ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 213 (2022)

Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 213 (2022)

Дата публикации 11 июля 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года — Выходит 15 раз в год

Редакторы-составители выпуска	А. В. Аргучинцев, М. В. Фалалеев, М. В. Шамолин
Научный редактор выпуска	Н. И. Гусева
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782-4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-213-3-9
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-213-10-37
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-213-38-46
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-213-47-53
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-213-54-62
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-213-63-71
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-213-72-79
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-213-80-88
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-213-89-95
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-213-96-109
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-213-110-144

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 213

ГЕОМЕТРИЯ, МЕХАНИКА
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-3-9

УДК 532.782

СИНГЛЕТНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОДНОЧАСТИЧНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ЖИДКОСТЯХ

© 2022 г. **Ю. В. АГРАФОНОВ, И. С. ПЕТРУШИН, Д. В. ХАЛАИМОВ**

Аннотация. Предложен алгоритм решения линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода для одночастичной функции распределения молекулярной системы твердых сфер вблизи твердой поверхности. Ядро и правая часть уравнения вычисляются на основе аналитической аппроксимации Перкуса—Йевика, заданной на ограниченном интервале для пространственно-однородной макроскопической жидкости. Решение для одночастичной функции ищется в классе кусочно-непрерывных функций. Сформулирован метод аналитического вычисления на каждом интервале в области определения функции.

***Ключевые слова*:** жидкость твердых сфер, частичные функции распределения, уравнения Орнштейна—Цернике, интегральное уравнение Фредгольма второго рода, граничные слои жидкостей.

SINGLET LINEAR EQUATION FOR ONE-PARTICLE DISTRIBUTION FUNCTION IN STATISTICAL PHYSICS OF SURFACE PHENOMENA IN LIQUIDS

© 2022 **Yu. V. AGRAFONOV, I. S. PETRUSHIN, D. V. KHALAIMOV**

Abstract. In this work we suggest the algorithm to solve the linear Fredholm integral equation of the second kind for the one-particle distribution function of simple liquid near the hard surface. The core and the right part of the equation are guessed using Percus-Yevick approximation defined on finite interval for spatial macroscopic liquid. We suggest an approach to solve the equation analytically for each interval where function is defined.

***Keywords and phrases*:** supercooled liquid, ideal glass, partial distribution function, replicas, chaotic phase transition of the first kind, Fredholm equation of the second kind.

***AMS Subject Classification*:** 45B05, 45G15

1. Введение. В классической статистической физике систем сильно взаимодействующих частиц математический аппарат частичных функций распределения является одним из основных способов реализации канонического распределения Гиббса, которое в общем виде определяет вероятностное распределение молекул в пространстве (микроструктура вещества), а также все макроскопические характеристики, однозначно вытекающие из него.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-02-00523а). Авторы признательны А. А. Гаврилюку за проявленный к работе интерес.

Отметим, что метод функций распределения сводит задачу к рассмотрению функций от небольшого числа переменных и соответственно открывает новые возможности выявлении локальных характеристик, изначально скрытых в полном распределении Гиббса для большой системы взаимодействующих частиц (при $N \approx 10^{23}$).

Перечислим некоторые из современных проблем. До недавнего времени остается до конца нерешенной задача описания метастабильных состояний в системе твердых сфер, несмотря на достигнутый прогресс в этой области в работах [6, 8–14], отмеченных Нобелевской премией по физике за 2021 г. Более того, непонятно как описывать термодинамически-равновесные системы. В частности, в системе твердых сфер существует возможность перейти в кристаллическую структуру с разной сингонией: либо в гранецентрированную кубическую, либо в гексагональную. В этих структурах первые координационные числа полностью совпадают; тонкие различия проявляются лишь в дальних координационных сферах. Открыты для изучения такие проблемы, как поведение жидких систем вблизи твердой поверхности, поведение в ограниченных объемах, структура дальних корреляций, структура жидкости в переходной области и т. д. Одной из принципиальных задач теории жидкостей является исследование особенностей ближнего порядка и формулировка уравнений, наиболее точно описывающих эти особенности.

Основной тренд решения всех перечисленных проблем — это применение метода частичных функций распределения. Важнейшими из этих функций являются одночастичная $G_1(\vec{r_1})$ и двухчастичная $G_{12}(\vec{r_1}, \vec{r_2})$ функции распределения. Обе эти функции находятся совместным решением системы нелинейных интегральных уравнений Орнштейна—Цернике (ОЦ) [8, 15, 17]

$$\begin{gathered} \omega_1 = n \int G_2 C_{12}^1 d(2) + \mu, \\ h_{12} = C_{12}^{(2)} + n \int G_3 C_{13}^{(2)} h_{23} d(3). \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $d(i) \equiv dr_i$ означает интегрирование по координатам i-й частицы; n — плотность жидкости; $G_i = \exp\{-\Phi_i/kT + \omega_i\}$ — одночастичная функция распределения, описывающая положение частицы в лабораторной системе координат; Φ_i — потенциальная энергия частицы во внешнем поле; ω_i — одночастичный термический потенциал, учитывающий взаимодействие частицы с окружающей средой; химический потенциал μ находится из условия перехода к пространственно-однородной системе; парная корреляционная функция $h_{ij} = \exp\{-\Phi_{ij}/kT + \omega_{ij}\}$ связана с двухчастичной функцией распределения соотношением $G_{ij} = G_i G_j (1 + h_{ij})$; ω_{ij} — двухчастичный термический потенциал, учитывающий коллективное взаимодействие двух частиц через их окружение; $C_{ij}(k)$ — прямые корреляционные функции:

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(1)} &= h_{ij} - \omega_{ij} - 1/2 h_{ij}(\omega_{ij} + M_{ij}^{(1)}), \\ C_{ij}^{(2)} &= h_{ij} - \omega_{ij} - M_{ij}^{(2)}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $M_{ij}^{(1)}$, $M_{ij}^{(2)}$ — бесконечные функциональные ряды от искомых функций распределения.

При решении конкретных задач эти ряды $M_{ij}^{(1)}$, $M_{ij}^{(2)}$ аппроксимируют простыми аналитическими выражениями, что приводит к нелинейным интегральным уравнениям. Наиболее известными из них являются гиперцепное, Перкуса—Йевика, Мартынова—Саркисова, Роджера—Янга. Однако методическая погрешность данных аппроксимаций неизвестна. Как правило, уравнения решаются численно, а полученное решение сравнивается с данными численного эксперимента, являющегося эталоном точности. Отметим, что для отталкивающих потенциалов, в особенности для потенциала твердых сфер, приближение Перкуса—Йевика лучше, чем гиперцепное. Однако при низких температурах и умеренной плотности для более реалистичных парных потенциалов, имеющих притягивающую часть, уравнение ГПЦ дает лучшие результаты, чем уравнение ПЙ. Однако оба замыкания являются термодинамически несогласованными: характеристики, вычисленные по уравнению состояния и сжимаемости дают ошибку 10% и более. Роджер и Янг предложили обеспечивать термодинамическую согласованность посредством введения подгоночных параметров. В частности, в их замыкании подгоночный параметр подбирается так, чтобы на малых расстояниях между частицами реализовывалось приближение Перкуса—Йевика, а на больших расстояниях — гиперцепное приближение. Термодинамическое согласование осуществляется по вириальному уравнению и уравнению сжимаемости. Замыкание Роджера—Янга оказалось весьма удачным для чисто отталкивательных потенциалов (мягкие сферы). В других случаях оно менее удовлетворительно. Однако наилучшим термодинамически согласованным является замыкание Мартынова—Саркисова: его ошибка для системы твердых сфер не превышает 2%.

Подчеркнем, что приближение Перкуса—Йевика является единственным, которое допускает аналитическое решение для пространственно-однородных трехмерных молекулярных систем [15]. В последние годы разрабатываются аналитические методы решения для одномерных и двумерных молекулярных систем [18]. Отметим также интенсивно развивающееся направление по аморфизации макроскопических растворов, упоминавшееся выше [6, 8–14].

В методе частичных функций распределения термодинамически-равновесных систем макроскопическое тело рассматривается как бесконечно большое число одинаковым образом устроенных подсистем (копий). В каждой из копий межмолекулярное взаимодействие задается одинаковым образом, что обеспечивает однородность тела на микроскопическом уровне. Статистическое распределение каждой подсистемы по различным состояниям описывается гиббсовской экспонентой. Это является следствием эргодической гипотезы, согласно которой средние значения макроскопических величин равны их средним значениям по ансамблю Гиббса. С помощью распределения Гиббса может быть вычислено среднее значение любой физической величины либо непосредственно с помощью статистического интеграла, либо с помощью частичных функций между одновременными положениями нескольких частиц в заданных точках пространства. Для метастабильных состояний эргодическая гипотеза не выполняется. Хаотическое расположение частиц в фиксированных точках пространства приводит к локальной микроскопической неоднородности.

Модернизация заключается в том, что рассматриваются одинаковые копии подсистем (реплики). Внутри каждой из них, как и в термодинамически-равновесных системах, межмолекулярное взаимодействие задается одинаковым образом. Однако между репликами теперь существует взаимодействие. Параметры взаимодействия подбираются так, чтобы среднее расстояние между частицами было меньше, чем в жидкости. По существу, это является критерием отличия переохлажденной жидкости от идеального стекла. В результате удается описать переход из начального равновесного состояния в конечное метастабильно состояние, не прибегая к рассмотрению промежуточных кинетических процессов. В англоязычной литературе теория реплик «хаотического фазового перехода первого порядка» и его реализация для практически важных молекулярных систем (многокомпонентные жидкости с различными потенциалами межмолекулярного взаимодействия, гелеобразные системы и т. д.) получили бурное развитие. Теория реплик по значимости стоит в одном ряду с формулировкой канонического распределения Гиббса и метода интегральных уравнений статистической теории термодинамически равновесных жидкостей. Однако важно подчеркнуть, что теория реплик не дает никакого представления о релаксационных процессах. Интегральные уравнения для частичных функций распределения дают только представление о структурных характеристиках термодинамически равновесных и метастабильных состояний, достигаемых на бесконечно больших временных интервалах.

Для пространственно-однородных жидкостей двухчастичная функция распределения зависит от расстояния между частицами $r_{12} = |\vec{r_1} - \vec{r_2}|$. В этом случае уравнение для одночастичной функции распределения удовлетворяется тождественно. Система двух уравнений ОЦ сворачивается к одному уравнению для двухчастичной функции распределения $G_{12}^{(0)}(r_{12})$. Для пространственно-неоднородных систем функции необходимо решать оба уравнения ОЦ для функций $G_1(\vec{r_1})$ и $G_{12}(\vec{r_1}, \vec{r_2})$. Заметим, что решение уравнений (1) и (2) для этих функций многих переменных является сложной вычислительной задачей. Эту проблему обходят заменой прямой корреляционной функции $C_{12}^{(0)}(\vec{r_1}, \vec{r_2})$ ее граничным значением $C_{12}^{(0)}(r_{12})$. В зависимости от применяемой аппроксимации получают то или иное нелинейное интегральное уравнение на одночастичную функцию распределения (синглетное приближение), описывающую профиль локальной плотности $n(z_1) = nG_1(z_1) = n\exp\{\omega_1(z_1)\}$ вблизи твердой поверхности. Все они являются нелинейными интегральными уравнениями и решаются численно. Тем не менее, методическая погрешность синглетного приближения также остается неизвестной, и полученное решение вновь приходится сравнивать с численным экспериментом. Анализ численных решений приведен в работе [7]. Таким образом, описание структуры жидкостей в контакте с твердой поверхностью остается актуальной задачей.

В наших работах [2, 3, 16] было предложено переопределить неприводимые функциональные диаграммы в одночастичном уравнении так, чтобы нелинейности компенсировались, и в синглетном приближении получилось линейное интегральное уравнение в классификации Фредгольма второго рода. Проведен анализ литературы по аналитическому и численному решению уравнений Фредгольма второго рода с целью реализации алгоритма, требующего наименьших вычислительных ресурсов.

2. Линейное интегральное уравнение физики жидкостей на границе с твердой поверхностью. Для вычисления локальной микроструктуры граничных слоев жидкостей и термодинамических параметров необходимо знать одночастичную функцию распределения $G_1(\vec{r_1}) = \exp\{-\Phi_1(\vec{r_1})/kT + \omega_1(\vec{r_1})\}$, которая определяет вероятность нахождения частицы во внешнем поле $\Phi_1(\vec{r_1})$ вблизи точки с координатами $\vec{r_1}$. Одночастичный термический потенциал $\omega_1(\vec{r_1})$ учитывает взаимодействие частицы с окружающей средой. Линейное интегральное уравнение Фредгольма для функции распределения $\exp\{\omega_1(z_1)\}$ для жидкости вблизи твердой поверхности ($\Phi_1(\vec{r_1}) = 0$) было получено в [2, 3, 16]:

$$(e^{\omega_1(z_1)} - 1) - 2\pi n \int\limits_0^\infty dz_2 (e^{\omega_1(z_2)} - 1) \int\limits_{|z_{12}|}^\infty r_{12} dr_{12} C_{12}(r_{12}) = -2\pi n \int\limits_{z_1}^\infty dz_{12} \int\limits_{z_{12}}^\infty r_{12} dr_{12} C_{12}(r_{12}). \tag{3}$$

Здесь учтено, что взаимодействие частиц жидкости с поверхностью осуществляется как взаимодействие твердых сфер. Прямая корреляционная функция $C_{12}(r_{12})$ должна быть предварительно вычислена. Учтем, что (3) есть уравнение Фредгольма второго рода. Ядро уравнения и правая часть предварительно вычисляются из соответствующего интегрального уравнения для двухчастичной функции распределения макроскопической жидкости [8, 15, 17]. В том случае, когда параметры уравнения вычисляются аналитически, данное уравнение также может быть решено аналитически. В частности, для замыкания Перкуса—Йевика [8] внутренние интегралы уравнения (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &K(|z|) = -\theta(1 - |z|)\Psi(|z|), \\ &\Psi(|z|) = \int\limits_{|z|}^1 r_{12} dr_{12} (\alpha + \beta r_{12} + \gamma r_{12}^3), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\alpha = (2\eta + 1)^2/(\eta - 1)^4$, $\beta = -3\eta(2 + \eta)^2/2(\eta - 1)^4$, $\gamma = \eta(2\eta + 1)^2/2(\eta - 1)^4$.

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\Psi(z) = \Psi(0) + \frac{\Psi^{(2)}(0)}{2!} z^2 + \frac{\Psi^{(3)}(0)}{3!} z^2 + \frac{\Psi^{(5)}(0)}{5!} z^2, \tag{5}$$

$$\Psi(0) = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5}, \quad \Psi^{(2)}(0) = -a, \quad \Psi^{(3)}(0) = -2b, \quad \Psi^{(5)}(0) = -24c. \tag{6}$$

Соответственно, можно найти значение производной $\Psi^{(i)}(z)$ $(i = 0, \ldots, 5)$ в точке $z = 1$. В результате уравнение (3) принимает вид

$$f(z_1) = -12\eta \int\limits_0^{1+z_1} dz_2 f(z_2) \Psi(|z_1 - z_2|) + 12\eta \int\limits_{z_1}^1 dz_2 \Psi(z_2), \tag{7}$$

$$f(z_1) = -12\eta \int\limits_{z_1-1}^{z_1+1} dz_2 f(z_2) \Psi(|z_1 - z_2|), \tag{8}$$

где $\eta = \pi n/6$ и $f(z_1) = \exp(\omega_1(z_1)) - 1$.

Асимптотическое поведение функции $f(z_1)$ при больших значениях аргумента вычислено в наших работах [1, 4]. Было показано, что решение имеет осциллирующий, затухающий вид, однако амплитуда колебаний оставалась неизвестной, так как для ее определения необходимо знать решение на малых расстояниях. Тем не менее, было показано, что волновые числа, определяющие скорость затухания и период осцилляций, находятся численным решением двух трансцендентных уравнений. Численное решение системы трансцендентных уравнений проводилось методом последовательных приближений для плотностей жидкости в диапазоне от 0,26 до 0,785. Было показано, что при малой плотности молекулярной системы затухание носит короткодействующий характер. Однако с ростом плотности осцилляции носят дальнодействующий характер, что обусловлено эффектами плотной упаковки твердых сфер. Полученное решение можно распространить на молекулярные системы с реалистичными потенциалами межчастичного взаимодействия. В данной работе мы рассмотрим решение системы уравнений (7), (8) при малых значениях аргумента.

Из уравнения (7) следует, что интегрирование искомой функции нужно вести на интервале $1 \leqslant z \leqslant 2$. Но для этого, как следует из (6), необходимо знать ее поведение на интервале $2 \leqslant z \leqslant 3$ и т. д. Таким образом, получается бесконечная последовательность функций $f_n(z_1)$, $n \leqslant z_1 \leqslant n+1$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. Решение уравнений (7), (8) будем искать в классе кусочно-непрерывных функций. Поскольку второе слагаемое в (7) есть полином шестой степени, то полагаем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{6} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad f(1) = \sum_{n=0}^{6} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1. \tag{9}$$

Соответственно можно найти все производные функции $f(z)$ в точке $z = 1$. Все они будут выражаться через производные $f^{(n)}(0)$. Точно также полагаем, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{6} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (z-1)^n, \quad f(2) = \sum_{n=0}^{6} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}, \quad 1 \leqslant z \leqslant 2. \tag{10}$$

Из (10) можно найти все производные функции $f(z)$ в точке $z = 2$, которые будут выражаться через производные $f^{(n)}(1)$. Аналогично можно записать разложение функции $f(z)$ в ряд по степеням z на остальных интервалах. Таким образом последовательно вычисляется функция $f(z)$ на всем интервале $0 \leqslant z < \infty$.

Теперь рассмотрим уравнение (7), которое с учетом высказанных соображений, запишем в виде

$$f(z_1) = -12\eta \left[\int_0^1 dz_2 f(z_2) \Psi(|z_1 - z_2|) + \int_1^{1+z_1} dz_2 f(z_2) \Psi(z_2 - z_1) \right] + 12\eta \int_{z_1}^1 dz_2 \Psi(z_2). \tag{11}$$

Дифференцируя обе части уравнения (11) и полагая затем $z_1 = 0$, получим систему уравнений, в которую входят функция $f(z)$ и ее производные $f^{(n)}(z)$ в точках $z_1 = 0$ и $z_1 = 1$. Например,

$$f(0) = -12\eta \int_0^1 dz_2 f(z_2) \Psi(z_2) + 12\eta \int_0^1 dz_2 \Psi(z_2), \tag{12}$$

$$f^{(1)}(0) = 12\eta \left(\int_0^1 dz_2 f(z_2) \Psi^{(1)}(z_2) - \Psi(0) \right), \tag{13}$$

$$f^{(2)}(0) = -12\eta \left(\int_0^1 dz_2 f(z_2) \Psi^{(2)}(z_2) - f(1) \Psi^{(1)}(1) \right), \tag{14}$$

$$f^{(3)}(0) = 12\eta \left[\int_0^1 dz_2 f(z_2) \Psi^{(3)}(z_2) - f(1) \Psi^{(2)}(1) + f^{(1)}(1) \Psi^{(1)}(1) - \Psi^{(2)}(0) \right], \tag{15}$$

и т. д., вплоть до $f^{(6)}(z)$. В результате получается система линейных алгебраических уравнений шестого порядка, решение которой позволяет вычислить функцию $f(z)$ на интервалах $0 \leqslant z \leqslant 1$ и $1 \leqslant z \leqslant 2$.

Перейдем далее к решению уравнения (8). Значение функции $f(z_1)$ в левой части уравнения на интервале $1 \leqslant z \leqslant 2$, позволяет вычислить ее на следующем интервале $2 \leqslant z \leqslant 3$. С этой целью, выделив по отдельности интегрирование на разных интервалах, перепишем уравнение (8) в виде

$$\eta \int\limits_{2}^{z_1+1} dz_2 f(z_2)\Psi(z_2 - z_1) =$$
$$= -\eta \left[\int\limits_{z_1-1}^{1} dz_2 f(z_2)\Psi(z_1 - z_2) + \int\limits_{1}^{z_1} dz_2 f(z_2)\Psi(z_1 - z_2) + \int\limits_{z_1}^{2} dz_2 f(z_2)\Psi(z_2 - z_1) \right] - f(z_1). \quad (16)$$

В правой части (14) все слагаемые вычисляются на интервале $0 \leqslant z \leqslant 2$ и являются заданными величинами. В результате получается интегральное уравнение Вольтерра первого рода, решение которого определяет функцию $f(z)$ на интервале $2 \leqslant z \leqslant 3$. Рассмотренный в уравнениях (12)—(16) алгоритм позволяет последовательно находить решение уравнения (6) на интервале $3 \leqslant z \leqslant 4$ и т. д. Подстановка полученного решения в (8) для $z > 4$ приводит к уравнениям Вольтерра для старших функций, которые также могут быть решены аналитически. Заметим, что для численного решения уравнения (3) с другими параметрами межмолекулярного взаимодействия и замыканиями необходимо предварительно их вычислить на основе решения нелинейных интегральных уравнений Орнштейна—Цернике.

3. Заключение. В настоящее время все нелинейные интегральные уравнения физики макроскопических жидкостей получаются суммированием приводимых диаграмм в формально точных уравнениях Орнштейна—Цернике. Неприводимые диаграммы попросту не учитываются, что приводит к приближенным уравнениям, методическая погрешность которых неизвестна. Оценка погрешности осуществляется сравнением с результатами численного эксперимента, который служит эталоном точности. Такая же ситуация наблюдается и при описании поверхностных явлений в жидкостях — так называемое синглетное приближение.

Разрабатываемый нами подход к статистической физике поверхностных явлений основан на предположении, что учет неприводимых диаграмм в бесконечных функциональных рядах для прямых корреляционных функций, можно проводить так, чтобы осуществлялась компенсация всех нелинейностей. Данный подход применен для модификации синглетного приближения одночастичной функции распределения жидкости в контакте с твердой поверхностью. В результате получается стандартное уравнение Фредгольма второго рода, ядро и правая часть которого находятся предварительно решением для прямой корреляционной функции одного из нелинейных интегральных уравнений макроскопической жидкости. В качестве такого мы выбрали уравнение Перкуса—Йевика, которое допускает аналитическое решение для прямой корреляционной функции. Соответственно решение уравнение Фредгольма второго рода также допускает аналитическое решение. Нами предложен алгоритм аналитического решения посредством разложения искомого решения в степенные ряды по малому параметру, характеризующему удаление частицы от твердой поверхности. Решение представлено полиномом шестой степени по этому параметру.

Для других прямых корреляционных функций ядро и правую часть уравнения Фредгольма второго рода необходимо предварительно определить численно. Соответственно уравнение также придется решать численно. Однако это требует меньших вычислительных затрат, чем решение нелинейного синглетного уравнения для одночастичной функции распределения. Заметим, что методическую погрешность предложенного нами уравнения все-таки придется сопосталять с данными численного эксперимента. Такое сопоставление позволит выяснить, у какого уравнения методическая погрешность меньше.

Другим достоинством линейного уравнения является возможность обобщить его для описания тонких аморфных пленок на основе теории хаотического фазового перехода первого порядка. Заметим, что идеология этой теории до сих пор применялась для описания пространственно-однородных систем (в отсутствии внешних полей и вдали от ограничивающих поверхностей). Однако возможно применить теорию хаотического фазового перехода первого порядка для описания структуры жидкости, граничащей с твердой поверхностью на основе уравнения (3). Предварительно ядро и правая часть уравнения (3) должны быть вычислены с помощью данной идеологии, а затем стандартными способами можно решать линейное интегральное уравнение. В результате появляется возможность описывать методами статистической физики поверхностную аморфизацию переохлажденных граничных слоев жидкостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аграфонов Ю. В., Петрушин И. С.* Расчет структурных характеристик аморфных тел методом молекулярных функций распределения// Изв. РАН. Сер. Физ. — 2020. — *84*, № 7. — С. 951–956.
2. *Agrafonov Yu. V., Petrushin I. S.* Two-particle distribution function of a non-ideal molecular system near a hard surface// Physics Procedia. — 2015. — *71.* — P. 364-368.
3. *Agrafonov Yu. V., Petrushin I. S.* Random first order transition from a supercooled liquid to an ideal glass// Cond. Matter Interphases. — 2020. — *22*, № 2. — P. 291-302.
4. *Agrafonov Yu. V., Petrushin I. S.* Linear singlet equation in the surface phenomena physics// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847.* — 012035.
5. *Agrafonov Yu. V., Petrushin I. S., Khalaimov D. V.* Long-range oscillations of a single-particle distribution function for a molecular system of hard spheres near a solid surface in the Percus–Yevick approximation// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *2036.* — 012012.
6. *Franz S., Mezard M., Parisi G., Peliti L.* The response of glassy systems to random perturbations: A bridge between equilibrium and off-equilibrium// J Stat. Phys. — 1999. — *97*, № 3-4. — P. 459–488.
7. *He Y., Rice S. A., Xu X.* Analytic solution of the Ornstein–Zernike relation for inhomogeneous liquids// J. Chem. Phys. — 2016. — *145.* — 234508.
8. *Martynov G. A.* Fundamental Theory of Liquids. Method of Distribution Functions. — Bristol: Adam Hilger, 1992.
9. *Mezard M., Parisi G.* Thermodynamics of glasses: a first principles computation// J. Phys. Condens. Matter. — 1999. — *11*, № 3-4. — P. A157–A165.
10. *Parisi G., Procaccia I., Shor C., Zylberg J.* Effective forces in thermal amorphous solids with genericinteractions// Phys. Rev. E. — 2019. — *99*, № 1. — 011001.
11. *Parisi G., Slanina F.* Toy model for the meanfield theory of hard-sphere liquids// Phys. Rev. E. — 2000. — *62*, № 5. — 6554.
12. *Parisi G., Zamponi F.* The ideal glass transition of hard spheres// J. Chem. Phys. — 2005. — *123*, № 14. — 144501.
13. *Parisi G., Zamponi F.* Amorphous packings of hard spheres for large space dimension// J. Stat. Mech. Theory Exp. — 2006. — *2006*, № 3. — P03017.
14. *Robles M., Lopez de Haro M., Santos A., Bravo Yuste S.* Is there a glass transition for dense hard-sphere systems?// J. Chem. Phys. — 1998. — *108*, № 3. — P. 1290-1291.
15. *Rogers F. J., Young D. A.* New, thermodynamically consistent, integral equation for simple fluids// Phys. Rev. A. — 1984. — *30*, № 2. — 999.
16. *Tikhonov D. A., Kiselyov O. E., Martynov G. A., Sarkisov G. N.* Singlet integral equation in the statistical theory of surface phenomena in liquids// J. Mol. Liquids. — 1999. — *82.* — P. 3–17.
17. *Vompe A. G., Martynov G. A.* The self-consistent statistical theory of condensation// J. Chem. Phys. — 1997. — *106*, № 14. — P. 6095-6101.
18. *Wertheim M. S.* Exact solution of the Percus–Yevick integral equation for hard spheres// Phys. Rev. Lett. — 1963. — *10*, № 8. — P. 321-323.

Аграфонов Юрий Васильевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `agrafonov@physdep.isu.ru`

Петрушин Иван Сергеевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `ivan.kiel@gmail.com`

Халаимов Даниил Вячеславович
Иркутский государственный университет
E-mail: `thv.mail.ru@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 10–37
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-10-37

УДК 514.763

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. II. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЗЕНХАРТА

© 2022 г. **А. В. АМИНОВА, Д. Р. ХАКИМОВ**

Аннотация. Работа посвящена имеющей многочисленные геометрические и физические приложения проблеме исследования многомерных псевдоримановых многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Настоящая статья является второй частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *212.* — С. 10–29. Продолжение будет опубликовано в следующих выпусках.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h-пространство, система дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнение Киллинга, проективная алгебра Ли.

LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE MOTIONS OF FIVE-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES. II. INTEGRATION OF THE EISENHART EQUATIONS

© 2022 **A. V. AMINOVA, D. R. KHAKIMOV**

Abstract. This work is devoted to the problem of studying multidimensional pseudo-Riemannian manifolds that admit Lie algebras of infinitesimal projective (in particular, affine) transformations, wider than Lie algebras of infinitesimal homotheties. Such manifolds have numerous geometric and physical applications. This paper is the second part of the work. The first part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *212.* — P. 10–29. Continuation will be published in future issues.

Keywords and phrases: differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space, system of partial differential equations, nonhomothetical projective motion, Killing equation, projective Lie algebra.

AMS Subject Classification: 53Z05

2. Интегрирование уравнений Эйзенхарта

Так как всякая r-мерная алгебра Ли обязательно содержит одномерную подалгебру, а уравнения, определяющие одномерную проективную алгебру Ли в (M^5, g), имеют вид

$$L_X g = h, \quad \nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi, \tag{2.1}$$

где последнее уравнение после замены $h = a + 2\varphi g$ равносильно

$$\nabla a(Y,Z,W) = g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi,$$

$Y, Z, W \in TM$, $(n+1)\varphi = \mathrm{Div}\, X$, то в первую очередь необходимо определить те пространства, для которых эти уравнения имеют решения (g, h, φ). Первое из уравнений (2.1) называется *обобщенным уравнением Киллинга*, а второе — *уравнением Эйзенхарта*. Если $\varphi = \mathrm{const}$, т.е. $\mathrm{Div}\, X = \mathrm{const}$, то проективное движение является аффинным.

Классификация пространств, допускающих негомотетические проективные движения, основана на разбиении их по типам в соответствии с алгебраической структурой производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении проективного движения X, определяемой в каждой точке $p \in V \subseteq M$ характеристикой Сегре χ тензора $h = L_X g$. Тип тензора $L_X g$ определяет тип проективного движения X и тип метрики g в области V. Такие метрики называются *h-метриками типа χ*, а соответствующие пространства — *h-пространствами типа χ* (см. [12, 13]).

В данном разделе мы интегрируем уравнения Эйзенхарта и находим пятимерные жесткие h-метрики всех допустимых типов (**??**).

2.1. Коэффициенты вращения Риччи пятимерных жестких h-пространств в косонормальном репере. В данном разделе для каждой характеристики билинейной формы h в пространстве M^5 мы находим формы связности и коэффициенты вращения Риччи, удовлетворяющие уравнениям Эйзенхарта в косонормальном репере.

Пусть θ_h — каноническая 1-форма, сопряженная с Y_h, (Y_h) — косонормальный репер в области $V \subseteq M$, в котором билинейные формы g и $h = a + 2\varphi g$ имеют канонический вид:

$$g\big|_V = \sum_{p=1}^{k} g_p, \quad h\big|_V = \sum_{p=1}^{k} (\lambda_p + 2\varphi) g_p + h_0 \equiv a + 2\varphi g, \quad 2\varphi = \sum_{p=1}^{k} \lambda_p,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — попарно различные характеристические числа билинейной формы $a = h - 2\varphi g$ кратностей соответственно $r_1, \ldots, r_k$, и при $n = 5$ для разных невырожденных характеристик (**??**) определяются следующими формулами:

$$\begin{gathered} \chi_{221} = \{221\}: \ g = e_1(\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1) + e_2(\theta_3\theta_4 + \theta_4\theta_3) + e_3\theta_5\theta_5, \\ h_0 = a_0 = e_1(\theta_1\theta_1) + e_2(\theta_3\theta_3); \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\bar{a}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 f_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 f_2 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 f_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \chi_{32} = \{32\}: \ g = e_1(\theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_2 + \theta_3\theta_1) + e_2(\theta_4\theta_5 + \theta_5\theta_4), \\ h_0 = a_0 = e_1(\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1) + e_2(\theta_4\theta_4); \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\bar{a}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 f_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 \\ e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 & e_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} \chi_{41} = \{41\}: \ g = e_1(\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1) + e_2(\theta_5\theta_5), \\ h_0 = a_0 = e_1(\theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_2 + \theta_3\theta_1); \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\bar{a}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_1 f_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 f_1 & e_1 & 0 \\ 0 & e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 \\ e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} \chi_5 = \{5\}: \ g = e(\theta_1\theta_5 + \theta_2\theta_4 + \theta_3\theta_3 + \theta_4\theta_2 + \theta_5\theta_1), \\ h_0 = a_0 = e(\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1); \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$(\bar a_{pq}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ef\\ 0 & 0 & 0 & ef & e\\ 0 & 0 & ef & e & 0\\ 0 & ef & e & 0 & 0\\ ef & e & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad (\bar g_{pq}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e\\ 0 & 0 & 0 & e & 0\\ 0 & 0 & e & 0 & 0\\ 0 & e & 0 & 0 & 0\\ e & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

здесь e, e_1, e_2, e_3 равны ± 1.

Помимо перечисленных, при $n = 5$ возможны характеристики $\chi_\nu = \{\nu 1, \dots, 1\}$, $\nu = 1, 2, 3$, относящиеся к лоренцевой сигнатуре; они были подробно исследованы в работах А. В. Аминовой [12, 13], поэтому здесь не рассматриваются.

Подставив в уравнение Эйзенхарта (**??**) вместо $\bar g_{pq}$ и $\bar a_{pq}$ соответствующие канонические значения и учитывая, что

$$\begin{array}{lllllll} \tilde 1 = 2, & \tilde 2 = 1, & \tilde 3 = 4, & \tilde 4 = 3, & \tilde 5 = 5 & \text{в случае } \{221\};\\ \tilde 1 = 3, & \tilde 2 = 2, & \tilde 3 = 1, & \tilde 4 = 5, & \tilde 5 = 4 & \text{в случае } \{32\};\\ \tilde 1 = 4, & \tilde 2 = 3, & \tilde 3 = 2, & \tilde 4 = 1, & \tilde 5 = 5 & \text{в случае } \{41\};\\ \tilde 1 = 5, & \tilde 2 = 4, & \tilde 3 = 3, & \tilde 4 = 2, & \tilde 5 = 1 & \text{в случае } \{5\}, \end{array}$$

получим системы $n^2(n+1)/2$ уравнений, которые после ряда преобразований приводят к следующим соотношениям.

***H*-пространства H_{221} типа $\chi_{221} = \{221\}$:**

$$\begin{gathered} Y_1\varphi = Y_3\varphi = 0, \quad d\lambda_1 = e_1(Y_2\varphi)\theta_1, \quad d\lambda_2 = e_2(Y_4\varphi)\theta_3, \quad d\lambda_3 = 2e_3(Y_5\varphi)\theta_5,\\ \omega_{14} = \frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_1, \quad \omega_{15} = \frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_1}\theta_1, \quad \omega_{21} = (Y_2\varphi)\theta_2, \quad \omega_{23} = \frac{Y_2\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_3,\\ \omega_{24} = \frac{Y_4\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_1 + \frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_2 - \frac{Y_2\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_3 + \frac{Y_2\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_4,\\ \omega_{25} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_1}\theta_2 + \frac{Y_2\varphi}{\lambda_3-\lambda_1}\theta_5,\\ \omega_{35} = \frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_2}\theta_3, \quad \omega_{43} = (Y_4\varphi)\theta_4, \quad \omega_{45} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_2)^2}\theta_3 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_2}\theta_4 + \frac{Y_4\varphi}{\lambda_3-\lambda_2}\theta_5. \end{gathered} \tag{2.10}$$

***H*-пространства H_{32} типа $\chi_{32} = \{32\}$:**

$$\begin{gathered} Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_4\varphi = 0, \quad d\lambda_1 = \frac{2}{3}e_1(Y_3\varphi)\theta_1, \quad d\lambda_2 = e_2(Y_5\varphi)\theta_4,\\ \omega_{12} = \frac{1}{3}(Y_3\varphi)\theta_1, \quad \omega_{13} = -(Y_3\varphi)\theta_2, \quad \omega_{15} = \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_1,\\ \omega_{25} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_2, \quad \omega_{32} = (Y_3\varphi)\theta_3, \quad \omega_{34} = \frac{Y_3\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_4,\\ \omega_{35} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_2 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_3 - \frac{Y_3\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_4 + \frac{Y_3\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_5. \end{gathered} \tag{2.11}$$

H-пространства H_{41} типа $\chi_{41} = \{41\}$:

$$\begin{gathered}
Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_3\varphi = 0, \quad d\lambda_1 = \frac{1}{2}(Y_4\varphi)\theta_1, \quad d\lambda_2 = 2(Y_5\varphi)\theta_5, \\
\omega_{13} = \frac{1}{2}(Y_4\varphi)\theta_1, \quad \omega_{14} = -(Y_4\varphi)\theta_2, \quad \omega_{15} = \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_1, \\
\omega_{24} = -(Y_4\varphi)\theta_3, \quad \omega_{25} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_2, \\
\omega_{34} = -(Y_4\varphi)\theta_4, \quad \omega_{35} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_2 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_3, \\
\omega_{45} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^4}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}\theta_2 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_3 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_4 + \frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_5.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

H-пространства H_5 типа $\chi_5 = \{5\}$:

$$\begin{gathered}
Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_3\varphi = Y_4\varphi = 0, \quad d\lambda = \frac{2}{5}(Y_5\varphi)\theta_1, \\
\omega_{32} = -\frac{1}{5}(Y_5\varphi)\theta_1, \quad \omega_{41} = -\frac{3}{5}(Y_5\varphi)\theta_1, \quad \omega_{51} = (Y_5\varphi)\theta_2, \\
\omega_{52} = (Y_5\varphi)\theta_3, \quad \omega_{53} = (Y_5\varphi)\theta_4, \quad \omega_{54} = (Y_5\varphi)\theta_5.
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Отсюда, используя формулу (**??**), найдем коэффициенты вращения Риччи γ_{ijk} для рассматриваемых h-пространств.

Тип $\{221\}$:

$$\begin{gathered}
\gamma_{121} = -\gamma_{211} = e_1Y_2\varphi, \quad \gamma_{142} = -\gamma_{412} = \frac{e_1Y_4\varphi}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad \gamma_{152} = -\gamma_{512} = \frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_1-\lambda_3}, \\
\gamma_{234} = -\gamma_{324} = \frac{e_2Y_2\varphi}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad \gamma_{241} = -\gamma_{421} = \frac{e_2Y_4\varphi}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad \gamma_{242} = -\gamma_{422} = -\frac{e_1Y_4\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}, \\
\gamma_{243} = -\gamma_{423} = \frac{e_2Y_2\varphi}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad \gamma_{244} = -\gamma_{422} = \frac{e_2Y_2\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}, \quad \gamma_{251} = -\gamma_{521} = \frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_1-\lambda_3}, \\
\gamma_{522} = -\gamma_{252} = -\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}, \quad \gamma_{255} = -\gamma_{522} = \frac{e_3Y_2\varphi}{\lambda_1-\lambda_3}, \quad \gamma_{343} = -\gamma_{433} = e_2Y_4\varphi, \\
\gamma_{354} = -\gamma_{534} = \frac{e_2Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_3}, \quad \gamma_{453} = -\gamma_{543} = \frac{e_2Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_3}, \\
\gamma_{544} = -\gamma_{454} = \frac{e_2Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_2)^2}, \quad \gamma_{455} = -\gamma_{545} = \frac{e_3Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_3}.
\end{gathered}$$

Тип $\{32\}$:

$$\begin{gathered}
\gamma_{213} = -\gamma_{123} = \frac{1}{3}e_1Y_3\varphi, \quad \gamma_{231} = -\gamma_{321} = e_1Y_3\varphi, \quad \gamma_{312} = -\gamma_{132} = -e_1Y_3\varphi, \\
\gamma_{435} = -\gamma_{345} = \frac{e_1Y_3\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}, \quad \gamma_{513} = -\gamma_{153} = \frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}, \quad \gamma_{522} = -\gamma_{252} = \frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}, \\
\gamma_{523} = -\gamma_{253} = \frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}, \quad \gamma_{531} = -\gamma_{351} = \frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}, \quad \gamma_{532} = -\gamma_{352} = \frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}, \\
\gamma_{533} = -\gamma_{353} = \frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}, \quad \gamma_{534} = -\gamma_{354} = \frac{e_2Y_3\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}, \\
\gamma_{535} = -\gamma_{355} = -\frac{e_2Y_3\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}, \quad \gamma_{544} = -\gamma_{454} = -e_2Y_5\varphi.
\end{gathered}$$

Тип $\{41\}$:

$$\gamma_{314}=-\gamma_{134}=\frac{1}{2}e_1Y_4\varphi,\quad \gamma_{413}=-\gamma_{143}=-e_1Y_4\varphi,\quad \gamma_{422}=-\gamma_{242}=-e_1Y_4\varphi,$$
$$\gamma_{431}=-\gamma_{341}=-e_1Y_4\varphi,\quad \gamma_{514}=-\gamma_{154}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},\quad \gamma_{523}=-\gamma_{253}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},$$
$$\gamma_{524}=-\gamma_{254}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2},\quad \gamma_{532}=-\gamma_{352}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},\quad \gamma_{533}=-\gamma_{353}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2},$$
$$\gamma_{534}=-\gamma_{354}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3},\quad \gamma_{541}=-\gamma_{451}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},\quad \gamma_{542}=-\gamma_{452}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2},$$
$$\gamma_{543}=-\gamma_{453}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3},\ \gamma_{544}=-\gamma_{454}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},\ \gamma_{545}=-\gamma_{455}=\frac{e_2Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Тип $\{5\}$:

$$\gamma_{145}=-\gamma_{415}=-\frac{3}{5}eY_5\varphi,\quad \gamma_{154}=-\gamma_{514}=eY_5\varphi,\quad \gamma_{235}=-\gamma_{325}=-\frac{1}{5}eY_5\varphi,$$
$$\gamma_{253}=-\gamma_{523}=eY_5\varphi,\quad \gamma_{352}=-\gamma_{532}=eY_5\varphi,\quad \gamma_{451}=-\gamma_{541}=eY_5\varphi.$$

Во всех четырех случаях невыписанные коэффициенты ω_{ij} и γ_{ijk} равны нулю.

2.2. *H*-пространства типа {221}. В этом разделе будут определены тензоры g_{ij} и h_{ij} для h-пространств типа $\{221\}$, когда тензор h_{ij} имеет три главных направления, два из которых изотропные.

Из (2.10) следуют равенства

$$Y_i\lambda_1=\delta_{i2}Y_2\varphi,\quad Y_i\lambda_2=\delta_{i4}Y_4\varphi,\quad Y_i\lambda_3=\delta_{i5}Y_5\varphi,\quad i=1,\dots,5. \tag{2.14}$$

Используя полученные соотношения и формулу (**??**), составим всевозможные скобки Ли векторных полей $Y_1,\dots,Y_5$:

$$\begin{gathered}
[Y_1,Y_2]=-(Y_2\varphi)Y_2,\quad [Y_1,Y_3]=0,\quad [Y_1,Y_4]=\frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_1,\\
[Y_1,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_1}Y_1,\quad [Y_2,Y_3]=\frac{Y_2\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_3,\\
[Y_2,Y_4]=\frac{Y_4\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_1+\frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_2-\frac{Y_2\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_3-\frac{Y_2\varphi}{\lambda_1-\lambda_2}Y_4,\\
[Y_2,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}Y_1+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_1}Y_2-\frac{Y_2\varphi}{\lambda_1-\lambda_3}Y_5,\quad [Y_3,Y_4]=-(Y_4\varphi)Y_4,\\
[Y_3,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_2}Y_3,\quad [Y_4,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_2)^2}Y_3+\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_2)}Y_4-\frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_3}Y_5.
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Напомним, что система линейных дифференциальных уравнений в частных производных с неизвестной функцией u

$$Y_su\equiv \underset{s}{\xi^i}(x^1,\dots,x^n)\frac{\partial u}{\partial x^i}=0,\quad s=1,\dots,p;\ i=1,\dots,n,$$

где $\underset{s}{\xi^i}$ — компоненты p векторных полей косонормального репера $(Y_1,\dots,Y_n)$, является вполне интегрируемой, т.е. допускает $n-p$ независимых решений $u^1,\dots,u^p$, если и только если все коммутаторы операторов системы

$$[Y_s,Y_t]\equiv Y_sY_t-Y_tY_s=\sum_{r=1}^{n}e_r(\gamma_{rst}-\gamma_{rts})Y_r,\quad s,t=1,\dots,p, \tag{2.16}$$

где

$$\gamma_{ijk}=\underset{i}{\xi}_{l,m}\underset{j}{\xi^l}\underset{k}{\xi^m} \tag{2.17}$$

— коэффициенты вращения Риччи, линейно выражаются через операторы системы $Y_1, \dots, Y_p$ (см. [62, с. 143], [61, с. 12]).

Из (2.15) видно, что системы дифференциальных уравнений

$$Y_1 u = Y_3 u = Y_4 u = Y_5 u = 0, \quad Y_3 u = Y_4 u = Y_5 u = 0$$

являются вполне интегрируемыми и имеют соответственно одно и два решения. Обозначим решение первой системы и одно из двух независимых решений второй системы через u^1, еще одно решение второй системы обозначим u^2.

В новых координатах $x^{1'} = u^1(x)$, $x^{2'} = u^2(x)$, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^2 = \underset{3}{\xi}^p = \underset{4}{\xi}^p = \underset{5}{\xi}^p = 0$$

при $p = 1, 2$. Так же найдем

$$\underset{3}{\xi}^4 = \underset{2}{\xi}^q = \underset{4}{\xi}^q = \underset{5}{\xi}^q = 0$$

при $q = 3, 4$ и

$$\underset{1}{\xi}^5 = \underset{2}{\xi}^5 = \underset{3}{\xi}^5 = \underset{4}{\xi}^5 = 0.$$

После этого из (2.10), (2.14) следует, что λ_1 зависит только от x^2, λ_2 зависит только от x^4 и λ_3 зависит только от x^5:

$$\lambda_1 \equiv f_1(x^2), \quad \lambda_2 \equiv f_2(x^4), \quad \lambda_3 \equiv f_3(x^5).$$

Приравнивая в каждой координатной окрестности U координаты векторных полей в правых и левых частях уравнений (2.15), с помощью формулы (**??**) получим следующую систему из 21 нелинейного уравнения в частных производных с неизвестными $\underset{i}{\xi}^j$:

1° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 = -\underset{2}{\xi}^2 f_1'\underset{2}{\xi}^1;$

2° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 = -f_1'(\underset{2}{\xi}^2)^2;$

3° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5 = \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^5 = 0;$

4° $\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^3 + \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^3 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^3 = \underset{4}{\xi}^4 f_2'\underset{4}{\xi}^3;$

5° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^4 = -f_2'(\underset{4}{\xi}^4)^2;$

6° $\partial_4\underset{1}{\xi}^1 = -\dfrac{f_2'}{f_2 - f_1}\underset{1}{\xi}^1;$

7° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4 = 0;$

8° $\partial_5\underset{1}{\xi}^1 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{f_3'}{f_3 - f_1}\underset{1}{\xi}^1;$

9° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 = \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2 = 0;$

10° $\partial_2\underset{3}{\xi}^3 = -\dfrac{f_1'}{f_1 - f_2}\underset{3}{\xi}^3;$

11° $\partial_5\underset{3}{\xi}^3 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{f_3'}{f_3 - f_2}\underset{3}{\xi}^3;$

12° $-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^1 = \dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{4}{\xi}^4 f_2'\underset{1}{\xi}^1 + \dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{4}{\xi}^4 f_2'\underset{2}{\xi}^1;$

13° $-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^2 = \dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{4}{\xi}^4 f_2'\underset{2}{\xi}^2;$

14° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^3 = -\dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{2}{\xi}^2 f_1'\underset{3}{\xi}^3 - \dfrac{1}{f_1 - f_2}\underset{2}{\xi}^2 f_1'\underset{4}{\xi}^3;$

15° $\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4 = \dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{2}{\xi}^2 f_1'\underset{4}{\xi}^4;$

16° $\partial_5\underset{2}{\xi}^1 = -\dfrac{1}{(f_3 - f_1)^2}\dfrac{1}{2}\underset{5}{\xi}^5 f_3'\underset{1}{\xi}^1 - \dfrac{1}{f_3 - f_1}\dfrac{1}{2}\underset{5}{\xi}^5 f_3'\underset{2}{\xi}^1;$

17° $\quad -\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^2 = \dfrac{1}{f_3-f_1}\dfrac{1}{2}\underset{5}{\xi}^5 f_3'\underset{2}{\xi}^2;$

18° $\quad \partial_2\underset{5}{\xi}^5 = \dfrac{f_1'}{f_3-f_1}\underset{5}{\xi}^5;$

19° $\quad \partial_5\underset{4}{\xi}^3 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{f_3'}{(f_3-f_2)^2}\underset{3}{\xi}^3 - \dfrac{1}{2}\dfrac{f_3'}{f_3-f_2}\underset{4}{\xi}^3;$

20° $\quad \partial_5\underset{4}{\xi}^4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{f_3'}{f_2-f_3}\underset{4}{\xi}^4;$

21° $\quad \partial_4\underset{5}{\xi}^5 = \dfrac{f_2'}{f_3-f_2}\underset{5}{\xi}^5.$

Штрих здесь и далее означает производную функции одного переменного по ее аргументу, например, $f_1' \equiv df_1/dx^2$, $f_2' \equiv df_2/dx^4$, $f_3' \equiv df_3/dx^5$).

Из уравнения 3° следует

$$\partial_3\underset{1}{\xi}^1 = \partial_1\underset{3}{\xi}^3 = \partial_1\underset{5}{\xi}^5 = \partial_3\underset{5}{\xi}^5 = 0.$$

Интегрируя уравнения 6°, 8°, 10°, 11°, 18° и 21°, найдем

$$\underset{1}{\xi}^1 = \frac{1}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)^{1/2}}R_1(x^1,x^2),$$
$$\underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_1-f_2)(f_3-f_2)^{1/2}}R_3(x^3,x^4),$$
$$\underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1-f_3)(f_2-f_3)}R_5(x^5),$$

где R_1, R_3, R_5 — ненулевые функции указанных переменных. После преобразования координат

$$x^{1'} = \int R_1^{-1}dx^1, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = \int R_3^{-1}dx^3, \quad x^{4'} = x^4, \quad x^{5'} = \int R_5^{-1}dx^5,$$

не меняющего полученных ранее равенств, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^1 = \frac{1}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)^{1/2}}, \quad \underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_1-f_2)(f_3-f_2)^{1/2}}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1-f_3)(f_2-f_3)}.$$

Из уравнения 9° следует $\partial_3\underset{2}{\xi}^2 = 0$. Проинтегрировав уравнения 2°, 13° и 17°, найдем

$$\underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)^{1/2}(f_1'x^1+\tau(x^2))}.$$

Возможны два случая: $f_1' \neq 0$ и $f_1' = 0$.

В первом случае сделаем преобразование координат

$$x^{2'} = f_1(x^2), \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 2,$$

и положим $\overline{\tau} = (f_1')^{-1}\tau$; тогда

$$\underset{2}{\xi}^{2'} = (x^{3'}+\overline{\tau})^{-1}\underset{1}{\xi}^{1'}, \quad \underset{2}{\xi}^{p'} = \underset{2}{\xi}^p, \quad p \neq 2.$$

Во втором случае сделаем замену

$$\bar{x}^2 = \int \tau dx^2.$$

В итоге, опустив черту, объединим оба случая формулами

$$f_1 = \varepsilon_1 x^2 + (1-\varepsilon_1)c_1, \quad c_1 = \mathrm{const},$$
$$\underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)^{1/2}A}, \quad A \equiv \varepsilon_1\big(x^1+\tau(x^2)\big)+1-\varepsilon_1,$$

где ε_1 равно 0 или 1.

Подобно этому, из уравнений 5°, 7°, 15° и 20° имеем

$$f_2 = \varepsilon_2 x^4 + (1-\varepsilon_2)c_2, \quad c_2 = \mathrm{const},$$

$$\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2} B}, \quad B \equiv \varepsilon_2\big(x^3 + \omega(x^4)\big) + 1 - \varepsilon_2,$$

где ε_2 равно 0 или 1.

Интегрируя уравнения 1°, 9°, 12° 16° 4°, 7°, 14° и 19°, получим

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2A(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}}(A\sigma_1 + N(x^2)),$$
$$\underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2B(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}}(B\sigma_2 + M(x^4)),$$

где

$$\sigma_1 \equiv \frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1}, \quad \sigma_2 \equiv \frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2}.$$

После преобразования координат

$$x^{1'} = x^1 - \frac{1}{2}\int N dx^2, \quad x^{3'} = x^3 - \frac{1}{2}\int M dx^4, \quad x^{k'} = x^k, \quad k \neq 1, 3,$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}}\sigma_1, \quad \underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}}\sigma_2.$$

Используя найденные значения компонент векторов косонормального репера:

$$\begin{gathered}
\underset{1}{\xi}^1 = \frac{1}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}}, \quad \underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}}\sigma_1, \\
\underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}\left(\varepsilon_1\left(x^1 + \tau(x^2)\right) + 1 - \varepsilon_1\right)}, \\
\underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}}, \quad \underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}}\sigma_2, \\
\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}\left(\varepsilon_2\left(x^3 + \omega(x^4)\right) + 1 - \varepsilon_2\right)}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)}
\end{gathered} \tag{2.18}$$

(выписаны только ненулевые компоненты), по формулам (**??**), (**??**) вычислим компоненты канонических 1-форм в натуральном репере (X_i):

$$\theta_1 = (f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2} A dx^2, \quad \theta_2 = (f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}\left(dx^1 - \frac{\sigma_1}{2}A dx^2\right),$$
$$\theta_3 = (f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2} B dx^4, \quad \theta_4 = (f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}\left(dx^3 - \frac{\sigma_2}{2}B dx^4\right),$$
$$\theta_5 = (f_1 - f_3)(f_2 - f_3)dx^5,$$

и затем по формулам (2.2) — компоненты метрики g и билинейной формы h в натуральном репере.

Вычислив символы Кристоффеля найденной метрики g, непосредственной проверкой убедимся в том, что тензорные поля g, h и φ удовлетворяют уравнению Эйзенхарта. В итоге получим следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть M — пятимерное многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть 0-форма φ и симметричная билинейная форма h характеристики $\chi_{221} = \{221\}$ определены в M или в некоторой области $V \subseteq M$ и пусть f_1, f_2, f_3 — попарно различные характеристические корни билинейной формы $h - 2\varphi g$ кратностей соответственно 2, 2 и 1. Для того чтобы h, g и φ удовлетворяли уравнению Эйзенхарта, т.е. для того чтобы M было h-пространством типа $\chi_{221} = \{221\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\begin{aligned}
g &= e_1(f_2 - f_1)^2(f_3 - f_1)g_1 + e_2(f_1 - f_2)^2(f_3 - f_2)g_2 + e_3(f_1 - f_3)^2(f_2 - f_3)^2 g_3, \\
h &= (2f_1 + 2f_2 + f_3)g + e_1(f_2 - f_1)^2(f_3 - f_1)\left(f_1 g_1 + \Lambda_1\right) + \\
&\quad + e_2(f_1 - f_2)^2(f_3 - f_2)\left(f_2 g_2 + \Lambda_2\right) + e_3(f_1 - f_3)^2(f_2 - f_3)^2 f_3\, g_3, \\
\varphi &= f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3
\end{aligned} \tag{2.19}$$

и вокруг каждой точки $p \in V \subseteq M$ существовала каноническая карта (x, U), в которой

$$
\begin{gathered}
g_1\big|_U = A\left(2dx^1dx^2 - A\left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1}\right)(dx^2)^2\right),\\
g_2\big|_U = B\left(2dx^3dx^4 - B\left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2}\right)(dx^4)^2\right),\\
g_3\big|_U = (dx^5)^2, \quad \Lambda_1\big|_U = A^2(dx^2)^2, \quad \Lambda_2\big|_U = B^2(dx^4)^2,
\end{gathered}
\tag{2.20}
$$

где

$$
\begin{gathered}
f_1 = \varepsilon_1 x^2 + (1-\varepsilon_1)c_1, \quad f_2 = \varepsilon_2 x^4 + (1-\varepsilon_2)c_2, \quad f_3 = f_3(x^5) \equiv \mu(x^5),\\
c_1 = \mathrm{const}, \quad c_2 = \mathrm{const}, \quad A = \varepsilon_1(x^1 + \tau(x^2)) + 1 - \varepsilon_1, \quad B = \varepsilon_2(x^3 + \omega(x^4)) + 1 - \varepsilon_2,
\end{gathered}
$$

ε_1, ε_2 принимают независимо значения 0 *или* 1, $e_1, e_2, e_3 = \pm 1$, *τ — функция x^2, ω — функция x^4.*

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Векторное поле $X \in TM^5$ тогда и только тогда является* (*локальным*) *проективным движением типа* $\{221\}$ *на пятимерном псевдоримановом многообразии* (M^5, g), *когда выполняется равенство $L_X g = h$, где метрика g и билинейная форма h определены формулами* (2.19) *и* (2.20) (см. теорему 2.1).

2.3. H-пространства типа $\{32\}$. В этом разделе будут определены метрики h-пространств типа $\{32\}$, когда тензор h_{ij} имеет два изотропных главных направления. Так как

$$
d = \theta^h Y_h = \sum_h e_h \theta_{\tilde h} Y_h,
$$

из (2.11) следуют равенства

$$
Y_i\lambda_1 = \frac{2}{3}\delta_{i3}Y_3\varphi, \quad Y_i\lambda_2 = \delta_{i5}Y_5\varphi, \quad i = 1, \ldots, 5. \tag{2.21}
$$

Используя соотношения (2.11) и формулу (**??**), составим скобки Ли векторных полей $Y_1, \ldots, Y_5$ и выпишем те из них, которые отличны от нуля:

$$
\begin{gathered}
[Y_1, Y_3] = -\frac{2}{3}(Y_3\varphi)Y_2, \quad [Y_1, Y_5] = \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}Y_1, \quad [Y_2, Y_3] = -\frac{4}{3}(Y_3\varphi)Y_3,\\
[Y_2, Y_5] = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}Y_1 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}Y_2, \quad [Y_3, Y_4] = \frac{Y_3\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}Y_4,\\
[Y_3, Y_5] = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}Y_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}Y_2 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}Y_3 - \frac{Y_3\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}Y_4 + \frac{Y_3\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}Y_5,\\
[Y_4, Y_5] = -(Y_5\varphi)Y_5.
\end{gathered}
\tag{2.22}
$$

Из (2.22) следует, что системы дифференциальных уравнений

$$
Y_1u = Y_2u = Y_4u = Y_5u = 0, \quad Y_1u = Y_4u = Y_5u = 0, \quad Y_4u = Y_5u = 0
$$

являются вполне интегрируемыми (см. раздел 2.2). Обозначим (единственное) решение первой системы и одно из двух независимых решений второй системы через u^3, еще одно решение второй системы через u^2, решения третьей системы — через u^1, u^2, u^3.

Системы

$$
Y_1u = Y_2u = Y_3u = Y_4u = 0, \quad Y_1u = Y_2u = Y_3u = 0
$$

также вполне интегрируемы; решения первой системы обозначим u^5, второй — u^4 и u^5.

В новых координатах $x^{i'} = u^i$, опустив штрихи, получим

$$
\underset{i_1}{\xi}^{j_2} = \underset{i_2}{\xi}^{j_1} = 0, \quad \underset{1}{\xi}^i = Q(x)\delta_1^i, \quad \underset{4}{\xi}^i = P(x)\delta_4^i, \quad \underset{2}{\xi}^3 = \underset{4}{\xi}^5 = 0, \quad i_1, j_1 = 1, 2, 3; \; i_2, j_2 = 4, 5.
$$

Из (2.11) и (2.21) следует, что λ_1 зависит только от x^3, а λ_2 — только от x^5:

$$
\lambda_1 \equiv f_1(x^3), \quad \lambda_2 \equiv f_2(x^5);
$$

при этом

$$\varphi = \frac{1}{2}(3f_1 + 2f_2).$$

Приравняв в каждой карте U координаты векторов в обеих частях уравнений (2.22), с помощью формулы (**??**) получим систему 25 нелинейных уравнений в частных производных с неизвестными $\underset{i}{\xi}^j$:

1° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

2° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 = 0;$

3° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 = -\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{2}{\xi}^1;$

4° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2 = -\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{2}{\xi}^2;$

5° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3 = \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^3 = 0;$

6° $\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

7° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{1}{\xi}^1 = -\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{1}{\xi}^1;$

8° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 = -2\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{3}{\xi}^1;$

9° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2 = -2\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{3}{\xi}^2;$

10° $\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^3 = -2f_1'(\underset{3}{\xi}^3)^2;$

11° $\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^1 = \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^2 = 0;$

12° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4 = \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4 = 0;$

13° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^1 = -\dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{1}{\xi}^1 - \dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^1;$

14° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^2 = -\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^2;$

15° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^4 = \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^4 = 0;$

16° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5 = \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5 = 0;$

17° $\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^1 = \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^2 = 0;$

18° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^4 = -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{f_1 - f_2}\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{4}{\xi}^4;$

19° $\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^4 - \underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{4}{\xi}^4 - \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^4 = -\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{5}{\xi}^4;$

20° $\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^5 = -f_2'(\underset{5}{\xi}^5)^2;$

21° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^1 = -\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{3}{\xi}^1 - \dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^1 - \dfrac{1}{(f_2 - f_1)^3}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{1}{\xi}^1;$

22° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^2 = -\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{3}{\xi}^2 - \dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^2;$

23° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^3 = -\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{3}{\xi}^3;$

24° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^4 = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{5}{\xi}^4 - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{4}{\xi}^4;$

25° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^5 = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{5}{\xi}^5;$

здесь $f_1' \equiv df_1/dx^3$, $f_2' \equiv df_2/dx^5$.

Из уравнений 6°, 2°, 11° и 12° системы с учетом неравенства $\det\big(\underset{i}{\xi^j}\big) \neq 0)$ получим

$$\partial_4 \underset{1}{\xi^1} = \partial_1 \underset{2}{\xi^2} = \partial_4 \underset{2}{\xi^2} = \partial_1 \underset{4}{\xi^4} = \partial_2 \underset{4}{\xi^4} = 0.$$

Интегрируя уравнения 7°, 14° и 18°, найдем

$$\underset{1}{\xi^1} = \frac{1}{f_2 - f_1}\Omega_1(x^1, x^2, x^3), \quad \underset{2}{\xi^2} = \frac{1}{f_2 - f_1}\Omega_2(x^2, x^3), \quad \underset{4}{\xi^4} = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}}\Omega_4(x^4, x^5).$$

После замены координат

$$x^{1'} = \int \frac{dx^1}{\Omega_1}, \quad x^{2'} = \int \frac{dx^2}{\Omega_2}, \quad x^{4'} = \int \frac{dx^4}{\Omega_4}, \quad x^{k'} = x^k, \quad k = 3, 5,$$

не меняющей полученных ранее результатов, опустив штрихи, будем иметь

$$\underset{1}{\xi^1} = \underset{2}{\xi^2} = \frac{1}{f_2 - f_1}, \quad \underset{4}{\xi^4} = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}}.$$

Интегрируя уравнения 1°, 13° и учитывая, что, в силу 11°, $\underset{2}{\xi^1}$ не зависит от переменной x^4, получим

$$\underset{2}{\xi^1} = \frac{1}{2(f_2 - f_1)}(\Upsilon_1 + 2D(x^2, x^3)),$$

где D — произвольная функция переменных x^2, x^3 и введено обозначение

$$\Upsilon_1 \equiv \frac{2}{f_2 - f_1}.$$

Выполнив преобразование координат

$$x^{1'} = x^1 - \int D(x^2, x^3)dx^2, \quad x^{k'} = x^k, \quad k \neq 1,$$

опустив штрихи, будем иметь

$$\underset{2}{\xi^1} = \frac{\Upsilon_1}{2(f_2 - f_1)}.$$

Интегрирование уравнений 23°, 5° и 10° дает

$$\underset{3}{\xi^3} = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(f_1' x^2 + \tau(x^3))}.$$

Здесь возможны два случая: $f_1' \neq 0$ и $f_1' = 0$.

В первом случае сделаем замену координат

$$\bar{x}^3 = f_1(x^3), \quad \bar{x}^k = x^k, \quad k \neq 3,$$

и введем обозначение $\bar{\tau} = (f_1')^{-1}\tau$; тогда

$$\underset{3}{\bar{\xi}^3} = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(x^2 + \bar{\tau})}, \quad \underset{3}{\bar{\xi}^k} = \underset{3}{\xi^k}, \quad k \neq 3.$$

Во втором случае положим

$$\bar{x}^3 = \int \tau dx^3.$$

После опускания черты оба случая описываются формулами

$$f_1 = \varepsilon_1 x^3 + (1 - \varepsilon_1)c_1, \quad c_1 = \text{const},$$

$$\underset{3}{\xi^3} = \frac{1}{2(f_2 - f_1)A}, \quad A \equiv \varepsilon_1\big(x^2 + \tau(x^3)\big) + 1 - \varepsilon_1,$$

где ε_1 равно 0 или 1.

Аналогично из уравнений 20°, 16° и 25° получим

$$f_2 = \varepsilon_2 x^5 + (1 - \varepsilon_2)c_2, \quad c_2 = \text{const},$$

$$\underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2} B}, \quad B \equiv \varepsilon_2 \big(x^4 + \mu(x^5) \big) + 1 - \varepsilon_2),$$

где ε_2 равно 0 или 1.

Из уравнения 17° следует $\partial_4 \underset{3}{\xi}^1 = 0$. Интегрируя уравнения 21°, 3° и 8°, найдем

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{8(f_2 - f_1)A} (2A\Upsilon_2 + A(\Upsilon_1)^2 + 4\Phi(x^3)),$$

где Φ — произвольная функция x^3,

$$\Upsilon_2 \equiv \frac{2}{(f_2 - f_1)^2}.$$

В новых координатах

$$x^{1'} = x^1 - \frac{1}{2} \int \Phi(x^3) dx^3, \quad x^{k'} = x^k, \quad k \neq 1,$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{4(f_2 - f_1)} \left(\Upsilon_2 + \frac{1}{2} \Upsilon_1^2 \right).$$

Интегрирование уравнений 22°, 4° и 9° дает

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)A} (A\Upsilon_1 + 2\Psi(x^3) - \varepsilon_1 x^1),$$

где Ψ — произвольная функция x^3. Сделаем замену координат

$$x^{2'} = x^2 - \int \Psi(x^3) dx^3, \quad x^{k'} = x^k, \quad k \neq 2$$

и опустим штрихи; тогда

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)} \left(\Upsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 x^1}{A} \right).$$

Разрешая уравнения 15°, 24° и 19°, найдем

$$\underset{5}{\xi}^4 = \frac{1}{2B(f_1 - f_2)^{3/2}} (B\Upsilon_3 + F(x^5)),$$

где F — произвольная функция x^5 и введено обозначение

$$\Upsilon_3 \equiv \frac{3}{f_1 - f_2}.$$

После преобразования координат

$$x^{4'} = x^4 - \int F(x^5) dx^5, \quad x^{k'} = x^k, \quad k \neq 4,$$

опустив штрихи, будем иметь

$$\underset{5}{\xi}^4 = \frac{\Upsilon_3}{2(f_1 - f_2)^{3/2}}.$$

Выпишем ненулевые значения компонент векторов найденного косонормального репера:

$$\begin{gathered}
\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{f_2 - f_1}, \quad \underset{2}{\xi}^1 = \frac{\Upsilon_1}{2(f_2 - f_1)}, \quad \underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{4(f_2 - f_1)} \left(\Upsilon_2 + \frac{1}{2} \Upsilon_1^2 \right), \\
\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)} \left(\Upsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 x^1}{A} \right), \quad \underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)A}, \quad \underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}}, \\
\underset{5}{\xi}^4 = \frac{\Upsilon_3}{2(f_1 - f_2)^{3/2}}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2} B},
\end{gathered} \tag{2.23}$$

и по формулам (**??**), (**??**) вычислим компоненты канонических 1-форм в натуральном репере (X_i):

$$\theta_1 = 2e_1(f_2 - f_1) A dx^3, \quad \theta_2 = e_1(f_2 - f_1) \big(dx^2 - (A\Upsilon_1 - \varepsilon_1 x^1) dx^3 \big),$$

$$\theta_3 = e_1(f_2 - f_1)\left(dx^1 - \frac{1}{2}\Upsilon_1 dx^2 - \left(\frac{1}{2}A\Upsilon_2 - \frac{1}{4}A\Upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\Upsilon_1\varepsilon_1 x^1\right)dx^3\right),$$
$$\theta_4 = e_2(f_1 - f_2)^{3/2}Bdx^5, \quad \theta_5 = e_2(f_1 - f_2)^{3/2}\left(dx^4 - \frac{1}{2}\Upsilon_3 B dx^5\right).$$

Затем по формулам (2.4) определим компоненты метрики g и билинейной формы h в натуральном репере.

Подсчитав символы Кристоффеля найденной метрики g, можно непосредственной проверкой убедиться в том, что тензорные поля g, h и φ удовлетворяют уравнению Эйзенхарта. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть M — пятимерное многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть 0-форма φ и симметричная билинейная форма h характеристики $\chi_{32} = \{32\}$ определены в M или в некоторой области $V \subseteq M$ и пусть f_1, f_2 — попарно различные характеристические корни билинейной формы $h-2\varphi g$ кратностей соответственно 3 и 2. Для того чтобы h, g и φ удовлетворяли уравнению Эйзенхарта, т.е. для того чтобы M было h-пространством типа $\chi_{32} = \{32\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\begin{gathered} g = e_1(f_2 - f_1)^2 g_1 + e_2(f_1 - f_2)^3 g_2, \\ h = (3f_1 + 2f_2)g + e_1(f_2 - f_1)^2(f_1 g_1 + \Lambda_1) + e_2(f_1 - f_2)^3(f_2 g_2 + \Lambda_2), \\ \varphi = \frac{3}{2}f_1 + f_2 \end{gathered} \tag{2.24}$$

и вокруг каждой точки $p \in V \subseteq M$ существовала каноническая карта (x, U), в которой

$$\begin{aligned} g_1\big|_U &= 4Adx^1dx^3 + \left(dx^2\right)^2 + 2\left(\varepsilon_1 x^1 - \frac{4A}{f_2 - f_1}\right)dx^2dx^3 + \\ &\qquad + \left(\varepsilon_1\left(x^1\right)^2 - \frac{8A\varepsilon_1 x^1}{f_2 - f_1} + \frac{4A^2}{(f_2 - f_1)^2}\right)\left(dx^3\right)^2, \\ g_2\big|_U &= 2Bdx^4dx^5 - \frac{3B^2}{f_1 - f_2}\left(dx^5\right)^2, \\ \Lambda_1\big|_U &= 4Adx^2dx^3 + 4A\left(\varepsilon_1 x^1 - \frac{2A}{f_2 - f_1}\right)\left(dx^3\right)^2, \quad \Lambda_2\big|_U = B^2\left(dx^5\right)^2, \quad \varphi = \frac{3}{2}f_1 + f_2, \end{aligned} \tag{2.25}$$

где

$$\begin{gathered} f_1 = \varepsilon_1 x^3 + (1 - \varepsilon_1)c_1, \quad f_2 = \varepsilon_2 x^5 + (1 - \varepsilon_2)c_2, \quad c_1 = \mathrm{const}, \quad c_2 = \mathrm{const}, \\ A = \varepsilon_1\left(x^2 + \tau(x^3)\right) + 1 - \varepsilon_1, \quad B = \varepsilon_2\left(x^4 + \mu(x^5)\right) + 1 - \varepsilon_2, \end{gathered}$$

ε_1 и ε_2 принимают независимо значения 0 или 1, $e_1, e_2 = \pm 1$, τ — функция x^3, μ — функция x^5.

Из теоремы 2.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Векторное поле $X \in TM$ тогда и только тогда является (локальным) проективным движением типа $\{32\}$ на пятимерном псевдоримановом многообразии (M, g), когда выполняется равенство $L_X g = h$, где метрика g и билинейная форма h определены формулами* (2.24) *и* (2.25) (см. теорему 2.3).

2.4. H-пространства типа {41}. В этом разделе определяются метрики h-пространств типа $\{41\}$, когда тензор h_{ij} имеет два главных направления, одно из которых изотропное. Из (2.12) следуют равенства

$$Y_i\lambda_1 = \frac{1}{2}\delta_{i4}Y_4\varphi, \quad Y_i\lambda_2 = 2\delta_{i5}Y_5\varphi, \quad i = 1, \ldots, 5. \tag{2.26}$$

Пользуясь уравнениями (2.12) и формулой (**??**), составим скобки Ли векторных полей $Y_1, \dots, Y_5$:

$$\begin{gathered}
[Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = 0, \quad [Y_1, Y_4] = -\frac{1}{2}(Y_4\varphi)Y_2, \\
[Y_1, Y_5] = \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}Y_1, \quad [Y_2, Y_3] = 0, \quad [Y_2, Y_4] = -(Y_4\varphi)Y_3, \\
[Y_2, Y_5] = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}Y_1 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}Y_2, \quad [Y_3, Y_4] = -\frac{3}{2}(Y_4\varphi)Y_4, \\
[Y_3, Y_5] = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}Y_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}Y_2 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}Y_3, \\
[Y_4, Y_5] = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^4}Y_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}Y_2 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}Y_3 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}Y_4 + \frac{Y_4\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}Y_5;
\end{gathered} \tag{2.27}$$

остальные скобки Ли равны нулю.

Из приведенных выше формул следует, что системы дифференциальных уравнений

$$Y_1u = Y_2u = Y_3u = Y_5u = 0, \quad Y_1u = Y_2u = Y_5u = 0, \quad Y_1u = Y_5u = 0$$

являются вполне интегрируемыми (см. раздел 2.2). Обозначим решение первой системы и одно из двух независимых решений второй системы через u^4, еще одно решение второй системы — через u^3; пусть решения третьей системы будут u^2, u^3 и u^4, а решения уравнения $Y_5u = 0$ — u^1, u^2, u^3 и u^4. Система $Y_1u = Y_2u = Y_3u = Y_4u = 0$ также является вполне интегрируемой, ее единственное решение обозначим u^5.

В новых координатах $x^{i'} = u^i$, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^i = Q(x)\delta^i_1, \quad \underset{5}{\xi}^i = P(x)\delta^i_5, \quad \underset{2}{\xi}^3 = \underset{2}{\xi}^4 = \underset{2}{\xi}^5 = \underset{3}{\xi}^4 = \underset{3}{\xi}^5 = \underset{4}{\xi}^5 = 0.$$

Из (2.12) и (2.26) следует, что λ_1 зависит только от x^4, а λ_2 — только от x^5:

$$\lambda_1 \equiv f_1(x^4), \quad \lambda_2 \equiv f_2(x^5);$$

при этом

$$\varphi = \frac{1}{2}(4f_1 + f_2).$$

Записав в координатах векторные уравнения (2.27), с учетом формулы (**??**) получим систему 34 нелинейных уравнений в частных производных с неизвестными $\underset{i}{\xi}^j$:

1° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

2° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 = 0;$

3° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

4° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2 = 0;$

5° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3 = 0;$

6° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{1}{\xi}^1 = -\underset{4}{\xi}^4 f_1'\underset{2}{\xi}^1;$

7° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2 = -\underset{4}{\xi}^4 f_1'\underset{2}{\xi}^2;$

8° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3 = 0;$

9° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4 = 0;$

10° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{1}{\xi}^1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{1}{\xi}^1;$

11° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5 = 0;$

12° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 = 0;$

13° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2-\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2-\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2-\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2=0;$

14° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^3=0;$

15° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^1=-2\underset{4}{\xi}^4f_1'\underset{3}{\xi}^1;$

16° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^2=-2\underset{4}{\xi}^4f_1'\underset{3}{\xi}^2;$

17° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^3=-2\underset{4}{\xi}^4f_1'\underset{3}{\xi}^3;$

18° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4=0;$

19° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5=0;$

20° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^1=-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{1}{\xi}^1-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{2}{\xi}^1;$

21° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^2=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{2}{\xi}^2;$

22° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^1+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^1=-3\underset{4}{\xi}^4f_1'\underset{4}{\xi}^1;$

23° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^2+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^2-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^2=-3\underset{4}{\xi}^4f_1'\underset{4}{\xi}^2;$

24° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^3+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^3=-3\underset{4}{\xi}^4f_1'\underset{4}{\xi}^3;$

25° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^4=-3f_1'(\underset{4}{\xi}^4)^2;$

26° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^1=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{3}{\xi}^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{2}{\xi}^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^3}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{1}{\xi}^1;$

27° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^2=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{3}{\xi}^2-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{2}{\xi}^2,$

28° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^3=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{3}{\xi}^3;$

29° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^5=0;$

30° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^1=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{4}{\xi}^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{3}{\xi}^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^3}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{2}{\xi}^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^4}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{1}{\xi}^1;$

31° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^2=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{4}{\xi}^2-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{3}{\xi}^2-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^3}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{2}{\xi}^2;$

32° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^3=-\tfrac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{4}{\xi}^3-\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{3}{\xi}^3;$

33° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^4=-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{4}{\xi}^4;$

34° $\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5+\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5+\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^5+\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^5=\frac{2}{f_2-f_1}\underset{4}{\xi}^4f_1'\underset{5}{\xi}^5;$

здесь $f_1'\equiv df_1/dx^4$, $f_2'\equiv df_2/dx^5$.

Интегрируя уравнения 10°, 2°, 20°, 5°, 14°, 27°, 11°, 19°, 29° и 34°, найдем

$$\underset{1}{\xi}^1=\frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}}T_1(x^1,x^2,x^3,x^4),\quad \underset{2}{\xi}^2=\frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}}T_2(x^2,x^3,x^4),$$
$$\underset{3}{\xi}^3=\frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}}T_3(x^3,x^4),\quad \underset{5}{\xi}^5=\frac{1}{(f1-f_2)^2}T_5(x^5),$$

где T_1, T_2, T_3 и T_5 — произвольные функции указанных переменных. После преобразования координат

$$x^{1'}=\int T_1^{-1}dx^1,\quad x^{2'}=\int T_2^{-1}dx^2,\quad x^{3'}=\int T_3^{-1}dx^3,\quad x^{4'}=x^4,\quad x^{5'}=\int T_5^{-1}dx^5,$$

которое не меняет приведенных выше результатов, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_2 - f_1)^{1/2}}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^2}. \tag{2.28}$$

Интегрируя с учетом этих равенств уравнения 9°, 18°, 25° и 33°, найдем

$$\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{3(f_2 - f_1)^{1/2}(f_1'(x^3) + \omega(x^4))}.$$

Здесь так же, как в предыдущих разделах, возможны два варианта: $f_1' \neq 0$ и $f_1' = 0$. В первом случае сделаем замену координат

$$\bar{x}^4 = f_1(x^4), \quad \bar{x}^k = x^k, \quad p \neq 4$$

и положим $\bar{\omega} = (f_1')^{-1}\omega$; в итоге

$$\underset{4}{\bar{\xi}}^4 = \frac{1}{3(f_2 - f_1)^{1/2}(x^3 + \bar{\omega})}, \quad \underset{4}{\bar{\xi}}^p = \underset{4}{\xi}^p, \quad p \neq 4.$$

Во втором случае сделаем замену

$$\bar{x}^4 = 3\int \omega dx^4.$$

Оба случая объединяют формулы

$$f_1 = \varepsilon_1 x^4 + (1 - \varepsilon_1)c_1, \quad c_1 = \mathrm{const},$$

$$\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_2 - f_1)^{1/2} A}, \quad A \equiv 3\varepsilon_1\big(x^3 + \omega(x^4)\big) + 1 - \varepsilon_1,$$

где ε_1 равно 0 или 1 (штрихи опущены).

Интегрирование уравнений 1° и 20° дает

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{1/2}}(\Sigma_1 + D(x^2, x^3, x^4)),$$

где D — произвольная функция указанных переменных и введено обозначение

$$\Sigma_1 \equiv \frac{1}{f_2 - f_1}.$$

После замены координат

$$x^{1'} = x^1 - \frac{1}{2}\int D dx^2, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 1,$$

опуская штрихи, получим

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{1/2}}\Sigma_1. \tag{2.29}$$

Из уравнений 3°, 12° и 26° выводим

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{8(f_2 - f_1)^{1/2}}\big(2\Sigma_2 + (\Sigma_1)^2 + 2\Lambda(x^3, x^4)\big),$$

где Λ — произвольная функция x^3 и x^4,

$$\Sigma_2 \equiv \frac{1}{(f_2 - f_1)^2}.$$

В новых координатах

$$x^{1'} = x^1 - \frac{1}{2}\int \Lambda dx^3, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 1,$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{8(f_2 - f_1)^{1/2}}\big((\Sigma_1)^2 + 2\Sigma_2\big). \tag{2.30}$$

Интегрирование уравнений 4°, 13° и 27° дает

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{1/2}}\big(\Sigma_1 + F(x^3, x^4)\big),$$

где F — произвольная функция x^3, x^4. Сделав замену координат

$$x^{2'} = x^2 - \int F dx^3, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 2,$$

будем иметь

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{1/2}} \Sigma_1. \tag{2.31}$$

В результате интегрирования уравнений 8°, 17°, 24° и 32° получим

$$\underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2A(f_2 - f_1)^{1/2}} \big(A\Sigma_1 + 3P(x^4) - 4\varepsilon_1 x^2\big),$$

где P — произвольная функция x^4. В новых координатах

$$x^{3'} = x^3 - \int P dx^4, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 3,$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2A(f_2 - f_1)^{1/2}} \big(A\Sigma_1 - 4\varepsilon_1 x^2\big). \tag{2.32}$$

Интегрируя уравнения 7°, 16°, 23° и 31°, найдем

$$\underset{4}{\xi}^2 = \frac{1}{8A(f_2 - f_1)^{1/2}} \big(2A\Sigma_2 + A(\Sigma_1)^2 + 3Q(x^4) - 8\varepsilon_1 x^1\big),$$

где Q — произвольная функция x^4. Выполнив замену координат

$$x^{2'} = x^2 - \int Q dx^4, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 2,$$

получим

$$\underset{4}{\xi}^2 = \frac{1}{8A(f_2 - f_1)^{1/2}} \big(2A\Sigma_2 + A(\Sigma_1)^2 - 8\varepsilon_1 x^1\big). \tag{2.33}$$

Из уравнений 6°, 15°, 22° и 30° следует

$$\underset{4}{\xi}^1 = \frac{1}{6(f_2 - f_1)^{1/2}} \left(\Sigma_3 + \frac{3}{4}\Sigma_1\Sigma_2 + \frac{1}{8}(\Sigma_1)^3\right), \tag{2.34}$$

где

$$\Sigma_3 \equiv \frac{1}{(f_2 - f_1)^3}.$$

Используя найденные векторы косонормального репера с компонентами

$$\begin{gathered}
\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_2 - f_1)^{1/2}}, \quad \underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{3/2}}, \\
\underset{3}{\xi}^1 = \frac{3}{8(f_2 - f_1)^{5/2}}, \quad \underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{3/2}}, \\
\underset{4}{\xi}^1 = \frac{5}{16(f_2 - f_1)^{7/2}}, \quad \underset{4}{\xi}^2 = \frac{1}{8(f_2 - f_1)^{1/2}} \left(\frac{3}{(f_2 - f_1)^2} - \frac{8}{A}\varepsilon_1 x^1\right), \\
\underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{1/2}} \left(\frac{1}{f_2 - f_1} - \frac{4}{A}\varepsilon_1 x^2\right), \\
\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{A(f_2 - f_1)^{1/2}}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^2}, \\
A = 3\varepsilon_1\big(x^3 + \omega(x^4)\big) + 1 - \varepsilon_1,
\end{gathered} \tag{2.35}$$

по формулам (**??**), (**??**) вычислим канонические 1-формы:

$$\theta_1 = (f_2 - f_1)^{1/2} A dx^4, \quad \theta_2 = (f_2 - f_1)^{1/2} \left(dx^3 - \left(\frac{1}{2}\frac{A}{f_2 - f_1} - 2\varepsilon_1 x^2\right) dx^4\right),$$

$$\theta_3 = (f_2 - f_1)^{1/2} \left(dx^2 - \frac{1}{2}\frac{dx^3}{f_2 - f_1} - \left(\frac{1}{8}\frac{A}{(f_2 - f_1)^2} - \varepsilon_1 x^1 + \frac{\varepsilon_1 x^2}{f_2 - f_1}\right) dx^4\right),$$

$$\theta_4 = (f_2 - f_1)^{1/2} \left(dx^1 - \frac{1}{2}\frac{dx^2}{f_2 - f_1} - \frac{1}{8}\frac{dx^3}{(f_2 - f_1)^2} - \left(\frac{1}{16}\frac{A}{(f_2 - f_1)^3} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1 x^1}{f_2 - f_1} + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon_1 x^2}{(f_2 - f_1)^2} \right) dx^4 \right),$$

$$\theta_5 = (f_1 - f_2)^2 dx^5,$$

и затем, по формулам (2.6), найдем компоненты метрики g и билинейной формы h. Непосредственной проверкой убедимся в том, что тензорные поля g, h и φ удовлетворяют уравнению Эйзенхарта. Ввиду этого справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5. *Пусть M — пятимерное многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть 0-форма φ и симметричная билинейная форма h характеристики $\chi_{41} = \{41\}$ определены в M или в некоторой области $V \subseteq M$ и пусть f_1, f_2 — различные характеристические корни билинейной формы $h - 2\varphi g$ кратностей соответственно 4 и 1. Для того чтобы h, g и φ удовлетворяли уравнению Эйзенхарта, т.е. для того чтобы M было h-пространством типа $\chi_{41} = \{41\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\begin{gathered} g = g_1 + g_2, \\ h = (4f_1 + f_2)g + f_1 g_1 + f_2 g_2 + h_0, \\ \varphi = 2f_1 + \frac{1}{2} f_2 \end{gathered} \tag{2.36}$$

и вокруг каждой точки $p \in V \subseteq M$ существовала каноническая карта (x, U), в которой

$$\begin{aligned} e_1 g_1\big|_U &= 2A(f_2 - f_1)dx^1 dx^4 + 2(f_2 - f_1)dx^2 dx^3 + \\ &\quad + 2\big(2\varepsilon_1(f_2 - f_1)x^2 - A\big)dx^2 dx^4 - (dx^3)^2 + 2\varepsilon_1\big((f_2 - f_1)x^1 - 2x^2\big)dx^3 dx^4 + \\ &\quad + 4\varepsilon_1 \left((f_2 - f_1)x^1 x^2 - (x^2)^2 - \frac{1}{2}Ax^1 \right)(dx^4)^2, \\ e_2 g_2\big|_U &= (f_1 - f_2)^4 (dx^5)^2, \\ e_1 h_0\big|_U &= 2A(f_2 - f_1)dx^2 dx^4 + (f_2 - f_1)(dx^3)^2 + 2\big(2\varepsilon_1(f_2 - f_1)x^2 - A\big)dx^3 dx^4 + \\ &\quad + 4\varepsilon_1 \left((f_2 - f_1)\left((x^2)^2 + \frac{1}{2}Ax^1 \right) - Ax^2 \right)(dx^4)^2, \end{aligned} \tag{2.37}$$

где

$$f_1 = \varepsilon_1 x^4 + (1 - \varepsilon_1)c_1, \quad f_2 = \mu(x^5), \quad c_1 = \mathrm{const}, \quad A = 3\varepsilon_1\big(x^3 + \omega(x^4)\big) + 1 - \varepsilon_1,$$

ε_1 принимает значения 0 или 1, $e_1, e_2 = \pm 1$, ω — функция x^4.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Векторное поле $X \in TM$ тогда и только тогда является (локальным) проективным движением типа $\{41\}$ на пятимерном псевдоримановом многообразии (M, g), когда выполняется равенство $L_X g = h$, где метрика g и билинейная форма h определены формулами* (2.36)–(2.37) (см. теорему 2.5).

2.5. H-пространства типа $\{5\}$. Найдем метрики h-пространств типа $\{5\}$. Из (2.13) следуют равенства

$$Y_i \lambda = \frac{2}{5}\delta_{i5} Y_5 \varphi, \quad i = 1, \dots, 5. \tag{2.38}$$

С помощью формулы (**??**) составим скобки Ли векторных полей $Y_1, \dots, Y_5$:

$$\begin{gathered} [Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = 0, \quad [Y_1, Y_4] = 0, \quad [Y_1, Y_5] = -\frac{2}{5}(Y_5\varphi)Y_2, \\ [Y_2, Y_3] = 0, \quad [Y_2, Y_4] = 0, \quad [Y_2, Y_5] = -\frac{4}{5}(Y_5\varphi)Y_3, \quad [Y_3, Y_4] = 0, \\ [Y_3, Y_5] = -\frac{6}{5}(Y_5\varphi)Y_4, \quad [Y_4, Y_5] = -\frac{8}{5}(Y_5\varphi)Y_5. \end{gathered} \tag{2.39}$$

Отсюда видно, что каждая из четырех систем дифференциальных уравнений

$$Y_1 u = Y_2 u = Y_3 u = Y_4 u = 0, \quad Y_1 u = Y_2 u = Y_3 u = 0, \quad Y_1 u = Y_2 u = 0, \quad Y_1 u = 0,$$

является вполне интегрируемой (см. раздел 2.2). Обозначим решения первой системы u^5. Одно из двух независимых решений второй системы выберем равным u^5, а второе обозначим u^4. Независимые решения третьей системы выберем в виде u^3, u^4, u^5, а независимые решения последней системы — в виде u^2, u^3, u^4, u^5 и обозначим через u^1 какую-либо функцию, не зависящую от u^2, u^3, u^4 и u^5.

В новых координатах $x^{i'} = u^i$, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^i = Q(x)\delta^i_1, \quad \underset{2}{\xi}^3 = \underset{2}{\xi}^4 = \underset{2}{\xi}^5 = \underset{3}{\xi}^4 = \underset{3}{\xi}^5 = \underset{4}{\xi}^5 = 0. \tag{2.40}$$

С учетом этих равенств из (2.13) и (2.38) следует, что λ зависит только от x^5: $\lambda \equiv f(x^5)$, при этом

$$\varphi = \frac{5}{2} f(x^5).$$

Заметив, что из (2.40) ввиду условия $\det\left(\underset{j}{\xi}^i\right) \neq 0$ следует $\underset{i}{\xi}^i \neq 0$ при $i = 1, \dots, 5$, приравняем в каждой координатной окрестности U координаты векторных полей слева и справа в уравнениях (2.39) и с помощью формулы (**??**) получим следующую систему 34 дифференциальных уравнений с неизвестными $\underset{i}{\xi}^j$:

1° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

2° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3 = 0;$

3° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

4° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

5° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4 = 0;$

6° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{1}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{1}{\xi}^1 = -f'\underset{2}{\xi}^1\underset{5}{\xi}^5;$

7° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^2 = -f'\underset{2}{\xi}^2\underset{5}{\xi}^5;$

8° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^3 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^4 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5 = 0;$

9° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 = 0;$

10° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2 = 0;$

11° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^3 = 0;$

12° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^1 = 0;$

13° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^2 = 0;$

14° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^3 = 0;$

15° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4 = 0;$

16° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^1 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^1 = -2f'\underset{3}{\xi}^1\underset{5}{\xi}^5;$

17° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^2 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^2 - \underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 - \underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2 - \underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2 - \underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^2 - \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^2 = -2f'\underset{3}{\xi}^2\underset{5}{\xi}^5;$

18° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^3 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^3 = -2f'\underset{3}{\xi}^3\underset{5}{\xi}^5;$

19° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^4 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^4 = 0;$

20° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5 = 0;$

21° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1 + \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^1 + \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^1 = 0;$

22° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2 + \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^2 + \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^2 = 0;$

23° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^3+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^3-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^3=0;$

24° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^4=0;$

25° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^1+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^1+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^1-\underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1-\underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1-\underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^1-\underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^1-\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^1=-3f'\underset{4}{\xi}^1\underset{5}{\xi}^5;$

26° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^2+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^2+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^2-\underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2-\underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2-\underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^2-\underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^2-\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^2=-3\underset{5}{\xi}^5f'\underset{4}{\xi}^2;$

27° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^3+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^3+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^3-\underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3-\underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^3-\underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^3-\underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^3-\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^3=-3\underset{5}{\xi}^5f'\underset{4}{\xi}^1;$

28° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^4+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^4+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^4=-3\underset{5}{\xi}^5f'\underset{4}{\xi}^4;$

29° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5+\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5+\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^5=0;$

30° $\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^1+\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^1+\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^1+\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^1-\underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1-\underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^1-\underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^1-\underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{4}{\xi}^1-\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^1=-4f'\underset{5}{\xi}^1\underset{5}{\xi}^5;$

31° $\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^2+\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^2+\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^2+\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^2-\underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2-\underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^2-\underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^2-\underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{4}{\xi}^2-\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^2=-4f'\underset{5}{\xi}^2\underset{5}{\xi}^5;$

32° $\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^3+\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^3+\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^3+\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^3-\underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3-\underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^3-\underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^3-\underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{4}{\xi}^3-\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^3=-4f'\underset{5}{\xi}^3\underset{5}{\xi}^5;$

33° $\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^4+\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^4+\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^4+\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^4-\underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4-\underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4-\underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^4-\underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{4}{\xi}^4-\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^4=-4f'\underset{5}{\xi}^4\underset{5}{\xi}^5;$

34° $\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5+\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5+\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^5+\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^5=-4f'\Big(\underset{5}{\xi}^5\Big)^2;$

здесь $f'\equiv df/dx^5$.

Из уравнений 2°, 5°, 11°, 15° и 24° следуют равенства

$$\partial_1\underset{2}{\xi}^2=\partial_1\underset{3}{\xi}^3=\partial_2\underset{3}{\xi}^3=\partial_1\underset{4}{\xi}^4=\partial_2\underset{4}{\xi}^4=\partial_3\underset{4}{\xi}^4=0.$$

С учетом этого имеем

$$\underset{1}{\xi}^1=\varPhi_1,\quad \underset{2}{\xi}^2=\varPhi_2,\quad \underset{3}{\xi}^3=\varPhi_3,\quad \underset{4}{\xi}^4=\varPhi_4,$$

где $\varPhi_1=\varPhi_1(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5)$, $\varPhi_2=\varPhi_2(x^2,x^3,x^4,x^5)$, $\varPhi_3=\varPhi_3(x^3,x^4,x^5)$ и $\varPhi_4=\varPhi_4(x^4,x^5)$ — произвольные ненулевые функции указанных переменных. После преобразования координат

$$x^{1'}=\int\frac{dx^1}{\varPhi_1},\quad x^{2'}=\int\frac{dx^2}{\varPhi_2},\quad x^{3'}=\int\frac{dx^3}{\varPhi_3},\quad x^{4'}=\int\frac{dx^4}{\varPhi_4},\quad x^{5'}=x^5,$$

опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^1=\underset{2}{\xi}^2=\underset{3}{\xi}^3=\underset{4}{\xi}^4=1.$$

Из уравнений 8°, 20° и 29° следует

$$\partial_1\underset{5}{\xi}^5=\partial_2\underset{5}{\xi}^5=\partial_3\underset{5}{\xi}^5=0.$$

Интегрируя уравнение 34°, найдем

$$\underset{5}{\xi}^5=\frac{1}{4(f'x^4+\eta(x^5))}.$$

Возможны два случая: $f'\neq 0$ и $f'=0$. В первом случае сделаем замену координат

$$\bar{x}^5=f(x^5),\quad \bar{x}^k=x^k,\quad k\neq 5,$$

и положим $\bar{\eta}=(f')^{-1}\eta$; тогда

$$\underset{5}{\bar{\xi}}^5=\frac{1}{4(x^4+\bar{\eta})},\quad \underset{5}{\bar{\xi}}^k=\underset{5}{\xi}^k,\quad k\neq 5.$$

Во втором случае сделаем замену переменной

$$\bar{x}^5=4\int\eta dx^5.$$

Опустив черту, объединим оба случая формулами

$$f=\varepsilon x^5+(1-\varepsilon)c,\quad c=\mathrm{const},$$

$$\underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{A}, \quad A \equiv 4\varepsilon\bigl(x^4 + \eta(x^5)\bigr) + 1 - \varepsilon,$$

где ε равно 0 или 1.

Из уравнения 1° следует $\partial_1 \underset{2}{\xi}^1 = 0$; вследствие этого получаем

$$\underset{2}{\xi}^1 = \chi(x^2, x^3, x^4, x^5),$$

где χ — произвольная функция указанных переменных. Выполнив замену координат

$$x^{1'} = x^1 - \int \chi dx^2, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 1,$$

и опустив штрихи, найдем

$$\underset{2}{\xi}^1 = 0.$$

Из уравнений 2°, 3°, 9° и 10° следует

$$\partial_1 \underset{3}{\xi}^1 = \partial_2 \underset{3}{\xi}^1 = \partial_1 \underset{3}{\xi}^2 = \partial_2 \underset{3}{\xi}^2 = 0,$$

поэтому

$$\underset{3}{\xi}^1 = \Psi(x^3, x^4, x^5), \quad \underset{3}{\xi}^2 = N(x^3, x^4, x^5),$$

где Ψ и N — произвольные функции указанных переменных. После преобразования координат

$$x^{1'} = x^1 - \int \Psi dx^3, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 1,$$

$$x^{2'} = x^2 - \int N dx^3, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 2;$$

опустив штрихи, получим

$$\underset{3}{\xi}^1 = \underset{3}{\xi}^2 = 0.$$

Из уравнений 4°, 5°, 12°, 13°, 14°, 21°, 22° и 23° вытекают равенства

$$\partial_1 \underset{4}{\xi}^1 = \partial_2 \underset{4}{\xi}^1 = \partial_3 \underset{4}{\xi}^1 = \partial_1 \underset{4}{\xi}^2 = \partial_2 \underset{4}{\xi}^2 = \partial_3 \underset{4}{\xi}^2 = \partial_1 \underset{4}{\xi}^3 = \partial_2 \underset{4}{\xi}^3 = \partial_3 \underset{4}{\xi}^3 = 0,$$

поэтому

$$\underset{4}{\xi}^1 = D(x^4, x^5), \quad \underset{4}{\xi}^2 = G(x^4, x^5), \quad \underset{4}{\xi}^3 = Z(x^4, x^5),$$

где D, G и Z — произвольные функции указанных переменных. Произведя замену переменных

$$x^{1'} = x^1 - \int D dx^4, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 1,$$

$$x^{2'} = x^2 - \int G dx^4, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 2,$$

$$x^{3'} = x^3 - \int Z dx^4, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 3,$$

и опустив штрихи, получим

$$\underset{4}{\xi}^1 = \underset{4}{\xi}^2 = \underset{4}{\xi}^3 = 0.$$

Учитывая равенства

$$\partial_1 \underset{5}{\xi}^1 = \partial_2 \underset{5}{\xi}^1 = \partial_3 \underset{5}{\xi}^1 = 0,$$

вытекающие из уравнений 6°, 16° и 25°, проинтегрируем уравнение 30°:

$$\underset{5}{\xi}^1 = \frac{4W(x^5)}{A};$$

здесь W — произвольная функция x^5. Выполнив замену координат

$$x^{1'} = x^1 - 4\int W dx^5, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 5,$$

получим (штрихи опущены)

$$\underset{5}{\xi}^1 = 0.$$

Из уравнений 7°, 17°, 26° и 31° найдем

$$\underset{5}{\xi}^2 = \frac{1}{A}(4Q(x^5) - \varepsilon x^1),$$

где Q — произвольная функция x^5. После преобразования координат

$$x^{2'} = x^2 - 4\int Q(x^5)dx^5, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 5,$$

получим

$$\underset{5}{\xi}^2 = -\varepsilon x^1 A^{-1}.$$

С учетом равенств

$$\partial_1 \underset{5}{\xi}^3 = \partial_3 \underset{5}{\xi}^3 = 0,$$

вытекающих из уравнений 8° и 27°, интегрирование уравнений 18°, 32° дает

$$\underset{5}{\xi}^3 = \frac{1}{A}(4M(x^5) - 2\varepsilon x^2),$$

где M — произвольная функция x^5. Замена координат

$$x^{3'} = x^3 - 4\int M dx^5, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 5,$$

приводит к равенству

$$\underset{5}{\xi}^3 = -2\varepsilon x^2 A^{-1}.$$

Из уравнений 8° и 19° следует

$$\partial_1 \underset{5}{\xi}^4 = \partial_2 \underset{5}{\xi}^4 = 0.$$

Интегрирование уравнений 28°, 33° дает

$$\underset{5}{\xi}^4 = \frac{1}{A}(4K(x^5) - 3\varepsilon x^3),$$

где K — произвольная функция x^5. В новых координатах

$$x^{4'} = x^4 - 4\int K(x^5)dx^5, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 5,$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{5}{\xi}^4 = -3\varepsilon x^3 A^{-1}.$$

В итоге ненулевые компоненты векторов косонормального репера имеют вид

$$\begin{gathered} \underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \underset{3}{\xi}^3 = \underset{4}{\xi}^4 = 1, \quad \underset{5}{\xi}^2 = -\varepsilon x^1 A^{-1}, \\ \underset{5}{\xi}^3 = -2\varepsilon x^2 A^{-1}, \quad \underset{5}{\xi}^4 = -3\varepsilon x^3 A^{-1}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = A^{-1}. \end{gathered} \tag{2.41}$$

По формулам (**??**), (**??**) вычислим компоненты канонических 1-форм в натуральном репере:

$$\begin{gathered} \theta_1 = A dx^5, \quad \theta_2 = dx^4 + 3\varepsilon x^3 dx^5, \\ \theta_3 = dx^3 + 2\varepsilon x^2 dx^5, \quad \theta_4 = dx^2 + \varepsilon x^1 dx^5, \quad \theta_5 = dx^1 \end{gathered}$$

и затем по формулам (2.8) — компоненты метрики g и билинейной формы h. Далее непосредственной проверкой убеждаемся в том, что тензорные поля g, h и φ удовлетворяют уравнению Эйзенхарта. Доказана следующая теорема.

Теорема 2.7. *Пусть M — пятимерное многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть 0-форма φ и симметричная билинейная форма h характеристики $\chi_5 = \{5\}$ определены в M или в некоторой области $V \subseteq M$ и пусть f — характеристический корень билинейной формы $h - 2\varphi g$ кратности 5. Для того чтобы h, g и φ удовлетворяли уравнению Эйзенхарта, т.е. для того чтобы M было h-пространством типа $\chi_5 = \{5\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$h = 6fg + h_0, \quad \varphi = \frac{5}{2}f \tag{2.42}$$

и вокруг каждой точки $p \in V \subseteq M$ существовала каноническая карта (x, U), в которой

$$\begin{aligned} eg\big|_U &= 2Adx^1dx^5 + 2dx^2dx^4 + 6\varepsilon x^3dx^2dx^5 + (dx^3)^2 + 4\varepsilon x^2dx^3dx^5 + \\ &\quad + 2\varepsilon x^1dx^4dx^5 + 2\varepsilon\Big(3x^1x^3 + 2(x^2)^2\Big)(dx^5)^2, \qquad (2.43)\\ eh_0\big|_U &= 2Adx^2dx^5 + 2dx^3dx^4 + 6\varepsilon x^3dx^3dx^5 + 4\varepsilon x^2dx^4dx^5 + 2\varepsilon\left(Ax^1 + 6x^2x^3\right)(dx^5)^2, \end{aligned}$$

где

$$f = \varepsilon x^5 + (1-\varepsilon)c, \quad c = \mathrm{const}, \quad A = 4\varepsilon\big(x^4 + \tau(x^5)\big) + 1 - \varepsilon,$$

ε принимает значения 0 или 1, $e = \pm 1$, τ — функция x^5.

Из теоремы 2.7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.8. *Векторное поле $X \in TM$ тогда и только тогда является* (*локальным*) *проективным движением типа* $\{5\}$ *на пятимерном псевдоримановом многообразии* (M, g), *когда выполняется равенство* $L_Xg = h$ (**??**), *где метрика g и билинейная форма h определены формулами* (2.42)–(2.43) (см. теорему 2.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминова А. В.* Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения// Гравит. теория относит. — 1970. — № 7. — С. 127–131.
2. *Аминова А. В.* О полях тяготения, допускающих группы проективных движений// Докл. АН СССР. — 1971. — *197*, № 4. — С. 807–809.
3. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. I// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 3—13.
4. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. II// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 14–20.
5. *Аминова А. В.* О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел/ Препринт ИТФ АН УССР 71-85Р. — Киев, 1971.
6. *Аминова А. В.* Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 295–316.
7. *Аминова А. В.* Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 317–346.
8. *Аминова А. В.* Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля// Гравит. теория относит. — 1976. — № 10. — С. 9–22.
9. *Аминова А. В.* Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности// Изв. вузов. Мат. — 1988. — № 1. — С. 3–13.
10. *Аминова А. В.* Группы преобразований римановых многообразий// Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ. — 1990. — *22*. — С. 97–165.
11. *Аминова А. В.* Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2 (290). — С. 107–164.
12. *Аминова А. В.* Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий// Усп. мат. наук. — 1995. — *50*, № 1. — С. 69–142.

13. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
14. *Аминова А. В.* Проективные симметрии и законы сохранения в K-пространствах, определяемых полями тяготения// Изв. вузов. Физика. — 2008. — *51*, № 4. — С. 30–37.
15. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 5. — С. 3–13.
16. *Аминова А. В.* Проективные симметрии гравитационных полей. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018.
17. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 7. — С. 3–28.
18. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2009. — *123*. — С. 58–80.
19. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств специального вида// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 5. — С. 97–102.
20. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. I. H-пространства типа $\{32\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2018. — № 4. — С. 21–31.
21. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. II. H-пространства типа $\{41\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 45–55.
22. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. III. H-пространства типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 56—66.
23. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* H-пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 4. — С. 4–12.
24. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 10. — С. 87–93.
25. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств H_5 типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2020. — № 1. — С. 4–11.
26. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О свойствах проективных алгебр Ли жестких h-пространств H_{32} типа $\{32\}$// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — *162*, № 2. — С. 111–119.
27. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Алгебры Ли проективных движений пятимерных h-пространств H_{221} типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 12. — С. 9–22.
28. *Буданов К. М., Султанов А. Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3—13.
29. *Гладуш В. Д.* Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы—-Клейна// Теор. мат. физ. — 2003. — *136*, № 3. — С. 480—495.
30. *Голиков В. И.* О геодезическом отображении полей тяготения общего вида// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — № 12. — С. 97–129.
31. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.
32. *Жукова Л. И.* Римановы пространства с проективной группой// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 13—18.
33. *Жукова Л. И.* Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай)// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 19–25.
34. *Жукова Л. И.* О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 26–30.
35. *Жукова Л. И.* Римановы пространства, допускающие проективные преобразования// Изв. вузов. Мат. — 1973. — № 6. — С. 37–41.
36. *Киселев А. С.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве-времени// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2010. — № 1. — С. 64–67.
37. *Киселев А. С., Кречет В. Г.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана—Вейля с идеальной жидкостью// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2011. — *3*, № 1. — С. 37–41.
38. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2. — М.: Наука, 1981.

39. *Кречет В. Г., Левкоева М. В., Садовников Д. В.* Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве// Вестн. РУДН. Сер. Физ. — 2001. — *1*, № 9. — С. 33—37.
40. *Кручкович Г. И.* Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1963. — № 24. — С. 74–87.
41. *Кручкович Г. И.* О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1967. — № 33. — С. 3–18.
42. *Петров А. З.* О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1949. — *109*, № 3. — С. 7–36.
43. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — Факториал, 1998.
44. *Рчеулишвили Г. Л.* Сферически-симметричный линейный элемент и векторы Киллинга в пятимерном пространстве// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 3. — С. 345—351.
45. *Рчеулишвили Г. Л.* Обобщенные векторы Киллинга в пятимерном лоренцевом пространстве// Теор. мат. физ. — 1997. — *112*, № 2. — С. 249—253.
46. *Синюков Н. С.* О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — *98*, № 1. — С. 21—23.
47. *Синюков Н. С.* Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 4. — С. 266—267.
48. *Синюков Н. С.* Эквидистантные римановы пространства// Научн. ежегод. Одесса. — 1957. — С. 133—135.
49. *Синюков Н. С.* Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 6. — С. 1312–1314.
50. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 4. — С. 781–782.
51. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — *169*, № 4. — С. 770—772.
52. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
53. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*. — С. 45–116.
54. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1956. — *108*, № 2. — С. 201–203.
55. *Солодовников А. С.* Геодезические классы пространств $V(K)$// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 1. — С. 33–36.
56. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — № 2. — С. 43–102.
57. *Трунев А. П.* Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы—Клейна// Науч. ж. Кубан. гос. агр. ун-та. — 2011. — *71*, № 7. — С. 1–26.
58. *Шарафутдинов В. А.* Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. — Новосибирск:: ИПЦ НГУ, 2018.
59. *Широков П. А.* Тензорное исчисление. — Казань: Изд-во КГУ, 1961.
60. *Широков П. А.* Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во КГУ, 1966.
61. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.
62. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
63. *Abe O.* Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza–Klein space-time// Nuovo Cim. B. — 1994. — *109*, № 6. — P. 659—673.
64. *Aminova A. V.* On geodesic mappings of Riemannian spaces// Tensor. — 1987. — *46*. — P. 179–186.
65. *Aminova A. V.* Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds// Tensor, N.S. — 1993. — *54*. — P. 91–100.
66. *Aminova A. V.* Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics// в кн.: In Memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. 3, part 2. — Изд-во Казан. ун-та: Казань, 1995. — С. 79–103.
67. *Aminova A. V.* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — *113*, № 3. — P. 367–470.

68. *Aminova A. V., Aminov N. A.-M.* Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type VI.1// J. Math. Sci. — 2009. — *158*, № 2. — P. 163–183.
69. *Anchordoqui L. A., Birman G. S.* Metric tensors for homogeneous, isotropic, five-dimensional pseudo-Riemannian models// Rev. Colomb. Mat. — 1998. — *32.* — P. 73–79.
70. *Becerril R., Matos T.* Bonnor solution in five-dimensional gravity// Phys. Rev. D. — 1990. — *41*, № 6. — P. 1895–1896.
71. *Beltrami E.* Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante// Ann. Mat. — 1868. — № 2. — P. 232–255.
72. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbation in Kaluza–Klein cosmologies// Astron. Nachr. — 1990. — *311*, № 3. — P. 151–154.
73. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbations in Kaluza–Klein cosmologies// Nuovo Cim. B. — 1991. — *106*, № 2. — P. 107–122.
74. *Bokhari A. H., Qadir A.* Symmetries of static, spherically symmetric space-times// J. Math. Phys. — 1987. — *28.* — P. 1019–1022.
75. *Calvaruso G., Marinosci R. A.* Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces// Balkan J. Geom. Appl. — 2003. — *8*, № 1. — P. 1–19.
76. *Coley A. A., Tupper B. O. J.* Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance// J. Math. Phys. — 1989. — *30.* — P. 2616–2625.
77. *Dacko P.* Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact Ricci potential/ `arXiv: 1308.6429 [math.DG]`.
78. *Dini U.* Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rapprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra// Ann. Mat. — 1869. — *3*, № 7. — P. 269–293.
79. *Dumitrescu T. T., Festuccia G., Seiberg N.* Exploring curved superspace/ `arXiv: 1205.1115v2 [hep.th]`.
80. *Fialowski A., Penkava M.* The moduli space of complex five-dimensional Lie algebras// J. Algebra. — 2016. — *458.* — P. 422—444.
81. *Fubini G.* Sui gruppi trasformazioni geodetiche// Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. — 1903. — *53*, № 2. — P. 261–313.
82. *Fukui T.* The motion of a test particle in the Kaluza–Klein-type of gravitational theory with variable mass// Astrophys. Space Sci. — 1988. — *141*, № 2. — P. 407–413.
83. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal invariance in physics// Rev. Mod. Phys. — 1962. — *34*, № 3. — P. 442–557.
84. *Gall L., Mohaupt T.* J. High Energy Phys. — 2018. — *2018.* — 53.
85. *Geroch R.* Limits of space-times// Commun. Math. Phys. — 1969. — *13.* — P. 180–193.
86. *Gezer A.* On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric// Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). — 2009. — *119*, № 3. — P. 345—350.
87. *Gross D. J., Perry M. J.* Magnetic monopoles in Kaluza–Klein theories// Nucl. Phys. — 1983. — *B226.* — P. 29–48.
88. *Guendelman E. I.* Kaluza–Klein–Casimir cosmology with decoupled heavy modes// Phys. Lett. B. — 1988. — *201*, № 1. — P. 39–41.
89. *Hall G. S., Rebouas M. J., Santos J., Teixeixa A. F. F.* On the algebraic structure of second order symmetric tensors in 5-dimensionai space-times// Gen. Rel. Gravit. — 1996. — *8*, № 9. — P. 1107–1113.
90. *Hicks J. W.* Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions// All Graduate Plan B and other Reports. — 2011. — *102.* — P. 1–90.
91. *Ho Choon-Lin, Ng Kin-Wang* Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza–Klein cosmology// Phys. Rev. D. — 1991. — *43*, № 10. — P. 3107–3111.
92. *Jadczyk A.* START in a five–dimensional conformal domain/ `arXiv: 1111.5540v2 [math-ph]`.
93. *Kiselev A. S., Krechet V. G.* Static distributions of matter in the five-dimensional Riemann—Weyl space// Russ. Phys. J. — 2012. — *55*, № 4. — P. 417—425.
94. *Knebelman M. S.* Homothetic mappings of Riemann spaces// Proc. Am. Math. Soc. — 1958. — *9*, № 6. — P. 927–928.
95. *Kokarev S. S.* Phantom scalar fields in five–dimensional Kaluza–Klein theory// Russ. Phys. J. — 1996. — *39*, № 2. — P. 146–152.

96. *Kollár J.* Einstein metrics on five-dimensional Seifert bundles// J. Geom. Anal. — 2005. — *15*, № 3. — P. 445–476.
97. *Königs M. G.* Sur les géodésiques a intégrales quadratiques// in: *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV. — Chelsea Publ., 1972. — P. 368—404.
98. *Kovacs D.* The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza–Klein// Gen. Rel. Gravit. — 1984. — *16*, № 7. — P. 645–655.
99. *Kowalski O.* Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leqslant 5$// Rozpravy CSAV, Rada MPV. — 1975. — № 85. — P. 1–61.
100. *Kramer D. Stephani H., MacCallum M., Herlt E.* Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
101. *Ladke L. S., Jaiswal V. K., Hiwarkar R. A.* Five-dimensional exact solutions of Bianchi type-I space-time in $f(R,T)$ theory of gravity// Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Techn. — 2014. — *3*, № 8. — P. 15332–15342.
102. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// Ann. Mat. — 1896. — *24*, № 2. — P. 255–300.
103. *Macedo P. G.* New proposal for a five-dimensional unified theory of classical fields of Kaluza–Klein type/ `arXiv: gr-qc/0101121`.
104. *Magazev A. A.* Casimir functions for five-dimensional Lie groups with a non–semi-Hausdorff space of orbits// Russ. Phys. J. — 2003. — *46*, № 9. — P. 912—920.
105. *Mankoc-Borstnik N., Pavsi M.* A systematic examination of five-dimensional Kaluza–Klein theory with sources consisting of point particles or strings// Nuovo Cim. — 1988. — *99A*, № 4. — P. 489–507.
106. *Marinosci R. A.* Classification of five-dimensional generalized pointwise symmetric Riemannian spaces// Geom. Dedic. — 1995. — *57*. — P. 11–53.
107. *Mikesh J.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky University, 2019.
108. *Mikesh J., Stepanova E.* A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$-structure as a model of abstract statistical manifold// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2014. — *45*. — P. 111—128.
109. *Mohanty G., Mahanta K. L., Bishi B. K.* Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field// Astrophys. Space Sci. — 2007. — *310*. — P. 273—276.
110. *Paiva F. M., Rebouca M. J., Teixeira A. F. F.* Limits of space–times in five dimensions and their relation to the Segre types// J. Math. Phys. — 1997. — *38*. — P. 4228–4236.
111. *Pan Yiwen* Rigid supersymmetry on five-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry/ `arXiv: 1308.1567v4 [hep.th]`.
112. *Pini A., Rodriguez-Gomez D., Schmudea J.* Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions/ `arXiv: 1504.04340v3 [het-th]`.
113. *Rcheulishvili G.* Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. — Miramare-Trieste: Preprint ICTP, IC/92/108, 1992.
114. *Rcheulishvili G. L.* The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space// J. Math. Phys. — 1992. — *33*. — P. 1103–1108.
115. *Rcheulishvili G. L.* Conformal Killing vectors in five-dimensional space/ `arXiv: gr-qc/9312004v1`.
116. *Rebouças M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* Classification of energy momentum tensors in $n > 5$ dimensional space-times: A review// Brazil. J. Phys. — 2004. — *34*, № 2A. — P. 535–543.
117. *Rodroguez-Vallarte M. C., Salgado G.* Five-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions// J. Geom. Phys. — 2016. — *100*. — P. 20—32.
118. *Santos J., Rebouças M. J., Teixeira A. F. F.* Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza—Klein-type theories// J. Math. Phys. — 1995. — *36*. — P. 3074–3084.
119. *Schur F.* Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen// Math. Ann. — 1886. — *27*. — P. 537–567.
120. *Starks S. A., Kosheleva O., Kreinovich V.* Kaluza–Klein 5D ideas made fully geometric/ `arXiv: 0506218v1 [physics.class-ph]`.
121. *Varaksin O. L., Klishevich V. V.* Integration of Dirac equation in Riemannian spaces with five-dimensional group of motions// Russ. Phys. J. — 1997. — *40*, № 8. — P. 727—731.
122. *Wesson P. S.* A physical interpretation of Kaluza–Klein cosmology// Astrophys. J. — 1992. — *394*, № 1. — P. 19—24.
123. *Wesson P. S.* The properties of matter in Kaluza–Klein cosmology// Mod. Phys. Lett. A. — 1992. — *7*, № 11. — P. 921–926.

124. *Witten E.* Search for a realistic Kaluza–Klein theory// Nucl. Phys. B. — 1981. — *186.* — P. 412–428.
125. *Yano K.* On harmonic and Killing vectors// Ann. Math. — 1952. — *55.* — P. 38—45.
126. *Zeghib A.* On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds// Adv. Math. — 2016. — *297.* — P. 26—53.

Аминова Ася Васильевна
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `asya.aminova@kpfu.ru`

Хакимов Джамолиддин Рахмонович
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `dzhamoliddink@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 38–46
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-38-46

УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ГЕРАСИМОВА—КАПУТО

© 2022 г. **К. В. БОЙКО, В. Е. ФЕДОРОВ**

Аннотация. Исследуются вопросы корректности линейных обратных задач для уравнений с несколькими дробными производными Герасимова—Капуто в банаховых пространствах. Рассмотрена обратная коэффициентная задача для разрешенного относительно старшей дробной производной уравнения, содержащего ограниченные операторы при младших производных. Доказан критерий корректности такой задачи. Аналогичная обратная задача для уравнения с вырожденным оператором при старшей производной в предположении относительной 0-ограниченности пары операторов при двух старших производных редуцирована к двум задачам на подпространствах для уравнений, разрешенных относительно старшей производной. Полученные критерии корректности позволили исследовать один класс обратных задач для уравнений с многочленами от эллиптического дифференциального по пространственным оператора и с несколькими производными Герасимова—Капуто по времени.

Ключевые слова: дробная производная Герасимова—Капуто, вырожденное эволюционное уравнение, обратная коэффициентная задача, корректность задачи.

AN INVERSE PROBLEM FOR A CLASS OF DEGENERATE EVOLUTION MULTI-TERM EQUATIONS WITH GERASIMOV–CAPUTO DERIVATIVES

© 2022 **K. V. BOYKO, V. E. FEDOROV**

Abstract. Issues of well-posedness of linear inverse problems for equations with several Gerasimov–Caputo fractional derivatives in Banach spaces are investigated. The inverse coefficient problem is considered for an equation solved with respect to the highest fractional derivative containing bounded operators at lower order derivatives. The criterion of well-posedness of such a problem is proved. A similar inverse problem for an equation with a degenerate operator at the highest derivative, assuming the relative 0-boundedness of a pair of operators at two higher derivatives, is reduced to two problems on subspaces for equations solved with respect to the highest derivative. The obtained well-posedness criteria allowed us to investigate one class of inverse problems for equations with polynomials from an elliptic differential operator with respect to spatial variables and with several Gerasimov–Caputo time derivatives.

Keywords and phrases: Gerasimov–Caputo fractional derivative, degenerate evolution equation, inverse coefficient problem, problem well-posedness.

AMS Subject Classification: 35R30, 35R11, 34G10

1. Введение. Задачи для различных классов уравнений с несколькими дробными производными исследовались многими авторами, в частности, изучались начально-краевые задачи для

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Вьетнамской академией наук и технологий (проект № 21-51-54003).

телеграфных [11], диффузионных уравнений [8, 13] такого вида, различные уравнения в локально выпуклых (или просто в банаховых) пространствах с приложениями к уравнениям в частных производных [1, 7, 9, 12, 14]. В то же время обратные коэффициентные задачи рассматривались для разлиных уравнений с дробной производной [2, 3, 10, 15].

В этой работе исследуются вопросы корректности линейной обратной задачи для уравнения более сложного вида — с несколькими дробными производными Герасимова—Капуто в банаховых пространствах

$$D_t^\alpha Lx(t) = \sum_{j=1}^{n} M_j D_t^{\alpha_j} x(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha$, $m_n - 1 < \alpha_n \leqslant m_n \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leqslant m$, $L, M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (линейные непрерывные операторы из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$), $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $M_n \in \mathcal{C}l(X; \mathcal{Y})$ (линейный замкнутый оператор, плотно определенный в $\mathcal{X}$, действующий в $\mathcal{Y}$), $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{C})$, $u \in \mathcal{Y}$, $T > 0$, с начальными условиями

$$x^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}, \quad l = 0, 1, \ldots, m_n - 1, \quad (Px)^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}^1, \quad l = m_n, m_n + 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

где P — проектор в пространстве $\mathcal{X}$ вдоль подпространства вырождения $\mathcal{X}^0$ (см. в п. 3) на подпространство $\mathcal{X}^1$, и с условием переопределения

$$\int_0^T x(t) d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}, \tag{3}$$

где функция μ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, T]$, а условие задается интегралом Римана—Стилтьеса. Неизвестными в обратной задаче (1)—(3) являются коэффициент u и функция $x \colon [0, T] \to \mathcal{X}$.

Во втором разделе сформулирована полученная теорема из работы [6] об однозначной разрешимости прямой задачи (1), (2) для разрешенного относительно старшей дробной производной уравнения, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $L = I$ и поэтому $P = I$, содержащего ограниченные операторы при младших производных. Формула решения из этой теоремы использована для исследования обратной задачи (1)—(3) для этого уравнения. Получен критерий ее корректности в терминах обратимости оператора, построенного по данным задачи.

В разделе 3 рассмотрена обратная коэффициентная задача (1)—(3) для вырожденного эволюционного уравнения, т.е. при $\ker L \neq \{0\}$. В предположении $(L, 0)$-ограниченности оператора M_n исходная вырожденная задача редуцирована к двум обратным задачам на двух взаимно дополняющих друг друга подпространствах для уравнений, разрешенных относительно старшей производной. На основе результата второго параграфа получен критерий корректности обратной задачи для вырожденного уравнения.

В последнем разделе полученные абстрактные результаты использованы при исследовании класса обратных задач для уравнений с многочленами от эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

2. Обратная задача для уравнения, разрешенного относительно старшей производной. Пусть $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная порядка m, $J_t^0 := I$, дробный интеграл Римана—Лиувилля J_t^β порядка $\beta > 0$ и дробная производная Герасимова—Капуто D_t^α порядка $\alpha > 0$ определяются соотношениями соответственно

$$J_t^\beta z(t) := \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} z(s) ds, \quad D_t^\alpha z(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(z(t) - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\right).$$

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Рассмотрим обратную задачу для уравнения с несколькими дробными производными Герасимова—Капуто

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j D_t^{\alpha_j} z(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha$, $m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,2,\ldots,n$, $m-1 < \alpha \leqslant m$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ (линейные непрерывные операторы в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$), $j = 1,2,\ldots,n$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{C})$, $u \in \mathcal{Y}$, $T > 0$, с начальными условиями Коши

$$z^{(l)}(0) = z_l \in \mathcal{Z}, \quad l = 0,1,\ldots,m-1, \tag{5}$$

и с условием переопределения

$$\int_0^T x(t)d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}, \tag{6}$$

где μ — функция ограниченной вариации на отрезке $[0,T]$. Неизвестными в обратной задаче (1)—(3) являются коэффициент u и функция $x\colon [0,T] \to \mathcal{X}$.

Обозначим $n_l := n+1$ при $l > m_n - 1$ или $n_l := \min\{j \in \{1,2,\ldots,n\} : l \leqslant m_j - 1\}$ в противном случае,

$$R := \max\left\{\frac{1}{2n},\ \|A_j\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} : j = 1,2,\ldots,n\right\}, \quad r_0 := (2Rn)^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}},$$

$$\gamma_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0,\ \arg\lambda \in (-\pi,\pi)\}, \quad \gamma_2 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \pi,\ \lambda \in [-r_0,-\infty)\},$$

$$\gamma_3 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = -\pi,\ \lambda \in (-\infty,-r_0]\}, \quad \gamma := \bigcup_{k=1}^{3}\gamma_k,$$

$$Z_l(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\lambda^\alpha I - \sum_{j=1}^{n}\lambda^{\alpha_j}A_j\right)^{-1}\left(\lambda^{\alpha-l-1}I - \sum_{j=n_l}^{n}\lambda^{\alpha_j-l-1}A_j\right)e^{\lambda t}d\lambda, \quad t > 0,$$

при $l = 0,1,\ldots,m-1$,

$$Z(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\lambda^\alpha I - \sum_{j=1}^{n}\lambda^{\alpha_j}A_j\right)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda, \quad t > 0.$$

Решением прямой задачи (4), (5) (с известным $u \in \mathcal{Z}$) называется функция $z \in C^{m-1}([0,T];\mathcal{Z})$, для которой $D_t^\alpha z, D_t^{\alpha_j}A_j z \in C([0,T];\mathcal{Z})$, $j = 1,2,\ldots,n$, и выполняются равенства (4) при всех $t \in [0,T]$ и (5).

Теорема 1 (см. [6]). *Пусть* $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1,2,\ldots,n$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{C})$, $u \in \mathcal{Z}$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0,1,\ldots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (4), (5), *при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t)z_l + \int_0^t Z(t-s)\varphi(s)u\,ds. \tag{7}$$

Введем также обозначения

$$\psi := z_T - \int_0^T \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t)z_l d\mu(t), \quad \chi := \int_0^T d\mu(t)\int_0^t Z(t-s)\varphi(s)ds.$$

Решением обратной задачи (4)—(6) (с неизвестным $u \in \mathcal{Z}$) называется пара $(z(t),u)$, где $u \in \mathcal{Z}$, функция z является решением задачи (4), (5) с этим u, удовлетворяющее условию переопределения (6). Часто для краткости решением обратной задачи будем называть только соответствующее $u \in \mathcal{Z}$.

Задачу (4)—(6) назовем корректной, если для любых $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$ существует единственное решение $(z(t), u)$, для которого

$$\|u\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C\Big(\sum_{l=0}^{m-1} \|z_l\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}}\Big),$$

где константа C не зависит от $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$.

Теорема 2. *Пусть $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $\mu\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда задача (4)—(6) корректна в том и только в том случае, когда $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. При этом решение имеет вид $u = \chi^{-1}\psi$.*

Доказательство. По теореме 1 решение задачи Коши (4), (5) существует для любых $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $u \in \mathcal{Z}$ и имеет вид (7). Подставив (7) в (6), получим равенство

$$\int_0^T \left(\sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Z(t-s)\varphi(s) ds u\right) d\mu(t) = z_T,$$

которое имеет вид $\chi u = \psi$, т.е. задача (4)—(6) эквивалентна этому уравнению. Поэтому задача однозначно разрешима при любом $\psi \in \mathcal{Z}$ тогда и только тогда, когда существует обратный оператор $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Из вида решения $u = \chi^{-1}\psi$ следует корректность обратной задачи в случае $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. □

3. Обратная задача для вырожденного эволюционного уравнения. Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — множество всех линейных замкнутых операторов с областью определения, плотной в $\mathcal{X}$, действующих в $\mathcal{Y}$. Будем предполагать, что $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $L, M_1, M_2, \dots, M_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, D_{M_n} — область определения оператора M_n, на которой задана норма графика $\|\cdot\|_{D_{M_n}} := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|M_n \cdot\|_{\mathcal{Y}}$. Обозначим $\rho^L(M_n) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M_n)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$, $R^L_\mu(M_n) := (\mu L - M_n)^{-1} L$, $L^L_\mu(M_n) := L(\mu L - M_n)^{-1}$.

Оператор M_n называется (L,σ)-ограниченным, если

$$\exists a > 0\ \forall \mu \in \mathbb{C}\ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M_n)).$$

В случае (L,σ)-ограниченности оператора M_n определим проекторы

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M_n) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M_n) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}),$$

где $\Gamma := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ (см. [16, с. 89, 90]). Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \operatorname{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 := \operatorname{im} Q$. Обозначим для краткости $P_0 := I - P$, $Q_0 := I - Q$, через L_r $(M_{j,r})$ — сужение оператора L (M_j) на $\mathcal{X}^r$ $(D_{M_{n,r}} := D_{M_n} \cap \mathcal{X}^r$ при $j = n)$, $r = 0, 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. При этом известно (см. [16, с. 90, 91]), что $LP = QL$, $M_n P x = Q M_n x$ для $x \in D_{M_n}$, $M_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $M_{n,0} \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_r \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^r;\mathcal{Y}^r)$, $r = 0, 1$, существуют операторы $M_{n,0}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$. Дополнительно потребуем в дальнейших рассуждениях выполнения условий коммутирования

$$M_j P = Q M_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \tag{8}$$

Далее будем предполагать также, что M_n $(L,0)$-ограничен, т.е. L_0 — нулевой оператор.

Рассмотрим обратную задачу для вырожденного эволюционного уравнения

$$D^\alpha_t L x(t) = \sum_{j=1}^n D^{\alpha_j}_t M_j x(t) + \varphi(t) u, \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha$, $m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $m - 1 < \alpha \leqslant m$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Y}$, $T > 0$, с начальными условиями

$$x^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}, \quad l = 0, 1, \dots, m_n - 1, \quad (Px)^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}^1, \quad l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1, \tag{10}$$

и условием переопределения

$$\int\limits_0^T x(t)d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}. \tag{11}$$

Решением задачи (9), (10) (при заданном $u \in \mathcal{Y}$) будем называть функцию $x\colon [0,T] \to D_{M_n}$, для которой $x \in C^{m_n-1}([0,T];\mathcal{X})$, $Px \in C^{m-1}([0,T];\mathcal{X})$, $D_t^\alpha Lx, D_t^{\alpha_j} M_j x \in C([0,T];\mathcal{X})$, $j = 1,2\dots,n$, выполняются равенства (9) при всех $t \in [0,T]$ и (10).

Решением задачи (9)—(11) (при неизвестном $u \in \mathcal{Y}$) будем называть пару $(x(t),u)$, где $u \in \mathcal{Y}$, функция $x(t)$ является решением задачи (9), (10) при этом $u \in \mathcal{Y}$, удовлетворяющее условию переопределения (11). Для краткости решением также будем называть соответствующее u.

Задача (9)—(11) называется корректной, если для любых $x_l \in \mathcal{X}$, $l = 1,2,\dots,m_n-1$, $x_l \in \mathcal{X}^1$, $l = m_n, m_n+1,\dots,m-1$, $x_T \in \mathcal{X}$ существует единственное решение $(x(t),u)$ задачи (9)—(11), при этом

$$\|u\|_{\mathcal{Y}} \leqslant C\left(\sum_{l=1}^{m-1}\|x_l\|_{\mathcal{X}} + \|x_T\|_{\mathcal{X}}\right),$$

где C не зависит от $x_l \in \mathcal{X}$, $l = 1,2,\dots,m_n-1$, $x_l \in \mathcal{X}^1$, $l = m_n, m_n+1,\dots,m-1$.

Если оператор M_n $(L,0)$-ограничен, то задача (9)—(11) эквивалентна системе двух задач на дополняющих друг друга подпространствах $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{X}^1$:

$$D_t^\alpha v(t) = \sum_{j=1}^n D_t^{\alpha_j} L_1^{-1} M_{j,1} v(t) + \varphi(t) L_1^{-1} u^1, \quad t \in [0;T], \tag{12}$$

$$v^{(l)}(0) = v_l, \quad l = 0,1,\dots,m-1, \tag{13}$$

$$\int\limits_0^T v(t)d\mu(t) = v_T, \tag{14}$$

и

$$D_t^{\alpha_n} w(t) = -\sum_{j=1}^{n-1} D_t^{\alpha_j} M_{n,0}^{-1} M_{j,0} w(t) - \varphi(t) M_{n,0}^{-1} u^0, \quad t \in [0,T], \tag{15}$$

$$w^{(l)}(0) = w_l, \quad l = 0,1,\dots,m_n-1, \tag{16}$$

$$\int\limits_0^T w(t)d\mu(t) = w_T, \tag{17}$$

где $v(t) = Px(t)$, $w(t) = P_0x(t)$, $v_l = Px_l$, $l = 0,1,\dots,m-1$, $w_l = P_0x_l$, $l = 0,1,\dots,m_n-1$, $v_T = Px_T$, $w_T = P_0x_T$, $u^1 = Qu$, $u^0 = Q_0u$. При этом учитывается, что в силу условий (8) $M_j\colon \mathcal{X}^r \to \mathcal{Y}^r$, $r = 0,1$, $j = 1,2,\dots,n-1$. Таким образом, обе обратные задачи (12)—(14) и (15)—(17) являются невырожденными, а следовательно, по теореме 2 они корректны тогда и только тогда, когда существует $\chi_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$ и $\chi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ соответственно. При этом решения имеют вид

$$u^0 = \chi_0^{-1}\psi_0, \quad u^1 = \chi_1^{-1}\psi_1,$$

где

$$\psi_0 = w_T - \int\limits_0^T \sum_{l=0}^{m_n-1} X_{l,0}(t) w_l d\mu(t), \quad \chi_0 = -\int\limits_0^T d\mu(t) \int\limits_0^t X_0(t-s) M_{n,0}^{-1}\varphi(s)ds,$$

$$\psi_1 = v_T - \int\limits_0^T \sum_{l=0}^{m-1} X_{l,1}(t) v_l d\mu(t), \qquad \chi_1 = \int\limits_0^T d\mu(t) \int\limits_0^t X_1(t-s) L_1^{-1}\varphi(s)ds,$$

для $t > 0$

$$X_{l,0}(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^0}\left(\lambda^{\alpha_n} I + \sum_{j=1}^{n-1}\lambda^{\alpha_j}M_{n,0}^{-1}M_{j,0}\right)^{-1}\left(\lambda^{\alpha_n - l-1} I + \sum_{j=(n-1)_l}^{n-1}\lambda^{\alpha_j-l-1}M_{n,0}^{-1}M_{j,0}\right)e^{\lambda t}d\lambda,$$

при $(n-1)_l = \min\{j \in \{1, 2, \ldots, n-1\} : l \leqslant m_j - 1\}$, $l = 0, 1, \ldots, m_n - 1$,

$$X_0(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^0}\left(\lambda^{\alpha_n} I + \sum_{j=1}^{n-1}\lambda^{\alpha_j}M_{n,0}^{-1}M_{j,0}\right)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda,$$

$$X_{l,1}(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^1}\left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{j=1}^{n}\lambda^{\alpha_j}L_1^{-1}M_{j,1}\right)^{-1}\left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{j=n_l}^{n}\lambda^{\alpha_j-l-1}L_1^{-1}M_{j,1}\right)e^{\lambda t}d\lambda$$

при $n_l = \min\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : l \leqslant m_j - 1\}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$X_1(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^1}\left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{j=1}^{n}\lambda^{\alpha_j}L_1^{-1}M_{j,1}\right)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda.$$

Здесь контуры γ^0, γ^1 строятся так же, как контур γ для невырожденного случая, но с использованием в качестве радиуса r_0 константы

$$r_{0,0} := \left(2(n-1)\max\left\{\frac{1}{2(n-1)}, \|M_{n,0}^{-1}M_{j,0}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^0)} : j = 1, 2, \ldots, n-1\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha_n - \alpha_{n-1}}},$$

$$r_{0,1} := \left(2n\max\left\{\frac{1}{2n}, \|L_1^{-1}M_{j,1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^1)} : j = 1, 2, \ldots, n\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha - \alpha_n}}$$

соответственно.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $L, M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L, 0)$*-ограничен,* $M_jP = QM_j$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$. *Тогда задача* (9)—(11) *корректна в том и только в том случае, когда существуют* $\chi_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $\chi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$. *При этом решение имеет вид* $u = \chi_0^{-1}\psi_0 + \chi_1^{-1}\psi_1$.

4. Приложение. Пусть заданы многочлены

$$P_p(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} c_j\lambda^j, \quad Q_p^k(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} d_j^k\lambda^j, \quad c_j, d_j^k \in \mathbb{C}, \quad j = 0, 1, \ldots, p, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad c_p \neq 0,$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda w)(s) = \sum_{|q|\leqslant 2r} a_q(s)\frac{\partial^{|q|}w(s)}{\partial s_1^{q_1}\partial s_2^{q_2}\ldots\partial s_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l w)(s) = \sum_{|q|\leqslant r_l} b_{lq}(s)\frac{\partial^{|q|}w(s)}{\partial s_1^{q_1}\partial s_2^{q_2}\ldots\partial s_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, 2, \ldots, r,$$

$q = (q_1, q_2, \ldots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + \ldots + q_d$, операторный пучок $\Lambda, B_1, B_2, \ldots, B_r$ регулярно эллиптичен [4]. Пусть оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения

$$D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega) := \{w \in H^{2r}(\Omega) : B_l w(s) = 0,\ l = 1, 2, \ldots, r,\ s \in \partial\Omega\}$$

действует согласно равенству $\Lambda_1 w = \Lambda w$. Предположим, что Λ_1 — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 действительный и дискретный [4]. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Рассмотрим обратную задачу

$$\frac{\partial^l v}{\partial t^l}(s,0) = v_l(s), \quad l = 0,1,\ldots,m-1, \quad s \in \Omega, \tag{18}$$

$$B_l\Lambda^k v(s,t) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,p-1, \quad l = 1,2,\ldots,r, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{19}$$

$$D_t^\alpha P_p(\Lambda)v(s,t) = \sum_{j=1}^n D_t^{\alpha_j} Q_p^j(\Lambda)v(s,t) + \varphi(t)h(s), \quad (s,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{20}$$

$$\int_0^T v(s,T)d\mu(t) = v_T(s), \quad s \in \Omega, \tag{21}$$

где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha$, $m_n - 1 < \alpha_n \leqslant m_n \in \mathbb{N}$, $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, неизвестные функции – $v\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ и $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Возьмем

$$\mathcal{X} = \{w \in H^{2rp}(\Omega) : B_l\Lambda^k w(s) = 0,\ k = 0,1,\ldots,p-1,\ l = 1,2,\ldots,r,\ s \in \partial\Omega\},$$

$\mathcal{Y} = L_2(\Omega)$, $L = P_p(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_j = Q_p^j(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Пусть $P_p(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$ и задача (18)—(21) представима в виде (4)—(6), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A_j = L^{-1}M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1,2,\ldots,n$, $z_l = v_l(\cdot)$, $l = 0,1,\ldots,m-1$, $u = L^{-1}h(\cdot)$. По теореме 2 необходимым и достаточным условием корректности обратной задачи (18)—(21) является условие существования такого $c > 0$, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\int_0^T\int_0^t\int_\gamma \left(\lambda^\alpha P_p(\lambda_k) - \sum_{j=1}^n \lambda^{\alpha_j} Q_p^j(\lambda_k)\right)^{-1} P_p(\lambda_k)e^{\lambda(t-\tau)}d\lambda\varphi(\tau)d\tau d\mu(t)\right| \geqslant c, \tag{22}$$

поскольку

$$\chi = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^\infty \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k \int_0^T\int_0^t\int_\gamma \left(\lambda^\alpha P_p(\lambda_k) - \sum_{j=1}^n \lambda^{\alpha_j} Q_p^j(\lambda_k)\right)^{-1} P_p(\lambda_k)e^{\lambda(t-\tau)}d\lambda\varphi(\tau)d\tau d\mu(t),$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Пример 1. Возьмем $P_2(\lambda) = \lambda^2$, $n = 2$, $Q_2^1(\lambda) = a$, $Q_2^2(\lambda) = 1 + \lambda$, $d = 1$, $\Omega = (0,\pi)$, $r = 1$, $\Lambda w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$, $B_1 = I$, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 4/3$, $\alpha = 5/2$, $\varphi \equiv 1$, $\mu(t) = 0$ при $t \in (0,T)$, μ имеет единичный скачок в точке $t = T$. Тогда $m = 3$, $\lambda_k = -k^2$ при $k \in \mathbb{N}$ и задача (18)—(21) имеет вид

$$D_t^{5/2}\frac{\partial^4 v}{\partial s^4}(s,t) = aD_t^{1/4}v(s,t) + D_t^{4/3}\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)v(s,t) + h(s), \quad (s,t) \in (0,\pi) \times [0,T],$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(0,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

$$v(s,0) = v_0(s), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(s,0) = v_1(s), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(s,0) = v_2(s), \quad s \in (0,\pi),$$

$$v(s,T) = v_T(s), \quad s \in (0,\pi),$$

а условие корректности после некоторых упрощений примет следующий вид:

$$\left|\int_\gamma (\lambda^{3/2} - ak^{-4}\lambda^{-3/4} - (k^{-4} - k^{-2})\lambda^{1/3})^{-1}(e^{\lambda t} - e^{\lambda(t-T)})d\lambda\right| \geqslant c.$$

Теперь рассмотрим вырожденный случай. Предположим, что $P_p(\lambda_k) = 0$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$, тогда оператор M_n $(L,0)$-ограничен при условии, что многочлены P_p и Q_p^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_k\}$ (см. [5]), при этом проекторы имеют вид

$$P = \sum_{P_p(\lambda_k)\neq 0} \langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k, \quad Q = \sum_{P_p(\lambda_k)\neq 0} \langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k.$$

Имеем

$$Q_p^j P = \sum_{P_p(\lambda_k)\neq 0} Q_p^j(\lambda_k)\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k = QQ_p^j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Начальные условия (10) можно задать в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^l v}{\partial t^l}(s,0) = v_l(s), \quad l = 0, 1, \dots, m_n - 1, \quad s \in \Omega,\\ \frac{\partial^l P_p(\Lambda)v}{\partial t^l}(s,0) = y_l(s), \quad l = m_n, m_n+1, \dots, m-1, \quad s \in \Omega,\end{gathered} \tag{23}$$

где $v_l \in \mathcal{X}$, $l = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $y_l \in \mathcal{Y}^1$, $l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1$. Действительно, поскольку оператор M_n $(L, 0)$-ограничен, то $\ker P = \ker L$, и условия $(Px)^{(l)} = x_l$, $l = m_n, m_n+1, \dots, m-1$, эквивалентны условиям $(Lx)^{(l)} = y_l = L_1 x_l$, $l = m_n, m_n+1, \dots, m-1$.

Задача (19)—(21), (23) представима в виде (9)—(11) с выбранными выше пространствами $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и операторами L, M_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $x_l = v_l(\cdot)$, $l = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $x_l = L_1^{-1} y_l(\cdot)$, $l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1$, $u = h(\cdot)$. По теореме 3 задача (19)—(21), (23) корректна тогда и только тогда, когда существует такое $c > 0$, что при всех $k \in \mathbb{N}$, для которых $P_p(\lambda_k) \neq 0$,

$$\left| \int_0^T \int_0^t \int_{\gamma^1} \left(\lambda^\alpha P_p(\lambda_k) - \sum_{i=1}^n \lambda^{\alpha_i} Q_i(\lambda_k) \right)^{-1} P_p(\lambda_k) e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda \varphi(\tau) d\tau d\mu(t) \right| \geqslant c, \tag{24}$$

а при всех $k \in \mathbb{N}$, для которых $P_p(\lambda_k) = 0$,

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\gamma^0} \left(\sum_{i=1}^n \lambda^{\alpha_i} Q_i(\lambda_k) \right)^{-1} Q_n(\lambda_k) e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda \varphi(\tau) d\tau d\mu(t) \neq 0. \tag{25}$$

При этом учитывается конечность числа условий (25), следующая из конечнократности спектра оператора Λ_1.

Пример 2. Пусть $P_2(\lambda) = \lambda(\lambda + 9)$, $n = 2$, $Q_2^1(\lambda) = a$, $Q_2^2(\lambda) = 1 + \lambda$, $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $r = 1$, $\Lambda w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$, $B_1 = I$, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 4/3$, $\alpha = 5/2$, $\varphi \equiv 1$, $\mu(t) = 0$ при $t \in (0, T)$, μ имеет единичный скачок в точке $t = T$. Тогда $m = 3$, $m_2 = 2$, $\lambda_k = -k^2$ при $k \in \mathbb{N}$, $P_2(\lambda_3) = 0$ и задача (19)—(21), (23) имеет вид

$$D_t^{5/2} \left(\frac{\partial^4}{\partial s^4} + 9\frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) v(s,t) = aD_t^{1/4} v(s,t) + D_t^{4/3} \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) v(s,t) + h(s), \quad (s,t) \in (0,\pi) \times [0,T],$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(0,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

$$v(s,0) = v_0(s), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(s,0) = v_1(s), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4}{\partial s^4} + 9\frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) v(s,0) = v_2(s), \quad s \in (0,\pi),$$

$$v(s,T) = v_T(s), \quad s \in (0,\pi),$$

где $v_0, v_1, v_T \in \mathcal{X}$, $v_2 \in \mathcal{Y}^1$.

Необходимые и достаточные условия (24), (25) ее разрешимости есть

$$\left| \int_{\gamma^1} ((k^4 - 9k^2)\lambda^{3/2} - a\lambda^{-3/4} - (1-k^2)\lambda^{1/3})^{-1} (k^4 - 9k^2)(e^{\lambda t} - e^{\lambda(t-T)}) d\lambda \right| \geqslant c, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{3\},$$

$$\int\limits_{\gamma^0} (-a\lambda^{-3/4} + 8\lambda^{1/3})^{-1}(e^{\lambda t} - e^{\lambda(t-T)})d\lambda \neq 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушак А. В.* Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными// Мат. заметки. — 2005. — *77*, № 1. — С. 28–41.
2. *Глушак А. В.* Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Совр. мат. Фундам. напр. — 2006. — *15*. — С. 126–141.
3. *Глушак А. В.* Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка// Мат. заметки. — 2010. — *87*, № 5. — С. 684–693.
4. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
5. *Федоров В. Е.* Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 5. — С. 702–712.
6. *Федоров В. Е., Бойко К. В., Фуонг Т. Д.* Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными// Мат. заметки СВФУ. — 2021. — *28*, № 3. — С. 85–104.
7. *Федоров В. Е., Туров М. М.* Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана—Лиувилля// Сиб. мат. ж. — 2021. — *62*, № 5. — С. 1143–1162.
8. *Alvarez-Pardo E., Lizama C.* Mild solutions for multi-term time-fractional differential equations with nonlocal initial conditions// Electron. J. Differ. Equations. — 2014. — *2014*, № 39. — P. 1–10.
9. *Fedorov V. E., Kostić M.* On a class of abstract degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex spaces// Euras. Math. J. — 2018. — *9*, № 3. — P. 33–57.
10. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Kostić M.* A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2020. — *29*, № 2. — P. 173–184.
11. *Jiang H., Liu F., Turner I., Burrage K.* Analitical solutions for the multi-term time-space Caputo–Riesz fractional advection-diffussion equations on a finite domain// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *389*, № 2. — P. 1117–1127.
12. *Li C.-G., Kostič M., Li M.* Abstract multi-term fractional differential equations// Kragujevac J. Math. — 2014. — *38*, № 1. — P. 51–71.
13. *Liu F., Meerschaert M. M., McGough R. J., Zhuang P., Liu Q.* Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffusion equation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2013. — *16*, № 1. — P. 9–25.
14. *Lizama C., Prado H.* Fractional relaxation equations on Banach spaces// Appl. Math. Lett. — 2010. — *23*, № 1. — P. 137–142.
15. *Orlovsky D. G.* Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space// Ж. СФУ. Сер. Мат. Физ. — 2015. — *8*, № 1. — С. 55–63.
16. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. — Utrecht, Boston: VSP, 2003.

Бойко Ксения Владимировна
Челябинский государственный университет
E-mail: `kvboyko@mail.ru`

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский государственный университет
E-mail: `kar@csu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 47–53
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-47-53

УДК 517.977

ОПЕРАТОРНЫЕ ФОРМЫ И МЕТОДЫ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2022 г. **А. С. БУЛДАЕВ, В. А. ДУМНОВ**

Аннотация. Рассматриваются новые конструктивные формы известных условий оптимальности управления в управляемых системах с ограничениями в форме задач о неподвижной точке в пространстве управлений. Построенные формы условий оптимальности позволяют применить теорию и методы неподвижных точек для разработки новых итерационных алгоритмов поиска экстремальных управлений в рассматриваемом классе задач оптимального управления с ограничениями.

Ключевые слова: управляемая система с ограничениями, принцип максимума, оператор управления, задача о неподвижной точке, итерационный алгоритм.

OPERATOR FORMS AND METHODS OF THE MAXIMUM PRINCIPLE IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH CONSTRAINTS

© 2022 **A. S. BULDAEV, V. A. DUMNOV**

Abstract. New constructive forms of well-known optimality conditions for constrained controlled systems in the form of fixed point problems in the control space are considered. Optimality conditions proposed allows one to apply the theory and methods of fixed points to develop new iterative algorithms for finding extremal controls in the class of constrained optimal control problems.

Keywords and phrases: controlled system with constraints, maximum principle, control operator, fixed point problem, iterative algorithm.

AMS Subject Classification: 49M20

1. Введение. Известные необходимые условия оптимальности управления в форме принципа максимума в задачах оптимального управления с ограничениями формулируются на основе перехода к вспомогательным задачам без ограничений с функционалами Лагранжа. При этом поиск экстремальных, то есть удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности, управлений, существенно осложняется вопросом подбора соответствующих множителей Лагранжа. Классический подход в задачах с ограничениями, основанный на решении краевой задачи принципа максимума в пространстве состояний, имеет теоретическое значение и редко применяется в расчетах прикладных задач. Основной подход состоит в построении релаксационных последовательностей управлений на базе конструируемых условий улучшения управления, сходящихся при определенных условиях к экстремальным управлениям. В частности, широкую известность получили градиентные методы и их модификации [3, 4], являющиеся локальными методами улучшения управления.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-030005) и Бурятского госуниверситета (проект 2021 г.).

Нелокальные методы улучшения управления в задачах оптимального управления в последние десятилетия активно развивались в иркутской школе методов оптимизации и оптимального управления под руководством профессоров В. И. Гурмана и В. А Срочко [5,7], а также в Москве под руководством профессора В. Ф. Кротова [11].

В [1, 2, 9, 10] были разработаны новые методы нелокального улучшения управления на основе представления условий улучшения управления в форме задач о неподвижной точке операторов управления в пространстве управлений в различных классах задач оптимального управления, в [1] — в классе полиномиальных по состоянию задач, в [2] — в классе задач со смешанными управляющими функциями и параметрами, в [9, 10] — в классах задач с ограничениями, в том числе с нефиксированным временем. Эти подходы неподвижных точек в пространстве управлений основываются на построении нестандартных формул приращения функционалов задачи, не содержащих остаточных членов разложений, и являются развитием подхода нелокального улучшения управления в пространстве состояний, первоначально разработанного в линейных и линейно-квадратичных по состоянию задачах оптимального управления без ограничений [7].

В настоящей работе рассматривается новый подход к поиску экстремальных управлений в задачах с ограничениями, который основывается на представлении необходимых условий оптимальности в форме задач о неподвижной точке операторов управления в пространстве управлений в отличие от известной краевой задачи принципа максимума в пространстве фазовых и сопряженных состояний. Предлагаемый подход неподвижных точек дает возможность применить и модифицировать хорошо развитые методы неподвижных точек для решения систем необходимых условий оптимальности в задачах с ограничениями. Предлагаемые формы и методы принципа максимума являются расширением и обобщением рассмотренных моделей и методов принципа максимума в задачах без ограничений [8].

2. Задача с ограничениями. Рассматривается класс задач оптимального управления с ограничениями, приводимых к следующему каноническому виду:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$\Phi_0(u) = \varphi_0(x(t_1)) + \int_T F_0(x(t), u(t), t) \to \inf_{u \in V}, \tag{2}$$

$$\Phi_1(u) = \varphi_1(x(t_1)) = 0, \tag{3}$$

в которой $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)))$ — вектор состояния, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ — вектор управляющих функций, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ — замкнутое выпуклое множество. Интервал T фиксирован. В качестве доступных управляющих функций рассматривается множество V кусочно-непрерывных на T функций со значениями в множестве U : $V = \{v \in PC(T) : v(t) \in U,\ t \in T\}$. Функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$, функции $F_0(x, u, t)$, $f(x, u, t)$ и их частные производные по x, u непрерывны по совокупности аргументов на множестве $\mathbb{R}^n \times U \times T$. Функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $\mathbb{R}^n \times U \times T$ с константой $L > 0$:

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leqslant L\|x - y\|.$$

К виду (1)—(3) стандартными способами штрафования за нарушение ограничений могут быть сведены многие задачи оптимального управления с фазовыми и терминальными ограничениями.

Доступное управление $u \in V$ называется допустимым, если выполняется функциональное ограничение (3). Множество допустимых управлений обозначим

$$D = \{v \in V : \Phi_1(v) = \varphi_1(x(t_1)) = 0\}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу без ограничений на основе функционала Лагранжа:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{4}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$L^\lambda(u) = \lambda_0 \Phi_0(u) + \lambda_1 \Phi_1(u) \to \inf_{u \in V}, \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \neq 0. \tag{5}$$

Функция Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in \mathbb{R}^n$ и стандартная сопряженная система в задаче Лагранжа (4)—(5) имеют вид

$$H^\lambda(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x,u,t)\rangle - \lambda_0 F_0(x,u,t),$$
$$\dot{\psi}(t) = -H_x^\lambda(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \tag{6}$$
$$\psi(t_1) = -\varphi_x^\lambda(x(t_1)), \quad \varphi^\lambda(x) = \lambda_0\varphi_0(x) + \lambda_1\varphi_1(x).$$

Для доступного управления $v \in V$ обозначим через $x(t,v)$, $t \in T$, решение системы (1) при $u(t) = v(t)$, а через $\psi^\lambda(t,v)$, $t \in T$, — решение стандартной сопряженной системы (6) при $x(t) = x(t,v)$ и $u(t) = v(t)$.

Известное необходимое условие оптимальности (принцип максимума) для допустимого управления $v \in V$ в задаче (1)—(3) при некотором $\lambda \neq 0$ в введенных обозначениях записывается в виде:

$$v(t) = \arg\max_{w \in U} H^\lambda(\psi^\lambda(t,v), x(t,v), w, t), \quad t \in T. \tag{7}$$

В качестве следствия отсюда следует известное ослабленное необходимое условие (дифференциальный принцип максимума), которое в проекционной форме представляется в виде:

$$v(t) = P_U(v(t) + \alpha H_u^\lambda(\psi^\lambda(t,v), x(t,v), v(t), t)), \quad t \in T, \quad \alpha > 0. \tag{8}$$

Здесь вводится обозначение P_U для оператора проектирования на множество $U \subset \mathbb{R}^m$ в евклидовой норме.

Отметим, что условие (8) достаточно проверить хотя бы для одного $\alpha > 0$. В линейной по управлению задаче (1)—(3) (функции $f(x,u,t)$, $F_0(x,u,t)$ линейны по аргументу u) условия (7) и (8) являются эквивалентными.

Используя отображение

$$u^*(\psi, x, t) = \arg\max_{w \in U} H^\lambda(\psi, x, w, t), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T,$$

условие (7) может быть представлено в следующем виде:

$$v(t) = u^*(\psi^\lambda(t,v), x(t,v), t), \quad t \in T.$$

Вводя отображение для $\alpha > 0$

$$w^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(u + \alpha H_u^\lambda(\psi, x, w, t)), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad w \in U, \quad t \in T,$$

условие (8) можно записать в форме

$$v(t) = w^\alpha(\psi^\lambda(t,v), x(t,v), v(t), t), \quad t \in T, \quad \alpha > 0.$$

Вырожденный случай ($\lambda_0 = 0$) необходимых условий оптимальности в конкретных задачах оптимального управления, как правило, исследуется аналитически с учетом ограничения (3). В регулярном случае ($\lambda_0 = 1$) для поиска экстремальных управлений к указанным необходимым условиям оптимальности присоединяется условие ограничения (3), и полученные системы уравнений (3), (7) и (3), (8) относительно пары неизвестных $(v, \lambda_1) \in V \times \mathbb{R}$ решаются численными методами.

В данной работе для регулярного случая предлагается новый подход для поиска экстремальных управлений на основе конструируемых условий принципа максимума в форме операторных задач о неподвижной точке.

3. Операторные формы принципа максимума. Определим отображение X с помощью соотношения

$$X(v) = x, \quad v \in V, \quad x(t) = x(t,v), \quad t \in T.$$

Второе отображение Ψ сконструируем аналогичным образом:

$$\Psi(v) = \psi, \quad v \in V, \quad \psi(t) = \psi^\lambda(t,v), \quad t \in T.$$

Третье отображение V^* построим в виде

$$V^*(\psi, x) = v^*, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T),$$

$$v^*(t) = u^*(\psi(t), x(t), t) = \arg\max_{w \in U} H^\lambda(\psi(t), x(t), w, t), \quad t \in T,$$

где $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций. Здесь зависимость отображения Ψ, V^* и других вводимых далее отображений от множителя Лагранжа явно не указывается, чтобы не загромождать вводимые обозначения.

В результате условие (7) можно представить как операторное уравнение в форме задачи о неподвижной точке в пространстве управлений:

$$v = V^*(\Psi(v), X(v)) = G_1^*(v), \quad v \in V. \tag{9}$$

Построим новые операторные уравнения, эквивалентные условию (7).

Введем отображение X^* следующим образом:

$$X^*(\psi) = x, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T),$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$v = V^*(\Psi(v), X^*(\Psi(v))) = G_2^*(v), \quad v \in V. \tag{10}$$

Построим следующее отображение:

$$\Psi^*(x) = \psi, \quad x \in C(T), \quad \psi \in C(T),$$

в котором $\psi(t)$, $t \in T$ является решением специальной сопряженной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x^\lambda(\psi(t), x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x^\lambda(x(t_1)).$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$v = V^*(\Psi^*(X(v)), X(v)) = G_3^*(v), \quad v \in V. \tag{11}$$

В соответствии с работой [8], операторные уравнения (9)—(11) в рассматриваемой регулярной задаче Лагранжа (4), (5) без ограничений являются эквивалентными на множестве доступных управлений. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Уравнения* (9)—(11) *являются эквивалентными условию принципа максимума* (7).

Условие дифференциального принципа максимума в проекционной форме (8) можно также представить в виде эквивалентных операторных уравнений на множестве доступных управлений.

Введем вспомогательный оператор V^α, $\alpha > 0$ соотношением

$$V^\alpha(\psi, x, v) = v^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad v \in V,$$

$$v^\alpha(t) = w^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t) = P_U(v(t) + \alpha H_u^\lambda(\psi(t), x(t), v(t), t)), \quad t \in T.$$

Определим оператор X^α, $\alpha > 0$:

$$X^\alpha(\psi, v) = x^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad v \in V, \quad x^\alpha(t) = x^\alpha(t, \psi, v), \quad t \in T.$$

где $x^\alpha(t, \psi, v)$, $t \in T$ — решение задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Построим оператор Ψ^α, $\alpha > 0$:

$$\Psi^\alpha(x, v) = \psi^\alpha, \quad x \in C(T), \quad v \in V, \quad \psi^\alpha(t) = \psi^\alpha(t, x, v),$$

где $\psi^\alpha(t, x, v)$, $t \in T$ — решение сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x^\lambda(\psi(t), x(t), w^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x^\lambda(x(t_1)).$$

Рассмотрим три операторных уравнения:

$$v = V^\alpha(\Psi(v), X(v), v) = G_1^\alpha(v), \qquad v \in V, \quad \alpha > 0, \tag{12}$$

$$v = V^\alpha(\Psi(v), X^\alpha(\Psi(v), v), v) = G_2^\alpha(v), \quad v \in V, \quad \alpha > 0, \tag{13}$$

$$v = V^{\alpha}(\Psi^{\alpha}(X(v), v), X(v), v) = G_3^{\alpha}(v), \quad v \in V, \quad \alpha > 0. \tag{14}$$

Аналогично, в соответствии с работой [8], эти уравнения являются эквивалентными в регулярной задаче Лагранжа на множестве доступных управлений. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Уравнения* (12)—(14) *являются эквивалентными условию дифференциального принципа максимума* (8).

4. Операторные методы принципа максимума. Для численного решения задачи о неподвижной точке оператора $G\colon V_E \to V_E$, действующего на множестве V_E в полном нормированном пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E$,

$$v = G(v), \quad v \in V_E,$$

можно применить метод простой итерации с индексом $k \geqslant 0$, имеющий форму итерационного процесса:

$$v^{k+1} = G(v^k), \quad v^0 \in V_E.$$

Сходимость процесса простой итерации в полном нормированном пространстве можно анализировать с помощью известного принципа сжимающих отображений [6].

Каждое операторное уравнение из соотношений (9)—(14), дополненное условием ограничения (3), можно рассматривать как специальную задачу о неподвижной точке на множестве доступных управлений с дополнительным алгебраическим уравнением следующего вида:

$$v = G(v), \quad v \in V, \tag{15}$$

$$\Phi_1(v) = \varphi_1(x(t_1, v)) = 0. \tag{16}$$

Для решения задачи (15), (16) предлагается итерационный процесс с индексом $k \geqslant 0$:

$$v^{k+1} = G(v^k), \quad v^0 \in V, \tag{17}$$

$$\Phi_1(v^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1, v^{k+1})) = 0. \tag{18}$$

Таким образом, в регулярной задаче оптимального управления ($\lambda_0 = 1$) на каждой итерации предлагаемого процесса решается неявно заданное уравнение (18) относительно скалярного множителя Лагранжа $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Предполагается, что такое решение существует. В результате, итерационные приближения процесса (17), (18), начиная с индекса $k = 1$, принадлежат множеству допустимых управлений. При этом начальное приближение процесса $v^0 \in V$ при $k = 0$ может выбираться недопустимым. Указанные свойства предлагаемого итерационного процесса являются важными для практической реализации поиска экстремальных управлений. В частности, итерационный процесс (17), (18) можно использовать для поиска приемлемых на практике допустимых управлений для достижения заданных значений критерия оптимальности.

В соответствии с [8] в качестве примеров предлагаемого вида (17), (18), выпишем итерационные процессы для решения соответствующих задач о неподвижной точке на основе уравнений (13) и (14).

Для решения задачи о неподвижной точке

$$v = V^{\alpha}(\Psi(v), X^{\alpha}(\Psi(v), v), v) = G_2^{\alpha}(v), \quad v \in V, \quad \alpha > 0,$$

$$\Phi_1(v) = \varphi_1(x(t_1, v)) = 0,$$

применяется итерационный процесс

$$v^{k+1} = V^{\alpha}(\Psi(v^k), X^{\alpha}(\Psi(v^k), v^k), v^k) = G_2^{\alpha}(v^k), \quad v^0 \in V, \quad \alpha > 0, \quad t \in T, \tag{19}$$

$$\Phi_1(v^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1, v^{k+1})) = 0. \tag{20}$$

Для решения задачи о неподвижной точке

$$v = V^{\alpha}(\Psi^{\alpha}(X(v), v), X(v), v) = G_3^{\alpha}(v), \quad v \in V, \quad \alpha > 0,$$

$$\Phi_1(v) = \varphi_1(x(t_1, v)) = 0,$$

применяется итерационный процесс:

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(v^k), v^k), X(v^k), v^k) = G_3^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V, \quad \alpha > 0, \quad t \in T, \tag{21}$$

$$\Phi_1(v^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1, v^{k+1})) = 0. \tag{22}$$

Для оценки вычислительной эффективности указанных итерационных процессов важно отметить, что трудоемкость решения уравнений (19) и (21) относительно управления $v^{k+1}(t)$, $t \in T$ составляет две задачи Коши для фазовых и сопряженных переменных.

Действительно, на k-й итерации при $k \geqslant 0$ процесса (19) после вычисления решения задачи Коши $\psi(t, v^k)$, $t \in T$ находится решение $x(t)$, $t \in T$ специальной задачи Коши для фазовой системы:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Затем строится выходное управление по правилу:

$$v^{k+1}(t) = w^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), \quad t \in T.$$

При этом, по построению, выполняется соотношение:

$$x(t) = x(t, v^{k+1}), \quad t \in T.$$

В силу этого равенства итерационный процесс (19), (20) в поточечной форме можно записать в следующем неявном виде:

$$v^{k+1}(t) = w^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

$$\Phi_1(v^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1, v^{k+1})) = 0.$$

Аналогично, на k-й итерации процесса (21) после вычисления $x(t, v^k)$, $t \in T$ находится решение $\psi(t)$, $t \in T$ специальной задачи Коши для сопряженной системы:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, v^k), w^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, v^k)).$$

Затем строится выходное управление по правилу:

$$v^{k+1}(t) = w^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T.$$

Отметим, что в линейной по состоянию задаче (1)—(3) (функции $f(x, u, t)$, $F_0(x, u, t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ линейны по переменной x) решение специальной задачи Коши $\psi(t)$, $t \in T$ удовлетворяет соотношению:

$$\psi(t) = \psi(t, v^{k+1}), \quad t \in T.$$

Следовательно, в этом линейном по состоянию случае процесс (21), (22) можно записать в следующем неявном поточечном виде:

$$v^{k+1}(t) = w^\alpha(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

$$\Phi_1(v^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1, v^{k+1})) = 0.$$

Также отметим, что только на начальной итерации процесса (19) при $k = 0$ при вычислении решения $\psi(t, v^0)$, $t \in T$ требуется решить дополнительную задачу Коши для получения $x(t, v^0)$, $t \in T$.

Условия сходимости итерационных процессов (19), (20) и (21), (22) при достаточно малых параметрах проектирования $\alpha > 0$ можно обосновать в полном пространстве непрерывных или измеримых функций аналогично работе [1] на основе определения требований, обеспечивающих известное свойство «сжимания» для оператора правой части соответствующих задач о неподвижной точке.

В построенных проекционных методах неподвижных точек, в отличие от стандартного метода проекции градиента, параметр проектирования $\alpha > 0$ фиксируется в итерационном процессе последовательных приближений управления. Таким образом, на каждой итерации предлагаемых методов релаксация по целевому функционалу не гарантируется. Свойство релаксации компенсируется нелокальностью последовательных приближений управления; отсутствием операции варьирования управления в окрестности текущего приближения для обеспечения улучшения управления, характерной для градиентных методов; возможностью получения экстремальных управлений при достаточно малых параметрах проектирования, обеспечивающих принципиальную сходимость итерационных процессов.

В задачах с ограничениями предлагаемые методы неподвижных точек для поиска экстремальных управлений обеспечивают удовлетворение ограничений задачи на каждой итерации последовательных приближений управления за счет выбора множителя Лагранжа. Это позволяет решить принципиальную проблему выбора множителей Лагранжа в задачах с ограничениями и сузить размерность пространства поиска экстремальных управлений в задачах с ограничениями до пространства допустимых управлений.

5. Заключение. В рассматриваемом классе задач оптимального управления с ограничениями предложены новые операторные формы принципа максимума в виде задач о неподвижной точке в пространстве управлений, которые позволяют эффективно применить и модифицировать известный аппарат теории и методов неподвижных точек для конструирования итерационных алгоритмов поиска экстремальных управлений.

Разработанные итерационные операторные методы поиска экстремальных управлений характеризуются свойствами нелокальности и допустимости последовательных приближений управления; отсутствием трудоемкой процедуры игольчатого или выпуклого варьирования управления в малой окрестности рассматриваемого приближения, характерной для градиентных методов; наличием в проекционных методах одного основного настроечного проекционного параметра, регулирующего сходимость итерационного процесса.

Указанные свойства предлагаемого подхода поиска экстремальных управлений являются важными факторами для повышения эффективности численного решения задач оптимального управления с ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булдаев А. С.* Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. — Улан-Удэ: Изд-во Бурят. ун-та, 2008.
2. *Булдаев А. С., Хишектуева И.-Х. Д.* Метод неподвижных точек в задачах оптимизации нелинейных систем по управляющим функциям и параметрам// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2017. — *19.* — С. 89–104.
3. *Васильев О. В.* Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994.
4. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.
5. *Гурман В. И., Батурин В. А., Данилина Е. В. и др.* Новые методы улучшения управляемых процессов. — Новосибирск: Наука, 1987.
6. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.
7. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
8. *Buldaev A. S.* Operator forms of the maximum principle and iterative algorithms in optimal control problems// Commun. Comput. Inform. Syst. — 2020. — *1340.* — P. 101–112.
9. *Buldaev A. S., Burlakov I. D.* About one approach to numerical solution of nonlinear optimal speed problems// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2018. — *11*, № 4. — С. 55–66.
10. *Buldaev A. S., Burlakov I. D.* On a method for finding extremal controls in systems with constraints// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2019. — *30.* — С. 16–30.
11. *Krotov V. F.* Global Methods in Optimal Control. — New York: Marcel Dekker, 1996.

Булдаев Александр Сергеевич
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
E-mail: buldaev@mail.ru

Думнов Владислав Александрович
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
E-mail: uuvladdum@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 54–62
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-54-62

УДК 517.957

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ «РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ» В СЛУЧАЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ ПРИ НЕЛИНЕЙНОСТЯХ ОБЩЕГО ВИДА

© 2022 г. **А. Л. КАЗАКОВ, П. А. КУЗНЕЦОВ, Л. Ф. СПЕВАК**

Аннотация. В статье рассмотрена система «реакция-диффузия» с нелинейностями общего вида в случаях цилиндрической и сферической симметрии. Для указанной системы построено решение типа диффузионных волн, имеющих конечную скорость распространения по нулевому фону. Решение представлено в виде рядов Тейлора с рекуррентно определяемыми коэффициентами. Сходимость доказана методом мажорант с использованием теоремы Коши—Ковалевской. Исследование дополнено численными расчетами, выполненными на основе разложений по радиальным базисным функциям. Статья продолжает цикл работ авторов, посвященных построению и исследованию решений типа волн в классе аналитических функций.

Ключевые слова: система «реакция-диффузия», диффузионная волна, степенной ряд, метод мажорант, радиальные базисные функции, вычислительный эксперимент.

CONSTRUCTION OF SOLUTIONS TO A DEGENERATE REACTION-DIFFUSION SYSTEM WITH A GENERAL NONLINEARITY IN THE CASES OF CYLINDRICAL AND SPHERICAL SYMMETRY

© 2022 **A. L. KAZAKOV, P. A. KUZNETSOV, L. F. SPEVAK**

Abstract. We consider a reaction-diffusion system with a general nonlinearity with cylindrical or spherical symmetry. For this system, we find a solution of the diffusion-wave type propagating over a zero background with a finite velocity. The solution is constructed as a Taylor series with recurrent coefficients whose convergence is proved by the majorant method and the Cauchy–Kovalevskaya theorem. The research is supplemented by numerical calculations based on the expansion in radial basis functions. This paper continues a series of our publications devoted to the study of wave-type solutions in the class of analytical functions.

Keywords and phrases: reaction-diffusion system, diffusion wave, power series, majorant method, radial basis functions, computational experiment.

AMS Subject Classification: 35K57, 35K40

Результаты получены в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа» (проект № 121041300058-1).

1. Введение. В статье рассматривается система нелинейных параболических уравнений второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} T_t &= [\Phi(T)T_x]_x + \Gamma(T,S), \\ S_t &= [\Psi(S)S_x]_x + \Lambda(S,T). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t, x — независимые переменные; $T(t,x)$ и $S(t,x)$ — искомые функции; $\Phi(T)$, $\Psi(S)$, $\Gamma(T,S)$, $\Lambda(S,T)$ — известные достаточно гладкие функции, причем $\Gamma(0,0)=\Lambda(0,0)=0$.

Системы вида (1) используются для описания тепломассопереноса [21], а также диффузионных и реакционно-диффузионных процессов [8, 10]. Уравнения, составляющие систему (1), используются также при описании механизмов лучистой теплопроводности [1], фильтрации жидкостей и газов [13, 22], популяционной динамики [9, 20] и др.

Отметим, что при $\Phi(0)=\Psi(0)=0$ параболический тип уравнений (1) вырождается. Такое вырождение, в частности, наблюдается в случае степенных функций

$$\Phi(T)=T^{\sigma}, \quad \Psi(S)=S^{\delta}, \quad \sigma,\delta>0 - \mathrm{const}. \tag{2}$$

Системы (1) со степенными нелинейностями (2) применяются в химической кинетике для описания процессов «реакция-диффузия» [14, 19], они удобны тем, что дают хорошее приближение к реальности при сравнительной простоте исследования.

Интересный класс решений системы (1) составляют диффузионные (фильтрационные, тепловые) волны, распространяющиеся по нулевому фону с конечной скоростью. В случае одного уравнения такие волны представляют собой тривиальное и нетривиальное решения, непрерывно состыкованные на некоторой кривой или поверхности (фронт волны). Среди работ, посвященных построению и исследованию таких решений можно отметить монографии Я. Б. Зельдовича [1] и А. А. Самарского [6]. Особо выделим исследования, проводимые в научной школе А. Ф. Сидорова [7], в которых, в частности, предложены постановки краевых задач, предполагающих инициирование волны по известному заранее компоненту (например, фронту), а также алгоритмы построения решений этих задач в виде специальных [11] и характеристических рядов [12] и др. Исследования разрешимости подобных одномерных и неодномерных задач также проводились авторами, при этом рассматривались как отдельные уравнения [3, 17], так и системы [4, 16]. В ряде работ авторов также предложены алгоритмы построения численных решений уравнений [17, 18] и систем [4, 5] на основе метода граничных элементов (МГЭ) и разложений по радиальным базисным функциям (РБФ).

В развитие результатов, полученных авторами ранее [4, 5], в настоящей статье изучена задача с заданным фронтом для обобщенной системы «реакция-диффузия» в случаях цилиндрической и сферической симметрии [15]. Доказана теорема существования ее аналитического решения. Последнее построено в виде рядов Тейлора по степеням пространственных переменных. Предложен пошаговый алгоритм построения численного решения на заданном промежутке времени, основанный на разложении по РБФ. Выполнен вычислительный эксперимент.

2. Постановка задачи. Систему (1) в случае простейших пространственных симметрий можно привести (см. [4]) к виду

$$\begin{aligned} u_t &= uu_{xx} + P(u)u_x^2 + \frac{\mu}{x}uu_x + F(u,v), \\ v_t &= vv_{xx} + Q(v)v_x^2 + \frac{\mu}{x}vv_x + G(v,u), \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь u, v — искомые функции; P, Q, F, G — известные достаточно гладкие функции, такие, что $P(0), Q(0)>0$ и $F(0,0)=G(0,0)=0$; μ — параметр, который принимает значения 1, 2 в случаях цилиндрической и сферической симметрии соответственно. Плоскосимметричный случай $\mu=0$ был рассмотрен ранее в статье [4].

Систему (3) будем рассматривать вкупе с краевым условием

$$u(t,x)|_{x=a(t)} = v(t,x)|_{x=a(t)} = 0, \tag{4}$$

предполагая, что фронт волны $x=a(t)$ задан достаточно гладкой функцией $a(t)$, причем $a(0)>0$, $a'(0)\neq 0$.

Будем строить решение задачи (3), (4) в виде характеристических рядов. Для удобства построения сделаем замену переменной $z = x - a(t)$, после которой характеристические ряды становятся рядами Тейлора. Задача (3), (4) примет вид

$$\begin{aligned} u_t - a'u_z &= uu_{zz} + P(u)u_z^2 + \frac{\mu}{z+a}uu_z + F(u,v), \\ v_t - a'v_z &= vv_{zz} + Q(v)v_z^2 + \frac{\mu}{z+a}vv_z + G(v,u), \end{aligned} \tag{5}$$

$$u(t,z)|_{z=0} = v(t,z)|_{z=0} = 0. \tag{6}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $P(u)$, $Q(v)$, $F(u,v)$, $G(v,u)$, $a(t)$ — функции, аналитические при $u = 0$, $v = 0$, $u = v = 0$, $t = 0$ соответственно. Пусть также выполняется одно из следующих условий:*

$$u_z(t,0), v_z(t,0) \not\equiv 0, \tag{7}$$

$$u_z(t,0), v_z(t,0) \equiv 0. \tag{8}$$

Тогда

(i) *задача* (5), (6), (7) *имеет единственное аналитическое решение* (*нетривиальное*);

(ii) *задача* (5), (6), (8) *имеет единственное аналитическое решение* (*тривиальное*).

Отметим, что упомянутые в теореме нетривиальное и тривиальное решения соединяются на фронте $z = 0$ и образуют диффузионную волну.

Доказательство теоремы делится на два этапа: построение формальных рядов и доказательство их сходимости.

3. Построение решения. На первом этапе строится решение задачи (5), (6) в виде рядов Тейлора

$$\begin{aligned} u(t,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\frac{z^n}{n!}, \qquad u_n(t) = \left.\frac{\partial^n u}{\partial z^n}\right|_{z=0}, \\ v(t,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\frac{z^n}{n!}; \qquad v_n(t) = \left.\frac{\partial^n v}{\partial z^n}\right|_{z=0}, \end{aligned} \tag{9}$$

коэффициенты которых определяются по рекуррентной процедуре.

Из краевого условия (6) следует тождество $u_0, v_0 \equiv 0$. Чтобы определить коэффициенты $u_1(t)$ и $v_1(t)$, положим в каждом уравнении системы (5) $z = 0$. Полученная система

$$-a'u_1 = P(0)u_1^2, \quad -a'v_1 = Q(0)v_1^2$$

имеет четыре решения, только два из которых подпадают под условия (7), (8). Конкретно, это решения

$$\left[\begin{aligned} &u_1 \equiv 0, && v_1 \equiv 0, \\ &u_1 = -\frac{a'}{P(0)}, && v_1 = -\frac{a'}{Q(0)}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Применив к каждому уравнению системы (5) оператор

$$\left.\frac{\partial^n}{\partial z^n}\right|_{z=0},$$

получим равенства

$$\begin{aligned} u_n' - a'u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k u_{n+2-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_{n-k} \sum_{l=0}^{k} C_k^l u_{l+1}u_{k+1-l} + {} \\ + \mu \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{a^{n+1-k}} \sum_{l=0}^{k} C_k^l u_l u_{k+1-l} + F_n, \end{aligned} \tag{11a}$$

$$v_n' - a'v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k v_k v_{n+2-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k Q_{n-k} \sum_{l=0}^{k} C_k^l v_{l+1} v_{k+1-l} + \\ + \mu \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{a^{n+1-k}} \sum_{l=0}^{k} C_k^l v_l v_{k+1-l} + G_n, \quad (11b)$$

в которых использованы обозначения

$$P_{n-k} = \left.\frac{\partial^{n-k} P(u)}{\partial z^{n-k}}\right|_{z=0}, \quad Q_{n-k} = \left.\frac{\partial^{n-k} Q(v)}{\partial z^{n-k}}\right|_{z=0}, \quad F_n = \left.\frac{\partial^{n} F(u,v)}{\partial z^{n}}\right|_{z=0}, \quad G_n = \left.\frac{\partial^{n} G(v,u)}{\partial z^{n}}\right|_{z=0}.$$

Положив $n = 1$ в (11), получим формулы

$$u_2 = \frac{1}{a' + u_1 + 2P_0 u_1}\left(u_1' - P_1 u_1^2 - \frac{\mu}{a} u_1^2 - F_1\right), \\ v_2 = \frac{1}{a' + v_1 + 2Q_0 v_1}\left(v_1' - Q_1 v_1^2 - \frac{\mu}{a} v_1^2 - G_1\right), \quad (12)$$

из которых при известных u_1, v_2 однозначно определяются u_2, v_2.

Аналогично, положив $n = 2$ в (11), получим формулы коэффициентов u_3 и v_3. Следуя такому алгоритму, выведем общую формулу для $n \geqslant 3$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{a' + nu_1 + 2P_0 u_1}\left[u_n' - \sum_{k=2}^{n} C_n^k u_k u_{n+2-k} - P_0 \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l u_{l+1} u_{n+1-l} - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k P_{n-k} \sum_{l=0}^{k} C_k^l u_{l+1} u_{k+1-l} - \mu \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{a^{n+1-k}} \sum_{l=1}^{k} C_k^l u_l u_{k+1-l} - F_n\right], \quad (13a)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{a' + nv_1 + 2Q_0 v_1}\left[v_n' - \sum_{k=2}^{n} C_n^k v_k v_{n+2-k} - Q_0 \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l v_{l+1} v_{n+1-l} - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k Q_{n-k} \sum_{l=0}^{k} C_k^l v_{l+1} v_{k+1-l} - \mu \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{a^{n+1-k}} \sum_{l=1}^{k} C_k^l v_l v_{k+1-l} - G_n\right]. \quad (13b)$$

Таким образом, коэффициенты рядов (9) определяются согласно формулам $u_0, v_0 \equiv 0$, (10), (12), (13).

Несложно показать, что выбор $u_1, v_1 \equiv 0$ (см. (10)) дает нам тривиальное решение задачи (5), (6), (8). При выборе $u_1 = -a'/P(0)$, $v_1 = -a'/Q(0)$ мы можем говорить лишь о том, что если аналитическое решение задачи (5), (6), (7) существует, то оно нетривиально и единственно. Для завершения доказательства теоремы нам осталось доказать сходимость формальных рядов (9).

4. Построение мажорантной задачи. Сходимость будем доказывать методом мажорант. Перед построением мажорантной задачи сделаем в (5), (6) замену

$$u(t,z) = u_1 z + z^2 U(t,z), \quad v(t,z) = v_1 z + z^2 V(t,z), \quad (14)$$

которая представляет собой частичное разложение искомых функций в ряды Тейлора (9). При такой замене отпадает необходимость рассматривать краевое условие (6), так как оно выполняется автоматически. После приведения подобных и деления на z, задачу (5), (6) можно свести к системе

$$2U(1 + P_0) + (4 + P_0) z U_z + z^2 U_{zz} = \\ = f_0(t) + z f_1(t, U, U_t, V) + z^2 f_2(t, U, V, U_z) + z^3 f_3(t, z, U, V, U_z, U_{zz}), \quad (15a)$$

$$2V(1 + Q_0) + (4 + Q_0) z V_z + z^2 V_{zz} = \\ = g_0(t) + z g_1(t, V, V_t, U) + z^2 g_2(t, V, U, V_z) + z^3 g_3(t, z, V, U, V_z, V_{zz}), \quad (15b)$$

в которой f_i, g_i, $i = 0,1,2,3$ — известные аналитические функции своих переменных. Более подробно вывод системы (15) представлен в статье [4].

Решения уравнений можно представить в виде рядов Тейлора

$$
\begin{aligned}
U(t,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)\frac{z^n}{n!}, \quad U_n = \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)};\\
V(t,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\frac{z^n}{n!}, \quad V_n = \frac{v_{n+2}}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Так как все эти коэффициенты, а также функции f_i, g_i, $i = 0,1,2,3$, аналитичны, то для них можно построить мажоранты. При выполнении мажорантных оценок

$$
U_0(t), V_0(t) \ll W_0(t); \quad U_1(t), V_1(t) \ll W_1(t);
$$
$$
f_1(t,U,U_t,V), g_1(t,V,V_t,U) \ll h_1(t,W,W_t,W); \quad f_2(t,U,V,U_z), g_2(t,U,V,U_z) \ll h_2(t,W,W,W_z);
$$
$$
f_3(t,z,U,V,U_z,U_{zz}), g_3(t,z,U,V,U_z,U_{zz}) \ll h_3(t,z,W,W,W_z,W_{zz})
$$

решение задачи

$$
W_{zz} = \frac{\partial h_1(t,W,W_t,W)}{\partial z} + h_2(t,W,W,W_z) + z h_3(t,z,W,W,W_z,W_{zz}), \tag{17}
$$
$$
W(t,z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t,z)|_{z=0} = W_1(t) \tag{18}
$$

мажорирует решение задачи (15), в чем можно убедиться, построив его в виде ряда Тейлора

$$
W(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t)\frac{z^n}{n!}.
$$

Отсюда следует, что задача (17), (18) будет мажорантной для (15). Сводя (17), (18) к задаче типа Ковалевской, продифференцируем уравнение (17) по z, разрешим его относительно W_{zzz} и добавим третье краевое условие $W_{zz}(t,0) = W_2(t)$. При этом, чтобы не возникло путаницы, по какой именно переменной идет дифференцирование, используем обозначение $h_3 = h_3(t,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)$. Задача (17), (18) примет вид

$$
W_{zzz} = \frac{1}{1 - z\frac{\partial h_3}{\partial y_5}}\left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2} + \frac{\partial h_2}{\partial z} + h_3 + z\frac{\partial h_3}{\partial y_1} + z\frac{\partial h_3}{\partial y_2}W_z + z\frac{\partial h_3}{\partial y_3}W_z + z\frac{\partial h_3}{\partial y_4}W_{zz}\right), \tag{19}
$$
$$
W(t,z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t,z)|_{z=0} = W_1(t), \quad W_{zz}(t,z)|_{z=0} = W_2(t). \tag{20}
$$

Теперь мы имеем задачу (19), (20) типа Ковалевской с аналитическими входными данными. По теореме Коши—Ковалевской получаем, что ряды (16) и (9) имеют ненулевой радиус сходимости. Теорема доказана.

5. Построение численного решения. Построенное решение задачи (3), (4) является локальным, причем оценить радиус сходимости рядов (т.е. область существования решения) в общем случае невозможно. В связи с этим является актуальной задача построения приближенных решений на заданном промежутке времени $t \in [0,T]$. При этом для тестирования последних могут быть использованы отрезки рядов, для которых показана численная сходимость.

В произвольный момент времени $t > 0$ задача (3), (4) может быть представлена в виде задачи Коши для системы двух уравнений Пуассона

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{1}{u}\left[u_t - P(u)u_x^2 - \frac{\mu}{x}uu_x - F(u,v)\right],\\
v_{xx} &= \frac{1}{v}\left[v_t - Q(u)u_x^2 + \frac{\mu}{x}vv_x - G(u,v)\right],
\end{aligned}
\tag{21}
$$
$$
u|_{x=a(t)} = v|_{x=a(t)} = 0, \quad u_x|_{x=a(t)} = -\frac{a'(t)}{P(0)}, \quad v_x|_{x=a(t)} = -\frac{a'(t)}{Q(0)}. \tag{22}
$$

Условия для производных в (22) следуют из (10).

Разобьем отрезок $[0,T]$ на шаги размером h. Решение задачи (3), (4) на шаге $t=t_k=kh$ будем искать в виде

$$u(t_k,x)=U(x)+U_p(x), v(t_k,x)=V(x)+V_p(x), \tag{23}$$

где $(U_p(x),V_p(x))$ — частное решение системы (21) в момент времени $t=t_k$, а $(U(x),V(x))$ — решение следующей задачи Коши для однородной системы:

$$\begin{gathered} U''=0, \quad V''=0, \\ U|_{x=L}=-U_p(L), \quad U'|_{x=L}=-\frac{a'(t_k)}{P(0)}-U_p'(L), \\ V|_{x=L}=-V_p(L), \quad V'|_{x=L}=-\frac{a'(t_k)}{Q(0)}-V_p'(L). \end{gathered} \tag{24}$$

Здесь $L=a(t_k)$, решение (23) строится на отрезке $x\in[0,L]$. При найденном частном решении $(U_p(x),V_p(x))$ решение задачи (24) в виде двух линейных функций определяется однозначно.

Следуя подходу, предложенному в [5], выберем некоторую систему РБФ $f_i(x)=f_i(|x-x_i|)$, $i=1,\dots,m$, где $x_1,x_2,\dots,x_m$ — точки коллокации, лежащие на отрезке $[0,L]$. Для каждой функции $f_i(x)$ существует такая функция $\widehat{u}_i$, что $f_i=\partial^2\widehat{u}_i/\partial x^2$. Определять частное решение будем итерационно, при нулевых начальных приближениях ($U_p^{(0)}\equiv 0, V_p^{(0)}\equiv 0$). На $(n+1)$-й итерации правые части уравнений (21) для n-й итерации разложим по системе РБФ

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^{(n)}}\left[u_t^{(n)}-\frac{1}{\sigma}(u_x^{(n)})^2-F(u^{(n)},v^{(n)})\right]&=\sum_{i=1}^m \alpha_i^{(n+1)}f_i(x), \\ \frac{1}{v^{(n)}}\left[v_t^{(n)}-\frac{1}{\sigma}(v_x^{(n)})^2-G(u^{(n)},v^{(n)})\right]&=\sum_{i=1}^m \beta_i^{(n+1)}f_i(x), \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} u^{(n)}&=U^{(n)}+U_p^{(n)}, \quad U^{(n)}=-\left(\frac{a'(t_k)}{P(0)}+U_p^{(n)'}(L)\right)x-U_p^{(n)}(L), \\ v^{(n)}&=V^{(n)}+V_p^{(n)}, \quad V^{(n)}=-\left(\frac{a'(t_k)}{Q(0)}+V_p^{(n)'}(L)\right)x-V_p^{(n)}(L). \end{aligned}$$

Записав равенства (25) во всех точках коллокации, получим две системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $\alpha_i^{(n+1)}$, $\beta_i^{(n+1)}$, $i=1,\dots,m$. Найденные коэффициенты определят $(n+1)$-ю итерацию частного решения

$$U_p^{(n+1)}(x)=\sum_{i=1}^m \alpha_i^{(n+1)}\widehat{u}_i(x), \quad V_p^{(n+1)}(x)=\sum_{i=1}^m \beta_i^{(n+1)}\widehat{u}_i(x).$$

Итерационный процесс останавливается тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\frac{|U_p^{(n+1)}-U_p^{(n)}|}{|U_p^{(n+1)}|}<\varepsilon, \quad \frac{|V_p^{(n+1)}-V_p^{(n)}|}{|V_p^{(n+1)}|}<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ — заданная точность. Тогда в качестве решения задачи (3), (4) в момент $t=t_k$ принимаются функции $u(t_k,x)=u^{(n+1)}(x)$, $v(t_k,x)=v^{(n+1)}(x)$, непрерывные по x.

6. Примеры. В качестве первого примера рассмотрим задачу (3), (4) с цилиндрической симметрией ($\mu=1$) при $P(u)=\sigma/(\sigma+u)$, $Q(v)=\delta/(\delta+v)$, где σ, δ — положительные константы, $F(u,v)=v^3$, $G(u,v)=u$, $a(t)=R+ct$. Данный вид функций $P(u)$ и $Q(v)$ соответствует показательным функциям $\Phi(T)$ и $\Psi(S)$.

Приближенные решения были построены при следующих значениях параметров: $\sigma=3$, $\delta=1$, $R=1$, $c=1$. В табл. 1 приведены значения искомых функций при $t=1$ в точке $x=a(0)=1$, где наблюдается наибольшее различие решений, что соответствует виду заданного граничного условия. Сравнение значений функций u и v, полученных с использованием отрезков рядов различных степеней N, и РБФ-решений при различных размерах шага по времени h и количествах точек

Таблица 1. Сравнение численных решений с отрезками рядов, $mu = 1$.

Решение	$u(1,1)$	$v(1,1)$
Ряд, $N = 3$	1,26119	1,09144
Ряд, $N = 5$	1,21205	1,11159
Ряд, $N = 10$	1,21444	1,11594
Ряд, $N = 15$	1,21445	1,11600
Численное, $h = 0{,}1$, $m = 17$	1,19674	1,10956
Численное, $h = 0{,}1$, $m = 33$	1,19846	1,11039
Численное, $h = 0{,}05$, $m = 17$	1,20294	1,11186
Численное, $h = 0{,}05$, $m = 33$	1,20499	1,11290
Численное, $h = 0{,}025$, $m = 17$	1,20665	1,11306
Численное, $h = 0{,}025$, $m = 33$	1,20884	1,11420
Численное, $h = 0{,}01$, $m = 17$	1,20902	1,11374
Численное, $h = 0{,}01$, $m = 33$	1,21141	1,11497

Таблица 2. Сравнение численных решений с отрезками рядов, $mu = 2$.

Решение	$u(1,1)$	$v(1,1)$
Ряд, $N = 3$	1,46142	1,32407
Ряд, $N = 5$	1,45943	1,40775
Ряд, $N = 10$	1,45891	1,43331
Ряд, $N = 15$	1,45853	1,43403
Численное, $h = 0{,}1$, $m = 17$	1,42469	1,39890
Численное, $h = 0{,}1$, $m = 33$	1,42767	1,40117
Численное, $h = 0{,}05$, $m = 17$	1,43692	1,41214
Численное, $h = 0{,}05$, $m = 33$	1,44046	1,41505
Численное, $h = 0{,}025$, $m = 17$	1,44417	1,41999
Численное, $h = 0{,}025$, $m = 33$	1,44793	1,42317
Численное, $h = 0{,}01$, $m = 17$	1,44843	1,42503
Численное, $h = 0{,}01$, $m = 33$	1,45291	1,42853

коллокации m, приводит к следующим выводам. На рассмотренном интервале времени наблюдается численная сходимость рядов, что позволяет использовать их для верификации численных решений. Численные решения сходятся к аналитическому относительно шага по времени и числа точек коллокации, что свидетельствует о корректности предложенного численного алгоритма, основанного на разложении по РБФ.

Аналогичные расчеты были проведены для задачи (3), (4) со сферической симметрией ($\mu = 2$) для аналогичных функций P, Q, R, G, a и тех же значениях числовых параметров. Результаты решения, приведенные в табл. 2, подтверждают заключения, сделанные для первого примера.

Таким образом, численный алгоритм, использующий радиальные базисные функции, позволяет с хорошей точностью строить приближенные решения рассмотренной задачи.

7. Заключение. Подводя итог, отметим, что главным результатом проведенного исследования является то, что авторам удалось обобщить результаты, полученные ранее в плоскосимметричном случае [4], на случаи цилиндрической и сферической симметрии. Доказана новая теорема существования решений, имеющих тип диффузионной волны, для нелинейной вырождающейся параболической системы достаточно общего вида. Предложен пошаговый алгоритм построения численного решения, основанный на разложении по радиальным базисным функциям, для тестирования которого использованы отрезки построенных сходящихся рядов. Тем самым усовершенствован математический и алгоритмический инструментарий исследования нелинейных вырождающихся задач математической физики, которые имеют многочисленные содержательные приложения.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть посвящены построению точных решений [2] задачи (3), (4), которые являются более гибким инструментом для тестирования численных алгоритмов, чем отрезки рядов, а также позволяют описать качественное поведение соответствующих диффузионных волн. Кроме того, могут быть рассмотрены более общие постановки задач, например, когда усложняются краевые условия, или система имеет более высокую размерность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматлит, 1966.
2. *Казаков А. Л.* О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16*. — С. 1057–1068.
3. *Казаков А. Л., Кузнецов П. А.* Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах// Сиб. ж. индустр. мат. — 2018. — *21*, № 2(74). — С. 56–65.
4. *Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф.* Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы// Сиб. ж. индустр. мат. — 2021. — *24*, № 4. — С. 1–13.
5. *Казаков А. Л., Спевак Л. Ф.* Точные и приближенные решения вырождающейся системы реакция-диффузия// Прикл. мех. техн. физ. — 2021. — *62*, № 4. — С. 169–180.
6. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
7. *Сидоров А. Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. — М.: Физматлит, 2001.
8. *Cherniha R., Davydovych V.* Nonlinear reaction-diffusion systems with a non-constant diffusivity: Conditional symmetries in no-go case// Appl. Math. Comput. — 2015. — *268*. — P. 23–34.
9. *Colombo E. H., Anteneodo C.* Nonlinear population dynamics in a bounded habitat// J. Theor. Biology. — 2018. — *446*. — P. 11–18.
10. *Ding J.* Blow-up problem of quasilinear weakly coupled reaction-diffusion systems with Neumann boundary conditions// J. Math. Anal. Appl. — 2021. — *502*. — P. 125283.
11. *Filimonov M. Yu.* Representation of solutions of boundary-value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently caculated coefficients// J. Phys. Conf. Ser. — 2019.
12. *Filimonov M. Yu., Korzunin L. G., Sidorov A. F.* Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series// Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 1993. — *8*, № 2. — P. 101–125.
13. *Fotache A. R., Muratori M.* Smoothing effects for the filtration equation with different powers// J. Differ. Equations. — 2017. — *263*. — P. 3291–3326.
14. *Gambino G., Lombardo M. C., Sammartino M., Sciacca V.* Turing pattern formation in the Brusselator system with nonlinear diffusion// Phys. Rev. E. — 2013. — *88*. — 042925.
15. *Kazakov A. L., Kuznetsov P. A.* Analytical diffusion wave-type solutions to a nonlinear parabolic system with cylindrical and spherical symmetry// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2021. — *37*. — С. 31–46.
16. *Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A.* Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type// Symmetry. — 2020. — *12*, № 6. — 999.
17. *Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Spevak L. F.* Analytical and numerical construction of heat wave type solutions to the nonlinear heat equation with a source// J. Math. Sci. — 2019. — *239*, № 2. — P. 111–122.

18. *Kazakov A. L., Spevak L. F.* An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry// Appl. Math. Model. — 2016. — *40*, № 2. — P. 1333–1343.
19. *Kumar N., Horsthemke W.* Turing bifurcation in a reaction-diffusion system with density-dependent dispersal// Phys. A. — 2010. — *389*. — P. 1812–1818.
20. *Murray J.* Mathematical Biology: I. An Introduction. — New York: Springer, 2002.
21. *Stepanova I. V.* Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity// Appl. Math. Comput. — 2019. — *343*. — P. 57–66.
22. *Vazquez J. L.* The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. — Oxford: Clarendon Press, 2007.

Казаков Александр Леонидович
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения РАН, Иркутск
E-mail: kazakov@icc.ru

Кузнецов Павел Александрович
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения РАН, Иркутск
E-mail: kuznetsov@icc.ru

Спевак Лев Фридрихович
Институт машиноведения Уральского отделения РАН, Екатеринбург
E-mail: lfs@imach.uran.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 63–71
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-63-71

УДК 517.97

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© 2022 г. **А. К. КЕРИМБЕКОВ, Э. Ф. АБДЫЛДАЕВА, А. А. АНАРБЕКОВА**

Аннотация. Исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при минимизации кусочно линейного функционала в случае управления колебательными процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма. Для функционала Беллмана получено интегро-дифференциальное уравнение специфического вида. Описан алгоритм построения решения задачи синтеза распределенного и граничного управлений, изложена процедура определения управлений как функций (функционалов) от состояния управляемого процесса.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, оператор Фредгольма, обобщенное решение, функционал Беллмана, дифференциал Фреше, синтез оптимального управления.

ON THE SOLVABILITY OF CONTROL SYNTHESIS PROBLEMS FOR NONLINEAR OSCILLATORY OPTIMIZATION PROCESSES DESCRIBED BY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2022 **A. K. KERIMBEKOV, E. F. ABDYLDAEVA, A. A. ANARBEKOVA**

Abstract. The solvability of synthesis problems for distributed and boundary controls in minimizing problems for piecewise linear functionals for oscillatory processes described by partial integro-differential equations with Fredholm integral operators are examined. For the Bellman functional, a specific integro-differential equation is obtained. An algorithm for constructing a solution of the control synthesis problem of distributed and boundary controls is described. A procedure for determining controls as functions (functionals) of the state of the controlled process is constructed.

Keywords and phrases: integro-differential equation, Fredholm operator, generalized solution, Bellman functional, Fréchet differential, optimal control synthesis.

AMS Subject Classification: 49K20

1. Введение. Методы теории оптимизации систем с распределенными параметрами, разработанные при исследовании задач программного управления или задачи синтеза, все более проникают в различные области науки и техники. Об этом свидетельствует большой поток исследований задач оптимального управления процессами описываемыми уравнениями в частных производных [1–5, 11–16, 22].

Задачи управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма (Вольтерра), также начинают привлекать исследователей. В этом направлении по исследованиям задач программного управления выполнено значительное количество работ [8–10, 18–21, 24, 25]. По изучению задачи синтеза можно отметить лишь работы [6,7,17–23], где на основе схемы Беллмана-Егорова изложена методика вывода уравнения типа Беллмана, которое является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением специфического вида. В работах [6,7] А. Керимбековым предложена структура его решения, согласно которой это уравнение распадается на два уравнения, одно из которых является независимым уравнением в частных производных. Это обстоятельство существенно упрощает процедуру построения решения задачи синтеза для управляемых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями.

В данной статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при минимизации кусочно-линейного функционала, в случае управления колебательными процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями с интегральным оператором Фредгольма. Функции внешнего и граничного воздействий нелинейны по управлению, которое является функциональной переменной. Описан алгоритм построения решения задачи синтеза распределенного и граничного управлений, то есть изложена процедура определения управлений как функций (функционалов) от состояния управляемого процесса.

2. Постановка задачи синтеза. Рассмотрим задачу минимизации кусочно-линейного функционала

$$I\big[u(t,x),\vartheta(t,x)\big]=\int\limits_Q\Big[(v(T,x)-\xi_1(x))^2+(v_t(T,x)-\xi_2(x))^2\Big]dx+\\+\int\limits_0^T\left(\alpha\int\limits_Q|u(t,x)|dx+\beta\int\limits_\gamma|\vartheta(t,x)|dx\right)dt,\quad \alpha,\beta>0 \tag{1}$$

на множестве обобщенных решений краевой задачи

$$v_{tt}-Av=\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau+f[t,x,u(t,x)],\quad x\in Q,\quad 0<t<T, \tag{2}$$

$$v(0,x)=\psi_1(x),\quad v_t(0,x)=\psi_2(x),\quad x\in Q, \tag{3}$$

$$\Gamma v(t,x)\equiv\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)\cos(\nu,x_i)+a(x)v(t,x)=p[t,x,\vartheta(t,x)],\quad x\in\gamma,\quad 0<t<T, \tag{4}$$

где A — эллиптический оператор:

$$Av(t,x)=\sum_{i,k=1}^n(a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x))_{x_i}-c(x)v(t,x), \tag{5}$$

Q — область пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченная кусочно-гладкой кривой γ; $Q_T=Q\times[0,T)$; функции $K(t,\tau)\in H(D)$, $D=\{0\leqslant t,\tau\leqslant T\}$, $\xi_1(x)\in H(Q)$, $\xi_2(x)\in H(Q)$, $\psi_1(x)\in H_1(Q)$, $\psi_2(x)\in H(Q)$, $a_{ik}(x),a(x)\geqslant 0$, $c(x)\geqslant 0$ считаются известными; ν — вектор нормали, выходящей из точки $x\in\gamma$; $f[t,x,u(t,x)]\in H(Q_T)$, для любого распределенного управления $u(t,x)\in H(Q_T)$, $p[t,x,\vartheta(t,x)]\in H(\gamma_T)$, для любого граничного управления $\vartheta(t,x)\in H(\gamma_T)$, $\gamma_T=\gamma\times(0,T)$; $H(Y)$ — гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y; $H_1(Y)$ — пространство Соболева первого порядка; λ — параметр; T — фиксированный момент времени. Относительно функции внешнего и граничного воздействий будем считать, что

$$f_u[t,x,u(t,x)]\neq 0,\quad \forall(t,x)\in Q_T;\quad p_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)]\neq 0,\quad \forall(t,x)\in\gamma_T, \tag{6}$$

то есть функции являются монотонными по функциональной переменной.

Определение 1. Под обобщенным решением краевой задачи (2)—(6) понимается функция $v(t,x)\in H(Q_T)$, которая вместе с обобщенными производными $v_t(t,x)$ и $v_{x_i}(t,x)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int\limits_Q (v_t(t,x)\Phi(t,x))_{t_1}^{t_2}dx = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\int\limits_Q\left[v_t(t,x)\Phi_t(t,x) - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)\Phi_{x_i}(t,x) - \right.\right.$$
$$\left. -c(x)v(t,x)\Phi(t,x) + \left(\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau + f[t,x,u(t,x)]\Phi(t,x)\right)\right]dx +$$
$$\left. + \int\limits_\gamma (p[t,x,\vartheta(t,x)]) - a(x)v(t,x)\Phi(t,x)dx\right\}dt$$

при любых t_1 и t_2 $(0 < t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant T)$ для любой функции $\Phi(t,x) \in H_1(\tilde{Q}_T)$, а также начальным условиям в слабом смысле, то есть равенства

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_Q [v(t,x) - \psi_1(x)]\Phi_0(x)dx = 0, \quad \lim_{t\to 0}\int\limits_Q [v_t(t,x) - \psi_1(x)]\Phi_1(x)dx = 0$$

выполняются для любых функций $\Phi_0(x) \in H(Q)$ и $\Phi_1(x) \in H(Q)$.

Теорема 1. *Краевая задача (2)—(6) при каждой паре управлений* $\{u(t,x), \vartheta(t,x)\} \in H(Q_T) \times H(\gamma_T)$ *имеет единственное обобщенное решение* $v(t,x) \in H_1(Q_T)$ *[7].*

Заметим, что согласно условиям (6) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между элементами пространства управлений $\{[u(t,x), \vartheta(t,x)]\}$ и пространства состояний управляемого процесса $\{v(t,x)\}$.

В задаче синтеза искомые управления $u^0(t,x) \in H(Q_T)$ и $\vartheta^0(t,x) \in H(\gamma_T)$ следует находить как функцию (функционал) от состояния управляемого процесса, то есть в виде

$$u^0(t,x) = u[t,x,v(t,x),v_t(t,x)], \quad (t,x) \in Q_T,$$
$$\vartheta^0(t,x) = \vartheta[t,x,v(t,x),v_t(t,x)], \quad (t,x) \in \gamma_T.$$

3. О разрешимости задачи синтеза. Для функционала (1) определим функционал Беллмана в виде

$$S[t,x,\omega(t,x)] = \min_{u\in U,\vartheta\in V}\left\{\int\limits_t^T\left\{\alpha\int\limits_Q |u(\tau,x)|dx + \beta\int\limits_\gamma |\vartheta(\tau,x)|dx\right\}d\tau + \right.$$
$$\left. + \int\limits_Q \|\omega(T,x) - \xi(x)\|^2 dx\right\}, \quad \alpha,\beta > 0. \quad (7)$$

Здесь $\omega(t,x) = \{v(t,x), v_t(t,x)\}$ — вектор-функция состояния; а $\xi(x) = \{\xi_1(x), \xi_2(x)\}$ — вектор-функция желаемого состояния управляемого процесса в момент времени T; $\|.\|$ — норма вектора; U — множество допустимых значений управления $u(t,x), (t,x) \in Q_T$; V — множество допустимых значений управления $\vartheta(t,x)$, $(t,x) \in \gamma_T$.

Предполагая, что $S[t,x,\omega(t,x)]$ как функция, дифференцируема по t, а как функционал, дифференцируем по Фреше, согласно схеме Беллмана—Егорова [7], перепишем (7) в виде

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t}\Delta t = \min_{u\in U,\vartheta\in V}\left\{\int\limits_t^T\left(\alpha\int\limits_Q |u(\tau,x)|dx + \beta\int\limits_\gamma |\vartheta(\tau,x)|dx\right)d\tau + \right.$$
$$\left. + ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)] + o(\Delta t) + \delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]\right\},$$

где $\Delta\omega(t,x) = \Delta\omega[t+\Delta t,x] - \omega[t,x]$, $ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]$ — дифференциал Фреше, а $o(\Delta t)$ и $\delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]$ — бесконечно малые величины относительно Δt. Поскольку дифференциал Фреше относительно $\Delta\omega(t,x)\in H^2(Q_T)=H(Q_T)\times H(Q_T)$, $(t,x)\in Q_T$, является линейным функционалом, то имеет место равенство

$$ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)] = \int\limits_Q m^*(t,x)\Delta\omega(t,x)dx \equiv \int\limits_Q (m_1(t,x)\Delta v(t,x) + m_2(t,x)\Delta v_t(t,x))dx,$$

где символ $*$ — знак транспонирования; вектор-функция $m(t,x)=\{m_1(t,x),m_2(t,x)\}$ является градиентом функционала $S[t,x,\omega(t,x)]$ и принадлежит пространству $H^2(Q_T)=H(Q_T)\times H(Q_T)$ почти при всех $(t,x)\in Q_T$. Заметим, что $m(t,x)$ определяется в зависимости от функционала $S[t,x,\omega(t,x)]$, то есть

$$m(t,x) = m(t,x,S[t,x,\omega(t,x)]).$$

Согласно [7] искомое функциональное уравнение типа Беллмана получим в следующем виде

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} = \min_{u\in U,\vartheta\in V}\Bigg\{\int\limits_Q \Big(\alpha|u(t,x)| + m_2(t,x)f\big[t,x,u(t,x)\big]\Big)dx + \\
+\int\limits_\gamma \Big(\beta|\vartheta(t,x)| + m_2(t,x)p\big[t,x,\vartheta(t,x)\big]\Big)dx + \int\limits_Q \left(\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau\right)m_2(t,x)dx + \\
+\int\limits_Q m_1(t,x)v_t(t,x) - \int\limits_Q\Big[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)m_{2_{x_i}}(t,x) + c(x)v(t,x)m_2(t,x)\Big]dx - \\
-\int\limits_\gamma a(x)v(t,x)m_2(t,x)dx\Bigg\}, \qquad (8)
\end{gathered}$$

которое имеет место почти для всех $(t,x)\in Q_T$ и $(t,x)\in\gamma_T$.

Используя разложения

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^\infty v_n(t)z_n(x), \quad v_n(t) = \int\limits_Q v(t,x)z_n(x)dx,$$

$$m_2(t,x) = \sum_{n=1}^\infty m_{2_j}(t)z_j(x), \quad m_{2_j}(t) = \int\limits_Q m_2(t,x)z_j(x)dx,$$

а также определение обобщенных собственных функций $z_n(x)$ [7], получим соотношение

$$\begin{gathered}
\int\limits_Q\Big[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)m_{2_{x_i}}(t,x) + c(x)v(t,x)m_2(t,x)\Big]dx + \int\limits_\gamma a(x)v(t,x)m_2(t,x)dx = \\
= \sum_{j=1}^\infty m_{2_j}(t)\left\{\int\limits_Q\Big[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)m_{2_{x_i}}(t,x) + c(x)v(t,x)m_2(t,x)\Big]dx + \int\limits_\gamma a(x)v(t,x)z_j(x)dx\right\} = \\
= \sum_{j=1}^\infty m_{2_j}(t)\lambda_j^2\int\limits_Q v(t,x)z_j(x)dx = \sum_{j=1}^\infty m_{2_j}(t)\lambda_j^2 v_j(t) = \int\limits_Q\int\limits_Q m_2(t,x)D(\lambda^0,x,y)v(t,y)dydx,
\end{gathered}$$

где

$$D(\lambda^0,x,y) = \sum_{i=1}^\infty z_i(x)\lambda_i^2 z_i(y).$$

Теперь уравнение (8) перепишем в следующем виде:

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t}=\min_{u\in U,\vartheta\in V}\Bigg\{\int\limits_Q\Big(\alpha|u(t,x)|+m_2(t,x)f\big[t,x,u(t,x)\big]\Big)dx+$$

$$+\int\limits_\gamma\Big(\beta|\vartheta(t,x)|+m_2(t,x)p\big[t,x,\vartheta(t,x)\big]\Big)dx+\int\limits_Q\left(\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau\right)m_2(t,x)dx+$$

$$+\int\limits_Q\left(m_1(t,x)v_t(t,x)-m_2(t,x)\int\limits_Q D(\lambda^0,x,y)v(t,y)dy\right)dx\Bigg\}. \quad (9)$$

Согласно (7) это уравнение будем рассматривать вместе с условием

$$S\big[T,x,\omega(T,x)\big]=\int\limits_Q\big\|\omega(T,x)-\xi(x)\big\|^2dx. \quad (10)$$

Таким образом, $S[t,x,\omega(t,x)]$ следует находить как решение задачи (9)—(10), которая называется задачей Коши—Беллмана. Для построения решения этой задачи сначала решаем задачу минимизации правой части уравнения (9).

Рассмотрим задачу минимизации в уравнении (9) в случае, когда U и V являются открытыми множествами. Применяя классический метод решения задачи на поиск экстремума, находим, что подозрительное на оптимальность распределенное управление $u^0(t,x)$ определяется следующим образом.

В области $Q_T^+\subset Q_T$, где $u(t,x)>0$, искомое управление $u_+^0(t,x)$ определяется согласно условиям оптимальности в виде равенства

$$a+m_2(t,x)f_u[t,x,u(t,x)]=0,\quad (t,x)\in Q_T^+, \quad (11)$$

и дифференциального неравенства

$$m_2(t,x)f_{uu}[t,x,u(t,x)]>0,\quad (t,x)\in Q_T^+,$$

которые выполняются одновременно почти для всех $(t,x)\in Q_T^+$. Дифференциальное неравенство является трудно проверяемым условием. Однако согласно (11) его можно преобразовать к виду

$$f_u^{-1}[t,x,u(t,x)]f_{uu}[t,x,u(t,x)]<0,\quad (t,x)\in Q_T^+. \quad (12)$$

Пусть выполнены условия оптимальности (11) и (12). Тогда согласно теореме о неявных функциях из равенства (11) искомое управление определяется однозначно, т.е. существует такая однозначная функция $\varphi_1(\cdot)$, что

$$u_+^0(t,x)=\varphi_1[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\alpha],\quad (t,x)\in Q_T^+. \quad (13)$$

Далее доказывается, что в области $Q_T^-\subset Q_T$, где $u(t,x)<0$, искомое управление $u_-^0(t,x)$ удовлетворяет условиям оптимальности в виде равенства

$$-a+m_2(t,x)f_u[t,x,u(t,x)]=0,\quad (t,x)\in Q_T^-, \quad (14)$$

и дифференциального неравенства

$$f_u^{-1}[t,x,u(t,x)]f_{uu}[t,x,u(t,x)]>0,\quad (t,x)\in Q_T^+. \quad (15)$$

Управление определяется по формуле

$$u_-^0(t,x)=\varphi_2[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\alpha],\quad (t,x)\in Q_T^-, \quad (16)$$

где $\varphi_2(\cdot)$ — функция, однозначно определяемая из равенства (14).

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть U является открытым множеством. Если функция $f[t,x,u(t,x)]$ в области $Q_T^+ \subset Q_T$, где $u(t,x) > 0$, удовлетворяет условию* (12), *то существует функция $\varphi_1(\cdot)$, которая однозначно осуществляет синтез распределенного оптимального управления по формуле* (13).

Если функция $f[t,x,u(t,x)]$ в области $Q_T^- \subset Q_T$, где $u(t,x) < 0$, удовлетворяет условию (15), *то существует функция $\varphi_2(\cdot)$, которая однозначно осуществляет синтез распределенного оптимального управления по формуле* (16).

Аналогично определяется подозрительное на оптимальность граничное управление $\vartheta_+^0(t,x)$.

В области $\gamma_T^+ \subset \gamma_T$, где $\vartheta(t,x) > 0$, искомое управление $\vartheta_+^0(t,x)$ удовлетворяет условиям оптимальности в виде равенства

$$\beta + m_2(t,x)p_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)] = 0, \quad (t,x) \in \gamma_T^+, \tag{17}$$

и дифференциального неравенства

$$p_\vartheta^{-1}[t,x,\vartheta(t,x)]p_{\vartheta\vartheta}[t,x,\vartheta(t,x)] < 0, \quad (t,x) \in \gamma_T^+. \tag{18}$$

Управление определяется по формуле

$$\vartheta_+^0(t,x) = h_1[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\beta], \quad (t,x) \in \gamma_T^+, \tag{19}$$

где $h_1(\cdot)$ — функция, однозначно определяемая из равенства (17).

В области $\gamma_T^- \subset \gamma_T$, где $\vartheta(t,x) < 0$, искомое управление $\vartheta_-^0(t,x)$ удовлетворяет условиям оптимальности в виде равенства

$$-\beta + m_2(t,x)p_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)] = 0, \quad (t,x) \in \gamma_T^-, \tag{20}$$

и дифференциального неравенства

$$p_\vartheta^{-1}[t,x,\vartheta(t,x)]f_{\vartheta\vartheta}[t,x,\vartheta(t,x)] > 0, \quad (t,x) \in \gamma_T^-. \tag{21}$$

Управление определяется по формуле

$$\vartheta_-^0(t,x) = h_2[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\beta], \quad (t,x) \in \gamma_T^-, \tag{22}$$

где $h_2(\cdot)$ — функция, однозначно определяемая из равенства (20). Относительно граничного управления имеет место утверждение

Теорема 3. *Пусть множество V является открытым. Если функция $p[t,x,\vartheta(t,x)]$ в области $\gamma_T^+ \subset \gamma_T$, где $\vartheta(t,x) > 0$, удовлетворяет условию* (18), *то существует функция $h_1(\cdot)$, которая однозначно осуществляет синтез граничного оптимального управления по формуле* (19).

Если функция $p[t,x,\vartheta(t,x)]$ в области $\gamma_T^- \subset \gamma_T$, где $\vartheta(t,x) < 0$, удовлетворяет условию (21), *то существует функция $h_2(\cdot)$, которая однозначно осуществляет синтез граничного оптимального управления по формуле* (22).

Заметим, что уравнение типа Беллмана (9), полученное согласно схеме Беллмана—Егорова, определяет необходимое условие оптимальности искомого управления. При определенных условиях его можно рассматривать и как достаточное условие оптимальности. Пусть время T свободно, и конечное состояние $\omega(T,x)$ принадлежит некоторому множеству цели $\tilde{H}(Q)$. В пространстве состояний $\omega(t,x) = \{v(t,x), v_t(t,x)\}$, где $v(t,x) \in H(Q_T)$, $v_t(t,x) \in H(Q_T)$, определим функцию $S[t,x,\omega(t,x)]$, удовлетворяющую следующим условиям:

(i) $S[t,x,\omega(t,x)]$, как функция, дифференцируема по переменной t.

(ii) $S[t,x,\omega(t,x)]$, как функционал по векторной переменной состояния $\omega(t,x)$, дифференцируем по Фреше и имеет градиент $m(t,x) = \{m_1(t,x), m_2(t,x)\}$, где $m_1(t,x)$ — элемент гильбертова пространства квадратично-суммируемых функций $H(Q_T)$, $m_2(t,x)$ — элемент соболевского пространства $H_1(Q_T)$.

(iii) Для произвольного момента времени $t \in (0,T)$ и любого вектора $\omega(t,x)$ пространства состояний $H(Q_T) \times H(Q_T)$ выражение

$$B[t,\omega(t,x),u(t,x),\vartheta(t,x),m(t,x)] = \\ = \frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} + \int\limits_Q \Big(\alpha|u(t,x)| + m_2(t,x)f\big[t,x,u(t,x)\big]\Big)dx+$$

$$+\int\limits_\gamma \Big(\beta|\vartheta(t,x)| + m_2(t,x)p\big[t,x,\vartheta(t,x)\big]\Big)dx + \int\limits_Q \left(\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau\right)m_2(t,x)dx+$$

$$+\int\limits_Q \left(m_1(t,x)v_t(t,x) - m_2(t,x)\int\limits_Q D(\lambda^0,x,y)v(t,y)dy\right)dx$$

достигает абсолютного минимума при условии, что допустимая пара $\{u(t,x),\vartheta(t,x)\}$ управлений оптимальна, то есть

$$B\big[t,\omega(t,x),u(t,x),\vartheta(t,x),m(t,x)\big] > B\big[t,\omega(t,x),u^0(t,x),\vartheta^0(t,x),m(t,x)\big] = 0, \qquad (23)$$

где оптимальная пара $\{u^0(t,x),\vartheta^0(t,x)\}$ — единственным образом определяет оптимальный процесс $\omega^0(t,x) = \{v^0(t,x),v_t^0(t,x)\}$.

(iv) На множестве цели $\tilde{H}(Q)$ выполняется соотношение $S[T,x,\omega(T,x)] = \|\omega(T,x)-\xi(x)\|^2_{H(Q)}$.

Если условия (i)—(iv) выполнены, то

$$S[t,x,\omega(t,x)] = \min_{u\in U,\vartheta\in V}\left\{\int\limits_t^T\left\{\alpha\int\limits_Q|u(\tau,x)|dx + \beta\int\limits_\gamma|\vartheta(\tau,x)|dx\right\}d\tau + \int\limits_Q\|\omega(T,x)-\xi(x)\|_{R^2}dx\right\},$$

то есть $S[t,x,\omega(T,x)]$ является минимумом по векторному управлению $\{u(t,x),\vartheta(t,x)\}$ результата интегрирования целевой функции по переменной времени в промежутке от t до T.

Для доказательства этого утверждения интегрируем правую часть соотношения (23), полагая, что $\omega(t,x)\equiv\omega^0(t,x)$ — оптимальный процесс, соответствующий оптимальной паре управлений $\{u^0(t,x),\vartheta^0(t,x)\}$. Получим соотношение

$$\int\limits_t^T \beta\Big[\tau,\omega^0(\tau,x),u^0(\tau,x),\vartheta^0(t,x),m(\tau,x)\Big]d\tau = 0.$$

Далее рассмотрим интеграл

$$I(t) = \int\limits_t^T B\Big[t,\omega(\tau,x),m(t,x),u(t,x),\vartheta(t,x)\Big]d\tau,$$

который достигает минимального значения только при оптимальной паре управлений $\{u^0(t,x),\vartheta^0(t,x)\}$ и оптимальном процессе $\omega^0(t,x)=\{v^0(t,x),v_t^0(t,x)\}$. Если это не так, то найдутся пара управлений $\{u(t,x),\vartheta(t,x)\}\neq\{u^0(t,x),\vartheta^0(t,x)\}$ и процесс $\omega(t,x)\neq\omega^0(t,x)$, такие, что при любом t интеграл $I(t)$ будет равен нулю. Тогда в силу произвольности t подынтегральное выражение тождественно равно нулю, что противоречит условию $B[t,\omega(t,x),m(t,x),u(t,x),\vartheta(t,x)]>0$.

Полученное уравнение типа Беллмана (9) является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением сложной природы. При $u(t,x)\equiv u^0(t,x)$ и $\vartheta(t,x)\equiv\vartheta^0(t,x)$ оно «упрощается» и имеет вид

$$\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} + \int\limits_Q\Big(\alpha|u^0(t,x)| + m_2(t,x)f\big[t,x,u^0(t,x)\big]\Big)dx+$$

$$+\int\limits_\gamma\Big(\beta|\vartheta^0(t,x)| + m_2(t,x)p\big[t,x,\vartheta^0(t,x)\big]\Big)dx + \int\limits_Q\left(\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)v^0(\tau,x)d\tau\right)m_2(t,x)dx+$$

$$+\int\limits_Q \left(m_1(t,x)v_t^0(t,x) - m_2(t,x)\int\limits_Q D(\lambda^0,x,y)v^0(t,y)dy \right) dx = 0. \quad (24)$$

Следуя методике работы [7], решение уравнения (24) будем искать в виде

$$S[t,x,\omega(t,x)] = S_0[t,x,\omega(t,x)] + \lambda S[t,x,\omega(t,x)], \quad (25)$$

где $S_0[t,x,\omega(t,x)]$ и $S_1[t,x,\omega(t,x)]$ — неизвестные функции, а λ — параметр уравнения (2). Подставим (25) в (24). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ, получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial S_0[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} + \int\limits_Q \Big(\alpha|u^0(t,x)| + m_2(t,x)f\big[t,x,u^0(t,x)\big]\Big)dx+$$
$$+\int\limits_\gamma \Big(\beta|\vartheta^0(t,x)| + m_2(t,x)p\big[t,x,\vartheta^0(t,x)\big]\Big)dx+$$
$$+\int\limits_Q \left(m_1(t,x)v_t^0(t,x) - m_2(t,x)\int\limits_Q D(\lambda^0,x,y)v(t,y)dy \right) dx, \quad (26)$$

$$\frac{\partial S_1[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} + \int\limits_Q \left(m_2(t,x)\int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau \right) dx = 0. \quad (27)$$

Из (10) и (25) вытекает, что уравнение (26) следует рассматривать вместе с дополнительным условием

$$S_0\big[T,x,\omega(T,x)\big] = \int\limits_Q \big\|\omega(T,x) - \xi(x)\big\|^2_{\mathbb{R}^2}dx,$$

а уравнение (27) — с дополнительным условием $S_1\big[T,x,\omega(T,x)\big] = 0$. Таким образом, если U и V открытые множества, то удается более или менее полно исследовать разрешимость задачи синтеза и разработать алгоритм построения оптимальных управлений $u^0[t,x,\omega(t,x)]$ и $\vartheta^0[t,x,\omega(t,x)]$ в зависимости от состояния управляемого процесса $\omega(t,x) = \{v(t,x), v_t(t,x)\}$.

4. Заключение. В заключение отметим, что синтез оптимального управления осуществляется как только будет найден градиент функционала Беллмана. Это довольно трудная задача, ибо градиент остается неизвестным пока не будет найден функционал Беллмана как решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения сложной природы. Тем не менее, при исследовании простейших прикладных задач по изложенной методике решение задачи синтеза удается довести до численных расчетов [23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аргучинцев А. В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. — М.: Физматлит, 2007.
2. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
4. *Егоров А. И., Знаменская Л. Н.* Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. — СПб.: Лань, 2017.
5. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами. — Бишкек: Илим, 2003.
6. *Керимбеков А.* Синтез распределенного оптимального управления в задаче слежения при оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *183.* — С. 85–97.

7. *Керимбеков А.* О разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при оптимизации колебательных процессов// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2021. — *27*, № 2. — С. 128–140.
8. *Керимбеков А., Абдылдаева Э. Ф* О равных отношениях в задаче граничного векторного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2016. — *22*, № 2. — С. 163–176.
9. *Керимбеков А., Наметкулова Р. Ж., Кадиримбетова А. К.* Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2016. — *15.* — С. 50–61.
10. *Керимбеков А., Наметкулова Р. Ж., Кадиримбетова А. К.* Приближенное решение задачи распределенного и граничного управления тепловым процессом// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2016. — *16.* — С. 71–78.
11. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. — М.: Физматлит, 1972.
12. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977.
13. *Arguchintsev A. V., Kedrina M. S.* Determination of functional parameters in boundary conditions of linear hyperbolic systems by optimal control methods// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847.* — 012014.
14. *Arguchintsev A., Poplevko P.* An optimal control problem by parabolic equation with boundary smooth control and an integral constraint// Num. Alg. Contr. Optim. — 2018. — *8*, № 2. — P. 193–202.
15. *Arguchintsev A., Poplevko P.* An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations// Games. — 2021. — *12*, № 1. — 23.
16. *Arguchintsev A., Poplevko P.* An optimal control problem by a hyperbolic system with boundary delay// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2021. — *35.* — С. 3–17.
17. *Egorov A. I.* Optimal stabilization of systems with distributed parameters// Optim. Tech. IFIP Tech. Conf. — 1975. — *27.* — P. 167–172.
18. *Kerimbekov A., Abdyldaeva E. F.* Optimal distributed control for the processes of oscillation described by Fredholm integro-differential equations// Eurasian Math. — 2015. — *26.* — P. 28–40.
19. *Kerimbekov A., Abdyldaeva E. F.* On the solvability of a nonlinear tracking problem under boundary control for the elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations// 27th IFIP Conf. on System Modeling and Optimization. — Sophia Antipolis, France: Springer, 2016. — P. 312–321.
20. *Kerimbekov A., Abdyldaeva E. F.* The optimal vector control for the elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations// in: Analysis and Partial Differential Equations: Perspectives from Developing Countries. — Springer, 2019. — P. 14–30.
21. *Kerimbekov A., Abdyldaeva E. F., Duyshenalieva U. E.* Generalized solution of a boundary value problem under point exposure of external forces// Int. J. Pure Appl. Math. — 2017. — *113*, № 4. — P. 87–101.
22. *Kerimbekov A., Seidakmat E.* On solvability of tracking problem under nonlinear boundary control// 11th ISAAC Congr. “Analysis, Probability, Applications, and Computation”. — Springer, 2019. — P. 312–321.
23. *Kerimbekov A., Tairova O. K.* On the solvability of synthesis problem for optimal point control of oscillatory processes// IFAC-PapersOnLine. — 2018. — *51.* — P. 754–758.
24. *Sachs E. W., Strauss A. K.* Efficient solution of a partial integro-differntial equation in finance// Appl. Numer. Math. — 2008. — *58*, № 11. — P. 1687–1703.
25. *Thorwe J., Bhaleker S.* Solving partial integro-differential equations using Laplace transform method// Am. J. Comput. Appl. Math. — 2012. — *2*, № 3. — P. 101–104.

Керимбеков Акылбек Керимбекович
Кыргызско-Российский Славянский университет имени Б. Н. Ельцина, Бишкек, Киргизия
E-mail: akl7@rambler.ru

Абдылдаева Эльмира Файзулдаевна
Кыргызско-Турецкий университет Манас, Бишкек, Киргизия
E-mail: efa69@mail.ru

Анарбекова Айтолкун Анарбековна
Кыргызско-Российский Славянский университет имени Б. Н. Ельцина, Бишкек, Киргизия
E-mail: totita@list.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 72–79
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-72-79

УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА—ЛЯВА

© 2022 г. **А. А. МУХАМЕТЬЯРОВА**

Аннотация. Рассматривается обратная задача с финальным переопределением для абстрактных неполных уравнений соболевского типа высокого порядка. Найдены условия однозначной разрешимости поставленной задачи. Рассмотрены некоторые частные случаи. Основной результат работы содержит необходимые и достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи для математической модели соболевского типа высокого порядка. Данная методика применена к исследованию обратной задачи для уравнения Буссинеска—Лява.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа высокого порядка, уравнение Буссинеска—Лява, обратная задача, однозначная разрешимость.

INVERSE PROBLEM FOR THE BOUSSINESQ–LOVE EQUATION

© 2022 **A. A. MUKHAMETYAROVA**

Abstract. For an abstract, high-order, incomplete Sobolev-type equation, an inverse problem with final redefinition is considered. Conditions for the unique solvability of the problem are found. Some special cases are considered. The main result contains necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution of the inverse problem for high-order, Sobolev-type equations. This technique is applied to the study of the inverse problem for the Boussinesq–Love equation.

Keywords and phrases: high-order Sobolev-type equation, Boussinesq–Love equation, inverse problem, unique solvability.

AMS Subject Classification: 47D03, 35R30

1. Введение. Уравнение Буссинеска—Лява
$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha^2\Delta u + g \tag{1}$$
моделирует продольные колебания в тонком упругом стержне с учетом поперечной инерции. Здесь α, λ — вещественные ненулевые параметры, характеризующие материал стержня, функция $g = \varphi(t)f(x)$ соответствует объемным силам.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Будем искать функцию $u = u(x,t)$, определенную в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$, а также функцию $f = f(x)$, удовлетворяющие уравнению (1), начальным условиям
$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$
краевому условию
$$u(x,0) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{3}$$
а также условию переопределения
$$u(x,T) = v(x), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Статья организована следующим образом. В разделе 2 содержится исследование разрешимости обратной задачи для абстрактного неполного уравнения соболевского типа высокого порядка.

В разделе 3 проводится редукция конкретной задачи к уравнению и рассматривается соответствующая обратная задача. Обратные задачи для уравнений соболевского типа и других неклассических уравнений математических физики изучались ранее в [4–8, 10, 11].

2. Абстрактная схема. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — сепарабельные банаховы пространства, операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ линейны и непрерывны (будем обозначать этот факт следующим образом: $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$), причем оператор M является (L, p)-ограниченным, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. В этом случае пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, причем $\ker L \subset \mathfrak{U}^0$. Обозначим через L_k и M_k сужения операторов L и M на подпространства $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Лемма 1. *Операторы $L_k, M_k : \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$, линейны и непрерывны, причем существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.*

Построим множество $\sigma_n^L(M) = \{\mu^n : \mu \in \sigma^L(M)\}$; оно компактно в $\mathbb{C}$ в силу компактности L-спектра $\sigma^L(M)$ оператора M. Возьмем замкнутый контур $\gamma = \{|\mu| = r : r > \lambda,\ \lambda \in \sigma_n^L(M)\}$ и построим оператор-функции

$$U_m^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \mu^{n-m-1}(\mu^n L - M)^{-1} L e^{\mu} t d\mu,$$

где $m = 0, 1, \ldots, n-1$, а интеграл понимается в смысле Римана.

Лемма 2. *$U_m^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^1))$, $(U_m^t)^{(l)} = U_{m+l}^t$, где $m = 0, 1, \ldots, n-1$, $l = 0, 1, \ldots, m$; $(U_m^t)^{(l)}\big|_{t=0} = \mathbb{O}$ при $m \neq l$ и $(U_m^t)^{(l)}\big|_{t=0}$ — проектор $\mathfrak{U}$ на $\mathfrak{U}^1$ вдоль $\mathfrak{U}^0$.*

Для линейного неоднородного неполного уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Lu^{(n)} = Mu + f\varphi(t) \tag{5}$$

рассмотрим следующую задачу с финальным переопределением:

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \ldots, \quad u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}, \quad u(T) = v, \tag{6}$$

где число $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и векторы $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, v произвольны, а функция $\varphi : I \to \mathbb{R}$ задана (I — отрезок с концами в точках 0 и T).

Определение 1. Пару (u, f) назовем решением задачи (5), (6), если вектор $f \in \mathfrak{F}$ и вектор-функция $u \in C^\infty((0; T); \mathfrak{U}) \cap C^{n-1}([0; T]; \mathfrak{U})$ удовлетворяет уравнению (5) и соотношениям (6).

Обратная задача (5), (6) допускает разные интерпретации. Можно считать, например, что мы восстанавливаем в уравнении (5) неточно заданное неоднородное слагаемое $g = f\varphi(t)$ при помощи дополнительных краевых условий (6). Можно считать, что мы подбираем элемент $f \in \mathfrak{F}$ так, чтобы перевести систему из начального состояния u_0 в заданное финальное состояние v.

Для нахождения условий разрешимости обратной задачи нам понадобятся результаты о разрешимости прямой задачи, более подробно описанные в [1, 9].

Определение 2. Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ назовем решением неполного линейного уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Lu^{(n)} = Mu, \tag{7}$$

если она обращает уравнение (7) в тождество при любом $t \in \mathbb{R}$, а решение $u = u(t)$ уравнения (7) назовем решением задачи Коши

$$u^{(m)}(0) = u_m, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{8}$$

для уравнения (7) (или просто решением задачи (7), (8)), если оно удовлетворяет условиям (8).

Лемма 3. *Для любых $u_m \in \mathfrak{U}^1$ существует единственное решение $u = u(t)$ задачи (7), (8), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m.$$

Наконец, следуя традиционной схеме, рассмотрим однородную (т.е. $u_m = 0$, $m = 0, 1, \dots, n-1$) задачу (8) для неоднородного неполного уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Lu^{(n)} = Mu + g,$$

где $g\colon [0,\tau) \to \mathfrak{F}$ — некоторая вектор-функция. Нетрудно убедиться, что его единственным (в силу леммы 3) формальным решением будет вектор-функция

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(qn)}(t) + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} Qg(s)ds, \tag{9}$$

где $H = M_0^{-1}L_0$, а $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ — проектор на $\mathfrak{F}^1$ вдоль $\mathfrak{F}^0$.

Заметим, что поскольку

$$u^{(m)}(0) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(qn)}(0),$$

вектор-функция (9) не удовлетворяет однородным начальным условиям (8). Итак, подытожим наши рассмотрения.

Теорема 1. *Пусть $\tau \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любых векторов $u_m \in \mathfrak{U}^1$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, и для любой вектор-функции $g \in C^\infty((0,\tau); \mathfrak{F}) \cup C^{pn+n-1}([0;\tau); \mathfrak{F})$ существует единственное решение $u \in C^\infty((0;\tau); \mathfrak{U}) \cup C^{n-1}([0;\tau); \mathfrak{U})$ задачи Коши*

$$u^{(m)}(0) = u_m - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(qn)}(0), \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

которое к тому же имеет вид

$$u(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(I - Q)g^{(qn)}(t) + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} Qg(s)ds. \tag{10}$$

Перейдем к решению поставленной обратной задачи. Следуя [3], подействуем на (10) оператором $(\mathbb{I} - P)$, считая $g = f\varphi(t)$

$$(\mathbb{I} - P)u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(t) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f. \tag{11}$$

Выбрав $T \in \mathbb{R}_+$ и подставив значения $u(0) = u_0$, $u(T) = v$ в (11), имеем

$$(\mathbb{I} - P)u_0 = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(0) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f, \tag{12}$$

$$(\mathbb{I} - P)v = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(T) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f. \tag{13}$$

Лемма 4. *Пусть M — (L,p)-ограниченный оператор, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\varphi \in C^{pn+n}([0;T]; \mathbb{R})$. Тогда выполнение равенства*

$$\sum_{q=0}^{p} H^q (\varphi^{(qn)}(T)(\mathbb{I} - P)u_0 - \varphi^{(qn)}(0)(\mathbb{I} - P)v) = 0$$

является необходимым условием однозначной разрешимости задачи (5), (6).

Доказательство. Действительно, пусть (u, f) — единственное решение задачи (5), (6), тогда для того, чтобы удовлетворить равенствам (6), u и f должны быть связаны формулами (12), (13). Подействуем на (12) и на (13) соответственно операторами

$$\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(T), \quad \sum_{q=0} H^q \varphi^{(qn)}(0).$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(T)(\mathbb{I} - P)u_0 = \sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(0)(\mathbb{I} - P)v. \qquad \square$$

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы* 4. *Тогда необходимым условием однозначной разрешимости обратной задачи* (5), (6) *является выполнение неравенств* $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(T) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi(0) \neq 0$; тогда из необходимости выполнения условия

$$u_m \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{m}} = \left\{ u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - P)u^{(m)} = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn+m)}(0) M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f \right\}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

вытекает, что

$$(\mathbb{I} - P)u_0 = -\varphi(0) \left(\mathbb{I} + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{\varphi(0)} H + \ldots + \frac{\varphi^{(pn)}(0)}{\varphi(0)} H^p \right) M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f. \tag{14}$$

Далее, оператор

$$N = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{\varphi(0)} H + \ldots + \frac{\varphi^{(pn)}(0)}{\varphi(0)} H^p$$

нильпотентен степени p, поэтому из (14) вытекает

$$(\mathbb{I} - Q) f = -\left[\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(0) M_0^{-1} \right]^{-1} (\mathbb{I} - P) u_0. \tag{15}$$

Отсюда получаем однозначность определения проекции вектора f на подпространство $\mathfrak{F}^0$. Если же $\varphi(0) = 0$ или $\varphi(T) = 0$, то в силу нильпотентности операторов

$$\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(0), \quad \sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(T)$$

однозначность этой проекции невозможна. $\square$

Теперь подействуем на (10) проектором P; получим

$$Pu(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} \varphi(s) Q f \, ds.$$

Отсюда при $t = T$ имеем

$$Pv = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m + \int_0^T U_{n-1}^{T-s} L_1^{-1} \varphi(s) Q f \, ds, \quad Pv - \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m = \left(\int_0^T U_{n-1}^{T-s} L_1^{-1} \varphi(s) \, ds \right) (Qf).$$

Через $S^T \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ обозначим сужение оператора

$$\int_0^T U_{n-1}^{T-s} L_1^{-1} \varphi(s) \, ds$$

на $\mathfrak{F}^1$. Если оператор S^T непрерывно обратим, то

$$Qf = (S^T)^{-1}\Big(Pv - \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m\Big) \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть оператор M является (L,p)-ограниченным, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, функция $\varphi \in C^{pn+n}(I;\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(T) \neq 0$, векторы $u_m, v \in \mathfrak{U}$ таковы, что*

$$\sum_{q=0}^{p} H^q(\varphi^{(qn)}(T)(\mathbb{I}-P)u_0 - \varphi^{(qn)}(0)(\mathbb{I}-P)v) = 0,$$

а оператор $S^T \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$ непрерывно обратим. Тогда существует единственное решение (u,f) обратной задачи (5), (6).

Доказательство. Действительно, в силу $\varphi(0) \neq 0$ и непрерывной обратимости оператора S^T из (15) и (15) при любых $u_m \in \mathfrak{U}$ найдем единственный вектор f. Подставим u_m и f в (11), считая $g = \varphi(t)f$, найдем единственное решение $u \in C^1(I;\mathfrak{U})$ уравнения (5), которое удовлетворяет условию $u(0) = u_0$. Проверим выполнение условия $u(T) = v$. Для этого подставив T в (10) и считая $g = \varphi(t)f$, получим

$$(\mathbb{I}-P)u(T) = -\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(T)M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f =$$

$$= \sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(T)\left(\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(0)\right)^{-1}(\mathbb{I}-P)u_0 = \left(\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(0)\right)^{-1}\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(T)(\mathbb{I}-P)u_0 =$$

$$= \left(\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(0)\right)^{-1}\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(0)(\mathbb{I}-P)v = (\mathbb{I}-P)v$$

в силу равенства

$$\sum_{q=0}^{p} H^q(\varphi^{(qn)}(T)(\mathbb{I}-P)u_0 - \varphi^{(qn)}(0)(\mathbb{I}-P)v) = 0$$

и включения $u_m \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{m}}$. Далее,

$$Pu(T) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m + \int_0^T U_{n-1}^{T-s}L_1^{-1}\varphi(s)Qf\,ds = Pv$$

в силу (16) и непрерывной обратимости оператора S^T. Теорема доказана. □

В заключение рассмотрим важный случай $(L,0)$-ограниченности оператора M, причем в этот случай входит ситуация, когда существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Итак, пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$; тогда оператор M является $(L,0)$-ограниченным, причем условия на функцию φ можно существенно упростить. Именно, имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$. Тогда при любых $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u_m, v \in \mathfrak{U}$ и такой функции $\varphi \in C(I;\mathbb{R})$, что оператор S^T непрерывно обратим, существует единственное решение $(u;f)$ задачи (5), (6).*

Доказательство. Действительно, в данном случае проекторы $P = \mathbb{I}$, $Q = \mathbb{I}$, поэтому решение искомой задачи имеет вид

$$u(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m + \int_0^t U_{n-1}^{t-s}L_1^{-1}\varphi(s)f\,ds,$$

где f в силу (16) находится по формуле

$$f = (S^T)^{-1}\Bigl(Pv - \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m\Bigr).$$

Теперь рассмотрим случай $(L,0)$-ограниченного оператора, но оператор L уже не будет обратимым. В этом случае справедлив частный случай теоремы. □

Следствие 2. *Пусть оператор M является $(L,0)$-ограниченным, $T \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, векторы $u_m, v \in \mathfrak{U}$ и функция $\varphi \in C^1(I;\mathfrak{U})$ таковы, что $\varphi(0)(\mathbb{I}-P)v = \varphi(T)(\mathbb{I}-P)u_0$, $\varphi(0) \neq 0$ и $\varphi(T) \neq 0$, а оператор S^T непрерывно обратим. Тогда существует единственное решение (u,f) задачи* (5), (6).

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 2 искомое решение имеет вид

$$u(t) = -\varphi(t)M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f + \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m + \int_0^t U_{n-1}^{t-s}L_1^{-1}\varphi(s)Qf\,ds,$$

где

$$(\mathbb{I}-Q)f = -\frac{1}{\varphi(0)}M_0(\mathbb{I}-P)u_0, \quad Qf = (S^T)^{-1}\Bigl(Pv - \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m\Bigr).$$ □

3. Конкретная интерпретация. Задачу (1)—(4) редуцируем к задаче

$$L\ddot{u} = Mu + \varphi(t)f,$$
$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad u(T) = v,$$

взяв в качестве пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ либо пространства Соболева

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_p^{k+2}(\Omega) : u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = W_p^k(\Omega),$$

либо пространства Гельдера

$$\mathfrak{U} = \{u \in C^{k+2+\mu}(\Omega) : u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = C^{k+\mu}(\Omega),$$

а операторы L и M определим формулами

$$L = \lambda - \Delta, \quad M = \alpha^2\Delta\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}.$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора Δ, занумерованные по убыванию с учетом их кратности, а через $\{\psi_k\}$ — соответствующее семейство ортонормированных собственных функций.

Лемма 6. *Оператор M является (L,σ)-ограниченным, причем ∞ является устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M (в случае $\lambda \in \sigma(\Delta)$).*

В силу $(L,0)$-ограниченности оператора M можно построить операторы

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \lambda \neq \lambda_k, \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda=\lambda_k} \langle\cdot,\psi_k\rangle\psi_k, & \lambda = \lambda_k, \end{cases} \qquad Q = \begin{cases} \mathbb{I}, & \lambda \neq \lambda_k, \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda=\lambda_k} \langle\cdot,\psi_k\rangle\psi_k, & \lambda = \lambda_k \end{cases}$$

(заметим, что несмотря на «похожесть» проекторы P и Q определены на разных пространствах). Далее выберем $T \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, через I обозначим отрезок с концами в точках 0 и T. В силу следствий 1 и 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $T \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda = \lambda_k$. Тогда для любой функции $\varphi \in C^{pn+n}([0;T];\mathbb{R})$ и любых векторов u_m, $v \in \mathfrak{U}$, удовлетворяющих условиям*

$$\varphi(T)\sum_{\lambda=\lambda_k}\langle u_0,\psi_k\rangle\psi_k = \varphi(0)\sum_{\lambda=\lambda_k}\langle v,\psi_k\rangle\psi_k, \quad \varphi(0)\neq 0, \quad \varphi(T)\neq 0,$$

а также

$$\int\limits_0^T \varphi(s)\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}(T-s)\right)ds \neq 0$$

при $\lambda < \lambda_k$ *и*

$$\int\limits_0^T \varphi(s)\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{-\lambda+\lambda_k}}(T-s)\right)ds \neq 0$$

при $\lambda > \lambda_k$*, существует единственное решение* (u,f) *обратной задачи* (1)—(4)*, представимое формулой*

$$u(t) = -\frac{1}{\alpha^2\lambda}\sum_{\lambda=\lambda_k}\langle f,\psi_k\rangle + \sum_{\lambda<\lambda_k}\langle u_0,\psi_k\rangle\psi_k\,\mathrm{ch}\,\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}} + \sum_{\lambda>\lambda_k}\langle u_0,\psi_k\rangle\psi_k\cos\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}}+$$
$$+\frac{1}{\alpha}\sum_{\lambda<\lambda_k}\langle u_1,\psi_k\rangle\psi_k\sqrt{\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda_k}}\,\mathrm{sh}\,\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}} + \sum_{\lambda>\lambda_k}\langle u_0,\psi_k\rangle\psi_k\sqrt{\frac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k}}\sin\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}}+$$
$$+\frac{1}{\alpha}\sum_{\lambda<\lambda_k}\frac{\langle f,\psi_k\rangle}{\lambda_k}\psi_k\left(\mathrm{ch}\,\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}-1\right) + \frac{1}{\alpha}\sum_{\lambda>\lambda_k}\frac{\langle f,\psi_k\rangle}{\lambda_k}\psi_k\left(\cos\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}}-1\right),$$

где

$$\langle f,\psi_k\rangle = -\frac{\alpha^2\lambda\langle u_0,\psi_k\rangle}{\varphi(0)} \quad \textit{при} \quad \lambda=\lambda_k,$$

$$\langle f,\psi_k\rangle = (\lambda-\lambda_k)\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}\left(\int\limits_0^T\varphi(s)\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}(T-s)\right)ds\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\langle v,\psi_k\rangle - \mathrm{ch}\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}T\langle u_0,\psi_k\rangle - \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}T\langle u_1,\psi_k\rangle\right) \quad \textit{при} \quad \lambda<\lambda_k,$$

$$\langle f,\psi_k\rangle = (\lambda-\lambda_k)\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}\left(\int\limits_0^T\varphi(s)\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{-\lambda+\lambda_k}}(T-s)\right)ds\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\langle v,\psi_k\rangle - \cos\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{-\lambda+\lambda_k}}T\langle u_0,\psi_k\rangle - \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{-\lambda+\lambda_k}}}\sin\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{-\lambda+\lambda_k}}T\langle u_1,\psi_k\rangle\right) \quad \textit{при} \quad \lambda>\lambda_k.$$

Замечание 1. В случае обратимости оператора L, т.е. если при всех k выполнено $\lambda\neq\lambda_k$, условия

$$\varphi(T)\sum_{\lambda=\lambda_k}\langle u_0,\psi_k\rangle\psi_k = \varphi(0)\sum_{\lambda=\lambda_k}\langle v,\psi_k\rangle\psi_k, \quad \varphi(0)\neq 0, \quad \varphi(T)\neq 0$$

исчезают, как и слагаемое $-\dfrac{1}{\alpha^2\lambda}\sum\limits_{\lambda=\lambda_k}\langle f,\psi_k\rangle$ в решении $u(t)$ уравнения.

В заключение отметим, что результаты раздела 2 без доказательств были опубликованы в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Замышляева А. А.* Стохастические неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2012. — № 14. — С. 73–82.
2. *Мухаметьярова А. А.* Об одной обратной задаче для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка// Мат. 3 Междунар. конф. «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (Иркутск, 2021). — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2021. — С. 67–71.
3. *Свиридюк Г. А., Баязитова А. А.* Обратная задача для уравнений Баренблатта—Желтова—Кочиной на графе// Сб. тр. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения акад. И. Н. Векуа. — Новосибирск, 2007. — С. 244–250.
4. *Fedorov V. E., Urazaeva A. V.* An inverse problem for linear Sobolev-type equations// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2004. — *12*, № 5. — P. 1–9.
5. *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. — VSP: Utrecht, 1999.
6. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — Marcel Dekker: New York, 1999.
7. *Pyatkov S. G.* Operator Theory. Nonclassical Problems. — VSP: Utrecht–Boston–Tokyo, 2002.
8. *Romanov V. G.* Investigation Methods for Inverse Problems. — VSP: Utrecht–Boston–Tokyo, 2002.
9. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht: VSP, 2003.
10. *Zamyshlyaeva A. A., Lut A. V.* Inverse problem for Sobolev type mathematical models// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2019. — *12*, № 2. — С. 25–36.
11. *Zamyshlyaeva A. A., Muravyev A. S.* Inverse problem for Sobolev type equation of the second order// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2016. — *8*, № 3. — С. 5–12.

Мухаметьярова Альфия Адыгамовна
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), Челябинск
E-mail: balfiya@mail.ru, baiazitovaaa@susu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 80–88
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-80-88

УДК 517.9

О КОРРЕКТНОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЖРБАШЯНА—НЕРСЕСЯНА

© 2022 г. М. В. ПЛЕХАНОВА, Е. М. ИЖБЕРДЕЕВА

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия корректности линейных обратных коэффициентных задач для вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной Джрбашяна—Нерсесяна в банаховых пространствах. Исследована обратная задача с обобщенными условиями Шоуолтера—Сидорова и с постоянным неизвестным коэффициентом в уравнении при условии p-ограниченности пары операторов в нем. Общий результат использован для исследования обратной задачи для системы уравнений динамики вязкоупругой жидкости Кельвина—Фойгта с дробной производной Джрбашяна—Нерсесяна по времени.

Ключевые слова: дробное дифференциальное уравнение, дробная производная Джрбашяна—Нерсесяна, вырожденное эволюционное уравнение, обратная коэффициентная задача.

ON THE WELL-POSEDNESS OF AN INVERSE PROBLEM FOR A DEGENERATE EVOLUTIONARY EQUATION WITH THE DZHRBASHYAN–NERSESYAN FRACTIONAL DERIVATIVE

© 2022 M. V. PLEKHANOVA, E. M. IZHBERDEEVA

Abstract. In this paper, we find necessary and sufficient conditions for the well-posedness of linear inverse coefficient problems for degenerate evolutionary equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan fractional derivative in Banach spaces. We examine an inverse problem with a constant unknown coefficient under the generalized Showalter–Sidorov conditions and the condition of p-boundedness of a pair of operators in it. The general result is applied to the inverse problem for the system of dynamics of a viscoelastic Kelvin–Voigt fluid with the Dzhrbashyan–Nersesyan fractional derivative in time.

Keywords and phrases: fractional differential equation, fractional Dzhrbashyan–Nersesyan derivative, degenerate evolution equation, inverse coefficient problem.

AMS Subject Classification: 35R11, 35R30, 34G10

1. Введение. В банаховых пространствах $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ рассмотрим обратную задачу для вырожденного эволюционного уравнения

$$D^{\sigma_n} Lx(t) = Mx(t) + \varphi(t)u, \quad t \in (0, T], \tag{1}$$

с начальными условиями

$$D^{\sigma_k}(Px)(0) = x_k, \quad k = 0, \dots, n-1, \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Вьетнамской академией наук и технологий (проект № 21-51-54003).

и условием переопределения

$$\int_0^T x(t)d\mu(t) = x_T. \tag{3}$$

Здесь $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — линейный непрерывный оператор из $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ с нетривиальным ядром, т.е. $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — линейный замкнутый плотно определенный в $\mathcal{X}$ оператор, действующий в $\mathcal{Y}$, D^{σ_k} — дробные производные Джрбашяна—Нерсесяна, определяемые набором чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0,1,\ldots,n$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, x_k, $k = 0,\ldots,n-1$, x_T — заданные векторы, $u \in \mathcal{Y}$ неизвестен, P — проектор на подпространство без вырождения. Предполагается, что скалярная функция μ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0,T]$. Интеграл в условии (3) понимается как векторный интеграл Римана—Стилтьеса. Под решением обратной задачи понимается пара (x,u), найденная из соотношений (1)—(3).

Обратные задачи находят свое применение во многих прикладных областях исследования, например, в астрономии, геофизике и др. [20]. В то же время развитие дробного исчисления в последние десятилетия обусловлено созданием новых математических моделей систем со сложными свойствами (см., например, [9]). Обратные задачи для дробных уравнений в последние годы привлекают интерес исследователей, в основном исследуются уравнения с единичным или обратимым оператором при производной Герасимова—Капуто или Римана—Лиувилля [1,2,18,19]. Отдельно отметим работы В. Е. Федорова и его соавторов, в которых исследуются обратные коэффициентные задачи как для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка, так и для уравнений, разрешенных относительно старшей дробной производной [10–16].

Понятие производной Джрбашяна—Нерсесяна, введенное в работе [3], включает в себя в качестве частных случаев производные Герасимова—Капуто и Римана—Лиувилля. В работе [3] исследованы вопросы разрешимости начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами при производных Джрбашяна—Нерсесяна. Различные задачи для дифференциальных уравнений с такими производными рассматривались в работах А. В. Псху [7,8].

Во втором разделе данной работы приведены основные определения и сформулированы теоремы об однозначной разрешимости прямой задачи (1), (2) при $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $L = I$, $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, исследованной ранее авторами в работе [17], и о корректности обратной задачи (1)—(3) с $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $L = I$, $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ из работы [6]. В третьем разделе найдены необходимые и достаточные условия корректности обратной задачи для вырожденного эволюционного уравнения (1)—(3) при условии (L,p)-ограниченности оператора M, $\ker L \neq \{0\}$. Наконец, четвертый раздел содержит приложение полученного абстрактного результата для исследования корректности обратной коэффициентной задачи для системы уравнений Осколкова с дробной производной Джрбашяна—Нерсесяна по времени.

2. Невырожденная обратная задача. При $0 < \alpha_k \leqslant 1$, $k = 0,1,\ldots,n \in \mathbb{N}$, введем в рассмотрение дифференциальные операции

$$D^{\sigma_0} z(t) = D_t^{\alpha_0 - 1} z(t), \tag{4}$$

$$D^{\sigma_k} z(t) = D_t^{\alpha_k - 1} D_t^{\alpha_{k-1}} D_t^{\alpha_{k-2}} \ldots D_t^{\alpha_0} z(t), \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

где $D_t^\beta := J_t^{-\beta}$ — дробный интеграл Римана—Лиувилля при $\beta < 0$, D_t^0 — тождественный оператор, $D_t^\beta := D_t^m J_t^{m-\beta}$ — дробная производная Римана—Лиувилля при $\beta > 0$, $m := \lceil \beta \rceil$. Дробная производная Джрбашяна—Нерсесяна [3] порядка σ_n, ассоциированная с последовательностью $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leqslant 1$, $k = 0,1,\ldots,n \in \mathbb{N}$, определяется соотношениями (4), (5), ее частными случаями являются дробные производные Римана—Лиувилля ($\alpha_0 \in (0,1)$, $\alpha_k = 1$, $k = 1,2,\ldots,n$) и Герасимова—Капуто ($\alpha_k = 1$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, $\alpha_n \in (0,1)$).

Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + \varphi(t)u, \quad t \in (0,T], \tag{6}$$

где $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, D^{σ_n} — дробная производная Джрбашяна—Нерсесяна, σ_n определяется набором чисел $\{\alpha_k\}_0^n = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$, по формулам (4), (5), $T > 0$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Z}$.

Снабдим уравнение (6) условиями

$$D^{\sigma_k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{7}$$

$$\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T. \tag{8}$$

Функция μ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0,T]$, под интегралом в условии (8) понимается векторный интеграл Римана—Стилтьеса, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$ известны.

Сначала рассмотрим задачу (6), (7), когда известен $u \in \mathcal{Z}$. Решением задачи (6), (7) будем называть функцию $z\colon (0,T] \to \mathcal{Z}$, для которой $D_t^{\sigma_k} z \in C([0,T];\mathcal{Z})$, $k = 0, \ldots, n-1$, $D_t^{\sigma_n} z \in C((0,T];\mathcal{Z})$, выполняется равенство (6) при всех $t \in (0,T]$ и условия (7).

Для $\alpha, \beta > 0$ будем использовать функцию Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad z \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

Введем также обозначения

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j - 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Теорема 1 (см. [17]). *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $0 < \alpha_k \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Z}$. Тогда функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) z_k + \int_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) \varphi(s) u ds$$

является единственным решением задачи (6), (7).

Теперь рассмотрим задачу (6)—(8), предполагая, что элемент $u \in \mathcal{Z}$ неизвестен. Решением задачи (6)—(8) будем называть пару (z,u), где $z : (0,T] \to \mathcal{Z}$ является решением задачи (6), (7) с соответствующим $u \in \mathcal{Z}$ и удовлетворяет условию (8). Для краткости решением часто будем называть элемент $u \in \mathcal{Z}$.

Назовем задачу (6)—(8) корректной, если для любых $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, \ldots, n-1$, и $z_T \in \mathcal{Z}$ существует единственное решение $u \in \mathcal{Z}$, для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C\left(\sum_{k=0}^{n-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}}\right),$$

где $C > 0$ не зависит от z_k, $k = 0, \ldots, n-1$, и z_T.

Обозначим через $\sigma(A)$ спектр оператора A. Введем в рассмотрение

$$\psi(A) := z_T - \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) z_k d\mu(t) \in \mathcal{Z}.$$

Характеристической функцией обратной задачи (6)—(8) назовем функцию

$$\chi(\lambda) := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}\lambda)\varphi(s) ds, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2 (см. [6]). *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $\mu\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда задача (6)—(8) корректна в том и только в том случае, когда $\chi(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$. Решение задачи (6)—(8) в случае его существования имеет вид $u = (\chi(A))^{-1}\psi(A)$.*

3. Вырожденная обратная задача. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{X}$, действующих в пространство $\mathcal{Y}$.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, D_M — область определения оператора M, снабженная нормой графика $\|\cdot\|_{D_M} := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|M\cdot\|_{\mathcal{Y}}$. Определим L-резольвенту оператора M как

$$\rho^L(M) := \Big\{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\Big\},$$

L-спектр оператора M как $\sigma^L(M) := \mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$; также определим правую и левую L-резольвенты оператора M:

$$R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu := L(\mu L - M)^{-1}.$$

Оператор M называется (L,σ)-ограниченным, если

$$\exists a > 0\ \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Лемма 1 (см. [21]). *Пусть оператор M является (L,σ)-ограниченным и $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Тогда операторы*

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$$

являются проекторами.

Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$; $\mathcal{X}^1 := \operatorname{im} P$, $\mathcal{Y}^1 := \operatorname{im} Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на подпространство $\mathcal{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{X}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 3 (см. [21]). *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен.*

(i) *$M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;*
(ii) *существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$.*

Обозначим $G := M_0^{-1}L_0$. Для $p \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$ оператор M называется (L,p)-ограниченным, если он (L,σ)-ограничен и $G^p \neq 0$, $G^{p+1} = 0$.

Лемма 2 (см. [17]). *Пусть $G \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ — нильпотентный оператор степени $p \in \mathbb{N}_0$, для $l = 0, 1, \ldots, p$ существуют $(D^{\sigma_n}G)^l g \in C((0,T];\mathcal{X})$ и для $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $l = 0, 1, \ldots, p$ существуют $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n}G)^l g \in C([0,T];\mathcal{X})$. Тогда существует единственное решение уравнения*

$$D^{\sigma_n}Gx(t) = x(t) + g(t)$$

и оно имеет вид

$$x(t) = -\sum_{l=0}^{p}(D^{\sigma_n}G)^l g(t).$$

Рассмотрим обратную задачу для вырожденного эволюционного уравнения

$$D^{\sigma_n}Lx(t) = Mx(t) + \varphi(t)u, \quad t \in (0,T], \tag{9}$$

$$D^{\sigma_k}(Px)(0) = x_k \in \mathcal{X}^1, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{10}$$

$$\int_0^T x(t)d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}. \tag{11}$$

в котором, как и прежде, D^{σ_n} — дробная производная Джрбашяна—Нерсесяна, которая определяется набором чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, элемент $u \in \mathcal{Y}$ неизвестен.

В силу (L,p)-ограниченности оператора M задача (9)—(11) эквивалентна системе двух задач на подпространствах $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{X}^1$:

$$D^{\sigma_n} G x^0(t) = x^0(t) + \varphi(t) M_0^{-1} u^0, \tag{12}$$

$$\int_0^T x^0(t) d\mu(t) = x_T^0, \tag{13}$$

и

$$D^{\sigma_n} x^1(t) = L_1^{-1} M_1 x^1(t) + \varphi(t) L_1^{-1} u^1, \tag{14}$$

$$D^{\sigma_k} x^1(0) = x_k, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{15}$$

$$\int_0^T x^1(t) d\mu(t) = x_T^1, \tag{16}$$

где

$$x^0(t) = (I-P)x(t), \quad x^1(t) = Px(t), \quad x_T^0 = (I-P)x_T, \quad x_T^1 = Px_T, \quad u^0 = (I-Q)u, \quad u^1 = Qu.$$

Задачу (12), (13) назовем корректной, если для любого $x_T^0 \in \mathcal{X}^0$ существует единственное решение $u^0 \in \mathcal{Y}^0$, для которого справедлива оценка

$$\|u^0\|_{\mathcal{Y}^0} \leqslant C(\|x_T^0\|_{\mathcal{X}^0} + \|M_0 x_T^0\|_{\mathcal{Y}^0}),$$

где $C > 0$ не зависит от x_T^0.

Пусть

$$f_l(s) = \int_0^s (D^{\sigma_n})^l \varphi(t) d\mu(t), \quad l = 0, \ldots, p,$$

$$F(s)v = M_0 \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \left(\sum_{l=1}^{p} \frac{f_l(s) G^l}{f_0(s)} \right)^k \frac{v}{f_0(s)}, \quad s \in (0,T], \quad v \in \mathcal{X}^0.$$

Лемма 3. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$,*

$$(D^{\sigma_n})^l G^l \varphi \in C((0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0)), \qquad l = 0, 1, \ldots, p,$$
$$D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n})^l G^l \varphi \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0)), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \ l = 0, 1, \ldots, p,$$

$\mu\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации. Задача* (12), (13) *корректна в том и только в том случае, когда*

$$\int_0^T \varphi(t) d\mu(t) \neq 0.$$

Решение задачи (12), (13) *в случае его существования имеет вид $u^0 = F(T)x_T^0$.*

Доказательство. По лемме 2 уравнение (12) имеет единственное решение вида

$$x^0(t) = -\sum_{l=0}^{p} (D^{\sigma_n} G)^l \varphi(t) M_0^{-1} u^0. \tag{17}$$

Найдем u^0. Если $f_0(T) \neq 0$, подставляя (17) в (13), имеем

$$\left(I + \sum_{l=1}^{p} \frac{f_l(T) G^l}{f_0(T)} \right) M_0^{-1} u^0 = -\frac{x_T^0}{f_0(T)}.$$

Из нильпотентности оператора G получим

$$u^0 = M_0 \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \left(\sum_{l=1}^{p} \frac{f_l(T) G^l}{f_0(T)} \right)^k \frac{x_T^0}{f_0(T)} = F(T) x_T^0.$$

Отсюда же следует единственность решения задачи (12), (13). Корректность задачи следует из вида решения.

Пусть

$$f_0(T) := \int_0^T \varphi(t) d\mu(t) = 0,$$

тогда

$$\left(\sum_{l=1}^{p} f_l(T) G^{l-1} \right) G M_0^{-1} u^0 = -x_T^0.$$

Поскольку оператор M является (L, p)-ограниченным, то $\ker L \cap \ker M = \{0\}$. Возьмем элемент $v \in M_0[\ker L \setminus \{0\}]$. Тогда

$$\left(\sum_{l=1}^{p} f_l(T) G^{l-1} \right) G M_0^{-1} (u^0 + v) = -x_T^0.$$

Следовательно, решение задачи (12), (13) не единственно. □

При условии (L, σ)-ограниченности оператора M введем обозначение $S := L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$,

$$\psi(S) := x_T^1 - \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k + 1}(t^{\sigma_n} A) x_k d\mu(t) \in \mathcal{X}^1.$$

Теорема 4. *Пусть оператор M является (L, p)-ограниченным, $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$,*

$$(D^{\sigma_n})^l G^l \varphi \in C((0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)), \qquad l = 0, 1, \ldots, p,$$

$$D^{\sigma_k} (D^{\sigma_n})^l G^l \varphi \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \ l = 0, 1, \ldots, p,$$

$\mu\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Задача (9)—(11) корректна в том и только в том случае, когда $\chi(\lambda) \neq 0$ при всех $\lambda \in \sigma^L(M)$,

$$\int_0^T \varphi(t) d\mu(t) \neq 0.$$

Решение задачи (9)—(11) в случае его существования имеет вид

$$u = (\chi(S))^{-1} \psi(S) + F(T)(I - P) x_T.$$

Доказательство. Задача (9)—(11), как упоминалось ранее, эквивалентна совокупности задач (12), (13) и (14)—(16). Условия разрешимости задачи (12), (13) сформулированы в лемме 3, а для разрешимости задачи (14)—(16) — в теореме 2. Необходимо только отметить, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ существует оператор $(\lambda L_0 - M_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$ в силу нильпотентности оператора G и равенства

$$(\lambda L_0 - M_0)^{-1} = (\lambda G - I)^{-1} M_0^{-1} = -\sum_{k=0}^{p} \lambda^k G^k M_0^{-1}.$$

Следовательно, $\sigma^{L_0}(M_0) = \emptyset$ и $\sigma^L(M) = \sigma^{L_1}(M_1) = \sigma(L_1^{-1} M_1)$. В итоге

$$u = u^0 + u^1 = (\chi(S))^{-1} \psi(S) + F(T)(I - P) x_T.$$ □

4. Обратная задача для системы уравнений в частных производных. Рассмотрим обратную задачу для линеаризованной системы уравнений динамики вязкоупругой жидкости Кельвина—Фойгта [5] с производной Джрбашяна—Нерсесяна по времени

$$D_t^{\sigma_k} v(\xi, 0) = v_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{18}$$

$$v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \tag{19}$$

$$D_t^{\sigma_n}(1 - \beta\Delta) v(\xi, t) = c\Delta v(\xi, t) - r(\xi, t) + \varphi(t) u(\xi), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \tag{20}$$

$$\nabla \cdot v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \tag{21}$$

$$\int_0^T v(\xi, t) d\mu(t) = v_T(\xi), \quad \xi \in \Omega. \tag{22}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\beta, c \in \mathbb{R}$, $D_t^{\sigma_k}$ — производные Джрбашяна—Нерсесяна по переменной t, $k = 0, 1, \ldots, n$, вектор-функция $v = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$ — скорость жидкости, $r = (r_1, r_2, \ldots, r_d)$ — градиент давления; неизвестные вектор-функции v, r, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_d)$.

Пусть $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^d$ и $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^d$. Замыкание множества

$$\mathcal{L} = \Big\{ v \in (C_0^\infty(\Omega))^d : \nabla \cdot v = 0 \Big\}$$

в норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а его замыкание в норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Также будем использовать обозначения $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma \colon \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$ и $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортогональные проекторы.

Оператор $A = \Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный отрицательный дискретный конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ (см. [4]). Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора A, занумерованные в порядке невозрастания с учетом их кратностей, и обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную в $\mathbb{H}_\sigma$ систему соответствующих собственных функций, образующую базис в $\mathbb{H}_\sigma$.

Учитывая граничное условие (19) и уравнение несжимаемости (21), положим

$$\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \tag{23}$$

$$L = \begin{pmatrix} I - \beta A & \mathbb{O} \\ -\beta\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} cA & \mathbb{O} \\ c\Pi\Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \tag{24}$$

$\mathcal{X}$ состоит из пар вектор-функций $x = (v, r)$, где $v \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $r \in \mathbb{H}_\pi$ (см. уравнения (20), (21)).

Лемма 4 (см. [16]). *Пусть $\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \notin \sigma(A)$, пространства имеют вид* (23), *а операторы L и M определены формулами* (24). *Тогда оператор M является $(L, 0)$-ограниченным. Более того,*

$$\sigma^L(M) = \Big\{ c\lambda_k/(1 - \beta\lambda_k) : k \in \mathbb{N} \Big\},$$

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ c\Pi\Delta(I - \beta A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\beta\Pi\Delta(I - \beta A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная задача (18)—(22) имеет вид (9)—(11). Принимая во внимание, что $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $D_{M_1} = \mathcal{X}^1 = \operatorname{im} P$ изоморфно $\mathbb{H}_\sigma^2$, корректность задачи (18)—(22) означает существование решения $u \in \mathbb{L}_2$ для всех $v_k \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $v_T \in \mathbb{H}_\sigma^2$, удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant C\Bigg(\sum_{k=0}^{m-1} \|v_k\|_{\mathbb{H}^2} + \|v_T\|_{\mathbb{H}^2} \Bigg).$$

Теорема 5. *Пусть $\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \notin \sigma(A)$, $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$, $D^{\sigma_k}\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\mu : [0, T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Задача* (18)—(22) *корректна в том и только в том случае, когда*

$$\int_0^T \varphi(t) d\mu(t) \neq 0$$

и неравенство $\chi(c\lambda_k/(1-\beta\lambda_k)) \neq 0$ *выполнено для всех* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из вида проекций P и Q следует, что $\mathcal{X}^0 = \ker P = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$ и $\mathcal{Y}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$. Следовательно, условие (18) равносильно условию вида (10). По лемме 4 оператор M в задаче (18)—(22) является $(L,0)$-ограниченным в условиях данной теоремы. Таким образом, утверждение следует из теоремы 4. □

Теперь пусть $\beta^{-1} \in \sigma(A)$. Обозначим через $\mathbb{M}_0$ множество таких индексов $k \in \mathbb{N}$, что $\lambda_k = \beta^{-1}$, и через $\mathbb{M}_1$ — множество $\mathbb{N} \setminus \mathbb{M}_0$.

Лемма 5 (см. [16])**.** *Пусть* $c\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \in \sigma(A)$, *пространства имеют вид* (23), *а операторы* L *и* M *определены формулами* (24). *Тогда оператор* M $(L,1)$*-ограничен. Более того,*

$$\sigma^L(M) = \Big\{c\lambda_k/(1-\beta\lambda_k) : k \in \mathbb{M}_1\Big\},$$

$$P = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ c\Pi\Delta \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\beta\lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ -\beta\Pi\Delta \sum\limits_{k\in\mathbb{M}_1} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\beta\lambda_k} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что в силу найденного вида проектора P начальные условия (10) эквивалентны условиям

$$D_t^{\sigma_k}(1-\beta\Delta)v(\xi,0) = y_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{25}$$

Имеем

$$D_t^{\sigma_l}(1-\beta\Delta)v(\cdot,0) = \sum_{k\in\mathbb{M}_1}(1-\beta\lambda_k)\big\langle D_t^{\sigma_l}v(\cdot,0),\varphi_k\big\rangle\varphi_k = \sum_{k\in\mathbb{M}_1}\big\langle y_l,\varphi_k\big\rangle\varphi_k,$$

поэтому

$$\big\langle D_t^{\sigma_l}v(\cdot,0),\varphi_k\big\rangle = \frac{\big\langle y_l,\varphi_k\big\rangle}{1-\beta\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{M}_1, \quad l = 0,1,\ldots,n-1,$$

$$c\Pi\Delta\sum_{k\in\mathbb{M}_1}\frac{\big\langle D_t^{\sigma_l}v(\cdot,0),\varphi_k\big\rangle\varphi_k}{1-\beta\lambda_k} = c\Pi\Delta\sum_{k\in\mathbb{M}_1}\frac{\big\langle y_l,\varphi_k\big\rangle}{(1-\beta\lambda_k)^2}, \quad l = 0,1,\ldots,n-1.$$

Таким образом, с помощью условий (25) определены выражения $D_t^{\sigma_l}Px(\cdot,0)$, $l = 0,1,\ldots,n-1$.

Теорема 6. *Пусть* $c\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \in \sigma(A)$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $D^{\sigma_k}\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, $\mu\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации. Задача* (19)—(22), (25) *корректна в том и только в том случае, когда*

$$\int_0^T \varphi(t)d\mu(t) \neq 0$$

и неравенство $\chi(c\lambda_k/(1-\beta\lambda_k)) \neq 0$ *выполнено для всех* $k \in \mathbb{M}_1$.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что оператор M для задачи (19)—(22), (25) является $(L,1)$-ограниченным и $\mathcal{X}^0 = \ker P = \operatorname{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{X}^1 = \operatorname{im} P = (\operatorname{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_1\} \cap \mathbb{H}_\sigma^2) \times \{0\}$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q = \operatorname{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{Y}^1 = \operatorname{im} Q = \operatorname{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_1\} \times \{0\}$. Следовательно, утверждение данной теоремы следует из теоремы 4 и леммы 5. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушак А. В.* Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Совр. мат. Фундам. напр. — 2006. — *15*. — С. 126–141.
2. *Глушак А. В.* Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка// Мат. заметки. — 2010. — *87*, № 5. — С. 684–693.
3. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка// Изв. АН Арм. ССР. — 1968. — *3*, № 4. — С. 1–28.
4. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: ГИФМЛ, 1961.

5. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта// Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — *179.* — С. 126–164.
6. *Плеханова М. В., Ижбердеева Е. М.* Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Джрбашяна—Нерсесяна// Мат. 3 Междунар. конф. «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (Иркутск, 2021). — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2021. — С. 52–53.
7. *Псху А. В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка// Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — *73*, № 2. — С. 141–182.
8. *Псху А. В.* Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования// Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — *13.* — С. 1078–1098.
9. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
10. *Федоров В. Е., Костич М.* Задача идентификации для сильно вырожденных эволюционных уравнений с производной Герасимова—Капуто// Диффер. уравн. — 2021. — *57*, № 1. — С. 100–113.
11. *Федоров В. Е., Нагуманова А. В.* Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Герасимова—Капуто в секториальном случае// Изв. Иркут. ун-та. Сер. Мат. — 2019. — *28.* — С. 123–137.
12. *Федоров В. Е., Нагуманова А. В.* Линейные обратные задачи для одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *167.* — С. 97–111.
13. *Федоров В. Е., Нагуманова А. В.* Линейные обратные задачи для вырожденного эволюционного уравнения с производной Герасимова—Капуто в секториальном случае// Мат. заметки СВФУ. — 2020. — *27*, № 2. — С. 54–76.
14. *Fedorov V. E., Ivanova N. D.* Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — *20*, № 3. — P. 706–721.
15. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S.* A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — *44*, № 15. — P. 11961–11969.
16. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Kostic M.* A class of inverse problems for fractional-order degenerate evolution equations// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2021. — *29*, № 2. — P. 173–184.
17. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M.* Initial-value problems for linear equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan derivative in Banach spaces// Symmetry. — 2021. — *13*, № 6. — P. 1058.
18. *Liu Y., Rundell W., Yamamoto M.* Strong maximum principle for fractional diffusion equations and an application to an inverse source problem// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2016. — *19*, № 4. — P. 888–906.
19. *Orlovsky D. G.* Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space// J. Sib. Univ. Math. Phys. — 2015. — *8*, № 1. — P. 55–63.
20. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York–Basel: Marcel Dekker, 2000.
21. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev-Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — VSP, 2003.

Плеханова Марина Васильевна
Челябинский государственный университет;
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), Челябинск
E-mail: `mariner79@mail.ru`

Ижбердеева Елизавета Монировна
Челябинский государственный университет
E-mail: `elizaveta.izhberdeeva@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 89–95
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-89-95

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ПО СОСТОЯНИЮ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2022 г. **Д. О. ТРУНИН**

Аннотация. В классе линейных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями рассматривается задача нелокального улучшения допустимого управления с сохранением всех терминальных ограничений. К решению данной задачи улучшения применяется подход, основанный на решении специальной системы функциональных уравнений. Соответствующая система интерпретируется как задача о неподвижной точке, к решению которой применяется аппарат теории неподвижных точек.

***Ключевые слова*:** задача оптимального управления, нелокальное улучшение, терминальное ограничение, функциональное уравнение, задача о неподвижной точке.

ON ONE APPROACH TO THE OPTIMIZATION OF STATE-LINEAR CONTROLLED SYSTEMS WITH TERMINAL CONSTRAINTS

© 2022 **D. O. TRUNIN**

Abstract. In the class of state-linear optimal control problems with terminal constraints, we consider the problem of nonlocal improvement of an admissible control preserving all terminal constraints. We apply an approach based on solving a special system of functional equations. The corresponding system is interpreted as a fixed-point problem; to the solution of this problem we apply the theory of fixed points.

***Keywords and phrases*:** optimal control problem, nonlocal improvement, terminal constraint, functional equation, fixed-point problem.

***AMS Subject Classification*:** 49M20

1. Введение. Задачи оптимизации линейных по состоянию систем являются актуальными при моделировании многих управляемых естественно-научных и социальных процессов [3, 6, 8–10]. Прикладные задачи обычно приводят к постановкам задач оптимального управления с дополнительными ограничениями на управляемые системы. Здесь помимо прямых поточечных ограничений на управление возникают ограничения на фазовую траекторию, в том числе терминального типа.

Локальные численные методы оптимального управления, в частности, градиентные методы [2] характеризуются процедурой локального варьирования управлений для обеспечения улучшения

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-030005-р-а) и Бурятского государственного университета (проект 2021 г.).

целевого функционала задачи. При этом процедура игольчатого варьирования управлений может приводить к получению труднореализуемого на практике управления (например, наличие участков частого переключения управления с минимального на максимальное значение). Сходимость указанных методов по невязке принципа максимума делает невозможным улучшение управлений, удовлетворяющих принципу максимума.

В классе задач оптимизации линейных по состоянию систем успешно развиваются и применяются нелокальные подходы и методы. В частности, глобальный метод Кротова [9, 10], методы, основанные на принципе расширения [3, 8], методы параметризации [6].

В работе [5] разработаны процедуры нелокального улучшения управлений в классе линейных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом с линейным по состоянию целевым функционалом. Эти процедуры основаны на точных формулах приращения целевого функционала и не содержат операцию параметрического варьирования, что является существенным фактором повышения эффективности данных процедур. Нелокальность улучшения управления в классе линейных по состоянию задач оптимального управления достигается ценой решения специальной задачи Коши.

В работе [7] процедуры нелокального улучшения обобщаются на класс линейных по состоянию задач оптимального управления с частично закрепленным правым концом. Для нелокального улучшения допустимого управления с сохранением всех терминальных ограничений требуется решить специальную краевую задачу с разрывной и многозначной правой частью в общем случае.

В данной работе к нелокальному улучшению допустимых управлений в рассматриваемом классе задач оптимального управления предлагается подход, основанный на решении специальной системы функциональных уравнений, эквивалентной краевой задаче улучшения. Эта система функциональных уравнений может быть интерпретирована как специальная задача о неподвижной точке с дополнительным алгебраическим уравнением, что позволяет применить к ее решению известный [4] аппарат теории и методов неподвижных точек, аналогично работе [1] в задачах без ограничений.

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную по состоянию задачу оптимального управления с одним терминальным ограничением

$$\dot{x} = A(u,t)x + b(u,t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \tag{2}$$

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} [\langle d(u,t), x\rangle + g(u,t)]dt \to \min, \tag{3}$$

$$x_1(t_1) = x_1^1. \tag{4}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — вектор управления, функции $A(u,t)$, $b(u,t)$, $d(u,t)$ и $g(u,t)$ непрерывны по (u,t) на $\mathbb{R}^r \times T$, U — компактное множество в $\mathbb{R}^r$, $c \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор, причем $c_1 = 0$; начальное состояние $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и действительное число x_1^1 заданы, интервал T фиксирован.

К виду (1)—(4) с одним терминальным ограничением могут быть приведены многие линейные по состоянию задачи с фазовыми, терминальными и смешанными ограничениями методом наложения штрафов за нарушение ограничений.

В задаче (1)—(4) определим множество доступных управлений

$$V = \big\{u \in PC^r(T) : u(t) \in U,\ t \in T\big\}.$$

Для управления $u \in V$ обозначим через $x(t,u)$, $t \in T$ решение задачи Коши (1), (2) при $u = u(t)$. Введем множество допустимых управлений:

$$W = \big\{u \in V : x_1(t_1,u) = x_1^1\big\}.$$

Определим функцию Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in \mathbb{R}^n$:

$$H(\psi,x,u,t) = \big\langle \psi, A(u,t)x + b(u,t)\big\rangle - \big\langle d(u,t), x\big\rangle - g(u,t).$$

Рассмотрим сопряженную систему:

$$\dot{\psi} = -A(u,t)^T\psi + d(u,t), \tag{5}$$

$$\psi_1(t_1) = -\lambda, \tag{6}$$

$$\psi_i(t_1) = -c_i, i = \overline{2,n}. \tag{7}$$

Обозначим через $\psi(t,u,\lambda)$, $t \in T$ решение сопряженной системы (5)—(7) при $u = u(t)$.

Рассмотрим регулярный функционал Лагранжа

$$L(u,\lambda) = \Phi(u) + \lambda(x_1(t_1) - x_1^1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с [5] имеют место точные формулы приращения функционала Лагранжа:

$$\Delta_v L(u^0,\lambda) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(\psi(t,u^0,\lambda), x(t,v), u^0(t), t)dt, \tag{8}$$

$$\Delta_v L(u^0,\lambda) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(\psi(t,v,\lambda), x(t,u^0), u^0(t), t)dt. \tag{9}$$

Аналогично [5] введем в рассмотрение отображение

$$u^*(\psi,x,t) = \arg\max_{v\in U} H(\psi,x,v,t), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T. \tag{10}$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$ со свойством

$$\Phi(v) \leqslant \Phi(u^0).$$

3. Процедуры улучшения. Точные формулы приращения (8), (9) открывают возможность для нелокального улучшения допустимого управления u^0. Условия улучшения могут быть сформулированы как системы функциональных уравнений с использованием отображения (10).

На основе формулы приращения (8) для нелокального улучшения допустимого управления u^0 достаточно решить систему функциональных уравнений

$$\begin{gathered} v(t) = u^*(\psi(t,u^0,\lambda), x(t,v), t), \\ x_1(t_1,v) = x_1^1. \end{gathered} \tag{11}$$

Аналогично на основе формулы приращения (9) достаточно решить систему функциональных уравнений

$$\begin{gathered} v(t) = u^*(\psi(t,v,\lambda), x(t,u^0), t), \\ x_1(t_1,v) = x_1^1. \end{gathered} \tag{12}$$

Для решения систем функциональных уравнений (11), (12), интерпретируемых как задачи о неподвижной точке с дополнительным уравнением, предлагаются итерационные процессы

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t,u^0,\lambda), x(t,v^k), t), \quad x_1(t_1,v^{k+1}) = x_1^1, \tag{13}$$

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t,v^k,\lambda), x(t,u^0), t), \quad x_1(t_1,v^{k+1}) = x_1^1, \tag{14}$$

где на каждой итерации процессов (13), (14) множитель Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}$ выбирается из условия выполнения терминального ограничения. Итерационный процесс (13) рассматривается для решения системы (11), итерационный процесс (14) — для решения системы (12).

Для реализации итерационного процесса (13) предлагается следующий подход.

Положим $\psi_1(t_1) = -\lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — неизвестный параметр (множитель Лагранжа), подлежащий определению. Обозначим через $\psi^\lambda(t)$, $t \in T$ решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &\dot{\psi} = -A(u^0(t),t)^T\psi + d(u^0(t),t), \\ &\psi_1(t_1) = -\lambda, \\ &\psi_i(t_1) = -c_i, \quad i = \overline{2,n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим управление

$$v^\lambda(t) = u^*(\psi^\lambda(t), x(t, v^k), t), \quad t \in T.$$

Для полученного управления найдем решение $x(t, v^\lambda)$, $t \in T$, обычной задачи Коши

$$\dot{x} = A(v^\lambda(t), t)x + b(v^\lambda(t), t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x^0.$$

Множитель Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}$ на каждой итерации процесса (13) выбирается из условия выполнения терминального ограничения:

$$x_1(t_1, v^\lambda) = x_1^1. \tag{15}$$

Для полученного решения $\lambda^k \in \mathbb{R}$ уравнения (15) определяется следующее приближение управления:

$$v^{k+1}(t) = v^{\lambda^k}(t), \quad t \in T.$$

Для реализации итерационного процесса (14) предлагается аналогичный подход. Положим $\psi_1(t_1) = -\lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — неизвестный параметр (множитель Лагранжа), подлежащий определению. Обозначим через $\psi^\lambda(t)$, $t \in T$, решение задачи Коши

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi} = -A(v^k(t), t)^T \psi + d(v^k(t), t),\\
&\psi_1(t_1) = -\lambda,\\
&\psi_i(t_1) = -c_i, \quad i = \overline{2, n}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим управление

$$v^\lambda(t) = u^*(\psi^\lambda(t), x(t, u^0), t), \quad t \in T.$$

Для полученного управления найдем решение $x(t, v^\lambda)$, $t \in T$ обычной задачи Коши

$$\dot{x} = A(v^\lambda(t), t)x + b(v^\lambda(t), t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x^0.$$

Множитель Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}$ на каждой итерации процесса (14) выбирается из условия выполнения терминального ограничения

$$x_1(t_1, v^\lambda) = x_1^1. \tag{16}$$

Для полученного решения $\lambda^k \in \mathbb{R}$ уравнения (16) определяется следующее приближение управления:

$$v^{k+1}(t) = v^{\lambda^k}(t), \quad t \in T.$$

В качестве начального приближения итерационных процессов (13), (14) выбирается управление $v^0 \in V$. Отметим, что начальное приближение v^0 может не быть допустимым управлением, что является важным для практической реализации алгоритмов. Также отметим, что на итерациях процессов (13), (14) решаются обычные задачи Коши с предварительно вычисленным управлением. Итак, в отличие от процедуры улучшения управления, рассмотренной в [7], нет необходимости в решении специальных краевых задач с разрывной и многозначной правой частью.

Итерационные процессы (13), (14) продолжаются до первого улучшения управления u^0. Далее строится новая задача улучшения для полученного управления и процесс повторяется. Критерием остановки итераций улучшения управления является отсутствие улучшения управления по целевому функционалу.

Таким образом, формируются итерационные методы построения релаксационных последовательностей допустимых управлений.

Предлагаемые процедуры позволяют строго улучшать неоптимальные экстремальные управления, т.е. удовлетворяющие принципу максимума в рассматриваемом классе задач с ограничениями. Градиентные процедуры такой возможностью не обладают.

4. Примеры.

Пример 1 (улучшение управления, не удовлетворяющего принципу максимума)**.**

$$\dot{x} = u, \quad t \in T = [0,1], \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T,$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = \frac{2}{3},$$

$$\Phi(u) = \int\limits_0^1 x(u-1)dt \to \min.$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0(t) \equiv -\frac{1}{3}$, $t \in T$, которому соответствует фазовая траектория $x(t, u^0) = -\frac{1}{3}t + 1$, $t \in T$, и значение целевого функционала $\Phi(u^0) = -\frac{10}{9}$.

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид

$$H = \psi u - x(u-1) = (\psi - x)u + x, \quad \dot{\psi} = u - 1, \quad \psi(1) = -\lambda.$$

Экстремальное отображение (10) задается формулой

$$u^*(\psi, x) = \operatorname{sign}(\psi - x).$$

В качестве начального приближения итерационного процесса (13) возьмем управление $v^0(t) \equiv 0$, $t \in T$. Соответствующая ему фазовая траектория — $x(t, v^0) \equiv 1$, $t \in T$. Соответствующая сопряженная система принимает вид

$$\dot{\psi} = -\frac{4}{3}, \quad \psi(1) = -\lambda.$$

Ее решение

$$\psi^\lambda(t) = -\frac{4}{3}t - \lambda + \frac{4}{3}, \quad t \in T.$$

Сформируем управление

$$v^\lambda(t) = \operatorname{sign}\left(-\frac{4}{3}t - \lambda + \frac{1}{3}\right), \quad t \in T.$$

Найдем решение $x(t, v^\lambda)$, $t \in T$ задачи Коши

$$\dot{x} = \operatorname{sign}\left(-\frac{4}{3}t - \lambda + \frac{1}{3}\right), \quad x(0) = 1, \quad t \in T.$$

Условие

$$x(1, v^\lambda) = \frac{2}{3}$$

определяет значение множителя Лагранжа

$$\lambda = -\frac{1}{9}.$$

Соответствующее выходное управление имеет вид

$$v(t) = \begin{cases} 1, t \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right), \\ -1, t \in \left[\dfrac{1}{3}, 1\right], \end{cases}$$

а значение целевого функционала равно

$$\Phi(v) = -\frac{4}{3}.$$

Таким образом, имеет место строгое улучшение исходного допустимого управления u^0

$$\Phi(v) < \Phi(u^0).$$

Пример 2 (улучшение управления, удовлетворяющего принципу максимума).

$$\dot{x} = (t-1)u, \quad t \in T = [0,2], \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T,$$
$$x(0) = 0, \quad x(2) = 0,$$
$$\Phi(u) = \int\limits_0^2 x(u-1)dt \to \min .$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0(t) \equiv 1$, $t \in T$, которому соответствует фазовая траектория $x(t,u^0) = \frac{1}{2}t^2 - t$, $t \in T$ и значение целевого функционала $\Phi(u^0) = 0$.

Функция Понтрягина и соответствующая сопряженная система имеют вид

$$H = \psi(t-1)u - x(u-1) = (\psi(t-1) - x)u + x, \quad \dot{\psi} = u - 1, \quad \psi(2) = -\lambda.$$

Экстремальное отображение (10) в рассматриваемом примере задается формулой

$$u^*(\psi, x, t) = \operatorname{sign}(\psi(t-1) - x).$$

В качестве начального приближения итерационного процесса (13) возьмем управление $v^0(t) \equiv 0$, $t \in T$. Соответствующая ему фазовая траектория $x(t,v^0) \equiv 0$, $t \in T$. Соответствующая сопряженная система принимает вид

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(2) = -\lambda;$$

ее решение —

$$\psi^\lambda(t) \equiv -\lambda, \quad t \in T.$$

Сформируем управление

$$v^\lambda(t) = \operatorname{sign}(\lambda(1-t)), \quad t \in T.$$

Найдем решение $x(t, v^\lambda)$, $t \in T$ задачи Коши

$$\dot{x} = (t-1)\operatorname{sign}(\lambda(1-t)), \quad x(0) = 0, \quad t \in T.$$

Условие

$$x(2, v^\lambda) = 0$$

определяет значение множителя Лагранжа

$$\lambda = 0.$$

Соответствующее выходное управление имеет вид

$$v(t) \equiv -1, \quad , t \in T$$

а значение целевого функционала равно

$$\Phi(v) = -\frac{4}{3}.$$

Таким образом, имеет место строгое улучшение удовлетворяющего регулярному принципу максимума исходного допустимого управления u^0:

$$\Phi(v) < \Phi(u^0).$$

5. Заключение. Выделим основные характерные особенности предлагаемого подхода к улучшению управления в рассматриваемом классе линейных по состоянию задач с ограничениями.

1. Нелокальность улучшения управления и отсутствие процедуры варьирования управления в малой окрестности улучшаемого управления в отличие от градиентных методов.
2. Выполнение терминального ограничения на каждой итерации улучшения управления.
3. Возможность строгого улучшения неоптимальных экстремальных управлений.
4. Решение обычных задач Коши с предварительно вычисленным управлением вместо решения специальных краевых задач с разрывной и многозначной правой частью.

Указанные свойства являются важными для повышения эффективности оптимизации управляемых систем с ограничениями.

Для линейной по состоянию и управлению (билинейная задача) задачи оптимального управления с одним терминальным ограничением с выпуклым множеством U предлагаемый подход может быть легко адаптирован с использованием отображения на основе операции проектирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булдаев А. С.* Методы неподвижных точек в задачах оптимизации управляемых систем// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *183.* — С. 22–34.
2. *Васильев О. В.* Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: ИГУ, 1994.
3. *Гурман В. И., Матвеев Г. А., Трушкова Е. А.* Социо-эколого-экономическая модель региона в параллельных вычислениях// Управление большими системами. — 2011. — *32.* — С. 109–138.
4. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
6. *Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В.* Параметризация некоторых задач управления линейными системами// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2019. — *30.* — С. 83–98.
7. *Buldaev A. S., Trunin D. O.* Nonlocal improvement of controls in state-linear systems with terminal constraints// Autom. Remote Control. — 2009. — *70*, № 5. — P. 743–749.
8. *Gurman V. I.* Turnpike solutions in optimal control problems for quantum mechanical systems// Autom. Remote Control. — 2011. — *72*, № 6. — P. 1248–1257.
9. *Krotov V. F.* Control of the quantum systems and some ideas of the optimal control theory// Autom. Remote Control. — 2009. — *70*, № 3. — P. 357–365.
10. *Krotov V. F., Bulatov A. V., Baturina O. V.* Optimization of linear systems with controllable coefficients// Autom. Remote Control. — 2011. — *72*, № 6. — P. 1199–1212.

Трунин Дмитрий Олегович
Бурятский государственный университет им. Д. Банзарова, Улан-Удэ
E-mail: tdobsu@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 96–109
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-96-109

УДК 517.9; 531.01

СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ. III. СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ ГЛАДКИХ n-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Работа является третьей частью обзора по вопросам интегрируемости систем с любым числом n степеней свободы (первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *211.* — С. 41–74; вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *212.* — С. 139–148). Обзор состоит из трех частей. В первой части подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил. Во второй части рассмотрены более общие динамические системы на касательных расслоениях к n-мерной сфере. В данной третьей части рассматриваются динамические системы на касательных расслоениях к достаточно обширному классу других гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

***Ключевые слова*:** динамическая система с большим числом степеней свободы, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH DISSIPATION WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM: ANALYSIS AND INTEGRABILITY. III. SYSTEMS ON THE TANGENT BUNDLES OF SMOOTH n-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. This paper is the third part of a survey on the integrability of systems with a large number n of degrees of freedom (the first part: *Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **211** (2022), pp. 41–74; the second part: *Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **212** (2022), pp. 139–148). The review consists of three parts. In the first part, the primordial problem from the dynamics of a multidimensional rigid body placed in a nonconservative force field is described in detail. The second part is devoted to more general dynamical systems on the tangent bundles to the n-dimensional sphere. In this third part, we discuss dynamical systems on the tangent bundles to smooth manifolds of a sufficiently wide class. Theorems on sufficient conditions for the integrability of the considered dynamical systems in the class of transcendental functions are proved.

***Keywords and phrases*:** dynamical system with a large number of degrees of freedom, integrability, transcendental first integral.

***AMS Subject Classification*:** 34Cxx, 70Cxx

Введение. Данная работа является обзорной по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с n степенями свободы (ранее были опубликованы аналогичные работы по системам с четырьмя и пятью степенями свободы). Если конфигурационное многообразие системы — гладкое n-мерное многообразие, то его касательное (кокасательное) расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно с системами, в которых в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т.е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти и речи (см. [6, 22, 30, 33]).

Работа состоит из трех частей. В первой части (см. [71]) проведен достаточно подробный анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики n-мерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении $(n-1)$-мерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [5, 24, 31, 41]).

Во второй части (см. [72]) рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к n-мерной сфере. Указанные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в первой части. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по n-мерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [50, 51, 53]).

В данной третьей части рассмотрены рассмотрены динамические системы на касательных расслоениях к достаточно обширным классам гладких n-мерных многообразий; для таких систем также предъявлены достаточные условия интегрируемости.

3. Системы на касательных расслоениях к гладкому n-мерному многообразию

Выше было показано, что изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают диссипацией переменного знака, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выше был также введен класс задач о движении точки по гладкой $(n-1)$-мерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего n-мерного пространства. В ряде случаев в системах с силовым полем с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Необходимо отметить, что полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В данном разделе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к гладкому n-мерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2, 3 и 4 см. [66–68]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

3.1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы. Как известно, в случае n-мерного гладкого риманова многообразия M^n с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^n\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_{n-1}; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, …, $\beta_{n-1} = x^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1.1}$$

Изучим структуру уравнений (3.1.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^n. Рассмотрим обратимую почти всюду замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} R^{ij}(x) z_j, \quad z_j = \sum_{i=1}^{n} T_{ji}(x)\dot{x}^i; \tag{3.1.2}$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i, j = 1, \ldots, n$, — функции от $x^1, \ldots, x^n$, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (3.1.2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^n.

Справедливы следующие тождества:

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{n} \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{n} T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{n} T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{3.1.3}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, \ldots, n.$$

Подставляя в (3.1.3) уравнения (3.1.1), имеем:

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{n} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{n} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q, \tag{3.1.4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, \ldots, n$, надо подставить формулы (3.1.2), в результате чего в правой части последнего равенства будет стоять квадратичная форма по переменным z_j. Другими словами, равенство (3.1.4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{n} Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k \Big|_{(3.1.2)} = 0, \tag{3.1.5}$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{n} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{3.1.6}$$

Предложение 3.1.1. *Система* (3.1.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (3.1.2), (3.1.4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (3.1.1) к эквивалентной системе уравнений (3.1.2), (3.1.4) зависит как от замены переменных (3.1.2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

3.2. Достаточно общий случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = -z_n, \tag{3.2.1a}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1} f_1(\alpha), \tag{3.2.1b}$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \tag{3.2.1c}$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \tag{3.2.1d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}), \tag{3.2.1e}$$

где $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты $z_1,\ldots,z_n$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических (в частности, на многомерных поверхностях вращения) с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности:

$$\ddot{\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2+\ldots+\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2=0, \tag{3.2.2a}$$

$$\ddot{\beta}_1+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2+\ldots+\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2=0, \tag{3.2.2b}$$

$$\ddot{\beta}_2+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2+\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2+\ldots+\Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2=0, \tag{3.2.2c}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_3+2\Gamma^3_{\alpha3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3+2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3+2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3+\\ +\Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2+\ldots+\Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2=0,\end{gathered} \tag{3.2.2d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_{n-2}+2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2}+2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2}+\ldots\\ \ldots+2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2}+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2=0,\end{gathered} \tag{3.2.2e}$$

$$\ddot{\beta}_{n-1}+2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1}+2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1}+\ldots+\ +2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1}=0, \tag{3.2.2f}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (3.2.1) уравнения (3.1.4) примут вид

$$\begin{gathered}\dot{z}_1=\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1z_n-\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]f_1(\alpha)z_1z_{n-1}-\\ -\Big[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta)+Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]f_2(\alpha)g_1(\beta_1)z_1z_{n-2}-\ldots-\\ -\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\Big]f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})z_1z_2,\end{gathered} \tag{3.2.3a}$$

$$\begin{gathered}\dot{z}_2=\Big[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)+Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2z_n-\Big[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)+Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]f_1(\alpha)z_2z_{n-1}-\ldots-\\ -\Big[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)+Dr_1(\beta_{n-3})\Big]f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})z_2z_3-\\ -\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r^2_2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})z_1^2,\end{gathered} \tag{3.2.3b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{gathered}\dot{z}_{n-1}=\Big[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n-\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)z_{n-2}^2-\ldots-\\ -\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})z_1^2,\end{gathered} \tag{3.2.3c}$$

$$\begin{gathered}\dot{z}_n=\Gamma^{\alpha}_{11}f_1^2(\alpha)z_{n-1}^2+\Gamma^{\alpha}_{22}f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)z_2^2+\ldots+\\ +\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})z_1^2;\end{gathered} \tag{3.2.3d}$$

здесь $DQ(q)=d\ln|Q(q)|/dq$, и уравнения (3.2.2) почти всюду эквивалентны составной системе (3.2.1), (3.2.3) на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (3.2.1), (3.2.3) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно знать меньше, что будет показано ниже.

Предложение 3.2.1. *Если всюду на своей области определения выполняется система* $n(n-1)/2$ *равенств*

$$2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha) \equiv 0, \tag{3.2.4a}$$

. . . .

$$2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \tag{3.2.4b}$$

$$\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\Big]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \tag{3.2.4c}$$

. . . .

$$\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]f_1^2(\alpha) + \\ + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \tag{3.2.4d}$$

. . . .

$$\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big]f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3}) + \\ + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \tag{3.2.4e}$$

то система (3.2.1), (3.2.3) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_n,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{3.2.5}$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (3.2.5) не «заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (3.2.4) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных, вырождающиеся в обыкновенные). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (3.2.4) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ системы (3.2.4) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (3.2.5) для системы (3.2.1), (3.2.3) уравнений геодезических (3.2.2). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (3.2.4) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (3.2.1) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = \ldots = f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha), \tag{3.2.6}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (3.2.4):

$$2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \tag{3.2.7a}$$

. . . .

$$2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \tag{3.2.7b}$$

. . . .

$$2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3}) + \\ + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0. \tag{3.2.7c}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности через систему (3.2.7), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3.2.2. *Если выполнены свойства* (3.2.6), (3.2.7) *и справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \ldots = \Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{3.2.8}$$

то система (3.2.1), (3.2.3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}\,\Phi_0(\alpha)=C_2=\mathrm{const}, \tag{3.2.9}$$

$$\Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Предложение 3.2.3. *Если выполнены условия предложения* 3.2.2, *имеют место равенства*

$$g_1(\beta_1)=\ldots=g_{n-2}(\beta_1)=g(\beta_1), \tag{3.2.10}$$

$$\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)=\ldots=\Gamma_{1,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1), \tag{3.2.11}$$

то система (3.2.1), (3.2.3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)=C_3=\mathrm{const}, \tag{3.2.12}$$

$$\Psi_1(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 3.2.4. *Если выполнены условия предложений* 3.2.2, 3.2.3, … *и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma_{n-2,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{3.2.13}$$

то система (3.2.1), (3.2.3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_n(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=C_n=\mathrm{const}, \tag{3.2.14}$$

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=i(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\},\quad i(\beta_{n-2})=i_1(\beta_{n-2}). \tag{3.2.15}$$

Предложение 3.2.5. *Если выполнены условия предложений* 3.2.2, 3.2.3, …, 3.2.4, *то система* (3.2.1), (3.2.3) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_{n+1}(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta)=\beta_{n-1}\pm\int\limits_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Phi_{n-2}^2(b)-C_n^2}}db=C_{n+1}=\mathrm{const}. \tag{3.2.16}$$

Набор первых интегралов (3.2.5), (3.2.9), (3.2.12), …, (3.2.14), (3.2.16) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.2.1), (3.2.3) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$, первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (3.2.16) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.2.16) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной.

3.3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы. Теперь несколько модифицируем систему (3.2.1), (3.2.3) при условиях (3.2.6)–(3.2.8), (3.2.10), (3.2.11), …, (3.2.13), получив систему консервативную. А именно наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (3.3.1). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\dot\alpha=-z_n, \tag{3.3.1a}$$

$$\dot{z}_n = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z^2_{n-1} + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z^2_2 + \ldots + \\ + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \ldots i^2(\beta_{n-2}) z^2_1, \quad (3.3.1b)$$

$$\dot{z}_{n-1} = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big] z_{n-1} z_n - \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z^2_{n-2} - \ldots - \\ - \Gamma^{1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \ldots i^2(\beta_{n-2}) z^2_1, \quad (3.3.1c)$$

. . . .

$$\dot{z}_2 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big] z_2 z_n - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\Big] f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots - \\ - \Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})\Big] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \ldots s(\beta_{n-4}) z_2 z_3 - \\ - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \ldots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) z^2_1, \quad (3.3.1d)$$

$$\dot{z}_1 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big] z_1 z_n - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\Big] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} - \\ - \Big[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\Big] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots - \\ - \Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})\Big] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \ldots r(\beta_{n-3}) z_1 z_2, \quad (3.3.1e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1} f(\alpha), \quad (3.3.1f)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1), \quad (3.3.1g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (3.3.1h)$$

. . . .

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \ldots i(\beta_{n-2}), \quad (3.3.1i)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_1 + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0,$$
$$\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_2 + \ldots + \Gamma^{1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0,$$
$$\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + +\Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_3 + \ldots + \Gamma^{2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0,$$
$$\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma^{3}_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_4 + \ldots + \Gamma^{3}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0,$$

. . . .

$$\ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0,$$
$$\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0.$$

Предложение 3.3.1. *Если выполнены условия предложения* 3.2.1, *то система* (3.3.1) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1; \alpha) = z^2_1 + \ldots + z^2_n + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad F_1(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)\,db. \quad (3.3.2)$$

Предложение 3.3.2. *Если выполнены условия предложений* 3.2.2, 3.2.3, …, 3.2.4, *то система* (3.3.1) *имеет гладкие первые интегралы вида* (3.2.9), (3.2.12), …, (3.2.14).

Предложение 3.3.3. *Если выполнены условия предложения* 3.2.5, *то система* (3.3.1) *имеет первый интеграл вида* (3.2.16).

Набор первых интегралов (3.3.2), (3.2.9), (3.2.12), …, (3.2.14), (3.2.16) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.3.1) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (3.2.16) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.2.16) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [29]).

3.4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы. Теперь усложним систему (3.3.1) и получим систему с диссипацией. А именно наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\dot\alpha = -z_n + b\delta(\alpha), \tag{3.4.1a}$$

$$\begin{gathered}\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z^2_{n-1} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_2^2 + \ldots + \\ + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\end{gathered} \tag{3.4.1b}$$

$$\begin{gathered}\dot z_{n-1} = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big] z_{n-1} z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z^2_{n-2} - \ldots - \\ - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\end{gathered} \tag{3.4.1c}$$

. . . .

$$\begin{gathered}\dot z_2 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big] z_2 z_n - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\Big] f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots - \\ - \Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})\Big] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4}) z_2 z_3 - \\ - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\end{gathered} \tag{3.4.1d}$$

$$\begin{gathered}\dot z_1 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\Big] z_1 z_n - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\Big] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} - \\ - \Big[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\Big] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots - \\ - \Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})\Big] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) z_1 z_2,\end{gathered} \tag{3.4.1e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1} f(\alpha), \tag{3.4.1f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1), \tag{3.4.1g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \tag{3.4.1h}$$

. . . .

$$\dot\beta_{n-1} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{3.4.1i}$$

которая почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha - b\dot\alpha\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$

$$\ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$

$$\ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,$$

$$\begin{gathered}\ddot\beta_3 - b\dot\beta_3\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 + \\ + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,\end{gathered}$$

. . . .

$$\ddot{\beta}_{n-2} - b\dot{\beta}_{n-2}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots + \\ + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0,$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} - b\dot{\beta}_{n-1}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0;$$

здесь $W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (3.4.1) порядка $2n$ при выполнении равенств

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha). \tag{3.4.2}$$

Введем также (по аналогии с (3.2.7)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (3.2.4):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{3.4.3}$$

Для полного интегрирования системы (3.4.1) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_n = z_n, \quad w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}, \quad w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1},$$
$$w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad \ldots, \quad w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_2^{n-2}}}$$

система (3.4.1) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_n + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w^2_{n-1}, \\ \dot{w}_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_{n-1}w_n, \end{cases} \tag{3.4.4}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_s = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)\ldots[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \\ \dot{\beta}_s = \pm\dfrac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)\ldots, \; s = 1,\ldots,n-2, \end{cases} \tag{3.4.5}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \pm\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w^2_{n-2}}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{3.4.6}$$

где в системе (3.4.5) символом «…» показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.4.4)–(3.4.6) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.4.4), по одному — для систем (3.4.5) (меняя в них независимые переменные; их $n-2$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.6) (т.е. всего $n+1$).

Теорема 3.4.1. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{3.4.7}$$

Тогда при выполнении условий (3.4.2), (3.4.3) *система* (3.4.1) *обладает полным набором* $(n+1)$ *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Поставим в соответствие системе третьего порядка (3.4.4) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_n}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) w_{n-1}^2}{-w_n + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \dfrac{[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] w_{n-1} w_n}{-w_n + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.4.8}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_n = u_n \delta(\alpha), \quad w_{n-1} = u_{n-1}\delta(\alpha),$$

приводим систему (3.4.8) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_n}{d\alpha} = \dfrac{F_3(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha) u_{n-1}^2 + \delta'(\alpha) u_n^2 - b\delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_{n-1}}{d\alpha} = \dfrac{-\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha) u_{n-1} u_n + \delta'(\alpha) u_{n-1} u_n - b\delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \end{cases} \tag{3.4.9}$$

$$F_3(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}.$$

При выполнении условий (3.4.7) система (3.4.9) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_n}{du_{n-1}} = \frac{\lambda + \kappa u_{n-1}^2 + u_n^2 - b u_n}{(1-\kappa) u_{n-1} u_n - b u_n}. \tag{3.4.10}$$

Уравнение (3.4.10) имеет вид уравнения Абеля (см. [29]). В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет первый интеграл

$$\frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 - b u_n + \lambda}{u_{n-1}} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{3.4.11}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1\left(\frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - b w_n \delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{3.4.12}$$

Далее найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.4.4) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.4.11) при $u_{n-1} \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_n - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_{n-1} - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{3.4.13}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{3.4.14}$$

и фазовое пространство системы (3.3.2) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.4.13).

Таким образом, в силу соотношения (3.4.11) первое уравнение системы (3.4.9) при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)}\frac{du_n}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - b u_n + u_4^2) - C_1 U_1(C_1, u_n)}{-u_n + b},$$

$$U_1(C_1, u_n) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - b u_n + \lambda)}\right\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.4.14). Дополнительный первый интеграл для системы (3.4.4) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.4.15}$$

и при $\kappa = -1$ он найдется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b-u_n)du_n}{2(\lambda - bu_n + u_n^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\}/2}, \quad u_n = \frac{w_n}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (3.4.12). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (3.4.12), (3.4.15) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (3.4.5) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1,\ldots,n-2, \tag{3.4.16}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1,\ldots,n-2$, см. (3.2.12), …, (3.2.14). А дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.6), находится по аналогии с (3.2.16):

$$\Theta_{n+1}(w_2,w_1;\alpha,\beta) = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}db = C_{n+1} = \mathrm{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно подставить соответствующие левые части равенства (3.4.16).

3.5. Замечания о структуре первых интегралов систем с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.4.4) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (3.3.2), (3.2.9). В силу (3.4.7)

$$\Phi_1(z_n,\ldots,z_1;\alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)db \cong w_n^2 + w_{n-1}^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{3.5.1}$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (3.4.3) и (3.4.7)

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\, f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} \cong w_{n-1}\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.5.2}$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.5.1), (3.5.2) (или (3.3.2), (3.2.9)) также является первым интегралом системы (3.4.4) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{3.5.3}$$

и (3.5.2) по отдельности не является первым интегралом системы (3.4.4). Однако отношение функций (3.5.3), (3.5.2) является первым интегралом системы (3.4.4) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Архимедовы равномерные структуры// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23*. — С. 46–51.
2. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Многообразия непрерывных структур// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23*. — С. 71–86.

3. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
4. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
15. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
16. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
17. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
18. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
28. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
29. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
30. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.

31. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
32. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
33. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
34. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
35. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
36. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
37. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
38. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
39. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
40. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
41. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
42. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
43. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
45. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
48. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
49. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
50. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
51. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
53. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.

56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
57. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
70. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.
71. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *211*. — С. xx–xx.
72. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *212*. — С. xx–xx.
73. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
74. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
75. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
76. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru`, `shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 110–144
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-110-144

УДК 512.7

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ, КВАНТОВАНИЕ И ЗАДАЧИ ВОКРУГ ГИПОТЕЗЫ ЯКОБИАНА. I. ВВЕДЕНИЕ

© 2022 г. **А. М. ЕЛИШЕВ, А. Я. КАНЕЛЬ-БЕЛОВ, Ф. РАЗАВИНИЯ, Ц.-Т. ЮЙ, В. ЧЖАН**

Посвящается памяти Евгения Соломоновича Голода

Аннотация. Целью данного обзора является систематизация результатов, касающихся квантового подхода к некоторым классическим аспектам некоммутативных алгебр, особенно к гипотезе о якобиане. Работа начинается с квантования доказательства теоремы Бергмана о централизации, затем обсуждаются автоморфизмы автоморфизмов INd-схем и вопросы аппроксимации. Последняя глава посвящена связи между теоремами типа Бернсайда теории PI и гипотезой Якоби (подход Ягжева). В данном выпуске публикуется первая часть работы; продолжение будет опубликовано в следующих выпусках.

Ключевые слова: автоморфизм, квантование, гипотеза о Якобиане.

POLYNOMIAL AUTOMORPHISMS, QUANTIZATION, AND JACOBIAN CONJECTURE RELATED PROBLEMS. I. INTRODUCTION

© 2022 **A. M. ELISHEV, A. Ya. KANEL-BELOV, F. RAZAVINIA, J.-T. YU, W. ZHANG**

Abstract. The purpose of this review is the collection and systematization of results concerning the quantization approach to the some classical aspects of non-commutative algebras, especially to the Jacobian conjecture. We start with quantization proof of Bergman centralizing theorem, then discourse authomorphisms of INd-schemes authomorphisms, then go to aproximation issues. Last chapter dedicated to relations between PI-theory Burnside type theorems and Jacobian Conjecture (Jagzev approach). This issue contains the first part of the work; continuation will be published in future issues.

Keywords and phrases: automorphism, quantization, Jacobian conjecture.

AMS Subject Classification: 14R10, 18G85

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01377). Работа Ф. Разавиния была также поддержана Фондом науки и технологий Португалии (национальный грант PD/BD/142959/2018).

CONTENTS

PREFACE

The purpose of this review is the collection and systematization of results concerning the quantization approach to the Jacobian conjecture.

O.-H. Keller's Jacobian conjecture remains, as of the writing of this text, an open and apparently unassailable problem. Various possible approaches to the Jacobian conjecture have been explored, resulting in accumulation of a substantial bibliography, while the development of vast parts of modern algebra and algebraic geometry were in part stimulated by a search for an adequate framework in which the Jacobian conjecture could be investigated. This has engendered a situation of simultaneous existence of circumstantial evidence in favor and against the positivity of this conjecture.

One of the more established plausible approaches to the Jacobian problem concerns the study of infinite-dimensional algebraic semigroups of polynomial endomorphisms and groups of automorphisms of associative algebras, as well as mappings between them. The foundation for this approach was laid by I. R. Shafarevich. During the last several decades, the theory was developed and vastly enriched by the works of Anick, Artamonov, Asanuma, Bass, Bergman, Białynicki-Birula, Czerniakiewicz, Dicks, Dixmier, Kambayashi, Lewin, Makar-Limanov, Shestakov, Umirbaev, Wright, and many others. In particular, the results of Anick, Makar-Limanov, Shestakov, and Umirbaev established a connection between the Jacobian conjecture for the commutative polynomial algebra and its associative analogs on the one hand with combinatorial and geometric properties (stable tameness, approximation) of the spaces of polynomial automorphisms on the other.

More recently, the stable equivalence between the Jacobian conjecture and a conjecture of Dixmier on the endomorphisms of the Weyl algebra has been discovered by Kanel-Belov and Kontsevich and, independently, by Tsuchimoto. The cornerstone of this rather surprising feature is a certain mapping (sometimes referred to as the anti-quantization map) from the semigroup of Weyl algebra endomorphisms (a quantum object) to the semigroup of endomorphisms of the corresponding Poisson algebra (the appropriate classical object). In view of that, it seems reasonable to think there are insights to be gained by studying quantization of spaces of polynomial mappings and properties of the corresponding quantization morphisms.

In this direction, one of the larger milestones is given by a series of conjectures of Kontsevich concerning equivalences between polynomial symplectomorphisms, holonomic modules over algebras of differential operators, and automorphisms of such algebras. Another rather nontrivial side of the quantization program rests upon the interaction with universal algebra.

In this review, we present some of our progress regarding quantization, Kontsevich conjecture, as well as recall some of our recent results on the geometry of Ind-scheme automorphisms, approximation by tame automorphisms together with its symplectic version, and torus actions on free associative algebras. We also provide a review of the work of Kanel-Belov, Bokut, Rowen and Yu, which sought to connect the Jacobian problem with various problems in universal algebra, as conceived by the brilliant late mathematician A. V. Yagzhev.

We have benefitted greatly from extensive and fruitful discussions with E. Aljadeff, V. A. Artamonov, I. V. Arzhantsev, V. L. Dolnikov, A. E. Guterman, R. N. Karasev, I. V. Karzhemanov,

D. Kazhdan, V. O. Manturov, A. A. Mikhalev, S. Yu. Orevkov, E. B. Plotkin, B. I. Plotkin, A. M. Raigorodskii, E. Rips, A. L. Semenov, G. B. Shabat, G. I. Sharygin, N. A. Vavilov, E. B. Vinberg, U. Vishne, I. Yu. Zhdanovskii, and A. B. Zheglov. It is a pleasant task to express our utmost gratitude to our esteemed colleagues.

Chapter 1

INTRODUCTION

1.1. Quantization and Algebra Problems

This section provides an overview of the Jacobian conjecture together with motivation for the theory of Ind-schemes and quantization, as well as some necessary preliminaries on the proof of Bergman's centralizer theorem. Throughout this paper, all rings are assumed to be associative with multiplicative identity.

1.1.1. Free algebras. A free algebra is a noncommutative analog of a polynomial ring since its elements can be described as "polynomials" with noncommuting variables, while the free commutative algebra is the polynomial algebra. First, we give the definition of a free monoid, which is needed in our definition of free algebras (see [174]).

Definition 1.1.1. Let $X = \{x_i : i \in I\}$. A *word* is a string with elements in X. A *free associative monoid* X^* on a set X is the set of words in X, including the empty product to represent 1. The multiplication on X^* is given by the juxtaposition of words.

Next, we can naturally define the free associative algebra with respect to a generating set over a commutative ring.

Definition 1.1.2. Let C be a commutative ring with a multiplicative identity. A *free associative C-algebra* $C\langle X\rangle$ with respect to a generating set $X = \{x_i : i \in I\}$ is the free C-module with base X^*.

Remark 1.1.3. This C-module becomes a C-algebra by introducing a multiplication as follows: the product of two basis elements is the concatenation of the corresponding words and the product of two arbitrary C-module elements are thus uniquely determined. Note that $C\langle X\rangle := \bigoplus\limits_{w\in X^*} Cw$ and the elements of $C\langle X\rangle$ are called *noncommutative polynomials* over C generated by X.

Similarly, we can also define the free associative algebra $k\langle X\rangle$ with respect to a generating set $X = \{x_i : i \in I\}$ over an arbitrary field k.

Remark 1.1.4. If C is an integral domain, then the product of leading monomials of two noncommutative polynomials f and g in $C\langle X\rangle$ is the leading monomial of fg. It follows that $C\langle X\rangle$ is also a domain (but still noncommutative).

We finally note that throughout this review, we will only discuss free associative k-algebras with respect to a generating set $X = \{x_1, \dots, x_s\}$ (for $s \geqslant 2$) over a field k instead of a commutative ring.

1.1.2. Matrix representations of algebras. Let A be a k-algebra and K be a field extension of k. In this work, we consider only finite-dimensional representations of A, i.e., the word "representation" means a "finite-dimensional representation."

Definition 1.1.5. An n-dimensional *matrix representation* over K is a k-homomorphism $\rho : A \to M_n(K)$ to the matrix algebra over K.

Remark 1.1.6. Two representations ρ' and ρ are said to be equivalent if they are conjugate, i.e., $\rho' = \tau\rho\tau^{-1}$ for some invertible matrix $\tau \in M_n(K)$.

The representation is said to be *irreducible* if the images of A generates the matrix algebra as a K-algebra, or if the map $A \otimes K \to M_n(K)$ is surjective. Usually, we study the case where $K = k$. With this assumption, we say that a representation $\rho : A \to M_n(k)$ is irreducible if and only if it is surjective.

1.1.3. Algebra of generic matrices. In order to use the concept of generic matrices, we first need to introduce the matrix representation of a free associative algebra (see [16]). We introduce matrix representations of any k-algebras in Sec. 1.1.2. A matrix representation of the free associative ring $k\langle X\rangle = k\langle x_1,\dots,x_s\rangle$ over k generated by a finite set $X = \{x_1,\dots,x_s\}$ of s indeterminates ($s \geqslant 2$) is given by assigning arbitrary matrices as images of the variables. In itself, this is not very interesting. However, when one asks for equivalence classes of irreducible representations, the other is directed to an interesting problem in invariant theory. We will discuss this topic below.

Definition 1.1.7. Let n be a positive integer and $\{x_{ij}^{(\nu)} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ \nu \in \mathbb{N}\}$ be independent commuting indeterminates over k. Then

$$X_\nu := (x_{ij}^{(\nu)}) \in M_n(k[x_{ij}^{(\nu)}])$$

is called an $n\times n$ *generic matrix* over k, and the k-subalgebra of $M_n(k[x_{ij}^{(\nu)}])$ generated by X_ν is called the *algebra of generic matrices*; we denote it by $k\langle X_1,\dots,X_s\rangle$ or simply $k\{X\}$.

The algebra of generic matrices is a basic object in the study of the polynomial identities and invariants of $n\times n$ matrices.

There is a canonical homomorphism

$$\pi : k\langle x_1,\dots,x_s\rangle \to k\langle X_1,\dots,X_s\rangle \tag{1.1.1}$$

from the free associative ring on variables $x_1,\dots,x_s$ to this ring.

If $u_1,\dots,u_s$ are $n\times n$ matrices with entries in a commutative k-algebra R, then we can substitute u_j for X_j and hence obtain a homomorphism

$$k\langle X_1,\dots,X_s\rangle \to M_n(R).$$

The homomorphism π possesses the following important property: an element f of the free associative algebra lies in the kernel of the map π if and only if it vanishes identically on $M_n(R)$ for every commutative k-algebra R, and this is valid if and only if f vanishes identically on $M_n(k)$. In addition, (irreducible) matrix representations of a free ring A of dimension $\leqslant n$ correspond bijectively to (irreducible) matrix representations of the ring of generic matrices. This result is a core tool in our proof.

Let $u_1,\dots,u_N$ ($N = n^2$) be a basis for the matrix algebra $M_n(\bar{K})$ and $z_1,\dots,z_N$ be indeterminates. Then the entries of the matrix $Z = \sum z_j u_j$ are all algebraically independent. Moreover, the following Amitsur theorem is well known.

Theorem 1.1.8 (Amitsur)**.** *The algebra $k\langle X_1,\dots,X_s\rangle$ of generic matrices is a domain.*

For the proof, see [16, Theorem V.10.4] or [233, Theorem 3.2].

1.1.4. The Amitsur–Levitzki theorem. For the free associative algebra $A = k\langle X\rangle$, the *commutator* of two elements in A is defined as $[x,y] = xy - yx$. The commutator has analogs for several variables, called *generalized commutators* of elements $x_1,\dots,x_n$ of A:

$$S_n(x_1,x_2,\dots,x_n) := \sum(-1)^\sigma x_{\sigma1}\cdots x_{\sigma n} \tag{1.1.2}$$

(see [16]), where σ runs over the group of all permutations. It is clear that $S_2(x,y) = [x,y]$. Note that the generalized commutators are multilinear and alternating polynomials in the variables. Moreover, a general multilinear polynomial in n variables has the form $p(x_1,\dots,x_n) = \sum c_\sigma x_{\sigma1}\cdots x_{\sigma n}$, where the coefficients c_σ are elements of k.

There is an important and powerful result (see [6]), which was first proved by A. S. Amitsur and J. Levitzki in 1950.

Theorem 1.1.9 (A. S. Amitsur and J. Levitzki)**.** *Let R be a commutative ring and r be an integer.*

(i) *If $r \geqslant 2n$, then $S_r(a_1,\dots,a_r) = 0$ for every set $a_1,\dots,a_r$ of $n\times n$ matrices with entries in R.*
(ii) *Let $p(x_1,\dots,x_r)$ be a nonzero multilinear polynomial. If $r < 2n$, then there exist $n\times n$ matrices $a_1,\dots,a_r$ such that $p(a_1,\dots,a_r) \neq 0$. In particular, $S_r(x_1,\dots,x_r)$ is not identically zero.*

The identity $S_{2n} \equiv 0$ is called the *standard identity* of $n \times n$ matrices. Note that $S_2 \equiv 0$ is the commutative law, which holds for any 1×1 matrices but not for any $n \times n$ matrices for $n > 1$.

Remark 1.1.10. The Amitsur–Levitzki theorem is quite important (see [16]). Assume that study a representation $A \to M_n(k)$ of a k-algebra A. Let $I \subset A$ be the ideal generated by all substitutions of elements of A into S_{2n} and let $\tilde{A} = A/I$. The Amitsur–Levitzki theorem asserts that the relation $S_{2n} = 0$ is valid in $M_d(k)$ if $d \leqslant n$ whereas it is invalid for $d > n$. Killing I has the effect of keeping the representations of dimensions $\leqslant n$, and cutting out all irreducible representations of higher dimension.

The original proof of Theorem (1.1.9) obtained by Amitsur and Levitzki is a direct calculation, which is quite involved. Rosset proposed a short proof (see [173]) based on the exterior algebra of a vector space of dimension $2n$. This proof can be also found in [233, Theorem 1.7]. Then we obtain the following proposition.

Proposition 1.1.11. *Let $k\{X\}$ be the algebra of generic matrices.*

(a) *Every minimal polynomial of $A \in k\{X\}$ is irreducible. In particular, A is diagonalizable.*
(b) *Eigenvalues of $A \in k\{X\}$ are roots of irreducible minimal polynomial of A, and every eigenvalue the appears same amount of times.*
(c) *The characteristic polynomial of A is a power of the minimal polynomial of A.*

The following important open problem is well known.

Problem 1.1.12. For sufficiently large n, every nonscalar element in the algebra of generic matrices has a minimal polynomial, which always coincides with its characteristic polynomial.

This is an important open problem. For small n, the Galois group of an extension quotient field of the center of the algebra of generic matrices might not be symmetry. But it still unknown for sufficiently large n.

From Proposition 1.1.11(c), for a sufficiently large prime $n = p$, we can obtain the following assertion.

Corollary 1.1.13. *Let $k\{X\}$ be the algebra of generic matrices of a sufficiently large prime order $n := p$. Assume that A is a nonscalar element in $k\{X\}$. Then the minimal polynomial of A coincides with its characteristic polynomial.*

Proof. Let $m(A)$ and $c(A)$ be the minimal polynomial and the characteristic polynomial of A, respectively. Note that $\deg c(A) = n$ and $c(A) = (m(A))^k$. Since A is not scalar, $\deg m(A) > 1$. Since n is a prime, k divides n. Hence $k = 1$. ☐

Recall the following fact.

Proposition 1.1.14. *Two matrices with the same eigenvectors commute.*

Proof. Let $A, B \in M_{n\times n}(k)$ have the same n linearly independent eigenvectors. Since A and B are $n \times n$ matrices with n eigenvectors, they are diagonalizable and hence $A = Q^{-1}D_AQ$ and $B = P^{-1}D_BP$, where Q and P are matrices whose columns are eigenvectors of A and B associated with the eigenvalues listed in the diagonal matrices D_A and D_B, respectively. According to the assumption, A and B have the same eigenvectors and hence $P = Q =: S$. Therefore, $A = S^{-1}D_AS$ and $B = S^{-1}D_BS$ and hence

$$AB = S^{-1}D_ASS^{-1}D_BS = S^{-1}D_AD_BS;$$

similarly, we have $BA = S^{-1}D_BD_AS$. Since D_A and D_B are diagonal matrices, they commute and hence A and B also commute. ☐

Proposition 1.1.15. *If n is prime and A is a nonscalar element of the algebra of generic matrices, then all eigenvalues of A are pairwise different.*

Proposition 1.1.15 directly follows from Proposition 1.1.11 and Corollary 1.1.13.
Proposition 1.1.15 implies the following results.

Proposition 1.1.16. *Generic matrices commuting with A are simultaneously diagonalizable with A in the same eigenvectors basis as A.*

If A is a nonscalar matrix, then we have following assertion.

Proposition 1.1.17. *If A is a nonscalar element of the algebra of generic matrices $k\{X\}$, then each eigenvalue of A is transcendental over k.*

1.1.5. Deformation quantization.

1.1.5.1. Literature review. In general, the "quantization problem" can be stated as follows. Given a classical physical model (Hamiltonian system, Lagrange system on a Riemannian manifold, etc.), quantization amounts to replacing the observable functions with operators acting on a Hilbert space such that they satisfy some specific quantization conditions. In quantum mechanics, this quantization condition is called the *canonical commutation relation*, which is the fundamental relation between canonical conjugate quantities. For example, the commutation relation between different components of position and momentum can be expressed as $[\hat{P}_i, \hat{Q}_j] = i\hbar\delta_{ij}$, where i is the imaginary unit and δ_{ij} is the Kronecker delta. Hermann Weyl studied the Heisenberg uncertainty principle in quantum mechanics by considering the operator ring generated by P and Q. For any $2n$-dimensional linear space V, the Kronecker delta can be realized as a symplectic form ω such that $u \otimes v - v \otimes u = \omega(u, v)$ defines a Weyl algebra $W(V)$ over V. In this sense, classical mechanics corresponds to symmetric algebra, while the Weyl algebra is the "quantization" of symmetric algebra.

In the 1940s, J. E. Moyal (see [162]) conducted a more in-depth study of the Weyl quantization. Unlike Weyl, the object he was interested in was not operators, but the classical function space: Weyl ignores the Poisson structure of the classical function space. Instead of constructing a Hilbert space from a Poisson manifold and associating an algebra of operators to it, he was only concerned with the algebra. He used the star product and Moyal bracket to define a Poisson algebraic structure named Moyal algebra over the classical function space. Through the investigation of the Moyal algebra, F. Bayen et al. (see [32]) raised that the quantum algebra can be considered as a deformation of the classical algebra if we take $\hbar$ as the deformation parameter. In particular, they proved that for the classical Poisson algebraic structure on the symmetric algebra over $\mathbb{R}^{2n}$, the Moyal algebra is the only possible deformation in the sense of normative equivalence. That is, quantum mechanics is the only possible "deformation" of classical mechanics.

We use the Poisson bracket to "deform" the ordinary commutative product of observables in classical mechanics—elements of our function algebra—and obtain a noncommutative product suitable for quantum mechanics. In order to perform a deformation, we ask that the Moyal product is not only an asymptotic expansion, but also a real analytical expansion. There is no a priori guarantee for this. By the Darboux theorem, the local Poisson algebra structure on the symplectic manifold can always be deformed into the Moyal algebra. We only need to extend this local deformation to the whole manifold after equipping it with a flat symplectic connection. However, for a typical Poisson manifold, the situation is much more complicated.

In the mid 1970s, the existence of star-products for symplectic manifolds with trivial third cohomology group was proved, but this restriction turned out to be merely technical. In the early 1980s, the existence of star-products for wide classes of symplectic manifolds was proved, and finally it was shown that any symplectic manifold can be "quantized." Further generalizations were achieved with [98] where Fedosov proved that the results about the canonical star-product on an arbitrary symplectic manifold can be used to prove that all regular Poisson manifolds can be quantized. However, in physics we sometimes require manifolds that have a degenerate Poisson bracket and thus are not symplectic. Therefore, all the results mentioned above provided only a partial answer to the problem of quantization.

In 1993–1994, M. Kontsevich proposed the *Formality Conjecture* which would imply the desired result. If the Formality Conjecture could be proved, this would infer that any finite-dimensional Poisson manifold can be canonically quantized in the sense of deformation quantization. The Formality Conjecture is proved by Kontsevich in [128]. Kontsevich then derived an explicit quantization formula, which gives a formal definition of the Moyal product for any Poisson manifold. However, it is not clear whether it gives the only possible deformation quantization in the sense of canonical equivalence.

Another direction of developing researches in deformation quantization is strict deformation quantization, where the parameter is no longer a formal parameter, but a real one. In a way, the deformed algebras $A[\![\hbar]\!]$ are identified with the original algebra A.

1.1.5.2. Definitions and basic results.

Definition 1.1.18 (ring of formal power series)**.** Let R be a commutative ring with identity. $R[\![X]\!]$ is called the ring of formal power series in the variable X over R if and only if any element of $R[\![X]\!]$ has the form $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$ and satisfies the following relations:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i + \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i = \sum_{i\in\mathbb{N}} (a_i+b_i) X^i, \tag{1.1.3}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i \times \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) X^n. \tag{1.1.4}$$

The above product (1.1.4) of coefficients is called the Cauchy product of the two sequences of coefficients; it is a kind of discrete convolutions. Note that the zero element and the multiplicative identity of the ring of formal power series are the same as in the ring R.

Remark 1.1.19. The series $A = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in R[\![X]\!]$ is invertible if and only if its constant coefficient a_0 is invertible in R. The inverse series of an invertible series A is $B = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n \in R[\![X]\!]$ with

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}, \ n \geqslant 1.$$

An important example is the geometric series

$$(1-X)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n.$$

If R is a field, then a series is invertible if and only if the constant term is nonzero.

Definition 1.1.20. A *Lie algebra* is a vector space with a skew-symmetric bilinear operation $(f,g) \to [f,g]$ satisfying the Jacobi identity

$$[[f,g],h] + [[g,h],f] + [[h,f],g] = 0.$$

Definition 1.1.21. A *Poisson algebra* is a vector space equipped with a structure of a commutative associative algebra $(f,g) \to fg$ and a Lie-algebra structure $(f,g) \to \{f,g\}$ satisfying the *Leibniz rule*

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g.$$

Definition 1.1.22. A *Poisson manifold* is a manifold M whose function space $C^\infty(M)$ is a Poisson algebra with the pointwise multiplication as the commutative product.

Let k be an arbitrary field and A be a unitary k-algebra. Denote by $k[\![\hbar]\!]$ the *ring of formal power series* in the indeterminate $\hbar$ and by $A[\![\hbar]\!]$ the $k[\![\hbar]\!]$-module of formal power series with coefficients in A.

Definition 1.1.23. A *formal deformation* or a *star product* of the algebra A is an associative, $\hbar$-adic continuous, $k[\![\hbar]\!]$ bilinear product

$$\star : A[\![\hbar]\!] \times A[\![\hbar]\!] \to A[\![\hbar]\!]$$

satisfying the following rule on A:

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(f,g)\hbar^n = fg + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(f,g)\hbar^n \quad \forall f,g \in A, \tag{1.1.5}$$

where $B_n : A \times A \to A$ are bilinear operators.

Remark 1.1.24. We usually require that the bilinear operators B_n are bidifferential operators, i.e., bilinear maps that are differential operators with respect to each argument.

Remark 1.1.25. The formal deformation extends $k[\![\hbar]\!]$-linearity in $A[\![\hbar]\!]$ with respect to the bilinear product

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \hbar^k\right) \star \left(\sum_{m=0}^{\infty} g_m \hbar^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m+k+r=n}^{\infty} B_r(f_k, g_m)\right)\hbar^n.$$

There is a natural gauge group acting on star-products. This group consists of automorphisms of $A[\![\hbar]\!]$ considered as an $k[\![\hbar]\!]$-module of the following form:

$$f \longmapsto f + \sum_{n=0}^{\infty} D_n(f)\hbar^n \qquad \forall f \in A \subset A[\![\hbar]\!],$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n\hbar^n \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n\hbar^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} D_m(f_m)\hbar^{n+m} \quad \forall \sum_{n=0}^{\infty} f_n\hbar^n \in A[\![\hbar]\!],$$

where $D_i : A \to A$ are differential linear operators.

Definition 1.1.26. The operators $D(\hbar)$ defined above are called *gauge transformations* in A. The set of all such operators is naturally a group.

If $D(\hbar) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} D_m\hbar^m$ is such an automorphism, then it defines an equivalence and acts on the set of star products as follows:

$$\star \mapsto \star', \quad f(\hbar) \star' g(\hbar) := D(\hbar)(D(\hbar)^{-1}(f(\hbar)) \star D(\hbar)^{-1}(g(\hbar))) \quad \forall f(\hbar), g(\hbar) \in A[\![\hbar]\!]. \tag{1.1.6}$$

Each associative formal deformation $\star$ of the multiplication of A admits a unit element $1_\star$. Moreover, such an associative formal deformation $\star$ is always equivalent to another formal deformation $\star'$ with $1_{\star'} = 1_A$, where 1_A is the unit element of A. We are interested in star products up to gauge equivalence.

The following lemma gives a Poisson structure for an associative formal deformation of the multiplication of an associative and commutative k-algebra A.

Lemma 1.1.27 (see [124, Lemma 1.1])**.** *Let $\star$ be an associative formal deformation of the multiplication of an associative and commutative k-algebra A. For $f, g \in A$, we set*

$$\{f, g\} := B_1(f, g) - B_1(g, f).$$

Then the map $\{\cdot,\cdot\}$ is a Poisson bracket on A, i.e., a k-linear map such that the bracket is a Lie bracket satisfying the Leibniz rule. In addition, the bracket is dependent only on the equivalence class of $\star$.

Proof. For brevity, we denote by $[f, g]_\star$ the commutator of the star product $f \star g - g \star f$. Clearly, the map

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{\hbar}[f, g]_\star \tag{1.1.7}$$

defines a Lie bracket on $A[\![\hbar]\!]$. The bracket $\{\cdot,\cdot\}$ is equal to the reduction of this Lie bracket modulo $\hbar$, i.e., it satisfies the relation

$$\frac{1}{\hbar}[f, g]_\star \equiv \{f, g\} \mod \hbar A[\![\hbar]\!]. \tag{1.1.8}$$

We write this formula as follows:

$$\{f, g\} := \left.\frac{[f, g]_\star}{\hbar}\right|_{\hbar=0} = B_1(f, g) - B_1(g, f). \tag{1.1.9}$$

Therefore, the bracket $\{\cdot,\cdot\}$ is still a Lie bracket, and it also satisfies the Leibniz rule since the Lie bracket defined in (1.1.7) satisfies the associativity rule of the star product.

Assume that $D(\hbar)$ is an automorphism, which yields equivalence of $\star$ and $\star'$. Then we have

$$B_1(f,g) + D_1(fg) = B_1'(f,g) + D_1(f)g + fD_1(g)$$

for all $f, g \in A$. Thus, the difference $B_1(f,g) - B_1'(f,g)$ is symmetric in f and g and does not contribute to $\{\cdot,\cdot\}$. $\square$

One can also decompose the operator B_1 into the sum of the symmetric and anti-symmetric parts:

$$B_1 = B_1^+ + B_1^-, \quad B_1^+(f,g) = B_1^+(g,f), \quad B_1^-(f,g) = -B_1^-(g,f).$$

Then gauge automorphisms affect only the symmetric part of B_1, i.e., $B_1^- = (B_1')^-$. The symmetric part is annihilated by gauge automorphisms. In this notation, we may write

$$\{f,g\} = B_1(f,g) - B_1(g,f) = 2B_1^-(f,g).$$

Thus, gauge equivalence classes of star products modulo $\hbar^2 A[\![\hbar]\!]$ are classified by Poisson structures. However, it is not clear whether there exists a star product for a given Poisson structure. Moreover, we may ask whether there exists a preferred choice of an equivalence class of star products. As we mentioned above, M. Kontsevich showed (see [128]) that there is a canonical construction of an equivalence class of star products for any Poisson manifold.

1.1.5.3. Formal deformation quantization. In this section, we may assume that A is the algebra of smooth functions on a Poisson manifold M.

Definition 1.1.28. A *deformation quantization* of a Poisson manifold M is a star product on A such that $2B_1^- = \{\cdot,\cdot\}$.

We do not reproduce Kontsevich's proof here and do not deal with it below. His proof is based on the cohomology of the Hochschild complex. By the following theorem, there is a surjection from the equivalence classes of formal deformations of A onto Poisson brackets on A.

Theorem 1.1.29 (M. Kontsevich, [128])**.** *Let M be a smooth manifold and $A = C^\infty(M)$. Then there is a natural isomorphism between equivalence classes of deformations of the null Poisson structure on M and equivalence classes of smooth deformations of the associative algebra A.*

In particular, any Poisson bracket on M comes from a canonically defined (*modulo equivalence*) *star product.*

Moreover, Kontsevich constructed a section of map, and his construction is canonical up to equivalence for general manifolds. A later result shows that, in addition to the existence of a canonical way of quantization, we can define a universal infinite-dimensional manifold parametrizing quantizations.

The simplest example of a deformation quantization is the Moyal product for the Poisson structure on $\mathbb{R}^n$. This is the first known example of a nontrivial deformation of the Poisson bracket.

Example 1.1.30. Let $M = \mathbb{R}^n$. We consider a Poisson structure with constant coefficients

$$\alpha = \sum_{i,j} \alpha^{ij} \partial_i \wedge \partial_j, \quad \alpha^{ij} = -\alpha^{ji} \in \mathbb{R},$$

where $\partial_i = \partial/\partial x^i$ is the partial derivative with respect to the coordinate x^i, $i = 1, 2, \ldots, n$. In this we have

$$\{f,g\} = \sum_{i,j} \alpha^{ij} \partial_i(f) \partial_j(g).$$

The Moyal $\star$-product is then given by exponentiating this Poisson operator:

$$f \star g = e^{\hbar\alpha}(f,g) = fg + \hbar \sum_{i,j} \alpha^{ij} \partial_i(f)\partial_j(g) + \frac{h^2}{2} \sum_{i,j,k,l} \alpha^{ij}\alpha^{kl} \partial_i\partial_k(f)\partial_j\partial_l(g) + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n \\ j_1,\ldots,j_n}} \prod_{k=1}^n \alpha^{i_k j_k} \prod_{k=1}^n \partial_{i_k}(f) \prod_{k=1}^n \partial_{j_k}(g).$$

The Moyal product is a deformation of (M, α), but this formula is only valid when α has constant coefficients.

In particular, consider the following example.

Example 1.1.31. Let $M = \mathbb{R}^2$. Consider the Poisson bracket

$$\{f, g\} = \mu \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}\right)(f \otimes g) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1},$$

where μ is the multiplication of functions on M. Then Kontsevich's construction yields the associative formal deformation given by

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^n}\frac{\partial^n g}{\partial x_2^n}\frac{\hbar^n}{n!}.$$

The explicit construction of Kontsevich's formal quantization is based on some combinatoric tools such as quivers. We complete this section here since we do not need to construct an explicit formula of deformation quantization in our proof.

1.1.6. Algebraically closed skew field. The role of algebraically closed fields in commutative algebra is well known. There are some parallel generalizations of the concept of an algebraically closed skew field to noncommutative skew fields have proved useful for settling various questions in the ring theory. However, there are various definitions. The diversity of definitions of algebraically closed skew fields is based on different choices of some particular characteristic of a commutative algebraically closed field. The most natural generalization is in the sense of solvability of arbitrary equations which was brought in sight by Bokut (see [57–59]). In particular, in [59] Bokut raises a question whether algebraically closed skew fields exist or not. The positive answer to this question was given by L. Makar-Limanov (see [144]). His result is one of the fundamental contributions to the theory of noncommutative, algebraically closed skew fields. In [64], P. M. Cohn outlined a wide research program for skew fields that are algebraically closed in the various senses. Note that not every associative algebra can be embedded into an algebraically closed algebra, in the sense of solvability of arbitrary equations. For example, the "metro-equation" $ax - xa = 1$ (cf. [63]) is never solvable in any extension of the quaternionic skew field. In [126], P. S. Kolesnikov reproved the Makar-Limanov theorem on the existence of an algebraically closed skew field in the sense of solution for any generalized polynomial equation. He used a simpler argument for proving that the skew field constructed is algebraically closed.

1.1.6.1. Existence of algebraically closed skew field. We construct a noncommutative skew field A satisfying the following definition (cf. [126]).

Definition 1.1.32. A skew field A with center F is said to be *algebraically closed* if, for any $S(x) \in A * F[x] \setminus A$, there exists an element $a \in A$ such that $S(a) = 0$; here, $*$ stands for a free product.

It is easy to see that if A is a field, that is, $A = F$, then Definition 1.1.32 checks with the usual definition of an algebraically closed field.

Let F be an algebraically closed field of characteristic 0 and G be the commutative group generated by the elements

$$p_1^{\lambda_1},\ q_1^{\mu_1},\ p_2^{\lambda_2},\ q_2^{\mu_2},\ \dots,$$

where $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{Q}$ and p_1 and q_i are symbols in some countable alphabet. The group is isomorphic to the direct sum of countably many additive groups $\mathbb{Q}$ of rational numbers. Then we introduce the lexicographic order on G by setting

$$p_1 \ll q_1 \ll p_2 \ll \cdots < 1,$$

where $a \ll b$ means that $a^n < b$ for all $n > 0$. Respectively,

$$p_1^{-1} \gg q_1^{-1} \gg p_2^{-1} \gg \cdots > 1.$$

We set

$$G_n = \langle p_n^{\lambda_n},\ q_n^{\mu_n},\ p_{n+1}^{\lambda_{n+1}},\ \dots,\ bb\rangle, \quad G_{(m)} = \langle p_1^{\lambda_1},\ q_1^{\mu_1},\ \dots,\ q_m^{\lambda_m}\rangle.$$

Obviously, G_n is isomorphic to G.

For given G and F, we construct a set $\mathcal{A}$ of Maltsev–Neumann series. Elements $a \in \mathcal{A}$ has the form

$$a = \sum_{g\in H_a} a(g)g, \quad H_a \in G \text{ is well ordered}, \quad a(g) \in F \setminus \{0\},$$

the set H_a is denoted by $\operatorname{supp} a$. Choose a subset A of $\mathcal{A}$ such that

$$A = \{a \in \mathcal{A} \mid \operatorname{supp} a \subset G_{(n(a)}\}.$$

Respectively, we set

$$A_n = \{a \in A \mid \operatorname{supp} a \subset G_n\}, \quad A_{(n)} = \{a \in A \mid \operatorname{supp} a \subset G_{(n)}\}.$$

The set A constructed is exactly the universe of the desired algebraic system. For the series on A_n, we define ordinary addition and multiplication, and also derivations $\left(\dfrac{\partial}{\partial p_n}, \dfrac{\partial}{\partial q_n}\right)$. Derivatives of the elements $g \in G_n$ with respect to p_1 and q_1 are elements of A_n. There are several formulas for these derivations (we omit them here). Following [126, 144], we define a multiplication $*$ on A as follows:

$$a, b \in A, \quad a * b = \sum_{i\geqslant 0} \frac{1}{i!}\frac{\partial^i a}{\partial q_1^i}\frac{\partial^i b}{\partial p_1^i}.$$

The multiplication $*$ is well defined and associative (cf. [126]). Then the system $\langle A, +, *, ||\rangle$ is an associative algebra with valuation. That this is a skew field follows from the fact that $a * x = 1$ has a solution in A. Moreover, A does not satisfy any generalized polynomial identity, i.e., for every nontrivial generalized polynomial $S(x) \in A*F[x]\setminus A$, there exists an element $a \in A$ such that $S(a) \neq 0$ (cf. [126, Lemma 1.3]).

We introduce the following notion, which generalizes the concept of an homogeneous polynomial in $A * F[x]$.

Definition 1.1.33. An operator

$$S_n(x) = \sum_{\imath,\jmath} f_{\imath,\jmath} x^{(i_1,j_1)} \dots x^{(i_k,j_k)},$$

where $\imath = (i_1 \dots i_k)$, $\jmath = (j_1 \dots j_k)$, $f_{\imath,\jmath} \in A_n$, and x is a common element in A_n, is called a *homogeneous operator* over A_n if the following conditions hold:

(i) there exists m such that $f_{\imath,\jmath} \in A_{(m)}$ for all $\imath, \jmath$;

(ii) for any $g \in G_n$ and $x \in A_n$, the following inequality holds only for finitely many summands in $S_n(x)$:

$$|f_{\imath,\jmath} x^{(i_1,j_1)} \dots x^{(i_k,j_k)}| \leqslant g;$$

(iii) all summands have the same degree $\deg S_n(x) = k$ over x.

In [126], Kolesnikov solved the equation $|S(x)| = g$ and found that $S_1(x) = f_1$. His proof contains a modification of original Makar-Limanov's proof, which is useful since it compensates for this loss by making the argument for algebraic closedness much easier.

In [127], Kolesnikov shows that each polynomial equation containing more than one homogeneous component over such a skew field necessarily has a nonzero solution. Precisely, he proved the following assertion.

Proposition 1.1.34 (see [127, Theorem 1])**.** *Let $S_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, be homogeneous operators over A, where $n \geqslant 1$, and $T(x)$ be a homogeneous operator such that $\deg S_i < \deg T$. Then the equation $\sum_i S(x) = T(x)$ has a solution $x \in A$, $x \neq 0$.*

1.1.6.2. Algebraically closed skew field in the sense of matrices. Another conception of algebraic closedness is associated with the notion of singular eigenvalues of matrices. The definitions are given in [64].

Let D be a skew field with center k. Denote by $M_n(D)$ the ring of all $(n \times n)$-matrices over D. A matrix $A \in M_n(D)$ is said to be *singular* if there exists a nonzero column $u \in D^n$ such that $Au = 0$. A square matrix is singular if and only if it is not invertible. The property of being singular for a matrix is preserved under left or right multiplication by an invertible matrix, in particular, under elementary transformations of columns with coefficients from the skew field on the right, and of rows on the left.

An element $\lambda \in D$ is called a *singular eigenvalue* of A if $A - \lambda I$ is a singular matrix. It is worth mentioning that singular eigenvalues of matrices are not always preserved under similarity transformations, but central eigenvalues are invariant in this sense.

The following definition of algebraically closed skew field is due to P. Cohn (see [64]).

Definition 1.1.35. A skew field D is said to be *algebraically closed* in the sense of Cohn (notation AC) if every square matrix over D has a singular eigenvalue in this skew field. A skew field D is said to be *fully algebraically closed* (notation FAC) if every matrix $A \in M_n(D)$, which is not similar to a triangular matrix over the center of D, has a nonzero singular eigenvalue in D.

The definition of FAC skew field is equivalent to the following definition.

Definition 1.1.36. A skew field D is fully algebraically closed if every matrix $A \in M_n(D)$, which is not nilpotent, has a nonzero singular eigenvalue in D.

Consequently, if A is similar to a triangular matrix over the center of D, then either it is nilpotent or has a nonzero eigenvalue. Conversely, if A is nilpotent, then it is similar to its canonical form containing only 1 on a secondary diagonal.

Definition 1.1.37. We say that D is an AC_n (respectively, FAC_n) skew field if every (non-nilpotent) matrix $A \in M_m(D)$, $m \leqslant n$, has a nonzero eigenvalue in D.

Proposition 1.1.38 (see [127, Theorem 2])**.** *Let D be an FAC_n skew field and $a_i, b_i, c \in D$, $i = 1, \dots, n$. Then the equation*

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i = c$$

has a solution $x = x_0 \in D$ if $L_n(x) \equiv 0$ for all $x \in D$.

1.2. Algebra Automorphisms and Quantization

In this section, $\mathbb{F}$ denotes a ground field with zero characteristic.

One of the main objects of the theory of polynomial mappings are Ind-schemes whose points are automorphisms of various algebras with polynomial identities, for example, algebras of commutative polynomials $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ of n variables, free algebras $\mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ of n generators, some selected quotients, as well as algebras with additional structures; a famous example is the polynomial algebra equipped with the Poisson bracket. This area of research has its roots in the well-known Jacobian conjecture. Due to the relatively recent progress of Belov-Kanel and Kontsevich [41,42] and Y. Tsuchimoto [190, 191]), as well as earlier studies, a significant place in the scientific program regarding the Jacobian conjecture has come to be occupied by questions related to the quantization of classical algebras.

The study of geometry and topology of Ind-schemes of automorphisms, development of the approximation theory of symplectomorphisms by tame symplectomorphisms, as well as the construction of a correspondence between plane algebraic curves and holonomic modules (over the corresponding the Weyl algebra), are the basis of the approach to the conjecture of Belov-Kanel and Kontsevich on automorphisms of the Weyl algebra formulated by A. Elishev, A. Kanel-Belov, and J. T. Yu in [115,116] (cf. also [86, 234]).

1.2.1. Jacobian conjecture. One of the most well-known unsolved problems in the theory of polynomials in several variables is the so-called *Jacobian conjecture* formulated in 1939 by O. H. Keller (see [125]). Let $\mathbb{F}$ be the main field. For a fixed positive integer n, consider n polynomials

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad f_n(x_1, \dots, x_n)$$

of n variables $x_1, \dots, x_n$. Any such system of polynomials defines a unique image *endomorphism* of the algebra $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ as follows:

$$F : \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n],$$
$$F \leftrightarrow (F(x_1), \dots, F(x_n)) \equiv (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)).$$

The $\mathbb{F}$-endomorphism F of polynomial algebra is determined by its action on the set of generators. Let $J(F)$ denote the *Jacobian* (the determinant of the Jacobi matrix) of the map F:

$$J(F) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Conjecture 1.2.1 (Jacobian conjecture JC_n)**.** Let the characteristic of the base field $\mathbb{F}$ be equal to zero. If the Jacobian $J(F)$ of the endomorphism F is equal to a nonzero constant (that is, it belongs to the set $\mathbb{F}^*$), then F is an automorphism.

An elementary exercise is to verify the statement that automorphisms of polynomial algebras always have a nonzero Jacobian constant. Conjecture 1.2.1 is thus a partially inverse statement of this property. It is also easy to see that if a polynomial endomorphism F is invertible, then the inverse will also be a polynomial endomorphism.

The Jacobian conjecture is trivial for $n = 1$. On the other hand, when the field $\mathbb{F}$ has positive characteristic, the Jacobian conjecture formulated as Conjecture 1.2.1 is invalid even in the case $n = 1$. Indeed, if $\operatorname{char} \mathbb{F} = p$ and $n = 1$, we can take $\varphi(x) = x - x^p$. The Jacobian of this mapping is equal to unity, but it is not invertible.

Despite the apparent simplicity of wording and context, the Jacobian conjecture is one of the most difficult open questions of modern algebraic geometry. This problem has become the subject of numerous studies and has greatly contributed to the development of related fields of algebra, algebraic geometry, and mathematical physics, which are also of independent interest.

The literature on the Jacobian conjecture, its analogs, and related problems is quite extensive. A detailed discussion of the results established in the context of the Jacobian conjecture is beyond the scope of this work. Below we give a brief overview of some results directly related to the Jacobian conjecture (i.e., for the algebra of polynomials in commuting variables). Among studies of topics similar to the Jacobian conjecture in associative algebra, it is worth noting the work of W. Dicks [73] and W. Dicks and J. Lewin [74] on an analog of the Jacobian conjecture for free associative algebras, the proof by U. U. Umirbaev of an analog of the Jacobian Conjecture for the free metabelian algebra (see [193]), and the deep and extremely significant works of A. V. Yagzhev [217–220] (see also [35]).

1.2.2. Some results related to the Jacobian conjecture. While the general case of the Jacobian conjecture (or even the Jacobian conjecture on the plane) remains an open problem, various partial results are known. We recall several such results.

In [215], S. S. Wang established the Jacobian conjecture for the case of endomorphisms defined by polynomials of degree 2. Also, H. Bass, E. H. Connell, and D. Wright (see [21]) showed that the general case of the Jacobian conjecture would follow from the special case of the Jacobian conjecture for the so-called endomorphisms of homogeneous cubic type, which are defined as mappings of the form

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + H_1, \dots, x_n + H_n),$$

where the polynomials H_k are homogeneous of degree 3.

Moreover, L. M. Drużkowski proved (see [83]) that the previous hypothesis can be weakened, by considering as H_k only polynomials that are cubes of linear homogeneous polynomials.

In the works of M. de Bondt and A. van den Essen (see [69, 70]) and Drużkowski (see [84]), it was shown that it suffices to establish the Jacobian conjecture for endomorphisms of homogeneous cubic type with a symmetric Jacobi matrix.

As above, we assume that the polynomial endomorphism F is given by the set of the images of generators:

$$F \leftrightarrow (F(x_1), \ldots, F(x_n)) \equiv (F_1, \ldots, F_n).$$

Then F is invertible if and only if the algebras

$$\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n] \quad \text{and} \quad \mathbb{F}[F_1, \ldots, F_n]$$

are isomorphic. In [125], Keller considered a rational analog of thte given criterion, i.e., the case of an isomorphism of function fields

$$\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{and} \quad \mathbb{F}(F_1, \ldots, F_n)$$

and the invertibility following from the existence of an isomorphism is established by L. A. Campbell (see [61]). A generalization of Keller's original result to the case where $\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n)$ is a Galois extension of the field $\mathbb{F}(F_1, \ldots, F_n)$ (see also the works [171] of M. Razar and [216] of D. Wright generalizing the result mentioned).

In addition, some efforts were aimed at testing the fulfillment of the Jacobian conjecture for all endomorphisms defined by polynomials of degree not higher than some fixed number. T. T. Moh [161] performed a similar test for polynomials of two variables of degree not exceeding 100.

Despite the existence of the results described above (as well as some other similar theorems), the general case of the Jacobian conjecture remains not only open, but, apparently, at the moment irrefutable.

On the other hand, there are situations in which mappings, by their geometric properties close to polynomial endomorphisms, are nevertheless not invertible. S. Yu. Orevkov (see [164]) pointed to the following reformulation of the Jacobian conjecture, leading to a similar situation. Let l be an infinitely distant line in the complex projective plane $\mathbb{C}P^2$, U be its tubular neighborhood, f_1 and f_2 are meromorphic functions on U, holomorphic on $U\backslash l$ and defining a locally bijective mapping

$$F : U\backslash l \to \mathbb{C}^2.$$

The Jacobian conjecture is equivalent to the statement about the injectivity of mappings of this kind. Orevkov constructed the following example.

Theorem 1.2.2 (S. Yu. Orevkov [164])**.** *There is a smooth, noncompact, complex analytic surface $\tilde{X}$ on which there is a smooth curve $\tilde{L}$ isomorphic to the projective line, with the self-intersection index $+1$ and two functions f_1 and f_2 meromorphic on $\tilde{X}$ and holomorphic on $\tilde{X}\backslash\tilde{L}$ such that the mapping defined by*

$$F : \tilde{X}\backslash\tilde{L} \to \mathbb{C}^2$$

is locally bijective but not injective.

As was noted in [164], if $\tilde{U}$ is a tubular neighborhood of the curve $\tilde{L}$, then the pairs (U, l) (as above) and $(\tilde{U}, \tilde{L})$ are diffeomorphic, which implies the existence of a smooth immersion in a two-dimensional complex exterior space of a ball which is geometrically similar to a polynomial map and noninvertible. Also, if the pairs (U, l) and $(\tilde{U}, \tilde{L})$ were biholomorphic to each other, then from Orevkov's example one would derive the existence of a counterexample to the Jacobian conjecture. This consideration allows one to conclude that one can be fairly certain about the negativity of the Jacobian conjecture.

In his classic work [8], Anick developed a theory of approximation of polynomial automorphisms by tame automorphisms. In connection with Anick's theorem on approximation, the Jacobian conjecture can be reduced to solving the question for the invertibility of limits of sequences of tame automorphisms. Moreover, a symplectic analogue of Anick's theorem gives a natural (requiring nontrivial Abelian extensions) idea to solve the lifting type problems.

The central question in the approach to the Jacobian conjecture type problems based on approximation by sequences of tame automorphisms is the proof of the polynomial nature of the resulting limit. While in the case of the lifting of symplectomorphisms the proof of the correctness of the construction seems to be possible (a significant role in it is played by the invertibility of the sequence limits, which is obviously not the case for the Jacobian conjecture). In the context of the Jacobian conjecture there is no clarity in the matter, and considerations following from [164], indicate possible significant obstacles.

The Jacobian conjecture was studied by the methods of covering groups by S. Yu. Orevkov [163,165] and A. G. Vitushkin [205, 206]. The Jacobian conjecture was also the subject of significant works [134, 135] of Vik. S. Kulikov.

A number of other difficult problems in the theory of polynomial automorphisms are closely connected with the Jacobian conjecture and with affine algebraic geometry. These problems are important in the general mathematical context. For example, a special case of the classical Abyankar–Sataye conjecture [168, 232] posits isomorphisms of all embeddings of the complex affine line into three-dimensional space (in other words, it is a conjecture about the possibilities of formally algebraic definition of the knot).

1.2.3. Ind-schemes and varieties of automorphisms. One of the essential areas of algebraic geometry, the development of which was motivated by the Jacobian Conjecture is the theory of infinite-dimensional algebraic groups. The main reference is the seminal article of I.R. Shafarevich [177], in which he defined concepts that allowed one to study questions about some natural infinite-dimensional groups – for example, the group of automorphisms of an algebra of polynomials in several variables – using tools from algebraic geometry. In particular, Shafarevich defines *infinite-dimensional varieties* as inductive limits of directed systems of the form

$$\{X_i, f_{ij},\ i,j \in I\},$$

where X_i are algebraic varieties (more generally, algebraic sets) over a field $\mathbb{F}$, and the morphisms f_{ij} (defined for $i \leqslant j$) are closed embeddings. The inductive limit of a system of topological spaces carries a natural topology, and therefore the natural questions about connectivity and irreducibility arise, which were also studied in [177].

Following generally accepted terminology, we will call the direct limit of systems of varieties and closed embeddings an Ind-*variety*, and the corresponding limits of systems of schemes and morphisms of schemes an Ind-*scheme*.

The Jacobian Conjecture has the following elementary connection with Ind-schemes. Since the algebra of polynomials $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ can be endowed with a natural $\mathbb{Z}$-grading in total degree deg, which is defined as the appropriate monoid homomorphism by the requirement $\deg x_i = 1$, we can define the degree of endomorphism φ: namely, if $\varphi = (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$ defined by its action on algebra generators, then the degree $\deg \varphi$ is the maximum value of degree on the polynomials $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$. It defines an increasing filtration

$$\operatorname{End}^{\leqslant N} \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n],\ N \geqslant 0$$

on the set $\operatorname{End} \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ of endomorphisms of the polynomial algebra. Points

$$\operatorname{End}^{\leqslant N} \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$$

are endomorphisms of degree at most N. It is easy to see that the algebraic sets

$$\operatorname{End}^{\leqslant N} \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$$

are isomorphic to affine spaces of appropriate dimension. The coordinates of the point φ are the coefficients of the polynomials $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$, and for

$$\operatorname{End} \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$$

these coordinates are not connected by any relations.

The total degree filtration also enables endowing the sets of automorphisms with the Zariski topology as follows (see also [177]): if φ is a polynomial automorphism, then consider a set of polynomials

$(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_1),\varphi^{-1}(x_1),\dots,\varphi^{-1}$
$(x_n))$, the images of generators under the action of the automorphism and its inverse. The coefficients of these polynomials serve as coordinates of φ as a point of some affine space.

Define the subsets

$$\operatorname{Aut}^{\leqslant N}\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]=\{\varphi\in\operatorname{Aut}\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]:\deg\varphi,\deg\varphi^{-1}\leqslant N\}$$

as sets of automorphisms such that all coefficients of polynomials in the presentation above for degrees greater than n are zero.

The sets $\operatorname{Aut}^{\leqslant N}\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ are algebraic sets. Indeed, the identities that define the points $\operatorname{Aut}^{\leqslant N}$ are derived from the identity

$$\varphi\circ\varphi^{-1}=\mathrm{Id}$$

and, it is easy to see, are specified by polynomials.

Now let $\mathfrak{J}^{\leqslant N}$ denote a subset of

$$\operatorname{End}^{\leqslant N}\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n],$$

whose points are endomorphisms with a Jacobian equal to a nonzero constant.

Then Conjecture 1.2.1 can be clearly reformulated as follows

$$\forall\varphi\in\mathfrak{J}^{\leqslant N}\Rightarrow\varphi\in\operatorname{Aut}\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n],\ \ \forall N,\ \ \text{for}\ \ \operatorname{char}\mathbb{F}=0.$$

1.2.4. Conjecture of Dixmier and quantization. J. Dixmier [75] in his seminal study of Weyl algebras found a connection between the Jacobian Conjecture and the following Conjecture. Let $W_{n,\mathbb{F}}$ denote the *n-th Weyl algebra* over the field $\mathbb{F}$ defined as the quotient algebra of the free algebra

$$F_{2n}=\mathbb{F}\langle a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\rangle$$

of $2n$ generators by the two-sided ideal I_W, generated by polynomials

$$a_ia_j-a_ja_i,\ \ b_ib_j-b_jb_i,\ \ b_ia_j-a_jb_i-\delta_{ij}\ \ (1\leqslant i,j\leqslant n),$$

where δ_{ij} is the Kronecker symbol. The Dixmier Conjecture states:

Conjecture 1.2.3 (Dixmier Conjecture, DC_n)**.** Let $\operatorname{char}\mathbb{F}=0$. Then $\operatorname{End}W_{n,\mathbb{F}}=\operatorname{Aut}W_{n,\mathbb{F}}$.

In other words, the Dixmier Conjecture asks whether every endomorphism of the Weyl algebra over a field of characteristic zero is in fact an automorphism.

The Dixmier Conjecture for n variables, DC_n, implies the Jacobian Conjecture JC_n for n variables (see, for example, [202]). Significant progress in recent years in the study of Conjecture 1.2.1 has been achieved by Kanel-Belov (Belov) and Kontsevich [42] — and independently by Tsuchimoto [191] (see also [190]) — in the form of the following theorem.

Theorem 1.2.4 (A. Ya. Kanel-Belov and M. L. Kontsevich [42], Y. Tsuchimoto [191])**.** *JC_{2n} implies DC_n.*

In particular, Theorem 1.2.4 implies the stable equivalence of the Jacobian Conjecture and the Dixmier Conjecture, i.e., the equivalence of conjectures JC_∞ and DC_∞, where JC_∞ denotes the conjunction corresponding conjectures for all finite n.

Theorem 1.2.4 laid the foundation for the research into the Jacobian Conjecture based on the study of the behavior of varieties of endomorphisms and automorphisms of algebras under deformation quantization. The principal reference in this direction is an article by Kanel-Belov and Kontsevich [41], in it, several conjectures concerning Ind-varieties of automorphisms of the corresponding algebras are formulated. The main Conjecture is called the Kontsevich Conjecture and is as follows.

Conjecture 1.2.5 (Kontsevich Conjecture, [41])**.** Let $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ be the field of complex numbers. The automorphism group $\operatorname{Aut}W_{n,\mathbb{C}}$ of the n-th Weyl algebra over $\mathbb{C}$ is isomorphic to the automorphism group $\operatorname{Aut}P_{n,\mathbb{C}}$ of the so-called n-th (commutative) Poisson algebra $P_{n,\mathbb{C}}$:

$$\operatorname{Aut}W_{n,\mathbb{C}}\simeq\operatorname{Aut}P_{n,\mathbb{C}}.$$

We have to note that the first solution of Kontsevich Conjecture 1.2.5 is given by Christopher Dodd in [76].

The algebra $P_{n,\mathbb{C}}$ is by definition the polynomial algebra

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, p_1 \ldots, p_n]$$

of $2n$ variables, equipped with the Poisson bracket, i.e., a bilinear operation $\{\ ,\ \}$, which is a Lie bracket satisfying the Leibniz rule and acting on generators of the algebra in the following way:

$$\{x_i, x_j\} = 0, \ \ \{p_i, p_j\} = 0, \ \ \{p_i, x_j\} = \delta_{ij}.$$

Endomorphisms of the algebra P_n are endomorphisms of the algebra of polynomials that preserve the Poisson bracket (which we sometimes call the Poisson structure). Elements of $\operatorname{Aut} P_{n,\mathbb{C}}$ are called polynomial symplectomorphisms. The choice of name is due to the existence of an (anti-) isomorphism between the group $\operatorname{Aut} P_{n,\mathbb{C}}$ and the group of polynomial symplectomorphisms of the affine space $\mathbb{A}^{2n}$.

The Kontsevich Conjecture is true for $n = 1$. The proof of this result is a direct description of automorphism groups $\operatorname{Aut} P_{1,\mathbb{C}}$ and $\operatorname{Aut} W_{1,\mathbb{C}}$, contained in the classical works of H.W. Jung [103], Van der Kulk [203], Dixmier [75] and Makar-Limanov [142] (see also [141]). Namely, consider the following transformation groups: the group G_1 is a semidirect product

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{C}^2,$$

whose elements are called special affine transformations, and the group G_2 by definition consists of the following "triangular" substitutions:

$$(x, p) \mapsto (\lambda x + F(p), \lambda^{-1} p), \ \ \lambda \in \mathbb{C}^\times, \ \ F \in \mathbb{C}[t].$$

Then the automorphism group of the algebra $P_{1,\mathbb{C}}$ [103] is isomorphic to the quotient group of the free product of the groups G_1 and G_2 by their intersection. Dixmier [75] and, later, Makar-Limanov [142] showed that if in the description above one replaces the commuting Poisson generators with their quantum (Weyl) analogues, one obtains a description of the group of automorphisms of the first Weyl algebra $W_{1,\mathbb{C}}$.

Remark 1.2.6. The theorems of Jung, van der Kulk, Dixmier and Makar-Limanov also mean that all automorphisms of the polynomial algebra of two variables and the first Weyl algebra W_1 are *tame* (we provide the definition of the concept of tame automorphism, in the Subsection 1.2.5). Also, Makar-Limanov [141] and A. Czerniakiewicz [66,67] proved that all automorphisms of the free algebra $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ are tame.

In view of these circumstances, the case of two variables is to be considered exceptional. However, the Jacobian Conjecture is a difficult open problem even in this case.

Recently, Kanel-Belov, together with Elishev and Yu, have suggested a proof of the general case of the Kontsevich Conjecture [115, 116]. An independent proof of a closely related result (based on a study of the properties of holonomic $\mathcal{D}$-modules) was proposed by C. Dodd [76].

In contrast to the Jacobian Conjecture, which is an extremely difficult problem, in the study of the Kontsevich Conjecture there are several possible approaches. First of all, in [41], Kanel-Belov and Kontsevich have formulated several generalizations of Conjecture 1.2.5. In [42] and [191], which is devoted to the proof of Theorem 1.2.4, the construction of homomorphisms

$$\phi : \operatorname{Aut} W_{n,\mathbb{C}} \to \operatorname{Aut} P_{n,\mathbb{C}}$$

and

$$\phi : \operatorname{End} W_{n,\mathbb{C}} \to \operatorname{End} P_{n,\mathbb{C}}$$

involved in the construction, from a counterexample to DC_n, of an irreversible endomorphism with a single Jacobian, has been presented. A straightforward strengthening of Conjecture 1.2.5 is the statement that the homomorphism ϕ realizes the isomorphism of the Kontsevich Conjecture. Also, namely, in Chapter 8 of [41], an approach to solve the problem of lifting of polynomial symplectomorphisms to automorphisms of the Weyl algebra (i.e., constructing a homomorphism inverse to ϕ) was discussed. Conjecture 5 of [41], along with Conjecture 6, which is a weaker form of Conjecture 1.2.5, make up the essential contents of the construction proposed in [41]. To solve the problem of lifting of symplectomorphisms in the sense of these conjectures, it is necessary to study the properties of $\mathcal{D}$-modules, (left) modules over the Weyl algebra. The work of Dodd [76] is based on this approach.

For an arbitrary commutative ring R one can define the Weyl algebra $W_{n,R}$ over R, by just replacing $\mathbb{C}$ by R in the definition.

The algebra $W_{n,R}$ considered as an R-module is free with basis

$$\hat{x}^\alpha := \hat{x}_1^{\alpha_1} \dots \hat{x}_{2n}^{\alpha_{2n}},\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{2n} .$$

We define an increasing filtration (the Bernstein filtration) on the algebra $W_{n,R}$ by

$$W_{n,R}^{\leqslant N} := \left\{ \sum_\alpha c_\alpha \hat{x}^\alpha \,|\, c_\alpha \in R,\ c_\alpha = 0 \text{ for } |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_{2n} > N \right\} .$$

This filtration induces a filtration on the automorphism group:

$$\operatorname{Aut}^{\leqslant N} W_{n,R} := \{ f \in \operatorname{Aut}(W_{n,R}) |\, f(\hat{x}_i), f^{-1}(\hat{x}_i) \in W_{n,R}^{\leqslant N}\ \ \forall i = 1, \dots, 2n\} .$$

The following functor on commutative rings:

$$R \mapsto \operatorname{Aut}^{\leqslant N}(W_{n,R}) ,$$

is representable by an affine scheme of finite type over $\mathbb{Z}$. We denote this scheme by

$$\underline{\operatorname{Aut}}^{\leqslant N}(W_n) .$$

Conjecture 1.2.5 says that groups of points $\underline{\operatorname{Aut}}(W_{n,\mathbb{C}})$ and $\underline{\operatorname{Aut}}(P_{n,\mathbb{C}})$ are isomorphic. We expect that the isomorphism should preserve the filtration by degrees, compatible with stabilization embeddings, and should be a constructible map for any given term of filtration, defined over $\mathbb{Q}$:

Conjecture 1.2.7 (see [41])**.** There exists a family $\phi_{n,N}$ of constructible one-to-one maps

$$\phi_{n,N} : \underline{\operatorname{Aut}}^{\leqslant N}(W_{n,\mathbb{Q}}) \to \underline{\operatorname{Aut}}^{\leqslant N}(P_{n,\mathbb{Q}})$$

compatible with the inclusions increasing indices N and n, and with the group structure.

Now let R be a finitely generated smooth commutative algebra over $\mathbb{Z}$, and $g \in \operatorname{Aut}(P_{n,R})$ be a symplectomorphism defined over R. Let us denote by $M_{g,p}$ any bimodule over $W_{n,R/pR}$ corresponding to the Morita autoequivalence (the interested reader is reffered to [41]), then we have the following conjecture:

Conjecture 1.2.8. For any finitely generated smooth commutative algebra R over $\mathbb{Z}$ and any $g \in \operatorname{Aut}(P_{n,R})$ for all sufficiently large p, the bimodule $M_{g,p}$ is a free rank one left $A_{n,R/pR}$-module.

In the rest of this subsection, we would like to mention some conjectures from [129] and for more information on these conjectures, the interested reader is referred to [129].

Let X be a smooth affine algebraic variety over field $\mathbb{F}$ of zero characteristic, $\dim X = n$. The ring $\mathcal{D}(X)$ of differential operators is $\mathbb{F}$-algebra of operators acting on $\mathcal{O}(X)$, generated by functions and derivations:

$$f \mapsto gf,\ f \mapsto \xi(f),\ \ g \in \mathcal{O}(X),\ \xi \in \Gamma(X, T_{X/\mathsf{Spec}\,\mathbb{F}}) .$$

Algebra $\mathcal{D}(X)$ carries the filtration $\mathcal{D}(X) = \cup_{k\geqslant 0}\mathcal{D}_{\leqslant k}(X)$ by the degree of operators, the associated graded algebra is canonically isomorphic to the algebra of functions on T^*X. In geometric terms, the grading comes from the dilation by $\mathbb{G}_m$ along the fibers of the cotangent bundle.

Let M be a finitely generated $\mathcal{D}(X)$-module, and choose a finite-dimensional subspace $V \subset M$ generating M. Then consider the filtration

$$M_{\leqslant k} := \mathcal{D}_{\leqslant k}(X) \cdot V \subset M,\ \ k \geqslant 0 .$$

The associated graded module op $gr(M)$ is a finitely generated $\mathcal{O}(T^*X)$-module.

Noetherianity of $\mathcal{D}(X)$ implies that M is the cokernel of a morphism of free finitely generated $\mathcal{D}(X)$-modules. Therefore, there exists a finitely generated ring $R \subset \mathbb{F}$ such that variety X, embedding i and module M have models X_R, i_R, M_R over $\mathsf{Spec}\,R$.

A finitely generated module M is called holonomic if and only if the dimension of its support is exactly n.

Conjecture 1.2.9. For holonomic M the support $\mathsf{supp}_{p,v} M_R$ is Lagrangian for sufficiently large p and any v.

The conjecture 1.2.9, was solved by Thomas Bitoun in his PhD thesis in 2010 [54] and in 2013 Michel Van den Bergh [89] gave an alternative proof of this conjecture.

We expect that in the case $\dim X > 1$ also there exists a notion of a logarithmic family of effective Lagrangian cycles in T^*X, and the arithmetic support should always belong to such a family. In the special case when a Lagrangian cycle is a *smooth* closed Lagrangian variety $L \subset T^*X$ (taken with multiplicity one) we expect a more clearer picture of what is the logarithmic family:

Definition 1.2.10. A smooth logarithmic family of smooth Lagrangian subvarieties in T^*X is a pair $(S, \mathcal{L})$ where S is a smooth variety over $\mathbb{F}$ and $\mathcal{L} \subset T^*X \times S$ is a smooth closed submanifold such that its projection to S is smooth, all fibers $\mathcal{L}_s$, $s \in S$ are Lagrangian, and the following property holds. For any $s \in S$ the natural map

$$T_s S \to \Gamma(\mathcal{L}_s, (T_X)_{|\mathcal{L}_s}/T_{\mathcal{L}_s}) = \Gamma(\mathcal{L}_s, T^*_{\mathcal{L}_s})$$

identifies $T_s S$ with the space of 1-forms on $\mathcal{L}_s$ with logarithmic singularities[1].

Conjecture 1.2.11. For a smooth closed Lagrangian $L \subset T^*X$ there exists a smooth logarithmic family $(S, \mathcal{L})$ with base point $s_0 \in S$ such that $\mathcal{L}_{s_0} = L$. Also, any two such families coincide with each other in the vicinity of s_0.

We also have the following conjectures. For more information on these conjectures we refer to [129]:

Conjecture 1.2.12. For any smooth closed connected Lagrangian subvariety L in T^*X over $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ such that $H_1(L(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$ there exists a unique holonomic $\mathcal{D}_X$-module $M = M_L$ with the arithmetic support equal to L taken with multiplicity 1. Moreover, $\operatorname{op} Ext^1(M, M) = 0$.

Conjecture 1.2.13. For a differential operator $P \in \mathcal{D}(X)$, the support at prime p of $\mathcal{D}(X)/\mathcal{D}(X) \cdot (P + \lambda \cdot 1)$ is divisible by p^{n-1} for generic constant λ if and only if P belongs to a quantum integrable system, i.e., P belongs to a finitely generated commutative $\mathbb{F}$-subalgebra of $\mathcal{D}(X)$ of Krull dimension $n = \dim X$.

Conjecture 1.2.14. There exists a homomorphism from the group $BirSympl_{n,\mathbb{F}}$ of birational symplectomorphisms the algebraic torus $\mathbb{G}^{2n}_{m,\mathbb{F}}$ endowed with the standard symplectic form $\sum_{i,j\leqslant 2n} \omega_{ij}(x_i^{-1}dx_i) \wedge (x_j^{-1}dx_j)$, to the group of outer automorphisms of the skew field of fractions of the quantum torus. Also, the semiclassical limit as $q \to 1$ exists and gives the identity map from the group of birational symplectomorphisms the group of birational symplectomorphisms the algebraic torus to itself.

In a very recent paper, Edward Witten and Davide Gaiotto re-examine quantization via branes with the goal of understanding its relation to geometric quantization [138].

1.2.5. Tame automorphisms.

An automorphism $\varphi \in \operatorname{Aut} \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_N]$ is said to be *elementary* if it has the form

$$\varphi = (x_1, \ldots,\ x_{k-1},\ ax_k + f(x_1, \ldots, x_{k-1},\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_N),\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_N)$$

with $a \in \mathbb{F}^\times$. Observe that linear invertible changes of variables – that is, transformations of the form

$$(x_1,\ \ldots,\ x_N) \mapsto (x_1,\ \ldots,\ x_N)A, \quad A \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{F})$$

are realized as compositions of elementary automorphisms.

The subgroup of $\operatorname{Aut} \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_N]$ generated by all elementary automorphisms is the group $\operatorname{TAut} \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_N]$ of so-called *tame automorphisms*.

[1] All such forms are automatically closed.

Let $P_n(\mathbb{F}) = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n]$ be the polynomial algebra in $2n$ variables with Poisson structure. It is clear that for an elementary automorphism

$$\varphi \in \operatorname{Aut} \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n]$$

to be a symplectomorphism, it must either be a linear symplectic change of variables—that is, a transformation of the form

$$(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)A$$

with $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F})$ a symplectic matrix, or an elementary transformation of one of two following types:

$$(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + f(p_1, \ldots, p_n), x_{k+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$$

or

$$(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k + g(x_1, \ldots, x_n), p_{k+1}, \ldots, p_n).$$

Note that in both cases we do not include translations of the affine space into our consideration, so we may safely assume the polynomials f and g to be at least of height one.

The subgroup of $\operatorname{Aut} P_n(\mathbb{F})$ generated by all such automorphisms is the group $\operatorname{TAut} P_n(\mathbb{F})$ of *tame symplectomorphisms*. One similarly defines the notion of tameness for the Weyl algebra $W_n(\mathbb{F})$, with tame elementary automorphisms having the exact same form as for $P_n(\mathbb{F})$.

The automorphisms which are not tame are called *wild*. It is unknown at the time of writing whether the algebras W_n and P_n have any wild automorphisms in characteristic zero for $n > 1$; however, for $n = 1$ all automorphisms are known to be tame [103, 141, 142, 203]. On the other hand, the celebrated example of Nagata

$$(x + (x^2 - yz)x,\ y + 2(x^2 - yz)x + (x^2 - yz)^2 z,\ z)$$

provides a wild automorphism of the polynomial algebra $\mathbb{F}[x, y, z]$.

It is known, due to Kanel-Belov and Kontsevich [41, 42], that for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ the groups

$$\operatorname{TAut} W_n(\mathbb{C}) \quad \text{and} \quad \operatorname{TAut} P_n(\mathbb{C})$$

are isomorphic. The homomorphism between the tame subgroups is obtained by means of non-standard analysis and involves certain non-constructible entities, such as free ultrafilters and infinite prime numbers. Recent effort [40, 115] has been directed to proving the homomorphism's independence of such auxiliary objects, with limited success.

1.2.6. Approximation by tame automorphisms.

Tsuchimoto [190, 191], and independently Kanel-Belov and Kontsevich [42], found a deep connection between the Jacobian Conjecture and a celebrated Conjecture of Dixmier [75] on endomorphisms of the Weyl algebra, which is stated as Conjecture 1.2.3.

The correspondence between the two open problems, in the case of algebraically closed $\mathbb{F}$, is based on the existence of a composition-preserving map

$$\operatorname{End} W_n(\mathbb{F}) \to \operatorname{End} \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_{2n}]$$

which is a homomorphism for the corresponding automorphism groups. Furthermore, the mappings that belong to the image of this homomorphism preserve the canonical symplectic form on $\mathbb{A}^{2n}_{\mathbb{F}}$. Accordingly, Kontsevich and Kanel-Belov [41] formulated several conjectures on the correspondence between automorphisms of the Weyl algebra W_n and the Poisson algebra P_n (which is the polynomial algebra $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_{2n}]$ endowed with the canonical Poisson bracket) in characteristic zero. In particular, there is

Conjecture 1.2.15. The automorphism groups of the n-th Weyl algebra and the polynomial algebra in $2n$ variables with Poisson structure over the rational numbers are isomorphic:

$$\operatorname{Aut} W_n(\mathbb{Q}) \simeq \operatorname{Aut} P_n(\mathbb{Q}).$$

Relatively little is known about the case $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, and the proof techniques developed in [41] rely heavily on model-theoretic objects such as infinite prime numbers (in the sense of non-standard analysis). That in turn requires the base field $\mathbb{F}$ to be of characteristic zero and algebraically closed (effectively $\mathbb{C}$ by the Lefschetz principle). However, even the seemingly easier analogue of the above Conjecture, the case $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, is known (and positive) only for $n = 1$.

In the case $n = 1$, the affirmative answer to the Kontsevich Conjecture, as well as positivity of several isomorphism statements for algebras of a similar nature, relies on the fact that all automorphisms of the algebras in question are tame. Groups of tame automorphisms are rather interesting objects. Anick [8] has proved that the group of tame automorphisms of $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_N]$ is dense (in power series topology) in the subspace of all endomorphisms with non-zero constant Jacobian. This fundamental result enables one to reformulate the Jacobian Conjecture as a statement on invertibility of limits of tame automorphism sequences.

Another interesting problem is to ask whether all automorphisms of a given algebra are tame [**?**, 66, 67, 103, 203]. For instance, this is the case [141, 145] for $\mathbb{F}[x, y]$, the free associative algebra $\mathbb{F}\langle x, y\rangle$ and the free Poisson algebra $\mathbb{F}\{x, y\}$. It is also the case for free Lie algebras (a result of Cohn). On the other hand, tameness is no longer the case for $\mathbb{F}[x, y, z]$ (the wild automorphism example is provided by the well-known Nagata automorphism, cf. [181]).

In 1983, Anick's approximation theorem was established for polynomial automorphisms. We obtain the approximation theorems for polynomial symplectomorphisms and Weyl algebra automorphisms. We focus on *the problem of lifting of symplectomorphisms*:

> Can an arbitrary symplectomorphism in dimension $2n$ be lifted to an automorphism of the n-th Weyl algebra in characteristic zero?

The lifting problem is the milestone in the Kontsevich Conjecture. The use of tame approximation is advantageous due to the fact that tame symplectomorphisms correspond to Weyl algebra automorphisms: in fact [41], the tame automorphism subgroups are isomorphic when $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

The problems formulated above, as well as other statements of similar flavor, outline behavior of algebra-geometric objects when subject to quantization. Conversely, quantization (and anti-quantization in the sense of Tsuchimoto) provides a new perspective for the study of various properties of classical objects. Many of such properties have a distinctly K-theoretic nature. The lifting problem is a subject of a thorough study of V.A. Artamonov [9–12], one of the main results of which is the proof of an analogue of the Serre-Quillen-Suslin theorem for metabelian algebras. The possibility of lifting of (commutative) polynomial automorphisms to automorphisms of metabelian algebra is a well-known result of Umirbaev, cf. [197]. The metabelian lifting property was instrumental in Umirbaev's solution of Anick's Conjecture (which says that a specific automorphism of the free algebra $\mathbb{F}\langle x, y, z\rangle$, $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ is wild). In addition, there is also a series of well-known papers [181–183].

In this thesis, we establish the approximation property for polynomial symplectomorphisms and comment on the lifting problem of polynomial symplectomorphisms and Weyl algebra automorphisms. In particular, the main results discussed here are as follows.

Theorem 1.2.16. *Let $\varphi = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N))$ be an automorphism of the polynomial algebra $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_N]$ over a field $\mathbb{F}$ of characteristic zero, such that its Jacobian*

$$\mathrm{J}(\varphi) = \det\left[\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j}\right]$$

is equal to 1. *Then there exists a sequence $\{\psi_k\} \subset \operatorname{TAut}\mathbb{F}[x_1, \dots, x_N]$ of tame automorphisms converging to φ in formal power series topology.*

Anick [8] proved this tame approximation theorem for polynomial automorphisms.

Theorem 1.2.17. *Let $\sigma = (\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n), \sigma(p_1), \ldots, \sigma(p_n))$ be a symplectomorphism of $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n]$ with unit Jacobian. Then there exists a sequence $\{\tau_k\} \subset \operatorname{TAut} P_n(\mathbb{F})$ of tame symplectomorphisms converging to σ in formal power series topology.*

Theorem 1.2.18. *Let $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ and let $\sigma : P_n(\mathbb{C}) \to P_n(\mathbb{C})$ be a symplectomorphism over complex numbers. Then there exists a sequence*

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k, \ldots$$

of tame automorphisms of the n-th Weyl algebra $W_n(\mathbb{C})$, such that their images σ_k in $\operatorname{Aut} P_n(\mathbb{C})$ converge to σ.

We are mainly interested in the last theorem. As we shall see, sequences of tame symplectomorphisms lifted to automorphisms of Weyl algebra (either by means of the isomorphism of [41], or explicitly through deformation quantization $P_n(\mathbb{C}) \to P_n(\mathbb{C})[[\hbar]]$) are such that their limits may be thought of as power series in Weyl algebra generators. If we could establish that those power series were actually polynomials, then the Dixmier Conjecture would imply the Kontsevich Conjecture (with $\mathbb{Q}$ replaced by $\mathbb{C}$). Conversely, approximation by tame automorphisms provides a possible means to attack the Dixmier Conjecture (and, correspondingly, the Jacobian Conjecture).

1.2.7. Holonomic $\mathcal{D}$-modules and Lagrangian submanifolds. The following general Conjecture holds ([41], see also [129]).

Conjecture 1.2.19. Let X be a smooth variety. There is a one-to-one correspondence between (irreducible) holonomic $\mathcal{D}(X)$-modules and Lagrangian subvarieties T^*X of the corresponding dimension.

Kontsevich [129] introduces the general definition of the holonomic $\mathcal{D}$-module as follows. Let X be a smooth affine algebraic variety of dimension n over the field $\mathbb{K}$. Consider the $\mathbb{K}$-algebra $\mathcal{D}(X)$ of differential operators, the algebra of operators, acting on the ring $\mathcal{O}(X)$ generated by functions and $\mathbb{K}$-derivations:

$$f \mapsto gf, \quad f \mapsto \xi(f), \quad g \in \mathcal{O}(X), \quad \xi \in \Gamma(X, T_{X/\operatorname{Spec}\mathbb{K}}).$$

The natural filtration is defined on the algebra

$$\mathcal{D}(X) = \cup_{k \geqslant 0} \mathcal{D}_{\leqslant k}(X),$$

with respect to the order of operators, the associated graded algebra is naturally isomorphic to the algebra of functions on the cotangent bundle T^*X. Let M be a finitely generated module over $\mathcal{D}(X)$, and V be a finite-dimensional subspace of elements generating M. It induces a filtration

$$M_{\leqslant k} = \mathcal{D}_{\leqslant k}(X)V \subset M, \quad k \geqslant 0,$$

such that the associated graded module $\operatorname{gr}(M)$ is finitely generated over $\mathcal{O}(T^*X)$. It is known (this result belongs to O. Gabber, see [129]) that its support

$$\operatorname{supp}(\operatorname{gr}(M)) \subset T^*X$$

is a coisotropic variety. In particular, the dimension of any of its irreducible components is not less than n. The support is independent of the choice of the subspace V (and is denoted in the original article [129] as $\operatorname{supp}(M)$).

A finitely generated module M is said to be *holonomic* if, by definition, the dimension of its support is n.

Conjecture 1.2.19 (which can also be called the Kontsevich Conjecture) generalizes Conjecture 1.2.5, as well as Conjectures 5 and 6 of [41] in the context of the lifting of symplectomorphisms. Namely, with any symplectomorphism one may naturally associate a Lagrangian subvariety (namely, its graph). On the other hand, holonomic $\mathcal{D}$-modules correspond to autoequivalences of Weyl algebra, from which in principle (taking into account Conjecture 5 of [41]) one can get a correspondence with automorphisms.

In this connection, the necessity to study the holonomic $\mathcal{D}$-modules is a natural consequence. The problems of lifting of polynomial symplectomorphisms in the case of low dimensions, namely, for $n = 1$, which corresponds to the well-known case of the Kontsevich Conjecture, has become the prime candidate for testing these new deep insights. Some progress in this direction has been achieved in [40] by Kanel-Belov and Elishev. The general case of arbitrary dimension was investigated by Kontsevich in [129] (see also [54]). Significant results on Conjecture 1.2.19 were obtained (according to our understanding) by Dodd [76].

Namely, Dodd devised the proof of the following result.

Theorem 1.2.20 (C. Dodd, [76]). *Let X be a smooth variety over $\mathbb{C}$, $L \subset T^*X$ be a Lagrangian subvariety of the cotangent space. Assume that*:

(1) *the projection $\pi : L \to X$ is a dominant mapping*;
(2) *the first singular homology group $H_1^{sing}(L, \mathbb{Z})$ is trivial;*
(3) *there exists a smooth projective compactification $\bar{L}$ of the variety L with trivial* $(0, 2)$*-Hodge cohomology.*

Then there exists a unique irreducible holonomic $\mathcal{D}(X)$-module M with constant arithmetic support[1]*, equal to L, with multiplicity* 1.

This theorem partially solves the problem of finding sufficient conditions for the correspondence between holonomic modules and Lagrangian varieties as formulated in Conjecture 1.2.19. Dodd also notes that in the case when $X = \mathbb{A}^n$ is an affine space, condition 2 of Theorem 1.2.20 can be dropped. In this connection, there is the following corollary:

Corollary 1.2.21 (C. Dodd, [76]). *Let $L \subset T^*\mathbb{A}^m$ be a smooth Lagrangian subvariety satisfying conditions 2 and 3 of Theorem 1.2.20. Then there exists a unique irreducible holonomic $\mathcal{D}(\mathbb{A}^m)$-module M whose arithmetic support is L, with multiplicity* 1.

This result is closely related to the construction studied in [40].

As Dodd notes, Theorem 1.2.20 and Corollary 1.2.21 allow us to give a description of the Picard group $\mathrm{Pic}(W_{n,\mathbb{C}})$ of the Weyl algebra. Recall that the Picard group of an associative algebra is defined as a group of classes (modulo isomorphism) of invertible bimodules over a given algebra, with a group operation given by the tensor product of modules.

Consider polynomial symplectomorphisms of the variety $T^*\mathbb{A}^m$. It is easy to show that the graph of any symplectomorphism φ is a Lagrangian subvariety of L^φ in $T^*\mathbb{A}^{2m}$, isomorphic to $\mathbb{A}^{2m}$ and, therefore, satisfies cohomological conditions of Theorem 1.2.20. Applying Corollary 1.2.21, we obtain (uniquely identified) $\mathcal{D}(\mathbb{A}^{2m}) \simeq \mathcal{D}(\mathbb{A}^m) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{A}^m)^{op}$-module M^φ corresponding to L^φ. One can check [76] that the inverse symplectomorphism φ^{-1} in such a construction corresponds to inverse bimodule.

From these considerations, Dodd obtains the following result.

Theorem 1.2.22 (C. Dodd, [76]). *There is an isomorphism of groups (over $\mathbb{C}$)*

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{D}(\mathbb{A}^m)) \simeq \mathrm{Sympl}(T^*\mathbb{A}^m),$$

where $\mathrm{Sympl}(T^*\mathbb{A}^m)$ *denotes the group of polynomial symplectomorphisms (this group is a geometric analogue of the group* $\mathrm{Aut}\, P_{m,\mathbb{C}}$*).*

In the case $m = 1$, it is known (Dixmier, [75]) that $\mathrm{Pic}(\mathcal{D}(\mathbb{A}^1)) = \mathrm{Aut}(\mathcal{D}(\mathbb{A}^1))$,and the algebra $\mathcal{D}(\mathbb{A}^1)$ is isomorphic to the first Weyl algebra $W_{1,\mathbb{C}}$. This means that we are in the situation of Conjecture 1.2.5 for $m = 1$.

1.2.8. Tame automorphisms and the Quantization Conjectures. Dodd's constructions are deep in content and, apparently, prove the Kontsevich Conjecture on the correspondence between Lagrangian varieties and holonomic modules (more precisely, its essential part). On the other hand, starting from Theorem 1.2.22 we cannot immediately arrive at the general case of Conjecture 1.2.5.

[1]For the definition of arithmetic support, see [129].

The proof of Conjecture 1 of [41] requires a solution to the lifting problem of symplectomorphisms to automorphisms of the corresponding Weyl algebra.

One of the main results of [41] was the proof of the following homomorphism properties

$$\phi : \operatorname{Aut} W_{n,\mathbb{C}} \to \operatorname{Aut} P_{n,\mathbb{C}}$$

constructed in [41] and [191]. First, let φ be an automorphism of the polynomial algebra $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. We call φ *elementary* if it has the form

$$\varphi = (x_1, \dots,\ x_{k-1},\ ax_k + f(x_1, \dots, x_{k-1},\ x_{k+1},\ \dots,\ x_n),\ x_{k+1},\ \dots,\ x_n).$$

In particular, automorphisms given by linear substitutions of generators are elementary.

Tame automorphisms of the algebra $P_{n,\mathbb{F}}$ are, by definition, compositions of those tame elementary automorphisms which preserve the Poisson bracket. Tame automorphisms of the Weyl algebra are defined $W_{n,\mathbb{F}}$ similarly.

The following theorem is proved in [41].

Theorem 1.2.23 (A. Kanel-Belov and M.L. Kontsevich, [41])**.** *The homomorphism*

$$\phi : \operatorname{Aut} W_{n,\mathbb{C}} \to \operatorname{Aut} P_{n,\mathbb{C}}$$

restricts to the isomorphism

$$\phi_{|\,\mathrm{TAut}} : \mathrm{TAut}\, W_{n,\mathbb{C}} \to \mathrm{TAut}\, P_{n,\mathbb{C}}$$

between subgroups of tame automorphisms.

In particular, due to the tame nature of automorphism groups of Weyl and Poisson algebras for $n = 1$, the homomorphism ϕ gives an isomorphism of the Kontsevich Conjecture between $\operatorname{Aut} W_{1,\mathbb{C}}$ and $\operatorname{Aut} P_{1,\mathbb{C}}$.

It is not known whether all automorphisms of the Poisson and Weyl algebras are tame for $n > 1$, or even stably tame (an automorphism is called *stably tame* if it becomes tame after adding dummy variables and extending the action on them by means of the identity automorphism). For the algebra of polynomials in three variables, the Nagata automorphism

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2(xz + y^2)y - (xz + y^2)^2 z, y + (xz + y^2)z, z)$$

is wild (the famous result due to I.P. Shestakov and Umirbaev [181]).

Nevertheless, tame automorphisms turn out to play a significant role in the context of the Kontsevich Conjecture and the Jacobian Conjecture, due to the following reason. Anick [8] showed that the set of tame automorphisms of the algebra of polynomials $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ $(n \geqslant 2)$ is dense in the topology of formal power series in the space $\mathfrak{J}$ of polynomial endomorphisms with nonzero constant Jacobian. In particular, for any automorphism of a polynomial algebra there exists a sequence of tame automorphisms converging to it in this topology; in other words, Anick's theorem implies the existence of *approximations* of automorphisms, or *approximations* by tame automorphisms (and in general, endomorphisms with nonzero constant Jacobian). In view of Anick's theorem, the Jacobian Conjecture can be formulated as a problem of invertibility of limits of sequences of tame automorphisms (this is discussed in the conclusion of [8]). This formulation of the Jacobian Conjecture can be directly generalized to the case of a field of arbitrary characteristic, see more below as well as in [123].

Anick's results, together with Theorem 1.2.23, suggest the idea of solving the lifting problem of polynomial symplectomorphisms to automorphisms of the Weyl algebra (an alternative construction to that proposed in [41]). Namely, if there is a symplectic analogue of Anick's theorem, that is, if there is an approximation of polynomial symplectomorphisms by tame symplectomorphisms, then, taking a sequence of tame symplectomorphisms converging to a given point, we can take the sequence of their pre-images under the isomorphism $\phi_{|\,\mathrm{TAut}}$ and try to prove that its limit exists and is an automorphism of the Weyl algebra. The symplectic analogue of Anick's theorem was proved in [117]. The application of approximation theory to the lifting problem constitutes the main idea of the proof of Conjecture 1.2.5 in [116].

However, the direct application of the main result of [117] to the solution of the lifting problem does not achieve the desired result, since the homomorphism ϕ does not preserve the topology of formal power series (due to commutation relations in the Weyl algebra). In this connection, the naive approximation approach needs some modification. It turns out that such a modification is possible (see [116]). The nature of this modification is significant and is connected with the geometric properties of Ind-schemes of automorphisms of the corresponding algebras. *Therefore, the study of the geometry of* Ind-*schemes of automorphisms is justified in the framework of the Kontsevich Conjecture.*

1.2.9. Quantization of classical algebras. As already noted, the approach to the Jacobian Conjecture, using techniques from the theory of deformation quantization, namely, the approach based on stable equivalence between the Jacobian Conjecture and the Dixmier Conjecture as well as, to a somewhat lesser extent, the Kontsevich Conjecture, is currently one of the more promising approaches to finding a possible solution to the Jacobian Conjecture. However, as in questions of the geometric theory of Ind-schemes and infinite-dimensional algebraic groups, the issues arising in connection with the application of quantization methods, due to their nontriviality and depth, is a direction whose value may well be comparable with the value of a possible solution to the original problem.

Analogues of JC and DC for algebras of quantum polynomials are not obvious and often do not admit a naive transfer of formulations (for example, E. Backelin [19] wrote about the q-quantum version of the Dixmier Conjecture). On the other hand, the well-known theorem of Umirbaev [197], showing the validity of an analogue of the Jacobian Conjecture for free metabelian algebras, may be considered as an argument in favor of the validity of the Jacobian Conjecture.

Significant development of algebra and non-commutative geometry of quantum polynomials has been achieved by Artamonov [9–12, 15]. In particular, he proved [12] the quantum-algebra analogue of the Serre Conjecture (Quillen–Suslin theorem) – the result which is extremely non-trivial even in the commutative case.

In connection with the Jacobian Conjecture, we mention the works of Dicks [73], Dicks and Lewin [74] as well as Yagzhev [217–220]. In a sense, they can be interpreted as works consistent with viewing the Jacobian problem as a problem related to quantization. Regarding the practical benefits of studying relationships induced by quantization-type correspondences, there are known examples of applications of the elements of the quantization procedure to some (previously proven by other means) problems of general algebra. An example [120, 233] is a new proof of Bergman's centralizer theorem **??** of the free associative algebra, based on the deformation quantization procedure, which we discuss in this work.

1.3. Torus Actions on Free Associative Algebras and the Białynicki-Birula Theorem

In the proof of the results concerning the geometry of Ind-schemes automorphisms, we use the famous A. Białynicki-Birula theorem [51, 52] on the linearizability of regular actions of a maximal torus on an affine space merits consists in the following.

Let $\mathbb{K}$ be the base field and let $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K}\backslash\{0\}$ be the multiplicative group of the field, considered as an algebraic $\mathbb{K}$-group.

The n-dimensional algebraic $\mathbb{K}$-torus is the group $\mathbb{T}_n \simeq (\mathbb{K}^\times)^n$ (with obviously certain multiplication).

Definition 1.3.1. An n-dimensional algebraic $\mathbb{K}$-torus is the group $\mathbb{T}_n \simeq (\mathbb{K}^\times)^n$ (with obvious multiplication).

Denote by $\mathbb{A}^n$ the affine space of dimension n over $\mathbb{K}$.

Definition 1.3.2. A (left, geometric) torus action is a morphism

$$\sigma : \mathbb{T}_n \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n.$$

that fulfills the usual axioms (identity and compatibility):

$$\sigma(1,x)=x,\ \ \sigma(t_1,\sigma(t_2,x))=\sigma(t_1t_2,x).$$

The action σ is *effective* if for every $t\neq 1$ there is an element $x\in\mathbb{A}^n$ such that $\sigma(t,x)\neq x$.

In [51], Białynicki-Birula proved the following two theorems, for $\mathbb{K}$ algebraically closed.

Theorem 1.3.3. *Any regular action of $\mathbb{T}_n$ on $\mathbb{A}^n$ has a fixed point.*

Theorem 1.3.4. *Any effective and regular action of $\mathbb{T}_n$ on $\mathbb{A}^n$ is a representation in some coordinate system.*

The notion of regular action means regularity in the sense of algebraic geometry (preservation of regular functions; Białynicki-Birula also considered birational actions in [51]). The last theorem states that any effective regular action of the maximal torus on an affine space is conjugate to a linear action (representation); in other words, such an action *admits linearization.*

An algebraic group action on $\mathbb{A}^n$ is the same as the corresponding action by automorphisms on the algebra $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ of coordinate functions. In other words, it is a group homomorphism

$$\sigma:\mathbb{T}_n\to\operatorname{Aut}\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n].$$

An action is effective if and only if $\operatorname{Ker}\sigma=\{1\}$.

The polynomial algebra is a quotient of the free associative algebra

$$F_n=\mathbb{K}\langle z_1,\dots,z_n\rangle$$

by the commutator ideal I (it is the two-sided ideal generated by all elements of the form $fg-gf$). The definition of torus action on the free algebra is thus purely algebraic.

The following result has been established in [87, 88].

Theorem 1.3.5. *Suppose given an action σ of the algebraic n-torus $\mathbb{T}_n$ on the free algebra F_n. If σ is effective, then it is linearizable.*

The theory of algebraic group actions on varieties is a substantial part of the study of Ind-varieties. Among the significant works on this subject, the reader is well advised to consult the papers of T. Kambayashi and P. Russell [112], M. Koras and P. Russell [130], T. Asanuma [18], G. Schwartz [176] and H. Bass [20].

The group action linearity problem asks, generally speaking, whether any action of a given algebraic group on an affine space is linear in some suitable coordinate system (or, in other words, whether for any such action there exists an automorphism of the affine space such that it conjugates the action to a representation). This subject owes its existence largely to the classical work of A. Białynicki-Birula [51], who considered regular (i.e. by polynomial mappings) actions of the n-dimensional torus on the affine space $\mathbb{A}^n$ (over algebraically closed ground field) and proved that any faithful action is conjugate to a representation (or, as we sometimes say, linearizable). The result of Białynicki-Birula had motivated the study of various analogous instances, such as those that deal with actions of tori of dimension smaller than that of the affine space, or, alternatively, linearity conjectures that arise when the torus is replaced by a different sort of algebraic group. In particular, Białynicki-Birula himself [52] had proved that any effective action of $(n-1)$-dimensional torus on $\mathbb{A}^n$ is linearizable, and for a while it was believed [112] that the same was true for arbitrary torus and affine space dimensions. Eventually, however, the negation of this generalized linearity conjecture was established, with counter-examples due to Asanuma [18].

More recently, the linearity of effective torus actions has become a stepping stone in the study of geometry of automorphism groups. In the paper [123], the following result was obtained.

Theorem 1.3.6. *Let $\mathbb{K}$ be algebraically closed, and let $n\geqslant 3$. Then any* Ind-*variety automorphism Φ of the* Ind-*group* $\operatorname{Aut}(K[x_1,\dots,x_n])$ *is inner.*

The notions of Ind-variety (or Ind-group in this context) and Ind-variety morphism were introduced by Shafarevich [177]: an Ind-variety is the direct limit of a system whose morphisms are closed embeddings. Automorphism groups of algebras with polynomial identities, such as the (commutative) polynomial algebra and the free associative algebra, are archetypal examples; the corresponding direct systems of varieties consist of sets $\mathrm{Aut}^{\leqslant N}$ of automorphisms of total degree less or equal to a fixed number, with the degree induced by the grading. The morphisms are inclusion maps which are obviously closed embeddings.

Theorem 1.3.6 is proved by means of tame approximation (stemming from the main result of [8]), with the following Proposition, originally due to E. Rips, constituting one of the key results.

Proposition 1.3.7. *Let $\mathbb{K}$ be algebraically closed and $n \geqslant 3$ as above, and suppose that Φ preserves the standard maximal torus action on the commutative polynomial algebra*[1]*. Then Φ preserves all tame automorphisms.*

The proof relies on the Białynicki-Birula theorem on the maximal torus action. In a similar fashion, the paper [123] examines the Ind-group $\mathrm{Aut}\,\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ of automorphisms of the free associative algebra $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ in n variables, and establishes results completely analogous to Theorem 1.3.6 and Proposition 1.3.7. [2] In accordance with that, the free associative analogue of the Białynicki-Birula theorem was required.

Such an analogue is indeed valid, and we have established it in our notes [87, 88] on the subject. We will provide the proof of this result in the sequel.

Given the existence of a free algebra version of the Białynicki-Birula theorem, one may inquire whether various other instances of the linearity problem (such as the Białynicki-Birula theorem on the action of the $(n-1)$-dimensional torus on $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$) can be studied. As it turns out, direct adaptation of proof techniques from the commutative realm is sometimes possible. There are certain limitations, however. For instance, Białynicki-Birula's proof [52] of linearity of $(n-1)$-dimensional torus actions uses commutativity in an essential way. Nevertheless, a neat workaround of that hurdle can be performed when $n = 2$, as we show in this note. Also, a special class of torus actions (positive-root actions) turns out to be linearizable. Finally, some of the proof techniques developed by Asanuma [18] admit free associative analogues; this will allow us to prove the existence of non-linearizable torus actions in positive characteristic, in complete analogy with Asanuma's work.

REFERENCES

1. *Abdesselam A.* The Jacobian conjecture as a problem of perturbative quantum field theory// Ann. H. Poincaré. — 2003. — *4*, № 2. — P. 199–215.
2. *Abhyankar S., Moh T.* Embedding of the line in the plane// J. Reine Angew. Math. — 1975. — *276*. — P. 148–166.
3. *Amitsur S. A.* Algebras over infinite fields// Proc. Am. Math. Soc. — 1956. — *7*. — P. 35–48.
4. *Amitsur S. A.* A general theory of radicals, III. Applications// Am. J. Math. — 1954. — *75*. — P. 126–136.
5. *Alev J., Le Bruyn L.* Automorphisms of generic 2 by 2 matrices// in: Perspectives in Ring Theory. — Springer, 1988. — P. 69–83.
6. *Amitsur A. S., Levitzki J.* Minimal identities for algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1950. — *1*. — P. 449–463.
7. *Amitsur A. S., Levitzki J.* Remarks on minimal identities for algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1951. — *2*. — P. 320–327.
8. *Anick D. J.* Limits of tame automorphisms of $k[x_1, \ldots, x_n]$// J. Algebra. — 1983. — *82*, № 2. — P. 459–468.
9. *Artamonov V. A.* Projective metabelian groups and Lie algebras// Izv. Math. — 1978. — *12*, № 2. — P. 213–223.
10. *Artamonov V. A.* Projective modules over universal enveloping algebras// Math. USSR Izv. — 1985. — *25*, № 3. — P. 429.

[1] That is, the action of the n-dimensional torus on the polynomial algebra $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, which is dual to the action on the affine space.

[2] The free associative case was amenable to the above approach when $n > 3$.

11. *Artamonov V. A.* Nilpotence, projectivity, decomposability// Sib. Math. J. — 1991. — *32*, № 6. — P. 901–909.
12. *Artamonov V. A.* The quantum Serre problem// Russ. Math. Surv. — 1998. — *53*, № 4. — P. 3–77.
13. *Artamonov V. A.* Automorphisms and derivations of quantum polynomials// in: Recent Advances in Lie Theory (*Bajo I., Sanmartin E.*, eds.). — Heldermann Verlag, 2002. — P. 109–120.
14. *Artamonov V. A.* Generalized derivations of quantum plane// J. Math. Sci. — 2005. — *131*, № 5. — P. 5904–5918.
15. *Artamonov V. A. Quantum polynomials* in: Advances in Algebra and Combinatorics. — Singapore: World Scientific, 2008. — P. 19–34.
16. *Artin M.* Noncommutative Rings. — Preprint, 1999.
17. *Arzhantsev I., Kuyumzhiyan K., Zaidenberg M.* Infinite transitivity, finite generation, and Demazure roots// Adv. Math. — 2019. — *351*. — P. 1–32.
18. *Asanuma T.* Non-linearizable algebraic k^*-actions on affine spaces. — Preprint, 1996.
19. *Backelin E.* Endomorphisms of quantized Weyl algebras// Lett. Math. Phys. — 2011. — *97*, № 3. — P. 317–338.
20. *Bass H.* A non-triangular action of G_a on A^3// J. Pure Appl. Algebra.. — *33*, № 1. — P. 1984.
21. *Bass H., Connell E. H., Wright D.* The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — *7*, № 2. — P. 287–330.
22. *Bavula V. V.* A question of Rentschler and the Dixmier problem// Ann. Math. (2). — 2001. — *154*, № 3. — P. 683–702.
23. *Bavula V. V.* Generalized Weyl algebras and diskew polynomial rings/ `arXiv: 1612.08941 [math.RA]`.
24. *Bavula V. V.* The group of automorphisms of the Lie algebra of derivations of a polynomial algebra// J. Alg. Appl. — 2017. — *16*, № 5. — 1750088.
25. *Bavula V. V.* The groups of automorphisms of the Lie algebras of formally analytic vector fields with constant divergence// C. R. Math. — 2014. — *352*, № 2. — P. 85–88.
26. *Bavula V. V.* The inversion formulae for automorphisms of Weyl algebras and polynomial algebras// J. Pure Appl. Algebra. — 2007. — *210*. — P. 147–159.
27. *Bavula V. V.* The inversion formulae for automorphisms of polynomial algebras and rings of differential operators in prime characteristic// J. Pure Appl. Algebra. — 2008. — *212*, № 10. — P. 2320–2337.
28. *Bavula V. V.* An analogue of the conjecture of Dixmier is true for the algebra of polynomial integro-differential operators// J. Algebra. — 2012. — *372*. — P. 237–250.
29. *Bavula V. V. Every monomorphism of the Lie algebra of unitriangular polynomial derivations is an authomorphism* C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. — 2012. — *350*, № 11–12. — P. 553–556.
30. *Bavula V. V.* The Jacobian conjecture$_{2n}$ implies the Dixmier Problem$_n$/ `arXiv: math/0512250 [math.RA]`.
31. *Beauville A., Colliot-Thelene J.-L., Sansuc J.-J., and Swinnerton-Dyer P.* Varietes stablement rationnelles non rationnelles// Ann. Math. — 1985. — *121*. — P. 283–318.
32. *Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D.* Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures// Ann. Phys. — 1978. — *111*, № 1. — P. 61–110.
33. *Belov A.* Linear recurrence equations on a tree// Math. Notes. — 2005. — *78*, № 5. — P. 603–609.
34. *Belov A.* Local finite basis property and local representability of varieties of associative rings.// Izv. Math. — 2010. — *74*. — P. 1–126.
35. *Belov A., Bokut L., Rowen L., Yu J.-T.* The Jacobian conjecture, together with Specht and Burnside-type problems// in: Automorphisms in Birational and Affine Geometry. — Springer, 2014. — P. 249–285.
36. *Belov A., Makar-Limanov L., Yu J. T.* On the generalised cancellation conjecture// J. Algebra. — 2004. — *281*. — P. 161–166.
37. *Belov A., Rowen L. H., Vishne U.* Structure of Zariski-closed algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 2012. — *362*. — P. 4695–4734.
38. *Belov-Kanel A., Yu J.-T.* On the lifting of the Nagata automorphism// Selecta Math. — 2011. — *17*. — P. 935–945.
39. *Kanel-Belov A., Berzins A., Lipyanski R.* Automorphisms of the semigroup of endomorphisms of free associative algebras// Int. J. Algebra Comp. — 2007. — *17*, № 5/6. — P. 923–939.
40. *Belov-Kanel A., Elishev A.* On planar algebraic curves and holonomic D-modules in positive characteristic// J. Algebra Appl. — 2016. — *15*, № 8. — 1650155.

41. *Belov-Kanel A., Kontsevich M.* Automorphisms of the Weyl algebra// Lett. Math. Phys. — 2005. — *74*, № 2. — P. 181–199.
42. *Belov-Kanel A., Kontsevich M.* The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture// 7 — 2007. — № 2. — P. 209–218.
43. *Belov-Kanel A., Lipyanski R.* Automorphisms of the endomorphism semigroup of a polynomial algebra// 333 — 2011. — № 1. — P. 40–54.
44. *Belov-Kanel A., Yu J.-T.* Stable tameness of automorphisms of $F\langle x, y, z\rangle$ fixing z// Selecta Math. — 2012. — *18*. — P. 799–802.
45. *Bergman G. M.* Centralizers in free associative algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *137*. — P. 327–344.
46. *Bergman G. M.* The diamond lemma for ring theory// Adv. Math. — 1978. — *29*, № 2. — P. 178–218.
47. *Berson J., van den Essen A., Wright D.* Stable tameness of two-dimensional polynomial automorphisms over a regular ring// Adv. Math. — 2012. — *230*. — P. 2176–2197.
48. *Birman J.* An inverse function theorem for free groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1973. — *41*. — P. 634–638.
49. *Bonnet P., Vénéreau S.* Relations between the leading terms of a polynomial automorphism// J. Algebra. — 2009. — *322*, № 2. — P. 579—599.
50. *Berzins A.* The group of automorphisms of semigroup of endomorphisms of free commutative and free associative algebras/ `arXiv: abs/math/0504015 [math.AG]`.
51. *Białynicki-Birula A.* Remarks on the action of an algebraic torus on k^n, I// Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1966. — *14*. — P. 177–181.
52. *Białynicki-Birula A.* Remarks on the action of an algebraic torus on k^n, II// Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1967. — *15*. — P. 123–125.
53. *Białynicki-Birula A.* Some theorems on actions of algebraic groups// Ann. Math. — 1973. — *98*, № 3. — P. 480–497.
54. *Bitoun T.* The p-support of a holonomic D-module is lagrangian, for p large enough/ `arXiv: 1012.4081 [math.AG]`.
55. *Bodnarchuk Yu.* Every regular automorphism of the affine Cremona group is inner// J. Pure Appl. Algebra. — 2001. — *157*. — P. 115–119.
56. *Bokut L., Zelmanov E.* Selected works of A. I. Shirshov. — Springer, 2009.
57. *Bokut L. A.* Embedding Lie algebras into algebraically closed Lie algebras// Algebra Logika. — 1962. — *1*. — P. 47–53.
58. *Bokut L. A.* Embedding of algebras into algebraically closed algebras// Dokl. Akad. Nauk. — 1962. — *145*, № 5. — P. 963–964.
59. *Bokut L. A.* Theorems of embedding in the theory of algebras// Colloq. Math. — 1966. — *14*. — P. 349–353.
60. *Brešar M., Procesi C., Špenko Š.* Functional identities on matrices and the Cayley–Hamilton polynomial/ `arXiv: 1212.4597 [math.RA]`.
61. *Campbell L. A.* A condition for a polynomial map to be invertible// Math. Ann. — 1973. — *205*, № 3. — P. 243–248.
62. *Cohn P. M.* Subalgebras of free associative algebras// Proc. London Math. Soc. — 1964. — *3*, № 4. — P. 618–632.
63. *Cohn P. M.* Progress in free associative algebras// Isr. J. Math. — 1974. — *19*, № 1-2. — P. 109–151.
64. *Cohn P. M.* A brief history of infinite-dimensional skew fields// Math. Sci. — 1992. — *17*. — P. 1–14.
65. *Cohn P. M.* Free Rings and Their Relations. — Academic Press, 1985.
66. *Czerniakiewicz A. J.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — *160*. — P. 393–401.
67. *Czerniakiewicz A. J.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — *171*. — P. 309–315.
68. *Danielewski W.* On the cancellation problem and automorphism groups of affine algebraic varieties. — Warsaw: Preprint, 1989.
69. *De Bondt M., van den Essen A.* The Jacobian conjecture for symmetric Druzkowski mappings. — University of Nijmegen, 2004.
70. *De Bondt M., van den Essen A.* A reduction of the Jacobian conjecture to the symmetric case// Proc. Am. Math. Soc. — 2005. — *133*, № 8. — P. 2201–2205.

71. *De Concini C., Procesi C.* A characteristic free approach to invariant theory// in: Young Tableaux in Combinatorics, Invariant Theory, and Algebra. — Elsevier, 1982. — P. 169–193.
72. *Déserti J.* Sur le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine// J. Algebra. — 2006. — *297.* — P. 584–599.
73. *Dicks W.* Automorphisms of the free algebra of rank two// Contemp. Math. — 1985. — *43.* — P. 63–68.
74. *Dicks W., Lewin J.* Jacobian conjecture for free associative algebras// Commun. Algebra. — 1982. — *10*, № 12. — P. 1285–1306.
75. *Dixmier J.* Sur les algebres de Weyl// Bull. Soc. Math. France. — 1968. — *96.* — P. 209–242.
76. *Dodd C.* The p-cycle of holonomic D-modules and auto-equivalences of the Weyl algebra/ `arXiv: 1510.05734 [math.OC]`.
77. *Donkin S.* Invariants of several matrices// Inv. Math. — 1992. — *110*, № 1. — P. 389–401.
78. *Donkin S.* Invariant functions on matrices// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1993. — *113*, № 1. — P. 23–43.
79. *Drensky V., Yu J.-T.* A cancellation conjecture for free associative algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 2008. — *136*, № 10. — P. 3391–3394.
80. *Drensky V., Yu J.-T.* The strong Anick conjecture// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 2006. — *103.* — P. 4836–4840.
81. *Drensky V., Yu J.-T.* Coordinates and automorphisms of polynomial and free associative algebras of rank three// Front. Math. China. — 2007. — *2*, № 1. — P. 13–46.
82. *Drensky V., Yu J.-T.* The strong Anick conjecture is true// J. Eur. Math. Soc. — 2007. — *9.* — P. 659–679.
83. *Drużkowski L.* An effective approach to Keller's Jacobian conjecture// Math. Ann. — 1983. — *264*, № 3. — P. 303–313.
84. *Drużkowski L.* The Jacobian conjecture: symmetric reduction and solution in the symmetric cubic linear case// Ann. Polon. Math. — 2005. — *87*, № 1. — P. 83–92.
85. *Drużkowski L. M.* New reduction in the Jacobian conjecture// in: Effective Methods in Algebraic and Analytic Geometry. — Kraków: Univ. Iagel. Acta Math., 2001. — P. 203–206.
86. *Elishev A.* Automorphisms of polynomial algebras, quantization and Kontsevich conjecture/ PhD Thesis — Moscow Institute of Physics and Technology, 2019.
87. *Elishev A., Kanel-Belov A., Razavinia F., Yu J.-T., Zhang W.* Noncommutative Białynicki-Birula theorem./ `arXiv: 1808.04903 [math.AG]`.
88. *Elishev A., Kanel-Belov A., Razavinia F., Yu J.-T., Zhang W.* Torus actions on free associative algebras, lifting and Białynicki-Birula type theorems/ `arXiv: 1901.01385 [math.AG]`.
89. *van den Bergh M.* On involutivity of p-support// Int. Math. Res. Not. — 2015. — *15.* — P. 6295–6304.
90. *van den Essen A.* The amazing image conjecture/ `arXiv: 1006.5801 [math.AG]`.
91. *van den Essen A., de Bondt M.* Recent progress on the Jacobian conjecture// Ann. Polon. Math. — 2005. — *87.* — P. 1–11.
92. *van den Essen A., de Bondt M.* The Jacobian conjecture for symmetric Druźkowski mappings// Ann. Polon. Math. — 2005. — *86*, № 1. — P. 43–46.
93. *van den Essen A., Wright D., Zhao W.* On the image conjecture// J. Algebra. — 2011. — *340.* — P. 211—224.
94. *Fox R. H.* Free differential calculus, I. Derivation in the free group ring// Ann. Math. (2). — 1953. — *57.* — P. 547–560.
95. *Gizatullin M. Kh., Danilov V. I.* Automorphisms of affine surfaces, I// Izv. Math. — 1975. — *9*, № 3. — P. 493–534.
96. *Gizatullin M. Kh., Danilov V. I.* Automorphisms of affine surfaces, II// Izv. Math. — 1977. — *11*, № 1. — P. 51–98.
97. *Gorni G., Zampieri G.* Yagzhev polynomial mappings: on the structure of the Taylor expansion of their local inverse// Polon. Math. — 1996. — *64.* — P. 285–290.
98. *Fedosov B.* A simple geometrical construction of deformation quantization// J. Differ. Geom. — 1994. — *40*, № 2. — P. 213–238.
99. *Frayne T., Morel A. C., Scott D. S.* Reduced direct products// J. Symb. Logic.. — *31*, № 3. — P. 1966.
100. *Fulton W., Harris J.* Representation Theory. A First Course. — Springer-Verlag, 1991.
101. *Furter J.-P., Kraft H.* On the geometry of the automorphism groups of affine varieties/ `arXiv: 1809.04175 [math.AG]`.

102. *Gutwirth A.* The action of an algebraic torus on the affine plane// Trans. Am. Math. Soc. — 1962. — *105*, № 3. — P. 407–414.
103. *Jung H. W. E.* Über ganze birationale Transformationen der Ebene// J. Reine Angew. Math. — 1942. — *184*. — P. 161–174.
104. *Kaliman S., Koras M., Makar-Limanov L., Russell P.* C^*-actions on C^3 are linearizable// Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. — 1997. — *3*. — P. 63–71.
105. *Kaliman S., Zaidenberg M.* Families of affine planes: the existence of a cylinder// Michigan Math. J. — 2001. — *49*. — P. 353–367.
106. *Kuroda S.* Shestakov–Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism// Tôhoku Math. J. — 2010. — *62*. — P. 75–115.
107. *Kuzmin E., Shestakov I. P.* Nonassociative structures// Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Probl. Mat. Fundam. Napr. — 1990. — *57*. — P. 179–266.
108. *Karas' M.* Multidegrees of tame automorphisms of C^n// Dissert. Math. — 2011. — *477*.
109. *Khoroshkin A., Piontkovski D.* On generating series of finitely presented operads/ `arXiv: 1202.5170 [math.QA]`.
110. *Kambayashi T.* Pro-affine algebras, Ind-affine groups and the Jacobian problem// J. Algebra. — 1996. — *185*, № 2. — P. 481–501.
111. *Kambayashi T.* Some basic results on pro-affine algebras and Ind-affine schemes// Osaka J. Math. — 2003. — *40*, № 3. — P. 621–638.
112. *Kambayashi T., Russell P.* On linearizing algebraic torus actions// J. Pure Appl. Algebra. — 1982. — *23*, № 3. — P. 243–250.
113. *Kanel-Belov A., Borisenko V., Latysev V.* Monomial algebras// J. Math. Sci. — 1997. — *87*, № 3. — P. 3463–3575.
114. *Kanel-Belov A., Elishev A.* On planar algebraic curves and holonomic $\mathcal{D}$-modules in positive characteristic/ `arXiv: 1412.6836 [math.AG]`.
115. *Kanel-Belov A., Elishev A., Yu J.-T.* Independence of the B-KK isomorphism of infinite prime/ `arXiv: 1512.06533 [math.AG]`.
116. *Kanel-Belov A., Elishev A., Yu J.-T.* Augmented polynomial symplectomorphisms and quantization/// `arXiv: 1812.02859 [math.AG]`.
117. *Kanel-Belov A., Grigoriev S., Elishev A., Yu J.-T., Zhang W.* Lifting of polynomial symplectomorphisms and deformation quantization// Commun. Algebra. — 2018. — *46*, № 9. — P. 3926–3938.
118. *Kanel-Belov A., Malev S., Rowen L.* The images of noncommutative polynomials evaluated on 2×2 matrices// Proc. Am. Math. Soc. — 2012. — *140*. — P. 465–478.
119. *Kanel-Belov A., Malev S., Rowen L.* The images of multilinear polynomials evaluated on 3×3 matrices// Proc. Am. Math. Soc. — 2016. — *144*. — P. 7–19.
120. *Kanel-Belov A., Razavinia F., Zhang W.* Bergman's centralizer theorem and quantization// Commun. Algebra. — 2018. — *46*, № 5. — P. 2123–2129.
121. *Kanel-Belov A., Razavinia F., Zhang W.* Centralizers in free associative algebras and generic matrices/ `arXiv: 1812.03307 [math.RA]`.
122. *Kanel-Belov A., Rowen L. H., Vishne U.* Full exposition of Specht's problem// Serdica Math. J. — 2012. — *38*. — P. 313–370.
123. *Kanel-Belov A., Yu J.-T., Elishev A.* On the augmentation topology of automorphism groups of affine spaces and algebras// Int. J. Algebra Comput. * — 2018. — *28*, № 08. — P. 1449–1485.
124. *Keller B.* Notes for an Introduction to Kontsevich's Quantization Theorem, 2003.
125. *Keller O. H.* Ganze Cremona Transformationen// Monatsh. Math. Phys. — 1939. — *47*, № 1. — P. 299–306.
126. *Kolesnikov P. S.* The Makar-Limanov algebraically closed skew field// Algebra Logic. — 2000. — *39*, № 6. — P. 378–395.
127. *Kolesnikov P. S.* Different definitions of algebraically closed skew fields// Algebra Logic. — 2001. — *40*, № 4. — P. 219–230.
128. *Kontsevich M.* Deformation quantization of Poisson manifolds// Lett. Math. Phys. — 2003. — *66*, № 3. — P. 157–216.
129. *Kontsevich M.* Holonomic D-modules and positive characteristic// Jpn. J. Math. — 2009. — *4*, № 1. — P. 1–25.

130. *Koras M., Russell P.* C^*-actions on C^3: The smooth locus of the quotient is not of hyperbolic type// J. Alg. Geom. — 1999. — *8*, № 4. — P. 603–694.
131. *Kovalenko S., Perepechko A., Zaidenberg M.* On automorphism groups of affine surfaces// in: Algebraic Varieties and Automorphism Groups. — Math. Soc. Jpn., 2017. — P. 207–286.
132. *Kraft H., Regeta A.* Automorphisms of the Lie algebra of vector fields// J. Eur. Math. Soc. — 2017. — *19*, № 5. — P. 1577–1588.
133. *Kraft H., Stampfli I.* On automorphisms of the affine Cremona group// Ann. Inst. Fourier. — 2013. — *63*, № 3. — P. 1137–1148.
134. *Kulikov V. S.* Generalized and local Jacobian problems// Izv. Math. — 1993. — *41*, № 2. — P. 351–365.
135. *Kulikov V. S.* The Jacobian conjecture and nilpotent maps// J. Math. Sci. — 2001. — *106*, № 5. — P. 3312–3319.
136. *Levy R., Loustaunau P., Shapiro J.* The prime spectrum of an infinite product of copies of Z// Fundam. Math. — 1991. — *138*. — P. 155–164.
137. *Li Y.-C., Yu J.-T.* Degree estimate for subalgebras// J. Algebra. — 2012. — *362*. — P. 92–98.
138. *Gaiotto D., Witten E.* Probing quantization via branes/ `arXiv: 2107.12251 [hep-th]`.
139. *Lothaire M.* Combinatorics on Words. — Cambridge Univ. Press, 1997.
140. *Makar-Limanov L.* A new proof of the Abhyankar–Moh-=Suzuki theorem/ `arXiv: 1212.0163 [math.AC]`.
141. *Makar-Limanov L.* Automorphisms of a free algebra with two generators// Funct. Anal. Appl. — 1970. — *4*, № 3. — P. 262–264.
142. *Makar-Limanov L.* On automorphisms of Weyl algebra// Bull. Soc. Math. France. — 1984. — *112*. — P. 359–363.
143. *Makar-Limanov L., Yu J.-T.* Degree estimate for subalgebras generated by two elements// J. Eur. Math. Soc. — 2008. — *10*. — P. 533–541.
144. *Makar-Limanov L.* Algebraically closed skew fields// J. Algebra. — 1985. — *93*, № 1. — P. 117–135.
145. *Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U.* Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables// J. Algebra. — 2009. — *322*, № 9. — P. 3318–3330.
146. *Markl M., Shnider S., Stasheff J.* Operads in Algebra, Topology, and Physics. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2002.
147. *Miyanishi M., Sugie T.* Affine surfaces containing cylinderlike open sets// J. Math. Kyoto Univ. — 1980. — *20*. — P. 11–42.
148. *Nagata M.* On the automorphism group of $k[x, y]$. — Tokyo: Kinokuniya, 1972.
149. *Nielsen J.* Die Isomorphismen der allgemeinen, undendlichen Gruppen mit zwei Eerzeugenden// Math. Ann. — 1918. — *78*. — P. 385–397.
150. *Nielsen J.* Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen// Math. Ann. — 1924. — *91*. — P. 169–209.
151. *Ol'shanskij A. Yu.* Groups of bounded period with subgroups of prime order// Algebra and Logic. — 1983. — *21*. — P. 369–418.
152. *Peretz R.* Constructing polynomial mappings using non-commutative algebras// in: Affine Algebraic Geometry. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2005. — P. 197–232.
153. *Piontkovski D.* Operads versus Varieties: a dictionary of universal algebra. — Preprint, 2011.
154. *Piontkovski D.* On Kurosh problem in varieties of algebras// J. Math. Sci. — 2009. — *163*, № 6. — P. 743–750.
155. *Razmyslov Yu. P.* Algebras satisfying identity relations of Capelli type// Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. — 1981. — *45*. — P. 143–166, 240.
156. *Razmyslov Yu. P.* Identities of Algebras and Their Representations. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1994.
157. *Razmyslov Yu. P., Zubrilin K. A.* Nilpotency of obstacles for the representability of algebras that satisfy Capelli identities, and representations of finite type// Russ. Math. Surveys — 1993. — *48*. — P. 183–184.
158. *Reutenauer C.* Applications of a noncommutative Jacobian matrix// J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — *77*. — P. 634–638.
159. *Rowen L. H.* Graduate Algebra: Noncommutative View. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2008.
160. *Moh T.-T.* On the global Jacobian conjecture for polynomials of degree less than 100. — Preprint, 1983.
161. *Moh T.-T.* On the Jacobian conjecture and the configurations of roots// J. Reine Angew. Math. — 1983. — *340*. — P. 140–212.

162. *Moyal J. E.* Quantum mechanics as a statistical theory// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1949. — *45*, № 1. — P. 99–124.
163. *Orevkov S. Yu.* The commutant of the fundamental group of the complement of a plane algebraic curve// Russ. Math. Surv. — 1990. — *45*, № 1. — P. 221–222.
164. *Orevkov S. Yu.* An example in connection with the Jacobian conjecture// Math. Notes. — 1990. — *47*, № 1. — P. 82–88.
165. *Orevkov S. Yu.* The fundamental group of the complement of a plane algebraic curve// Sb. Math. — 1990. — *65*, № 1. — P. 267–267.
166. *Plotkin B.* Varieties of algebras and algebraic varieties// Israel J. Math. — 1996. — *96*, № 2. — P. 511–522.
167. *Plotkin B.* Algebras with the same (algebraic) geometry/ `arXiv: math/0210194 [math.GM]`.
168. *Popov V. L.* Around the Abhyankar-Sathaye conjecture/ `arXiv: 1409.6330 [math.AG]`.
169. *Procesi C.* Rings with Polynomial Identities. — Marcel Dekker, 1973.
170. *Procesi C.* The invariant theory of $n \times n$ matrices// Adv. Math. — 1976. — *19*, № 3. — P. 306–381.
171. *Razar M.* Polynomial maps with constant Jacobian// Israel J. Math. — 1979. — *32*, № 2-3. — P. 97–106.
172. *Robinson A.* Non-Standard Analysis. — Princeton Univ. Press, 2016.
173. *Rosset S.* A new proof of the Amitsur–Levitzki identity// Israel J. Math. — 1976. — *23*, № 2. — P. 187–188.
174. *Rowen L. H.* Graduate Algebra: Noncommutative View. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2008.
175. *Schofield A. H.* Representations of Rings over Skew Fields. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
176. *Schwarz G.* Exotic algebraic group actions// C. R. Acad. Sci. Paris — 1989. — *309*. — P. 89–94.
177. *Shafarevich I. R.* On some infinite-dimensional groups, II// Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Mat. — 1981. — *45*, № 1. — P. 214–226.
178. *Sharifi Y.* Centralizers in Associative Algebras/ Ph.D. thesis, 2013.
179. *Shestakov I. P.* Finite-dimensional algebras with a nil basis// Algebra Logika. — 1971. — *10*. — P. 87–99.
180. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* Degree estimate and two-generated subalgebras of rings of polynomials// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17*. — P. 181–196.
181. *Shestakov I., Umirbaev U.* The Nagata automorphism is wild// Proc. Natl. Acad. Sci. — 2003. — *100*, № 22. — P. 12561–12563.
182. *Shestakov I., Umirbaev U.* Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17*, № 1. — P. 181–196.
183. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17*. — P. 197–220.
184. *Umirbaev U., Shestakov I.* Subalgebras and automorphisms of polynomial rings// Dokl. Ross. Akad. Nauk — 2002. — *386*, № 6. — P. 745–748.
185. *Shpilrain V.* On generators of L/R^2 Lie algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1993. — *119*. — P. 1039–1043.
186. *Singer D.* On Catalan trees and the Jacobian conjecture// Electron. J. Combin. — 2001. — *8*, № 1. — 2.
187. *Shpilrain V., Yu J.-T.* Affine varieties with equivalent cylinders// J. Algebra. — 2002. — *251*, № 1. — P. 295–307.
188. *Shpilrain V., Yu J.-T.* Factor algebras of free algebras: on a problem of G. Bergman// Bull. London Math. Soc. — 2003. — *35*. — P. 706–710.
189. *Suzuki M.* Propiétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébraique de l'espace C^2// J. Math. Soc. Jpn. — 1974. — *26*. — P. 241–257.
190. *Tsuchimoto Y. Preliminaries on Dixmier conjecture* Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A. Math. — 2003. — *24*. — P. 43–59.
191. *Tsuchimoto Y.* Endomorphisms of Weyl algebra and p-curvatures// Osaka J. Math. — 2005. — *42*, № 2. — P. 435–452.
192. *Tsuchimoto Y.* Auslander regularity of norm based extensions of Weyl algebra/// `arXiv: 1402.7153 [math.AG]`.
193. *Umirbaev U.* On the extension of automorphisms of polynomial rings// Sib. Math. J. — 1995. — *36*, № 4. — P. 787–791.
194. *Umirbaev U. U.* On Jacobian matrices of Lie algebras// in: Proc. 6 All-Union Conf. on Varieties of Algebraic Systems. — Magnitogorsk, 1990. — P. 32–33.
195. *Umirbaev U. U.* Shreer varieties of algebras// Algebra Logic. — 1994. — *33*. — P. 180–193.

196. *Umirbaev U. U.* Tame and wild automorphisms of polynomial algebras and free associative algebras. — Preprint MPIM 2004–108..
197. *Umirbaev U.* The Anick automorphism of free associative algebras// J. Reine Angew. Math. — 2007. — *605.* — P. 165–178.
198. *Umirbaev U. U.* Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras in three variables// J. Reine Angew. Math. — 2006. — *600.* — P. 203–235.
199. *Umirbaev U. U.* Defining relations for automorphism groups of free algebras// J. Algebra. — 2007. — *314.* — P. 209–225.
200. *Umirbaev U. U., Yu J.-T.* The strong Nagata conjecture// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 2004. — *101.* — P. 4352–4355.
201. *Urech C., Zimmermann S.* Continuous automorphisms of Cremona groups/ `arXiv: 1909.11050 [math.AG].`
202. *van den Essen A.* Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. — Birkhäuser, 2012.
203. *van der Kulk W.* On polynomial rings in two variables// Nieuw Arch. Wisk. (3) — 1953. — *1.* — P. 33–41.
204. *Vitushkin A. G.* A criterion for the representability of a chain of σ-processes by a composition of triangular chains// Math. Notes — 1999. — *65*, № 5-6. — P. 539–547.
205. *Vitushkin A. G.* On the homology of a ramified covering over C^2// Math. Notes. — 1998. — *64*, № 5. — P. 726–731.
206. *Vitushkin A. G.* Evaluation of the Jacobian of a rational transformation of C^2 and some applications// Math. Notes — 1999. — *66*, № 2. — P. 245–249.
207. *Wedderburn J. H. M.* Note on algebras// Ann. Math. — 1937. — *38.* — P. 854–856.
208. *Wright D.* The Jacobian conjecture as a problem in combinatorics/ `arXiv:math/0511214 [math.CO].`
209. *Wright D.* The Jacobian conjecture: Ideal membership questions and recent advances// Contemp. Math. — 2005. — *369.* — P. 261–276.
210. *Yagzhev A. V.* Finiteness of the set of conservative polynomials of a given degree// Math. Notes. — 1987. — *41*, № 2. — P. 86—88.
211. *Yagzhev A. V.* Nilpotency of extensions of an abelian group by an abelian group// Math. Notes. — 1988. — *43*, № 3-4. — P. 244–245.
212. *Yagzhev A. V.* Locally nilpotent subgroups of the holomorph of an abelian group// Mat. Zametki — 1989. — *46*, № 6. — P. 118.
213. *Yagzhev A. V.* A sufficient condition for the algebraicity of an automorphism of a group// Algebra Logic. — 1989. — *28*, № 1. — P. 83–85.
214. *Yagzhev A. V.* The generators of the group of tame automorphisms of an algebra of polynomials// Sib. Mat. Zh. — 1977. — *18*, № 1. — P. 222–225.
215. *Wang S.* A Jacobian criterion for separability// J. Algebra. — 1980. — *65*, № 2. — P. 453–494.
216. *Wright D.* On the Jacobian conjecture// Ill. J. Math. — 1981. — *25*, № 3. — P. 423–440.
217. *Yagzhev A. V.* Invertibility of endomorphisms of free associative algebras// Math. Notes. — 1991. — *49*, № 3–4. — P. 426—430.
218. *Yagzhev A. V.* Endomorphisms of free algebras// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 1. — P. 133—141.
219. *Yagzhev A. V.* On the algorithmic problem of recognizing automorphisms among endomorphisms of free associative algebras of finite rank// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 1. — P. 142–146.
220. *Yagzhev A. V.* Keller's problem// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 5. — P. 747–754.
221. *A. V. Yagzhev* Engel algebras satisfying Capelli identities// in: Proceedings of Shafarevich Seminar. — Moscow: Steklov Math. Inst., 2000. — P. 83–88 (in Russian).
222. *A. V. Yagzhev* Endomorphisms of polynomial rings and free algebras of different varieties// in: Proceedings of Shafarevich Seminar. — Moscow: Steklov Math. Inst., 2000. — P. 15–47 (in Russian).
223. *Yagzhev A. V.* Invertibility criteria of a polynomial mapping. — Unpublished (in Russian).
224. *Zaks A.* Dedekind subrings of $K[x_1, \ldots, x_n]$ are rings of polynomials// Israel J. Math. — 1971. — *9.* — P. 285–289.
225. *Zelmanov E.* On the nilpotence of nilalgebras// Lect. Notes Math. — 1988. — *1352.* — P. 227–240.
226. *Zhao W.* New proofs for the Abhyankar–Gurjar inversion formula and the equivalence of the Jacobian conjecture and the vanishing conjecture// Proc. Am. Math. Soc. — 2011. — *139.* — P. 3141–3154.
227. *Zhao W.* Mathieu subspaces of associative algebras// J. Algebra. — 2012. — *350.* — P. 245–272.
228. *Zhevlakov K. A., Slin'ko A. M., Shestakov I. P., Shirshov A. I.* Nearly Associative Rings. — Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).

229. *Zubrilin K. A.* Algebras that satisfy the Capelli identities// Sb. Math. — 1995. — *186*, № 3. — P. 359–370.
230. *Zubrilin K. A.* On the class of nilpotence of obstruction for the representability of algebras satisfying Capelli identities// Fundam. Prikl. Mat. — 1995. — *1*, № 2. — P. 409–430.
231. *Zubrilin K. A.* On the Baer ideal in algebras that satisfy the Capelli identities// Sb. Math. — 1998. — *189*. — P. 1809–1818.
232. *Zaidenberg M. G.* On exotic algebraic structures on affine spaces// in: Geometric Complex Analysis. — World Scientific, 1996. — P. 691–714.
233. *Zhang W.* Alternative proof of Bergman's centralizer theorem by quantization/ Master thesis — Bar-Ilan University, 2017.
234. *Zhang W.* Polynomial automorphisms and deformation quantization/ Ph.D. thesis — Bar-Ilan University, 2019.
235. *Zubkov A. N.* Matrix invariants over an infinite field of finite characteristic// Sib. Math. J. — 1993. — *34*, № 6. — P. 1059–1065.
236. *Zubkov A. N.* A generalization of the Razmyslov–Procesi theorem// Algebra Logic. — 1996. — *35*, № 4. — P. 241–254.

Елишев Андрей Михайлович
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: ame1511@mail.ru

Канель-Белов Алексей Яковлевич
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: kanelster@gmail.com

Razavinia Farrokh
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: farrokh.razavinia@gmail.com

Jie-Tai Yu
Шэньчженьский университет, Шэньчжень, Китайская народная республика
E-mail: yujt@hkucc.hku.hk

Wenchao Zhang
Школа математики и статистики, Университет Хуэйчжоу, Китайская народная республика
E-mail: zhangwc@hzu.edu.cn

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.