polynomials of degree less than 100. — Preprint, 1983.
161. *Moh T.-T.* On the Jacobian conjecture and the configurations of roots// J. Reine Angew. Math. — 1983. — *340.* — P. 140–212.
162. *Moyal J. E.* Quantum mechanics as a statistical theory// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1949. — *45*, № 1. — P. 99–124.
163. *Orevkov S. Yu.* The commutant of the fundamental group of the complement of a plane algebraic curve// Russ. Math. Surv. — 1990. — *45*, № 1. — C. 221–222.
164. *Orevkov S. Yu.* An example in connection with the Jacobian conjecture// Math. Notes. — 1990. — *47*, № 1. — C. 82–88.
165. *Orevkov S. Yu.* The fundamental group of the complement of a plane algebraic curve// Sb. Math. — 1990. — *65*, № 1. — C. 267–267.
166. *Plotkin B.* Varieties of algebras and algebraic varieties// Israel J. Math. — 1996. — *96*, № 2. — P. 511–522.
167. *Plotkin B.* Algebras with the same (algebraic) geometry/ `arXiv: math/0210194 [math.GM]`.
168. *Popov V. L.* Around the Abhyankar-Sathaye conjecture/ `arXiv: 1409.6330 [math.AG]`.
169. *Procesi C.* Rings with Polynomial Identities. — Marcel Dekker, 1973.
170. *Procesi C.* The invariant theory of $n \times n$ matrices// Adv. Math. — 1976. — *19*, № 3. — P. 306–381.
171. *Razar M.* Polynomial maps with constant Jacobian// Israel J. Math. — 1979. — *32*, № 2-3. — P. 97–106.

172. *Robinson A.* Non-Standard Analysis. — Princeton Univ. Press, 2016.
173. *Rosset S.* A new proof of the Amitsur–Levitzki identity// Israel J. Math. — 1976. — *23*, № 2. — P. 187–188.
174. *Rowen L. H.* Graduate Algebra: Noncommutative View. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2008.
175. *Schofield A. H.* Representations of Rings over Skew Fields. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
176. *Schwarz G.* Exotic algebraic group actions// C. R. Acad. Sci. Paris — 1989. — *309*. — P. 89–94.
177. *Shafarevich I. R.* On some infinite-dimensional groups, II// Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Mat. — 1981. — *45*, № 1. — C. 214–226.
178. *Sharifi Y.* Centralizers in Associative Algebras/ Ph.D. thesis, 2013.
179. *Shestakov I. P.* Finite-dimensional algebras with a nil basis// Algebra Logika. — 1971. — *10*. — C. 87–99.
180. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* Degree estimate and two-generated subalgebras of rings of polynomials// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17*. — P. 181–196.
181. *Shestakov I., Umirbaev U.* The Nagata automorphism is wild// Proc. Natl. Acad. Sci. — 2003. — *100*, № 22. — P. 12561–12563.
182. *Shestakov I., Umirbaev U.* Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17*, № 1. — P. 181–196.
183. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17*. — P. 197–220.
184. *Umirbaev U., Shestakov I.* Subalgebras and automorphisms of polynomial rings// Dokl. Ross. Akad. Nauk — 2002. — *386*, № 6. — C. 745–748.
185. *Shpilrain V.* On generators of L/R^2 Lie algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1993. — *119*. — P. 1039–1043.
186. *Singer D.* On Catalan trees and the Jacobian conjecture// Electron. J. Combin. — 2001. — *8*, № 1. — 2.
187. *Shpilrain V., Yu J.-T.* Affine varieties with equivalent cylinders// J. Algebra. — 2002. — *251*, № 1. — P. 295–307.
188. *Shpilrain V., Yu J.-T.* Factor algebras of free algebras: on a problem of G. Bergman// Bull. London Math. Soc. — 2003. — *35*. — P. 706–710.
189. *Suzuki M.* Propiétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébraique de l'espace C^2// J. Math. Soc. Jpn. — 1974. — *26*. — P. 241–257.
190. *Tsuchimoto Y. Preliminaries on Dixmier conjecture* Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A. Math. — 2003. — *24*. — P. 43–59.
191. *Tsuchimoto Y.* Endomorphisms of Weyl algebra and p-curvatures// Osaka J. Math. — 2005. — *42*, № 2. — P. 435–452.
192. *Tsuchimoto Y.* Auslander regularity of norm based extensions of Weyl algebra/// `arXiv: 1402.7153 [math.AG]`.
193. *Umirbaev U.* On the extension of automorphisms of polynomial rings// Sib. Math. J. — 1995. — *36*, № 4. — C. 787–791.
194. *Umirbaev U. U.* On Jacobian matrices of Lie algebras// в кн.: Proc. 6 All-Union Conf. on Varieties of Algebraic Systems. — Magnitogorsk, 1990. — C. 32–33.
195. *Umirbaev U. U.* Shreer varieties of algebras// Algebra Logic. — 1994. — *33*. — C. 180–193.
196. *Umirbaev U. U.* Tame and wild automorphisms of polynomial algebras and free associative algebras. — Preprint MPIM 2004–108..
197. *Umirbaev U.* The Anick automorphism of free associative algebras// J. Reine Angew. Math. — 2007. — *605*. — P. 165–178.
198. *Umirbaev U. U.* Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras in three variables// J. Reine Angew. Math. — 2006. — *600*. — P. 203–235.
199. *Umirbaev U. U.* Defining relations for automorphism groups of free algebras// J. Algebra. — 2007. — *314*. — P. 209–225.
200. *Umirbaev U. U., Yu J.-T.* The strong Nagata conjecture// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 2004. — *101*. — P. 4352–4355.
201. *Urech C., Zimmermann S.* Continuous automorphisms of Cremona groups/ `arXiv: 1909.11050 [math.AG]`.

202. *van den Essen A.* Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. — Birkhäuser, 2012.
203. *van der Kulk W.* On polynomial rings in two variables// Nieuw Arch. Wisk. (3) — 1953. — *1.* — P. 33–41.
204. *Vitushkin A. G.* A criterion for the representability of a chain of σ-processes by a composition of triangular chains// Math. Notes — 1999. — *65*, № 5-6. — C. 539–547.
205. *Vitushkin A. G.* On the homology of a ramified covering over C^2// Math. Notes. — 1998. — *64*, № 5. — C. 726–731.
206. *Vitushkin A. G.* Evaluation of the Jacobian of a rational transformation of C^2 and some applications// Math. Notes — 1999. — *66*, № 2. — C. 245–249.
207. *Wedderburn J. H. M.* Note on algebras// Ann. Math. — 1937. — *38.* — P. 854–856.
208. *Wright D.* The Jacobian conjecture as a problem in combinatorics/ `arXiv:math/0511214 [math.CO]`.
209. *Wright D.* The Jacobian conjecture: Ideal membership questions and recent advances// Contemp. Math. — 2005. — *369.* — P. 261–276.
210. *Yagzhev A. V.* Finiteness of the set of conservative polynomials of a given degree// Math. Notes. — 1987. — *41*, № 2. — C. 86—88.
211. *Yagzhev A. V.* Nilpotency of extensions of an abelian group by an abelian group// Math. Notes. — 1988. — *43*, № 3-4. — C. 244–245.
212. *Yagzhev A. V.* Locally nilpotent subgroups of the holomorph of an abelian group// Mat. Zametki — 1989. — *46*, № 6. — C. 118.
213. *Yagzhev A. V.* A sufficient condition for the algebraicity of an automorphism of a group// Algebra Logic. — 1989. — *28*, № 1. — C. 83–85.
214. *Yagzhev A. V.* The generators of the group of tame automorphisms of an algebra of polynomials// Sib. Mat. Zh. — 1977. — *18*, № 1. — P. 222–225.
215. *Wang S.* A Jacobian criterion for separability// J. Algebra. — 1980. — *65*, № 2. — P. 453–494.
216. *Wright D.* On the Jacobian conjecture// Ill. J. Math. — 1981. — *25*, № 3. — P. 423–440.
217. *Yagzhev A. V.* Invertibility of endomorphisms of free associative algebras// Math. Notes. — 1991. — *49*, № 3–4. — C. 426—430.
218. *Yagzhev A. V.* Endomorphisms of free algebras// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 1. — C. 133—141.
219. *Yagzhev A. V.* On the algorithmic problem of recognizing automorphisms among endomorphisms of free associative algebras of finite rank// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 1. — C. 142–146.
220. *Yagzhev A. V.* Keller's problem// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 5. — C. 747–754.
221. *A. V. Yagzhev* Engel algebras satisfying Capelli identities// в кн.: Proceedings of Shafarevich Seminar. — Moscow: Steklov Math. Inst., 2000. — C. 83–88 (in Russian).
222. *A. V. Yagzhev* Endomorphisms of polynomial rings and free algebras of different varieties// в кн.: Proceedings of Shafarevich Seminar. — Moscow: Steklov Math. Inst., 2000. — C. 15–47 (in Russian).
223. *Yagzhev A. V.* Invertibility criteria of a polynomial mapping. — Unpublished (in Russian).
224. *Zaks A.* Dedekind subrings of $K[x_1, \ldots, x_n]$ are rings of polynomials// Israel J. Math. — 1971. — *9.* — P. 285–289.
225. *Zelmanov E.* On the nilpotence of nilalgebras// Lect. Notes Math. — 1988. — *1352.* — P. 227–240.
226. *Zhao W.* New proofs for the Abhyankar–Gurjar inversion formula and the equivalence of the Jacobian conjecture and the vanishing conjecture// Proc. Am. Math. Soc. — 2011. — *139.* — P. 3141–3154.
227. *Zhao W.* Mathieu subspaces of associative algebras// J. Algebra. — 2012. — *350.* — P. 245–272.
228. *Zhevlakov K. A., Slin'ko A. M., Shestakov I. P., Shirshov A. I.* Nearly Associative Rings. — Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
229. *Zubrilin K. A.* Algebras that satisfy the Capelli identities// Sb. Math. — 1995. — *186*, № 3. — C. 359–370.
230. *Zubrilin K. A.* On the class of nilpotence of obstruction for the representability of algebras satisfying Capelli identities// Fundam. Prikl. Mat. — 1995. — *1*, № 2. — C. 409–430.
231. *Zubrilin K. A.* On the Baer ideal in algebras that satisfy the Capelli identities// Sb. Math. — 1998. — *189.* — C. 1809–1818.
232. *Zaidenberg M. G.* On exotic algebraic structures on affine spaces// in: Geometric Complex Analysis. — World Scientific, 1996. — P. 691–714.

233. *Zhang W.* Alternative proof of Bergman's centralizer theorem by quantization/ Master thesis — Bar-Ilan University, 2017.
234. *Zhang W.* Polynomial automorphisms and deformation quantization/ Ph.D. thesis — Bar-Ilan University, 2019.
235. *Zubkov A. N.* Matrix invariants over an infinite field of finite characteristic// Sib. Math. J. — 1993. — *34*, № 6. — С. 1059–1065.
236. *Zubkov A. N.* A generalization of the Razmyslov–Procesi theorem// Algebra Logic. — 1996. — *35*, № 4. — С. 241–254.

Елишев Андрей Михайлович
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: ame1511@mail.ru

Канель-Белов Алексей Яковлевич
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: kanelster@gmail.com

Razavinia Farrokh
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: farrokh.razavinia@gmail.com

Jie-Tai Yu
Шэньчженьский университет, Шэньчжень, Китайская народная республика
E-mail: yujt@hkucc.hku.hk

Wenchao Zhang
Школа математики и статистики, Университет Хуэйчжоу, Китайская народная республика
E-mail: zhangwc@hzu.edu.cn

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.