ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 212 (2022)

Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 212 (2022)

Дата публикации 20 июня 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года — Выходит 15 раз в год

Редакторы-составители выпуска	А. В. Аргучинцев, М. В. Фалалеев, М. В. Шамолин
Научный редактор выпуска	Н. И. Гусева
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782-4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-3-9
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-10-29
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-30-42
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-43-49
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-50-56
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-57-63
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-64-72
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-73-83
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-84-91
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-92-99
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-100-112
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-113-119
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-120-138
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-212-139-148

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 212

ГЕОМЕТРИЯ, МЕХАНИКА
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-3-9

УДК 517.977.56

ВАРИАЦИОННОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА ГРАНИЦЕ

© 2022 г. **А. В. АРГУЧИНЦЕВ, В. П. ПОПЛЕВКО**

Аннотация. Исследуется линейная задача оптимального управления гиперболической системой первого порядка, в которой граничное условие на одном из концов определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием по состоянию. Задача сводится к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенный подход основан на использовании точной формулы приращения целевого функционала. Редуцированную задачу можно решать с помощью широкого арсенала эффективных методов, применяемых для задач оптимизации в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

***Ключевые слова*:** гиперболическая система, система с запаздыванием, точная формула приращения, условие оптимальности.

VARIATIONAL OPTIMALITY CONDITION IN A CONTROL PROBLEM OF A LINEAR FIRST-ORDER HYPERBOLIC SYSTEM WITH BOUNDARY DELAY

© 2022 **A. V. ARGUCHINTSEV, V. P. POPLEVKO**

Abstract. In this paper, we examine a linear optimal-control problem for a first-order hyperbolic system in which a boundary condition at one of the ends is determined from a controlled system of ordinary differential equations with constant state lag. The approach proposed is based on the use of an exact formula for the increment of the cost functional. The reduced problem can be solved by various effective methods used for optimization problems in systems of ordinary differential equations.

***Keywords and phrases*:** hyperbolic system, system with delay, exact increment formula, optimality condition.

***AMS Subject Classification*:** 49J20, 49M05

1. Введение. Дифференциальные уравнения с запаздыванием — это особый вид дифференциальных уравнений, в которых неизвестная функция и её производные входят при различных значениях аргумента. В системе дифференциальных уравнений с запаздыванием производная зависит не только от решения в настоящий момент времени, но и от значения решений в предыдущие моменты времени. Это запаздывание может быть обусловлено самыми различными причинами,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Иркутской области (проект № 20-41-385002).

например, ограниченностью скорости распространения взаимодействия, наличием инерционности некоторых элементов, ограниченностью скорости протекания технологических, экологических процессов и т. д.

Практически сразу после получения первых результатов в теории оптимального управления классическими динамическими системами началось и изучение задач оптимального управления системами с запаздыванием. В 1961 г. Г. Л. Харатишвили [12] обобщил принцип максимума Понтрягина на случай процессов с запаздыванием, причем запаздывающий аргумент содержался только в фазовой переменной. Немного позднее Р. Габасов, С. В. Чуракова [5] доказали существование оптимальных управлений в задаче управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В [17] была рассмотрена общая задача оптимального управления, включающая в себя дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, при ограничениях как на фазовые, так и на управляющие переменные. Получены необходимые условия оптимальности, в которых фигурируют множители Лагранжа. В. А. Срочко, Е. И. Пудалова [11] исследовали задачу с постоянным запаздыванием по состоянию, привели формулу приращения функционала к конструктивному виду, допускающему улучшение управляющих функций через максимум функции Понтрягина, и сконструировали итерационную процедуру улучшения допустимых управлений. В 2009 г. Г. В. Боков [4] сформулировал задачу оптимального управления, которая содержит постоянное запаздывание по времени как в фазовой переменной, так и в переменной управления, а также доказал необходимое условие оптимальности с помощью применения игольчатой вариации, обосновал принцип максимума в задаче с бесконечным интервалом времени. Значительный вклад в теорию особых оптимальных управлений с запаздыванием внес К. Б. Мансимов с соавторами, исследовав широкий спектр задач — от обыкновенных дифференциальных уравнений до стохастических систем [8].

В данной работе рассматривается линейная задача оптимального управления простейшей гиперболической системой первого порядка, в которой граничное условие на одном из концов определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием по состоянию. Задачи такого вида возникают при управлении численностью популяции с учетом ее возрастной структуры (управление рождаемостью с целью максимизации численности популяции в конце периода), задачах химической технологии и др. В качестве управляющих воздействий рассматриваются ограниченные и измеримые функции. Система обыкновенных дифференциальных уравнений на границе линейна по состоянию, но матрица коэффициентов при фазовых переменных зависит от управляющих функций. Поэтому условие оптимальности типа принципа максимума Л. С. Понтрягина в данной задаче является необходимым, но не достаточным условием оптимальности. В связи с этим для решения подобных задач обычно применяются те же методы, что и для общих нелинейных задач оптимального управления.

Основным результатом работы является редукция исходной задачи к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенный подход основан на использовании точной (без остаточных членов) формулы приращения целевого функционала. Соответствующее утверждение сформулировано в виде вариационного условия оптимальности. Приведен пример, иллюстрирующий процесс редукции. Отметим, что редуцированная задача имеет следующую структуру. Целевой функционал линеен. Система обыкновенных дифференциальных уравнений линейна по состоянию, но матрица коэффициентов при фазовых переменных зависит от управляющих функций. Редуцированную задачу можно решать с помощью широкого арсенала эффективных методов, применяемых для этого класса задач оптимального управления в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$x_t + x_s = \Phi(s,t)x + \overline{f}(s,t), \quad (s,t) \in \Pi, \quad \Pi = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1]; \tag{1}$$

$$x(s_0,t) = q(t), \quad t \in [-\alpha; 0]; \quad x(s,t_0) = \mu(s), \quad s \in S; \tag{2}$$

$$\mu(s_0) = q(t_0), \tag{3}$$

где s и t — независимые переменные, $x(s,t)$ — n-мерная вектор-функция, α — положительная константа, являющаяся запаздыванием по состоянию.

Условия на левом конце (при $s = s_0$) определяются из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$x_t(s_0, t) = N(u(t), t)x(s_0, t - \alpha) + b(u(t), t), \quad t \in T. \tag{4}$$

Начальные условия для этой системы задаются формулой (2).

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых на T r-мерных вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих почти всюду на этом отрезке ограничениям типа включения

$$u(t) \in U \subset E^r, \quad t \in T, \tag{5}$$

где U — компактное множество.

Требуется найти допустимое управление, доставляющее минимум целевому функционалу

$$J(u) = \int\limits_S \langle c(s), x(s, t_1)\rangle ds \longrightarrow \min, \quad u \in U. \tag{6}$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается классическое скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве соответствующей размерности.

Задача (1)—(6) рассматривается при следующих предположениях:

(i) функции $q(t)$ и $\mu(s)$ непрерывны на отрезках T и S соответственно;

(ii) функции $\Phi(s, t)$, $\overline{f}(s, t)$, $N(u, t)$, $b(u, t)$ и $c(s)$ непрерывны по совокупности своих аргументов на $S \times T$, $S \times T$, $U \times T$, $U \times T$ и S соответственно.

Для любого допустимого управления существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи (1)—(4) из класса непрерывных в Π функций, причем каждая компонента решения x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, непрерывно дифференцируема вдоль характеристик системы гиперболических уравнений [2]. Непрерывность решения гарантируется приведенными выше предположениями на параметры задачи и условием согласования (3). Заметим, что данные условия не гарантируют существования в прямоугольнике Π классического решения. Для этого, в частности, требуется выполнение условий согласования более высокого порядка, тесно связанных с самой гиперболической системой [6].

Начально-краевые задачи вида (1)—(4) используются при моделировании целого ряда природных и технологических процессов. В частности, в случае $n = 1$ уравнение (1) используется для описания динамики популяции с возрастной структурой [1]. Независимыми переменными являются время наблюдения и возраст особей, а функция $x(s, t)$ задает возрастную плотность популяции. В случае системы уравнений ($n > 1$) модель (1)—(4) описывает динамику нескольких популяций, причем их взаимодействие может определяться матрицей $\Phi(s, t)$. Управление может осуществляться процессом рождения (вбрасывания). Тогда может быть поставлена задача максимизации плотности популяций к концу процесса наблюдения, то есть цель задается линейным функционалом вида (6).

Другим интересным приложением является математическая модель процессов ректификации в колонне [3, 7, 16]. В этом случае система вида (1) состоит из четного числа дифференциальных уравнений, каждое из которых определяет концентрацию химического компонента в жидкой и паровой фазах.

3. Формула приращения функционала. Отметим, что матрица коэффициентов в (4) зависит от управляющей функции. Поэтому, несмотря на линейность задачи, классический принцип максимума Л. С. Понтрягина не является в данном случае достаточным условием оптимальности. Обычно для решения подобных задач применяют общие методы, разработанные для общих нелинейных систем. В [13] подобная задача исследована в классе гладких допустимых управлений с помощью неклассической внутренней вариации, сохраняющей гладкость управляющих функций и обеспечивающей выполнение ограничений типа включения (5). В настоящей работе мы используем методику, ранее примененную в [14] в задачах при отсутствии запаздывания.

Рассмотрим два произвольных различных допустимых процесса: $\{u, x\}$ и $\{\widetilde{u} = u + \Delta u, \widetilde{x} = x + \Delta x\}$.

Введем обозначение $Dx = x_t + x_s$. Здесь $Dx = (D_1x_1, \dots, D_nx_n)$ — обобщенная производная x, каждая компонента которой D_ix_i непрерывна вдоль любой характеристики системы гиперболических уравнений (1).

Задача в приращениях имеет вид:

$$\begin{gathered} D\Delta x = \Phi(s,t)\Delta x; \\ \Delta x(s_0,t) = 0, \quad t \in [-\alpha; 0]; \quad \Delta x(s,t_0) = 0, \quad s \in S; \\ \Delta x_t(s_0,t) = N(\widetilde{u},t)\widetilde{x}(s_0,t-\alpha) - N(u,t)x(s_0,t-\alpha) + \Delta b(u,t). \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\Delta b(u,t) = b(\widetilde{u},t) - b(u,t)$. Используем следующее представление для правой части равенства (7):

$$\Delta x_t(s_0,t) = \Delta_{\widetilde{u}} N(u,t)\widetilde{x}(s_0,t-\alpha) + N(u,t)\Delta x(s_0,t-\alpha) + \Delta b(u,t),$$

где $\Delta_{\widetilde{u}} N(u,t) = N(\widetilde{u},t) - N(u,t)$. Приращение функционала запишем в виде

$$\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u) = \int\limits_S \langle c(s), \Delta x(s,t_1)\rangle ds. \tag{8}$$

В формуле (8) добавим нулевые слагаемые

$$\iint\limits_{\Pi} \Big\langle \psi(s,t), D\Delta x - \Phi(s,t)\Delta x \Big\rangle ds dt,$$

$$\int\limits_T \Big\langle p(t), \Delta x_t(s_0,t) - \Delta_{\widetilde{u}} N(u,t)\widetilde{x}(s_0,t-\alpha) - N(u,t)\Delta x(s_0,t-\alpha) - \Delta b(u,t)\Big\rangle dt,$$

где $\psi(s,t)$ и $p(t)$ — пока произвольные вектор-функции. К слагаемым

$$\iint\limits_{\Pi} \Big\langle \psi(s,t), D\Delta x\Big\rangle ds dt, \quad \int\limits_T \Big\langle p(t), \Delta x_t(s_0,t)\Big\rangle dt$$

применим формулы интегрирования по частям. Отметим, что для первого слагаемого необходимо применить обобщенную формулу интегрирования по частям [2], поскольку классических частных производных функции $x(s,t)$ может не существовать. Получим

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = \int\limits_S \Big\langle c(s), \Delta x(s,t_1)\Big\rangle ds + \int\limits_S \Big[\Big\langle \psi(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\Big\rangle - \Big\langle \psi(s,t_0), \Delta x(s,t_0)\Big\rangle\Big] ds - \\ - \iint\limits_{\Pi} \Big\langle D\psi(s,t), \Delta x\Big\rangle ds dt + \int\limits_T \Big[\Big\langle \psi(s_1,t), \Delta x(s_1,t)\Big\rangle - \Big\langle \psi(s_0,t), \Delta x(s_0,t)\Big\rangle\Big] dt + \\ + \Big\langle p(t_1), \Delta x(s_0,t_1)\Big\rangle - \Big\langle p(t_0), \Delta x(s_0,t_0)\Big\rangle - \int\limits_T \Big\langle p_t, \Delta x(s_0,t)\Big\rangle dt - \iint\limits_{\Pi} \Big\langle \psi(s,t), \Phi(s,t)\Delta x\Big\rangle ds dt - \\ - \int\limits_T \Big\langle p(t),\ \Delta_{\widetilde{u}} N(u,t)\widetilde{x}(s_0,t-\alpha) + N(u,t)\Delta x(s_0,t-\alpha) + \Delta b(u,t)\Big\rangle dt. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \int\limits_T \Big\langle p(t), N(u,t)\Delta x(s_0,t-\alpha)\Big\rangle dt = \int\limits_{t_0-\alpha}^{t_0} \Big\langle p(\tau+\alpha),\ N\big(u(\tau+\alpha), \tau+\alpha\big)\Delta x(s_0,\tau)\Big\rangle d\tau + \\ + \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha} \Big\langle p(\tau+\alpha),\ N\big(u(\tau+\alpha), \tau+\alpha\big)\Delta x(s_0,\tau)\Big\rangle d\tau. \end{aligned}$$

Здесь $\tau = t - \alpha$, $\tau \in [t_0 - \alpha, t_1 - \alpha]$. Возвратимся к переменной t. С учетом того, что первое слагаемое данного выражения равно нулю, получим:

$$\int\limits_T \Big\langle p(t), N(u,t)\Delta x(s_0, t-\alpha)\Big\rangle dt = \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha} \Big\langle p(t+\alpha),\ N(u(t+\alpha), t+\alpha)\Delta x(s_0,t)\Big\rangle dt.$$

Введем вспомогательные функции

$$H\big(\psi(s,t), x(s,t), s, t\big) = \big\langle \psi(s,t), \Phi(s,t)x + \overline{f}(s,t)\big\rangle,$$
$$h\big(p(t), x(s_0, t-\alpha), u(t)\big) = \big\langle p(t), N(u(t),t)x(s_0,t-\alpha) + b(u(t),t)\big\rangle.$$

Это классические гамильтонианы. Однако в нашем случае они не фигурируют в условиях оптимальности, а введены лишь для сокращения обозначений. Потребуем, чтобы функции $\psi(s,t)$, $p(t)$ являлись решениями следующей сопряженной задачи

$$\psi_t + \psi_s = -\Phi^T(s,t)\psi, \quad \psi(s,t_1) = -c(s), \quad \psi(s_1,t) = 0; \tag{9}$$

$$p_t = \begin{cases} -N^T\big(u(t+\alpha), t+\alpha\big)p(t+\alpha) - \psi(s_0,t), & t \in [0; t_1-\alpha],\\ -\psi(s_0,t), & t \in [t_1-\alpha; t_1]; \end{cases}$$
$$p(t_1) = 0; \quad p(t) \equiv 0, \quad t > t_1. \tag{10}$$

Тогда формула приращения функционала примет вид

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \Big\langle p(t),\ \Delta_{\widetilde{u}} N(u,t)\widetilde{x}(s_0,t-\alpha) + \Delta b(u,t)\Big\rangle dt. \tag{11}$$

Формула (11) является точной (без остаточных членов) для любой пары допустимых процессов, при этом исходная система обыкновенных дифференциальных уравнений (4) интегрируется на возмущенном управлении.

4. Условие оптимальности. На основе полученной формулы приращения можно осуществить редукцию исходной задачи оптимального управления гиперболической системой к задаче оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$I(v) = -\int\limits_T \Big\langle p(t,u),\ \big(N(v(t),t) - N(u(t),t)\big)y(t-\alpha, v) + b(v(t),t) - b(u(t),t)\Big\rangle dt \to \min, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \dot{y} = N(v(t),t)y(t-\alpha) + b(v(t),t), \quad t \in T;\\ y(t_0) = y^0;\\ v(t) \in U. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $y(t)$ — n-мерная функция состояния, $u(t)$ и $p(t,u)$ — фиксированные функции, $v(t)$ — управляющее воздействие, удовлетворяющее тем же ограничениям на управления, что и в исходной задаче.

Теорема 1. *Чтобы управление $u^*(t)$ было оптимальным в задаче* (1)—(6), *необходимо и достаточно, чтобы управление $v^* = u^*(t)$ было оптимальным в задаче* (12)—(13). *Кроме того, оптимальное значение функционала равно*

$$J(v^*) = J(u) + I(v^*).$$

Полученный результат можно рассматривать и как вариационное условие оптимальности (в отличие от традиционных конечномерных условий оптимальности).

Опишем схему решения исходной задачи.

1. Задается произвольное допустимое управление $u = u(t)$. Вычисляется соответствующее ему решение $p = p(t,u)$ сопряженной задачи (10). Для этого необходимо также найти решение задачи (9), которое не зависит от выбора допустимого управления.

2. Решается вспомогательная задача оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с линейным целевым функционалом (12).

Таким образом, для решения задачи (1)—(6) необходимо всего лишь два раза проинтегрировать систему дифференциальных уравнений с частными производными (поиск $\psi(s,t)$ и при необходимости $x^*(s,t,v^*)$).

5. Пример. В квадрате $S \times T = [0;5] \times [0;5]$ рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$x_t + x_s = e^s \cdot \cos t,$$
$$x_t(0,t) = u \cdot x(0,t-1); \quad x(0,t) = 0{,}2 \cdot t, \quad t \in [-1;0];$$
$$x(s,0) = 0; \quad u(t) \in [0,1].$$

Целевой функционал:

$$J(u) = \int\limits_S x(s,5)ds \to \min.$$

В данном примере $U = [0,1]$, запаздывание $\alpha = 1$. Вспомогательные функции (гамильтонианы) имеют следующий вид:

$$H(\psi, x, s, t) = \psi \cdot e^s \cdot \cos t, \quad h(p, x(0,t), u, t) = p(t) \cdot u(t) \cdot x(0, t-1).$$

Выпишем сопряженную задачу (9)—(10):

$$\psi_t + \psi_s = 0, \quad \psi(s,5) = -1, \quad \psi(5,t) = 0;$$
$$p_t = \begin{cases} -p(t) \cdot u(t+1) - \psi(s_0,t), & t \in [0;4], \\ -\psi(s_0,t), & t \in [4;5]; \end{cases}$$
$$p(5) = 0.$$

Выберем допустимое управление $u(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0,5]$. Тогда решение сопряженной задачи будет иметь вид:

$$\psi(s,t) = \begin{cases} 0, & t < s, \\ -1, & t \geqslant s. \end{cases}$$
$$p(t) = t - 5, \quad t \in [0;5].$$

Исходная задача сводится к следующей задаче оптимального управления:

$$I(v) = \int\limits_0^5 (5-t) \cdot v(t) \cdot y(t-1, v)dt \to \min;$$
$$y_t = v \cdot y(t-1), \quad y(t) = 0{,}2 \cdot t, \quad t \in [-1;0], \quad y(0) = 0;$$
$$v(t) \in [0;1].$$

Для решения редуцированной задачи можно использовать широкий арсенал методов, обзор которых дан в [15,18]. Специфика задачи позволяет рекомендовать предложенные в [9,10] подходы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. В., Крышев И. И., Сазыкина Т. Г.* Физическое и математическое моделирование экосистем. — СПб.: Гидрометеоиздат, 1992.
2. *Аргучинцев А. В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. — М.: Физматлит, 2007.
3. *Аргучинцев А. В., Поплевко В. П.* Оптимальное управление в задаче химической ректификации// Изв. вузов. Мат. — 2012. — № 8. — С. 53–57.
4. *Боков Г. В.* Принцип максимума Понтрягина в задаче с временным запаздыванием// Фундам. прикл. мат. — 2009. — *15*, № 5. — С. 3–19.
5. *Габасов Р., Чуракова С. В.* О существовании оптимальных управлений в системах с запаздыванием// Диффер. уравн. — 1967. — *3*, № 12. — С. 2067–2080.

6. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
7. *Демиденко Н. Д., Потапов В. И., Шокин Ю. И.* Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами. — Новосибирск: Наука, 2006.
8. *Мансимов К. Б., Масталиев Р. О.* Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в задаче оптимального управления стохастической системой с запаздывающим аргументом// Програм. сист.: Теория и прилож. — 2020. — *11*, № 2. — С. 3–22.
9. *Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В.* Параметризация некоторых задач управления линейными системами// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2019. — *30*. — С. 83–98.
10. *Срочко В. А., Антоник В. Г.* Условия оптимальности экстремальных управлений для билинейной и квадратичной задач// Изв. вузов. Матем. — 2016. — № 5. — С. 86–92.
11. *Срочко В. А., Пудалова Е. И.* Методы нелокального улучшения допустимых управлений в линейных задачах с запаздыванием// Изв. вузов. Мат. — 2000. — № 12. — С. 76–86.
12. *Харатишвили Г. Л.* Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием// Докл. АН СССР. — 1961. — *136*, № 1. — С. 39–42.
13. *Arguchintsev A. V., Poplevko V. P.* An optimal control problem by a hyperbolic system with boundary delay// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2021. — *35*. — С. 3–17.
14. *Arguchintsev A., Poplevko V.* An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations// Games. — 2021. — *12*, № 1. — 23.
15. *Biral F., Bertolazzi E., Bosetti P.* Notes on numerical methods for solving optimal control problems// IEEE J. Ind. Appl. — 2016. — *5*. — P. 154–166.
16. *Demidenko N., Kulagina L.* Optimal control of thermal-engineering processes in tube furnaces// Chem. Petrol. Eng. — 2006. — *42*, № 3. — P. 128–130.
17. *Frankena J. F.* Optimal control problems with delay, the maximum principle and necessary conditions// J. Eng. Math. — 1975. — *9*, № 1. — P. 53–64.
18. *Golfetto W., Fernandes S. Silva* A review of gradient algorithms for numerical computation of optimal trajectories// J. Aerosp. Technol. Manag. — 2012. — *4*. — P. 131–143.

Аргучинцев Александр Валерьевич
Иркутский государственный университет
E-mail: arguch@math.isu.ru

Поплевко Василиса Павловна
Иркутский государственный университет
E-mail: vasilisa@math.isu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 10–29
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-10-29

УДК 514.763

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

© 2022 г. **А. В. АМИНОВА, Д. Р. ХАКИМОВ**

Аннотация. Работа посвящена имеющей многочисленные геометрические и физические приложения проблеме исследования многомерных псевдоримановых многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Настоящая статья является первой частью работы; продолжение будет опубликовано в следующих выпусках.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h-пространство, система дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнение Киллинга, проективная алгебра Ли.

LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE MOTIONS OF FIVE-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES. I. PRELIMINARIES

© 2022 **A. V. AMINOVA, D. R. KHAKIMOV**

Abstract. This work is devoted to the problem of studying multidimensional pseudo-Riemannian manifolds that admit Lie algebras of infinitesimal projective (in particular, affine) transformations, wider than Lie algebras of infinitesimal homotheties. Such manifolds have numerous geometric and physical applications. This paper is the first part of the work; continuation will be published in future issues.

Keywords and phrases: differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space, system of partial differential equations, nonhomothetical projective motion, Killing equation, projective Lie algebra.

AMS Subject Classification: 53Z05

Введение

Теория групп проективных преобразований псевдоримановых пространств является одним из активно развивающихся разделов дифференциальной геометрии, имеющих приложения в теории дифференциальных уравнений и анализе, а также в теоретической и математической физике.

Проективные преобразования систематически возникают при исследовании симметрий уравнений математической физики. Достаточно упомянуть, что алгебра Ли инфинитезимальных точечных симметрий уравнения Кортевега—де Фриза является подалгеброй проективной, точнее, аффинной алгебры Ли, а уравнение Риккати можно рассматривать как «своеобразную реализацию» группы проективных преобразований на прямой (см. [17]).

Концепция теории групп была предложена Э. Галуа во время его работы над алгебраическими проблемами. К. Джордан нашел дальнейшее применение теории групп. Теория непрерывных групп была основана С. Ли. Исследуя возможность использования расширенных методов Галуа для решения задач, связанных с интегрированием дифференциальных уравнений, Ли обнаружил новый тип групп, которые он назвал непрерывными группами преобразований (в наше время они называются группами Ли).

Впервые задача определения римановых пространств V^n, допускающих непрерывные группы проективных преобразований, рассматривалась С. Ли и затем учеником Г. Дарбу М. Кёнигсом для случая двумерных поверхностей. Дальнейшее развитие теории проективных преобразований и проективных движений (инфинитезимальных проективных преобразований) в пространствах с линейной связностью связано с именами таких известных математиков, как Э. Картан, Л. П. Эйзенхарт, М. С. Кнебельман, Я. А. Схоутен, К. Яно, И. П. Егоров, Г. Врэнчану, Ш. Кобаяси и др.

Проблема проективных преобразований в V^n тесно примыкает к проблеме геодезических отображений псевдориманывых пространств, которая в разное время рассматривалась Е. Бельтрами, У. Дини, Т. Леви-Чивита, Г. Фубини, Л. П. Эйзенхартом, П. А. Широковым, А. З. Петровым, Н. С. Синюковым, А. С. Солодовниковым, В. И. Голиковым, Г. И. Кручковичем, А. В. Аминовой и др. (см. [13]).

Как известно, в пространствах постоянной кривизны S^n проективная группа совпадает локально с проективной группой псевдоевклидова пространства, т.е. с группой дробно-линейных подстановок, и зависит от $n(n + 2)$ параметров.

В пространствах V^n непостоянной кривизны порядок проективной группы не превосходит числа $n(n - 2) + 5$ (см. [31]), причем в большинстве случаев эта группа состоит из преобразований подобия (гомотетий) или изометрий.

В 1903 г. в «Записках Туринской Академии наук» вышла работа Г. Фубини «О группах геодезических преобразований» [81], которая положила начало систематическому определению и изучению пространств с положительно определенными метриками, допускающих проективную группу более широкую, чем группа гомотетий. Позже А. С. Солодовников (см. [53], 1956 г.) продолжил исследования Г. Фубини; в трудах Фубини и Солодовникова содержится классификация собственно римановых пространств V^n, $n \geqslant 3$, по (локальным) группам проективных преобразований, более широким, чем группы гомотетий.

Выводы Фубини и Солодовникова опираются на предположение о положительной определенности рассматриваемых метрик. Снятие условия знакоопределенности значительно усложняет задачу и требует принципиально нового подхода к ее решению (см., например, [1–8, 12, 32–35]).

В 1987 г. вышла работа А. В. Аминовой [67] (см. также [68]), где в рамках метода подвижного репера была развита техника косонормального репера, которая дала ключ к решению задачи в псевдоримановых пространствах общего вида. В работах А. В. Аминовой [1–8, 12] были найдены все лоренцевы многообразия размерности $n \geqslant 4$, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования, и для каждого из них — максимальная проективная и аффинная алгебра Ли, включая гомотетическую и изометрическую подалгебры.

Подобная задача для псевдоримановых пространств произвольной сигнатуры ранее не рассматривалась.

Поэтому представленное в данной работе исследование проективно-групповых свойств пятимерных псевдоримановых пространств общей сигнатуры в случае невырожденной характеристики Сегре производной Ли метрического тензора (так называемых жестких h-пространств, см. раздел 1.2) является актуальной задачей, имеющей важное теоретическое и прикладное значение.

В теоретической физике за последние годы значительно возрос интерес к использованию геометрических свойств многомерных, в частности, пятимерных пространств.

В 1919 г. Т. Калуцей была предложена идея геометризации электромагнитного поля в духе эйнштейновской теории тяготения с помощью увеличения на единицу числа пространственных координат; сейчас в литературе пятимерная теория называется теорией Калуцы—Клейна. Заслуга Клейна состоит в обобщении линеаризованного варианта теории Калуцы на общий случай.

В теории Калуцы—Клейна мир описывается пятимерным псевдоримановым пространственно-временным многообразием с квадратичной дифференциальной формой

$$dI^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, 5. \tag{1}$$

Пятнадцать компонент пятимерного метрического тензора определяют десять компонент четырёхмерного метрического тензора и четыре компоненты векторного электромагнитного потенциала. Оставшаяся пятнадцатая компонента метрического тензора описывает некоторое скалярное поле.

В качестве уравнений поля используются пятимерные уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \tilde{\Lambda} g_{\alpha\beta} = \chi Q_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

где $Q_{\alpha\beta}$ — пятимерный тензор энергии-импульса внешней материи. Из этих уравнений следуют аналоги четырёхмерных уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса электромагнитного поля и уравнения Максвелла. В качестве уравнений движения частиц берутся пятимерные уравнения геодезических

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dI^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dI} \frac{dx^\gamma}{dI}, \tag{3}$$

где $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — пятимерные символы Кристоффеля. Теории с размерностью пространства больше пяти и с полевыми уравнениями, аналогичными уравнениям Эйнштейна, называются теориями типа Калуцы—Клейна.

В 1921 г. Калуца и Клейн показали, что при определенных условиях (таких как цилиндричность: $\partial g_{ij}/\partial x^5 = 0$, $i, j = 1, \ldots, 4$) добавление пятого измерения может объяснить появление электромагнитного поля. Проблема заключается в том, что хотя сама модель является геометрической, условия типа цилиндричности не являются таковыми. Эта проблема была частично решена Эйнштейном и Бергманом, которые в своей статье 1938 года предположили, что пятое измерение компактифицируется в небольшую окружность S^1, так что в полученном цилиндрическом пятимерном пространстве-времени $\mathbb{R}^4 \times S^1$ зависимость от x^5 макроскопически незаметна.

В работе [120] было показано, что если во всех определениях векторов, тензоров и т. д. заменить $\mathbb{R}^4$ на $\mathbb{R}^4 \times S^1$, то условия типа цилиндричности станут полностью геометрическими.

В работе А. П. Трунева [57] была развита модель фундаментальных взаимодействий на основе теории Калуцы—Клейна в пятимерном пространстве.

В работах [72] и [73] рассматривается $(4+d)$-мерное пространство-время с топологией $T \times V^3 \times V^d$, где V^3 и V^d — однородные и изотропные подпространства, причём V^d (внутреннее подпространство) компактно. Выбран упрощенный сценарий эволюции рассматриваемой модели: задается временная зависимость масштабных факторов подпространств V^3 и V^d, приближенно соответствующая полученным ранее решениям уравнений Эйнштейна. На этом фоне исследуются возмущения метрики с одним индексом четырёхмерного подпространства $T \times V^3$ и одним индексом внутреннего подпространства V^d. Сжатие масштаба внутреннего пространства (что необходимо для согласования с наблюдениями в настоящее время) приводит к возникновению в четырёхмерном физическом пространстве массивных полевых мод рассматриваемых возмущений, которые гипотетически связываются с наличием темной реликтовой материи во Вселенной.

Теорема о соответствии теории Калуцы—Клейна четырёхмерной эйнштейновской теории гравитации, взаимодействующей с электромагнетизмом, доказана в [70]. Получено точное решение вакуумных уравнений Эйнштейна в пятимерном пространстве, представляющее решение Боннора четырёхмерной теории Эйнштейна—Максвелла. Найденное решение описывает массивный источник, обладающий магнитным и дипольным моментами.

Стабильность вакуумных решений многомерных уравнений Эйнштейна (а значит, сохранение планковских размеров внутреннего пространства) в механизме спонтанной компактификации за счет эффекта Казимира достигается путем чрезмерного увеличения числа полей внешней материи. Для преодоления этого недостатка в [91] предложено использовать механизм нарушения калибровочных симметрий с помощью петель Вильсона, активно используемый в теории суперструн. Рассмотрена космологическая модель

$$ds^2 = dt^2 - a_{ij}^2(t)dx^i dx^j - b^2(t)(dx^5)^2, \quad i, j = 1, \ldots, 3,$$

содержащая внешние $SU(2)$-калибровочные поля и взаимодействующие с ними спиноры. В правой части пятимерных уравнений Эйнштейна содержится тензор энергии-импульса, соответствующий однопетлевым вакуумным флуктуациям спинорных и калибровочных полей. Полученная из пятимерных уравнений Эйнштейна система уравнений для параметров $a(t)$ и $b(t)$ допускает стабильное решение при сравнительно малом числе спинорных полей.

В статье [88] рассматривается пятимерная космологическая модель с безмассовой 5-пылью в качестве источника. Зависимость от x^5 не учитывается, однако феноменологически вводится известный казимировский потенциал. Показано, что уравнения такой модели допускают решение, в котором три пространственных измерения расширяются во времени, а дополнительное измерение стягивается, причем скорость этих процессов определяется количеством 5-пыли во Вселенной. Строится обобщение на случай произвольного числа тороидальных дополнительных координат. Проводится обсуждение влияния потенциала Казимира на космологические сценарии и возможные его изменения, связанные с наличием во Вселенной тяжелых фермионов.

В статье [82] рассмотрено уравнение геодезических в пятимерной космологии Калуцы—Клейна. В качестве основного результата декларируется установление на качественном уровне того факта, что 5-скорость и другие величины в рассматриваемом случае будут зависеть не только от времени, но и от массы частицы. При сопоставлении полученных космологических уравнений с четырёхмерными уравнениями в случае материи в виде идеальной жидкости получен аналог метрики Фридмана—Робертсона—Уокера. Приводятся рассуждения о природе и динамике гравитационной постоянной.

В [122, 123] предложена новая интерпретация пятимерной теории, согласно которой дополнительные слагаемые в пятимерных вакуумных уравнениях Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = 0$ для метрик вида

$$ds^2 = e^{\nu(t,\psi)}dt^2 - e^{\Omega(t,\psi)}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - e^{\mu(t,\psi)}d\psi^2,$$

содержащих произвольные функции $\mu(t, \psi)$ и $\nu(t, \psi)$, отождествляются с правой частью соответствующего четырёхмерного уравнения для идеальной жидкости:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\Big[(p - \rho)u_\mu u_\nu - pq_{\mu\nu}\Big].$$

Показано, что для некоторой не зависящей от ψ метрики (пятимерная метрика де Леона), являющейся решением уравнений указанного вида, четырёхмерный сектор которой соответствует фридмановской модели пространственноплоской Вселенной, заполненной излучением, подобное отождествление приводит к правильным зависимостям давления p и плотности ρ от времени. Для другой предложенной в этих работах метрики выбором свободного параметра удается добиться соответствия на гиперплоскостях $\psi = \mathrm{const}$ с пространственно-плоскими моделями Фридмана как в случае излучения, так и в случае пылевидной материи.

Целью данной работы является определение всех пятимерных жестких h-пространств H_χ, т.е. псевдоримановых многообразий (M^5, g) произвольной сигнатуры с (невырожденной) характеристикой Сегре $\chi = \{r_1, \ldots, r_k\}$, $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$, $r_1 + \cdots + r_k = 5$, и вещественными собственными значениями производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении инфинитезимального преобразования X, допускающих (негомотетические) проективные и аффинные движения (т.е. инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования), и для каждого из них — определение структуры соответствующих максимальных проективной и аффинной алгебр Ли, включая классификацию h-пространств H_{221} типа $\{221\}$ по максимальным алгебрам Ли проективных и аффинных преобразований, более широким, чем алгебры Ли гомотетий.

Решение поставленной задачи основано на разбиении пространств (M^5, g) по типам в соответствии с алгебраической структурой билинейной формы $h = L_X g$ и включает следующие этапы:

I. Интегрирование уравнений Эйзенхарта для каждого допустимого типа (1.20) h-пространств H_χ (см. раздел 1.2).

II. Вычисление кривизны h-пространств H_χ и получение необходимых и достаточных условий постоянства кривизны исследуемых пространств.
III. Нахождение общего решения уравнения Эйзенхарта для каждого h-пространства H_χ непостоянной кривизны.
IV. Исследование структуры максимальных проективных и аффинных алгебр Ли, более широких, чем алгебры Ли гомотетий, для каждого из найденных h-пространств.
V. Интегрирование обобщенных уравнений Киллинга $L_X g = h$ для h-пространств H_{221} типа $\{221\}$, включающих три класса h-пространств: $H_{221,1}$, $H_{221,2}$ и $H_{221,3}$.
VI. Классификация h-пространств $H_{221,1}$, $H_{221,2}$ и $H_{221,3}$ типа $\{221\}$ непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований с указанием размерностей, базисных элементов и структурных уравнений максимальных проективных, аффинных, гомотетических и изометрических (под)алгебр Ли.

В работе получены следующие основные результаты:

1. Полностью решена задача определения пятимерных жестких h-пространств H_χ, т.е. пятимерных псевдоримановых пространств (M^5, g), допускающих нетривиальные решения $h \neq \mathrm{const} \cdot g$ уравнения Эйзенхарта с вещественной невырожденной характеристикой Сегре χ (теоремы **??**, **??**, **??** и **??**).
2. Для каждого из найденных h-пространств получены общие решения уравнения Эйзенхарта; каждому решению отвечает квадратичный первый интеграл уравнений геодезических (теоремы **??**, **??**, **??** и **??**).
3. Найдены формы связности и кривизны пятимерных пространств H_χ. Получены необходимые и достаточные условия постоянства кривизны жестких h-пространств (теоремы **??**, **??**, **??** и **??**).
4. Описаны свойства определяющих функций проективных движений и ковариантно постоянных симметричных тензоров в жестких h-пространствах (теоремы **??**, **??**, **??**, и **??**).
5. Установлены необходимые и достаточные условия существования в пятимерном пространстве негомотетического проективного движения заданного типа χ (теоремы **??**, **??**, **??** и **??**) и любого допустимого типа (теоремы **??**, **??**, **??** и **??**).
6. Показано, что аффинная алгебра Ли в жестком h-пространстве непостоянной кривизны состоит, самое большее, из гомотетий (теоремы **??**, **??**, **??** и **??**).
7. Доказано, что если пятимерное жесткое h-пространство допускает негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит подалгебру H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий размерности $r-1$ (теоремы **??**, **??**, **??**, и **??**).
8. Дана классификация h-пространств H_{221} непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований; перечислены все проективно-подвижные h-метрики типа $\{221\}$ и указаны размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных алгебр Ли (теоремы **??**, **??**, и **??**).

1. Предварительные сведения

1.1. Псевдоримановы многообразия. Гладкое n-мерное многообразие M, на котором задано невырожденное симметричное тензорное поле g валентности $(0,2)$, обладающее тем свойством, что для любой точки $p \in M$ билинейный функционал g_p на линейном пространстве T_pM является скалярным произведением, называется псевдоримановым многообразием (см. [43, 58]).

Тензорное поле g называется метрическим тензором псевдориманова пространства, или просто метрикой.

Для любых гладких векторных полей X, Y на псевдоримановом пространстве M их свертка $g(X,Y)$ с тензором g является гладкой функцией на M. Эта функция называется скалярным произведением полей X, Y и обозначается символом $(X,Y) = g(X,Y)$. В локальной карте (x,U) функция (X,Y) определяется формулой

$$(X,Y) = g_{ij}X^iY^j,$$

где

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

— компоненты тензора g, а X^i и Y^j — компоненты векторных полей X и Y.

На псевдоримановом многообразии (M, g) существует единственная линейная связность ∇, удовлетворяющая условиям

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \tag{1.1}$$

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y] \tag{1.2}$$

для всех дифференцируемых векторных полей X, Y, Z на M и называемая связностью Леви-Чивита или римановой связностью. Компоненты связности ∇ называются символами Кристоффеля.

Символы Кристоффеля, или Кристоффели первого и второго рода метрики g задаются формулами

$$\Gamma_{k,ij} = \Gamma_{k,ji} = \frac{1}{2}\big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\big), \tag{1.3}$$

$$\Gamma^h_{ij} = \Gamma^h_{ji} = \frac{1}{2} g^{hk}\big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\big). \tag{1.4}$$

Компоненты тензора кривизны R^i_{jkl} определяются коэффициентами линейной связности Леви-Чивита и находятся по формуле

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^h_{jl}\Gamma^i_{hk} - \Gamma^h_{jk}\Gamma^i_{hl}. \tag{1.5}$$

Для любого векторного поля X на гладком многообразии M существует линейное отображение $X : f \to Xf$ алгебры F_M вещественных функций на M в себя по правилу $(Xf)(p) = X_p f$, где $p \in M$, $X_p f$ — производная функции f вдоль вектора X_p, принадлежащего касательному пространству T_pM к M в точке p (см. [13, 38]). Если $\xi^1, \dots, \xi^n$ — компоненты векторного поля X в карте (x, U), то

$$Xf\big|_U = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv \xi^i \partial_i f; \tag{1.6}$$

в частности,

$$Xx^i = \xi^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Множество χ_M всех дифференцируемых векторных полей на гладком многообразии M является вещественной алгеброй Ли бесконечной размерности относительно операции коммутирования (скобки Ли), определенной равенством

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

для всех функций f на M и $X, Y \in \chi_M$. Если $X = \xi^j \partial_j$ и $Y = \eta^j \partial_j$ в карте (x, U), то согласно (1.6) имеем

$$[X, Y] = \big(\xi^j \partial_j \eta^i - \eta^j \partial_j \xi^i\big)\partial_i.$$

В частности, для координатных векторных полей $X_1 = \partial_1$, …, $X_n = \partial_n$ выполняются равенства

$$[X_i, X_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Гладкая кривая $\gamma = x_t$, $a < t < b$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, на многообразии M с линейной связностью ∇ называется геодезической, если векторное поле X, касательное к γ в точке x_t, параллельно вдоль γ, т.е. если $\nabla_X X = 0$ для всех t, где t — аффинный параметр для γ, а ∇_X означает ковариантную производную вдоль X (см. [38]).

Напомним определение характеристики Сегре тензора h_{ij}. Пусть λ-матрица $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$ имеет в точке $x \in V$ систему элементарных делителей $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}$, $(\lambda - \lambda_1)^{m_2}$, …, $(\lambda - \lambda_2)^{m'_1}$, $(\lambda - \lambda_2)^{m'_2}$, …. Инварианты λ_i, называемые базисами элементарных делителей, определяют собственные числа тензора h_{ij} в точке x и являются корнями характеристического уравнения

$$\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0.$$

Числа $m_1, m_2, \dots, m'_1, m'_2, \dots$ определяют тип тензора h_{ij}. Для обозначения типа тензора употребляется символ

$$\chi = \{(m_1, m_2, \dots)(m'_1, m'_2, \dots)\dots\},$$

в котором круглые скобки объединяют числа, соответствующие одному и тому же характеристическому числу. Этот символ называется характеристикой Сегре λ-матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$ или матрицы (h_{ij}) (см. [13, 59]).

1.2. Инфинитезимальные преобразования. Напомним, что локальная однопараметрическая группа непрерывных преобразований, определенных на $U \times I_\varepsilon$, где $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и U — открытое подмножество в M, является таким непрерывным отображением

$$(x, \tau) \in U \times I_\varepsilon \to f_\tau(x) \in f_\tau(U),$$

что $f_\tau : x \to f_\tau(x)$ является диффеоморфизмом U на открытое множество $f_\tau(U)$ из M и

$$f_{\tau_1+\tau_2}(x) = f_{\tau_1} \circ f_{\tau_2}(x)$$

всякий раз, когда τ_1, τ_2, $\tau_1 + \tau_2 \in I_\varepsilon$ и $f_{\tau_2}(x) \in U$ (см. [38]).

Диффеоморфизм $f : A^n = (M, \nabla) \to \bar{A}^n = (\bar{M}, \bar{\nabla})$, где ∇ и $\bar{\nabla}$ — аффинные связности на M и $\bar{M}$ соответственно, называется аффинным отображением, если он отображает любое параллельное векторное поле вдоль $l \subset M$ в параллельное векторное поле вдоль $f(l) \subset \bar{M}$.

Диффеоморфизм $f : A^n \to \bar{A}^n$ является аффинным отображением тогда и только тогда, когда $f * (\bar{\nabla}) = \nabla$, т.е. локально в общей системе координат компоненты аффинных связностей (∇ и $\bar{\nabla}$) связаны соотношением

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x);$$

при этом тензор деформации $P = \bar{\nabla} - \nabla$ равен нулю.

Пусть многообразие $A^n = (M, \nabla)$, оснащенное аффинной связностью ∇, допускает геодезическое отображение на псевдориманово многообразие $V^n = (M, g)$, где g — метрический тензор в V^n. Диффеоморфизм $f : A^n \to V^n$ является аффинным отображением тогда и только тогда, когда метрический тензор g в V^n параллелен в A^n, т.е.

$$\nabla \bar{g} = 0.$$

Аффинное отображение многообразия $A^n = (M, \nabla)$ на себя называется аффинным преобразованием в A^n. Множество всех аффинных преобразований в A^n образует аффинную группу в A^n.

Векторное поле X на A^n называется бесконечно малым аффинным преобразованием, или аффинным (киллинговым) векторным полем, а также аффинным движением, если это поле генерирует локальную однопараметрическую группу f_t в окрестности U любой точки $p \in M$, которая сохраняет аффинную связность, т.е. отображение $f_t : M \to M$ является аффинным преобразованием [13]. Векторное поле X на M является инфинитезимальным аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда

$$\nabla_Y (L_X - \nabla_X) = R(X, Y) \tag{1.7}$$

для каждого векторного поля Y на M, где L_X — производная Ли вдоль X (см. [38]).

Производная Ли аффинной связности ∇ с компонентами Γ^i_{jk} является тензорным полем типа $(1, 2)$ и имеет вид

$$L_X \Gamma^i_{jk} \equiv \partial_{jk}\xi^i + \xi^l \partial_l \Gamma^i_{jk} - \Gamma^l_{jk}\partial_l \xi^i + \Gamma^i_{lk}\partial_j \xi^l + \Gamma^i_{jl}\partial_k \xi^l \equiv\equiv \xi^i_{,jk} - R^i_{jkl}\xi^l$$

(запятая здесь и далее означает ковариантную производную).

Для псевдориманова многообразия (M, g) условие $L_X \Gamma^i_{jk} = 0$ можно записать в виде

$$\nabla (L_X g) = 0 \tag{1.8}$$

(см. [13]) или

$$L_X g_{ij} = h_{ij}, \quad h_{ij,k} = 0, \tag{1.9}$$

где ξ^i, Γ^i_{jk} и R^i_{jkl} — соответственно компоненты векторного поля X, связности ∇ и тензорного поля кривизны в координатном репере (∂_i).

Изометрические отображения псевдориманова пространства $V^n = (M, g)$ на себя называются изометрическими преобразованиями на V^n.

Векторное поле X на V^n называется бесконечно малой изометрией, или векторным полем Киллинга, если для каждой точки $p \in M$ существует такая окрестность U точки p, что локальная однопараметрическая группа f_t, определенная векторным полем X, сохраняет метрику, т.е. отображение $f_t : M \to M$ является изометрическим преобразованием (см. [38]). Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось уравнение Киллинга

$$L_X g = 0, \tag{1.10}$$

или, в локальной карте (x, U),

$$L_X g_{ij} \equiv \xi^l \partial_l g_{ij} + g_{il} \partial_j \xi^l + g_{jl} \partial_i \xi^l \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0, \tag{1.11}$$

где L_X — производная Ли вдоль X и $\xi^i \partial_i = X|_U$.

Диффеоморфизм f из $V^n = (M, g)$ на $\bar{V^n} = (\bar{M}, \bar{g})$ называется гомотетией, если длина любой дуги $l \subset V^n$ и длина ее образа $f(l) \subset \bar{V^n}$ пропорциональны с постоянным коэффициентом k, т.е. $f(l) = k \cdot l$.

Необходимым и достаточным условием гомотетичности отображения $f : V^n \to \bar{V^n}$ является равенство $\bar{g} = k f_* g$, $k = \mathrm{const}$. В общей системе координат (x^i) и в координатной форме

$$\bar{g} = kg, \quad \bar{g}_{ij}(x) = k \cdot g_{ij}(x), \quad k = \mathrm{const}\,.$$

Ясно, что любое гомотетическое отображение является специальным аффинным отображением, а для $k = 1$ оно изометрично (см. [13, 107]).

Гомотетические отображения псевдориманова пространства $V^n = (M, g)$ на себя называются гомотетическими преобразованиями в V^n.

Векторное поле X на V^n называется бесконечно малой гомотетией, или гомотетическим векторным полем Киллинга, или также гомотетическим движением, если для каждой точки $p \in M$ существует такая окрестность U точки p, что локальная однопараметрическая группа f_t, определенная векторным полем X, сохраняет метрику с точностью до постоянного множителя k, т.е. отображение $f_t : M \to M$ является гомотетическим преобразованием (см. [13, 107]). В специальной системе координат (x^i), в которой $X = \partial_1$, гомотетическое преобразование определяется уравнением

$$\partial_1 g_{ij}(x) = k g_{ij}(x), \quad k = \mathrm{const}, \tag{1.12}$$

или, в локальной карте (x, U),

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = k g_{ij}, \tag{1.13}$$

где $\xi_i = g_{ij} \xi^j$.

Конформные отображения риманова пространства $V^n = (M, g)$ на себя называются конформными преобразованиями в V^n.

Векторное поле X на V^n называется бесконечно малым конформным преобразованием, или конформным векторным полем Киллинга, или конформным движением, если для каждой точки $p \in M$ существует такая окрестность U точки p, что локальная однопараметрическая группа f_t, определенная векторным полем X, состоит из конформных преобразований (см. [13]).

В специальной системе координат (x^i), в которой $X = \partial_1$, конформное преобразование G_1 характеризуется уравнением

$$\partial_1 g_{ij}(x) = \sigma(x) g_{ij}(x), \tag{1.14}$$

где $\sigma(x)$ — функция.

Конформное движение X в локальной карте (x, U) задается формулой

$$L_X g \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \sigma g_{ij}, \tag{1.15}$$

где $\xi_i = g_{ij} \xi^j$, $X = \xi^i \partial_i$.

Преобразование G_1 гомотетично, если $\sigma \equiv \mathrm{const}$, и изометрично, если $\sigma \equiv 0$.

Проективное преобразование псевдориманова многообразия M^n с проективной структурой Π сохраняет проективную структуру Π и переводит геодезические линии снова в геодезические (см. [13, 62]).

Векторное поле X на псевдоримановом многообразии (M, g) с проективной структурой Π называется бесконечно малым проективным преобразованием или проективным движением, если локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная этим полем в окрестности каждой точки $x \in M$, состоит из (локальных) проективных преобразований, т.е. автоморфизмов проективной структуры Π.

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $X = \xi^i \partial_i$ было проективным движением в псевдоримановом многообразии (M, g), является равенство

$$(L_X g_{ij})_{,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}, \tag{1.16}$$

где φ — функция от x^i, называемая определяющей функцией проективного движения X (см. [13]).

Уравнение (1.16) можно записать в виде двух соотношений:

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij} \tag{1.17}$$

(обобщенное уравнение Киллинга) и

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i} \tag{1.18}$$

(уравнение Эйзенхарта). Если $\varphi = \mathrm{const}$, т.е. $\operatorname{Div} X = \mathrm{const}$, то векторное поле X сохраняет аффинную связность и, следовательно, является бесконечно малым аффинным преобразованием, или аффинным движением.

Аффинное движение X является бесконечно малой гомотетией, или гомотетическим движением, если $h_{ij} = \mathrm{const} \cdot g_{ij}$, и бесконечно малой изометрией, или изометрическим движением, если $h_{ij} = 0$ (см. [13]).

После замены переменных

$$h_{ij} = a_{ij} + 2\varphi g_{ij},$$

где a_{ij} — симметричная билинейная форма той же характеристики Сегре χ (т.е. того же типа χ), что и h_{ij}, уравнение (1.18) принимает вид

$$a_{ij,k} = g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}. \tag{1.19}$$

Если (M, g) допускает нетривиальное решение $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта (1.18) типа χ, то оно называется h-пространством типа χ и обозначается H_χ, а g_{ij} называется h-метрикой типа χ. Задав тип тензора h_{ij}, можно найти решение уравнения Эйзенхарта (1.18), а затем и уравнения Киллинга (1.17).

H-пространства типа $\{r_1, \ldots, r_k\}$, $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$, с вещественными базисами элементарных делителей тензора h_{ij} будем называть *жесткими h-пространствами.*

К пятимерным жестким h-пространствам относятся h-пространства следующих возможных типов: $\chi_\nu = \{\nu 1, \ldots, 1\}$, $\nu = 1, 2, 3$,

$$\chi_{221} = \{221\}, \quad \chi_{32} = \{32\}, \quad \chi_{41} = \{41\}, \quad \chi_5 = \{5\}. \tag{1.20}$$

H-пространства типа χ_ν связаны с лоренцевой сигнатурой и были детально изучены в работах А. В. Аминовой [1–8, 12]. Нахождению h-пространств H_{221}, H_{32}, H_{41}, H_5 и исследованию их проективно-групповых свойств посвящена данная работа.

1.3. Уравнения Эйзенхарта в косонормальном репере. Косонормальный репер (Y_h), адаптированный к характеристике Сегре симметричной билинейной формы h_{ij}

$$\chi = \Big\{ r_1 \ldots r_{k_0} \Big(m_1^{k_0+1} \ldots m_{s_{k_0+1}}^{k_0+1} \Big) \ldots \Big(m_1^k \ldots m_{s_k}^k \Big) \Big\}$$

задается в области $V \subset M^n$ разбиением множества индексов $I = \{1, \ldots, n\}$

$$I = \bigcup_{\alpha=1}^{k} I_\alpha, \quad I_\alpha = \big\{ s \bigm| n_\alpha + 1 \leqslant s \leqslant n_\alpha + r_\alpha \big\},$$

$$n_1 = 0, \quad n_\alpha = \sum_{l=1}^{\alpha-1} r_l, \quad r_1 + \cdots + r_k = n, \quad \alpha = 2, \ldots, k,$$

и биекцией

$$\sim : I \to I, \quad I_\alpha \ni h \to \tilde{h} = 2n_\alpha + r_\alpha + 1 - h \in I_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, k,$$

обладающей свойством $\sim \circ \sim = \mathrm{id}_I$. В косонормальном репере индексы (Y_h) поднимаются и опускаются с помощью метрики

$$\bar{g}_{pq} = g(Y_p, Y_q) \equiv \theta_p(Y_q) = e_p \delta_p^{\tilde{q}}, \quad e_p = \pm 1,$$

например, $\theta_p = e_p \theta^{\tilde{p}}$ (см. [13]).

В терминах локальной координатной системы каноническая форма $\theta = \theta^i E_i$ задается соотношением

$$\theta^i = \Theta^i_j dx^j, \quad dx^k = \underset{i}{\xi}^k \theta^i \tag{1.21}$$

(см. [13, с. 96]), где $\left(\Theta^i_j\right)$ — обратная матрица для $\left(\underset{j}{\xi}^k\right)$:

$$\underset{k}{\xi}^i \Theta^k_j = \delta^i_j. \tag{1.22}$$

Набор линейно независимых форм θ^i образует в каждой точке $p \in M$ корепер, дуальный к базису ξ в T_pM.

Пусть $(Y_1, \ldots, Y_n) = \left(\underset{1}{\xi}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \ldots, \underset{n}{\xi}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ — косонормальный репер в области $V \subset M$, $U \subset V$ — координатная окрестность, $(X_i) \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ — натуральный репер, $g_{ij} = g(X_i, X_j)$. Для 1-формы θ_h, сопряженной векторному полю Y_h относительно $g\big|_V$,

$$(\theta_h, Y_l) \equiv \theta_h\left(Y_l\right) = g\left(Y_h, Y_l\right), \quad l = 1, \ldots, n,$$

из (1.21),(1.22) имеем

$$\theta_h\big|_U = \underset{h}{\xi}_i dx^i = e_h \theta^{\tilde{h}}\big|_U, \quad \Theta^h_i = e_h \underset{\tilde{h}}{\xi}_i, \quad h = 1, \ldots, n.$$

Разрешив уравнения $g_{ij} \underset{h}{\xi}^i = \underset{h}{\xi}_j$ относительно g_{ij}, получим

$$g_{ij} = \sum_{h=1}^n e_h \underset{h}{\xi}_i \underset{\tilde{h}}{\xi}_j, \quad \text{или} \quad g\big|_U = \sum_{h=1}^n e_h \theta_h \otimes \theta_{\tilde{h}} \equiv \sum_{h=1}^n e_h \theta_h \theta_{\tilde{h}}.$$

Из этих соотношений следует формула перехода от косонормального репера $(Y_1, \ldots, Y_n)$ на U к координатному реперу $(X_1, \ldots, X_n)$:

$$X_j = \sum_{h=1}^n e_h \underset{\tilde{h}}{\xi}_j Y_h, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.23}$$

а также формула для компонент g^{ij} контравариантного метрического тензора g_c:

$$g^{ij} = \sum_{h=1}^n e_h \underset{h}{\xi}^i \underset{\tilde{h}}{\xi}^j, \quad \text{или} \quad g_c\big|_U = \sum_{h=1}^n e_h Y_h \otimes Y_{\tilde{h}}.$$

В силу (1.23) для билинейной формы h на V имеем

$$h_{ij} = h(X_i, X_j) = \sum_{p,q=1}^n e_p e_q h(Y_p, Y_q) \underset{\tilde{p}}{\xi}_i \underset{\tilde{q}}{\xi}_j.$$

Аналогично,

$$h^{ij} = \sum_{p,q=1}^n e_p e_q h(Y_p, Y_q) \underset{\tilde{p}}{\xi}^i \underset{\tilde{q}}{\xi}^j.$$

Отсюда, введя обозначения $\bar{h}_{pq} = h(Y_p, Y_q)$, получим (см. [13, с. 99])

$$h = \sum_{p,q=1}^{n} e_p e_q \bar{h}_{pq} \theta_{\tilde{p}} \otimes \theta_{\tilde{q}} \equiv \sum_{p,q=1}^{n} e_p e_q \bar{h}_{pq} \theta_{\tilde{p}} \theta_{\tilde{q}}.$$

Определим в V систему инвариантов $\gamma_{lpk} = -\gamma_{plk}$ (коэффициенты вращения Риччи (см. [62, § 30]) равенствами

$$\nabla_{Y_k} Y_l \equiv \sum_{p=1}^{5} e_p \gamma_{lpk} Y_p = \gamma_{lk}^{p} Y_p, \tag{1.24}$$

где $\gamma_l{}^p{}_k = e_p \gamma_{l\tilde{p}k}$ — компоненты 1-формы связности ω_j^i в косорепере (Y_h):

$$\omega_j^i = \gamma_j{}^i{}_l \theta^l = e_i \gamma_{j\tilde{i}l} \theta^l = \sum_{h=1}^{5} e_h e_i \gamma_{j\tilde{i}h} \theta_{\tilde{h}}. \tag{1.25}$$

Используя (1.24), легко убедиться в справедливости равенства

$$[Y_k, Y_h] \equiv \nabla_{Y_k} Y_h - \nabla_{Y_h} Y_k = \sum_{l=1}^{n} e_l \left(\gamma_{lkh} - \gamma_{lhk}\right) Y_{\tilde{l}}, \tag{1.26}$$

где $[Y_k, Y_h]$ — скобка Ли векторных полей Y_k, Y_h:

$$\big[Y_k, Y_h\big]\Big|_U = \left(\underset{k}{\xi^i} \partial_i \underset{h}{\xi^j} - \underset{h}{\xi^i} \partial_i \underset{k}{\xi^j}\right) X_j. \tag{1.27}$$

В косонормальном репере уравнение Эйзенхарта после замены $h = a + 2\varphi g$ примет вид

$$Y_r \bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h (\bar{a}_{hq} \gamma_{\tilde{h}pr} + \bar{a}_{ph} \gamma_{\tilde{h}qr}) = \bar{g}_{qr} Y_p \varphi + \bar{g}_{pr} Y_q \varphi, \quad p, q, r = 1, \ldots, 5,$$

что равносильно

$$d\bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h (\bar{a}_{hq} \omega_{p\tilde{h}} + \bar{a}_{ph} \omega_{q\tilde{h}}) = (Y_q \varphi) \theta_p + (Y_p \varphi) \theta_q, \tag{1.28}$$

где $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$ есть 1-форма связности. Интегрированию этого уравнения для пятимерных жестких h-пространств посвящена вторая часть работы.

1.4. Обзор литературы. В общей теории относительности четырехмерное пространство-время, наделенное симметриями в форме бесконечно малых преобразований, играет исключительно важную роль.

В своей книге «Пространства Эйнштейна» проф. А. З. Петров дал классификацию четырехмерных пространств-времен на основе их (локальных) групп изометрий, т.е. их алгебр Ли векторных полей Киллинга. В работе [90] обсуждались алгебраические и геометрические свойства этих алгебр Ли, были вычислены базисы пятимерных алгебр Ли векторов Киллинга, найденных в книге А. З. Петрова, и рассмотрены приложения.

В пятимерной теории Калуцы—Клейна подробно обсуждается четырёхмерная проекция пятимерных уравнений геодезических. Предложена классификация 5-геодезических, представленных с помощью деформированного 5-конуса. При некоторых предположениях пятимерные уравнения геодезических дают уравнения движения Лоренца для заряженной частицы. Собственная масса и собственный заряд вводятся как новые параметры частиц; предложены формулы для массы и заряда (см. [98]).

Пятимерная общая теория относительности с источниками, которые являются пятимерными точечными частицами или струнами, была исследована в качестве поучительной модели для изучения классических теорий Калуцы—Клейна. В [105] получены уравнения поля и уравнения движения пробной частицы, при этом внимание было уделено только тем решениям, которые изометричны в дополнительном измерении. Получены выражения для гравитационной и инерционной масс, электрического заряда и скалярной массы. Пробные частицы и источники рассматривались как нити, намотанные на компактное дополнительное измерение; одиночная нить является источником поля, которое является изометрическим или приближенно изометрическим вдоль дополнительного измерения. Предложены некоторые подходы, могущие привести к реалистичной теории Калуцы—Клейна.

В [114] рассматриваются векторы Киллинга в пятимерном статическом пространстве. Общие проблемы, касающиеся, в частности, существования и максимального числа векторов Киллинга, изучались в работах по геометрии (см., например, [125]).

В физических приложениях векторы Киллинга используются во многих задачах (см., например, работу А. Коли и Дж. Таппер [76]), включая задачи, связанные с гравитацией.

В [126] доказан факт жесткости для групп, действующих на псевдоримановых многообразиях с сохранением непараметризованных геодезических.

В работе К. М. Буданова и А. Я. Султанова [28] получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования расслоения Вейля второго порядка над дифференцируемым многообразием со связностью полного лифта. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых векторное поле является инфинитезимальным аффинным преобразованием.

В работе А. Фиаловски [80] изучалось пространство модулей всех комплексных пятимерных алгебр Ли, реализуемое как стратификация по орбифолдам, связанным скачкообразными деформациями. Орбифолды задаются действием конечных групп на простых комплексных многообразиях. Используемый метод определения стратификации основан на построении версальных деформаций алгебр Ли, которые позволяют идентифицировать естественные окрестности элементов в пространстве модулей.

В [117] показано, что подходящее двойное расширение конечномерной неразложимой контактной алгебры Ли снова является контактной алгеброй Ли. В частности, за исключением семейства пятимерных неразложимых контактно-разрешимых алгебр Ли $A_{5,35}$, любая пятимерная неразложимая контактно-разрешимая алгебра Ли может быть получена как двойное расширение трёхмерной алгебры Ли. Семейство $A_{5,35}$ можно обобщить на семейство $(4n+1)$-мерных неразложимых контактно-разрешимых алгебр Ли, которые не могут быть получены ни как подвес симплектической алгебры Ли коразмерности 1, ни как двойное расширение контактной подалгебры Ли коразмерности 2.

В [84] разработан формализм, позволяющий систематически строить суперсимметричные теории в зависимости от сигнатур пространства-времени. Используется алгебра суперсимметрии, которая получается путем удвоения спинорного представления, это позволяет обобщить симплектические майорановские спиноры. Для случая, когда спинорное представление является комплексно неприводимым, R-симметрия действует только на внутреннем пространстве. Показано, что возникающие при построении связные группы суть $SO(2)$, $SO(1,1)$, $SU(2)$ и $SU(1,1)$. В качестве приложения построены преобразования суперсимметрии и суперсимметричные лагранжианы для пятимерных векторных мультиплетов при произвольной сигнатуре (t,s). В этом случае группами R-симметрии являются $SU(2)$ или $SU(1,1)$, в зависимости от того, несет ли спинорное представление кватернионную или паракватернионную структуру. Для евклидовой сигнатуры скалярные и векторные кинетические члены различаются по относительному знаку, что согласуется с известными результатами.

Хорошо известно, что пятимерная теория Калуцы—Клейна обеспечивает геометрическую основу для объединения гравитации и электромагнетизма. Также в этой теории были найдены решения солитонного типа (см., например, [87]). Вот почему важно исследовать обобщенные векторы Киллинга в $5D$ пространствах.

В [74] изучался конкретный ряд изометрических векторов Киллинга, полученных из четырехмерного линейного элемента при его определенной параметризации. Аналогичная проблема была решена в [100, 113], где для некоторых линейных элементов были получены генераторы групп изометрий в пятимерном пространстве.

В теориях типа Калуцы—Клейна пятимерное пространство выделяется благодаря тому, что из всех многомерных пространств именно в этом пространстве полное многообразие M^5 вместе с многообразием типа Калуцы—Клейна $M^4 \times S^1$ удовлетворяют классическим уравнениям

Эйнштейна—Виттена. Отметим, что решение системы уравнений

$$\xi^k \partial_k \tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{ik} \partial_j \xi^k + \tilde{g}_{kj} \partial_i \xi^k = \Phi \tilde{g}_{ij}$$

для конформных векторов Киллинга приводит к более ясному пониманию природы ограничений на g_{55} для групп изометрий (см. [115]).

В [63] было исследовано поведение малых возмущений метрики Калуцы—Клейна в пятимерном пространстве-времени, получены решения уравнений для амплитуды метрических возмущений при условии постоянства возмущений в пятом направлении. Небольшие возмущения отождествляются с гравитационными волнами.

В [118] с помощью жордановых матриц была представлена алгебраическая классификация симметрических тензоров второго порядка в пятимерных лоренцевых пространствах типа Калуцы—Клейна. Показано, что возможными типами Сегре являются $[1,1111]$, $[2111]$, $[311]$, $[z\bar{z}111]$ и их вырождения. Найден набор канонических форм для каждого типа Сегре. Также изучаются возможные непрерывные группы симметрий для каждой канонической формы.

Римановы симметрические пространства имеют следующие два класса пространств в качестве своих естественных обобщений: (A) класс GS-пространств (обобщенно-симметрические римановы пространства), (B) класс GPS-пространств (обобщенные поточечно-симметрические римановы пространства). О. Ковальский показал (см. [99]), что отношение включения $(A) \subset (B)$ между этими двумя классами является строгим.

В [106] утверждается, что в размерности 5 класс (A) и класс (B) должны совпадать.

В [89] представлен новый подход к алгебраической классификации симметричных тензоров второго порядка в пятимерном пространстве-времени. Найдены возможные типы Сегре для симметричного двухвалентного тензора. Получен набор канонических форм для каждого типа Сегре. Также сформулирована теорема, в которой собраны некоторые основные результаты, касающиеся алгебраической структуры тензора Риччи в пятимерном пространстве-времени.

Существование так называемого «фантомного» скалярного поля в некотором римановом пространстве V_4, для которого эффективный тензор энергии-импульса $T^{(st)}$ обращается в нуль в пятимерной теории Калуцы—Клейна, исследуется с помощью условий интегрируемости соотношений вида

$$\Phi_{;\mu;\nu} = k\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} + b g_{\mu\nu},$$

найденных в [95].

В [45] исследованы генераторы групп конформных движений, допускаемых метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{11}(z)dt^2 - dz^2 - g_{33}(z)d\nu^2 - \big(g_{33}(z)\sin^2\nu + g_{55}(z)\cos^2\nu\big)\, d\varphi^2 - \\ - 2g_{55}(z)\cos\nu d\varphi d\psi - g_{55}(z)d\psi^2. \end{aligned}$$

Наличие конформных векторных полей Киллинга позволяет описать законы сохранения для бесследовых тензорных величин (см. например, [83]).

Пятимерное риманово многообразие представляет особый интерес в теориях Калуцы—Клейна (см. [124]). Кроме того, решение обобщенной системы приводит к более глубокому анализу ограничений, которые были наложены на g_{55} в [44] при поиске ряда изометрических киллинговых полей.

В [121] описывается классификация римановых пространств с пятимерной группой движений с точки зрения решения уравнений Дирака. Идентифицирован класс пространств, в которых уравнение Дирака не допускает полного разделения переменных; точные решения уравнения Дирака получаются в этих пространствах методом некоммутативного интегрирования.

В [110] получена предельная диаграмма для классификации Сегре в пятимерном пространстве-времени, расширяющая недавнюю работу по пределам тензора энергии-импульса в общей теории относительности. Некоторые результаты Героча (см. [85]) о границах пространства-времени в общей теории относительности распространяются на пятимерное пространство-время Калуцы—Клейна.

В [69] рассматривался метрический тензор однородного изотропного пятимерного псевдориманова пространства, разрешающий соответствующие уравнения Эйнштейна в случае, когда пространственная компонента является плоской, сферической или псевдосферической.

Новая пятимерная классическая единая теория поля типа Калуцы—Клейна формулируется с использованием двух отдельных скалярных полей. Показано, что предложенная процедура решает проблему изменчивости параметра гравитационной связи без требования конформной инвариантности. Соответствующие уравнения поля обсуждаются с учетом возможной индукции градиентов скалярного поля электромагнитными полями. В [103] получен новый предел соответствия, в котором уравнения поля приводят к обычным уравнениям Эйнштейна—Максвелла без условия постоянства скалярного поля.

В [39] геометрическая модель гравитационного взаимодействия с электромагнитным полем в аффинно-метрическом пространстве с кручением и неметричностью представлена как динамика пустого пятимерного аффинно-метрического пространства. Гравитационное и электромагнитное поля в модели выражаются через метрический тензор пятимерного пространства-времени. Уравнения теории выводятся из вариационного принципа с использованием формализма $(4+1)$-расщепления. Получены точные сферически симметричные решения системы полевых уравнений предложенной теории и исследованы их возможные эффекты в астрофизике и физике элементарных частиц.

В [104] рассматриваются пятимерные группы Ли с многозначными функциями Казимира. Показано, что в случае, когда группа Ли состоит из существенно многозначных функций Казимира, пространство орбит коприсоединенного представления является неполухаусдорфовым, что позволяет сформулировать критерий идентификации этих групп. Полные инволютивные множества функций Казимира извлекаются для всех вещественных пятимерных алгебр Ли, и по этому критерию идентифицируются две алгебры Ли с нехаусдорфовым пространством орбит.

В [75] изучено множество однородных геодезических пятимерных обобщенных симметрических пространств и найдено несколько интересных вариантов поведения геодезических.

В рамках пятимерной теории гравитации рассмотрены пространства, которые допускают семейство максимально симметричных трехмерных подпространств. Для этих пространств построены пятимерные вакуумные уравнения Эйнштейна и введен пятимерный аналог массовой функции. Соответствующий ей закон сохранения некоторого заряда приводит к пятимерному аналогу теоремы Биркгофа. Отсюда следует, что для рассматриваемых пространств условие цилиндричности реализуется динамически. Для некоторых полученных метрик условие регулярности приводит к замкнутости пятой координаты. При этом оказывается возможным связать величину периода пятой координаты с сохраняющимся зарядом. Обсуждается проблема разделения динамических степеней свободы скалярного и гравитационного полей, полученных в результате редукции исходного пятимерного действия к четырехмерному виду, и связанная с этим проблема конформной неоднозначности калибровки 4-метрики. Параметризация скалярного поля и 4-метрики, приводящая к конформно-инвариантной теории взаимодействующих скалярного и гравитационного полей, представляется автору статьи [29] наиболее естественной.

Последние разработки в теории струн позволяют предположить существование дополнительных пространственных измерений, которые не являются ни малыми, ни компактными. Основой множества космологических моделей бран является та, в которой поля материи ограничены бранным миром, заключенным в пять измерений (объем). Используя основные результаты алгебраической классификации симметричных тензоров второго порядка в пятимерном пространстве-времени (см. [89, 118]), авторы работы [116] представили две теоремы, содержащие некоторые результаты об алгебраической структуре симметричных тензоров второго порядка в пятимерном пространстве. Показано, как можно по индукции получить классификацию и канонические формы симметричного тензора второго ранга на n-мерных $(n > 5)$ пространствах, исходя из классификации в пятимерных пространствах, представить типы Сегре и соответствующие канонические формы в размерности n. Эта классификация важна в контексте n-мерных бранных миров, а также в рамках $11D$ супергравитации и $10D$ теории суперструн.

В [96] изучена структура расслоении Зейферта на односвязных 5-многообразиях. Полученные результаты используются для построения метрик Эйнштейна с положительной кривизной Риччи на указанных многообразиях.

В [109] рассматриваются пятимерные космологические модели в геометрии Лиры с зависящей от времени калибровочной функцией. Получены точные решения пятимерных вакуумных уравнений, обсуждаются их свойства.

В [86] проведено исследование некоторых отношений между алгеброй Ли бесконечно малых конформных преобразований касательного расслоения с синектическим лифтом римановой метрики и алгеброй Ли бесконечно малых проективных преобразований.

В работе А. С. Киселева [36] получен ряд решений для пятимерной изотропной космологической модели, построенной на базе ОТО. Материя, заполняющая Вселенную, представлена в виде идеальной жидкости. Показано, что в рамках пятимерной космологии можно объяснить современные наблюдаемые данные о характере эволюции Вселенной. В [37] того же автора получены космологические решения в рамках обобщенной теории Калуцы—Клейна для случая пятимерного пространства Римана—Вейля. Материя в виде идеальной жидкости индуцирует неметричность пространства-времени. Утверждается, что такая теория дает адекватное описание современного этапа эволюции Метагалактики. В рамках пятимерной геометрической теории получен ряд решений для модели, описывающей самогравитирующую идеальную жидкость в пятимерном пространстве с неметричностью типа Вейля [93].

В [92] дан краткий обзор псевдоримановой геометрии пятимерного однородного пространства с конформной группой $O(4,2)$. Описана топология пространства и обсуждается его связь с конформно компактифицированным пространством Минковского. Описана компактификация с помощью геометрии сферы Ли. Отмечается возможное применение теории START Хайме—Келлера с использованием ее предшественника — 5-оптики Ю. Б. Румера.

В [77] исследуются пятимерные псевдоримановы многообразия, снабженные почти параконтактной структурой, которая является аналогом почти контактной структуры в римановой геометрии. Предполагается, что кривизна и аффинор-структуры коммутируют. Эти многообразия допускают совместимую косимплектическую структуру в смысле П. Либермана. Найдены явные выражения для связности, кривизны, кривизны Вейля и тензора Риччи. Классифицированы многообразия с контактным потенциалом Риччи и локально плоские многообразия. Описаны все связные односвязные группы Ли, допускающие левоинвариантную структуру. Изучаемые многообразия являются пространствами Уокера — многообразиями с параллельным изотропным распределением, однако классификационная теорема Уокера не применяется.

В работе Й. Микеша [108] пятимерное риманово многообразие M^5 с неприводимой $SO(3)$-структурой рассмотрено в качестве примера абстрактного статистического многообразия. Доказано, что если M^5 является статистическим многообразием постоянной кривизны, то метрика риманова многообразия является метрикой Эйнштейна. Показано, что пятимерная евклидова сфера с неприводимой $SO(3)$-структурой не может быть сопряженным симметричным статистическим многообразием. Получены некоторые результаты для пятимерного риманова многообразия с почти интегрируемой $SO(3)$-структурой. Доказано, в частности, что тензор интегрируемой $SO(3)$-структуры на пятимерном римановом многообразии является гармоническим симметричным тензором и определяет первый интеграл третьего порядка уравнений геодезических. Рассмотрены некоторые топологические свойства пятимерных компактных и конформно-плоских римановых многообразий с неприводимой $SO(3)$-структурой.

В работе [111] методы Т. Т. Думитреску, Г. Фестуччиа и Н. Зейберга (см. [79]) обобщены на пятимерные римановы многообразия M; изучена связь между геометрией в M и числом решений обобщенного спинорного уравнения Киллинга, полученного из пятимерной супергравитации. Существование одной пары решений связано с почти контактными метрическими структурами. Обсуждается случай $M = S^1 \times M^4$, где M расслоено подмногообразиями со специальными кватернион-келеровыми свойствами. В случае двух пар решений замыкание подалгебры изометрий, порожденной решениями, требует, чтобы M было S^3- или T^3-расслоением на римановой поверхности. Предложена новая суперсимметричная теория для $N = 1$ векторного мультиплета на K-контактном многообразии, допускающая решения спинорного уравнения Киллинга.

В [101] получены два пятимерных точных решения для пространства-времени типа I Бианки в теории гравитации $f(R,T)$ в предположении о постоянном параметре замедления и законе вариации параметра Хаббла, соответствующих двум различным космологическим моделям, сингулярной и неособой; для обеих моделей обсуждается их физическое поведение.

В [112] исследовался жесткий предел $5D$ конформной супергравитации с минимальной суперсимметрией на римановых многообразиях. Необходимым и достаточным условием существования решения является существование конформного вектора Киллинга. Обсуждается, при каких обстоятельствах допускается кинетический член Янга–Миллса в действии векторного мультиплета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминова А. В.* Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения// Гравит. теория относит. — 1970. — № 7. — С. 127–131.
2. *Аминова А. В.* О полях тяготения, допускающих группы проективных движений// Докл. АН СССР. — 1971. — *197*, № 4. — С. 807–809.
3. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. I// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 3—13.
4. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. II// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 14–20.
5. *Аминова А. В.* О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел/ Препринт ИТФ АН УССР 71-85Р. — Киев, 1971.
6. *Аминова А. В.* Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 295–316.
7. *Аминова А. В.* Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 317–346.
8. *Аминова А. В.* Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля// Гравит. теория относит. — 1976. — № 10. — С. 9–22.
9. *Аминова А. В.* Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности// Изв. вузов. Мат. — 1988. — № 1. — С. 3–13.
10. *Аминова А. В.* Группы преобразований римановых многообразий// Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ. — 1990. — *22*. — С. 97–165.
11. *Аминова А. В.* Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2 (290). — С. 107–164.
12. *Аминова А. В.* Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий// Усп. мат. наук. — 1995. — *50*, № 1. — С. 69–142.
13. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
14. *Аминова А. В.* Проективные симметрии и законы сохранения в K-пространствах, определяемых полями тяготения// Изв. вузов. Физика. — 2008. — *51*, № 4. — С. 30–37.
15. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 5. — С. 3–13.
16. *Аминова А. В.* Проективные симметрии гравитационных полей. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018.
17. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 7. — С. 3–28.
18. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2009. — *123*. — С. 58–80.
19. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств специального вида// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 5. — С. 97–102.

20. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. I. H-пространства типа $\{32\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2018. — № 4. — С. 21–31.
21. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. II. H-пространства типа $\{41\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 45–55.
22. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. III. H-пространства типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 56—66.
23. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* H-пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 4. — С. 4–12.
24. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 10. — С. 87–93.
25. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств H_5 типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2020. — № 1. — С. 4–11.
26. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О свойствах проективных алгебр Ли жестких h-пространств H_{32} типа $\{32\}$// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — *162*, № 2. — С. 111–119.
27. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Алгебры Ли проективных движений пятимерных h-пространств H_{221} типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 12. — С. 9–22.
28. *Буданов К. М., Султанов А. Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3—13.
29. *Гладуш В. Д.* Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы—-Клейна// Теор. мат. физ. — 2003. — *136*, № 3. — С. 480—495.
30. *Голиков В. И.* О геодезическом отображении полей тяготения общего вида// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — № 12. — С. 97–129.
31. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.
32. *Жукова Л. И.* Римановы пространства с проективной группой// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 13—18.
33. *Жукова Л. И.* Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай)// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 19–25.
34. *Жукова Л. И.* О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 26–30.
35. *Жукова Л. И.* Римановы пространства, допускающие проективные преобразования// Изв. вузов. Мат. — 1973. — № 6. — С. 37–41.
36. *Киселев А. С.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве-времени// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2010. — № 1. — С. 64–67.
37. *Киселев А. С., Кречет В. Г.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана—Вейля с идеальной жидкостью// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2011. — *3*, № 1. — С. 37–41.
38. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2. — М.: Наука, 1981.
39. *Кречет В. Г., Левкоева М. В., Садовников Д. В.* Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве// Вестн. РУДН. Сер. Физ. — 2001. — *1*, № 9. — С. 33—37.
40. *Кручкович Г. И.* Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1963. — № 24. — С. 74–87.
41. *Кручкович Г. И.* О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1967. — № 33. — С. 3—18.
42. *Петров А. З.* О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1949. — *109*, № 3. — С. 7–36.
43. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — Факториал, 1998.
44. *Рчеулишвили Г. Л.* Сферически-симметричный линейный элемент и векторы Киллинга в пятимерном пространстве// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 3. — С. 345—351.
45. *Рчеулишвили Г. Л.* Обобщенные векторы Киллинга в пятимерном лоренцевом пространстве// Теор. мат. физ. — 1997. — *112*, № 2. — С. 249—253.

46. *Синюков Н. С.* О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — *98*, № 1. — С. 21—23.
47. *Синюков Н. С.* Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 4. — С. 266—267.
48. *Синюков Н. С.* Эквидистантные римановы пространства// Научн. ежегод. Одесса. — 1957. — С. 133—135.
49. *Синюков Н. С.* Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 6. — С. 1312–1314.
50. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 4. — С. 781–782.
51. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — *169*, № 4. — С. 770—772.
52. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
53. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*. — С. 45–116.
54. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1956. — *108*, № 2. — С. 201–203.
55. *Солодовников А. С.* Геодезические классы пространств $V(K)$// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 1. — С. 33–36.
56. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — № 2. — С. 43–102.
57. *Трунев А. П.* Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы—Клейна// Науч. ж. Кубан. гос. агр. ун-та. — 2011. — *71*, № 7. — С. 1–26.
58. *Шарафутдинов В. А.* Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. — Новосибирск:: ИПЦ НГУ, 2018.
59. *Широков П. А.* Тензорное исчисление. — Казань: Изд-во КГУ, 1961.
60. *Широков П. А.* Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во КГУ, 1966.
61. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.
62. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
63. *Abe O.* Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza–Klein space-time// Nuovo Cim. B. — 1994. — *109*, № 6. — P. 659—673.
64. *Aminova A. V.* On geodesic mappings of Riemannian spaces// Tensor. — 1987. — *46*. — P. 179–186.
65. *Aminova A. V.* Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds// Tensor, N.S. — 1993. — *54*. — P. 91–100.
66. *Aminova A. V.* Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics// в кн.: In Memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. 3, part 2. — Изд-во Казан. ун-та: Казань, 1995. — С. 79–103.
67. *Aminova A. V.* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — *113*, № 3. — P. 367–470.
68. *Aminova A. V., Aminov N. A.-M.* Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type VI.1// J. Math. Sci. — 2009. — *158*, № 2. — P. 163–183.
69. *Anchordoqui L. A., Birman G. S.* Metric tensors for homogeneous, isotropic, five-dimensional pseudo-Riemannian models// Rev. Colomb. Mat. — 1998. — *32*. — P. 73–79.
70. *Becerril R., Matos T.* Bonnor solution in five-dimensional gravity// Phys. Rev. D. — 1990. — *41*, № 6. — P. 1895–1896.
71. *Beltrami E.* Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante// Ann. Mat. — 1868. — № 2. — P. 232–255.
72. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbation in Kaluza–Klein cosmologies// Astron. Nachr. — 1990. — *311*, № 3. — P. 151–154.
73. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbations in Kaluza–Klein cosmologies// Nuovo Cim. B. — 1991. — *106*, № 2. — P. 107–122.
74. *Bokhari A. H., Qadir A.* Symmetries of static, spherically symmetric space-times// J. Math. Phys. — 1987. — *28*. — P. 1019–1022.

75. *Calvaruso G., Marinosci R. A.* Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces// Balkan J. Geom. Appl. — 2003. — *8*, № 1. — P. 1–19.
76. *Coley A. A., Tupper B. O. J.* Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance// J. Math. Phys. — 1989. — *30*. — P. 2616–2625.
77. *Dacko P.* Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact Ricci potential/ `arXiv: 1308.6429 [math.DG]`.
78. *Dini U.* Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rapprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra// Ann. Mat. — 1869. — *3*, № 7. — P. 269–293.
79. *Dumitrescu T. T., Festuccia G., Seiberg N.* Exploring curved superspace/ `arXiv: 1205.1115v2 [hep.th]`.
80. *Fialowski A., Penkava M.* The moduli space of complex five-dimensional Lie algebras// J. Algebra. — 2016. — *458*. — P. 422—444.
81. *Fubini G.* Sui gruppi trasformazioni geodetiche// Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. — 1903. — *53*, № 2. — P. 261–313.
82. *Fukui T.* The motion of a test particle in the Kaluza–Klein-type of gravitational theory with variable mass// Astrophys. Space Sci. — 1988. — *141*, № 2. — P. 407–413.
83. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal invariance in physics// Rev. Mod. Phys. — 1962. — *34*, № 3. — P. 442–557.
84. *Gall L., Mohaupt T.* J. High Energy Phys. — 2018. — *2018*. — 53.
85. *Geroch R.* Limits of space-times// Commun. Math. Phys. — 1969. — *13*. — P. 180–193.
86. *Gezer A.* On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric// Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). — 2009. — *119*, № 3. — P. 345—350.
87. *Gross D. J., Perry M. J.* Magnetic monopoles in Kaluza–Klein theories// Nucl. Phys. — 1983. — *B226*. — P. 29–48.
88. *Guendelman E. I.* Kaluza–Klein–Casimir cosmology with decoupled heavy modes// Phys. Lett. B. — 1988. — *201*, № 1. — P. 39–41.
89. *Hall G. S., Rebouas M. J., Santos J., Teixeixa A. F. F.* On the algebraic structure of second order symmetric tensors in 5-dimensionai space-times// Gen. Rel. Gravit. — 1996. — *8*, № 9. — P. 1107–1113.
90. *Hicks J. W.* Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions// All Graduate Plan B and other Reports. — 2011. — *102*. — P. 1–90.
91. *Ho Choon-Lin, Ng Kin-Wang* Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza–Klein cosmology// Phys. Rev. D. — 1991. — *43*, № 10. — P. 3107–3111.
92. *Jadczyk A.* START in a five–dimensional conformal domain/ `arXiv: 1111.5540v2 [math-ph]`.
93. *Kiselev A. S., Krechet V. G.* Static distributions of matter in the five-dimensional Riemann—Weyl space// Russ. Phys. J. — 2012. — *55*, № 4. — P. 417—425.
94. *Knebelman M. S.* Homothetic mappings of Riemann spaces// Proc. Am. Math. Soc. — 1958. — *9*, № 6. — P. 927–928.
95. *Kokarev S. S.* Phantom scalar fields in five–dimensional Kaluza–Klein theory// Russ. Phys. J. — 1996. — *39*, № 2. — P. 146–152.
96. *Kollár J.* Einstein metrics on five-dimensional Seifert bundles// J. Geom. Anal. — 2005. — *15*, № 3. — P. 445–476.
97. *Königs M. G.* Sur les géodésiques a intégrales quadratiques// in: *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV. — Chelsea Publ., 1972. — P. 368—404.
98. *Kovacs D.* The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza–Klein// Gen. Rel. Gravit. — 1984. — *16*, № 7. — P. 645–655.
99. *Kowalski O.* Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leqslant 5$// Rozpravy CSAV, Rada MPV. — 1975. — № 85. — P. 1–61.
100. *Kramer D. Stephani H., MacCallum M., Herlt E.* Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
101. *Ladke L. S., Jaiswal V. K., Hiwarkar R. A.* Five-dimensional exact solutions of Bianchi type-I space-time in $f(R,T)$ theory of gravity// Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Techn. — 2014. — *3*, № 8. — P. 15332–15342.
102. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// Ann. Mat. — 1896. — *24*, № 2. — P. 255–300.
103. *Macedo P. G.* New proposal for a five-dimensional unified theory of classical fields of Kaluza–Klein type/ `arXiv: gr-qc/0101121`.

104. *Magazev A. A.* Casimir functions for five-dimensional Lie groups with a non–semi-Hausdorff space of orbits// Russ. Phys. J. — 2003. — *46*, № 9. — P. 912—920.
105. *Mankoc-Borstnik N., Pavsi M.* A systematic examination of five-dimensional Kaluza–Klein theory with sources consisting of point particles or strings// Nuovo Cim. — 1988. — *99A*, № 4. — P. 489–507.
106. *Marinosci R. A.* Classification of five-dimensional generalized pointwise symmetric Riemannian spaces// Geom. Dedic. — 1995. — *57.* — P. 11–53.
107. *Mikesh J.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky University, 2019.
108. *Mikesh J., Stepanova E.* A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$-structure as a model of abstract statistical manifold// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2014. — *45.* — P. 111—128.
109. *Mohanty G., Mahanta K. L., Bishi B. K.* Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field// Astrophys. Space Sci. — 2007. — *310.* — P. 273—276.
110. *Paiva F. M., Rebouca M. J., Teixeira A. F. F.* Limits of space–times in five dimensions and their relation to the Segre types// J. Math. Phys. — 1997. — *38.* — P. 4228–4236.
111. *Pan Yiwen* Rigid supersymmetry on five-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry/ `arXiv:1308.1567v4 [hep.th]`.
112. *Pini A., Rodriguez-Gomez D., Schmudea J.* Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions/ `arXiv:1504.04340v3 [het-th]`.
113. *Rcheulishvili G.* Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. — Miramare-Trieste: Preprint ICTP, IC/92/108, 1992.
114. *Rcheulishvili G. L.* The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space// J. Math. Phys. — 1992. — *33.* — P. 1103–1108.
115. *Rcheulishvili G. L.* Conformal Killing vectors in five-dimensional space/ `arXiv:gr-qc/9312004v1`.
116. *Rebouças M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* Classification of energy momentum tensors in $n > 5$ dimensional space-times: A review// Brazil. J. Phys. — 2004. — *34*, № 2A. — P. 535–543.
117. *Rodroguez-Vallarte M. C., Salgado G.* Five-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions// J. Geom. Phys. — 2016. — *100.* — P. 20—32.
118. *Santos J., Rebouças M. J., Teixeira A. F. F.* Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza—Klein-type theories// J. Math. Phys. — 1995. — *36.* — P. 3074–3084.
119. *Schur F.* Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen// Math. Ann. — 1886. — *27.* — P. 537–567.
120. *Starks S. A., Kosheleva O., Kreinovich V.* Kaluza–Klein 5D ideas made fully geometric/ `arXiv:0506218v1 [physics.class-ph]`.
121. *Varaksin O. L., Klishevich V. V.* Integration of Dirac equation in Riemannian spaces with five-dimensional group of motions// Russ. Phys. J. — 1997. — *40*, № 8. — P. 727—731.
122. *Wesson P. S.* A physical interpretation of Kaluza–Klein cosmology// Astrophys. J. — 1992. — *394*, № 1. — P. 19—24.
123. *Wesson P. S.* The properties of matter in Kaluza–Klein cosmology// Mod. Phys. Lett. A. — 1992. — *7*, № 11. — P. 921–926.
124. *Witten E.* Search for a realistic Kaluza–Klein theory// Nucl. Phys. B. — 1981. — *186.* — P. 412–428.
125. *Yano K.* On harmonic and Killing vectors// Ann. Math. — 1952. — *55.* — P. 38—45.
126. *Zeghib A.* On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds// Adv. Math. — 2016. — *297.* — P. 26—53.

Аминова Ася Васильевна
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `asya.aminova@kpfu.ru`

Хакимов Джамолиддин Рахмонович
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `dzhamoliddink@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 30–42
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-30-42

УДК 517.977, 534.112

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ СМЕЩЕНИЕМ НА ДВУХ КОНЦАХ С ЗАДАННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

© 2022 г. **В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША**

Аннотация. Рассматривается задача граничного управления для уравнения колебания струны с заданными начальными и конечными условиями, с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени. Управление осуществляется смещением на двух концах струны. Предложен конструктивный подход построения граничного управления колебаниями струны смещением на двух концах с заданными начальными, конечными условиями и с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени. Проведен вычислительный эксперимент с построением соответствующих графиков и их сравнительный анализ, которые подтверждают полученные результаты.

Ключевые слова: управление колебаниями, граничное управление, многоточечные промежуточные состояния, разделение переменных.

THE PROBLEM OF BOUNDARY CONTROL OF VIBRATIONS OF A STRING BY DISPLACEMENTS AT TWO ENDS WITH GIVEN STATES AT INTERMEDIATE TIME MOMENTS

© 2022 **V. R. BARSEGHYAN, S. V. SOLODUSHA**

Abstract. The boundary control problem is considered for the equation of string vibration with given initial and final conditions, with given values of the deflection function and velocities of points at different intermediate times. The control is carried out by displacement at the two string ends. We propose a constructive approach for constructing boundary control of string vibrations by displacement at two ends with given initial and final conditions and values of the deflection function and velocities of points given at different intermediate times. A computational experiment was carried out with the construction of the corresponding graphs and their comparative analysis, which confirmed the results obtained.

Keywords and phrases: vibrations control, boundary control, multipoint intermediate states, variable separation.

AMS Subject Classification: 93C10, 93C95, 70Q05

1. Введение. Управляемые колебательные процессы широко исследуются в различных теоретических и прикладных областях науки. Необходимость управления колебательными процессами как распределенными, так и граничными воздействиями, является актуальной задачей, решению

Работа С. В. Солодуши выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема №. АААА-А21-121012090034-3).

которой уделяют внимание многие исследователи [1–3, 5–7, 9, 10, 12–15]. На практике часто возникают задачи граничного управления, в частности, когда нужно сгенерировать с заранее заданными (желаемыми) промежуточными параметрами (формой прогиба, скоростью точек струны и т. д.) колебания. Моделирование и управление динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с частными производными, с промежуточными условиями являются активно развиваемым направлением в современной теории управления. Исследованиям таких задач посвящены, в частности, работы [4, 5, 11–15]. Данная работа примыкает к работам [5, 14, 15].

Цель данной работы состоит в разработке конструктивного подхода построения функции граничного управления колебаниями струны смещением на двух концах с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени.

2. Постановка задачи. Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т.е. отклонения от состояния равновесия, описывается функцией $Q(x,t)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $t > 0$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$Q(0,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

где функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — граничные управления.

В уравнении (1) $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность однородной струны.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, \ldots, m)$:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T,$$

заданы значения функции прогиба и значения скоростей точек струны

$$Q(x,t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2}. \tag{5}$$

Здесь предполагается, что m — четное число.

Задача граничного управления колебаниями струны с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек струны в промежуточные моменты времени ставится следующим образом: среди возможных граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, требуется найти управления, переводящие систему из заданного начального состояния (2), удовлетворяя промежуточным условиям (4) и (5), в конечное состояние

$$Q(x,T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{6}$$

Предполагается, что функция $Q(x,t) \in C^2(\Omega_T)$, где множество $\Omega_T = \{(x,t) : x \in [0,l],\ t \in [0,T]\}$. Будем предполагать, что функции $\varphi_i(x) \in C^2[0,l]$, $i = 0, 2\alpha - 1, m+1$ при $\alpha = 1, \ldots, m/2$, а $\psi_j(x) \in C^1[0,l]$, $j = 0, 2\alpha, m+1$ при $\alpha = 1, \ldots, m/2$. Предполагается также, что все функции такие, что выполняются условия согласования:

$$\mu(0) = \varphi_0(0), \quad \dot{\mu}(0) = \psi_0(0), \quad \nu(0) = \varphi_0(l), \quad \dot{\nu}(0) = \psi_0(l), \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \mu(t_i) = \varphi_i(0), \quad \dot{\mu}(t_j) = \psi_j(0), \quad \nu(t_i) = \varphi_i(l), \quad \dot{\nu}(t_j) = \psi_j(l), \\ i = 2\alpha - 1, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\mu(T) = \varphi_T(0), \quad \dot{\mu}(T) = \psi_T(0), \quad \nu(T) = \varphi_T(l), \quad \dot{\nu}(T) = \psi_T(l). \tag{9}$$

Отметим, что в постановке задачи значения функции прогиба (4) и значения скоростей точек струны (5) можно задавать в любой очередности для промежуточных моментов времени и от этого не зависит применяемый подход.

Отметим также, что так как в отдельные промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, \ldots, m)$ заданы или только значения функции прогиба (4), или только значения производной функции прогиба (5) струны, то использовать подход поэтапного решения задачи оптимального управления нецелесообразно. Поэтому в работе предлагается такой подход решения рассмотренной задачи управления, в котором учитывается специфика промежуточных условий.

3. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Так как граничные условия (3) неоднородны, решение поставленной задачи сводим к задаче с нулевыми граничными условиями.

Решение уравнения (1) ищем в виде суммы

$$Q(x,t) = V(x,t) + W(x,t), \tag{10}$$

где $V(x,t)$ — неизвестная функция с однородными граничными условиями

$$V(0,t) = V(l,t) = 0, \tag{11}$$

требующая определения, а $W(x,t)$ — решение уравнения (1) с неоднородными граничными условиями

$$W(0,t) = \mu(t), \quad W(l,t) = \nu(t). \tag{12}$$

Функция $W(x,t)$ имеет вид

$$W(x,t) = (\nu(t) - \mu(t))\frac{x}{l} + \mu(t). \tag{13}$$

Подставив (10) в (1) и учитывая (13), получим уравнение для функции $V(x,t)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{14}$$

где

$$F(x,t) = (\ddot{\mu}(t) - \ddot{\nu}(t))\frac{x}{l} - \ddot{\mu}(t). \tag{15}$$

В силу начальных, промежуточных и граничных условий, соответственно (2), (4)—(6), функция $V(x,t)$ должна удовлетворять следующим начальным условиям:

$$V(x,0) = \varphi_0(x) - (\nu(0) - \mu(0))\frac{x}{l} - \mu(0), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x) - (\dot{\nu}(0) - \dot{\mu}(0))\frac{x}{l} - \dot{\mu}(0), \tag{16}$$

промежуточным условиям

$$\begin{gathered} V(x,t_i) = \varphi_i(x) - (\nu(t_i) - \mu(t_i))\frac{x}{l} - \mu(t_i), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(x) - (\dot{\nu}(t_j) - \dot{\mu}(t_j))\frac{x}{l} - \dot{\mu}(t_j), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \end{gathered} \tag{17}$$

и конечным условиям

$$V(x,T) = \varphi_T(x) - (\nu(T) - \mu(T))\frac{x}{l} - \mu(T), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) - (\dot{\nu}(T) - \dot{\mu}(T))\frac{x}{l} - \dot{\mu}(T). \tag{18}$$

Следовательно, с учетом условий (7)—(9), условия (16)—(18) запишутся следующим образом:

$$V(x,0) = \varphi_0(x) - (\varphi_0(l) - \varphi_0(0))\frac{x}{l} - \varphi_0(0), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x) - (\psi_0(l) - \psi_0(0))\frac{x}{l} - \psi_0(0), \tag{19}$$

$$\begin{gathered} V(x,t_i) = \varphi_i(x) - (\varphi_i(l) - \varphi_i(0))\frac{x}{l} - \varphi_i(0), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(x) - (\psi_j(l) - \psi_j(0))\frac{x}{l} - \psi_j(0), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \end{gathered} \tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
&V(x,T) = \varphi_T(x) - (\varphi_T(l) - \varphi_T(0))\frac{x}{l} - \varphi_T(0),\\
&\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) - (\psi_T(l) - \psi_T(0))\frac{x}{l} - \psi_T(0).
\end{aligned} \tag{21}
$$

Таким образом, решение задачи сведено к задаче управления (14), (15) с граничными условиями (11), которая формулируется следующим образом: требуется найти такие граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, переводящие колебание, описываемое уравнением (14) с граничными условиями (11), из заданного начального состояния (19) через промежуточные состояния (20) в конечное состояние (21).

4. Решение задачи. Учитывая, что граничные условия (11) однородны и выполнены условия согласованности, согласно теории рядов Фурье, решение уравнения (14) ищем в виде

$$
V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{22}
$$

Представим функции $F(x,t)$, $\varphi_i(x)$ $(i = 0,1,3)$ и $\psi_i(x)$ $(i = 0,2,3)$ в виде рядов Фурье и, подставив их значения вместе с $V(x,t)$ в уравнения (14), (15) и в условия (19)—(21), получим

$$
\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2, \quad F_k(t) = \frac{2a}{\lambda_k l}[\ddot{\nu}(t)(-1)^k - \ddot{\mu}(t)], \tag{23}
$$

$$
V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l}\varphi_0(0), \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l}\psi_0(0), \tag{24}
$$

$$
V_k(t_1) = \varphi_k^{(1)} - \frac{2a}{\lambda_k l}\varphi_1(0), \quad \dot{V}_k(t_2) = \psi_k^{(2)} - \frac{2a}{\lambda_k l}\psi_2(0), \tag{25}
$$

$$
V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l}\varphi_T(0), \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l}\psi_T(0), \tag{26}
$$

где через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ $(i = 0,1,3)$ и $\psi_k^{(i)}$ $(i = 0,2,3)$ обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $F(x,t)$, $\varphi_i(x)$ $(i = 0,1,3)$ и $\psi_i(x)$ $(i = 0,2,3)$.

Общее решение уравнения (23) с начальными условиями (24) и его производная по времени имеют вид

$$
\begin{aligned}
&V_k(t) = V_k(0)\cos\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)\,d\tau,\\
&\dot{V}_k(t) = -\lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k t + \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k t + \int_0^t F_k(\tau)\cos\lambda_k(t-\tau)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{27}
$$

Теперь, учитывая промежуточные (25) и конечные (26) условия, используя подходы, приведенные в работе [4], и в соответствии с условиями согласованности (7)—(9), из (27) получим, что функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)\,d\tau - \int_0^T \nu(\tau)(-1)^k\sin\lambda_k(T-\tau)\,d\tau = C_{1k}(T),\\
&\int_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)\,d\tau - \int_0^T \nu(\tau)(-1)^k\cos\lambda_k(T-\tau)\,d\tau = C_{2k}(T),\\
&\int_0^T \mu(\tau)h_k^{(i)}(\tau)\,d\tau - \int_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_k^{(i)}(\tau)\,d\tau = C_{1k}(t_i), \quad i = 2\alpha-1, \quad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2},
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$\int_0^T \mu(\tau)g_k^{(j)}(\tau)d\tau - \int_0^T \nu(\tau)(-1)^k g_k^{(j)}(\tau)d\tau = C_{2k}(t_j), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2},$$

где

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} - (-1)^k Y_{1k}\right],$$
$$\tilde{C}_{1k}(T) = \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k T,$$
$$C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} - (-1)^k Y_{2k}\right],$$
$$\tilde{C}_{2k}(T) = \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k T,$$
$$C_{1k}(t_i) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} - (-1)^k Y_{1k}^{(i)}\right],$$
$$\tilde{C}_{1k}(t_i) = \lambda_k V_k(t_i) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k t_i - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t_i,$$
$$C_{2k}(t_j) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} - (-1)^k Y_{2k}^{(j)}\right],$$
$$\tilde{C}_{2k}(t_j) = \dot{V}_k(t_j) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k t_j - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k t_j,$$
$$h_k^{(i)}(\tau) = \begin{cases}\sin\lambda_k(t_i - \tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant t_i,\\ 0, & t_i < \tau \leqslant T,\end{cases} \qquad g_k^{(j)}(\tau) = \begin{cases}\cos\lambda_k(t_j - \tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant t_j,\\ 0, & t_j < \tau \leqslant T,\end{cases} \tag{29}$$
$$X_{1k} = \lambda_k\varphi_T(0) - \psi_0(0)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(0)\cos\lambda_k T, \quad X_{2k} = \psi_T(0) - \psi_0(0)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(0)\sin\lambda_k T,$$
$$Y_{1k} = \lambda_k\varphi_T(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_k T, \quad Y_{2k} = \psi_T(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_k T,$$
$$X_{1k}^{(i)} = \lambda_k\varphi_i(0) - \psi_0(0)\sin\lambda_k t_i - \lambda_k\varphi_0(0)\cos\lambda_k t_i, \quad Y_{1k}^{(i)} = \lambda_k\varphi_i(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k t_i - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_k t_i,$$
$$X_{2k}^{(j)} = \psi_j(0) - \psi_0(0)\cos\lambda_k t_j + \lambda_k\varphi_0(0)\sin\lambda_k t_j, \quad Y_{2k}^{(j)} = \psi_j(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k t_j + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_k t_j.$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\sin\lambda_k(T-\tau)\\ \cos\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\cos\lambda_k(T-\tau)\\ h_k^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_k^{(1)}(\tau)\\ g_k^{(2)}(\tau) & (-1)^{k+1}g_k^{(2)}(\tau)\\ \vdots & \vdots\\ h_k^{(m-1)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_k^{(m-1)}(\tau)\\ g_k^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1}g_k^{(m)}(\tau)\end{pmatrix}, \quad C_k(t_1, \ldots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T)\\ C_{2k}(T)\\ C_{1k}(t_1)\\ C_{2k}(t_2)\\ \vdots\\ C_{1k}(t_{m-1})\\ C_{2k}(t_m)\end{pmatrix},$$
$$U(\tau) = \begin{pmatrix}\mu(\tau)\\ \nu(\tau)\end{pmatrix}.$$

Тогда соотношение (28) запишется следующим образом

$$\int_0^T \bar{H}_k(\tau)U(\tau)d\tau = C_k(t_1, \ldots, t_m, T), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{30}$$

Следовательно, для нахождения функции $U(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, получаются бесконечные интегральные соотношения (30).

На практике выбираются первые n гармоник колебаний и решается задача синтеза управления, используя методы теории управления конечномерными системами [4,6,8]. Для первых n гармоник введем следующие обозначения блочных матриц

$$H_n(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1(\tau) \\ \bar{H}_2(\tau) \\ \vdots \\ \bar{H}_n(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_1(t_1, \ldots, t_m, T) \\ C_2(t_1, \ldots, t_m, T) \\ \vdots \\ C_n(t_1, \ldots, t_m, T) \end{pmatrix} \tag{31}$$

с размерностями $(n(m+2) \times 2)$ и $(n(m+2) \times 1)$ соответственно. Для первых n гармоник с учетом (31) из (30) будем иметь

$$\int_0^T H_n(\tau) U_n(\tau) d\tau = \eta_n \tag{32}$$

(здесь и далее обозначение в нижнем индексе буквы n будет означать — «для первых n гармоник»).

Из (32) следует, что первые n гармоник системы (23) с условиями (24)—(26) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n (31) можно найти управление $U_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (32).

Для произвольного числа первых гармоник управляющее воздействие $U_n(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (32), имеет вид [4, 8]

$$U_n(t) = H_n^T(t) S_n^{-1} \eta_n + f_n(t), \tag{33}$$

где $H_n^T(t)$ — транспонированная матрица, $f_n(t)$ — некоторая вектор-функция и такая, что

$$\int_0^T H_n(t) f_n(t) dt = 0, \quad S_n = \int_0^T H_n(t) H_n^T(t) dt. \tag{34}$$

Здесь $H_n(t)H_n^T(t)$ — внешнее произведение, S_n — известная матрица размерностью $(n(m+2) \times n(m+2))$, для которой предполагается, что $\det S_n \neq 0$.

Подставляя (33) в (23), а найденное для $F_k(t)$ выражение — в (27), получим функцию $V_k(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (22) будем иметь

$$V_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x, \tag{35}$$

а с помощью (10) функция прогиба струны $Q_n(x, t)$ для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n(x, t) = V_n(x, t) + W_n(x, t), \tag{36}$$

где

$$W_n(x, t) = (\nu_n(t) - \mu_n(t)) \frac{x}{l} + \mu_n(t). \tag{37}$$

Отметим, что приведенный подход решения позволяет рассматривать задачу граничного управления и для тех случаев, когда в отдельные промежуточные моменты времени заданы только или значения прогиба, или скорости точек струны при различных последовательностях.

5. Построение решения в случае $m = 2$. Для иллюстрации вышеизложенного предположим, что в некоторые промежуточные моменты времени t_1 и t_2 $(0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = T)$ заданы состояние (прогиб) и скорость точек струны в виде:

$$Q(x, t_1) = \varphi_1(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_2} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

В этом случае из формулы (28) будем иметь следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^T \mu(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau) (-1)^k \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau = C_{1k}(T),$$

$$\int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau = C_{2k}(T),$$

$$\int\limits_0^T \mu(\tau)h_k^{(1)}(\tau)d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_k^{(1)}(\tau)d\tau = C_{1k}(t_1),$$

$$\int\limits_0^T \mu(\tau)g_k^{(2)}(\tau)d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k g_k^{(2)}(\tau)d\tau = C_{2k}(t_2), \quad k=1,2,\ldots,$$

где

$$h_k^{(1)}(\tau) = \begin{cases}\sin\lambda_k(t_1-\tau), & 0\leqslant\tau\leqslant t_1,\\ 0, & t_1<\tau\leqslant T,\end{cases} \quad g_k^{(2)}(\tau) = \begin{cases}\cos\lambda_k(t_2-\tau), & 0\leqslant\tau\leqslant t_2,\\ 0, & t_2<\tau\leqslant T,\end{cases}$$

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} - (-1)^k Y_{1k}\right], \quad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} - (-1)^k Y_{2k}\right],$$

$$C_{1k}(t_1) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(t_1) + X_{1k}^{(1)} - (-1)^k Y_{1k}^{(1)}\right], \quad C_{2k}(t_2) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(t_2) + X_{2k}^{(2)} - (-1)^k Y_{2k}^{(2)}\right].$$

Постоянные $\tilde{C}_{1k}(T)$, $\tilde{C}_{2k}(T)$, $\tilde{C}_{1k}(t_1)$, $\tilde{C}_{2k}(t_2)$, X_{1k}, X_{2k}, $X_{1k}^{(}1)$, $X_{2k}^{(2)}$, $Y_{1k}^{(1)}$, $Y_{2k}^{(2)}$ определяются из формулы (29).

Пусть $n=1$ (т.е. $k=1$). Тогда, согласно (31), будем иметь

$$H_1(\tau) = \bar{H}_1(\tau) = \begin{pmatrix}\sin\lambda_1(T-\tau) & \sin\lambda_1(T-\tau)\\ \cos\lambda_1(T-\tau) & \cos\lambda_1(T-\tau)\\ h_1^{(1)}(\tau) & h_1^{(1)}(\tau)\\ g_1^{(2)}(\tau) & g_1^{(2)}(\tau)\end{pmatrix}, \quad \eta_1 = C_1(t_1,t_2,T) = \begin{pmatrix}C_{11}(T)\\ C_{21}(T)\\ C_{11}(t_1)\\ C_{21}(t_2)\end{pmatrix},$$

а из (34) получим

$$S_1 = \int\limits_0^T H_1(\tau)H_1^T(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} & s_{14}^{(1)}\\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} & s_{23}^{(1)} & s_{24}^{(1)}\\ s_{31}^{(1)} & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} & s_{34}^{(1)}\\ s_{41}^{(1)} & s_{42}^{(1)} & s_{43}^{(1)} & s_{44}^{(1)}\end{pmatrix} = 2\int\limits_0^T \left(\begin{matrix} \sin^2\lambda_1(T-\tau) & \to\\ \sin\lambda_1(T-\tau)\cos\lambda_1(T-\tau) & \to\\ h_1^{(1)}(\tau)\sin\lambda_1(T-\tau) & \to\\ g_1^{(2)}(\tau)\sin\lambda_1(T-\tau) & \to\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \to & \sin\lambda_1(T-\tau)\cos\lambda_1(T-\tau) & h_1^{(1)}(\tau)\sin\lambda_1(T-\tau) & g_1^{(2)}(\tau)\sin\lambda_1(T-\tau)\\ \to & \cos^2\lambda_1(T-\tau) & h_1^{(1)}(\tau)\cos\lambda_1(T-\tau) & g_1^{(2)}(\tau)\cos\lambda_1(T-\tau)\\ \to & h_1^{(1)}(\tau)\cos\lambda_1(T-\tau) & (h_1^{(1)}(\tau))^2 & h_1^{(1)}(\tau)g_1^{(2)}(\tau)\\ \to & g_1^{(2)}(\tau)\cos\lambda_1(T-\tau) & h_1^{(1)}(\tau)g_1^{(2)}(\tau) & (g_1^{(2)}(\tau))^2\end{matrix}\right) d\tau.$$

Элементы матрицы S_1 вычисляются с учетом обозначения (29), при этом $\Delta = \det S_1 \neq 0$. Обозначим

$$\widehat{S}_1 = S_1^{-1} = \begin{pmatrix}\widehat{s}_{11} & \widehat{s}_{12} & \widehat{s}_{13} & \widehat{s}_{14}\\ \widehat{s}_{21} & \widehat{s}_{22} & \widehat{s}_{23} & \widehat{s}_{24}\\ \widehat{s}_{31} & \widehat{s}_{32} & \widehat{s}_{33} & \widehat{s}_{34}\\ \widehat{s}_{41} & \widehat{s}_{42} & \widehat{s}s_{43} & \widehat{s}_{44}\end{pmatrix},$$

где $\widehat{s}_{ij} = \widehat{s}_{ji}$, $i,j=\overline{1,4}$.

В явном виде элементы матрицы $\widehat{S}_1$ представляются следующим образом:

$$\widehat{s}_{11} = \frac{1}{\Delta}\Big(s_{22}^{(1)}\Big(s_{33}^{(1)}s_{44}^{(1)} - \big(s_{34}^{(1)}\big)^2\Big) + 2s_{34}^{(1)}s_{24}^{(1)}s_{23}^{(1)} - \big(s_{24}^{(1)}\big)^2 s_{33}^{(1)} - \big(s_{23}^{(1)}\big)^2 s_{44}^{(1)}\Big),$$

$$\widehat{s}_{12} = \widehat{s}_{21} = \frac{1}{\Delta}\Big(s_{12}^{(1)}\Big(\big(s_{34}^{(1)}\big)^2 - s_{33}^{(1)}s_{44}^{(1)}\Big) + s_{23}^{(1)}\big(s_{13}^{(1)}s_{44}^{(1)} - s_{14}^{(1)}s_{34}^{(1)}\big) + s_{24}^{(1)}\big(s_{14}^{(1)}s_{33}^{(1)} - s_{13}^{(1)}s_{34}^{(1)}\big)\Big),$$

$$\widehat{s}_{13} = \widehat{s}_{31} = \frac{1}{\Delta}\Big(s_{13}^{(1)}\Big(\big(s_{24}^{(1)}\big)^2 - s_{22}^{(1)}s_{44}^{(1)}\Big) + s_{12}^{(1)}\big(s_{23}^{(1)}s_{44}^{(1)} - s_{24}^{(1)}s_{34}^{(1)}\big) + s_{14}^{(1)}\big(s_{34}^{(1)}s_{22}^{(1)} - s_{23}^{(1)}s_{24}^{(1)}\big)\Big),$$
$$\widehat{s}_{14} = \widehat{s}_{41} = \frac{1}{\Delta}\Big(s_{14}^{(1)}\Big(\big(s_{23}^{(1)}\big)^2 - s_{22}^{(1)}s_{33}^{(1)}\Big) + s_{12}^{(1)}\big(s_{24}^{(1)}s_{33}^{(1)} - s_{23}^{(1)}s_{34}^{(1)}\big) + s_{13}^{(1)}\big(s_{34}^{(1)}s_{22}^{(1)} - s_{23}^{(1)}s_{24}^{(1)}\big)\Big),$$
$$\widehat{s}_{22} = \frac{1}{\Delta}\Big(s_{11}^{(1)}\Big(s_{33}^{(1)}s_{44}^{(1)} - \big(s_{34}^{(1)}\big)^2\Big) + 2s_{34}^{(1)}s_{14}^{(1)}s_{13}^{(1)} - \big(s_{14}^{(1)}\big)^2 s_{33}^{(1)} - \big(s_{13}^{(1)}\big)^2 s_{44}^{(1)}\Big),$$
$$\widehat{s}_{23} = \widehat{s}_{32} = \frac{1}{\Delta}\Big(s_{23}^{(1)}\Big(\big(s_{14}^{(1)}\big)^2 - s_{11}^{(1)}s_{44}^{(1)}\Big) + s_{12}^{(1)}\big(s_{13}^{(1)}s_{44}^{(1)} - s_{34}^{(1)}s_{14}^{(1)}\big) + s_{24}^{(1)}\big(s_{34}^{(1)}s_{11}^{(1)} - s_{13}^{(1)}s_{14}^{(1)}\big)\Big),$$
$$\widehat{s}_{33} = \frac{1}{\Delta}\Big(s_{11}^{(1)}\Big(s_{22}^{(1)}s_{44}^{(1)} - \big(s_{24}^{(1)}\big)^2\Big) + 2s_{12}^{(1)}s_{14}^{(1)}s_{24}^{(1)} - \big(s_{12}^{(1)}\big)^2 s_{44}^{(1)} - \big(s_{14}^{(1)}\big)^2 s_{22}^{(1)}\Big),$$
$$\widehat{s}_{34} = \widehat{s}_{43} = \frac{1}{\Delta}\Big(s_{34}^{(1)}\Big(\big(s_{12}^{(1)}\big)^2 - s_{11}^{(1)}s_{22}^{(1)}\Big) + s_{13}^{(1)}\big(s_{14}^{(1)}s_{22}^{(1)} - s_{12}^{(1)}s_{24}^{(1)}\big) + s_{23}^{(1)}\big(s_{11}^{(1)}s_{24}^{(1)} - s_{12}^{(1)}s_{14}^{(1)}\big)\Big),$$
$$\widehat{s}_{44} = \frac{1}{\Delta}\Big(s_{11}^{(1)}\Big(s_{22}^{(1)}s_{33}^{(1)} - \big(s_{23}^{(1)}\big)^2\Big) + 2s_{12}^{(1)}s_{13}^{(1)}s_{23}^{(1)} - \big(s_{13}^{(1)}\big)^2 s_{22}^{(1)} - \big(s_{12}^{(1)}\big)^2 s_{33}^{(1)}\Big).$$

Из формулы (33) следует, что

$$U_1(\tau) = H_1^T(\tau)S_1^{-1}\eta_1 + f_1(\tau),$$

где при $\tau \in [0, t_1]$

$$H_1^T(\tau) = \begin{pmatrix} \sin\lambda_1(T-\tau) & \cos\lambda_1(T-\tau) & \sin\lambda_1(t_1-\tau) & \cos\lambda_1(t_2-\tau) \\ \sin\lambda_1(T-\tau) & \cos\lambda_1(T-\tau) & \sin\lambda_1(t_1-\tau) & \cos\lambda_1(t_2-\tau) \end{pmatrix},$$

при $\tau \in (t_1, t_2]$

$$H_1^T(\tau) = \begin{pmatrix} \sin\lambda_1(T-\tau) & \cos\lambda_1(T-\tau) & 0 & \cos\lambda_1(t_2-\tau) \\ \sin\lambda_1(T-\tau) & \cos\lambda_1(T-\tau) & 0 & \cos\lambda_1(t_2-\tau) \end{pmatrix},$$

при $\tau \in (t_2, T]$

$$H_1^T(\tau) = \begin{pmatrix} \sin\lambda_1(T-\tau) & \cos\lambda_1(T-\tau) & 0 & 0 \\ \sin\lambda_1(T-\tau) & \cos\lambda_1(T-\tau) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что $f_1(\tau) = 0$, получим: при $\tau \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) = \sin\lambda_1(T-\tau)\big[\widehat{s}_{11}^{(1)}C_{11}(T) + \widehat{s}_{12}^{(1)}C_{21}(T) + \widehat{s}_{13}^{(1)}C_{11}(t_1) + \widehat{s}_{14}^{(1)}C_{21}(t_2)\big] + \\ + \cos\lambda_1(T-\tau)\big[\widehat{s}_{12}^{(1)}C_{11}(T) + \widehat{s}_{22}^{(1)}C_{21}(T) + \widehat{s}_{23}^{(1)}C_{11}(t_1) + \widehat{s}_{24}^{(1)}C_{21}(t_2)\big] + \\ + \sin\lambda_1(t_1-\tau)\big[\widehat{s}_{13}^{(1)}C_{11}(T) + \widehat{s}_{23}^{(1)}C_{21}(T) + \widehat{s}_{33}^{(1)}C_{11}(t_1) + \widehat{s}_{34}^{(1)}C_{21}(t_2)\big] + \\ + \cos\lambda_1(t_2-\tau)\big[\widehat{s}_{14}^{(1)}C_{11}(T) + \widehat{s}_{24}^{(1)}C_{21}(T) + \widehat{s}_{34}^{(1)}C_{11}(t_1) + \widehat{s}_{44}^{(1)}C_{21}(t_2)\big], \end{aligned}$$

при $\tau \in (t_1, t_2]$

$$\begin{aligned} \mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) = \sin\lambda_1(T-\tau)\big[\widehat{s}_{11}^{(1)}C_{11}(T) + \widehat{s}_{12}^{(1)}C_{21}(T) + \widehat{s}_{13}^{(1)}C_{11}(t_1) + \widehat{s}_{14}^{(1)}C_{21}(t_2)\big] + \\ + \cos\lambda_1(T-\tau)\big[\widehat{s}_{12}^{(1)}C_{11}(T) + \widehat{s}_{22}^{(1)}C_{21}(T) + \widehat{s}_{23}^{(1)}C_{11}(t_1) + \widehat{s}_{24}^{(1)}C_{21}(t_2)\big] + \\ + \cos\lambda_1(t_2-\tau)\big[\widehat{s}_{14}^{(1)}C_{11}(T) + \widehat{s}_{24}^{(1)}C_{21}(T) + \widehat{s}_{34}^{(1)}C_{11}(t_1) + \widehat{s}_{44}^{(1)}C_{21}(t_2)\big], \end{aligned}$$

при $\tau \in (t_2, T]$

$$\begin{aligned} \mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) = \sin\lambda_1(T-\tau)\big[\widehat{s}_{11}^{(1)}C_{11}(T) + \widehat{s}_{12}^{(1)}C_{21}(T) + \widehat{s}_{13}^{(1)}C_{11}(t_1) + \widehat{s}_{14}^{(1)}C_{21}(t_2)\big] + \\ + \cos\lambda_1(T-\tau)\big[\widehat{s}_{12}^{(1)}C_{11}(T) + \widehat{s}_{22}^{(1)}C_{21}(T) + \widehat{s}_{23}^{(1)}C_{11}(t_1) + \widehat{s}_{24}^{(1)}C_{21}(t_2)\big]. \end{aligned}$$

6. Пример с вычислительным экспериментом. Предположим, что $t_1 = 2l/a$, $t_2 = 4l/a$, $T = 6l/a$. Тогда с учетом $\lambda_1 = a\pi/l$ получим $t_1\lambda_1 = 2\pi$, $t_2\lambda_1 = 4\pi$, $T\lambda_1 = 6\pi$, $\lambda_1(T-t_1) = 4\pi$, $\lambda_1(T-t_2) = 2\pi$, $\lambda_1(t_2-t_1) = 2\pi$. Для матриц S и S_1^{-1} будем иметь:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{6\pi}{\lambda_1} & 0 & \frac{2\pi}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{6\pi}{\lambda_1} & 0 & \frac{4\pi}{\lambda_1} \\ \frac{2\pi}{\lambda_1} & 0 & \frac{2\pi}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{4\pi}{\lambda_1} & 0 & \frac{4\pi}{\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{4\pi} & 0 & -\frac{\lambda_1}{4\pi} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1}{2\pi} & 0 & -\frac{\lambda_1}{2\pi} \\ -\frac{\lambda_1}{4\pi} & 0 & \frac{3\lambda_1}{4\pi} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{2\pi} & 0 & \frac{3\lambda_1}{4\pi} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\det S_1 = 64\pi^4/\lambda_1^4$. Далее, вычисляя значения постоянных $\tilde{C}_{1k}(T)$, $\tilde{C}_{2k}(T)$, $\tilde{C}_{1k}(t_1)$, $\tilde{C}_{2k}(t_2)$, X_{1k}, X_{2k}, $X_{1k}^{(1)}$, $X_{2k}^{(2)}$, $Y_{1k}^{(1)}$, $Y_{2k}^{(2)}$, получим:

$$\tilde{C}_{11}(T) = \lambda_1 V_1(T) - \lambda_1 V_1(0), \quad \tilde{C}_{21}(T) = \dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0),$$
$$\tilde{C}_{11}(t_1) = \lambda_1 V_1(t_1) - \lambda_1 V_1(0), \quad \tilde{C}_{21}(t_2) = \dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0),$$
$$X_{11} = \lambda_1\varphi_T(0) - \lambda_1\varphi_0(0), \quad X_{21} = \psi_T(0) - \psi_0(0), \quad Y_{11} = \lambda_1\varphi_T(l) - \lambda_1\varphi_0(l),$$
$$Y_{21} = \psi_T(l) - \psi_0(l), \quad X_{11}^{(1)} = \lambda_1\varphi_1(0) - \lambda_1\varphi_0(0), \quad Y_{11}^{(1)} = \lambda_1\varphi_1(l) - \lambda_1\varphi_0(l),$$
$$X_{21}^{(1)} = \psi_1(0) - \psi_0(0), \quad Y_{21}^{(1)} = \psi_1(l) - \psi_0(l), \quad X_{21}^{(2)} = \psi_2(0) - \psi_0(0), \quad Y_{21}^{(2)} = \psi_2(l) - \psi_0(l).$$

Тогда будем иметь

$$C_{11}(t_1) = \frac{l}{2a}(V_1(t_1) - V_1(0)) + \frac{\varphi_1(0) - \varphi_0(0) + \varphi_1(l) - \varphi_0(l)}{\lambda_1},$$
$$C_{21}(t_2) = \frac{l}{2a\lambda_1}(\dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0)) + \frac{\psi_2(0) - \psi_0(0) - \psi_2(l) + \psi_0(l)}{\lambda_1^2},$$
$$C_{11}(T) = \frac{l}{2a}(V_1(T) - V_1(0)) + \frac{\varphi_T(0) - \varphi_0(0) + \varphi_T(l) - \varphi_0(l)}{\lambda_1},$$
$$C_{21}(T) = \frac{l}{2a\lambda_1}(\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0)) + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0) - \psi_0(l) + \psi_T(l)}{\lambda_1^2}.$$

Для управления имеем: при $\tau \in [0, t_1]$

$$\mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) = -\frac{\lambda_1}{2\pi}\sin\lambda_1\tau C_{11}(t_1) + \frac{\lambda_1}{4\pi}\cos\lambda_1\tau C_{21}(t_2) =$$
$$= \left(\frac{1}{4}(V_1(0) - V_1(t_1)) - \frac{\varphi_1(0) - \varphi_0(0) + \varphi_1(l) - \varphi_0(l)}{2\pi}\right)\sin\lambda_1\tau +$$
$$+ \left(\frac{1}{8\lambda_1}(\dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0)) + \frac{\psi_2(0) - \psi_0(0) - \psi_2(l) + \psi_0(l)}{4\lambda_1\pi}\right)\cos\lambda_1\tau,$$

при $\tau \in (t_1, t_2]$

$$\mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) = \frac{\lambda_1}{4\pi}\sin\lambda_1\tau(C_{11}(t_1) - C_{11}(T)) + \frac{\lambda_1}{4\pi}\cos\lambda_1\tau C_{21}(t_2) =$$
$$= \left(\frac{1}{8}(V_1(t_1) - V_1(T)) - \frac{\varphi_T(0) - \varphi_1(0) + \varphi_T(l) - \varphi_1(l)}{4\pi}\right)\sin\lambda_1\tau +$$
$$+ \left(\frac{1}{8\lambda_1}(\dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0)) + \frac{\psi_2(0) - \psi_0(0) - \psi_2(l) + \psi_0(l)}{4\lambda_1\pi}\right)\cos\lambda_1\tau,$$

при $\tau \in (t_2, T]$

$$\mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) = \frac{\lambda_1}{4\pi}\sin\lambda_1\tau(C_{11}(t_1) - C_{11}(T)) + \frac{\lambda_1}{2\pi}\cos\lambda_1\tau(C_{21}(T) - C_{21}(t_2)) =$$
$$= \left(\frac{1}{8}(V_1(t_1) - V_1(T)) - \frac{\varphi_T(0) - \varphi_1(0) + \varphi_T(l) - \varphi_1(l)}{4\pi}\right)\sin\lambda_1\tau +$$

$$+\left(\frac{1}{4\lambda_1}(\dot V_1(T)-\dot V_1(t_2))+\frac{\psi_T(0)-\psi_2(0)+\psi_2(l)-2\psi_0(l)+\psi_T(l)}{2\lambda_1\pi}\right)\cos\lambda_1\tau.$$

Из формулы (23) получим, что

$$F_1(t)=-\frac{4a}{\lambda_1 l}\mu_1''(t)$$

или

$$F_1(\tau)=\begin{cases}\sin\lambda_1\tau\left[\dfrac{a^2\pi}{l^2}(V_1(0)-V_1(t_1))-\dfrac{2a^2(\varphi_1(0)-\varphi_0(0)+\varphi_1(l)-\varphi_0(l))}{l^2}\right]+ & \\ +\cos\lambda_1\tau\left[\dfrac{a}{2l}(\dot V_1(t_2)-\dot V_1(0))+\dfrac{a(\psi_2(0)-\psi_0(0)-\psi_2(l)+\psi_0(l))}{\pi l}\right], & \tau\in[0,t_1],\\ \sin\lambda_1\tau\left[\dfrac{a^2\pi}{2l^2}(V_1(t_1)-V_1(T))-\dfrac{a^2(\varphi_T(0)-\varphi_1(0)+\varphi_T(l)-\varphi_1(l))}{l^2}\right]+ & \\ +\cos\lambda_1\tau\left[\dfrac{a}{2l}(\dot V_1(t_2)-\dot V_1(0))+\dfrac{a(\psi_2(0)-\psi_0(0)-\psi_2(l)+\psi_0(l))}{\pi l}\right], & \tau\in(t_1,t_2],\\ \sin\lambda_1\tau\left[\dfrac{a^2\pi}{2l^2}(V_1(t_1)-V_1(T))-\dfrac{a^2(\varphi_T(0)-\varphi_1(0)+\varphi_T(l)-\varphi_1(l))}{l^2}\right]+ & \\ +\cos\lambda_1\tau\left[\dfrac{a}{l}(\dot V_1(T)-\dot V_1(t_2))+\dfrac{2a(\psi_T(0)-\psi_2(0)+\psi_2(l)-2\psi_0(l)+\psi_T(l))}{\pi l}\right], & \tau\in(t_2,T].\end{cases}$$

Из формулы (27) имеем: при $\tau\in[0,t_1]$

$$V_1(\tau)=\left(V_1(0)+\frac{a\tau(V_1(t_1)-V_1(0))}{2l}-\frac{a\tau(\varphi_0(0)-\varphi_1(0)+\varphi_0(l)-\varphi_1(l))}{\pi l}\right)\cos\lambda_1\tau+$$
$$+\left(\frac{\dot V_1(0)}{\lambda_1}+\frac{\tau(\dot V_1(t_2)-\dot V_1(0))}{4\pi}+\frac{V_1(0)-V_1(t_1)}{2\pi}+\right.$$
$$\left.+\frac{\tau(\psi_0(l)-\psi_0(0)+\psi_2(0)-\psi_2(l))}{2\pi^2}+\frac{\varphi_0(0)-\varphi_1(0)+\varphi_0(l)-\varphi_1(l)}{\pi^2}\right)\sin\lambda_1\tau,$$

при $\tau\in(t_1,t_2]$

$$V_1(\tau)=\left(\frac{3V_1(t_1)-V_1(T)}{2}+\frac{a\tau(V_1(T)-V_1(t_1))}{4l}-\frac{a\tau(\varphi_1(0)-\varphi_T(0)+\varphi_1(l)-\varphi_T(l))}{2\pi l}+\right.$$
$$\left.+\frac{3(\varphi_1(0)+\varphi_1(l))-2(\varphi_0(0)+\varphi_0(l))-\varphi_T(0)-\varphi_T(l)}{\pi}\right)\cos\lambda_1\tau+$$
$$+\left(\frac{\dot V_1(0)}{\lambda_1}+\frac{\tau(\dot V_1(t_2)-\dot V_1(0))}{4\pi}+\frac{V_1(t_1)-V_1(T)}{4\pi}+\right.$$
$$\left.+\frac{\tau(\psi_0(l)-\psi_0(0)+\psi_2(0)-\psi_2(l))}{2\pi^2}+\frac{\varphi_1(0)-\varphi_T(0)+\varphi_1(l)-\varphi_T(l)}{2\pi^2}\right)\sin\lambda_1\tau,$$

при $\tau\in(t_2,T]$

$$V_1(\tau)=\left(\frac{3V_1(t_1)-V_1(T)}{2}+\frac{a\tau(V_1(T)-V_1(t_1))}{4l}-\frac{a\tau(\varphi_1(0)-\varphi_T(0)+\varphi_1(l)-\varphi_T(l))}{2\pi l}+\right.$$
$$\left.+\frac{3(\varphi_1(0)+\varphi_1(l))-2(\varphi_0(0)+\varphi_0(l))-\varphi_T(0)-\varphi_T(l)}{\pi}\right)\cos\lambda_1\tau+$$
$$+\left(\frac{3\dot V_1(t_2)-2\dot V_1(T)}{\lambda_1}+\frac{\tau(\dot V_1(T)-\dot V_1(t_2))}{2\pi}+\frac{V_1(t_1)-V_1(T)}{4\pi}+\right.$$
$$+\frac{\tau(\psi_2(l)-\psi_2(0)+\psi_T(l)+\psi_T(0)-2\psi_0(l))}{\pi^2}+\frac{\varphi_1(0)-\varphi_T(0)+\varphi_1(l)-\varphi_T(l)}{2\pi^2}+$$

$$+\frac{10\psi_0(l)-2\psi_0(0)+6(\psi_2(0)-\psi_2(l))-4(\psi_T(0)+\psi_T(l))}{\lambda_1\pi}\Big)\sin\lambda_1\tau.$$

Для $Q_1(x,t)$ из (35)—(37) имеем

$$Q_1(x,t)=V_1(t)\sin\frac{\pi}{l}x+\mu_1(t).$$

Теперь предположим, что $a=1/4$, $l=1$, тогда $t_1=8$, $t_2=16$, $T=24$, $\lambda_1=\pi/4$ и пусть при $t=0$ задано следующее начальное состояние: $\varphi_0(x)=x^3/2-2x^2/5-x/10$, $\psi_0(x)=2x^2/5-2x/5$, при $t_1=8$ задано промежуточное состояние $\varphi_1(x)=-x^2/3+x/3$, при $t_2=12$ задано промежуточное состояние $\psi_1(x)=2x^2/15-2x/15$, а при $T=24$ задано следующее конечное состояние: $\varphi_T(x)=0$, $\psi_T(x)=0$.

Коэффициенты рядов Фурье для функций $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi_T(x)$, $\psi_T(x)$ соответственно равны: $\varphi_1^{(0)}=-14/5\pi^3$, $\psi_1^{(0)}=-16/5\pi^3$, $\varphi_1^{(0)}=8/3\pi^3$, $\psi_2^{(1)}=-16/15\pi^3$, $\varphi_1^{(T)}=\psi_1^{(T)}=0$.

Значения этих функций на краях струны следующие:

$$\varphi_0(0)=\psi_0(0)=\psi_1(0)=\varphi_T(0)=\psi_T(0)=\varphi_0(1)=\psi_0(1)=\psi_1(1)=\varphi_T(1)=\psi_T(1)=0.$$

Тогда $V_1(0)=-14/5\pi^3$, $\dot V_1(0)=-16/5\pi^3$, $\dot V_1(t_1)=8/3\pi^3$, $\dot V_1(t_2)=-16/15\pi^3$, $V_1(T)=0$. Следовательно, получим

$$\mu_1(\tau)=\nu_1(\tau)=\frac{16}{15\pi^4}\cos\frac{\pi}{4}\tau-\frac{41}{30\pi^3}\sin\frac{\pi}{4}\tau,\qquad \tau\in[0,8],$$
$$\mu_1(\tau)=\nu_1(\tau)=\frac{16}{15\pi^4}\cos\frac{\pi}{4}\tau+\frac{1}{3\pi^3}\sin\frac{\pi}{4}\tau,\qquad \tau\in(8,24],$$
$$V_1(\tau)=\left(-\frac{14}{5\pi^3}+\frac{41\tau}{60\pi^3}\right)\cos\frac{\pi}{4}\tau+\left(-\frac{233}{15\pi^4}+\frac{8\tau}{15\pi^4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\tau,\qquad \tau\in[0,8],$$
$$V_1(\tau)=\left(\frac{4}{\pi^3}-\frac{\tau}{6\pi^3}\right)\cos\frac{\pi}{4}\tau+\left(-\frac{182}{15\pi^4}+\frac{8\tau}{15\pi^4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\tau,\qquad \tau\in(8,24],$$

так что

$$Q_1(x,0)=\frac{16}{15\pi^4}-\frac{14}{5\pi^3}\sin\pi x,\quad \dot Q_1(x,0)=-\frac{41}{120\pi^2}-\frac{16}{5\pi^3}\sin\pi x,\quad Q_1(x,8)=\frac{16}{15\pi^4}+\frac{8}{3\pi^3}\sin\pi x,$$
$$\dot Q_1(x,16)=\frac{1}{12\pi^2}-\frac{16}{15\pi^3}\sin\pi x,\quad Q_1(x,24)=\frac{16}{15\pi^4},\quad \dot Q_1(x,24)=\frac{1}{12\pi^2}.$$

Сравнительный анализ полученных результатов показал

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\varepsilon_1(x,0)\approx 0{,}0379,\quad \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\varepsilon_1(x,8)\approx 0{,}0136,\quad \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\varepsilon_1(x,24)\approx 0{,}0110,$$
$$\int_0^1\varepsilon_1(x,0)dx\approx 0{,}0169,\quad \int_0^1\varepsilon_1(x,8)dx\approx 0{,}0102,\quad \int_0^1\varepsilon_1(x,24)dx\approx 0{,}0110,$$
$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\widehat\varepsilon_1(x,0)\approx 0{,}0378,\quad \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\widehat\varepsilon_1(x,16)\approx 0{,}0098,\quad \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\widehat\varepsilon_1(x,24)\approx 0{,}0084,$$
$$\int_0^1\widehat\varepsilon_1(x,0)dx\approx 0{,}0337,\quad \int_0^1\widehat\varepsilon_1(x,16)dx\approx 0{,}0088,\quad \int_0^1\widehat\varepsilon_1(x,24)dx\approx 0{,}0084,$$

где $t_3=T$, $\varepsilon_1(x,t_j)=|Q_1(x,t_j)-\varphi_j(x)|$, $j=0,1,3$; $\widehat\varepsilon_1(x,t_k)=|\dot Q_1(x,t_k)-\psi_k(x)|$, $k=0,2,3$.

Таким образом, результаты анализа (см. рис. 1) показывают, что под воздействием построенных граничных управлений функция прогиба струны и ее производная достаточно близки в желаемых моментах времени заданным исходным функциям.

7. Заключение. Предложен конструктивный подход построения граничного управления процессом колебаний струны смещением на двух концах с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени с использованием метода Фурье. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании граничного управления

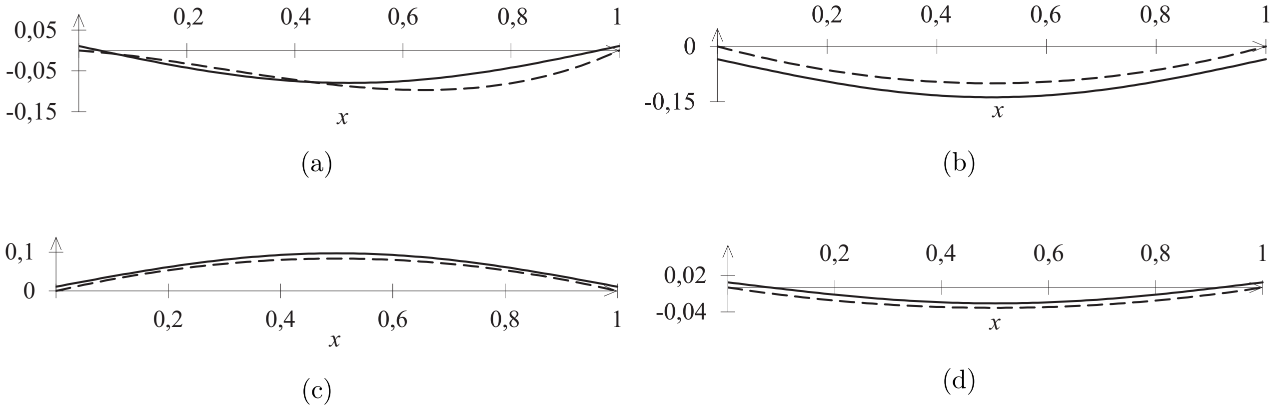

Рис. 1. Графики функций: (a) $Q_1(x,0)$ (сплошная линия) и $\varphi_0(x)$ (пунктирная линия); (b) $\dot{Q}_1(x,0)$ (сплошная линия) и $\psi_0(x)$ (пунктирная линия); (c) $Q_1(x,8)$ (сплошная линия) и $\varphi_1(x)$ (пунктирная линия); (d) $\dot{Q}_1(x,16)$ (сплошная линия) и $\psi_2(x)$ (пунктирная линия).

процессами колебаний в физических и технологических системах. Предложенный подход можно распространить на другие неодномерные колебательные системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдукаримов М. Ф.* Об оптимальном граничном управлении смещениями процесса вынужденных колебаний на двух концах струны// Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2013. — *56*, № 8. — С. 612–618.
2. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Задача граничного управления для системы волновых уравнений// Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2008. — № 1 (16). — С. 5–10.
3. *Барсегян В. Р.* Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 36–47.
4. *Барсегян В. Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. — М.: Наука, 2016.
5. *Барсегян В. Р., Солодуша С. В.* Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени// Вестн. росс. ун-тов. Мат. — 2020. — *25*, № 130. — С. 131–146.
6. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
7. *Гибкина Н. В., Сидоров М. В., Стадникова А. В.* Оптимальное граничное управление колебаниями однородной струны// Радиоэлектрон. информ. Науч.-техн. ж. ХНУРЭ. — 2016. — № 2. — С. 3–11.
8. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
9. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6 (366). — С. 89–114.
10. *Копец М. М.* Задача оптимального управления процессом колебания струны// в кн.: Теория оптимальных решений. — Киев: Изд-во Ин-та кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, 2014. — С. 32–38.
11. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II// Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2011. — *19*, № 1. — С. 62–70.
12. *Barseghyan V. R.* About one problem of optimal control of string oscillations with nonseparated multipoint conditions at intermediate moments of time// in: Stability, Control and Differential Games. Lect. Notes Control Inform. Sci. (*Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T.*, eds.). — Cham: Springer, 2020. — P. 13–25.
13. *Barseghyan V. R.* The problem of optimal control of string vibrations// Int. Appl. Mech. — 2020. — *56*, № 4. — P. 471–480.

14. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847.* — 012016.
15. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time// in: Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Lect. Notes Comp. Sci. (*Pardalos P., Khachay M., Kazakov A.*, eds.). — Cham: Springer, 2021. — *12755.* — P. 299–313.

Барсегян Ваня Рафаелович
Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения;
Ереванский государственный университет
E-mail: `barseghyan@sci.am`

Солодуша Светлана Витальевна
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева
Сибирского отделения РАН, Иркутск;
Иркутский государственный университет
E-mail: `solodusha@isem.irk.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 43–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-43-49

УДК 517.956.2

О СИЛЬНО СВЯЗАННЫХ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© 2022 г. **Е. А. ГОЛОВКО**

Аннотация. В работе исследована задача Дирихле в полупространстве для эллиптической по Петровскому системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями, зависящими от трех независимых переменных. Найдены условия нарушения нётеровости задачи в конкретном полупространстве. Показано, что из сильной связанности системы не следует нарушение нётеровости задачи Дирихле во всяком полупространстве.

***Ключевые слова*:** многомерная эллиптическая система, сильно связанные системы, задача Дирихле, многомерный аналог система Бицадзе, нарушение нётеровости.

ON STRONGLY COUPLED MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC SYSTEMS

© 2022 **E. A. GOLOVKO**

Abstract. The article investigates the Dirichlet problem in a half-space for an elliptic system as per Petrovsky of three equations with three unknown functions depending on three independent variables. Conditions for violation of the Noetherian property of the problem in a concrete half-space are found. It is shown that the strong connectedness of the system does not imply the violation of the Noetherian property of the Dirichlet problem in any half-space.

***Keywords and phrases*:** multidimensional elliptic system, strongly coupled systems, Dirichlet problem, multidimensional analog of the Bitsadze system, violation of the Noether property.

***AMS Subject Classification*:** 35J57

1. Введение. В настоящее время еще не решена задача гомотопической классификации многомерных эллиптических по Петровскому систем, поставленная еще на третьем Всесоюзном математическом съезде в 1958 году [2]. При этом хорошо разработана теория эллиптических по Петровскому систем уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

Эллиптические по Петровскому системы уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с двумя независимыми переменными А. В. Бицадзе разделил на два класса: сильно связанные и слабо связанные. Для слабо связанных систем задача Дирихле всегда нётерова, а для сильно связанных систем нётеровость задачи Дирихле и других классических граничных задач нарушается. Определение сильно связанной эллиптической системы уравнений с двумя независимыми переменными и с постоянными коэффициентами дается через структуру общего решения системы и не выражается явно через коэффициенты системы [1]

Известно, что для сильно связанных систем с двумя независимыми переменными всегда нарушается нётеровость задачи Дирихле. А. И. Янушаускас положил это свойство в основу обобщения понятия сильной связанность на многомерный случай [4].

Определение 1. Эллиптическую по Петровскому систему уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами называют сильно связанной, если существует полупространство, в котором задача Дирихле для этой системы не является нётеровой.

Нарушение нётеровости задачи Дирихле для эллиптической системы заключается в том, что однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых решений, либо для разрешимости неоднородной задачи на граничные данные необходимо наложить бесконечное множество условий типа условий ортогональности.

Одним из ещё не до конца исследованных вопросов теории многомерных эллиптических систем является вопрос о том, как влияет структура системы на разрешимость задачи Дирихле и как зависит разрешимость этой задачи от области, в которой рассматривается система.

Среди многомерных систем хорошо изучена система, которую называют многомерным аналогом системы Бицадзе:

$$-\Delta u_j + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Установлено, что при $\lambda \neq 2$ задача Дирихле в любом полупространстве разрешима для любых дифференцируемых граничных данных и её решение единственно. Если $\lambda = 2$, то однородная задача Дирихле для однородной системы в полупространстве имеет бесконечное множество линейно независимых решений. Таким образом, система при $\lambda = 2$ сильно связана, а при $\lambda \neq 2$ не является таковой [3].

Автором рассматриваются более общие системы, в которых параметр λ заменен матрицей. Одной из таких систем является следующая система трех уравнений с тремя неизвестными функциями, зависящими от трех независимых переменных:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ -\Delta v + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ -\Delta w + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Для этой системы рассмотрена задача Дирихле в полупространстве $E : \{z > 0\}$. Показано, что при выполнении условий

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - 1} \tag{2}$$

однородная задача Дирихле в рассматриваемом полупространстве имеет бесконечное множество линейно независимых решений, зависящих от одной произвольной функции переменных x и y. Для разрешимости неоднородной задачи необходимо потребовать выполнения условия, которое нельзя заменить никаким конечным числом условий типа условий ортогональности. Таким образом, условия (2) гарантируют сильную связанность системы (1). Однако эта система может быть сильно связанной и при нарушении условий (2), так как нетеровость задачи Дирихле может быть нарушена в другом полупространстве, а не обязательно в полупространстве $E : \{z > 0\}$.

2. Задача Дирихле. Рассмотрим задачу Дирихле для системы (1) в следующей постановке: найти регулярные в полупространстве $D : \{x > 0\}$ решения системы (1), удовлетворяющие на границе этого полупространства $\Gamma : \{x = 0\}$ условиям

$$u\big|_{x=0} = f_1(y, z), \quad v\big|_{x=0} = f_2(y, z), \quad w\big|_{x=0} = f_3(y, z). \tag{3}$$

Введем обозначение

$$u_x + v_y + w_z = H. \tag{4}$$

Тогда система (1) перепишется в виде

$$-\Delta u + \lambda_1 H_x = 0, \quad -\Delta v + \lambda_2 H_y = 0, \quad -\Delta w + \lambda_3 H_z = 0. \tag{5}$$

Продифференцируем уравнения системы (5) по x, y и z соответственно и сложим результаты дифференцирований:

$$(\lambda_1 - 1)H_{xx} + (\lambda_2 - 1)H_{yy} + (\lambda_3 - 1)H_{zz} = 0. \tag{6}$$

Если λ_1, λ_2, λ_3 попарно различны, то H не является гармонической функцией. Далее задачу будем решать с помощью преобразования Фурье.

Пусть $\widetilde{H}(x, \eta, \zeta)$ — преобразование Фурье для функции $H(x, y, z)$ по переменным y и z. Применяя преобразование Фурье по переменным y и z к уравнению (6), получим

$$\lambda_1 - 1)\widetilde{H}_{xx} - (\lambda_2 - 1)\eta^2\widetilde{H} - (\lambda_3 - 1)\zeta^2\widetilde{H}_{zz} = 0,$$

или

$$\widetilde{H}_{xx} - \frac{\eta^2(\lambda_2 - 1) + \zeta^2(\lambda_3 - 1)}{\lambda_1 - 1}\widetilde{H} = 0. \tag{7}$$

Введя обозначение

$$\frac{\eta^2(\lambda_2 - 1) + \zeta^2(\lambda_3 - 1)}{\lambda_1 - 1} = \rho_1^2, \tag{8}$$

перепишем уравнение (7) в виде

$$\widetilde{H}_{xx} - \rho_1^2\widetilde{H} = 0.$$

Ограниченные на бесконечности решения последнего уравнения имеют вид

$$\widetilde{H} = C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}, \tag{9}$$

где $C(\eta, \zeta)$ — произвольная функция.

Применим преобразование Фурье по переменным y, z к системе (5). Найдем сначала H_x, H_y, H_z. Учитывая (9), имеем

$$H_x \to \widetilde{H}_x = -\rho_1 C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x};$$
$$H_y \to i\eta\widetilde{H} = i\eta C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x};$$
$$H_z \to i\zeta\widetilde{H} = i\zeta C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}.$$

Тогда в терминах преобразования Фурье система (5) примет вид

$$-\widetilde{u}_{xx} + \eta^2\widetilde{u} + \zeta^2\widetilde{u} + \lambda_1\widetilde{H}_x = 0;$$
$$-\widetilde{v}_{xx} + \eta^2\widetilde{v} + \zeta^2\widetilde{v} + i\eta\lambda_2\widetilde{H} = 0;$$
$$-\widetilde{w}_{xx} + \eta^2\widetilde{w} + \zeta^2\widetilde{w} + i\zeta\lambda_3\widetilde{H} = 0.$$

Введя обозначение

$$\eta^2 + \zeta^2 = \rho^2, \tag{10}$$

перепишем последнюю систему последнюю систему в виде

$$\begin{aligned} -\widetilde{u}_{xx} + \rho^2\widetilde{u} &= \lambda_1\rho_1 C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}; \\ -\widetilde{v}_{xx} + \rho^2\widetilde{v} &= \lambda_2 i\eta C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}; \\ -\widetilde{w}_{xx} + \rho^2\widetilde{w} &= \lambda_3 i\zeta C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}. \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что каждое из уравнений системы (11) содержит только одну неизвестную функцию. Решим каждое уравнение отдельно. Первое уравнение

$$-\widetilde{u}_{xx} + \rho^2\widetilde{u} = \lambda_1\rho_1 C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}.$$

является линейным уравнением второго порядка. Его общее решение имеет вид

$$\widetilde{u} = \widetilde{u}_{oo} + \widetilde{u}^*,$$

где $\widetilde{u}_{oo}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, $\widetilde{u}^*$ — частное решение неоднородного уравнения. С учетом того, что интересуемся ограниченными на бесконечности решениями, общее решение однородного уравнения можно записать так:

$$\widetilde{u}_{oo} = A_1(\eta, \zeta)e^{-\rho x},$$

где $A_1(\eta,\zeta)$ — произвольная функция.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов в виде

$$\widetilde{u}^* = B(\eta,\zeta)(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Чтобы определить функцию $B(\eta,\zeta)$, подставим $\widetilde{u}^*$ в рассматриваемое уравнение:

$$B(\eta,\zeta)(\rho_1^2 e^{-\rho_1 x} - \rho^2 e^{-\rho x}) + \rho^2 B(\eta,\zeta)(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}) = \lambda_1\rho_1 C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x};$$
$$B(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x}(\rho^2 - \rho_1^2) = \lambda_1\rho_1 C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x},$$

откуда

$$B(\eta,\zeta) = \frac{\lambda_1\rho_1 C(\eta,\zeta)}{\rho^2-\rho_1^2}.$$

Тогда

$$u^* = \frac{\lambda_1\rho_1 C(\eta,\zeta)}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Общее решение первого уравнения системы (11) имеет вид

$$\widetilde{u} = A_1(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_1\rho_1}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Рассмотрим второе уравнение системы (11):

$$-\widetilde{v}_{xx} + \rho^2\widetilde{v} = \lambda_2 i\eta C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x}.$$

Его общее решение представимо в виде

$$\widetilde{v} = \widetilde{v}_{oo} + \widetilde{v}^*,$$

где $\widetilde{v}_{oo}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, $\widetilde{v}^*$ — частное решение неоднородного уравнения.

Ограниченное на бесконечности общее решение однородного уравнения можно записать в виде

$$\widetilde{v}_{oo} = A_2(\eta,\zeta)e^{-\rho x},$$

где $A_2(\eta,\zeta)$ — произвольная функция. Частное решение неоднородного уравнения запишем в виде

$$\widetilde{v}^* = D(\eta,\zeta)(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Тогда из рассматриваемого уравнения находим

$$D(\eta,\zeta)(\rho_1^2 e^{-\rho_1 x} - \rho^2 e^{-\rho x}) + \rho^2 D(\eta,\zeta)(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}) = \lambda_2 i\eta C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x};$$
$$D(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x}(\rho^2 - \rho_1^2) = \lambda_2 i\eta C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x},$$

откуда

$$D(\eta,\zeta) = \frac{\lambda_2 C(\eta,\zeta)\eta i}{\rho^2-\rho_1^2}.$$

Следовательно,

$$v^* = \frac{\lambda_2 C(\eta,\zeta)\eta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x})$$

и общее решение второго уравнения системы (11) имеет вид

$$\widetilde{v} = A_2(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_2\eta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Аналогично находится общее решение третьего уравнения системы (11):

$$\widetilde{w} = A_3(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_3\zeta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Таким образом, общее решение системы (11) представимо в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{u} &= A_1(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_1\rho_1}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x}-e^{-\rho x}),\\ \widetilde{v} &= A_2(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_2\eta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x}-e^{-\rho x}),\\ \widetilde{w} &= A_3(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_3\zeta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x}-e^{-\rho x}),\end{aligned} \tag{12}$$

где $A_1(\eta,\zeta)$, $A_2(\eta,\zeta)$, $A_3(\eta,\zeta)$, $C(\eta,\zeta)$ — произвольные функции. Три из этих функций легко находятся из граничных условий (3) исходной задачи. Применим к условиям (3) преобразование Фурье по переменным y, z:

$$\widetilde{u}\big|_{x=0} = \widetilde{f}_1(\eta,\zeta), \quad \widetilde{v}\big|_{x=0} = \widetilde{f}_2(\eta,\zeta), \quad \widetilde{w}\big|_{x=0} = \widetilde{f}_3(\eta,\zeta). \tag{13}$$

Подставив решения (12) в условия (13), найдем $A_1(\eta,\zeta)$, $A_2(\eta,\zeta)$, $A_3(\eta,\zeta)$:

$$A_1(\eta,\zeta) = \widetilde{f}_1(\eta,\zeta), \quad A_2(\eta,\zeta) = \widetilde{f}_2(\eta,\zeta), \quad A_3(\eta,\zeta) = \widetilde{f}_3(\eta,\zeta). \tag{14}$$

Тогда решение системы (11), удовлетворяющее граничным условиям (14), имеет вид

$$\begin{aligned}\widetilde{u} &= \widetilde{f}_1(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_1\rho_1}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x}-e^{-\rho x}),\\ \widetilde{v} &= \widetilde{f}_2(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_2\eta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x}-e^{-\rho x}),\\ \widetilde{w} &= \widetilde{f}_3(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_3\zeta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x}-e^{-\rho x}).\end{aligned} \tag{15}$$

В этом решении содержится еще одна произвольная функция $C(\eta,\zeta)$. Для ее определения используем условие связи (4), предварительно применив к нему преобразование Фурье

$$\widetilde{H} = \widetilde{u}_x + i\eta\widetilde{v} + i\zeta\widetilde{w}. \tag{16}$$

Подставляя в равенство (16) функции, определенные по формулам (9) и (15), получим уравнение для определения функции $C(\eta,\zeta)$

$$\begin{aligned}C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x} = -\rho\widetilde{f}_1(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_1\rho_1}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x}-e^{-\rho x}) -\\ - i\eta\left(\widetilde{f}_2(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_2\eta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x}-e^{-\rho x})\right) -\\ - i\zeta\left(\widetilde{f}_3(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_3\zeta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x}-e^{-\rho x})\right).\end{aligned}$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$\begin{aligned}C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x} = -e^{-\rho x}(-\rho\widetilde{f}_1(\eta,\zeta) - i\eta\widetilde{f}_2(\eta,\zeta) - i\zeta\widetilde{f}_3(\eta,\zeta)) +\\ + C(\eta,\zeta)\left\{\frac{-\lambda_1\rho_1^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2}{\rho^2-\rho_1^2}\right\}e^{-\rho_1 x} +\\ + C(\eta,\zeta)\left(\frac{\lambda_1\rho_1\rho+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2}{\rho^2-\rho_1^2}\right)e^{-\rho x}.\end{aligned} \tag{17}$$

Используя формулы (8) и (10), преобразуем числитель выражения, стоящего в фигурных скобках.

$$\begin{aligned}-\lambda_1\rho_1^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2 &= -\frac{\eta^2(\lambda_2-1)\lambda_1+\zeta^2(\lambda_3-1)\lambda_1}{\lambda_1-1}+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2=\\ &=\frac{\lambda_1(\eta^2+\zeta^2)-\lambda_2\eta^2-\lambda_3\zeta^2+\eta^2+\zeta^2-\eta^2-\zeta^2}{\lambda_1-1}=\\ &=\frac{(\lambda_1-1)(\eta^2+\zeta^2)-(\lambda_2-1)\eta^2-(\lambda_3-1)\zeta^2}{\lambda_1-1}=\\ &=\frac{(\lambda_1-1)(\eta^2+\zeta^2)}{\lambda_1-1}-\frac{(\lambda_2-1)\eta^2+(\lambda_3-1)\zeta^2}{\lambda_1-1}=\rho^2-\rho_1^2.\end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{-\lambda_1\rho_1^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2}{\rho^2-\rho_1^2}=\frac{\rho^2-\rho_1^2}{\rho^2-\rho_1^2}\equiv 1.$$

Или

$$\frac{-\lambda_1\rho_1^2}{\rho^2-\rho_1^2}+\frac{\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2}{\rho^2-\rho_1^2}\equiv 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2}{\rho^2-\rho_1^2}\equiv 1+\frac{\lambda_1\rho_1^2}{\rho^2-\rho_1^2}. \tag{18}$$

Учитывая соотношение (18), уравнение (16) преобразуется к виду

$$C(\eta,\zeta)\left(\frac{\lambda_1\rho_1\rho}{\rho^2-\rho_1^2}-\frac{-\rho^2+\rho_1^2-\lambda_1\rho_1^2}{\rho^2-\rho_1^2}\right)=-\rho\widetilde{f}_1(\eta,\zeta)-i\eta\widetilde{f}_2(\eta,\zeta)-i\zeta\widetilde{f}_3(\eta,\zeta).$$

После преобразований получим

$$((\lambda_1-1)(\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2)-\lambda_1(\eta^2+\zeta^2))C(\eta,\zeta)=\widetilde{F}, \tag{19}$$

где $\widetilde{F}=(-\rho f_1-i\eta f_2-i\zeta f_3)((\lambda_1-1)\rho_1-\rho)(\rho-\rho_1)$. Пусть $C(\eta,\zeta)$ — преобразование Фурье некоторой функции w. Применяя к уравнению (19) обратное преобразование Фурье, получим

$$w_{yy}(\lambda_1-(\lambda_1-1)\lambda_2)+w_{zz}(\lambda_1-(\lambda_1-1)\lambda_3)=F, \tag{20}$$

где F — известная функция, выражающаяся через функции f_1, f_2, f_3 из граничных условий (3).

3. Заключение. Если рассматривается однородная задача Дирихле, то функции f_1, f_2, f_3, а следовательно, и функция F тождественно равны нулю. Уравнение (20) в этом случае является однородным.

Если все коэффициенты уравнения (20) равны нулю, т.е.

$$\lambda_1-(\lambda_1-1)\lambda_2=0,\quad \lambda_1-(\lambda_1-1)\lambda_3=0,$$

то однородное уравнение, соответствующее уравнению (20), а следовательно, и однородная задача Дирихле для системы (1), будут иметь бесконечное множество линейно независимых решений. Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо на данные задачи наложить условие

$$\Delta\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(\alpha_2,\alpha_3)d\alpha_2\cdot d\alpha_3}{\sqrt{(y-\alpha_2)^2+(z-\alpha_3)^2}}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=0,$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным y и z.

Итак, при выполнении условий

$$\lambda_2=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1},\quad \lambda_3=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}. \tag{21}$$

нётеровость рассматриваемой задачи нарушается в полупространстве D. Условия (21) являются условиями сильной связанности системы (1), но они не совпадают с условиями (2). Таким образом, из сильной связанности системы, вообще говоря, не следует нарушение нётеровости задачи Дирихле во всяком полупространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
2. *Гельфанд И. М., Петровский И. Г., Шилов Г. Е.* Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными// Труды третьего всесоюзного математического съезда. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — *3*. — С. 5–72.
3. *Черняева Т. Н.* Решение не сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных/// Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — Иркутск, 2015. — *2(46)*. — С. 29–32.
4. *Янушаускас А. И.* Граничные задачи для уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1997.

Головко Елена Анатольевна
Иркутский государственный университет
E-mail: elena-golovko@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 50–56
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-50-56

УДК 517.928

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2022 г. **И. В. ЗАХАРОВА**

Аннотация. В работе показана возможность применения общей теории асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, разработанной С. А. Ломовым и его учениками, к построению асимптотики решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений со степенным пограничным слоем.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение, асимптотическое интегрирование, степенной пограничный слой, регуляризирующая функция.

CONSTRUCTION OF ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF SOME DEGENERATE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

© 2022 **I. V. ZAKHAROVA**

Abstract. The paper describes possible implementation of the general theory of asymptotic integration of singularly perturbed differential equations developed by S. A. Lomov and his disciples to constructing asymptotic solutions for singularly perturbed differential equations with a power boundary layer.

Keywords and phrases: singularly perturbed differential equation, asymptotic integration, power boundary layer, regularizing function.

AMS Subject Classification: 34E15

1. Введение. Построение асимптотического решения сингулярных краевых и начальных задач, как правило, основывается на идее использования функций типа пограничного слоя экспоненциального порядка убывания при $\varepsilon \to 0$. Явление пограничного слоя экспоненциального типа возникает чаще всего в задачах, в которых при $\varepsilon = 0$ порядок дифференциального уравнения понижается. Представляют также интерес задачи, в которых при $\varepsilon = 0$ порядок дифференциального уравнения не понижается, однако уравнение становится вырождающимся на границе области. За счет этого происходит потеря условий. В таких задачах, говоря о пограничном слое, обращают внимание на его степенной характер. Как показано в работе [1], построение степенного пограничного слоя принципиально отлично от построения экспоненциального погранслоя. Аналоги малоизученного класса задач со степенным погранслоем встречаются в ряде прикладных задач аэро- и гидродинамики, приводящих, в частности, к уравнению Лайтхилла [2, 5].

В настоящее время разработан метод построения решений сингулярно возмущенных задач — метод регуляризации [3], который позволяет записать решение сингулярно возмущённой задачи без отдельного описания области пограничного слоя. При этом пограничные эффекты описываются дополнительными независимыми переменными, вводимыми по спектру некоторого оператора. В данной работе показано применение идеи метода регуляризации к построению асимптотики решений сингулярно возмущённых задач со степенным погранслоем.

2. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Для начала рассмотрим задачу Коши в следующей постановке:

$$(\varepsilon + x)y' + a(x)y = h(x), \tag{1}$$

$$y(0, \varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

где ε — малый параметр, $x \in [0, X]$, $0 < X < \infty$, $a(x) \neq 0$ в отдельных точках и на части множества $[0, X]$, $a(x), h(x) \in C^\infty[0, X]$, $\operatorname{Re} a(x) < 0$. Ничего не изменится, если считать $y(x)$ неизвестной вектор-функцией, $a(x) \neq 0$ — матрицей размерности $n \times n$, $h(x)$ — известной вектор-функцией, y^0 — известным постоянным вектором. При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ задача (1), (2) имеет единственное решение. При $\varepsilon = 0$ получим уравнение

$$xy' + a(x)y = h(x), \tag{3}$$

которое имеет особенность в точке $x = 0$. Поэтому уравнение (3), вообще говоря, не имеет решений, удовлетворяющих условию (2). Начальные задачи для уравнений вида (1) были изучены в работе [2], в которой с помощью первого и второго итерационного процесса было построено асимптотическое решение. Однако асимптотическое, равномерно пригодное на всём отрезке, решение являлось составным, т.е. каждый член асимптотики строился в виде суммы двух слагаемых, описывающих отдельно зону «пограничного слоя» и зону вне его.

Построим регуляризованный асимптотический ряд по степеням ε, который представляет решение $y(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2). Для того чтобы реализовать идеи метода регуляризации [3], перейдём в пространство большей размерности с помощью введения дополнительных (регуляризирующих) независимых переменных. Регуляризирующие функции введём по формуле:

$$\tau = -\int_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon + x} ds \equiv g(x, \varepsilon), \quad (\tau|_{x=0} = 0). \tag{4}$$

Вместо решения $y(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) будем искать функцию $\tilde{y}(x, \tau, \varepsilon)$ — решение «расширенной» задачи. От функции $\tilde{y}(x, \tau, \varepsilon)$ потребуем, чтобы её сужение на множество $\tau \equiv g(x, \varepsilon)$, $x \in [0, X]$, тождественно совпадало с решением задачи (1), (2), т.е.

$$\tilde{y}|_{\tau = g(x,\varepsilon)} \equiv y(x, \varepsilon). \tag{5}$$

Преобразуем задачу (1), (2) с учетом выражения (4). Для определения функции $\tilde{y}(x, \tau, \varepsilon)$ получим следующую задачу:

$$(\varepsilon + x)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} - a(x)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} + a(x)\tilde{y} = h(x), \tag{6}$$

$$\tilde{y}(0, 0, \varepsilon) = y^0. \tag{7}$$

Положив в (6) $\varepsilon = 0$ получим:

$$x\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} - a(x)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} + a(x)\tilde{y} = h(x), \tag{8}$$

$$\tilde{y}(0, 0) = y^0. \tag{9}$$

Любое решение предельной задачи (8), (9) принадлежит множеству решений задачи (6), (7). Поскольку задача (6), (7) регулярна по ε, то её решение будем строить в виде ряда классической теории возмущений:

$$\tilde{y}(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{y}_i(x, \tau). \tag{10}$$

Задачи для определения коэффициентов ряда (10) имеют вид:

$$x\frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial x} - a(x)\frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial \tau} + a(x)\tilde{y}_0 = h(x), \tag{11}$$

$$\tilde{y}_0(0,0) = y^0, \tag{12}$$

$$x\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial x} - a(x)\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \tau} + a(x)\tilde{y}_1 = -\frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial x}, \tag{13}$$

$$\tilde{y}_1(0,0) = 0, \tag{14}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial x} - a(x)\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \tau} + a(x)\tilde{y}_i = -\frac{\partial \tilde{y}_{i-1}}{\partial x}, \tag{15}$$

$$\tilde{y}_i(0,0) = 0. \tag{16}$$

Задачи (11)—(16) недоопределены, т.к. для решения систем уравнений с частными производными у нас имеются «точечные» начальные условия. В работе [3] описано пространство функций, в котором задачи вида (11)—(16) разрешимы. Схему построения решений задач (11)—(16) рассмотрим на примере задачи (11), (12). Решение будем искать в виде:

$$\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0^1 + \tilde{y}_0^2,$$

где $\tilde{y}_0^1$ — частное решение уравнения

$$x\frac{\partial \tilde{y}_0^1}{\partial x} + a(x)\tilde{y}_0^1 = h(x), \tag{17}$$

удовлетворяющее условию

$$|\tilde{y}_0^1(0)| < \infty, \tag{18}$$

$\tilde{y}_0^2$ — общее решение уравнения

$$x\frac{\partial \tilde{y}_0^2}{\partial x} - a(x)\frac{\partial \tilde{y}_0^2}{\partial \tau} + a(x)\tilde{y}_0^2 = 0. \tag{19}$$

Решение уравнения (17) будем искать в виде $\tilde{y}_0^1 = \bar{y}_0^1\varphi(0,x)$, где функция $\varphi(\xi,x)$ — «срезающее» преобразование [4], определяемое формулой

$$\varphi(\xi,x) = \exp\left(-\int\limits_{\xi}^{x} \frac{a(\xi_1)-a(0)}{\xi_1}d\xi_1\right).$$

Функцию $\bar{y}_0^1$ определим из уравнения

$$x\frac{\partial \bar{y}_0^1}{\partial x} + a(0)\bar{y}_0^1 = h(x)\varphi(x,0).$$

Решение уравнения (17) с учетом условия (18) имеет вид

$$\tilde{y}_0^1(x) = x^{-a(0)}\int\limits_0^x h(\xi)\varphi(\xi,x)\xi^{a(0)-1}d\xi.$$

Следуя работе [3], решение уравнения (19) будем строить в виде $\tilde{y}_0^2 = C(x)e^{\tau}$. Тогда решение уравнения (11) будет иметь вид

$$\tilde{y}_0(x,\tau) = x^{-a(0)}\int\limits_0^x h(\xi)\varphi(\xi,x)\xi^{a(0)-1}d\xi + C(x)e^{\tau}.$$

Используя теорему о разрешимости в пространстве безрезонансных решений [3], получим дифференциальное уравнение для определения функции $C(x)$. Решая его при условии $C(0) = y^0$, получим решение задачи (11), (12).

$$\tilde{y}_0(x,\tau) = x^{-a(0)} \int\limits_0^x h(\xi)\varphi(\xi,x)\xi^{a(0)-1}d\xi + y^0 e^{\tau}.$$

Проводя сужение (5) по формуле (4), будем иметь

$$y_0(x,\varepsilon) = x^{-a(0)} \int\limits_0^x h(\xi)\varphi(\xi,x)\xi^{a(0)-1}d\xi + y^0 \exp\left(-\int\limits_0^x \frac{a(\xi)}{\varepsilon+\xi}d\xi\right). \tag{20}$$

Полученное решение удовлетворяет задаче (1), (2) с точностью до слагаемых, содержащих множитель ε. Первое слагаемое в (20) представляет регулярную часть решения $y_0(x,\epsilon)$ и совпадает с решением предельного уравнения (3).

3. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка метод регуляризации можно применить следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$(\varepsilon+x)^2 y'' + (\varepsilon+x)y' + a^2 y = h(x), \quad a = \mathrm{const} \tag{21}$$

при начальных условиях

$$y(0,\varepsilon) = y^0, \quad y'(0,\varepsilon) = y^1. \tag{22}$$

Введя замену переменной $z = (\varepsilon+x)y'$, сведем задачу (21), (22) к системе уравнений

$$(\varepsilon+x)\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\begin{pmatrix} y(0,\varepsilon) \\ z(0,\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0 \\ z^0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $z^0 = \varepsilon y^1$. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Потребуем, чтобы собственные значения матрицы удовлетворяли следующим условиям:

(i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

(ii) $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$, $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$.

Введем регуляризирующие функции по формуле

$$\tau_j = \int\limits_0^x \frac{\lambda_j}{\varepsilon+s}ds \equiv g_j(x,\varepsilon), \quad j = 1, 2, \tag{25}$$

и вместо задачи (21), (22) рассмотрим «расширенную» задачу

$$(\varepsilon+x)\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + ia\frac{\partial}{\partial \tau_1}\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} - ia\frac{\partial}{\partial \tau_2}\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}(0,0,0,\varepsilon) \\ \tilde{z}(0,0,0,\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0 \\ z^0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

для функций $\tilde{y}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$, $\tilde{z}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$. Связь задачи (26), (27) с задачей (23), (24) состоит в том, что если $\tilde{y}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$, $\tilde{z}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$ решение задачи (26), (27), то его «сужение» будет являться решением задачи (23), (24). Решение задачи (23), (24) будем строить в виде ряда:

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon) \\ \tilde{z}(x,\tau_1,\tau_2,\varepsilon) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \begin{pmatrix} \tilde{y}(x,\tau_1,\tau_2) \\ \tilde{z}(x,\tau_1,\tau_2) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в расширенную задачу (26), (27) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим задачи для определения коэффициентов ряда (28):

$$\begin{gathered}
\varepsilon^0 : x\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial \tau_1}\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial \tau_2}\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ h(x)\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}\tilde{y}_0(0,0,0)\\ \tilde{z}_0(0,0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y^0\\ z^0\end{pmatrix}\\
\varepsilon^1 : x\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{z}_1\end{pmatrix} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial \tau_1}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{z}_1\end{pmatrix} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial \tau_2}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{z}_1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{z}_1\end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}\tilde{y}_1(0,0,0)\\ \tilde{z}_1(0,0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\varepsilon^k : x\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\tilde{y}_k\\ \tilde{z}_k\end{pmatrix} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial \tau_1}\begin{pmatrix}\tilde{y}_k\\ \tilde{z}_k\end{pmatrix} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial \tau_2}\begin{pmatrix}\tilde{y}_k\\ \tilde{z}_k\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\tilde{y}_k\\ \tilde{z}_k\end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{z}_1\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}\tilde{y}_1(0,0,0)\\ \tilde{z}_1(0,0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{29}$$

Рекуррентные задачи (29) решаем в пространстве, описанном в работе [3]. Решение задачи (29) при ε^0 имеет вид:

$$\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{z}_0\end{pmatrix} = -hA^{-1} + \frac{1}{2}\left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2} - i\frac{z^0}{a^2}\right)\begin{pmatrix}1\\ ia\end{pmatrix}e^{\tau_1} + \frac{1}{2}\left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2} + i\frac{z^0}{a^2}\right)\begin{pmatrix}1\\ -ia\end{pmatrix}e^{\tau_2}.$$

Проводя сужение полученного решения по формуле (25), получим главный член асимптотики решения задачи (21), (22):

$$y_0(x) = \frac{h(x)}{a^2} + \frac{1}{2}\left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2} - i\frac{z^0}{a^2}\right)\left(\frac{\varepsilon + a}{\varepsilon}\right)^{ia} + \frac{1}{2}\left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2} + i\frac{z^0}{a^2}\right)\left(\frac{\varepsilon + a}{\varepsilon}\right)^{-ia}.$$

4. Уравнение с частными производными. Задача Гурса. Применение метода регуляризации для сингулярно возмущенных уравнений с частными производными рассмотрим на примере задачи Гурса:

$$(\varepsilon + t)U_{xt} + a(x,t)U_x = h(x,t,\varepsilon), \tag{30}$$

$$U(x,0,\varepsilon) = \mu(x,\varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \tag{31}$$

$$U(0,t,\varepsilon) = \gamma(t,\varepsilon), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{32}$$

где

$$\begin{gathered}
h(x,t,\varepsilon) = h_0(x,t) + \varepsilon h_1(x,t) + \ldots + \varepsilon^n h_n(x,t) + O(\varepsilon^{n+1}),\\
\gamma(t,\varepsilon) = \gamma_0(t) + \varepsilon\gamma_1(t) + \ldots + \varepsilon^n\gamma_n(t) + O(\varepsilon^{n+1}),\\
\mu(x,\varepsilon) = \mu_0(x) + \varepsilon\mu_1(x) + \ldots + \varepsilon^n\mu_n(x) + O(\varepsilon^{n+1}).
\end{gathered}$$

Функции $a(x,t)$, $h(x,t,\varepsilon)$ для простоты будем считать бесконечно дифференцируемыми, $\mu(x,\varepsilon)$, $\gamma(t,\varepsilon)$ — непрерывно дифференцируемые функции; $a(x,0) > 0$, $\gamma(0,\varepsilon) = \mu(0,\varepsilon)$.

В уравнении (30) введём обозначение

$$U_x = y(x,t,\varepsilon). \tag{33}$$

Задачу (30), (31) перепишем в виде:

$$(\varepsilon + t)\frac{\partial y}{\partial t} + a(x,t)y = h(x,t,\varepsilon) \tag{34}$$

$$y(x,0,\varepsilon) = \dot{\mu}(x,\varepsilon). \tag{35}$$

Регуляризирующую функцию введём по формуле

$$\tau = -\int\limits_0^t \frac{a(x,s)}{\varepsilon + s} ds \equiv g(x,t,\varepsilon). \tag{36}$$

Тогда для (34), (35) соответствующая расширенная задача примет вид:

$$(\varepsilon + t)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} + a(x,t)\tilde{y} = h(x,t,\varepsilon), \tag{37}$$

$$\tilde{y}(x,0,0,\varepsilon) = \dot{\mu}(x,\varepsilon). \tag{38}$$

Необходимым условием регуляризации является равенство:

$$\tilde{y}|_{g(x,t,\varepsilon)} = y(x,t,\varepsilon).$$

Функцию $\tilde{y}(x,t,\tau,\varepsilon)$ — решение задачи (37), (38) ищем в виде ряда классической теории возмущений:

$$\tilde{y}(x,t,\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{y}_i(x,t,\tau),$$

где коэффициенты определяются из следующих задач:

$$t\frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial \tau} + a(x,t)\tilde{y}_0 = h_0(x,t), \tag{39}$$

$$\tilde{y}_0(x,0,0) = \dot{\mu}_0(x), \tag{40}$$

$$t\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \tau} + a(x,t)\tilde{y}_i = h_i(x,t) - \frac{\partial \tilde{y}_{i-1}}{\partial t}, \tag{41}$$

$$\tilde{y}_i(x,0,0) = \dot{\mu}_i(x). \tag{42}$$

Схему построения решений задач (39)—(42) рассмотрим на примере задачи (39), (40). Для решения задачи (39), (40) воспользуемся тем же приёмом, что и при решении задачи (11), (12), т.е. функцию $\tilde{y}(x,t,\tau)$ будем искать в виде суммы:

$$\tilde{y}(x,t,\tau) = \tilde{y}_0^1 + y_0^2,$$

где $\tilde{y}_0^1$ — частное решение уравнения:

$$t\frac{\partial \tilde{y}_0^1}{\partial t} + a(x,t)\tilde{y}_0^1 = h_0(x,t),$$

удовлетворяющее условию

$$|\tilde{y}_0^1(x,0)| < \infty. \tag{43}$$

$\tilde{y}_0^2$ — решение уравнения:

$$t\frac{\partial \tilde{y}_0^2}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial \tilde{y}_0^2}{\partial \tau} + a(x,t)\tilde{y}_0^2 = 0. \tag{44}$$

Поступая так же как при решении уравнения (17), получим:

$$\tilde{y}_0^1(x,t) = t^{-a(x,0)}\varphi(x,t,0)\left(C_1(x) + \int\limits_0^t h_0(x,xi)\varphi(x,0,\xi)\xi^{a(x,0)-1}d\xi\right),$$

где

$$\varphi(x,t,0) = \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{a(x,\xi) - a(x,0)}{\xi} d\xi\right).$$

С учётом (43), функция $\tilde{y}_0^1(x,t)$ примет вид

$$\tilde{y}_0^1(x,t) = t^{-a(x,0)}\int\limits_0^t h_0(x,\xi)\varphi(x,\xi,t)\xi^{a(x,0)-1}d\xi.$$

Решение уравнения (44) будем строить в виде
$$\tilde{y}_0^2(x,t,\tau) = C(x,t)e^{\tau}.$$
Тогда
$$\tilde{y}_0(x,t,\tau) = t^{-a(x,0)} \int\limits_0^t h_0(x,\xi)\varphi(x,\xi,t)\xi^{a(x,0)-1}d\xi + C(x,t)e^{\tau}. \tag{45}$$
Подставляя последнее выражение в (40), получим начальное условие для определения функции $C(x,t)$:
$$C(x,0) = \dot{\mu}_0(x). \tag{46}$$
Чтобы получить уравнение для определения функции $C(x,t)$, воспользуемся теоремой о разрешимости в пространстве безрезонансных решений [3]. Уравнение для определения функции $C(x,t)$ будет иметь вид:
$$C_t'(x,t) = 0.$$
Присоединяя к этому уравнению условие (46), получим задачу, из которой функция $C(x,t)$ определяется однозначно. Возвращаясь к (45), получим окончательный вид решения задачи (39), (40):
$$\tilde{y}_0(x,t,\tau) = t^{-a(x,0)}\varphi(x,0,t) \int\limits_0^t h_0(x,\xi)\varphi(x,\xi,0)\xi^{a(x,0)-1}d\xi + \dot{\mu}_0(x)e^{\tau}.$$
Проведя в последнем выражении сужение по формуле (36), получим:
$$y_0(x,t) = t^{-a(x,0)}\varphi(x,0,t) \int\limits_0^t h_0(x,\xi)\varphi(x,\xi,0)\xi^{a(x,0)-1}d\xi + \dot{\mu}_0(x)\exp\left(-\int\limits_0^t \frac{a(x,s)}{\varepsilon+s}ds\right).$$
Возвращаясь к функции $U_0(x,t)$ с учетом (32)и (33), будем иметь
$$U_0(x,t) = \int\limits_0^x t^{-a(\zeta,0)}\varphi(\zeta,0,t) \int\limits_0^t h_0(\zeta,\xi)\varphi(\zeta,\xi,0)\xi^{a(\zeta,0)-1}d\xi d\zeta +$$
$$+ \gamma_0(t) + \int\limits_0^x \dot{\mu}_0(\zeta)\exp\left(-\int\limits_0^t \frac{a(\zeta,s)}{\varepsilon+s}ds\right)d\zeta.$$
Последнее выражение удовлетворяет задаче (30)—(32) с точностью до слагаемых, содержащих множитель ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011.
2. *Ломов С. А.* Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1966. — *30*, № 3. — С. 525–572.
3. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
4. *Ломов С. А.* Обобщение теоремы Фукса на неаналитический случай// Мат. сб. — 1964. — *65*, № 4. — С. 498–511.
5. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976.

Захарова Ирина Валентиновна
Иркутский государственный университет
E-mail: zair@math.isu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 57–63
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-57-63

УДК 517.988

О МАЛЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОБРАТИМЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© 2022 г. **Р. Ю. ЛЕОНТЬЕВ**

Аннотация. Рассматривается нелинейное операторное уравнение с векторным параметром, для которого не выполняется теорема о неявном операторе, поскольку оператор в главной части уравнения не является непрерывно обратимым в заданной точке. Доказана теорема, которая дает достаточные условия существования и позволяет строить малое непрерывное решение в некоторой области.

***Ключевые слова*:** банахово пространство, нелинейный оператор, операторное уравнение, непрерывное решение, секториальная окрестность нуля.

ON SMALL SOLUTIONS OF NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS WITH NONINVERTIBLE OPERATOR IN THE PRINCIPAL TERM

© 2022 **R. Yu. LEONTIEV**

Abstract. In this paper, we examine a nonlinear operator equation with vector parameter, which does not satisfy the implicit operator theorem since the operator in the principal term is not continuously invertible at a given point. We prove a sufficient conditions of existing small continuous solution and propose an algorithm of constructing such solution in some domain.

***Keywords and phrases*:** Banach space, nonlinear operator, operator equation, continuous solution, sectorial neighborhood of zero.

***AMS Subject Classification*:** 47J99

Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(x,\lambda)=0, \tag{1}$$

где $F\colon X\times\Lambda\to Y$.

Оператор F является непрерывным в окрестности нуля по x и λ. Имеет место равенство $F(0,0)=0$. Изучим вопрос о существовании таких малых непрерывных решений уравнения (1), что $x(0)=0$, а также о способе их построения.

Определение 1. Будем говорить, что открытое множество $S\subset\Lambda$ есть секториальная окрестность точки $0\in\Lambda$, если $0\in\partial S$, где ∂S — граница множества S.

Предположим, что оператор $F(x,\lambda)$ имеет производную Фреше по первому аргументу, непрерывную по x и λ в окрестности нуля, и пусть выполнена оценка:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \quad \forall \lambda \in S, \tag{2}$$

где $a(\lambda)$ — непрерывный функционал, $a(\lambda)\colon S \to \mathbb{R}_+$; $a(0)=0$, т.е.

$$\lim_{S\ni\lambda\to 0} a(\lambda) = 0;$$

S — секториальная окрестность нуля.

Приведем для уравнения (1) достаточные условия существования в секториальной окрестности нуля S малого решения $x(\lambda)$, а также предложим способ построения этого решения.

Заметим, что стандартная теорема о неявном операторе в данном случае не применима, так как оператор $F_x(0,0)$ не является непрерывно обратимым в силу оценки (2) и равенства $a(0)=0$.

В [6] были выделены классы уравнений вида (1), которые при выполнении оценки вида (2) приводятся к эквивалентным уравнениям, имеющим единственное малое решение, существование которого можно доказать при помощи принципа сжимающих отображений. Асимптотику таких решений можно построить с помощью метода последовательных приближений. Ряд результатов, продолжающих это исследование, представлен в работах [1–5].

Пусть r — положительное число и S — секториальная окрестность нуля. Введем множество

$$\Omega = \{(x,\lambda) \in X \times \Lambda, \mid \|x\| \leqslant a(\lambda)r,\ \lambda \in S\}.$$

Определение 2. Если найдутся такие числа $r_0 \in (0,r]$ и $\varepsilon > 0$, что из всех малых решений уравнения (1), определенных в области Ω, только одно решение $x^*(\lambda)$ попадает в область

$$\Omega_0 = \{(x,\lambda) \in X \times \Lambda \mid \|x\| \leqslant a(\lambda)r_0,\ \lambda \in S,\ 0 < \|\lambda\| < \varepsilon\},$$

то решение $x^*(\lambda)$ будем называть *минимальным решением* уравнения (1) в области S, непрерывным в точке $\lambda = 0$ (далее кратко «минимальной непрерывной ветвью»).

Заметим, что если уравнение (1) при всех $\lambda \in S$ имеет решение $x(\lambda) = 0$, то минимальной непрерывной ветвью будет нулевое решение. Данное определение подразумевает либо единственность решения, которое мы называем минимальной непрерывной ветвью, либо отсутствие такого решения вовсе.

Ниже для уравнения (1) приведена теорема, условия которой являются достаточными для существования минимальной непрерывной ветви в секториальной окрестности нуля $S_0 \subseteq S \subset \Lambda$.

Теорема 1. *Пусть в области Ω выполнены следующие условия*:

(i) *оператор $F(x,\lambda)$ непрерывен по x и λ и имеет частную производную Фреше $F_x(x,\lambda)$, непрерывную по x и λ;*

(ii) $F(0,0)=0$*; оператор $F_x(0,\lambda)$ непрерывно обратим при всех $\lambda \in S$ на всем пространстве Y, причем при $S \ni \lambda \to 0$ имеет место оценка* (2)*;*

(iii) *найдется некоторая константа $L > 0$, что для каждого $\lambda \in S$ справедливо неравенство*

$$|F_x(x,\lambda) - F_x(0,\lambda)\| \leqslant L\|x\|;$$

(iv) *при $S \ni \lambda \to 0$ имеет место оценка*

$$\|F(0,\lambda)\| = o(a^2(\lambda)).$$

Тогда найдутся такие число $r_0 \in (0,r]$ и секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такие, что для каждого $\lambda \in S_0$ уравнение (1) *имеет в шаре $\|x\| \leqslant a(\lambda)r_0$ минимальную непрерывную ветвь $x(\lambda) \to 0$ при $S_0 \ni \lambda \to 0$, которую можно построить методом последовательных приближений.*

Доказательство. Уравнение (1) рассматривается в области Ω, как указано выше, и S — секториальная окрестность нуля. Перепишем уравнение (1) в эквивалентной форме

$$x = x - F_x^{-1}(0,\lambda)F(x,\lambda),$$

которая справедлива для всех $\lambda \in S$ в силу оценки (2). В полученном уравнении сделаем замену $x = a(\lambda)V$, где $a(\lambda)$ — функционал из (2). Получим

$$a(\lambda)V = a(\lambda)V - F_x^{-1}(0,\lambda)F(a(\lambda)V,\lambda).$$

Поскольку $a(\lambda) \neq 0$ при всех $\lambda \in S$, получаем

$$V = V - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0,\lambda)F(a(\lambda)V,\lambda).$$

Обозначив правую часть последнего равенства через $\Phi(V,\lambda)$, имеем

$$V = \Phi(V,\lambda). \tag{3}$$

Покажем, что существуют такие секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ и число $0 < r_0 \leqslant r$, что для всех $\lambda \in S_0$ в шаре $\|V\| \leqslant r_0$ к уравнению (3) применим принцип сжимающих отображений.

Для этого сначала покажем, что существует такое число $0 < r_0 \leqslant r$, что для всех $\lambda \in S$ оператор $\Phi(V,\lambda)$ является сжатием в шаре $\|V\| \leqslant r_0$. Действительно, учитывая вид оператора $\Phi(V,\lambda)$, имеем:

$$\|\Phi(V_1,\lambda) - \Phi(V_2,\lambda)\| = \left\|V_1 - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0,\lambda)F(a(\lambda)V_1,\lambda) - V_2 + \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0,\lambda)F(a(\lambda)V_2,\lambda)\right\|.$$

В полученном выражении перегруппируем слагаемые и вынесем оператор $F_x^{-1}(0,\lambda)$ за скобку:

$$\left\|(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}F_x^{-1}(0,\lambda)\Big[F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda)\Big]\right\| =$$
$$= \left\|F_x^{-1}(0,\lambda) \times \left[F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}(F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda))\right]\right\|.$$

Оценим норму произведения:

$$\left\|F_x^{-1}(0,\lambda) \times \left[F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}\Big(F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda)\Big)\right]\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\|F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}\Big(F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda)\Big)\right\|.$$

В последнем выражении воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа, которая имеет вид

$$F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda) = \int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big)d\Theta\big(a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2\big).$$

Тогда, продолжая оценку, имеем:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\|F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}\Big(F(a(\lambda)V_1,\lambda) - F(a(\lambda)V_2,\lambda)\Big)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\|F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}\int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big)d\Theta\Big(a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2\Big)\right\|.$$

Сокращая на $a(\lambda)$ в числителе и знаменателе, получаем:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\|F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \frac{1}{a(\lambda)}\int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big)d\Theta\big(a(\lambda)V_1 - a(\lambda)V_2\big)\right\| =$$
$$= \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\|F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big)d\Theta(V_1 - V_2)\right\|.$$

Вынесем $V_1 - V_2$ за скобку:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\| F_x(0,\lambda)(V_1 - V_2) - \int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big) d\Theta (V_1 - V_2) \right\| =$$

$$= \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\| \left[F_x(0,\lambda) - \int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big) d\Theta \right] (V_1 - V_2) \right\|.$$

Внесём $F_x(0,\lambda)$ под знак интеграла, так как он не зависит от Θ:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\| \left[F_x(0,\lambda) - \int\limits_0^1 F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big) d\Theta \right] (V_1 - V_2) \right\| =$$

$$= \big\|F_x^{-1}(0,\lambda)\big\| \times \left\| \int\limits_0^1 \Big[F_x(0,\lambda) - F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big) \Big] d\Theta (V_1 - V_2) \right\|.$$

Далее применим оценку нормы произведения и оценку нормы интеграла. Получим:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \left\| \int\limits_0^1 \Big[F_x(0,\lambda) - F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big) \Big] d\Theta (V_1 - V_2) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \int\limits_0^1 \Big\| F_x(0,\lambda) - F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big) \Big\| d\Theta \|V_1 - V_2\|.$$

Согласно условию (iii) доказываемой теоремы имеем:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \int\limits_0^1 \Big\| F_x(0,\lambda) - F_x\Big(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)),\lambda\Big) \Big\| d\Theta \|V_1 - V_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \int\limits_0^1 L \Big\| a(\lambda)\big(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)\big) \Big\| d\Theta \|V_1 - V_2\|.$$

Вынесем L и $a(\lambda)$ из под знака интеграла, а под знаком интеграла применим неравенство треугольника для норм:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times \int\limits_0^1 L \Big\| a(\lambda)\big(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)\big) \Big\| d\Theta \|V_1 - V_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times La(\lambda) \int\limits_0^1 \Big(\|V_2\| + \Theta\big(\|V_1\| + \|V_2\|\big) \Big) d\Theta \|V_1 - V_2\|.$$

Дальнейшую оценку будем производить в шаре $\|V\| \leqslant r_0$, где $0 < r_0 \leqslant r$:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times La(\lambda) \int\limits_0^1 \Big(\|V_2\| + \Theta\big(\|V_1\| + \|V_2\|\big) \Big) d\Theta \|V_1 - V_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times La(\lambda) r_0 \int\limits_0^1 (1 + 2\Theta) d\Theta \|V_1 - V_2\|.$$

После вычисления интеграла получим:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times La(\lambda)r_0 \int\limits_0^1 (1+2\Theta)d\Theta \|V_1 - V_2\| = a(\lambda)\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \times 2Lr_0\|V_1 - V_2\|.$$

Согласно условию (ii) доказываемой теоремы неравенство

$$a(\lambda)\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| \leqslant C$$

имеет место при всех $\lambda \in S$, где C — константа. Пусть q — число из интервала $(0,1)$. Выберем r_0 так, чтобы $r_0 = \min\{r, q/(2CL)\}$. Тогда оператор $\Phi(V,\lambda)$ будет сжатием с коэффициентом сжатия q в шаре $\|V\| \leqslant r_0$ для всех $\lambda \in S$.

Теперь покажем, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что для всех $\lambda \in S_0$ и значениях V из шара $\|V\| \leqslant r_0$ значения оператора $\Phi(V,\lambda)$ удовлетворяют оценке $\|\Phi(V,\lambda)\| \leqslant r_0$, т.е. отображают замкнутый шар $\overline{S_{r_0}(0)}$ в себя. Действительно,

$$\|\Phi(V,\lambda)\| = \Big\|\Phi(V,\lambda) - \Phi(0,\lambda) + \Phi(0,\lambda)\Big\| \leqslant \Big\|\Phi(V,\lambda) - \Phi(0,\lambda)\Big\| + \|\Phi(0,\lambda)\|.$$

Здесь мы добавили и вычли $\Phi(0,\lambda)$ и применили неравенство треугольника для норм. Далее, учитывая сжимаемость оператора $\Phi(V,\lambda)$ в шаре $\|V\| \leqslant r_0$ при всех $\lambda \in S$, имеем:

$$\Big\|\Phi(V,\lambda) - \Phi(0,\lambda)\Big\| + \|\Phi(0,\lambda)\| \leqslant q\|V\| + \|\Phi(0,\lambda)\| \leqslant qr_0 + \|\Phi(0,\lambda)\|.$$

Выпишем оператор $\Phi(0,\lambda)$ и применим оценку нормы произведения:

$$qr_0 + \|\Phi(0,\lambda)\| = qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|F_x^{-1}(0,\lambda)F(0,\lambda)\| \leqslant qr_0 + \frac{\|F_x^{-1}(0,\lambda)\|}{a(\lambda)}\|F(0,\lambda)\|.$$

В силу условий (ii) и (iv) доказываемой теоремы второе слагаемое в последнем выражении является сколь угодно малой величиной при $S \ni \lambda \to 0$. Поэтому существует такая секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$, что для всех $\lambda \in S_0$

$$\frac{\|F_x^{-1}(0,\lambda)\|}{a(\lambda)}\|F(0,\lambda)\| \leqslant (1-q)r_0,$$

откуда и получаем, что для всех $\lambda \in S_0$ в шаре $\|V\| \leqslant r_0$ выполняется неравенство $\|\Phi(V,\lambda)\| \leqslant r_0$.

Тогда на основании принципа сжимающих отображений уравнение (3) для всех $\lambda \in S_0$ в шаре $\|V\| \leqslant r_0$ имеет единственное малое решение, которое можно строить методом последовательных приближений по формуле

$$V_n = \Phi(V_{n-1},\lambda), \tag{4}$$

сходящимся при любом начальном приближении V_0 из шара $\|V_0\| \leqslant r_0$, в том числе при $V_0 = 0$. Тогда искомое решение уравнения (3)

$$V_* = \lim_{n\to\infty} V_n,$$

а $x_* = a(\lambda)V_*$ будет малым решением уравнения (1). Следует отметить, что уравнение (1) кроме x_* может иметь и другие малые решения. □

Пример 1. Покажем, что уравнение

$$F(x,\lambda) \equiv \int\limits_0^1 tsx(s)ds + \lambda x(t) - \int\limits_0^1 x^3(s)ds - f(t,\lambda) = 0,$$

где $x(t) \in C_{[0,1]}$, $f(t,\lambda) = m(t)\lambda^n$, $m(t) \in C_{[0,1]}$, $n > 2$, S — проколотая окрестность нуля, имеет непрерывное при $t \in [0,1]$ решение $x_\lambda(t) \to 0$ при $S \ni \lambda \to 0$.

Решение. Дифференциал Фреше имеет вид

$$F_x(x,\lambda)h = \int_0^1 tsh(s)ds + \lambda h(t) - 3\int_0^1 x^2(s)h(s)ds.$$

Согласно условиям теорем, оценка на норму оператора $F_x^{-1}(0,\lambda)$ должна удовлетворять условию (2). Найдем $F_x^{-1}(0,\lambda)$. Для этого разрешим уравнение

$$\int_0^1 tsh(s)ds + \lambda h(t) = f(t) \tag{5}$$

относительно $h(t)$, где

$$\int_0^1 ts[\cdot]ds + \lambda[\cdot] \equiv F_x(0,\lambda).$$

Вынесем множитель t за знак интеграла и введем обозначение

$$\int_0^1 s\cdot h(s)ds = C_1. \tag{6}$$

Тогда из (5) получим:

$$h(t) = \frac{1}{\lambda}(f(t) - tC_1).$$

Подставляя полученное выражение для $h(t)$ в равенство (6), получим алгебраическое уравнение относительно C_1, после разрешения которого получим

$$C_1 = \frac{3}{3\lambda+1}\int_0^1 sf(s)ds.$$

Тогда оператор $F_x^{-1}(0,\lambda)$ имеет вид

$$F_x^{-1}(0,\lambda)f = \frac{f(t)}{\lambda} - \frac{3t}{(3\lambda+1)\lambda}\int_0^1 sf(s)ds.$$

Следовательно, оценка (2) выполняется:

$$\|F_x^{-1}(0,\lambda)\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad \text{при} \quad \lambda\to 0, \quad \lambda\neq 0.$$

Теперь проверим, что выполнены остальные условия теоремы 1.

(i) Оператор $F(x,\lambda)$ является непрерывным по x и λ в некоторой окрестности нуля $\|x\|\leqslant r$, $|\lambda|<\rho$. Производная Фреше $F_x(x,\lambda)$ тоже непрерывна по x и λ в некоторой окрестности нуля $\|x\|\leqslant r$, $|\lambda|<\rho$.

(ii) Оператор $F_x(0,\lambda)$ непрерывно обратим в некоторой проколотой окрестности нуля, и имеет место оценка (2).

(iii) Из оценки

$$\|F_x(x,\lambda)h - F_x(0,\lambda)h\| = \left\|3\int_0^1 x^2(s)h(s)ds\right\| \leqslant 3r\|x\|\|h\|,$$

где $\|x\|\leqslant r$, следует, что

$$\|F_x(x,\lambda) - F_x(0,\lambda)\| \leqslant 3r\|x\|.$$

(iv) $\|F(0,\lambda)\| = \|f(t,\lambda)\| = \|m(t)\lambda^n\| = \|m(t)\||\lambda|^n$, где $n>2$.

Следовательно, выполнены все условия теоремы 1. Поэтому можно утверждать, что данное уравнение имеет решение $x(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ в некоторой проколотой окрестности нуля $0 < |\lambda| < r_0$. Это решение будет иметь вид $x = \lambda V$, где $V(\lambda)$ строится методом последовательных приближений при начальном приближении $V_0 = 0$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев Р. Ю.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. информ. — 2009. — № 9. — С. 77–83.
2. *Леонтьев Р. Ю.* О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений// Тр. Междунар. конф. «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования» (Москва, 2009). — М.: Изд-во РУДН, 2009. — С. 276–278.
3. *Леонтьев Р. Ю.* Итерационные методы поиска решений нелинейных уравнений в секториальных областях// Тр. Междунар. науч. семин. по обратным и некорректно поставленным задачам. — М.: Изд-во РУДН, 2015. — С. 116.
4. *Леонтьев Р. Ю.* О малых решениях нелинейных операторных уравнений с векторным параметром// Мат. XII Междунар. конф. «Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем». — Пенза: Изд-во ПГУ, 2018. — С. 80–83.
5. *Леонтьев Р. Ю., Сидоров Н. А.* Униформизация и последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Мат. — 2011. — *4*, № 3. — С. 116–123.
6. *Сидоров Н. А.* Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы// Нелин. гранич. задачи. — 2004. — № 14. — С. 161–164.

Леонтьев Роман Юрьевич
Иркутский государственный университет
E-mail: romanisu@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 64–72
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-64-72

УДК 517.9

СМЕШАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. **М. В. ПЛЕХАНОВА, А. Ф. ШУКЛИНА**

Аннотация. В работе рассматриваются задачи, в которых используются одновременно два типа управляющего воздействия: распределенное и стартовое. Основные результаты касаются разрешимости класса задач оптимального управления для систем, состояние которых описывается уравнением в банаховом пространстве, разрешенным относительно дробной производной Герасимова—Капуто, нелинейным по младшим дробным производным. Рассматриваются выпуклые полунепрерывные снизу, коэрцитивные функционалы, компромиссные или не зависящие от управления. Абстрактные результаты продемонстрированы на примере задачи управления для дробной модели метастабильных состояний в полупроводниках.

Ключевые слова: оптимальное управление, смешанное управление, уравнение дробного порядка, производная Герасимова—Капуто, нелинейное эволюционное уравнение.

MIXED CONTROL FOR SEMILINEAR FRACTIONAL EQUATIONS

© 2022 **M. V. PLEKHANOVA, A. F. SHUKLINA**

Abstract. In this work, we consider problems in which two types of controls (distributed and starting control functions) are used simultaneously. The main results concern the solvability of a class of optimal control problems for systems whose states are described by equations in Banach spaces that are resolved with respect to the Gerasimov–Caputo fractional derivative and nonlinear in the lowest fractional derivatives. We consider convex lower semicontinuous, coercive functionals, which are compromise or control-independent. Abstract results are demonstrated by an example of a control problem for a fractional model of metastable states in semiconductors.

Keywords and phrases: optimal control, mixed control, fractional equation, Gerasimov–Caputo derivative, nonlinear evolutionary equation.

AMS Subject Classification: 49J27, 49J20, 34J20, 34K35

1. Введение. Поиски новых возможностей моделирования сложных процессов привели к развитию дробного интегро-дифференциального исчисления [1, 9, 10, 18, 20]. Различные задачи для систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями, вызывают все больший интерес исследователей [11–13,17,19,27]. В данной работе мы рассмотрим задачу смешанного управления в банаховых пространствах $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ для эволюционного уравнения дробного порядка

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + F(t, z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(r)}(t)) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \tag{1}$$

$$z^{(k)}(t_0) = v_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 21-51-54003) и Правительства Российской Федерации (договор 02.A03.21.0011, приказ 211).

$$(u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{3}$$

$$J(z, u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) \to \inf. \tag{4}$$

Здесь $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Герасимова—Капуто, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ (т.е. линейный и непрерывный оператор из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$), $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X})$ (линейный и непрерывный оператор из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{X}$), $F\colon (t_0, T) \times \mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$ — нелинейный оператор, $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое и замкнутое множество допустимых управлений в некотором пространстве управлений, J — функционал качества.

Управление в задаче (1)—(4) состоит из набора функций $(u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$, в котором u представляет распределенное управление, а $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$ — стартовое. Внимание авторов сосредоточено на выводе условий разрешимости задачи (1)—(4).

Ранее авторами рассматривались задачи смешанного управления для уравнений целого порядка [7,8,15,23]. Для эволюционных уравнений дробного порядка в работах М. В. Плехановой исследовались задачи с управлением одного типа, стартовым [2] или распределённым [4,5,21,22,24–26].

Доказательства в данной работе опираются на схему исследования А. В. Фурсикова [14], при которой решение находится среди наборов, состоящих из функции состояния и функций стартового управления. Проверяется выполнение условия непустоты множества допустимых наборов, непрерывность в выбранных функциональных пространствах операторов, задающих уравнение состояния, так называемое условие компактности и коэрцитивность выпуклого, ограниченного снизу и полунепрерывного снизу функционала качества. Для непустоты множества допустимых наборов используются условия существования сильного решения задачи Коши (1), (2), полученные в работе [21]. Нелинейный оператор должен удовлетворять условию равномерной липшицевости. В случае, когда нелинейный оператор не обладает таким свойством, но при этом является локально липшицевым по фазовым переменным, также удается установить разрешимость задачи управления при условии существования хотя бы одного допустимого набора «состояние-управление». Именно в подобном ключе рассмотрена задача управления для дробной модели метастабильных состояний в полупроводниках, для установления разрешимости которой использованы полученные абстрактные результаты.

2. Сильное решение для полулинейного дробного уравнения. Примем следующие обозначения: $g_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1} t^{\delta-1}$ для $\delta > 0$, $t > 0$, $\tilde{g}_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1}(t - t_0)^{\delta-1}$,

$$J_t^\delta h(t) := \int\limits_{t_0}^{t} g_\delta(t-s) h(s) ds$$

для $t > t_0$. Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, J_t^0 — тождественный оператор. Производная Герасимова—Капуто функции h определена следующим образом (см. [16, с. 11]):

$$D_t^\alpha h(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1}(t) \right), \quad t \geqslant t_0.$$

Результаты этого параграфа, приведенные ниже, получены в работе [5].

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Для нелинейного уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + F(t, z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) \tag{5}$$

рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{6}$$

Здесь нелинейный оператор $F\colon (t_0, T) \times \mathcal{Z}^m \to \mathcal{Z}$ предполагается каратеодориевым, т.е. для всех $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$ он задает измеримое отображение на (t_0, T) и для почти всех $t \in (t_0, T)$ является непрерывным по $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$.

Зафиксируем некоторое $q > 1$. Сильным решением задачи (5), (6) на интервале (t_0, T) называется функция $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, для которой

$$J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z}),$$

выполняются условия (6) и почти всюду на (t_0, T) выполняется равенство (5).

Далее черта над символом будет означать, что речь идет о наборе m элементов с индексами от нуля до $m-1$, например, $\overline{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_{m-1})$. Отображение $F\colon (t_0, T) \times \mathcal{Z}^m \to \mathcal{Z}$ будем называть равномерно липшицевым по $\overline{y}$, если существует такое $l > 0$, что при почти всех $t \in (t_0, T)$, всех $\overline{y}$, $\overline{z}$ из $\mathcal{Z}^m$ выполняется неравенто

$$\|F(t, \overline{y}) - F(t, \overline{z})\|_{\mathcal{Z}} \leqslant l \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - z_k\|_{\mathcal{Z}}.$$

Теорема 1. *Пусть $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, отображение $F\colon (t_0, T) \times \mathcal{Z}^m \to \mathcal{Z}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{y}$, при некотором $\overline{v} \in \mathcal{Z}^m$ $F(\cdot, \overline{v}) \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$. Тогда при любых $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in \mathcal{Z}$ задача (5), (6) имеет единственное сильное решение на (t_0, T).*

3. Смешанное управление для полулинейного невырожденного уравнения дробного порядка. Пусть $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{Z}$ компактно вложено в $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{U}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$, $F\colon (t_0, T) \times \mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$. Введём в рассмотрение пространство управлений $\mathfrak{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$ с нормой

$$\|(u, v)\|_{\mathfrak{U}}^2 = \|u\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})}^2 + \|v\|_{\mathcal{Z}^m}^2.$$

Рассмотрим задачу смешанного управления

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + F(t, z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(r)}(t)) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \tag{7}$$

$$z^{(k)}(t_0) = v_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{8}$$

$$(u, v) = (u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{9}$$

$$J(z, u, \overline{v}) = J(z, u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) \to \inf, \tag{10}$$

где $\mathcal{U}_\partial$ — множество допустимых управлений, $\mathcal{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$, J — некоторый функционал качества, $m \in \mathbb{N}$, $m - 1 < \alpha \leqslant m$, $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Лемма 1 (см. [24]). *Пусть $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $\mathcal{X}_0$ компактно вложено в $\mathcal{X}$, которое непрерывно вложено в $\mathcal{X}_1$, $q, q_1 \in (1, +\infty)$. Тогда при $m \in \mathbb{N}$ пространство*

$$W_{q,q_1}^m(t_0, T; \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1) \equiv \left\{z \in W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X}_0) : z^{(m)} \in L_{q_1}(t_0, T; \mathcal{X}_1)\right\}$$

с нормой

$$\|x\|_{W_{q,q_1}^m(t_0, T; \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)} = \|x\|_{W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X}_0)} + \|x^{(m)}\|_{L_{q_1}(t_0, T; \mathcal{X}_1)}$$

является банаховым пространством, непрерывно вложенным в $C([t_0, T]; \mathcal{X}_1)$ и компактно вложенным в $W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X})$.

Следствие 1 (см. [24]). *Пусть $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{X}_0$ компактно вложено в $\mathcal{X}_1$, $q \in (1, +\infty)$. Тогда при $m \in \mathbb{N}$ $W_q^m(t_0, T; \mathcal{X}_0)$ компактно вложено в $W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X}_1)$.*

Решения задачи (7), (8) будем искать в пространстве

$$\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) := \left\{z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z}) : J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z})\right\}.$$

Лемма 2 (см. [21]). *$\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ является банаховым пространством с нормой*

$$\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})} = \|z\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} + \|D_t^\alpha z\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Z})}.$$

Введем в рассмотрение непрерывный оператор $\gamma_0 \colon C([t_0,T];\mathcal{Z}) \to \mathcal{Z}$, $\gamma_0 x = x(t_0)$. Естественно, он является непрерывным и на пространстве $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$, т.е. $\gamma_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z});\mathcal{Z})$.

Множество наборов $(z,u,\bar v) = (z,u,v_0,v_1,\ldots,v_{m-1})$ будем называть множеством допустимых наборов $\mathfrak{W}$ задачи (7)—(10), если $z \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ — сильное решение задачи (7), (8) с $(u,\bar v) \in \mathcal{U}_\partial$ и $J(z,u,\bar v) < \infty$. Решением задачи (7)—(10) называется набор $(\hat z,\hat u,\hat v_0,\hat v_1,\ldots,\hat v_{m-1}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующий функционал качества:

$$J(\hat z,\hat u,\bar v) = \inf_{(z,u,\bar v)\in\mathfrak{W}} J(z,u,\bar v).$$

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $r = m-2$, отображение $F\colon (t_0,T)\times\mathcal{Z}_1^{m-1} \to \mathcal{Z}_1$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}_1^{m-1}$, $F\colon (t_0,T)\times\mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}^{m-1}$, при некотором $\overline{y} \in \mathcal{Z}^{m-1}$ выполняется $F(\cdot,\overline{y}) \in L_q(t_0,T;\mathcal{Z})$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$, функционал качества J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на множестве $\mathfrak{Y}\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, коэрцитивный на $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$. Тогда задача (7)—(10) имеет решение $(\hat z,\hat u,\hat v_0,\hat v_1,\ldots,\hat v_{m-1}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathcal{U}_\partial$.*

Доказательство. С учётом условий на отображение $F\colon (t_0,T)\times\mathcal{Z}^{m-1}\to\mathcal{Z}$ по теореме 1 множество допустимых наборов $\mathfrak{W}$ непусто, поскольку задача (7), (8) разрешима при любом допустимом управлении $(u,v_0,v_1,\ldots,v_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial$. Используем [14, с. 17, теорема 2.4] для абстрактной задачи управления с нелинейным уравнением состояния для доказательства существования оптимального управления. Определим пространства $\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$, $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, $\mathfrak{V} = L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)\times\mathcal{Z}^m$ и операторы

$$\mathfrak{L}(z,u,\bar v) = \Big(D_t^\alpha z - Az - Bu,\ \gamma_0 z - v_0, \gamma_0 z^{(1)} - v_1,\ldots,\gamma_0 z^{(m-1)} - v_{m-1}\Big),$$
$$\mathfrak{F}(z(\cdot)) = -\Big(F(\cdot,z(\cdot),\ z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)),0,0,\ldots,0\Big),$$

задающие уравнение состояния для задачи управления в виде $\mathfrak{L}(z,u,\bar v) + \mathfrak{F}(z) = 0$. Непрерывность оператора $\mathfrak{L}\colon \mathfrak{Y}_1\times\mathfrak{U}\to\mathfrak{V}$ следует из неравенств

$$\Big\|(D_t^\alpha z - Az - Bu,\ \gamma_0 z - v_0,\gamma_0 z^{(1)} - v_1,\ldots,\gamma_0 z^{(m-1)} - v_{m-1})\Big\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathcal{Z}^m} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\left(\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|\bar v\|_{\mathcal{Z}^m}\right) \leqslant C_1\|(z,u,\bar v)\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathfrak{U}}.$$

Из соотношения $\|z_n - z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})} \to 0$ при $n\to\infty$ и равномерной липшицевости оператора F получим

$$\Big\|F\big(\cdot,z_n(\cdot),z_n^{(1)}(\cdot),\ldots,z_n^{(m-2)}(\cdot)\big) - F\big(\cdot,z(\cdot),z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)\big)\Big\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\sum_{k=0}^{m-2}\|z_n^{(k)} - z^{(k)}\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z}_1)} \leqslant C_2\sum_{k=0}^{m-2}\|z_n^{(k)} - z^{(k)}\|_{C([t_0,T];\mathcal{Z})} \to 0;$$

следовательно, оператор $\mathfrak{F}\colon \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\to\mathfrak{V}$ непрерывен.

Взяв $\mathfrak{Y}_{-1} = W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$, проверим остальные условия теоремы 2.4 [14, с. 17]. Пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в $W_q^{m-1}(t_0,T;\mathcal{Z})$ и поэтому в силу следствия 1 компактно вложено в $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$. Для $v^* \in (L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1))^*$ в силу равномерной липшицевости F

$$\Big|v^*\Big(F\Big(\cdot,z_n(\cdot),z_n^{(1)}(\cdot),\ldots,z_n^{(m-2)}(\cdot)\Big),0,0,\ldots,0\Big) - F\Big(\cdot,z(\cdot),z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)\Big),0,0,\ldots,0\Big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant C_1\|v^*\|_{(L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1))^*}\Big\|F\Big(\cdot,z_n(\cdot),z_n^{(1)}(\cdot),\ldots,z_n^{(m-2)}(\cdot)\Big) - F\Big(\cdot,z(\cdot),z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)\Big)\Big\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2\|v^*\|_{(L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1))^*}\|z_n - z\|_{W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)}.$$

Это позволяет сделать вывод о непрерывной продолжимости функционала $w(\cdot) = v^*(\mathfrak{F}(\cdot))$ из $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ на $\mathfrak{Y}_{-1}$. □

Для задачи без учета затрат на управление, т.е. с функционалом

$$J_0(z) \to \inf \tag{11}$$

аналогичный результат получаеся при добавлении требования ограниченности множества допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$, которое позволяет получить коэрцитивность J_0 как функционала от z, u, $\bar{v}$.

Теорема 3. *Пусть $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $r = m - 2$, отображение $F\colon (t_0,T) \times \mathcal{Z}_1^{m-1} \to \mathcal{Z}_1$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}_1^{m-1}$, $F\colon (t_0,T) \times \mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}^{m-1}$, при некотором $\overline{y} \in \mathcal{Z}^{m-1}$ выполняется $F(\cdot,\overline{y}) \in L_q(t_0,T;\mathcal{Z})$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое ограниченное подмножество в $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$, пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$, функционал J_0 выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на множестве $\mathfrak{Y}$, коэрцитивный на $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$. Тогда задача (7)—(9), (11) имеет решение $(\hat{z},\hat{u},\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_{m-1}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$.*

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(z,u,\bar{v}) = \|z - z_d\|^{q_1}_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \delta\|u - u_d\|^{q_2}_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \delta \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k - v_{dk}\|^{q_3}_{\mathcal{Z}} \to \inf \tag{12}$$

при заданных $q_1,q_2,q_3 \geqslant 1$, $z_d \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})$, $u_d \in L_q(t_0,T;\mathcal{U})$, $v_{dk} \in \mathcal{Z}$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, $\delta \geqslant 0$.

Следствие 2. *Пусть $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $r = m - 2$, отображение $F\colon (t_0,T) \times \mathcal{Z}_1^{m-1} \to \mathcal{Z}_1$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}_1^{m-1}$, $F\colon (t_0,T) \times \mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}^{m-1}$, при некотором $\overline{y} \in \mathcal{Z}^{m-1}$ выполняется $F(\cdot,\overline{y}) \in L_q(t_0,T;\mathcal{Z})$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{U} = L_q(t_0,T;\mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$. Тогда при $\delta > 0$ существует решение $(\hat{z},\hat{u},\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_{m-1}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (7)—(9), (12). Для $\delta = 0$ утверждение справедливо при дополнительном условии ограниченности $\mathcal{U}_\partial$.*

Доказательство. Возьмем $\mathfrak{Y} = C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})$ и при $\delta > 0$ получим требуемое по теореме 2, а при $\delta = 0$ — по теореме 3, если докажем коэрцитивность функционала. Имеем при $J(z,u,\bar{v}) \leqslant R$ для некоторого $p > 0$

$$\begin{aligned}
\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|\bar{v}\|_{\mathcal{Z}^m} &\leqslant \|D_t^\alpha z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + C_1 J^p(z,u,\bar{v}) + C_2 \leqslant \\
&\leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|F(\cdot,z(\cdot),z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)) - F(\cdot,\bar{0})\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \\
&\quad + \|F(\cdot,\bar{0})\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + C_1 J^p(z,u,\bar{v}) + C_2 \leqslant \\
&\leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + l\|z\|_{W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|F(\cdot,\bar{0})\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + C_1 J^p(z,u,\bar{v}) + C_2 \leqslant \\
&\leqslant C_3 J^p(z,u,\bar{v}) + C_4 \leqslant C_3 R^p + C_4.
\end{aligned}$$

При $\delta = 0$ здесь используется ограниченность множества $\mathcal{U}_\partial$. □

Аналогичный результат для задачи управления с функционалом

$$J(z,u,v) = \|z - z_d\|^{q_1}_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \|D_t^\alpha z - D_t^\alpha z_d\|^{q_1}_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \delta\|u - u_d\|^{q_2}_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \delta \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k - v_{dk}\|^{q_3}_{\mathcal{Z}} \to \inf$$

нетрудно получить, взяв $\mathfrak{Y} = \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$. Коэрцитивность в этом случае получается сразу.

В приложениях условие равномерной липшицевости оператора F часто является слишком сильным. Но доказываемая с помощью этого условия непустота множества $\mathfrak{W}$ в некоторых случаях очевидна. Рассмотрим задачу оптимального управления в такой ситуации.

Назовем отображение $F\colon [t_0,T]\times\mathcal{Z}_1^m\to\mathcal{Z}_1$ локально липшицевым по $\overline{z}\in\mathcal{Z}_1$ равномерно по $t\in[t_0,T]$, если для любого $\overline{z}\in\mathcal{Z}_1^m$ существуют $\delta,l>0$, такие, что при всех $\overline{y}\in\mathcal{Z}_1^m$, для которых

$$\sum_{k=0}^{m-1}\|y_k-z_k\|_{\mathcal{Z}_1}<\delta,$$

для всех $t\in[t_0,T]$ выполняется неравенство

$$\Big\|F(t,y_0,y_1,\ldots,y_{m-1})-F(t,z_0,z_1,\ldots,z_{m-1})\Big\|_{\mathcal{Z}_1}\leqslant l\sum_{k=0}^{m-1}\|y_k-z_k\|_{\mathcal{Z}_1}.$$

Теорема 4. *Пусть $\alpha,q>1$, $r=m-2$, отображение $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}_1^{m-1};\mathcal{Z}_1)$ локально липшицево по $\overline{y}\in\mathcal{Z}_1$ равномерно по $t\in[t_0,T]$, при этом $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}^{m-1};\mathcal{Z})$, $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{U}=L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, для некоторого набора $(u,v_0,v_1,\ldots,v_{m-1})\in\mathcal{U}_\partial$ существует сильное решение задачи* (7), (8)*; пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$, функционал J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathfrak{Y}\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, коэрцитивный на $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$. Тогда существует решение $(\hat{z},\hat{u},\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_{m-1})\in\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathcal{U}_\partial$ задачи* (7)—(10).

Доказательство. Пусть $\|z_n-z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})}\to0$ при $n\to\infty$; тогда при достаточно большом $n\in\mathbb{N}$ сразу для всех $t\in[t_0,T]$ $\|z_n^{(k)}(t)-z^{(k)}(t)\|_{\mathcal{Z}}<\delta/m$ при $k=0,1,\ldots,m-1$, поэтому в силу условия локальной липшицевости оператора F

$$\Big\|F\Big(\cdot,z_n(\cdot),z_n^{(1)}(\cdot),\ldots,z_n^{(m-2)}(\cdot)\Big)-F\Big(\cdot,z(\cdot),z^{(1)}(\cdot),\ldots,z^{(m-2)}(\cdot)\Big)\Big\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)}\leqslant$$
$$\leqslant C_1\sum_{k=0}^{m-2}\|z_n^{(k)}-z^{(k)}\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)}\leqslant C_2\sum_{k=0}^{m-2}\|z_n^{(k)}-z^{(k)}\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})}\to0.$$

Следовательно, оператор $\mathfrak{F}\colon\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\to\mathfrak{V}:=L_q(t_0,T;\mathcal{Z}_1)\times\mathcal{Z}^m$, определенный как при доказательстве теоремы 2, непрерывен.

В остальном доказательство не отличается от доказательства теоремы 2. □

Для задачи без учета затрат на управление добавляем условие ограниченности множества $\mathcal{U}_\partial$.

Теорема 5. *Пусть $\alpha,q>1$, $r=m-2$, отображение $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}_1^{m-1};\mathcal{Z}_1)$ локально липшицево по $\overline{y}\in\mathcal{Z}_1$ равномерно по $t\in[t_0,T]$, при этом $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}^{m-1};\mathcal{Z})$, $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое ограниченное подмножество пространства $\mathfrak{U}=L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, для некоторого набора $(u,v_0,v_1,\ldots,v_{m-1})\in\mathcal{U}_\partial$ существует сильное решение задачи* (7), (8)*; пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathcal{Z}_1)$, функционал J_0 выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathfrak{Y}$, коэрцитивный на $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})$. Тогда существует решение $(\hat{z},\hat{u},\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_{m-1})\in\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})\times\mathcal{U}_\partial$ задачи* (7)—(9), (11).

Таким образом, в случае гарантированной непустоты множества допустимых наборов $\mathfrak{W}$ в задаче управления условие равномерной липшицевости по фазовым переменным $\overline{z}$ отображения F можно заменить на значительно более слабое условие его локальной липшицевости по $\overline{z}$, равномерной по $t\in[t_0,T]$.

Следствие 3. *Пусть $\alpha,q>1$, отображение $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}_1^{m-1};\mathcal{Z}_1)$ локально липшицево по $\overline{y}\in\mathcal{Z}_1$ равномерно по $t\in[t_0,T]$, при этом $F\in C([t_0,T]\times\mathcal{Z}^{m-1};\mathcal{Z})$, существует такая функция $f\in C(\overline{\mathbb{R}}_+^{m-1};\overline{\mathbb{R}}_+)$, что для всех $t\in[t_0,T]$, $z_k\in\mathcal{Z}$, $k=0,1,\ldots,m-2$,*

$$\|F(t,z_0,z_1,\ldots,z_{m-2})\|_{\mathcal{Z}}\leqslant f(\|z_0\|_{\mathcal{Z}},\|z_1\|_{\mathcal{Z}},\ldots,\|z_{m-2}\|_{\mathcal{Z}});\tag{13}$$

$\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{U}=L_q(t_0,T;\mathcal{U})\times\mathcal{Z}^m$, для некоторого набора $(u,v_0,v_1,\ldots,v_{m-1})\in\mathcal{U}_\partial$ существует сильное решение задачи (7), (8)*. Тогда*

при $\delta > 0$ существует решение $(\hat{z}, \hat{u}, \hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{m-1}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (7)—(9), (12). Для $\delta = 0$ утверждение справедливо при дополнительном условии ограниченности $\mathcal{U}_\partial$.

Доказательство. Как и при доказательстве следствия 2, возьмем $\mathfrak{Y} = C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$. Получим при $J(z, u, \bar{v}) \leqslant R$

$$\|z\|_{\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|\bar{v}\|_{\mathcal{Z}^m} \leqslant \|D_t^\alpha z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + C_1 J^p(z, u, \bar{v}) + C_2 \leqslant$$
$$\leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|z\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + \|F(\cdot, z(\cdot), z^{(1)}(\cdot), \dots, z^{(m-2)}(\cdot))\|_{L_q(t_0,T;\mathcal{Z})} + C_1 J^p(z, u, \bar{v}) + C_2 \leqslant$$
$$\leqslant C_3 J^p(z, u, \bar{v}) + C_4 +$$
$$+ C_5 \sup\left\{\|F(t, z_0, \dots, z_{m-2})\|_{\mathcal{Z}} : t \in [t_0, T], \sum_{k=0}^{m-2} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} \leqslant R^p + \|z_d\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_3 R^p + C_4 + C_5 \sup\left\{f(t, y_0, y_1 \dots, y_{m-2}) : t \in [t_0, T],\ y_k \in [0, R^p + \|z_d\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})}]\right\} \leqslant C_3 R^p + C_6$$

в силу (13). При $\delta > 0$ получим требуемое по теореме 4, а при $\delta = 0$ с учетом ограниченности $\mathcal{U}_\partial$ — по теореме 5. □

4. Смешанное управление для дробной модели метастабильных состояний в полупроводниках. Рассмотрим задачу оптимального управления с начальными условиями

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^k}(x_1, x_2, x_3, t_0) = v_k(x_1, x_2, x_3), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad x_j \in (a_j, b_j), \quad j = 1, 2, 3, \tag{14}$$

и краевыми условиями

$$w(a_1, x_2, x_3, t) = w(b_1, x_2, x_3, t), \quad w_{x_1}(a_1, x_2, x_3, t) = w_{x_1}(b_1, x_2, x_3, t), \quad t \in (t_0, T), \tag{15}$$
$$w(x_1, a_2, x_3, t) = w(x_1, b_2, x_3, t), \quad w_{x_2}(x_1, a_2, x_3, t) = w_{x_2}(x_1, b_2, x_3, t), \quad t \in (t_0, T), \tag{16}$$
$$w(x_1, x_2, a_3, t) = w(x_1, x_2, b_3, t), \quad w_{x_3}(x_1, x_2, a_3, t) = w_{x_3}(x_1, x_2, b_3, t), \quad t \in (t_0, T), \tag{17}$$

для нелинейного невырожденного уравнения, при $\alpha = 1$ описывающего метастабильные состояния в полупроводниках при наличии отрицательной дифференциальной поляризуемости,

$$D_t^\alpha w + D_t^\alpha \Delta w + \Delta w + w_{x_1} + w w_{x_1} + u = 0, \quad x_j \in (a_j, b_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad t \in (t_0, T), \tag{18}$$

с функционалом качества

$$J(w, u) = \|w - w_d\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})} + \delta\|u - u_d\|^q_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \delta \sum_{k=0}^{m-1} \|v - u_{dk}\|^2_{\mathcal{Z}} \to \inf \tag{19}$$

при заданных $\Pi = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$,

$$\mathcal{X} = \Big\{v \in H^2(\Pi) : v(a_1, x_2, x_3) = v(b_1, x_2, x_3),\ v_{x_1}(a_1, x_2, x_3) = v_{x_1}(b_1, x_2, x_3),$$
$$v(x_1, a_2, x_3) = v(x_1, b_2, x_3),\ v_{x_2}(x_1, a_2, x_3) = v_{x_2}(x_1, b_2, x_3),$$
$$v(x_1, x_2, a_3) = v(x_1, x_2, b_3),\ v_{x_3}(x_1, x_2, a_3) = v_{x_3}(x_1, x_2, b_3)\Big\},$$

$w_d \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})$, $u_d \in L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, $\delta > 0$. Определим $\mathcal{Y} = L_2(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_2(\Pi)$. В качестве множества допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$ возьмем множество функций $(u, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) \in L_q(t_0, T; L_2(\Pi)) \times (L_2(\Pi))^m$, при $(t, x) \in (t_0, T) \times \Pi$ удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant u(t, x) \leqslant \gamma(t, x), \quad 0 \leqslant v_k(x) \leqslant \gamma_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{20}$$

где $\gamma \in C([t_0, T] \times \overline{\Pi}; \mathbb{R}_+)$, $\gamma_k \in C(\overline{\Pi}; \mathbb{R}_+)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\overline{\Pi} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Теорема 6. *Пусть $\alpha, q > 1$,*

$$\frac{k_1^2}{(b_1 - a_1)^2} + \frac{k_2^2}{(b_2 - a_2)^2} + \frac{k_3^2}{(b_3 - a_3)^2} \neq \frac{1}{4\pi^2} \tag{21}$$

при любых $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$. Тогда существует решение $(\hat{w}, \hat{u}, \hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{m-1}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (14)—(20).

Доказательство. Для начала определим операторы $L = I + \Delta$, $M = -\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; L_2(\Pi))$, нелинейный оператор $N(v) = v_{x_1} + vv_{x_1}$. Заметим, что

$$L = P\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

где $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2$. Спектр оператора $\partial/\partial x_j$ с периодическими условиями на концах отрезка (a_j, b_j) есть $\sigma_j = \{2\pi k(b_j - a_j)^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$, поэтому условие (21) влечет существование оператора $A = L^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(\Pi); \mathcal{X})$. Возьмём $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $\mathcal{Z}_1 = W_4^1(\Pi)$. Для области Π размерность $d = 3 < 4$, поэтому пространство $\mathcal{Z}$ по теореме Реллиха—Кондрашова компактно вложено в $W_4^1(\Pi)$.

При $v \in W_4^1(\Pi)$ имеем

$$\|L^{-1}Nv\|_{W_4^1(\Pi)} \leqslant C_1\|L^{-1}Nv\|_{H^2(\Pi)} \leqslant C_2\|Nv\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C_2\Big(\|v\|_{W_2^1(\Pi)} + \|v\|_{L_4(\Pi)}\|v\|_{W_4^1(\Pi)}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_3\Big(\|v\|_{W_4^1(\Pi)} + \|v\|^2_{W_4^1(\Pi)}\Big) \leqslant C_4\Big(\|v\|_{H^2(\Pi)} + \|v\|^2_{H^2(\Pi)}\Big).$$

Отсюда следует действие отображений $F_1 := L^{-1}N\colon W_4^1(\Pi) \to W_4^1(\Pi)$ и $F := L^{-1}N\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Кроме того, это означает выполнение условия (13) при $f(y) = C_4(y + y^2)$. Аналогично при $v_1, v_2 \in W_4^1(\Pi)$ из фиксированной окрестности в $W_4^1(\Pi)$ получим

$$\Big\|L^{-1}Nv_1 - L^{-1}Nv_2\Big\|_{W_4^1(\Pi)} \leqslant C_1\Big\|L^{-1}Nv_1 - L^{-1}Nv_2\Big\|_{H^2(\Pi)} \leqslant C_2\|Nv_1 - Nv_2\|_{L_2(\Pi)} \leqslant$$
$$\leqslant C_3\Big(\|v_1 - v_2\|_{W_4^1(\Pi)} + \|v_1\|_{W_4^1(\Pi)}\|v_1 - v_2\|_{W_4^1(\Pi)} + \|v_2\|_{W_4^1(\Pi)}\|v_1 - v_2\|_{W_4^1(\Pi)}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_3\|v_1 - v_2\|_{W_4^1(\Pi)} \leqslant C_4\|v_1 - v_2\|_{H^2(\Pi)}.$$

Таким образом, отображения F_1, F локально липшицевы.

Из условий задачи очевидно, что для набора управлений $(u, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}) \equiv 0 \in \mathcal{U}_\partial$ существует тождественно нулевое решение начально-краевой задачи (14)—(18). Осталось сослаться на следствие 3. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Герасимов А. Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения// Прикл. мат. мех. — 1948. — *12*. — С. 529–539.
2. *Плеханова М. В.* Задачи стартового управления для эволюционных уравнений дробного порядка// Челяб. физ.-мат. ж. — 2016. — *1*, № 3. — С. 15–36.
3. *Плеханова М. В.* Сильное решение и задачи оптимального управления для класса линейных уравнений дробного порядка// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *167*. — С. 42–51.
4. *Плеханова М. В.* Разрешимость задач управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка// Челяб. физ.-мат. ж. — 2017. — *2*, № 1. — С. 53–65.
5. *Плеханова М. В.* Сильные решения нелинейного вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка// Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2016. — *16*, № 3. — С. 61–74.
6. *Плеханова М. В., Байбулатова Г. Д.* Задачи оптимального управления для одного класса вырожденных эволюционных уравнений с запаздыванием// Челяб. физ.-мат. ж. — 2018. — *3*, № 3. — С. 319–331.
7. *Плеханова М. В., Исламова А. Ф.* О разрешимости задач смешанного оптимального управления линейными распределенными системами// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 7. — С. 37–47.
8. *Плеханова М. В., Исламова А. Ф.* Задачи с жестким смешанным управлением для линеаризованного уравнения Буссинеска// Диффер. уравн. — 2012. — *48*, № 4. — С. 565.
9. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
10. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
11. *Фалалеев М. В.* Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2016. — *17*. — С. 77–85.
12. *Федоров В. Е., Абдрахманова А. А.* Начальная задача для уравнений распределенного порядка с ограниченным оператором// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *188*. — С. 14–22.

13. *Федоров В. Е., Нагуманова А. В.* Линейные обратные задачи для одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *167.* — С. 97–111.
14. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
15. *Шуклина А. Ф., Плеханова М. В.* Задачи смешанного управления для системы Соболева// Челяб. физ.-мат. ж. — 2016. — *1*, № 2. — С. 78–84.
16. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces/ Ph.D. thesis — Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001.
17. *Falaleev M. V.* Fundamental undamental operator-valued functions of integrodifferential operators in Banach spaces// J. Math. Sci. — 2018. — *230*, № 5. — P. 782–785.
18. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam–Boston–Heidelberg: Elsevier, 2006.
19. *Mainardi F., Luchko Y. F., Pagnini G.* The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2001. — *4*, № 2. — P. 153–192.
20. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. — Boston: Academic Press, 1974.
21. *Plekhanova M. V.* Degenerate distributed control systems with fractional time derivative// Ural Math. J. — 2016. — *2*, № 2. — P. 58–71.
22. *Plekhanova M. V.* Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations// J. Comput. Appl. Math. — 2017. — *312.* — P. 39–46.
23. *Plekhanova M. V.* Mixed control problem for the linearized quasi-stationary phase field system of equations// Mat. Sci. Forum. — 2016. — *845.* — P. 170–173.
24. *Plekhanova M. V.* Optimal control existence for degenerate infinite dimensional systems of fractional order// IFAC-PapersOnLine. — 2018. — *51*, № 32. — P. 669–674.
25. *Plekhanova M. V.* Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order// J. Math. Sci. — 2016. — *219.* — P. 236–244.
26. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations// Lect. Notes Comp. Sci. — 2019. — *11548.* — P. 501–512.
27. *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics. — Beijing: Higher Education Press, 2010.

Плеханова Марина Васильевна
Челябинский государственный университет;
Южно-Уральский государственный университет
E-mail: `mariner79@mail.ru`

Шуклина Анна Фаридовна
Челябинский государственный университет
E-mail: `isaf@csu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 73–83
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-73-83

УДК 517.9

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ В МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ СОСТАВНОГО ТИПА

© 2022 г. **Р. В. СОРОКИН, Т. Н. ШИПИНА**

Аннотация. В работе доказана теорема существования и единственности решения задачи идентификации четырех коэффициентов при младших членах в многомерной системе составного типа в случае данных Коши.

Ключевые слова: задача идентификации коэффициентов, обратная задача, уравнение в частных производных, система составного типа, метод слабой аппроксимации.

ON THE UNIQUE SOLVABILITY OF A PROBLEM OF IDENTIFYING LOWER COEFFICIENTS IN A MULTIDIMENSIONAL SYSTEM OF COMPOSITE TYPE

© 2022 **R. V. SOROKIN, T. N. SHIPINA**

Abstract. In this paper, we prove the existence and uniqueness theorem for a solution of the problem of determining four lower coefficients in a composite multidimensional system in the case of the Cauchy data.

Keywords and phrases: coefficient identification problem, inverse problem, partial differential equation, composite systems, weak approximation method.

AMS Subject Classification: 39A14

1. Введение. Системы составного типа, состоящие из параболического уравнения и уравнения первого порядка, описывают колебания среды с учетом влияния теплопроводности [3], а также различные линеаризованные задачи механики неоднородных жидкостей. Вопросы существования и единственности решения таких систем исследовались, например, в работах [4, 8].

В данной работе рассматривается задача идентификации четырех коэффициентов при младших членах уравнений системы. Предполагается, что по пространственным переменным задача является $(n+1)$-мерной. Аналогичная задача в одномерном случае в предположении независимости коэффициентов уравнений от пространственной переменной исследовалась в [2].

Основным методом, применяемым в работе при доказательстве разрешимости прямой задачи, является метод слабой аппроксимации (МСА), предложенный Н. Н. Яненко и А. А. Самарским [5], и затем получивший развитие в работах Ю. Я. Белова [1, 6] и других учеников и последователей.

Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2021-1388).

2. Постановка задачи. В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid t \in [0,T],\ x \in E_n,\ z \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения действительнозначных функций $u^1(t,x,z)$, $u^2(t,x,z)$, $b_{11}(t,x)$, $b_{12}(t,x)$, $b_{21}(t,x)$, $b_{22}(t,x)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} u^1_t(t,x,z) + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}(t,x,z)u^1_{x_i}(t,x,z) + a_1(t,x,z)u^1_z(t,x,z) + \sum\limits_{k=1}^{2} b_{1k}(t,x)u^k(t,x,z) = \\ \qquad = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i(t,x_i)u^1_{x_ix_i}(t,x,z) + \nu(t,z)u^1_{zz}(t,x,z) + f_1(t,x,z), \\ u^2_t(t,x,z) + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}(t,x,z)u^2_{x_i}(t,x,z) + a_2(t,x,z)u^2_z(t,x,z) + \sum\limits_{k=1}^{2} b_{2k}(t,x)u^k(t,x,z) = \\ \qquad = f_2(t,x,z), \end{cases} \tag{1}$$

начальным условиям

$$u^k(0,x,z) = u^k_0(x,z), \quad k = 1,2 \tag{2}$$

и условиям переопределения

$$u^k(t,x,0) = \alpha_k(t,x), \quad u^k(t,x,l) = \beta_k(t,x), \quad k = 1,2. \tag{3}$$

Здесь l — некоторая фиксированная точка, $l \neq 0$. Считаем, что выполнены условия согласования

$$u^k_0(x,0) = \alpha_k(0,x), \quad u^k_0(x,l) = \beta_k(0,x), \quad k = 1,2. \tag{4}$$

Предполагаем, что $a_{ki}(t,x,z)$, $f_k(t,x,z)$, $u^k_0(x)$, $\alpha_k(t,x)$, $\beta_k(t,x)$, $\nu_i(t,x_i)$, $k = 1,2$, $i = 1,2,\ldots,n$, — заданные действительнозначные непрерывные в $G_{[0,T]}$ функции. Приведем обратную задачу (1)—(3) к некоторой вспомогательной прямой задаче. Для этого положим в системе (1) $z = 0$, затем $z = l$. Получившиеся четыре уравнения рассмотрим как систему линейных алгебраических уравнений относительно $b_{mk}(t,x)$, $m,k = 1,2$ с определителем

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(t,x) & \alpha_2(t,x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1(t,x) & \alpha_2(t,x) \\ \beta_1(t,x) & \beta_2(t,x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1(t,x) & \beta_2(t,x) \end{vmatrix} = -(\alpha_1(t,x)\beta_2(t,x) - \alpha_2(t,x)\beta_1(t,x))^2.$$

Предположим, что

$$|\alpha_1(t,x)\beta_2(t,x) - \alpha_2(t,x)\beta_1(t,x)| \geqslant \delta > 0, \quad t \in [0,T], \quad \delta = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Условие (5) гарантирует существование единственных решений $b_{mk}(t,x)$, $m,k = 1,2$. Разрешая полученную систему методом Крамера, получаем

$$\begin{aligned} b_{11}(t,x) &= A_1u^1_{zz}(t,x,0) + A_2u^1_z(t,x,0) + A_3u^1_{zz}(t,x,l) + A_4u^1_z(t,x,l) + A_5, \\ b_{12}(t,x) &= B_1u^1_{zz}(t,x,l) + B_2u^1_z(t,x,l) + B_3u^1_{zz}(t,x,0) + B_4u^1_z(t,x,0) + B_5, \\ b_{21}(t,x) &= C_1u^2_z(t,x,0) + C_2u^2_z(t,x,l) + C_3, \\ b_{22}(t,x) &= D_1u^2_z(t,x,l) + D_2u^2_z(t,x,0) + D_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$\gamma(t,x) = \alpha_1(t,x)\beta_2(t,x) - \alpha_2(t,x)\beta_1(t,x),$$

$$A_1(t,x) = \frac{\nu(t,0)\beta_2(t,x)}{\gamma(t,x)}, \qquad A_2(t,x) = \frac{-a_1(t,x,0)\beta_2(t,x)}{\gamma(t,x)},$$

$$A_3(t,x) = \frac{-\nu(t,l)\alpha_1(t,x)}{\gamma(t,x)}, \qquad A_4(t,x) = \frac{a_1(t,x,l)\alpha_1(t,x)}{\gamma(t,x)},$$

$$A_5(t,x) = \frac{1}{\gamma(t,x)}\Bigg(\beta_2(t,x)\left(\sum_{i=0}^{n}\nu_i(t,x_i)(\alpha_1(t,x))\right)_{x_ix_i} - \sum_{i=0}^{n} a_{1i}(t,x,0)(\alpha_1(t,x))_{x_i} - (\alpha_1(t,x))_t +$$

$$+f_1(t,x,0)-\alpha_1(t,x)\left(\sum_{i=0}^{n}\nu_i(t,x_i)(\beta_1(t,x))\right)_{x_ix_i}-\sum_{i=0}^{n}a_{1i}(t,x,l)(\beta_1(t,x))_{x_i}-(\beta_1(t,x))_t+f_1(t,x,l)\Bigg),$$

$$B_1(t,x)=\frac{\nu(t,l)\alpha_1(t,x)}{\gamma(t,x)},\qquad B_2(t,x)=\frac{-a_1(t,x,l)\alpha_1(t,x)}{\gamma(t,x)},$$
$$B_3(t,x)=\frac{-\nu(t,0)\beta_1(t,x)}{\gamma(t,x)},\quad B_4(t,x)=\frac{a_1(t,x,0)\beta_1(t,x)}{\gamma(t,x)},$$

$$B_5(t,x)=\frac{1}{\gamma(t,x)}\Bigg(\alpha_1(t,x)\left(\sum_{i=0}^{n}\nu_i(t,x_i)(\beta_1(t,x))\right)_{x_ix_i}-\sum_{i=0}^{n}a_{1i}(t,x,l)(\beta_1(t,x))_{x_i}-(\beta_1(t,x))_t+$$
$$+f_1(t,x,l)-\beta_1(t,x)\left(\sum_{i=0}^{n}\nu_i(t,x_i)(\alpha_1(t,x))\right)_{x_ix_i}-\sum_{i=0}^{n}a_{1i}(t,x,0)(\alpha_1(t,x))_{x_i}-(\alpha_1(t,x))_t+f_1(t,x,0),$$

$$C_1(t,x)=\frac{-a_2(t,x,0)\beta_2(t,x)}{\gamma(t,x)},\quad C_2(t,x)=\frac{-a_2(t,x,l)\alpha_2(t,x)}{\gamma(t,x)},$$

$$C_3(t,x)=\frac{1}{\gamma(t,x)}\Bigg(\beta_2(t,x)\left(f_2(t,x,0)-\sum_{i=0}^{n}a_{2i}(t,x,0)((\alpha_2(t,x))_{x_i}-(\alpha_2(t,x))_t\right)-$$
$$-\alpha_2(t,x)\left(f_2(t,x,l)-\sum_{i=0}^{n}a_{2i}(t,x,l)((\beta_2(t,x))_{x_i}-(\beta_2(t,x))_t\right)\Bigg),$$

$$D_1(t,x)=\frac{-a_2(t,x,l)\alpha_1(t,x)}{\gamma(t,x)},\quad D_2(t,x)=\frac{a_2(t,x,0)\beta_1(t,x)}{\gamma(t,x)},$$

$$D_3(t,x)=\frac{1}{\gamma(t,x)}\Bigg(\alpha_1(t,x)\left(f_2(t,x,l)-\sum_{i=0}^{n}a_{2i}(t,x,l)(\beta_2(t,x))_{x_i}-(\beta_2(t,x))_t\right)-$$
$$-\beta_1(t,x)\left(f_2(t,x,0)-\sum_{i=0}^{n}a_{2i}(t,x,0)(\alpha_2(t,x))_{x_i}-(\alpha_2(t,x))_t\right)\Bigg).$$

Заметим, что $A_j(t,x)$, $B_j(t,x)$, $C_j(t,x)$, $D_j(t,x)$, $j=1,\ldots,4$, — известные функции, а $\gamma(t,x)$ не обращается в ноль в силу условия (5). Подставляя полученные выражения в (1), приходим к следующей прямой задаче:

$$\begin{cases} u^1_t(t,x,z)+\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_{1i}(t,x,z)u^1_{x_i}(t,x,z)+a_1(t,x,z)u^1_z(t,x,z)+ \\ \qquad +u^1(t,x,z)\Big(A_1u^1_{zz}(t,x,0)+A_2u^1_z(t,x,0)+A_3u^1_{zz}(t,x,l)+A_4u^1_z(t,x,l)+A_5\Big)+ \\ \qquad +u^2(t,x,z)\Big(B_1u^1_{zz}(t,x,l)+B_2u^1_z(t,x,l)+B_3u^1_{zz}(t,x,0)+B_4u^1_z(t,x,0)+B_5\Big)= \\ \qquad\qquad =\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\nu_i(t,x_i)u^1_{x_ix_i}(t,x,z)+\nu(t,z)u^1_{zz}(t,x,z)+f_1(t,x,z), \\ u^2_t(t,x,z)+\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_{2i}(t,x,z)u^2_{x_i}(t,x,z)+a_2(t,x,z)u^2_z(t,x,z)+ \\ \qquad +u^1(t,x,z)\Big(C_1u^2_z(t,x,0)+C_2u^2_z(t,x,l)+C_3\Big)+ \\ \qquad +u^2(t,x,z)\Big(D_1u^2_z(t,x,l)+D_2u^2_z(t,x,0)+D_3\Big)=f_2(t,x,z), \end{cases} \tag{7}$$

$$u^k(0,x,z) = u_0^k(x,z), \quad k = 1,2. \tag{8}$$

Ниже докажем классическую разрешимость задачи (7)—(8).

3. Теорема существования решения. Для доказательства существования решения задачи (7)—(8) применим метод слабой аппроксимации [1]. Расщепим задачу на $n+2$ шага и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(n+2)$-м временном слое:

$$\begin{cases} u_t^{1\tau} = -(n+2)a_{11}(t,x,z)u_{x_1}^{1\tau} + (n+2)\nu_1(t,x_1)u_{x_1x_1}^{1\tau}, \\ u_t^{2\tau} = -(n+2)a_{21}(t,x,z)u_{x_1}^{2\tau}, \quad s\tau < t \leqslant \left(s + \dfrac{1}{n+2}\right)\tau, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} u_t^{1\tau} = -(n+2)a_{12}(t,x,z)u_{x_2}^{1\tau} + (n+2)\nu_2(t,x_2)u_{x_2x_2}^{1\tau}, \\ u_t^{2\tau} = -(n+2)a_{22}(t,x,z)u_{x_2}^{2\tau}, \quad \left(s + \dfrac{1}{n+2}\right)\tau < t \leqslant \left(s + \dfrac{2}{n+2}\right)\tau, \end{cases} \tag{10}$$

. . . .

$$\begin{cases} u_t^{1\tau} = -(n+2)a_{1n}(t,x,z)u_{x_n}^{1\tau} + (n+2)\nu_n(t,x_n)u_{x_nx_n}^{1\tau}, \\ u_t^{2\tau} = -(n+2)a_{2n}(t,x,z)u_{x_n}^{2\tau}, \quad \left(s + \dfrac{n-1}{n+2}\right)\tau < t \leqslant \left(s + \dfrac{n}{n+2}\right)\tau, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} u_t^{1\tau} = -(n+2)a_1(t,x,z)u_z^{1\tau} + (n+2)\nu(t,z)u_{zz}^{1\tau}, \\ u_t^{2\tau} = -(n+2)a_2(t,x,z)u_z^{2\tau}, \quad \left(s + \dfrac{n}{n+2}\right)\tau < t \leqslant \left(s + \dfrac{n+1}{n+2}\right)\tau, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} u_t^{1\tau} = -(n+2)u^1(t,x,z)\Big(A_1u_{zz}^1\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, 0\Big) + A_2u_z^1\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, 0\Big) + \\ \quad + A_3u_{zz}^1\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, l\Big) + A_4u_z^1\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, l\Big) + A_5\Big) - \\ \quad - (n+2)u^2(t,x,z)\Big(B_1u_{zz}^1\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, l\Big) + B_2u_z^1\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, l\Big) + \\ \quad + B_3u_{zz}^1\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, 0\Big) + B_4u_z^1\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, 0\Big) + B_5\Big) + f_1(t,x,z), \\ u_t^2 = -(n+2)u^1(t,x,z)\Big(C_1u_z^2\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, 0\Big) + C_2u_z^2\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, l\Big) + C_3\Big) - \\ \quad - (n+2)u^2(t,x,z)\Big(D_1u_z^2\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, l\Big) + D_2u_z^2\Big(t - \dfrac{\tau}{n+2}, x, 0\Big) + D_3\Big) + \\ \quad + (n+2)f_2(t,x,z), \qquad \left(s + \dfrac{n+1}{n+2}\right)\tau < t \leqslant (s+1)\tau, \end{cases} \tag{13}$$

$$u^k(0,x,z) = u_0^k(x,z), \quad k = 1,2. \tag{14}$$

Здесь $s = 0,1,\ldots,S-1$, $\tau S = T$. Отметим, что на первых $n+1$ шагах решаются задачи Коши для параболических уравнений и уравнений первого порядка в частных производных. На $n+2$ дробном шаге решается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Введем следующие обозначения:

$$U^\tau(t) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{6} U_{k_1,k_2}^{k\tau}(t), \tag{15}$$

$$U_{k_1,k_2}^{k\tau}(t) = \max_{|\alpha|=k_1}\sup_{0\leqslant\eta\leqslant t}\sup_{x\in E_n z\in E_1}\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}D_x^\alpha u^{k\tau}(\eta,x,z)\right|, \tag{16}$$

$$U_{k_1,k_2}^{k}(0) = \max_{|\alpha|=k_1}\sup_{x\in E_n z\in E_1}\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}D_x^\alpha u_0^{k}(x,z)\right|, \tag{17}$$

где

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad k = 1, 2.$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие соотношения и удовлетворяют им:

$$\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} D_x^\alpha a_{ki}(t,x,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} D_x^\alpha f^k(t,x,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} D_x^\alpha u_0^k(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} \nu(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x_i^{k_1}} \nu_i(t,x_i)\right| + \\ + |D_x^\alpha(\alpha_k(t,x))| + |D_x^\alpha(\beta_k(t,x))| + |D_x^\alpha(\alpha_k(t,x))_t| + |D_x^\alpha(\beta_k(t,x))_t| \leqslant C, \quad (18)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2$, $k_2 = 0, 1, \ldots, 6$, $k_1, |\alpha| = 1, 2, \ldots, 4$.

Получим априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^{1\tau}(t,x,z)$, $u^{2\tau}(t,x,z)$ задачи (9)—(14) в классе непрерывных функций. Для уравнений, решаемых на первых $n+1$ временных шагах, а именно уравнений в частных производных первого порядка и параболических уравнений, процесс получения оценок, гарантирующих сходимость метода слабой аппроксимации показан в [7]. Следуя предложенному в [7] алгоритму, получим, учитывая обозначения (15)—(17) и условия(18)

$$U^\tau(t) \leqslant e^{M\tau} U(0), \quad 0 < t \leqslant \frac{n+1}{n+2}\tau. \quad (19)$$

Здесь и далее под обозначением M будем понимать константы, зависящие от величин C в (18), δ в (5) и размерности задачи n. При этом константы M не зависят от параметра расщепления τ. Исследуем систему (13) на нулевом шаге (при $s = 0$). Проинтегрируем уравнения системы (13) в пределах от $\dfrac{n+1}{n+2}\tau$ до t. Используя неравенство треугольника, получим

$$|u^{1\tau}| \leqslant \left|u^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau, x, z\right)\right| + (n+2) \int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t} \Bigg(|u^1(\eta,x,z)|\Bigg(|A_1|\left|u_{zz}^1\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + \\ + |A_2|\left|u_z^1\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + |A_3|\left|u_{zz}^1\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right)\right| + |A_4|\left|u_z^1\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right)\right| + |A_5|\Bigg) + \\ + |u^2(\tau,x,z)||B_1|\left|u_{zz}^1\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right)\right| + |B_2|\left|u_z^1\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right)\right| + \\ + |B_3|\left|u_{zz}^1\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + |B_4|\left|u_z^1\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + |B_5|\Bigg) + |f_1(\eta,x,z)|\Bigg) d\eta,$$

$$|u^{2\tau}| \leqslant \left|u^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau, x, z\right)\right| + (n+2) \int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t} \Bigg(|u^1(\eta,x,z)|\Bigg(|C_1|\left|u_z^2\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + \\ + |C_2|\left|u_z^2\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right) + C_3\right)\Bigg| + |u^2(\eta,x,z)|\Bigg(|D_1|\left|u_z^2\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right)\right| + \\ + |D_2|\left|u_z^2\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + |D_3|\Bigg) + |f_2(\eta,x,z)|\Bigg) d\eta, \quad \frac{n+1}{n+2}\tau < t \leqslant \tau.$$

Возьмем $\sup\limits_{0 \leqslant \eta \leqslant t} \sup\limits_{x \in E_n, z \in E_1}$ от правых, а затем левых частей неравенств. Учитывая обозначения (15)—(17) и условия на входные данные (5), (18), приходим к соотношениям

$$U_{0,0}^{1\tau}(t) \leqslant U_{0,0}^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right) + M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}\left(U_{0,0}^{1\tau}(\eta)\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+\right.$$
$$\left.+U_{0,0}^{2\tau}(\eta)\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\right)d\eta,$$

$$U_{0,0}^{2\tau}(t) \leqslant U_{0,0}^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right) + M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}\left(U_{0,0}^{1\tau}(\eta)\left(U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\right)+$$
$$+U_{0,0}^{2\tau}(\eta)\left(U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\Big)d\eta, \quad \frac{n+1}{n+2}\tau < t \leqslant \tau.$$

Сложив данные неравенства, получим

$$U_{0,0}^{1\tau}(t)+U_{0,0}^{2\tau}(t) \leqslant U_{0,0}^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+U_{0,0}^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}\Big(\big(U_{0,0}^{1\tau}(\eta)+U_{0,0}^{2\tau}(\eta)\big)$$
$$\left(U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\Big)d\eta, \quad \frac{n+1}{n+2}\tau < t \leqslant \tau.$$

Продифференцируем (13) по x_i, затем проинтегрируем полученные уравнения в пределах от $\dfrac{n+1}{n+2}\tau$ до t. Возьмем $\sup\limits_{0\leqslant\eta\leqslant t}$ $\sup_{x\in E_n, z\in E_1}$ от правых, а затем левых частей неравенств. Учитывая обозначения (15)—(17) и условия на входные данные задачи, после суммирования неравенств получим

$$U_{1,0}^{1\tau}(t)+U_{1,0}^{2\tau}(t) \leqslant U_{1,0}^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+U_{1,0}^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+$$
$$+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}(U_{1,0}^{1\tau}(\eta)+U_{1,0}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+$$
$$+(U_{0,0}^{1\tau}(\eta)+U_{0,0}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+\right.$$
$$\left.+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\Big)d\eta, \quad \frac{n+1}{n+2}\tau < t \leqslant \tau.$$

Дифференцируя (13) по x_i, а затем s раз по z и делая аналогичные преобразования, получим

$$U_{1,s}^{1\tau}(t)+U_{1,s}^{2\tau}(t) \leqslant U_{1,s}^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+U_{1,s}^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+$$
$$+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}(U_{1,s}^{1\tau}(\eta)+U_{1,s}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+$$
$$+(U_{0,s}^{1\tau}(\eta)+U_{0,s}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+\right.$$
$$\left.+U_{1,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\Big)d\eta, \quad \frac{n+1}{n+2}\tau < t \leqslant \tau, \quad s=0,1,\ldots,6.$$

Дифференцируя (13) по x_i, а затем по x_j, получим

$$\begin{gathered}
U_{2,0}^{1\tau}(t)+U_{2,0}^{2\tau}(t)\leqslant U_{2,0}^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+U_{2,0}^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+\\
+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}(U_{2,0}^{1\tau}(\eta)+U_{2,0}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+\\
+(U_{0,0}^{1\tau}(\eta)+U_{0,0}^{2\tau}(\eta))\Bigg(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+\\
+U_{1,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{2,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{2,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{2,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+\\
+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\Bigg)\Bigg(U_{1,0}^{1\tau}(\eta)\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+\\
+U_{0,0}^{1\tau}(\eta)\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+\\
+(U_{1,0}^{1\tau}(\eta)+U_{1,0}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+U_{1,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+\\
+U_{1,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\Bigg)+1\Bigg)d\eta,\quad \frac{n+1}{n+2}\tau<t\leqslant\tau.
\end{gathered}$$

Продолжая аналогичные рассуждения, последовательно дойдем до производных по x D_x^α, $|\alpha|=4$ и производной по z до шестого порядка. Суммируя все полученные неравенства, имеем

$$U^\tau(t)\leqslant U\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}\left(U^\tau(\eta)\left(1+U^\tau\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)d\eta,\quad \frac{n+1}{n+2}\tau<t\leqslant\tau.$$

В силу того, что функция $U^\tau(t)$ на любом полуинтервале $(s\tau,(s+1)\tau]$ неотрицательна и монотонна, приходим к неравенству

$$\begin{gathered}
U^\tau(t)\leqslant U\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}\left(U^\tau(\eta)\left(1+U^\tau\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)d\eta\leqslant\\
\leqslant U\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+M\left(1+U^\tau\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}(1+U^\tau(\eta))d\eta,\quad \frac{n+1}{n+2}\tau<t\leqslant\tau.
\end{gathered}$$

Учитывая (19), на нулевом целом временном шаге получим

$$U^\tau(t)\leqslant e^{M\tau}U(0)+M(1+e^{M\tau}U(0))\int\limits_0^t(1+U^\tau(\eta))d\eta,\quad 0<t\leqslant\tau.$$

После применения неравенства Гроноулла

$$U^\tau(t)\leqslant e^{M\tau}(U(0)+1)e^{e^{M\tau}(1+U(0))\tau}-1,\quad 0<t\leqslant\tau.$$

Для того чтобы получить оценку функции $U^\tau(t)$ на первом шаге ($\tau<t\leqslant 2\tau$), нужно в полученном неравенстве взять вместо величины $U(0)$ величину $e^{M\tau}(U(0)+1)e^{e^{M\tau}(1+U(0))\tau}-1$:

$$U^\tau(t)\leqslant e^{M\tau}\left(e^{M\tau}(U(0)+1)e^{e^{M\tau}(1+U(0))\tau}\right)\exp\left(e^{M\tau}\left(e^{M\tau}(U(0)+1)e^{e^{M\tau}(1+U(0))\tau}\right)\tau\right)-1,\quad \tau<t\leqslant 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{M\tau}e^{e^{M\tau}(U(0)+1)\tau} \leqslant 2,$$

получим

$$U^{\tau}(t) \leqslant e^{2M\tau}(U(0)+1)e^{e^{3M\tau}(1+U(0))\tau} - 1, \quad \tau < t \leqslant 2\tau.$$

На втором дробном шаге при условии

$$e^{2M\tau}e^{e^{3M\tau}(U(0)+1)\tau} \leqslant 2$$

имеет место оценка

$$U^{\tau}(t) \leqslant e^{3M\tau}(U(0)+1)e^{e^{5M\tau}(1+U(0))\tau} - 1, \quad 2\tau < t \leqslant 3\tau,$$

и так далее. На s-м шаге ($s < N$) получим неравенство

$$U^{\tau}(t) \leqslant e^{(s+1)M\tau}(U(0)+1)e^{e^{(2s+1)M\tau}(1+U(0))\tau} - 1, \quad s\tau < t \leqslant (s+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t^*, $0 < t^* \leqslant T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{Mt^*}e^{e^{2Mt^*}(U(0)+1)} \leqslant 2.$$

В последнем неравенстве предполагается, что $\tau \leqslant 1$. Заметим, что t^* не зависит от τ, поскольку константы M и $U(0)$ не зависят от τ. Таким образом, с учетом неравенств, полученных на предыдущих временных шагах, справедлива оценка

$$U^{\tau}(t) \leqslant e^{Mt^*}(U(0)+1)e^{e^{2Mt^*}(1+U(0))} - 1 \leqslant C, \quad 0 < t \leqslant t^*.$$

Получили равномерную по τ оценку

$$\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}D_x^{\alpha}u^{k\tau}(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}, \quad |\alpha| \leqslant 4, \quad k = 1,2, \quad k_2 = 0,1,\ldots,6. \tag{20}$$

Легко заметить, что в силу (18), (20) правые части уравнений (9), (13) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, попадающем в отрезок $[0,t^*]$. Следовательно, справедлива равномерная по τ оценка

$$\left|u_t^{1\tau}(t,x,z)\right| + |u_t^{2\tau}(t,x,z)| \leqslant C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}. \tag{21}$$

Дифференцируя уравнения (9), (13) по переменным x_i, $i = 1,2,\ldots,n$ и z необходимое число раз, можем доказать равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_2+1}}{\partial z^{k_2}\partial t}D_x^{\alpha}u^{k\tau}(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad |\alpha| \leqslant 2, \quad k_2 = 0,1,\ldots,4, \quad k = 1,2, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]},$$

что вместе с (20), (21) гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела некоторые подпоследовательности $u^{1\tau_k}(t,x,z)$, $u^{2\tau_k}(t,x,z)$ последовательностей $u^{1\tau}(t,x,z)$, $u^{2\tau}(t,x,z)$ решений задачи (9)—(14) сходятся вместе с производными по x до второго, и по z до четвертого порядка включительно к функциям $u^1(t,x,z)$, $u^2(t,x,z)$. В силу теоремы о сходимости метода слабой аппроксимации [1] функции $u^1(t,x,z)$, $u^2(t,x,z)$ есть решение задачи (7)—(8), причем $u^k(t,x,z) \in C^{1,2,4}_{t,x,z}$, где

$$C^{1,k_1,k_2}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{u(t,x,z) : u_t, \frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^{\alpha}u(t,x,z) \in C(G_{[0,t^*]}),\ k = 0,1,\ldots,k_2;\ |\alpha| \leqslant k_1\right\}.$$

При $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}D_x^{\alpha}u^{k}(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad |\alpha| \leqslant 2, \quad k = 1,2, \quad k_2 = 0,1,\ldots,4, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}. \tag{22}$$

Таким образом, доказана разрешимость задачи (7)—(8). Докажем теперь, что решение исходной обратной задачи (1)—(3) выражается через решение задачи (7)—(8). Поскольку $u^k(t,x,z)$, $k = 1,2,$ — решение прямой задачи (7)—(8), то, подставляя $u^k(t,x,z)$, $b_{mk}(t,x)$, $m,k = 1,2,$

в (1)—(2), мы получим верное тождество. В силу (5), (18), (22) очевидно, что функции $u^k(t,x,z)$, $k=1,2$, $b_{mk}(t,x)$, $m,k=1,2$, принадлежат классу

$$Z_{[0,t^*]}=\{u^k(t,x,z),b_{mk}(t,x)\mid u^k\in C^{1,2,4}_{t,x,z},\ b_{mk}\in C^{0,2}_{t,x},\ m,k=1,2\}$$

и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}D^\alpha_x u^k(t,x,z)\right|+\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D^\alpha_x b_{mk}(t,x)|\leqslant C. \tag{23}$$

Осталось доказать, что для функций $u^k(t,x,z)$, $k=1,2$, выполняется условие переопределения (3). Положим в системе (7) $z=0$, получим

$$\begin{cases} u^1_t(t,x,0)-\alpha^1_t(t,x)+\sum\limits_{i=0}^{n}a_{1i}(t,x,0)u^1_{x_i}(t,x,0)+a_1(t,x,0)u^1_z(t,x,0)\\ \quad+\Big(u^1(t,x,0)-\alpha^1(t,x)\Big)\Big(A_1u^1_{zz}(t,x,0)+A_2u^1_z(t,x,0)+A_3u^1_{zz}(t,x,l)+A_4u^1_z(t,x,l)+A_5\Big)+\\ \quad+\Big(u^2(t,x,0)-\alpha^2(t,x)\Big)\Big(B_1u^1_{zz}(t,x,l)+B_2u^1_z(t,x,l)+B_3u^1_{zz}(t,x,0)+B_4u^1_z(t,x,0)+B_5\Big)=\\ \quad=\sum\limits_{i=0}^{n}\nu_i(t,x_i)u^1_{x_ix_i}(t,x,0)+\nu(t,0)u^1_{zz}(t,x,0)+f_1(t,x,0),\\ u^2_t(t,x,0)-\alpha^2_t(t,x)+\sum\limits_{i=0}^{n}a_{2i}(t,x,0)u^2_{x_i}(t,x,0)+a_2(t,x,0)u^2_z(t,x,0)+\\ \quad+\Big(u^1(t,x,0)-\alpha^1(t,x)\Big)\Big(C_1u^2_z(t,x,0)+C_2u^2_z(t,x,l)+C_3\Big)+\\ \quad+\Big(u^2(t,x,0)-\alpha^2(t,x)\Big)\Big(D_1u^2_z(t,x,l)+D_2u^2_z(t,x,0)+D_3\Big)=f_2(t,x,0). \end{cases} \tag{24}$$

Обозначим $g_1(t,x)=u^1(t,x,0)-\alpha^1(t,x)$, $g_2(t,x)=u^2(t,x,0)-\alpha^2(t,x)$. С учетом условий согласования (4), функции $g_1(t,x)$, $g_2(t,x)$ являются решением задачи Коши

$$\begin{cases} g_{1t}(t,x)=\lambda^1(t,x)g_1(t,x)+\lambda^2(t,x)g_2(t,x), \qquad g_1(t,x)=0,\\ g_{2t}(t,x)=\lambda^1(t,x)g_1(t,x)+\lambda^2(t,x)g_2(t,x), \qquad g_2(t,x)=0, \end{cases}$$

где $\lambda^1(t,x)$, $\lambda^2(t,x)$ — функции, выражающиеся через коэффициенты системы (1) и производные по x функций $u_1(t,x,z)$, $u_2(t,x,z)$ при $x=0$ и $x=l$. Очевидно, что $g_k(t,x)\equiv 0$, $k=1,2$, является единственным решением системы, следовательно, $u^1(t,x,0)=\alpha_1(t,x)$, $u^2(t,x,0)=\alpha_2(t,x)$ при $t\in[0,T]$, и мы доказали выполнение первой пары условий переопределения (3). Полагая $x=l$ в системе (7) и повторяя рассуждения, приведенные выше, с учетом условий согласования (4), получаем, что $u^1(t,x,0)=\beta_1(t,x)$, $u^2(t,x,0)=\beta_2(t,x)$ при $t\in[0,T]$. Таким образом, доказали выполнение второй пары условий переопределения (3), и разрешимость задачи (1)—(3) полностью доказана.

4. Доказательство единственности решения. Докажем единственность решения задачи (1)—(3) при условии выполнения (18), (23). Пусть $U=(u^1(t,x,z),\ u^2(t,x,z),\ b_{mk}(t,x))$, $\widetilde{U}=(\widetilde{u}^1(t,x,z),\widetilde{u}^2(t,x,z),\widetilde{b}_{mk}(t,x))$, $m,k=1,2,$— два различных решения задачи (1)—(3). Введем функции

$$\omega^k(t,x,z)=u^k(t,x,z)-\widetilde{u}^k(t,x,z),\quad \varphi_{mk}(t,x)=b_{mk}(t,x)-\widetilde{b}_{mk}(t,x),\quad m,k=1,2.$$

Функции $\omega^k(t,x,z)$, $\varphi_{mk}(t,x)$, $m,k=1,2$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \omega^1_t(t,x,z)+\sum\limits_{i=1}^n a_{1i}(t,x,z)\omega^1_{x_i}(t,x,z)+a_1(t,x,z)\omega^1_z(t,x,z)+\sum\limits_{k=1}^2 b_{1k}(t,x)\omega^k(t,x,z)+\\ \qquad +\varphi_{11}(t,x)\widetilde{u}^1(t,x,z)+\varphi_{12}(t,x)\widetilde{u}^2(t,x,z)=\sum\limits_{i=1}^n \nu_i(t,x_i)\omega^1_{x_ix_i}(t,x,z)+\nu(t,z)\omega^1_{zz}(t,x,z),\\ \omega^2_t(t,x,z)+\sum\limits_{i=1}^n a_{2i}(t,x,z)\omega^2_{x_i}(t,x,z)+a_2(t,x,z)\omega^2_z(t,x,z)+\\ \qquad +\sum\limits_{k=1}^2 b_{2k}(t,x)\omega^k(t,x,z)+\varphi_{21}(t,x)\widetilde{u}^1(t,x,z)+\varphi_{22}(t,x)\widetilde{u}^2(t,x,z)=0, \end{cases} \tag{25}$$

начальным условиям

$$\omega^k(0,x,z)=0,\quad k=1,2 \tag{26}$$

и условиям переопределения

$$\omega^k(t,x,0)=0,\quad \omega^k(t,x,l)=0,\quad k=1,2. \tag{27}$$

Рассмотрим уравнения системы (25) при $x=0$, $x=l$ с учетом (26)—(27). Разрешая систему полученных четырех уравнений относительно $\varphi_{mk}(t,x)$, $m,k=1,2$, и подставляя полученные выражения в (25), приходим к прямой задаче определения пары функции $\omega^1(t,x,z)$, $\omega^2(t,x,z)$:

$$\begin{cases} \omega^1_t(t,x,z)+\sum\limits_{i=1}^n a_{1i}(t,x,z)\omega^1_{x_i}(t,x,z)+a_1(t,x,z)\omega^1_z(t,x,z)+\sum\limits_{k=1}^2 b_{1k}(t,x)\omega^k(t,x,z)+\\ \qquad +\dfrac{1}{\widetilde{\gamma}(t,x)}\Big(\Big(\nu(t,0)\omega^1_{zz}(t,x,0)-a_1(t,x,0)\omega^1_z(t,x,0)\Big)\widetilde{\beta}_2(t,x)-\\ \qquad -\Big(\nu(t,l)\omega^1_{zz}(t,x,l)-a_1(t,x,l)\omega^1_z(t,x,l)\Big)\widetilde{\alpha}_2(t,x)\Big)\widetilde{u}^1(t,x,z)+\\ \qquad +\dfrac{1}{\widetilde{\gamma}(t,x)}\Big(\Big(\nu(t,l)\omega^1_{zz}(t,x,l)-a_1(t,x,l)\omega^1_z(t,x,l)\Big)\widetilde{\beta}_1(t,x)-\\ \qquad -\Big(\nu(t,0)\omega^1_{zz}(t,x,0)-a_1(t,x,0)\omega^1_z(t,x,0)\Big)\widetilde{\alpha}_1(t,x)\Big)\widetilde{u}^2(t,x,z)=\\ \qquad =\sum\limits_{i=1}^n \nu_i(t,x_i)\omega^1_{x_ix_i}(t,x,z)+\nu(t,z)\omega^1_{zz}(t,x,z),\\ \omega^2_t(t,x,z)+\sum\limits_{i=1}^n a_{2i}(t,x,z)\omega^2_{x_i}(t,x,z)+a_2(t,x,z)\omega^2_z(t,x,z)+\sum\limits_{k=1}^2 b_{2k}(t,x)\omega^k(t,x,z)+\\ \qquad +\dfrac{1}{\widetilde{\gamma}(t,x)}\Big(-a_2(t,x,0)\omega^2_z(t,x,0)\widetilde{\beta}_2(t,x)+a_2(t,x,l)\omega^2_z(t,x,l)\widetilde{\alpha}_2(t,x)\Big)\widetilde{u}^1(t,x,z)+\\ \qquad +\dfrac{1}{\widetilde{\gamma}(t,x)}\Big(-a_2(t,x,l)\omega^2_z(t,x,l)\widetilde{\beta}_1(t,x)+a_2(t,x,0)\omega^2_z(t,x,0)\widetilde{\alpha}_1(t,x)\Big)\widetilde{u}^2(t,x,z)=0, \end{cases} \tag{28}$$

$$\omega^k(0,x,z)=0,\quad k=1,2. \tag{29}$$

Здесь

$$\widetilde{\gamma}(t,x)=\widetilde{\alpha}_1(t,x)\widetilde{\beta}_2(t,x)-\widetilde{\alpha}_2(t,x)\widetilde{\beta}_1(t,x).$$

Покажем, что $\omega^1(t,x,z)=\omega^2(t,x,z)=0$. Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$g^k_r(t)=\sup_{G[0,t]}\left|\frac{\partial^r}{\partial z^r}\omega^{k\tau}(\xi,x,z)\right|,\quad k=1,2,\quad r=0,1,2.$$

Учитывая оценки (5), (23), в силу принципа максимума для уравнений системы (28) получим

$$\begin{cases} |\omega^1(\xi,x,z)|\leqslant Ce^{C\xi}(g^1_1(t)+g^1_2(t)+g^2_0(t))t,\\ |\omega^2(\xi,x,z)|\leqslant Ce^{C\xi}(g^2_1(t)+g^1_0(t))t,\quad (\xi,x,z)\in G[0,t],\quad 0\leqslant t\leqslant t^*. \end{cases}$$

Здесь и далее C — это некоторые различные константы. В силу неотрицательности функций $g_r^k(t)$

$$\begin{cases} g_0^1(t) \leqslant C(g_1^1(t) + g_2^1(t) + g_0^2(t))t, \\ g_0^2(t) \leqslant C(g_1^2(t) + g_0^1(t))t, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*. \end{cases}$$

Дифференцируя (28) по z, учитывая оценки (5), (23), получим

$$\begin{cases} g_r^1(t) \leqslant C(g_1^1(t) + g_2^1(t) + g_r^2(t))t, \\ g_r^2(t) \leqslant C(g_1^2(t) + g_r^1(t))t, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*, \quad r = 1, 2. \end{cases}$$

Сложив полученные неравенства и усилив их, придем к неравенствам

$$\sum_{k=0}^{2} \sum_{r=0}^{2} g_r^k(t) \leqslant C \sum_{k=0}^{2} \sum_{r=0}^{2} g_r^k(t)t, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*. \tag{30}$$

Отсюда следует, что при $t \in [0, \xi]$, где $\xi < 1/C$, справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} g_r^k(t) \equiv 0,$$

следовательно,

$$\omega^k(t, x, z) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \quad (t, x, z) \in G_{[0,\xi]}.$$

Рассуждая аналогично, для $t \in [\xi, 2\xi]$ получим, что $\omega^k(t, x, z) \equiv 0$, $k = 1, 2$, $(t, x, z) \in G_{[0,2\xi]}$. Через конечное число шагов докажем, что $\omega^k(t, x, z) \equiv 0$, $k = 1, 2$, при $(t, x, z) \in G_{[0,t^*]}$. В силу того, что $\varphi_{mk}(t, x)$ выражаются через $\omega^k(t, x, 0)$, $\omega^k(t, x, l)$, получаем $\varphi_{mk}(t, x) = 0$, $m, k = 1, 2$, при $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4), (5), (18). *Тогда существует и единственно решение* $u^1(t, x, z)$, $u^2(t, x, z)$, $b_{11}(t, x)$, $b_{12}(t, x)$, $b_{21}(t, x)$, $b_{22}(t, x)$ *задачи* (1)—(3) *в классе* $Z_{[0,t^*]}$, *удовлетворяющее соотношению* (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белов Ю. Я., Кантор С. А.* Метод слабой аппроксимации. — Красноярск: КрасГУ, 1999.
2. *Вячеславова П. Ю., Сорокин Р. В.* Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа// Ж. Сиб. Федер. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2009. — *2*, № 3. — С. 288–297.
3. *Рихтмайер Р. Д.* Звук и теплопроводность// в кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск: Наука, 1966. — С. 183–185.
4. *Сорокин Р. В., Шипина Т. Н.* Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа в многомерном случае// Вычисл. технологии. — 2004. — *9*, № 3. — С. 59–68.
5. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967.
6. *Belov Yu. Ya.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. — Utrecht: VSP, 2002.
7. *Belov Yu. Ya.* On estimates of solutions of the split problems for some multi-dimensional partial differential equations// Ж. Сиб. Федер. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2009. — *2*, № 3. — С. 258–270.
8. *Belov Yu. Ya., Shipina T. N.* The problem of determining the source function for a system of composite type// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 1998. — *6*, № 4. — P. 287–308.

Сорокин Роман Викторович
Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: `rsorokin@sfu-kras.ru`

Шипина Татьяна Николаевна
Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: `tshipina@sfu-kras.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 84–91
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-84-91

УДК 517.977

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ НЕЛОКАЛЬНЫХ МЕТОДОВ

© 2022 г. **В. А. СРОЧКО, В. Г. АНТОНИК, Е. В. АКСЕНЮШКИНА**

Аннотация. Рассматривается выпуклая линейно-квадратичная задача в классе методов нелокального спуска. Проведено обоснование единственности решений фазовой и сопряженной систем на максимизирующем управлении. Доказаны утверждения о сходимости итерационных методов по функционалу.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача, точные формулы приращения функционала, методы нелокального улучшения.

NUMERICAL SOLUTION OF A LINEAR-QUADRATIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM BASED ON NONLOCAL METHODS

© 2022 **V. A. SROCHKO, V. G. ANTONIK, E. V. AKSENYUSHKINA**

Abstract. In this paper, a convex linear-quadratic problem is considered within the class of nonlocal descent methods. The uniqueness of solutions of the phase and conjugate systems is established. The convergence of iterative methods with respect to the cost functional is proved.

Keywords and phrases: linear-quadratic problem, exact formulas for the increment of a functional, methods of nonlocal improvement.

AMS Subject Classification: 49J15, 49M25

1. Постановка задачи. Необходимые соотношения. Пусть $t \in T = [t_0, t_1]$ — независимая переменная (время), $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — вектор-функция фазовых переменных (состояние), $u(t)$ — управляющая функция (управление).

Рассмотрим задачу минимизации квадратичного функционала

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t_1), Dx(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\int_T (\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + u^2(t))dt \tag{1}$$

на множестве допустимых управлений

$$V = \{u(\cdot) \in \mathrm{PC}(T) : u(t) \in [u^-, u^+],\ t \in T\} \tag{2}$$

относительно линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = x^0. \tag{3}$$

Предположим, что в функционале (1) симметричные матрицы D, $Q(t)$ неотрицательно определены, матричная функция $A(t)$, вектор-функция $b(t)$ в фазовой системе (1) и матричная функция

$Q(t)$ в (1) непрерывны на отрезке T. Класс допустимых управлений (2) образуют кусочно-непрерывные функции $u(t)$, $t \in T$, с двусторонним ограничением.

Соотношения (1)—(3) определяют задачу (P). Это выпуклая линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности [4]. В рамках численного решения этой задачи наиболее эффективные методы носят нелокальный характер (отсутствие параметрического поиска) и связаны с точными формулами приращения функционала [1, 6] или достаточными условиями оптимальности [2, 5]. В данной работе получены результаты по обоснованию корректности процедур улучшения и сходимости соответствующих методов. Характерно, что в рассматриваемом случае задача на максимум функции Понтрягина эквивалентна операции проецирования. В результате появляются условия Липшица, что гарантирует существование и единственность глобальных решений фазовой и сопряженной систем для максимизирующего управления. Доказывается, что итерационные методы (прямой и двойственный) порождают минимизирующие последовательности управлений. В результате комбинации методов получена итоговая итерационная схема, которая по затратам на каждое улучшение (одна задача Коши) представляется наиболее эффективным средством численного решения задачи (P).

Приведем необходимые конструкции для задачи (P). Функция Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A(t)x + b(t)u \rangle - \frac{1}{2}\langle x, Q(t)x \rangle - \frac{1}{2}u^2$$

является строго вогнутой по переменной u, поэтому задача на максимум

$$\langle \psi, b(t) \rangle u - \frac{1}{2}u^2 \to \max, \quad u \in [u^-, u^+]$$

имеет единственное решение

$$u_*(\psi, t) = \begin{cases} \langle \psi, b(t) \rangle, & \langle \psi, b(t) \rangle \in [u^-, u^+], \\ u^-, & \langle \psi, b(t) \rangle < u^-, \\ u^+, & \langle \psi, b(t) \rangle < u^+. \end{cases}$$

Пусть $\varphi(\cdot)$ — функция проецирования на $[u^-, u^+]$. Тогда максимизирующее управление представляется в форме проекции

$$u_*(\psi, t) = \varphi(\langle \psi, b(t) \rangle), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T.$$

На основании известного свойства операции проецирования функция $u_*(\psi, t)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной ψ на множестве $\mathbb{R}^n \times T$.

Пусть $u(t)$, $v(t)$, $t \in T$ — допустимые управления, $x(t, u)$, $x(t, v)$ — соответствующие фазовые траектории. Определим вектор-функцию $\psi(t, u)$, $t \in T$, как решение первой сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A(t)^T \psi + Q(t)x(t, u), \quad \psi(t_1) = -c - Dx(t_1, u). \tag{4}$$

В силу выпуклости задачи (P) имеет место оценка для приращения функционала

$$\Delta_v \Phi(u) \geqslant -\int_T \Delta_{v(t)} H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)dt,$$

в которой $\Delta_v H$ обозначает частное приращение функции H по управлению.

Поскольку функция H является вогнутой по u, то выполняется неравенство

$$\Delta_{v(t)} H(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t) \leqslant H_u(\psi(t, u), u(t), t)(v(t) - u(t)), \quad t \in T.$$

Таким образом, в задаче (P) принцип максимума и его дифференциальный вариант эквивалентны и справедлива оценка приращения

$$\Delta_v \Phi(u) \geqslant -\int_T H_u(\psi(t, u), u(t), t)(v(t) - u(t))dt. \tag{5}$$

Приведем точные формулы приращения функционала в задаче (P), которые являются основой для построения минимизирующих последовательностей управлений [6].

Введем в рассмотрение вторую сопряженную систему (матричную)

$$\dot{\Psi} = -A(t)^T\Psi - \Psi A(t) + Q(t), \quad \Psi(t_1) = -D$$

с решением $\Psi(t)$.

Первая формула представляется в виде

$$\Delta_v\Phi(u) = -\int\limits_T \Delta_{v(t)} H(p(t,u,x(t,v)), x(t,v), u(t), t)dt, \tag{6}$$

где вектор-функция p определяется выражением

$$p(t,u,x) = \psi(t,u) + \Psi(t)(x - x(t,u)). \tag{7}$$

Вторая формула получается с помощью перестановки u и v

$$\Delta_v\Phi(u) = -\int\limits_T \Delta_{v(t)} H(p(t,v,x(t,u)), x(t,u), u(t), t)dt, \tag{8}$$

причем вектор-функция $p(t,v,x(t,u))$ удовлетворяет дифференциальной системе

$$\dot{p} = -A(t)^T p + Q(t)x(t,u) - \Psi(t)b(t)(v(t) - u(t)), \quad p(t_1) = \psi(t_1,u).$$

2. Процедуры улучшения. Обоснование. Возьмем за основу формулу приращения (5) и представим первую процедуру улучшения:

(i) по данному допустимому процессу $(u(t),\ x(t,u))$ найдем решение $\psi(t,u)$, $t \in T$, сопряженной системы (4);

(ii) образуем вектор-функцию $p(t,u,x)$ согласно выражению (7) и сформируем вспомогательное управление

$$v_*(x,t) = u_*(p(t,u,x),t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T;$$

(iii) найдем решение $x(t)$, $t \in T$ фазовой системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)v_*(x,t), \quad x(t_0) = x^0 \tag{9}$$

вместе с управлением $v(t) = v_*(x(t),t)$.

Поскольку $x(t) = x(t,v)$, то получаем допустимый процесс $(v(t),\ x(t,v))$. Переход $u \Rightarrow v$ согласно описанной схеме обозначим в операторной форме: $v = \mathrm{P}_1(u)$.

Проведем обоснование этой процедуры. Прежде всего проверим корректность задачи Коши (9). Для функции $v_*(x,t)$ с учетом определения и свойства операции проецирования имеем

$$\Big|v_*(x+\Delta x,t) - v_*(x,t)\Big| = \Big|\varphi\big(\langle p(t,u,x+\Delta x), b(t)\rangle\big) - \varphi\big(\langle p(t,u,x), b(t)\rangle\big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\big\langle p(t,u,x+\Delta x) - p(t,u,x), b(t)\big\rangle\Big| = \Big|\langle \Psi(t)\Delta x, b(t)\rangle\Big| \leqslant L\|\Delta x\|.$$

Здесь

$$L = \max_{t\in T}\|\Psi(t)b(t)\|, \quad x, x+\Delta x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T.$$

Таким образом, функция $v_*(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x на множестве $\mathbb{R}^n \times T$. Следовательно, это условие справедливо для вектор-функции $f(x,t) = A(t)x + b(t)v_*(x,t)$. На основании известной теоремы [3] заключаем, что решение $x(t)$ системы (9) существует и единственно на T.

Проведем обоснование свойства улучшения по функционалу: $\Phi(v) \leqslant \Phi(u)$. Согласно определению функции H имеем

$$H_u(\psi,u,t) = \langle\psi, b(t)\rangle - u, \quad H_{uu} = -1.$$

Управление $v = \mathrm{P}_1(u)$ определяется проекционным условием

$$v(t) = \varphi(\langle p(t,u,x(t,v)), b(t)\rangle),$$

что эквивалентно неравенству

$$\Big(v(t) - \big\langle p(t,u,x(t,v)), b(t)\big\rangle\Big)(v(t) - w) \leqslant 0, \quad w \in [u^-,u^+], \quad t \in T.$$

Полагая здесь $w = u(t)$ и учитывая формулу для H_u, получаем

$$H_u\Big(p(t,u,x(t,v)),v(t),t\Big)\big(u(t)-v(t)\big) \leqslant 0, \quad t \in T.$$

С учетом формулы приращения (6) для $v = \mathrm{P}_1(u)$ имеем

$$\Delta_v\Phi(u) = \int_T \Delta_{u(t)}H\Big(p(t,u,x(t,v)),x(t,v),v(t),t\Big)dt =$$
$$= \int_T H_u\Big(p(t,u,x(t,v)),v(t),t\Big)(u(t)-v(t))dt - \frac{1}{2}\int_T (u(t)-v(t))^2dt.$$

В результате получаем оценку улучшения по функционалу для процедуры $v = \mathrm{P}_1(u)$

$$\Phi(v) - \Phi(u) \leqslant -\frac{1}{2}\int_T (v(t)-u(t))^2dt. \tag{10}$$

Отсюда следует: $\Phi(v) = \Phi(u) \Rightarrow v = u$.

Равенство $v(t) = u(t)$, $t \in T$, означает, что управление $u(t)$ является оптимальным в задаче (P). Действительно, в этом случае

$$p(t,u,x(t,v)) = p(t,u,x(t,u)) = \psi(t,u).$$

Тогда управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума: $u(t) = u_*(\psi(t,u),t)$, $t \in T$, то есть является оптимальным.

Из оценки (10) следует, что процедура $v = \mathrm{P}_1(u)$ улучшает любое неоптимальное управление $u \in V$.

В заключение сформулируем критерий оптимальности в задаче (P) на основе первой процедуры улучшения.

Теорема 1. *Для оптимальности управления $u \in V$ в задаче* (P) *необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(u) = \Phi(v)$, где $v = \mathrm{P}_1(u)$.*

Следствие 1. *Величина $\delta_1(u) = \Phi(u) - \Phi(v)$ является невязкой оптимальности для управления $u \in V$ в задаче* (P).

Замечание 1. Трудоемкость реализации процедуры — две векторные задачи Коши: поиск $\psi(t,u)$, $x(t,v)$.

Возьмем за основу альтернативную формулу приращения (8) и опишем вторую процедуру улучшения:

(i) по данному управлению $u \in V$ найдем решение $x(t,u)$ фазовой системы (3);

(ii) найдем решение $p(t)$, $t \in T$, задачи Коши

$$\dot{p} = -A(t)^Tp + Q(t)x(t,u) - \Psi(t)b(t)(u_*(p,t) - u(t)), \quad p(t_1) = -c - Dx(t_1,u) \tag{11}$$

вместе с управлением $v(t) = u_*(p(t),t)$, $t \in T$.

Переход $u \Rightarrow v$ согласно данной схеме обозначим: $v = \mathrm{P}_2(u)$. Отметим, что в обозначениях (8) $p(t) = p(t,v,x(t,u))$.

Обоснование представленной процедуры проводится вполне аналогично предыдущему. Функция $u_*(p,t) = \varphi(\langle p, b(t)\rangle)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной p на множестве $\mathbb{R}^n \times T$. Следовательно, правая часть системы (11) обладает этим свойством, т.е. решение $p(t)$ задачи Коши (11) существует и единственно на T.

Обоснуем свойство улучшения. Управление $v = \mathrm{P}_2(u)$ определяется условием

$$v(t) = u_*(p(t,v,x(t,u)),t) = \varphi\Big(\langle p(t,v,x(t,u)),b(t)\rangle\Big),$$

что приводит к неравенству

$$H_u\Big(p(t,v,x(t,u)),v(t),t\Big)(u(t)-v(t)) \leqslant 0, \quad t \in T.$$

На основании формулы приращения (8) получаем оценку улучшения по функционалу для процедуры $v = \mathrm{P}_2(u)$ в виде неравенства (10).

Дальнейшие заключения сохраняются с естественным изменением в обозначениях.

3. Первый метод последовательных приближений. Итерационный метод на основе первой процедуры улучшения формулируется элементарно:

$$u^{k+1} = \mathrm{P}_1(u^k), \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Здесь $u^k(\cdot) \in V$, $x^k(t) = x(t, u^k)$, $\psi^k(t) = \psi(t, u^k)$ (входная информация). Согласно свойству процедуры на выходе имеем:

$$\begin{aligned} u^{k+1}(t) &= u_*(p^{k+1}(t), t), \quad x^{k+1}(t) = x(t, u^{k+1}), \\ p^{k+1}(t) &= \psi^k(t) + \Psi(t)(x^{k+1}(t) - x^k(t)), \quad t \in T. \end{aligned}$$

Оценка улучшения по функционалу представляется неравенством

$$\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1}) \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_T (u^k(t) - u^{k+1}(t))^2 dt, \tag{12}$$

невязка оптимальности есть величина приращения $\delta_1(u^k) = \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})$.

Поскольку функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу на V и последовательность $\{\Phi(u^k)\}$ монотонно убывает, то имеет место сходимость по невязке оптимальности: $\delta_1(u^k) \to 0$, $k \to \infty$.

Докажем основной результат, что последовательность $\{u^k\}$ является минимизирующей, то есть $\Phi(u^k) \to \Phi(u^*)$, $k \to \infty$, где u^* — оптимальное управление.

В соответствии с методом имеем

$$u^{k+1}(t) = \varphi\Big(u^k(t) + H_u(p^{k+1}(t), u^k(t), t)\Big), \quad t \in T. \tag{13}$$

Воспользуемся свойством проекции

$$\Big(u^{k+1}(t) - u^k(t) - H_u(p^{k+1}(t), u^k(t), t)\Big)\Big(u^{k+1}(t) - w\Big) \leqslant 0, \quad w \in [u^-, u^+]. \tag{14}$$

Отсюда получаем неравенство

$$H_u\big(p^{k+1(}t), u^k(t), t\big)\big(w - u^{k+1}(t)\big) \leqslant \big(u^{k+1}(t) - u^k(t)\big)\big(w - u^{k+1}(t)\big). \tag{15}$$

Поскольку

$$H_u\big(p^{k+1}(t), u^k(t), t\big) = H_u\big(\psi^k(t), u^k(t), t\big) + \big\langle \Psi(t)(x^{k+1}(t) - x^k(t)), b(t)\big\rangle,$$

то предыдущее неравенство принимает вид

$$\begin{aligned} H_u\big(\psi^k(t), u^k(t), t\big)\big(w - u^{k+1}(t)\big) \leqslant \big(u^{k+1}(t) - u^k(t)\big)\big(w - u^{k+1}(t)\big) + \\ + \big\langle \Psi(t)(x^{k+1}(t) - x^k(t)), b(t)\big\rangle\big(u^{k+1}(t) - w\big), \quad w \in [u^-, u^+], t \in T. \end{aligned} \tag{16}$$

Далее обратимся к оценке (5). Представим ее в виде

$$\Phi(u) - \Phi(v) \leqslant \int\limits_T H_u\big(\psi(t, u), u(t), t\big)\big(v(t) - u(t)\big)dt. \tag{17}$$

Положим здесь $u = u^k$, $v = u^*$ и воспользуемся представлением

$$u^*(t) - u^k(t) = \big(u^*(t) - u^{k+1}(t)\big) + \big(u^{k+1}(t) - u^k(t)\big).$$

Тогда

$$\Phi(u^k) - \Phi(u^*) \leqslant \int\limits_T H_u\big(\psi^k(t), u^k(t), t\big)\big(u^*(t) - u^{k+1}(t)\big)dt + \int\limits_T H_u\big(\psi^k(t), u^k(t), t\big)\big(u^{k+1}(t) - u^k(t)\big)dt.$$

С учетом неравенства (16) при $w = u^*(t)$ приходим к следующей оценке приращения:

$$\Phi(u^k) - \Phi(u^*) \leqslant \int\limits_T \big(u^*(t) - u^{k+1}(t)\big)\big(u^{k+1}(t) - u^k(t)\big)dt +$$
$$+ \int\limits_T \big\langle \Psi(t)(x^{k+1}(t) - x^k(t)),\ b(t)\big\rangle\big(u^{k+1}(t) - u^*(t)\big)dt +$$
$$+ \int\limits_T H_u\big(\psi^k(t), u^k(t), t\big)\big(u^{k+1}(t) - u^k(t)\big)dt.$$

Рассмотрим приращение $y^k(t) = x^{k+1}(t) - x^k(t)$. В силу фазовой системы получаем

$$\dot{y}^k(t) = A(t)y^k(t) + b(t)\big(u^{k+1}(t) - u^k(t)\big), \quad y^k(t_0) = 0.$$

По формуле Коши

$$y^k(t) = F(t)\int\limits_{t_0}^{t} F^{-1}(\tau)b(\tau)\big(u^{k+1}(\tau) - u^k(\tau)\big)d\tau,$$

где $F(t)$ — фундаментальная матрица: $\dot{F} = A(t)F$, $F(t_0) = E$. Следовательно, имеет место оценка фазового приращения (векторная и матричная нормы согласованы):

$$\|y^k(t)\| \leqslant \|F(t)\| \int\limits_T \|F^{-1}(t)\| \cdot \|b(t)\| \cdot \big|u^{k+1}(t) - u^k(t)\big|dt \leqslant C_1 \int\limits_T \big|u^{k+1}(t) - u^k(t)\big|dt.$$

Кроме того, используем оценки ограниченности, не зависящие от номера k:

$$\big|u^{k+1}(t) - u^*(t)\big| \leqslant |u^+ - u^-|, \quad \|x^k(t)\| \leqslant C_2, \quad \|\psi^k(t)\| \leqslant C_3, \quad t \in T.$$

Отсюда

$$\Big|H_u\big(\psi^k(t), u^k(t), t\big)\Big| \leqslant \|\psi^k(t)\|\|b(t)\| + |u^k(t)| \leqslant C_4, \quad t \in T.$$

В результате приходим к следующему неравенству для приращения функционала:

$$\Phi(u^k) - \Phi(u^*) \leqslant \int\limits_T \big|u^{k+1}(t) - u^k(t)\big|dt.$$

С учетом известного неравенства

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} |u(t)|dt \leqslant \sqrt{t_1 - t_0}\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} u^2(t)dt\right)^{1/2}$$

вместе с (12) получаем итоговую оценку приращения функционала:

$$\Phi(u^k) - \Phi(u^*) \leqslant \sqrt{2(t_1 - t_0)}C\big(\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})\big)^{1/2} = c_1\delta_1(u^k)^{1/2}.$$

В результате приходим к утверждению о сходимости.

Теорема 2. *Итерационный метод* $u^{k+1} = \mathrm{P}_1(u^k)$, $k = 0, 1, \ldots$ *порождает минимизирующую последовательность управлений.*

Замечание 2. Условие остановки метода можно сформулировать в виде неравенства для невязки оптимальности: $\delta_1(u^k) \leqslant \varepsilon$. Вычислительные затраты на итерацию — две задачи Коши.

4. Второй метод последовательных приближений. Определим итерационный метод на основе второй процедуры улучшения:

$$u^{k+1} = \mathrm{P}_2(u^k), \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Согласно построению $u^{k+1}(t) = u_*(p^{k+1}(t), t)$, где $p^{k+1}(t)$ — решение системы

$$\dot{p} = -A(t)^T p + Q(t)x^k(t) - \Psi(t)b(t)\big(u_*(p,t) - u^k(t)\big), \quad p(t_1) = -c - Dx^k(t_1).$$

Альтернативное выражение для $p^{k+1}(t)$ имеет вид

$$p^{k+1}(t) = p\big(t, u^{k+1}(t)\big), \quad x^k(t) = \psi^{k+1}(t) + \Psi(t)\big(x^k(t) - x^{k+1}(t)\big). \tag{18}$$

Свойства метода (оценка улучшения функционала, невязка оптимальности, сходимость по невязке) полностью идентичны характеристикам первого метода.

Докажем, что последовательность $\{u^k\}$ является минимизирующей.

Соотношения (13)—(15) первого метода сохраняются. В соответствии с формулой (18) неравенство (16) изменяется следующим образом

$$H_u\big(\psi^{k+1}(t), u^k(t), t\big)\big(w - u^{k+1}(t)\big) \leqslant \big(u^{k+1}(t) - u^k(t)\big)\big(w - u^{k+1}(t)\big) +$$
$$+ \big\langle \Psi(t)(x^{k+1}(t) - x^k(t)),\ b(t)\big\rangle\big(w - u^{k+1}(t)\big), \quad w \in [u^-, u^+], \quad t \in T. \tag{19}$$

Неравенство (17) рассмотрим для $u = u^{k+1}$, $v = u^*$:

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) \leqslant \int\limits_T H_u\big(\psi^{k+1}(t), u^{k+1}(t), t\big)\big(u^*(t) - u^{k+1}(t)\big)dt.$$

Поскольку $H_u(\psi, u, t) = \langle\psi, b(t)\rangle - u$, то справедливо представление

$$H_u\big(\psi^{k+1}(t), u^{k+1}(t), t\big) = H_u\big(\psi^{k+1}(t), u^k(t), t\big) + u^k(t) - u^{k+1}(t).$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) \leqslant \int\limits_T H_u\big(\psi^{k+1}(t), u^k(t), t\big)\big(u^*(t) - u^{k+1}(t)\big)dt - \int\limits_T \big(u^{k+1}(t) - u^k(t)\big)\big(u^*(t) - u^{k+1}(t)\big)dt.$$

С учетом неравенства (19) при $w = u^*(t)$ приходим к оценке

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) \leqslant \int\limits_T \big\langle \Psi(t)(x^{k+1}(t) - x^k(t)),\ b(t)\big\rangle\big(u^*(t) - u^{k+1}(t)\big)dt.$$

Дальнейший вывод повторяет соответствующий фрагмент доказательства теоремы 2. В результате получаем итоговую оценку

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^*) \leqslant C\big(\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})\big)^{1/2} = C\delta_2(u^k)^{1/2},$$

которая обеспечивает свойство сходимости: $\Phi(u^{k+1}) \to \Phi(u^*)$, $k \to \infty$. Затраты на итерацию сохраняются.

5. Комбинированный метод. В пп. 3, 4 были построены два независимых метода улучшения допустимых управлений в задаче (P), равносильные по трудоемкости реализации (цена одного улучшения — две задачи Коши). Оказывается, что оба метода можно естественным образом состыковать и получить комбинированный метод, который в пределах той же трудоемкости обеспечивает двойное улучшение по функционалу (цена каждого улучшения — одна задача Коши). Этот метод представляется наиболее эффективной процедурой численного решения задачи (P).

Пусть на k-й итерации имеется допустимый процесс $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$.

Найдем решение $p^k(t)$, $t \in T$, комбинированной системы

$$\dot{p} = -A(t)^T p + Q(t)x^k(t) - \Psi(t)b(t)\big(u_*(p,t) - u^k(t)\big), \quad p(t_1) = -c - Dx^k(t_1),$$

вместе с промежуточным управлением

$$v^k(t) = u_*(p^k(t), t), \quad t \in T.$$

Сформируем вектор-функцию
$$p(t, v^k, x) = p^k(t) + \Psi(t)(x - x^k(t))$$
и вспомогательное управление
$$w^k(x, t) = u_*(p(t, v^k, x), t).$$
Найдем решение $x^{k+1}(t)$, $t \in T$, фазовой системы
$$\dot{x} = A(t)x + b(t)w^k(x, t), \quad x(t_0) = x^0,$$
в совокупности с управлением
$$u^{k+1}(t) = w^k(x^{k+1}(t), t), \quad t \in T.$$
Итерация завершена.

Прокомментируем метод. Промежуточное управление v^k получено на основе u^k как итерация второго метода: $v^k = \mathrm{P}_2(u^k)$. Следовательно, $\Phi(v^k) \leqslant \Phi(u^k)$, причем
$$p^k(t) = \psi(t, v^k) + \Psi(t)\big(x^k(t) - x(t, v^k)\big).$$
Тогда
$$p(t, v^k, x) = \psi(t, v^k) + \Psi(t)\big(x - x(t, v^k)\big).$$
Это значит, что переход $v^k \Rightarrow u^{k+1}$ есть реализация первого метода улучшения: $u^{k+1} = \mathrm{P}_1(v^k)$, поэтому $\Phi(u^{k+1}) \leqslant \Phi(v^k)$.

Таким образом, в процессе итерации комбинированного метода происходит двойное улучшение по функционалу $\Phi(u^{k+1}) \leqslant \Phi(v^k) \leqslant \Phi(u^k)$, и каждое улучшение дается ценой решения одной задачи Коши. Сходимость комбинированного метода по невязке $\delta(u^k) = \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})$ вполне очевидна. Утверждение о минимизирующей последовательности $\{u^k\}$ является следствием соответствующих результатов для первого и второго методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аргучинцев А. В., Дыхта В. А., Срочко В. А.* Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума// Изв. вузов. Мат. — 2009. — № 1. — С. 3–43.
2. *Батурин В. А., Урбанович Д. Е.* Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. — Новосибирск: Наука, 1997.
3. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: Факториал, 2002.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. — М.: Либроком, 2011.
5. *Кротов В. Ф.* Управление квантовыми системами и некоторые идеи оптимального управления// Автомат. телемех. — 2009. — № 3. — С. 15–23.
6. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.

Срочко Владимир Андреевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `srochko@math.isu.ru`

Антоник Владимир Георгиевич
Иркутский государственный университет
E-mail: `vga@math.isu.ru`

Аксенюшкина Елена Владимировна
Байкальский государственный университет, Иркутск
E-mail: `aks.ev@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 92–99
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-92-99

УДК 517.956.47

ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2022 г. **Р. К. ТАГИЕВ, Ш. И. МАГЕРРАМЛИ**

Аннотация. В работе рассматривается вариационная постановка обратной задачи об определении старшего коэффициента многомерного параболического уравнения с нелокальными условиями. Старший коэффициент уравнения выполняет роль управляющей функции и является элементом пространства Соболева. Функционал цели составлен на основе условия переопределения, которое может быть интерпретировано как задание средневзвешенного значения решения рассматриваемого уравнения по временной переменной. Исследованы вопросы корректности постановки задачи в слабой топологии пространства управлений. Доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели и установлено необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, интегральное граничное условие, корректность, необходимое условие оптимальности.

VARIATIONAL STATEMENT OF A COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR A MULTIDIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

© 2022 **R. K. TAGIEV, Sh. I. MAHARRAMLI**

Abstract. In this paper, we consider the variational statement of an inverse problem of determining the leading coefficient of a multidimensional parabolic equation with nonlocal conditions. The leading coefficient of the equation playing the role of a control function is an element of the Sobolev space. The objective functional is based on the overdetermination condition, which can be interpreted as setting the weighted average value of the solution of the equation considered with respect to the time variable. The well-posedness of the problem in the weak topology of the control space is examined, the Fréchet differentiability of the objective functional is proved, and a necessary optimality condition is obtained.

***Keywords and phrases*:** inverse problem, parabolic equation, integral boundary condition, well-posedness, necessary optimality condition.

***AMS Subject Classification*:** 49K20, 35K20

1. Введение. Обратные задачи об определении коэффициентов уравнений в частных производных могут быть сформулированы в вариационной постановке, и для их решения можно использовать методы теории оптимального управления. При этом роль управляющих функций выполняют искомые коэффициенты рассматриваемых уравнений, а функционал цели (невязки) составляется на основе условия переопределения [13].

Вариационные постановки обратных задач об определении коэффициентов параболических уравнений при классических граничных условиях и локальных условиях переопределения рассмотрены в работах [1, 3–5, 14] и др. Однако такие задачи для параболических уравнений при нелокальных условиях наименее изучены [10, 11].

В данной работе рассматривается вариационная постановка обратной задачи об определении старшего коэффициента многомерного параболического уравнения с интегральным граничным условием. Роль управляющей функции играет старший коэффициент уравнения, а функционал цели составлен на основе нелокального условия переопределения. Исследованы вопросы корректности постановки задачи. Доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели и установлено необходимое условие оптимальности.

2. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей S, $S = S' \cup S''$, $T > 0$, — заданное число, $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $S_T = S \times (0,T]$, $S'_T = S' \times (0,T]$, $S''_T = S'' \times (0,T]$.

Рассмотрим следующую коэффициентную обратную задачу для линейного многомерного параболического уравнения. Требуется найти пару функций $\{u(x,t), v(x)\}$, удовлетворяющую условиям:

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (v(x) u_{x_i})_{x_i} + a(x,t) u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u|_{(x,t)\in S_T{}'} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{(x,t)\in S''_T} \equiv v(x) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \cos(\nu, x_i)\Big|_{(x,t)\in S''_T} = \int_\Omega K(x,y,t) u(y,t) dy\Big|_{(x,t)\in S''_T}, \tag{3}$$

$$v \in V = \Big\{ v = v(x) \in W_p^1(\Omega) : 0 < \mu_0 \leqslant v(x) \leqslant \mu_1,\ |v_{x_i}(x)| \leqslant d,\ i = \overline{1,n},\ \text{п.в. на } \Omega \Big\}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x, t_i) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Здесь $\mu_0, \mu_1, d > 0$, $N \geqslant 1$, $\alpha_i > 0$ $(i = \overline{1,N})$, t_i $(i = \overline{1,N})$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$, $p > n$ (при $n \geqslant 2$) — заданные числа, ν — единичный вектор нормали к S'', $a(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $K(x,y,t)$, $\chi(x)$ — заданные измеримые функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered} |a(x,t)| \leqslant \mu_1,\ \text{п.в. на } Q_T, \\ |K(x,y,t)| \leqslant \mu_2, \quad |K_t(x,y,t)| \leqslant \mu_3 \text{ п.в. на } S'' \times \Omega \times (0,T), \\ \varphi \in W^1_{2,0}(\Omega), \quad f \in L_2(Q_T), \quad \chi \in L_2(\Omega), \end{gathered} \tag{6}$$

где $\mu_2, \mu_3 > 0$ — заданные числа. Обозначения используемых в работе функциональных пространств и их норм соответствуют [7, с. 21—26]. Через $W^1_{2,0}(\Omega)$ (соответственно $V^{1,0}_{2,0}(Q_T)$, $W^1_{2,0}(Q_T)$) будем обозначать подпространства функций из $W^1_2(\Omega)$ (соответственно $V^{1,0}_2(Q_T)$, $W^1_2(Q_T)$), равных нулю на S' (соответственно на S'_T, S'_T).

Вариационная постановка обратной задачи (1)—(5) заключается в следующем. Требуется минимизировать функционал цели

$$J(v) = \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x, t_i; v) - \chi(x) \right|^2 dx \tag{7}$$

при условиях (1)—(4). Ниже эту задачу будем называть задачей (1)—(4), (7). При этом множество V, определяемое условием (4), назовем множеством допустимых управлений, а функции $v = v(x)$ из V — допустимыми управлениями. Через $u(x,t;v)$ в (7) обозначим решение краевой задачи (1)—(3), соответствующее допустимому управлению $v = v(x)$.

Функционал цели (7) составлен на основе условия переопределения (5). Если в задаче (1)—(4), (7) окажется, что существует допустимое управление $v_* \in V$, доставляющее функционалу (7) нулевое значение, то пара $\{u(x,t;v_*), v_*(x)\}$ будет являться решением обратной задачи (1)—(5).

Условие переопределения (5) может быть интерпретировано как задание средневзвешенного значения $u(x,t)$ по переменной t. Если, в частности, $\alpha_i = 1/T$ $(i = \overline{1,N})$, то имеем условие суммарного среднего функции $u(x,t)$ по t.

Отметим, что коэффициентные обратные задачи в традиционной постановке для параболических уравнений при классических граничных условиях и интегральным условием переопределения изучены в [6, 8].

Пусть $v \in V$ — заданное допустимое управление. Тогда принадлежащая пространству $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ функция $u = u(x,t) = u(x,t;v)$ называется обобщенным решением из $V_2^{1,0}(Q_T)$ краевой задачи (1)—(3), соответствующим управлению v, если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}\left(-u\eta_t + v\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\eta_{x_i} + au\eta\right)dxdt - \int\limits_{S''_T}\left[\int\limits_{\Omega} K(s,y,t)u(y,t)dy\right]\eta(s,t)dsdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega}\varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{Q_T} f\eta dxdt \quad (8)$$

для всех $\eta = \eta(x,t) \in \hat{W}_{2,0}^{1}(Q_T) = \{\eta : \eta \in W_{2,0}^{1}(Q_T),\ \eta(x,T) = 0,\ x \in \Omega\}$.

Используя метод Галеркина [7, с. 202—210], можно показать, что при каждом фиксированном $v \in V$ краевая задача (1)—(3) имеет единственное обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$. Это решение принадлежит также пространству $W_{2,0}^{1}(Q_T)$, и верна оценка [12]

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(x,t)\|_{2,\Omega} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x(x,t)\|_{2,\Omega} + \|u_t\|_{2,Q_T} \leqslant M_1\big[\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|f\|_{2,Q_T}\big]. \quad (9)$$

Здесь и всюду ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаем через $M_1, M_2, \ldots$.

3. Корректность постановки задачи. Следующая теорема показывает, что задача (1)—(4), (7) корректно поставлена в слабой топологии пространства $W_p^1(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия, принятые при постановке задачи* (1)—(4), (7). *Тогда множество оптимальных управлений задачи* (1)—(4), (7)

$$V_* = \Big\{v_* \in V :\ J(v_*) = \inf\{J(v) : v \in V\}\Big\}$$

не пусто, V_* — слабо компактно в $W_p^1(\Omega)$, и любая минимизирующая последовательность $\{v_k\} \subset V$ функционала (7) *в $W_p^1(\Omega)$ сходится слабо к множеству V_*.*

Доказательство. Покажем, что функционал (7) слабо в $W_p^1(\Omega)$ непрерывен на V. Пусть $v \in V$ — некоторый элемент, $\{v_k\} \subset V$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию

$$v_k(x) \to v(x) \text{ слабо в } W_p^1(\Omega) \quad \text{при } k \to \infty. \quad (10)$$

Тогда в силу компактности вложения $W_p^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ при $p > n$ [7, с. 78] имеем

$$v_k(x) \to v(x) \text{ слабо в } C(\overline{\Omega}). \quad (11)$$

Положим $u_k = u_k(x,t) = u(x,t;v_k)$. Тогда из (1)—(3), записанных при $u = u_k$, $v = v_k$, учитывая оценку (9), получим

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_k(x,t)\|_{2,\Omega} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{kx}(x,t)\|_{2,\Omega} + \|u_{kt}\|_{2,Q_T} \leqslant M_2, \quad k = 1,2,\ldots. \quad (12)$$

В силу теоремы вложения [7, с. 78] из последовательности $\{u_k\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$ (обозначим ее снова через $\{u_k\}$), что

$$u_k(x,t) \to u(x,t) \text{ слабо в } W_{2,0}^{1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_2(Q_T), \quad (13)$$

$$u_k(x,t_i)\to u(x,t_i) \text{ сильно в } L_2(\Omega), \quad i=\overline{1,N}, \tag{14}$$

где $u=u(x,t)\in W^1_{2,0}(Q_T)$ — некоторый элемент.

Полагая в (8) $u=u_k$, $v=v_k$, имеем

$$\int\limits_{Q_T}\left[-u_k\eta_t+v_k\sum_{i=1}^n u_{kx_i}\eta_{x_i}+au_k\eta\right]dxdt-\int\limits_{S''_T}\left[\int\limits_{\Omega}K(s,y,t)u_k(y,t)dy\right]\eta(s,t)dsdt=$$
$$=\int\limits_{\Omega}\varphi(x)\eta(x,0)dx+\int\limits_{Q_T}f\eta dxdt \quad \forall\eta=\eta(x,t)\in\hat{W}^1_{2,0}(Q_T), \quad k=1,2,\dots. \tag{15}$$

Проводя обычное преобразование с использованием неравенством Коши—Буняковского и соотношений (11)—(13), имеем

$$\left|\int\limits_{Q_T}v_ku_{kx_i}\eta_{x_i}dxdt-\int\limits_{Q_T}vu_{x_i}\eta_{x_i}dxdt\right|=$$
$$=\left|\int\limits_{Q_T}v\big(u_{kx_i}-u_{x_i}\big)\eta_{x_i}dxdt+\int\limits_{Q_T}(v_k-v)u_{kx_i}\eta_{x_i}dxdt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int\limits_{Q_T}v\big(u_{kx_i}-u_{x_i}\big)\eta_{x_i}dxdt\right|+\|v_k-v\|_{C(\overline{\Omega})}\big\|u_{kx_i}\big\|_{2,Q_T}\big\|\eta_{x_i}\big\|_{2,Q_T}\to 0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Кроме того, используя неравенство Коши—Буняковского, ограниченность вложения

$$W^1_{2,0}(Q_T)\to L_2(S''_T)$$

и соотношения (13), получим

$$\left|\int\limits_{S''_T}\left[\int\limits_{\Omega}K(s,y,t)u_k(y,t)dy\right]\eta(s,t)dsdt-\int\limits_{S''_T}\left[\int\limits_{\Omega}K(s,y,t)u(y,t)dy\right]\eta(s,t)dsdt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\mu_2(\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}\|u_k-u\|_{2,Q_T}\|\eta\|_{2,S''_T}\leqslant\mu_2(\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}M_3\|u_k-u\|_{2,Q_T}\|\eta\|^{(1)}_{2,Q_T}\to 0. \tag{17}$$

Переходя к пределу в (15) при $k\to\infty$ и учитывая соотношения (13), (16), (17), получаем, что функция $u=u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (8), т.е. $u(x,t)=u(x,t;v)$. Таким образом, соотношение (14) справедливо с функцией $u(x,t)=u(x,t;v)$:

$$u(x,t_i;v_k)\to u(x,t_i;v) \text{ сильно в } L_2(\Omega), \quad i=\overline{1,N}. \tag{18}$$

Теперь покажем, что $J(v_k)\to J(v)$ при $k\to\infty$. Используя равенство (7), нетрудно убедиться в том, что справедливо неравенство

$$|J(v_k)-J(v)|\leqslant$$
$$\leqslant|\alpha|\sum_{i=1}^N\big\|u(x,t_i;v_k)-u(x,t_i;v)\big\|_{2,\Omega}\left[|\alpha|\sum_{i=1}^N\Big(\|u(x,t_i;v_k)\|_{2,\Omega}+\|u(x,t;v)\|_{2,\Omega}\Big)+2\|\chi\|_{2,\Omega}\right],$$

где

$$|\alpha|=\left(\sum_{i=1}^N\alpha_i^2\right)^{1/2}.$$

Тогда, используя оценки (9), неравенство (12) и соотношение (18) для последовательности $\{v_k\}$, получаем, что $J(v_k) \to J(v)$ при $k \to \infty$, т.е. функционал (7) слабо непрерывен на V в $W_p^1(\Omega)$. Кроме того, множество V ограничено, замкнуто и выпукло в рефлексивном банаховом пространстве $W_p^1(\Omega)$ и поэтому оно слабо компактно в $W_p^1(\Omega)$ (см. [2, с. 51]). Применяя результат из [2, с. 49], заключаем, что теорема 1 верна. $\square$

4. Дифференцируемость функционала цели и необходимое условие оптимальности. Введем сопряженную краевую задачу для задачи (1)—(4), (7):

$$\psi_t + \sum_{i=1}^{n} \big(v(x)\psi_{x_i}\big)_{x_i} - a(x,t)\psi + \int_{S''} K(\xi,x,t)\psi(\xi,t)d\xi = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{19}$$

$$[\psi]|_{t=t_k} \equiv \psi(x,t_k+0) - \psi(x,t_k-0) = 2\alpha_k \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right], \quad k = \overline{1,N-1},$$

$$\psi(x,T) = -2\alpha_N \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right], \quad x \in \Omega, \tag{20}$$

$$\psi|_{(x,t)\in S'_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial N}\right|_{(x,t)\in S''_T} = 0. \tag{21}$$

Под решением краевой задачи (19)—(21) понимаем обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$, т.е. функцию $\psi = \psi(x,t) = \psi(x,t;v)$, принадлежащую пространству $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left[\psi\eta_t + v(x)\sum_{i=1}^{n} \psi_{x_i}\eta_{x_i} + a(x,t)\psi\eta - \int_{S''} K(\xi,x,t)\psi(\xi,t)d\xi \cdot \eta\right] dxdt =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} 2\alpha_k \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right] \eta(x,t_k)dx \tag{22}$$

для всех

$$\eta = \eta(x,t) \in \breve{W}_{2,0}^1(Q_T) = \Big\{\eta : \eta \in W_{2,0}^1(Q_T),\ \eta(x,0) = 0,\ x \in \Omega\Big\}.$$

Можно показать, что при каждом заданном $v \in V$ краевая задача (19)—(21) имеет единственное обобщенное решение $\psi = \psi(x,t) = \psi(x,t;v)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ и

$$|\psi|_{Q_T} \equiv \|\psi\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\psi(x,t)\|_{2,\Omega} + \|\psi_x\|_{2,Q_T} \leqslant M_4 \left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k\right) \left\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right\|_{2,\Omega}.$$

Оценивая правую часть этого неравенства и учитывая (9), получаем

$$|\psi|_{Q_T} \leqslant M_5 \Big[\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|f\|_{2,Q_T} + \|\chi\|_{2,\Omega}\Big]. \tag{23}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда функционал* (7) *непрерывно дифференцируем по Фреше на* V, *и его дифференциал в точке* $v \in V$ *с приращением* $\Delta v \in W_p^1(\Omega)$, $v + \Delta v \in V$ *определяется выражением*

$$dJ(u,\Delta v) = \langle J'(v), \Delta v\rangle_{W_p^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\int_0^T \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x,t;v)\psi_{x_i}(x,t;v)dt\right) \Delta v(x)dx. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $v \in V$ — некоторая точка и $\Delta v \in W_p^1(\Omega)$ — произвольное приращение, удовлетворяющее условию $v + \Delta v \in V$. Положим $\Delta u(x,t) = u(x,t;v+\Delta v) - u(x,t;v)$. Из (1)—(3)

следует, что функция $\Delta u \in W^1_{2,0}(Q_T)$ является обобщенным решением из $W^1_2(Q_T)$ краевой задачи

$$\Delta u_t - \sum_{i=1}^{n} \big((v+\Delta v)\Delta u_{x_i}\big)_{x_i} + a\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \big(\Delta v u_{x_i}\big)_{x_i}, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{25}$$

$$\Delta u(x,0) = \varphi(x), \quad x\in\overline{\Omega}, \tag{26}$$

$$\Delta u\big|_{(x,t)\in S'_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Delta u}{\partial N}\right|_{(x,t)\in S''_T} = \left.\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)\Delta u(y,t)dy\right|_{(x,t)\in S''_T}. \tag{27}$$

Ясно, что обобщенное решение задачи (25)—(27) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}\left(\Delta u_t\eta + \sum_{i=1}^{n}(v+\Delta v)\Delta u_{x_i}\eta_{x_i} + a\Delta u\eta\right)dxdt - \int\limits_{S''_T}\left[\int\limits_{\Omega} K(s,y,t)\Delta u(y,t)dy\right]\eta(s,t)dsdt =$$

$$= -\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^T \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\eta_{x_i}dt\right)\Delta v dx \quad \forall \eta=\eta(x,t)\in W^{1,0}_{2,0}(Q_T) \tag{28}$$

и для него верна оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Delta u(x,t)\|_{2,\Omega} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Delta u_x(x,t)\|_{2,\Omega} + \|\Delta u_t\|_{2,Q_T} \leqslant M_6\left\|\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\Delta v\right\|_{2,Q_T}. \tag{29}$$

Учитывая ограниченность вложения $W^1_p(\Omega)\to C(\overline{\Omega})$ и оценки (9), имеем

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\Delta v\right\|_{2,Q_T} \leqslant \|\Delta v\|_{C(\overline{\Omega})}\|u_x\|_{2,Q_T} \leqslant M_7\|\Delta v\|^{(1)}_{p,\Omega}.$$

Отсюда и из (29) следует оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Delta u(x,t)\|_{2,\Omega} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\Delta u_x(x,t)\|_{2,\Omega} + \|\Delta u_t\|_{2,Q_T} \leqslant M_8\|\Delta v\|^{(1)}_{p,\Omega}. \tag{30}$$

Приращение $\Delta J(v) = J(v+\Delta v) - J(v)$ функционала (7) представим в виде

$$\Delta J(v) = 2\int\limits_{\Omega}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right]\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\Delta u(x,t_k)\right\}dx + \int\limits_{\Omega}\left|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\Delta u(x,t_k)\right|^2 dx. \tag{31}$$

Полагая $\eta=\Delta u$ в (22), $\eta=\psi$ в (28) и вычитая полученные равенства друг из друга, придем к равенству

$$2\int\limits_{\Omega}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right]\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\Delta u(x,t_k)\right\}dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^T\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\psi_{x_i}dt\right)\Delta v dx + \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^T\sum_{i=1}^{n}\Delta u_{x_i}\psi_{x_i}dt\right)\Delta v dx.$$

Подставляя это выражение в (31), получим

$$\Delta J(v) = \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^T\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\psi_{x_i}dt\right)\Delta v dx + R, \tag{32}$$

где

$$R=\int_{\Omega}\left|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\Delta u(x,t_k)\right|^2dx+\int_{\Omega}\left(\int_0^T\sum_{i=1}^{n}\Delta u_{x_i}\psi_{x_i}dt\right)\Delta v dx. \tag{33}$$

Первое слагаемое в правой части (32) при каждом заданном $v\in V$ определяет линейный ограниченный функционал от Δv в $W_p^1(\Omega)$. Линейность очевидна. Используя неравенство Коши—Буняковского и ограниченность вложения $W_p^1(\Omega)\to C(\overline{\Omega})$, получаем оценку

$$\left|\int_{\Omega}\left(\int_0^T\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\psi_{x_i}dt\right)\Delta v dx\right|\leqslant\|\Delta v\|_{C(\overline{\Omega})}\|u_x\|_{2,Q_T}\|\psi_x\|_{2,Q_T}\leqslant M_9\|u_x\|_{2,Q_T}\|\psi_x\|_{2,Q_T}\|\Delta v\|_{W_p^1(\Omega)},$$

из которой в силу оценок (9), (23) следует ограниченность этого функционала. Кроме того, используя неравенство Коши—Буняковского, ограниченность вложения $W_p^1(\Omega)\to C(\overline{\Omega})$ и оценки (30) для функции Δu и для остаточного члена R, определяемого равенством (33), получаем оценку

$$\begin{aligned}|R|\leqslant\int_{\Omega}\left|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\Delta u(x,t_k)\right|^2dx+\left|\int_{\Omega}\left(\int_0^T\sum_{i=1}^{n}\Delta u_{x_i}\psi_{x_i}dt\right)\Delta v dx\right|\leqslant\\ \leqslant\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2\sum_{k=1}^{N}\|\Delta u(x,t_k)\|_{2,\Omega}^2+\|\Delta v\|_{C(\overline{\Omega})}\|\Delta u_x\|_{2,Q_T}\|\psi_x\|_{2,Q_T}\leqslant\\ \leqslant\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2\cdot M_8^2N\left(\|\Delta v\|_{p,\Omega}^{(1)}\right)^2+M_{10}\|\Delta v\|_{p,\Omega}^{(1)}M_8\|\Delta v\|_{p,\Omega}^{(1)}\|\psi_x\|_{2,Q_T}\leqslant M_{11}\left(\|\Delta v\|_{p,\Omega}^{(1)}\right)^2.\end{aligned}$$

Отсюда и из (32) следует, что функционал (7) дифференцируем по Фреше на V, а его дифференциал определяется формулой (24). Используя формулы (24) и результаты [9], нетрудно показать, что отображение $J'\colon V\to(W_p^1(\Omega))^*$ непрерывно. Теорема 2 доказана. □

Следующая теорема вытекает из [2, с. 28, теорема 5] и формулы (24).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для оптимальности управления* $v_*\in V$ *в задаче* (1)—(4), (7) *необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$\int_{\Omega}\left(\int_0^T\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}(x,t;v_*)\psi_{x_i}(x,t;v_*)dt\right)[v(x)-v_*(x)]dx\geqslant0\quad\forall v=v(x)\in V.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алифанов О. А., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988.
2. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
3. *Искендеров А. Д.* О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики// Докл. АН СССР. — 1984. — *274*, № 3. — С. 531–533.
4. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
5. *Кабанихин С. И., Даирбаева Г.* Обратная задача нахождения коэффициента уравнения теплопроводности// Тр. Междунар. конф. «Обратные и некорректные задачи математической физики», посв. 75-летию акад. М. М. Лаврентьева (Новосибирск, 2007). — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2007. — С. 1–5.
6. *Костин А. Б.* Восстановление коэффициента перед u_t в уравнении теплопроводности по условию нелокального наблюдения по времени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2015. — *55*, № 1. — С. 89–104.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.

8. *Прилепко А. И., Костин А. Б., Соловьев В. В.* Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гёльдера и Соболева// Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2017. — *17*, № 3. — С. 67–85.
9. *Тагиев Р. К.* Оптимальное управление коэффициентами в параболических системах// Диффер. уравн. — 2009. — *45*, № 10. — С. 1492–1501.
10. *Тагиев Р. К., Касумов Р. А.* Об оптимизационной постановке коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2017. — № 45. — С. 49–59.
11. *Тагиев Р. К., Магеррамли Ш. И.* Вариационная постановка одной обратной задачи для параболического уравнения с интегральными условиями// Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. Мех. Физ. — 2020. — *12*, № 3. — С. 34–40.
12. *Тагиев Р. К., Магеррамли Ш. И.* О разрешимости начально-краевой задачи для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием// Вестн. Бакинск. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. — 2019. — № 2. — С. 17–26.
13. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 3. — С. 501–504.
14. *Iskenderov A. D., Tagiyev R. K.* Variational method of solving the problem of identification of the coefficients of a quasilinear parabolic problem// Proc. 7th Int. Conf. “Inverse Problems: Modelling and Simulation” (IMPS-2014) (May 26–31, 2014, Ölüdeniz, Fethiye, Turkey), 2014. — P. 31.

Тагиев Рафиг Каландар оглы
Бакинский государственный университет
E-mail: `r.tagiyev@list.ru`

Магеррамли Шахла Илхам кызы
Бакинский государственный университет
E-mail: `semedli.shehla@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 100–112
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-100-112

УДК 517.922, 517.983.5

О РАЗРЕШИМОСТИ В КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ОТ ФУНКЦИОНАЛОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2022 г. **М. В. ФАЛАЛЕЕВ, Е. Ю. ГРАЖДАНЦЕВА**

Аннотация. В работе исследуется задача Коши для дифференциального уравнения с производными от функционалов в банаховых пространствах. Оператор при старшей производной имеет структуру проектора, т.е. его ядро бесконечномерно. Решение строится в пространстве обобщенных функций с ограниченным слева носителем в виде свертки фундаментального решения дифференциального оператора с правой частью уравнения, включающей в себя свободную функцию и начальные условия исходной задачи. Построение фундаментального решения осуществляется с помощью фундаментальной оператор-функции для специально выстроенного матричного дифференциального оператора с необратимой (вообще говоря) матрицей при производной, т.е. с оператором конечного индекса. Анализ построенного таким образом обобщенного решения позволяет получать достаточные условия разрешимости исходной задачи Коши в классах функций конечной гладкости, а также предложить конструктивные формулы для восстановления такого решения. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: банаховы пространства, оператор Фредгольма, обобщенное решение, фундаментальная оператор-функция.

ON THE SOLVABILITY IN THE CLASS OF DISTRIBUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DERIVATIVES OF FUNCTIONALS IN BANACH SPACES

© 2022 **M. V. FALALEEV, E. Yu. GRAZHDANTSEVA**

Abstract. The paper considers the initial value problem for a differential equation with the derivatives of the functionals in Banach spaces. The operator of the elder derivative has the structure of projector, i.e. its core is infinite-dimensional. The solution is constructed in the space of generalized functions with the support bounded on the left in the form of convolution of the fundamental solution of the differential operator with the right-hand side of the equation, which includes a free function and some initial conditions of the initial problem. The process of construction of the fundamental solution is realized with the aid of a fundamental operator function for a specially constructed matrix differential operator with an irreversible (generally speaking) matrix in the derivative, i.e. with the operator of finite index. Analysis of the generalized solution constructed by this technique allows one to obtain the sufficient conditions of solvability for our initial-value problem in the classes of finite smoothness functions, and also propose constructive formulas needed to restore such a solution. An illustrative example is given.

Keywords and phrases: Banach spaces, Fredholm operator, generalized solution, fundamental operator-function.

AMS Subject Classification: 34G10

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00407А).

1. Введение. Рассматривается задача Коши вида

$$\sum_{i=1}^{n} \langle u^{(N)}(t), \alpha_i \rangle a_i - Au(t) = f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \ldots, u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \tag{2}$$

где $N \geqslant 1$, A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\alpha_i \in E_1^*$, $a_i \in E_2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $f(t)$ — достаточно гладкая функция со значениями в E_2.

Уравнения с необратимым оператором при производной, к которым относится и уравнение (1), разрешимы при заданных начальных данных (2) лишь при специальных условиях согласования между функцией $f(t)$ и условиями (2). Эти эффекты давно известны всем специалистам в данной области и описание условий согласования является одной из задач проводимых ими исследований. Обширную библиографию на эту тему можно найти, например, в монографиях [5, 7, 15, 16]. В частности, случай, когда оператор при производной имеет конечный индекс, исследовался, например, в работах [9–11], в условиях спектральной ограниченности такие задачи изучались в работах [8, 12]. Существенным отличием данной работы от упомянутых выше является отсутствие условий на операторный пучок уравнения в виде существования полных жордановых наборов или специальной конфигурации спектра пучка, что обусловлено структурой уравнения (1). Все исследования проводятся в пространствах распределений, при этом теоремы о разрешимости задачи Коши (1)—(2) в классе функций конечной гладкости получаются как следствия из более общих утверждений.

Известно, что однозначное восстановление обобщенного решения задачи Коши (1)—(2) в классе распределений с ограниченным слева носителем возможно при помощи фундаментальной оператор-функции [15] $\mathcal{E}(t)$, соответствующей уравнению (1), по формуле

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \Big(f(t)\theta(t) + Cu_{N-1}\delta(t) + Cu_{N-2}\delta'(t) + \ldots + Cu_1\delta^{(N-2)}(t) + Cu_0\delta^{(N-1)}(t) \Big), \tag{3}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $\delta(t)$ и $\delta^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, — соответственно, дельта-функция Дирака и ее производные,

$$C = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \alpha_i \rangle a_i.$$

Таким образом, восстановление фундаментальной оператор-функции является главной целью исследования. Отметим, что ранее в своих работах [4, 6] авторы уже обращались к исследованию на разрешимость задачи Коши (1)—(2) в пространствах распределений. Однако все исследования проводились в специальном классе обобщенных функций, представимых в виде суммы регулярной составляющей с носителем на положительной полуоси и сингулярной с точечным носителем. Решение при этом фактически восстанавливалось покомпонентно и вопрос о единственности построенного таким способом решения оставался открытым. В данной работе этот вопрос решен для случаев, когда оператор A имеет конечный индекс или непрерывно обратим.

2. Основные определения и обозначения. Пусть E — банахово пространство, E^* — сопряженное банахово пространство к E.

Определение 1. Множеством основных функций $K(E^*)$ будем называть совокупность всех финитных функций $s(t)$) класса C^∞ со значениями в E^*.

Сходимость в $K(E^*)$ вводится естественным образом:

Определение 2. Последовательность функций $s_k(t) \in K(E^*)$ сходится к нулю при $k \to \infty$ в $K(E^*)$, если, во-первых, существует такое $R > 0$, что $\operatorname{supp} s_k(t) \subset [-R; R]$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и, во-вторых, для всех $n \in \mathbb{N}$ функциональная последовательность $\|s_k^{(n)}(t)\|$ сходится равномерно к нулю на $[-R; R]$ при $k \to \infty$.

Определение 3. Обобщенной функцией (распределением) бесконечного порядка будем называть всякий линейный непрерывный функционал, заданный на пространстве $K(E^*)$.

Множество всех обобщенных функций, определенных на пространстве $K(E^*)$, будем обозначать $K'(E)$. Сходимость в $K'(E)$ определяется как слабая:

Определение 4. Последовательность $f_k \in K'(E)$ сходится к $f \in K'(E)$, если

$$(f_k, s(t)) \to (f, s(t)) \quad \text{при } k \to \infty \text{ для всех } s(t) \in K(E^*).$$

Множество $K'(E)$ с введенной в нем сходимостью называют пространством обобщенных функций. Далее через $K'_+(E)$ будем обозначать класс обобщенных функций с ограниченным слева носителем. Также будем использовать ставшие уже традиционными (см. [2, 3]) следующие обозначения: $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — пространство обобщенных функций Соболева—Шварца, заданных на основном пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ финитных бесконечно дифференцируемых (числовых) функций одной переменной.

Легко заметить, что если $c(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ и $a \in E$, то их произведение $ac(t) \in K'(E)$, причем

$$(ac(t), s(t)) = (c(t), \langle a, s(t)\rangle) \quad \forall s(t) \in K(E^*).$$

Пусть $\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ — сильно непрерывная оператор-функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $f(t) \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^1)$.

Определение 5 (см. [15])**.** Сверткой обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(t)f(t)$ и обобщенной функции $v(t) \in K'_+(E_1)$ будем называть обобщенную функцию $\mathcal{K}(t)f(t) * v(t) \in K'_+(E_2)$, действующую на основные функции $s(t) \in K(E_2)$ по правилу

$$(\mathcal{K}(t)f(t) * v(t), s(t)) = (f(t), (v(y), \mathcal{K}^*(t)s(t+y)));$$

здесь $\mathcal{K}^*(t) \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ и существует при почти всех $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\alpha \in E^*$ некоторый функционал.

Определение 6. Действием функционала α на обобщенную функцию $v(t) \in K'(E)$ будем называть обобщенную функцию, обозначаемую

$$\langle \cdot, \alpha\rangle \delta(t) * v(t) = \langle v(t), \alpha\rangle \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

и действующую на основные функции $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ по правилу

$$(\langle \cdot, \alpha\rangle \delta(t) * v(t), \varphi(t)) = (\langle v(t), \alpha\rangle, \varphi(t)) = (v(t), \alpha\varphi(t)).$$

Корректность этого определения следует из очевидной линейности этого функционала, а также из его непрерывности, вытекающей из следующих соображений: если $\varphi_n(t) \to 0$ в смысле пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ при $n \to \infty$ (см. [2, 3]), то $s_n(t) = \alpha\varphi_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ в пространстве $K(E^*)$, а значит, $(v(t), \alpha\varphi(t)) \to 0$.

В этих обозначениях, если $v(t) = ac(t)$, где $a \in E$, $c(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, то для всех $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ имеем

$$(\langle \cdot, \alpha\rangle \delta(t) * ac(t), \varphi(t)) = (ac(t), \alpha\varphi(t)) = (c(t), \langle a, \alpha\varphi(t)\rangle) = (c(t), \varphi(t))\langle a, \alpha\rangle = (\langle a, \alpha\rangle c(t), \varphi(t)).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\langle ac(t), \alpha\rangle = \langle a, \alpha\rangle c(t).$$

Пусть $\Lambda \equiv \langle \cdot, \alpha\rangle a$ — оператор, действующий из E_1 в E_2, где $\alpha \in E_1^*$, $a \in E_2$ и $f(t) \in K'(E_1)$; тогда под действием оператора Λ на функцию $f(t) \in K'(E_1)$ будем понимать свертку вида $\Lambda\delta(t) * f(t)\colon K'(E_1) \to K'(E_2)$, которую можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}(\Lambda\delta(t) * f(t), s(t)) = (\delta(y), (f(t), \Lambda^* s(t+y))) = (f(t), \Lambda^* s(t)) = (f(t), \langle a, s(t)\rangle \alpha) = \\ = (\langle f(t), \alpha\rangle, \langle a, s(t)\rangle) = (a\langle f(t), \alpha\rangle, s(t)) \quad \forall s(t) \in K(E_2),\end{aligned}$$

т.е. $\Lambda\delta(t) * f(t) = a\langle f(t), \alpha\rangle$; напомним, что в этих равенствах $\langle f(t), \alpha\rangle \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ и $\langle a, s(t)\rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$.

3. Теоремы о фундаментальных оператор-функциях. Напомним следующее основное определение.

Определение 7 (см. [15])**.** Фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора $L_N(\delta(t))$ в классе $K'_+(E_2)$ называют обобщенную оператор-функцию $\mathcal{E}_N(t)$, удовлетворяющую следующим равенствам:

$$L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * u(t) = u(t) \quad \forall u(t) \in K'_+(E_2)$$
$$\mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) * v(t) = v(t) \quad \forall v(t) \in K'_+(E_1).$$

Первое из этих равенств означает, что функция $\mathcal{E}_N(t) * g(t)$, $g(t) \in K'(E_2)$, является решением сверточного уравнения $L_N(\delta(t)) * z(t) = g(t)$ в классе $K'(E_1)$. Второе равенство означает единственность такого решения в $K'(E_1)$, т.е., если $h(t) \in K'(E_1)$ — решение уравнения $L_N(\delta(t)) * z(t) = g(t)$, то $h(t) = \mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) * h(t) = \mathcal{E}_N(t) * g(t)$.

3.1. Случай нетеровости оператора A. Пусть в уравнении (1) оператор A нетеров (см. [1]), т.е. $\dim N(A) = m$, $\dim N(A^*) = r$, $m \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $m \neq r$. Следуя [1], введем обозначения: $\{\varphi_j\}$ — базис ядра оператора A, $\varphi_j \in E_1$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $\{\psi_k\}$ — базис ядра сопряженного оператора A^*, $\psi_k \in E_2^*$, $k = 1, 2, \ldots, r$; $\{\gamma_j\}$ — система элементов, биортогональная системе $\{\varphi_j\}$, $\gamma_j \in E_1^*$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $\{z_k\}$ — биортогональная система элементов для $\{\psi_k\}$, $z_k \in E_2$, $k = 1, 2, \ldots, r$; фиксированным наборам элементов $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_k\}$, $\{\gamma_j\}$, $\{z_k\}$ соответствует единственный псевдообратный оператор A^+ (см. [14]), для которого выполнены операторные равенства

$$AA^+ = I - \sum_{k=1}^{r} \langle \cdot, \psi_k \rangle z_k, \quad A^+A = I - \sum_{j=1}^{m} \langle \cdot, \gamma_j \rangle \varphi_j,$$
$$A^+AA^+ = A^+, \quad AA^+A = A;$$

здесь I — единичный (тождественный) оператор; I_n, I_m, I_r — соответственно n-, m- и r-мерные единичные матрицы; $\langle \cdot, \bar{\alpha} \rangle$ — n-мерный вектор-столбец действий функционалов α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, из уравнения (1); $\langle \cdot, \bar{\gamma} \rangle$ — m-мерный вектор-столбец действий функционалов γ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$; $\langle \cdot, \bar{\psi} \rangle$ — r-мерный вектор-столбец действий функционалов ψ_k, $k = 1, 2, \ldots, r$; $\bar{a}$ — n-мерный вектор-столбец элементов a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ из уравнения (1); $\bar{\varphi}$ — m-мерный вектор-столбец элементов φ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$; $\bar{z}$ — r-мерный вектор-столбец элементов z_k, $k = 1, 2, \ldots, r$; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов; в этих обозначениях оператор C из уравнения (1) и операторные соотношения для псевдообратного оператора A^+ принимают вид:

$$C = (\langle \cdot, \bar{\alpha} \rangle, \bar{a}), \quad AA^+ = I - (\langle \cdot, \bar{\psi} \rangle, \bar{z}), \quad A^+A = I - (\langle \cdot, \bar{\gamma} \rangle, \bar{\varphi});$$

$R = \big\| \langle A^+ a_i, \alpha_j \rangle \big\|$, $j = 1, 2, \ldots, n,$ — квадратная матрица размерности n, (здесь и далее везде первый индекс обозначает номер столбца, а второй индекс — номер строки); $H = \big\| \langle a_j, \psi_k \rangle \big\|$ — прямоугольная матрица размерности $r \times n$; $\Phi = \big\| \langle \varphi_i, \alpha_j \rangle \big\|$ — прямоугольная матрица размерности $n \times m$;

$$L = \begin{pmatrix} R & R\Phi \\ H & H\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ H \end{pmatrix} (I_n \Phi), \quad T = \begin{pmatrix} I_n & O_{n\times m} \\ O_{r\times n} & O_{r\times m} \end{pmatrix}$$

— прямоугольные блочные матрицы размерности $(n + r) \times (n + m)$ (здесь и далее O — нулевые матрицы соответствующей размерности).

Введем следующий дифференциальный оператор N-го порядка с производными от функционалов, соответствующий уравнению (1):

$$L_N(\delta(t)) = \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \alpha_i \rangle a_i \right) \delta^{(N)}(t) - A\delta(t).$$

В соответствии с принятыми обозначениями оператор $L_N(\delta(t))$ представим в виде

$$L_N(\delta(t)) = C\delta^{(N)}(t) - A\delta(t).$$

Теорема 1. *Пусть оператор A нетеров,* $\dim N(A) = m$, $\dim N(A^*) = r$, $m \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $m \neq r$, $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ *— фундаментальная оператор-функция для матричного дифференциального оператора* $(L\delta^{(N)}(t) - T\delta(t))$. *Тогда дифференциальный оператор* $L_N(\delta(t))$ *имеет в классе* $K'_+(E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = -A^+\delta(t) + \Big\{ \Big((I_n\Phi)\delta^{(N)}(t)*, A^+\bar{a} \Big) + \Big((O_{m\times n} I_m)\delta(t)*,\ \bar{\varphi} \Big) \Big\} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \end{matrix} \right\| \delta(t). \quad (4)$$

Доказательство. Проверим, что $\mathcal{E}_N(t)$ удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции, т.е. проверим справедливость двух равенств

$$L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I\delta(t), \quad \mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) = I\delta(t).$$

Учитывая, что в принятых обозначениях справедливы равенства

$$AA^+\bar{a} = (I - \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \bar{z})\bar{a} = \big\| a_i - \langle a_i, \bar{\psi}\rangle \bar{z} \big\| = \bar{a} - H^T\bar{z},$$

$$CA^+\bar{a} = \big\| (\langle A^+a_i, \bar{\alpha}\rangle, \bar{a}) \big\| = R^T\bar{a}, \quad C\bar{\varphi} = \big\| (\langle \varphi_i, \bar{\alpha}\rangle, \bar{a}) \big\| = \Phi^T\bar{a},$$

$$\langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \bar{z}\delta(t) = (I\delta(t)*, \bar{z}) * \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle\delta(t), \quad CA^+\delta^{(N)}(t) = (I\delta^{(N)}(t)*, \bar{a}) * \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle\delta(t),$$

имеем

$$\begin{aligned} L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) &= I\delta(t) - (I\delta(t)*, \bar{z}) * \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle\delta(t) - \Big(I\delta^{(N)}(t)*, \bar{a} \Big) * \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle\delta(t) + \\ &+ \Big[- \Big((I_n\Phi)\delta^{(N)}(t)*, \bar{a} \Big) + \Big((HH\Phi)\delta^{(N)}(t)*, \bar{z} \Big) + \Big((RR\Phi)\delta^{(2N)}(t)*, \bar{a} \Big) + \\ &+ \Big((O_n\Phi)\delta^{(N)}(t)*, \bar{a} \Big) \Big] * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \end{matrix} \right\| \delta(t) = \\ &= I\delta(t) + \left((HH\Phi)\delta^{(N)}(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \end{matrix} \right\| \delta(t) - \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle\delta(t), \bar{z} \right) + \\ &+ \left(\Big[(RR\Phi)\delta^{2(N)}(t) - (I_n O_{n\times m})\delta^{(N)}(t) \Big] * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \end{matrix} \right\| \delta(t) - I\delta^{(N)}(t) * \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle\delta(t), \bar{a} \right) = \\ &= I\delta(t). \end{aligned}$$

Действительно, оператор-функция $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ является фундаментальной для для матричного дифференциального оператора $(L\delta^{(N)}(t) - T\delta(t))$, т.е. справедливо равенство

$$\left(\begin{pmatrix} R & R\Phi \\ H & H\Phi \end{pmatrix} \delta^{(N)}(t) - \begin{pmatrix} I_n & O_{n\times m} \\ O_{r\times n} & O_{r\times m} \end{pmatrix} \delta(t) \right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) = I\delta(t).$$

Продифференцировав N раз первые n уравнений этой системы, получим

$$\left(\begin{pmatrix} R & R\Phi \\ O_{r\times n} & O_{r\times m} \end{pmatrix} \delta^{(2N)}(t) + \begin{pmatrix} -I_n & O_{n\times m} \\ H & H\Phi \end{pmatrix} \delta^{(N)}(t) \right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \begin{pmatrix} I_n\delta^{(N)}(t) \\ I_r\delta(t) \end{pmatrix}.$$

Построчная запись результата действия этого равенства на обобщенную вектор-функцию

$$\left\| \begin{matrix} \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \end{matrix} \right\| \delta(t)$$

имеет вид

$$\begin{cases} \Big[(RR\Phi)\delta^{(2N)}(t) - (I_n O_{n\times m})\delta^{(N)}(t) \Big] * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \end{matrix} \right\| \delta(t) = I\delta^{(N)}(t) * \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle\delta(t), \\ (HH\Phi)\delta^{(N)}(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \end{matrix} \right\| \delta(t) = \langle \cdot, \psi\rangle\delta(t), \end{cases}$$

что и завершает доказательство первого равенства из определения фундаментальной оператор-функции.

С другой стороны, поскольку справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{m}\langle\cdot,\gamma_j\rangle\varphi_j\delta(t)=(\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\delta(t),\bar\varphi),\quad \left\langle I-\sum_{j=1}^{m}\langle\cdot,\gamma_j\rangle\varphi_j,\bar\alpha\right\rangle=\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle,$$

$$A^{+}C\delta^{(N)}(t)=(\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta^{(N)}(t),A^{+}\bar a),\quad \left\langle A^{+}C\cdot,\bar\alpha\right\rangle=R\langle\cdot,\bar\alpha\rangle,\quad \left\langle C\cdot,\bar\psi\right\rangle=H\langle\cdot,\bar\alpha\rangle,$$

то

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_N(t)*L_N(\delta(t))=\mathcal{E}_N(t)*\Big(C\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)\Big)=\\ =I\delta(t)-\Big(\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\delta(t),\bar\varphi\Big)-\Big(\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta^{(N)}(t),A^{+}\bar a\Big)-\\ -\Big\{\Big((I_n\Phi)\delta^{(N)}(t)*,A^{+}\bar a\Big)+\Big((O_{m\times n}I_m)\delta(t)*,\bar\varphi\Big)\Big\}*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \bar 0_r\end{matrix}\right\|\delta(t)+\\ +\Big\{\Big((I_n\Phi)\delta^{(2N)}(t)*,A^{+}\bar a\Big)+\Big((O_{m\times n}I_m)\delta^{(N)}(t)*,\bar\varphi\Big)\Big\}*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\begin{pmatrix}R\\ H\end{pmatrix}\delta(t)*\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t)=I\delta(t)+\\ +\left((O_{m\times n}I_m)\delta(t)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left[\begin{pmatrix}R\\ H\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)*\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t)-\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \bar 0_r\end{matrix}\right\|\delta(t)\right]-\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\delta(t),\bar\varphi\right)+\\ +\left((I_n\Phi)\delta(t)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left[\begin{pmatrix}R\\ H\end{pmatrix}\delta^{(2N)}(t)*\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t)-\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \bar 0_r\end{matrix}\right\|\delta^{(N)}(t)\right]-\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta^{(N)}(t),A^{+}\bar a\right).\end{gathered}$$

Покажем, что здесь два последних слагаемых обращаются в ноль. Действительно, поскольку оператор-функция $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ является фундаментальной для матричного дифференциального оператора $(L\delta^{(N)}(t)-T\delta(t))$, то

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left(\begin{pmatrix}R & R\Phi\\ H & H\Phi\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)-\begin{pmatrix}I_n & O_{n\times m}\\ O_{r\times n} & O_{r\times m}\end{pmatrix}\delta(t)\right)=I\delta(t)$$

или

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left(\begin{pmatrix}R\\ H\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)*(I_n\Phi)\delta(t)-\begin{pmatrix}I_n & O_{n\times m}\\ O_{r\times n} & O_{r\times m}\end{pmatrix}\delta(t)\right)=I\delta(t).$$

К результату действия этого равенства на обобщенную вектор-функцию

$$\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \langle\cdot,\bar\gamma\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t)$$

применим проектор $(O_{m\times n}I_m)\delta(t)*$, откуда и получаем обращение в ноль одного из слагаемых

$$(O_{m\times n}I_m)\delta(t)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left[\begin{pmatrix}R\\ H\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)*\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t)-\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \bar 0_r\end{matrix}\right\|\delta(t)\right]-\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\delta(t)=0.$$

Аналогично, подействовав равенством

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left(\begin{pmatrix}R\\ H\end{pmatrix}\delta^{(2N)}(t)*(I_n\Phi)\delta(t)-\begin{pmatrix}I_n & O_{n\times m}\\ O_{r\times n} & O_{r\times m}\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)\right)=I\delta^{(N)}(t)$$

на ту же обобщенную вектор-функцию

$$\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \langle\cdot,\bar\gamma\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t)$$

и применив отображение $(I_n\Phi)\delta(t)$, получаем обращение в ноль другого слагаемого

$$(I_n\Phi)\delta(t)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left[\begin{pmatrix}R\\ H\end{pmatrix}\delta^{(2N)}(t)*\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t)-\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar\alpha\rangle-\Phi\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\\ \bar 0_r\end{matrix}\right\|\delta^{(N)}(t)\right]-\langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta^{(N)}(t)=0.$$

Теорема 1 доказана. □

Замечание 1. Представление (4) для фундаментальной оператор-функции можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$\mathcal{E}_N(t) = -A^+\delta(t) + \left(\begin{pmatrix} I_n & O_{n\times m} \\ O_n & \Phi \end{pmatrix} \delta^{(N)}(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \end{matrix} \right\| \delta(t), \left\| \begin{matrix} A^+\bar{a} \\ A^+\bar{a} \end{matrix} \right\| \right) + \\ + \left((O_{m\times n} I_m)\delta(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle A^+\cdot, \bar{\alpha}\rangle \\ \langle \cdot, \bar{\psi}\rangle \end{matrix} \right\| \delta(t), \bar{\varphi} \right).$$

Замечание 2. Познакомиться с методикой построения фундаментальной оператор-функции $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ для матричного дифференциального оператора $(L\delta^{(N)}(t) - T\delta(t))$ можно в [11, 15].

3.2. Случай фредгольмовости оператора A. Если в уравнении (1) оператор A фредгольмов [1], т.е. $\dim N(A) = \dim N(A^*) = m \geqslant 1$, как и в предыдущем пункте, следуя [1], введем обозначения: $\{\varphi_k\}$ — базис ядра оператора A, $\varphi_k \in E_1$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $\{\psi_k\}$ — базис ядра сопряженного оператора A^*, $\psi_k \in E_2^*$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $\{\gamma_k\}$ — система элементов, биортогональная системе $\{\varphi_k\}$, $\gamma_k \in E_1^*$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $\{z_k\}$ — биортогональная система элементов для $\{\psi_k\}$, $z_k \in E_2$, $k = 1, 2, \ldots, m$; фиксированным наборам элементов $\{\varphi_k\}$, $\{\phi_k\}$, $\{\gamma_k\}$, $\{z_k\}$ соответствует единственный ограниченный обратный оператор вида

$$\Gamma = \left(A + \sum_{k=1}^{m} \langle \cdot, \gamma_k \rangle z_k \right)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1),$$

называемый оператором Треногина—Шмидта, для которого выполнены операторные равенства

$$A\Gamma = I - \sum_{k=1}^{m} \langle \cdot, \psi_k \rangle z_k, \quad \Gamma A = I - \sum_{k=1}^{m} \langle \cdot, \gamma_k \rangle \varphi_k$$

(см. [1]); I — единичный (тождественный) оператор; I_n и I_m — соответственно n- и m-мерные единичные матрицы; $\langle \cdot, \bar{\gamma} \rangle$ — m-мерный вектор-столбец действий функционалов γ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$; $\langle \cdot, \bar{\alpha} \rangle$ — n-мерный вектор-столбец действий функционалов α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ из уравнения (1); $\bar{z}$ — m-мерный вектор-столбец элементов z_k, $k = 1, 2, \ldots, m$; $\bar{a}$ — n-мерный вектор-столбец элементов a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ из уравнения (1); $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов. В этих обозначениях оператор C из уравнения (1) и операторные соотношения для оператора Треногина—Шмидта принимают вид

$$C = (\langle \cdot, \bar{\alpha} \rangle, \bar{a}), \quad A\Gamma = I - (\langle \cdot, \bar{\psi} \rangle, \bar{z}), \quad \Gamma A = I - (\langle \cdot, \bar{\gamma} \rangle, \bar{\varphi});$$

$D = \big\| \langle \Gamma a_i, \alpha_j \rangle \big\|$ — квадратная матрица размерности $n \times n$; $M = \big\| \langle a_i, \psi_k \rangle \big\|$ — матрица размерности $m \times n$; $K = \big\| \langle \varphi_k, \alpha_j \rangle \big|$ — матрица размерности $n \times m$;

$$E = \begin{pmatrix} D & O \\ M & O_m \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I_n & -K \\ O & O_m \end{pmatrix}, \quad \operatorname{diag}\left(I_n \delta^{(N)}(t), I_m \delta(t) \right) = \begin{pmatrix} I_n \delta^{(N)}(t) & O \\ O & I_m \delta(t) \end{pmatrix}$$

— квадратные блочные матрицы размерности $(n + m) \times (n + m)$ (здесь, как и выше, O — нулевая матрица соответствующей размерности).

Теорема 2. *Пусть оператор A фредгольмов, $\dim N(A) = \dim N(A^*) = m \geqslant 1$, $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ — фундаментальная оператор-функция для матричного дифференциального оператора $(E\delta^{(N)}(t) - F\delta(t))$. Тогда дифференциальный оператор $L_N(\delta(t))$ имеет в классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma\delta(t) * \left\{ \left(\operatorname{diag}\left(I_n \delta^{(N)}(t), I_m \delta(t) \right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle \cdot, \bar{\alpha} \rangle \\ \langle \cdot, \bar{\gamma} \rangle \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{z} \end{matrix} \right\| \right) * \Gamma\delta(t) - I\delta(t) \right\} = \\ = \left\{ \Gamma\delta(t) * \left(\operatorname{diag}\left(I_n \delta^{(N)}(t), I_m \delta(t) \right) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\| \begin{matrix} \langle \cdot, \bar{\alpha} \rangle \\ \langle \cdot, \bar{\gamma} \rangle \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{z} \end{matrix} \right\| \right) - I\delta(t) \right\} * \Gamma\delta(t). \quad (5)$$

Доказательство. Теорема будет доказана, если убедиться, что $\mathcal{E}_N(t)$ удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции, т.е. необходимо проверить справедливость двух равенств

$$L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I\delta(t), \quad \mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) = I\delta(t).$$

Действительно,

$$
\begin{gathered}
L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = \Big(C\Gamma\delta^{(N)}(t) - I\delta(t) + \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\bar{z}\delta(t)\Big) * \\
* \left\{\left(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right) * \Gamma\delta(t) - I\delta(t)\right\} = \\
= I\delta(t) - \Big(C\delta^{(N)}(t) + \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{z}\delta(t)\Big) * \Gamma\delta(t) - \\
- \Big(I\delta(t) - \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\bar{z}\delta(t)\Big) * \left(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right) * \Gamma\delta(t) + \\
+ C\Gamma\delta^{(N)}(t) * \left(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right) * \Gamma\delta(t).
\end{gathered}
$$

Поскольку справедливы равенства

$$
\begin{gathered}
C\delta^{(N)}(t) + \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{z}\delta(t) = (\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle, \bar{a})\delta^{(N)}(t) + \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{z}\delta(t) = \\
= \left(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right), \\
(I\delta(t) - \langle\cdot,\bar{\psi}\rangle\bar{z}\delta(t)) * \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\bar{a} - M^T\bar{z}\\ \bar{0}_m\end{matrix}\right\| = \begin{pmatrix} I_n & -M^T\\ O & O_m\end{pmatrix}\left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|, \\
C\Gamma\delta(t) * \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}D^T\bar{a}\\ -K^T\bar{a}\end{matrix}\right\| = \begin{pmatrix} D^T & O\\ -K^T & O_m\end{pmatrix}\left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|,
\end{gathered}
$$

то

$$
\begin{gathered}
L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I\delta(t) + \left[-\left(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * I\delta(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right) - \right.\\
- \left(\begin{pmatrix} I_n & O\\ -M & O_m\end{pmatrix}\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right) + \\
\left. + \left(\begin{pmatrix} D & -K\\ O & O_m\end{pmatrix}\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(2N)}(t), I_m\delta^{(N)}(t)\Big) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right)\right] * \Gamma\delta(t).
\end{gathered}
$$

Отсюда получаем

$$
\begin{gathered}
L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I\delta(t) + \Big(\operatorname{diag}\Big(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\Big) * \\
* \left\{-I\delta(t) - \begin{pmatrix} I_n\delta(t) & O\\ -M\delta^{(N)}(t) & O\end{pmatrix} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) + \begin{pmatrix} D\delta^{(N)}(t) & -K\delta(t)\\ O & O\end{pmatrix} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t)\right\} * \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\Big) * \Gamma\delta(t) = \\
= I\delta(t),
\end{gathered}
$$

так как в силу фундаментальности $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ для матричного дифференциального оператора $(E\delta^{(N)}(t) - F\delta(t))$ имеем

$$
\begin{gathered}
-I\delta(t) - \begin{pmatrix} I_n\delta(t) & O\\ -M\delta^{(N)}(t) & O\end{pmatrix} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) + \begin{pmatrix} D\delta^{(N)}(t) & -K\delta(t)\\ O & O\end{pmatrix} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \\
= \left\{\begin{pmatrix} D & O\\ M & O\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t) - \begin{pmatrix} I & K\\ O & O\end{pmatrix}\delta(t)\right\} * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) - I\delta(t) = \\
= \Big(E\delta^{(N)}(t) - F\delta(t)\Big)\tilde{\mathcal{E}}_N(t) - I\delta(t) \equiv 0.
\end{gathered}
$$

Таким образом, первое из двух равенств определения фундаментальной оператор-функции доказано.

Второе равенство из определения фундаментальной оператор-функции доказывается по аналогичной схеме. Действительно,

$$\mathcal{E}_N(t)*L_N(\delta(t)) = \left\{-I\delta(t)+\Gamma\delta(t)*\left(\operatorname{diag}\left(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\right)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right)\right\}*$$
$$*\left(\Gamma C\delta^{(N)}(t)-I\delta(t)+\langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{\varphi}\delta(t)\right) = I\delta(t)-\Gamma\delta(t)*\left(C\delta^{(N)}(t)+\langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{z}\delta(t)\right)+$$
$$+\Gamma\delta(t)*\left(\operatorname{diag}\left(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\right)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right)*\Gamma C\delta^{(N)}(t)-$$
$$-\Gamma\delta(t)*\left(\operatorname{diag}\left(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\right)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right)*\left(I\delta(t)-\langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{\varphi}\delta(t)\right).$$

Далее путем тождественных преобразований убеждаемся в справедливости следующих двух равенств:

$$\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t)*\Gamma C\delta^{(N)}(t) = \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t)*\Gamma C\delta^{(N)}(t)\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\delta(t)*\Gamma C\delta^{(N)}(t)\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}D\delta^{(N)}(t)*\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ M\delta^{(N)}(t)*\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\end{matrix}\right\| =$$
$$= \begin{pmatrix}D & O\\ M & O_m\end{pmatrix}\delta^{(N)}(t)*\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\| = E\delta^{(N)}(t)*\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|\delta(t)*\left(I\delta(t)-\langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\bar{\varphi}\delta(t)\right) = \left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle - K\langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\\ \bar{0}_m\end{matrix}\right\| =$$
$$= \begin{pmatrix}I_n & -K\\ O & O_m\end{pmatrix}\delta(t)*\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\| = F\delta(t)*\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|.$$

Поэтому

$$\mathcal{E}_N(t)*L_N(\delta(t)) = I\delta(t)+\Gamma\delta(t)*$$
$$*\left(\operatorname{diag}\left(I_n\delta^{(N)}(t), I_m\delta(t)\right)*\left\{-I\delta(t)+\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*(E\delta^{(N)}(t)-F\delta(t))\right\}*\left\|\begin{matrix}\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\\ \langle\cdot,\bar{\gamma}\rangle\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}\bar{a}\\ \bar{z}\end{matrix}\right\|\right) = I\delta(t),$$

поскольку в силу фундаментальности

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\left(E\delta^{(N)}(t)-F\delta(t)\right)-I\delta(t)\equiv 0.$$

Следовательно, оператор-функция (5) удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции для оператора $L_N(\delta(t))$ и, значит, является для него таковой. Теорема 2 доказана. □

Замечание 3. Познакомиться с методикой построения фундаментальной оператор-функции $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ для матричного дифференциального оператора $(E\delta^{(N)}(t)-F\delta(t))$ можно в [13, 15].

3.3. Случай обратимости оператора A. В случае, когда оператор A непрерывно обратим, введем в рассмотрение оператор A^{-1}, обратный к оператору A, и квадратную матрицу $B = \left\|\langle A^{-1}a_i, \alpha_j\rangle\right\|$ размерности n.

Теорема 3. *Пусть оператор A обратим, $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ — фундаментальная оператор-функцией для матричного дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t)-I_n\delta(t))$. Тогда дифференциальный оператор $L_N(\delta(t))$ имеет в классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = A^{-1}\delta(t)*\left\{\left(\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\bar{a}\right)*A^{-1}\delta^{(N)}(t)-I\delta(t)\right\} =$$
$$= \left\{A^{-1}\delta^{(N)}(t)*\left(\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\langle\cdot,\bar{\alpha}\rangle\delta(t),\bar{a}\right)-I\delta(t)\right\}*A^{-1}\delta(t). \quad (6)$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущих теорем 1 и 2 проверим, что оператор-функция (6) удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции, т.е. убедимся в справедливости равенств

$$L_N(\delta(t))*\mathcal{E}_N(t) = I\delta(t), \quad \mathcal{E}_N(t)*L_N(\delta(t)) = I\delta(t).$$

Последовательно находим

$$L_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = \Big(C\delta^{(N)} - A\delta(t)\Big) * \mathcal{E}_N(t) =$$
$$= \Big(CA^{-1}\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)\Big) * \Big\{\Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t),\bar a\Big) * A^{-1}\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)\Big\} =$$
$$= I\delta(t) - CA^{-1}\delta^{(N)}(t) + \Big(CA^{-1}\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)\Big) * \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t),\bar a\Big) * A^{-1}\delta^{(N)}(t) =$$
$$= I\delta(t) + \Big\{-C\delta(t) + \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta^{(N)}(t), B^T\bar a\Big) - \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t),\bar a\Big)\Big\} * A^{-1}\delta^{(N)}(t) =$$
$$= I\delta(t) + \Big(\Big[(B\delta^{(N)}(t) - I_n\delta(t)) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) - I\delta(t)\Big] * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t),\bar a\Big) * A^{-1}\delta^{(N)}(t) = I\delta(t)$$

в силу фундаментальности оператор-функции $\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ для матричного дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t) - I_n\delta(t))$. Первое равенство из определения фундаментальной оператор-функции доказано.

С другой стороны,

$$\mathcal{E}_N(t) * L_N(\delta(t)) = \Big\{A^{-1}\delta^{(N)}(t) * \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t),\bar a\Big) - I\delta(t)\Big\} * \Big(A^{-1}C\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)\Big) =$$
$$= I\delta(t) - A^{-1}C\delta^{(N)}(t) + A^{-1}\delta^{(N)}(t) * \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t),\bar a\Big) * \Big(A^{-1}C\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)\Big) =$$
$$= I\delta(t) + I\delta^{(N)}(t) * \Big\{-A^{-1}C\delta(t) + \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * B\delta^{(N)}(t) * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t), A^{-1}\bar a\Big) - \Big(\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t), A^{-1}\bar a\Big)\Big\} =$$
$$= I\delta(t) + I\delta^{(N)}(t) * \Big(\Big[\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * (B\delta^{(N)}(t) - I_n\delta(t)) - I\delta(t)\Big] * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t), A^{-1}\bar a\Big) = I\delta(t).$$

Итак, оператор-функция вида (6) удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции дифференциального оператора $L_N(\delta(t))$. Теорема 3 доказана. □

Если в условиях теоремы 3 матрица B обратима, то

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = B^{-1}\mathcal{U}_N(B^{-1}t)\theta(t) = B^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}(B^{-1})^{i-1}\cdot\frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}\theta(t),$$
$$\tilde{\mathcal{E}}_N(0) = \tilde{\mathcal{E}}'_N(0) = \ldots = \tilde{\mathcal{E}}_N^{(N-2)}(0) = 0, \quad \tilde{\mathcal{E}}_N^{(N-1)}(0) = B^{-1}$$

и справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть оператор A обратим,* $\det B \neq 0$. *Тогда дифференциальный оператор $L_N(\delta(t)) = \big(C\delta^{(N)}(t) - A\delta(t)\big)$ имеет в классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = A^{-1}\delta(t) * \Big\{\Big(\Big[B^{-1}\delta(t) + (B^{-1})^2\mathcal{U}_N(B^{-1}t)\theta(t)\Big] * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t),\bar a\Big) * A^{-1}\delta(t) - I\delta(t)\Big\} =$$
$$= \Big\{A^{-1}\delta(t) * \Big(\Big[B^{-1}\delta(t) + (B^{-1})^2\mathcal{U}_N(B^{-1}t)\theta(t)\Big] * \langle\cdot,\bar\alpha\rangle\delta(t),\bar a\Big) - I\delta(t)\Big\} * A^{-1}\delta(t).$$

В условиях теоремы 4 по формуле (3) восстанавливается единственное решение класса $K'_+(E_1)$ задачи Коши (1)—(2), которое окажется регулярной обобщенной функцией вида

$$\tilde u(t) = -A^{-1}f(t)\theta(t) + \Big(B^{-1}\left\|\langle A^{-1}f(t),\bar\alpha\rangle\right\|, A^{-1}\bar a\Big)\theta(t) +$$
$$+ \Big((B^{-1})^2\mathcal{U}_N(B^{-1}t)\theta(t) * \left\|\langle A^{-1}f(t),\bar\alpha\rangle\right\|\theta(t), A^{-1}\bar a\Big) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{N-1}\Big(B^{-1}\mathcal{U}_N^{(N-i-1)}(B^{-1}t)\left\|\langle u_i,\bar\alpha\rangle\right\|, A^{-1}\bar a\Big)\theta(t).$$

Функция $\tilde u(t)$ обращает уравнение (1) в тождество. Условия, при которых эта функция удовлетворяет начальным условиям (2) и будут являться условиями разрешимости задачи Коши (1)—(2) в классе $C^N(t \geqslant 0, E_1)$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Если в условиях теоремы 4 функция $f(t) \in C^N(t \geqslant 0, E_2)$, то задача Коши (1)—(2) разрешима в классе $C^N(t \geqslant 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$\Big[I - \Big(\langle A^{-1}\cdot, B^{-1}\bar{\alpha}\rangle, \bar{a}\Big)\Big]\Big(Au_i + f^{(i)}(0)\Big) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Если в условиях теоремы 3 $\det B = 0$, то

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \tilde{\Gamma}\mathcal{U}_N(\tilde{\Gamma}t)\left[I - \sum_{i=1}^{\tilde{n}}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, \tilde{\phi}_i^{(j)}\rangle\tilde{\varphi}_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t) - \sum_{i=1}^{\tilde{n}}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot, \tilde{\phi}_i^{(j)}\rangle\tilde{\varphi}_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(Nk)}(t)\right];$$

здесь $\tilde{n} = \dim\ker B$, $\{\tilde{\varphi}_i^{(j)}\}$ и $\{\tilde{\phi}_i^{(j)}\}$, $i = 1, \ldots, \tilde{n}$, $j = 1, \ldots, p_i$ — полные I-жордановы наборы (см. [1]) матриц B и $B^* = B^t$, $\tilde{\Gamma}$ — матрица Треногина—Шмидта для B (см. [1]). В этом случае обобщенное решение (3) задачи Коши (1)—(2) содержит как сингулярную (с точечным носителем), так и регулярную составляющие. Условия, при которых сингулярная составляющая обращается в нуль, а регулярная составляющая (обращающая уравнение (1) в тождество) удовлетворяет начальным условиям (2) и будут являться условиями разрешимости задачи Коши (1)—(2) в классе $C^N(t \geqslant 0, E_1)$.

Теорема 6. *Если оператор A обратим, $\det B = 0$ и $f(t) \in C^{N(p+1)}(t \geqslant 0, E_2)$, то задача Коши (1)—(2) разрешима в классе $C^N(t \geqslant 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$\Big[I - \Big(\langle A^{-1}\cdot, \tilde{\Gamma}[I-Q]\bar{\alpha}\rangle, \bar{a}\Big)\Big]\Big(Au_l + f^{(l)}(0)\Big) + (\bar{G}^{(l)}(0), \bar{a}) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\big\langle \bar{x}_l + \bar{g}^{(l)}(0), \tilde{\phi}_i^{(j)}\big\rangle + \big\langle \bar{g}^{(N+l)}(0), \tilde{\phi}_i^{(j-1)}\big\rangle + \big\langle \bar{g}^{(2N+l)}(0), \tilde{\phi}_i^{(j-2)}\big\rangle + \ldots + \big\langle \bar{g}^{(N(j-1)+l}(0), \tilde{\phi}_i^{(1)}\big\rangle = 0,$$
$$i = 1, \ldots, \tilde{n}, \quad j = 1, \ldots, p_i, \quad l = 0, 1, \ldots, N-1;$$

здесь $p = \max p_i$, $\bar{g}(t) = \|\langle A^{-1}f(t), \bar{\alpha}\rangle\|$, $\bar{x}_l = \|\langle u_l, \bar{\alpha}\rangle\|$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$,

$$Q = \sum_{i=1}^{\tilde{n}}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, \tilde{\phi}_i^{(j)}\rangle\tilde{\varphi}_i^{(p_i+1-j)},$$

$$\bar{G}(t) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\big\langle\bar{g}^{(N(k+1))}(t), \tilde{\phi}_i^{(j)}\big\rangle\tilde{\varphi}_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\right].$$

Замечание 4. Результаты, аналогичные этим, можно получить на основании теорем 1 и 2 для случая, когда оператор A нетеров и фредгольмов, соответственно.

4. Пример. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\Omega} u_t^{(N)}(t, \bar{x})\alpha_i(\bar{x})d\bar{x}\right)a_i(\bar{x}) - (\lambda - \Delta)u(t, \bar{x}) = f(t, \bar{x}), \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{t=0} = u_i(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega; \quad u|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

где $u_i(\bar{x})$, $f(t, \bar{x})$ — заданные функции, $u = u(t, \bar{x})$ — искомая функция, $\bar{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, $u = u(t, \bar{x})$ определена на цилиндре $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Для задач Коши—Дирихле (7)—(8) банаховы пространства и оператор A зададим следующим образом:

$$E_1 \equiv \Big\{v(\bar{x}) \in W_2^2(\Omega): \ v\big|_{\partial\Omega} = 0\Big\}, \quad E_2 \equiv W_2(\Omega), \quad A = \lambda - \Delta,$$

где $W_2^2(\Omega)$ и $W_2(\Omega)$ — пространства Соболева.

Если $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, то оператор A непрерывно обратим, т.е. существует $A^{-1} = (\lambda - \Delta)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$, построим матрицу

$$B = \left\| \int\limits_\Omega (\lambda - \Delta)^{-1} a_i(\bar{x}) \cdot \alpha_j(\bar{x}) d\bar{x} \right\|.$$

Если эта матрица невырождена, то в соответствии с теоремой 4 получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Если $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ и $\det B \neq 0$, то задача Коши—Дирихле (7)—(8) однозначно разрешима в классе функций $C^N(t \geqslant 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда начальные условия (8) и функция $f(t, \bar{x})$ удовлетворяют соотношениям*

$$(\lambda - \Delta) u_j(\bar{x}) + \frac{\partial^j f(0, \bar{x})}{\partial t^j} - \sum_{i=1}^n \left(\int\limits_\Omega \left(u_j(\bar{x}) + (\lambda - \Delta)^{-1} \frac{\partial^j f(0, \bar{x})}{\partial t^j} \right) \cdot b_i(\bar{x}) d\bar{x} \right) a_i(\bar{x}) \equiv 0,$$
$$j = 0, 1, \ldots, N-1;$$

здесь $\bar{b} = \|b_i(\bar{x})\| = B^{-1} \|\alpha_i(\bar{x})\| = B^{-1} \bar{\alpha}$.

Замечание 5. В соответствии с теоремой 5 можно получить аналогичные утверждения и для случая $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, $\det B = 0$.

5. Заключение. Представленные результаты допускают обобщение на интегро-дифференциальные уравнения с производными от функционалов вида

$$\sum_{i=1}^n \langle u^{(N)}(t), \alpha_i \rangle a_i - Au(t) - \int\limits_0^t k(t-s) u(s) ds = f(t). \tag{9}$$

А именно, интегро-дифференциальный оператор, соответствующий уравнению (9), имеет вид

$$L_N(\delta(t)) = C\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t),$$

а его фундаментальная оператор-функция представима в виде следующего ряда

$$\mathcal{E}_N(t) = \bar{\mathcal{E}}_N(t) * \sum_{k=1}^\infty \Big(k(t)\theta(t) * \bar{\mathcal{E}}_N(t) \Big)^k = \sum_{k=1}^\infty \Big(\bar{\mathcal{E}}_N(t) * k(t)\theta(t) \Big)^k * \bar{\mathcal{E}}_N(t);$$

здесь $\bar{\mathcal{E}}_N(t)$ — фундаментальная оператор-функция для дифференциального оператора

$$C\delta^{(N)}(t) - A\delta(t)$$

(см. теоремы 1, 2, 3), а под степенью k обобщенной функции понимается её k-кратная свертка с собой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
4. *Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013.
5. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
6. *Романова О. А., Фалалеев М. В.* О непрерывных. обобщенных, периодических и конвергентных решениях одного класса диффекренциальных уравнений с производными от функционалов// Деп. ВИНИТИ 19.04.89, № 2565-В89. — Иркутск: Изд-во ИГУ. — 1989.
7. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О. и др.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007.
8. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов// Усп. мат. наук. — 1994. — *49*, № 4. — С. 47–74.

9. *Сидоров Н. А., Романова О. А.* О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением// Диффер. уравн. — 1983. — *19*, № 9. — С. 1516–1526.
10. *Сидоров Н. А., Фалалеев М. В.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной// Диффер. уравн. — 1987. — *23*, № 4. — С. 726–728.
11. *Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах// Сиб. мат. ж. — 2005. — *46*, № 6. — С. 1393–1406.
12. *Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности// Диффер. уравн. — 2006. — *42*, № 6. — С. 769–774.
13. *Фалалеев М. В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах// Сиб. мат. ж. — 2000. — *41*, № 5. — С. 1167-1182.
14. *Nashed M. Z.* Generalized Inverses and Applications. — New York: Academic Press, 1976.
15. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
16. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht: VSP, 2003.

Фалалеев Михаил Валентинович
Иркутский государственный университет
E-mail: mvfalaleev@gmail.com

Гражданцева Елена Юрьевна
Иркутский государственный университет
E-mail: grelyur@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 113–119
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-113-119

УДК 517.9

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА

© 2022 г. **О. Н. ЧЕРЕПАНОВА**

Аннотация. В работе исследуется однозначная разрешимость задачи определения функции источника гиперболического уравнения теплопроводности с малым параметром при старшей производной по времени.

Ключевые слова: задача идентификации коэффициентов, обратная задача, уравнение с частными производными, уравнение с малым параметром.

ON HYPERBOLIC APPROXIMATION OF THE PROBLEM OF DETERMINING A SOURCE FUNCTION

© 2022 **O. N. CHEREPANOVA**

Abstract. The paper considers the unique solvability of the problem of determining source function in a hyperbolic heat equation with a small parameter as a coefficient to the second time derivative.

Keywords and phrases: problem of coefficient identification, inverse problem, partial differential equation, equation with a small parameter.

AMS Subject Classification: 39A14

Довольно часто в повседневной жизни возникает необходимость определения причин возникновения исходных явлений на основании имеющихся конечных результатов. Обратные задачи для дифференциальных уравнений — это задачи, основанные на известных решениях заданных дифференциальных уравнений, имеющие цель определения коэффициентов дифференциальных уравнений, границ области, а также граничных и начальных условий. К обратным задачам относят задачи определения некоторых физических свойств объектов, например, плотности, коэффициента теплопроводности, упругих модулей в зависимости от координат или в виде функций других параметров.

Вопросы корректности краевых задач, их аппроксимации задачами, содержащими малые параметры, являются одной из важных областей в теории дифференциальных уравнений. Многие задачи механики сплошной среды описываются системами уравнений в частных производных, при изучении которых важную роль играют их аппроксимации, зависящие от малых параметров. Введение в исходное уравнение добавочных членов, содержащих малый параметр, позволяет улучшить дифференциальные свойства решений, сделать задачу более устойчивой к изменениям начальных данных, строить более экономичные численные методы. Первые публикации по обратным задачам, появившиеся в середине XX века, были связаны с различными разделами

Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2021-1388).

естествознания: физикой, геофизикой, астрономией и др. Первыми по теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной были работы А. Н. Тихонова [1, 2] и И. С. Градштейна [3, 4].

В работе исследуется однозначная разрешимость задачи определения функции источника гиперболического уравнения теплопроводности с малым параметром при старшей производной по времени. Рассмотрен двумерный случай по пространственным переменным с функцией источника специального вида, зависящей от всех переменных, входящих в уравнение. Исследуется вопрос о близости решения задачи с малым параметром и соответствующей предельной задачи.

В области $Q_T = \{(t,x,y) \mid t \in [0,T],\ 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0\}$ рассмотрим задачу нахождения функций $(u^\varepsilon(t,x,y),\, g^\varepsilon(t,y))$, удовлетворяющих уравнению

$$\varepsilon u_{tt}^\varepsilon + u_t^\varepsilon = u_{xx}^\varepsilon + u_{yy}^\varepsilon + f^\varepsilon(t,x) + g^\varepsilon(t,y), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \tag{1}$$

где функция $f(t,x)$ известна. Пусть для функции $u(t,x,y)$ выполняются следующие начальные условия:

$$u^\varepsilon(0,x,y) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$u^\varepsilon(0,x,y) = u_1(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{3}$$

где $\bar{\Omega} = \{x, y \mid 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0\}$, и граничные условия:

$$u_x^\varepsilon(t,0,y) = \mu_1(t,y), \quad (t,y) \in \Gamma_1, \tag{4}$$

$$u_x^\varepsilon(t,x_0,y) = \mu_2(t,y), \quad (t,y) \in \Gamma_2, \tag{5}$$

$$u^\varepsilon(t,x,0) = \vartheta_1(t,x), \quad (t,x) \in B_1, \tag{6}$$

$$u^\varepsilon(t,x,y_0) = \vartheta_2(t,x), \quad (t,x) \in B_2, \tag{7}$$

где

$$\Gamma_1 = \Big\{t, y \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0,\ x = 0\Big\}, \quad \Gamma_2 = \Big\{t, y \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0,\ x = x_0\Big\},$$

$$B_1 = \Big\{t, y \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ y = 0\Big\}, \quad B_2 = \Big\{t, y \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ y = y_0\Big\}.$$

Предполагаем также выполнение условия переопределения:

$$u^\varepsilon(t,\tilde{x},y) = \beta(t,y), \quad (t,y) \in [0,T] \times [0,y_0]. \tag{8}$$

Условия (2)—(8) считаем согласованными, т.е.

$$u_0(0,y) = \mu_1(0,y), \quad u_1(0,y) = \mu_1(0,y), \quad u_0(x_0,y) = \mu_2(x_0,y), \quad u_1(x_0,y) = \mu_2(x_0,y),$$

$$u_0(x,y_0) = \vartheta_1(0,x), \quad u_1(x,y_0) = \vartheta_1(0,x), \quad u_0(x,y_0) = \vartheta_2(x,y_0), \quad u_1(x_0,y) = \vartheta_2(0,x),$$

$$\mu_1(t,0) = \vartheta_1(t,0), \quad \mu_1(t,y_0) = \vartheta_2(t,0), \quad \mu_2(t,0) = \vartheta_2(t,x_0), \quad \mu_2(t,y_0) = \vartheta_1(t,0),$$

$$\beta(t,0) = \vartheta_1(t,\tilde{x}), \quad \beta(t,y_0) = \vartheta_2(t,\tilde{x}).$$

Для задачи (1)—(8) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть*

$$u_0, u_1 \in W_2^3(\Omega), \quad \mu_i \in W_2^3(\Gamma_i), \quad \vartheta_i \in W_2^3(B_i), \quad i = 1, 2, \quad \beta(t,y) \in C^2([0;T] \times [0;y_0]).$$

Тогда существует такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом фиксированном $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ существует единственное решение задачи (1)—(8)

$$\Big(u^\varepsilon(t,x,y), g^\varepsilon(t,y) \;\Big|\; u^\varepsilon \in W_2^2(Q_T), g(t,y) \in L_2(Q_T)\Big).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\|u^\varepsilon - u\|_{W_2^2(Q_T)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L_2(Q_T)} = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

где $(u(t,x,y), g(t,y))$ — решение соответствующей предельной задачи:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(t,x) + g(t,y), \tag{9}$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{10}$$
$$u_x(t,0,y) = \mu_1(t,y), \quad (t,y) \in \Gamma_1, \tag{11}$$
$$u_x(t,x_0,y) = \mu_2(t,y), \quad (t,y) \in \Gamma_2, \tag{12}$$
$$u(t,x,0) = \vartheta_1(t,x), \quad (t,x) \in B_1, \tag{13}$$
$$u(t,x,y_0) = \vartheta_2(t,x), \quad (t,x) \in B_2. \tag{14}$$

Доказательство теоремы 1. Положим

$$z^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x,y) - \varphi - \psi,$$

где

$$\varphi(t,x,y) = \vartheta_1 + \frac{y}{y_0}(\vartheta_1 - \vartheta_1), \quad \psi(t,x,y) = x\mu_1 + \frac{x^2}{2x_0}(\mu_2 - \mu_1).$$

Тогда задача (1)—(7) сводится к задаче с однородными граничными условиями:

$$\varepsilon z^\varepsilon_{tt} + z^\varepsilon_t = z^\varepsilon_{xx} + z^\varepsilon_{yy} + \tilde{f}^\varepsilon(t,x,y) + g^\varepsilon(t,y), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \tag{15}$$
$$z^\varepsilon(0,x,y) = z_0(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{16}$$
$$z^\varepsilon_t(0,x,y) = z_1(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{17}$$
$$z^\varepsilon_x(t,0,y) = z^\varepsilon_x(t,x_0,y) = 0, \quad (t,y) \in [0,T] \times [0,y_0], \tag{18}$$
$$z^\varepsilon(t,x,0) = z^\varepsilon(t,x_0,y_0) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times [0,x_0], \tag{19}$$

где функции $\tilde{f}^\varepsilon(t,x,y)$, z_0, z_1 известны и зависят от функций f, ϑ_1, ϑ_2, μ_1, μ_2.

Продифференцируем задачу (15)—(19) по переменной x и положим $z_x(t,x,y) = \omega(t,x,y)$. Тогда для функции $\omega(t,x,y)$ имеет место прямая задача:

$$\varepsilon \omega^\varepsilon_{tt} + \omega^\varepsilon_t = \omega^\varepsilon_{xx} + \omega^\varepsilon_{yy} + \bar{f}^\varepsilon(t,x,y), \tag{20}$$
$$\omega^\varepsilon(0,x,y) = \omega_0(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{21}$$
$$\omega^\varepsilon_t(0,x,y) = \omega_1(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{22}$$
$$\omega^\varepsilon(t,0,y) = \omega^\varepsilon(t,x_0,y) = 0, \quad (t,y) \in \Gamma_i, \quad i = 1,2, \tag{23}$$
$$\omega^\varepsilon(t,x,0) = \omega^\varepsilon(t,x_0,y_0) = 0, \quad (t,x) \in B_i, \quad i = 1,2, \tag{24}$$

где $\bar{f}^\varepsilon(t,x,y) = \tilde{f}^\varepsilon{}_x(t,x,y)$, $\omega_0 = z_{0x}$, $\omega_1 = z_{1x}$. Для задачи (20)—(24) рассмотрим соответствующую задачу с $\varepsilon = 0$:

$$\omega_t = \omega_{xx} + \omega_{yy} + \bar{f}(t,x,y), \tag{25}$$
$$\omega(0,x,y) = \omega_0(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{26}$$
$$\omega(t,0,y) = \omega(t,x_0,y) = 0, \quad (t,y) \in \Gamma_i, \quad i = 1,2, \tag{27}$$
$$\omega(t,x,0) = \omega(t,x,y_0) = 0, \quad (t,x) \in B_i, \quad i = 1,2, \tag{28}$$

и докажем существование и единственность её решения.

Выведем ряд априорных оценок на функцию $\omega(t,x,y)$ в предположении гладкости этой функции. Умножим (25) скалярно на $\omega(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$:

$$(\omega_t, \omega) = (\omega_{xx}, \omega) + (\omega_{yy}, \omega) + (\bar{f}(t,x,y), \omega).$$

Применяя в последнем равенстве формулу интегрирования по частям, определение скалярного произведения и нормы, учитывая однородные граничные условия, получим:

$$(\omega_t, \omega) = \int\limits_\Omega \omega_t \omega d\Omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2,$$

$$(\omega_{xx}, \omega) = \int\limits_\Omega \omega_{xx}\omega dxdy = \int\limits_\Omega \omega d\omega_x dy = \omega\omega_x|_{\partial\Omega} - \int\limits_\Omega \omega_x\omega_x d\Omega = -\|\omega_x\|^2,$$

$$(\omega_{yy},\omega)=\int\limits_{\Omega}\omega_{yy}\omega dxdy=\int\limits_{\Omega}\omega d\omega_y dx=\omega\omega_y|_{\partial\Omega}-\int\limits_{\Omega}\omega_y\omega_y d\Omega=-\|\omega_y\|^2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2+\|\omega_x\|^2+\|\omega_y\|^2=(\bar f,\omega). \tag{29}$$

Применяя к правой части (29) неравенство Коши и учитывая, что функция $f(t,x,y)$ задана и зависит от входных данных задачи, получим

$$\frac{d}{dt}\|\omega\|^2\leqslant C_1+\|\omega\|^2.$$

Проинтегрируем полученное неравенство от 0 до t и применим формулу Ньютона—Лейбница:

$$\|\omega(t)\|^2(t)\leqslant\|\omega\|^2(0)+C_1T+\int\limits_0^t\|\omega\|^2(\tau)d\tau.$$

Из последнего неравенства и леммы Гронуолла следует оценка

$$\|\omega(t)\|(t)\leqslant C_2. \tag{30}$$

Здесь и далее C_i — постоянные, зависящие от входных данных задачи.

Умножим (25) скалярно на $\omega_t(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$:

$$(\omega_t,\omega_t)=(\omega_{xx},\omega_t)+(\omega_{yy},\omega_t)+(\bar f(t,x,y),\omega_t).$$

С учетом определений скалярного произведения и нормы, формулы интегрирования по частям и однородных граничных условий из полученного равенства следует

$$\|\omega_t\|+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_x\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_y\|^2=(\bar f,\omega_t). \tag{31}$$

Применим к правой части (31) неравенство Коши. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\|\omega_x\|^2+\frac{d}{dt}\|\omega_y\|^2\leqslant\frac{d}{dt}\|\bar f\|^2.$$

Интегрируя последнее неравенство от 0 до t и учитывая условия на входные данные задачи, получим следующие оценки:

$$\|\omega_x\|\leqslant C_5,\quad \|\omega_y\|\leqslant C_6. \tag{32}$$

Умножая (25) скалярно на ω_{txx} в $L_2(\Omega)$ и используя схему получения оценок (31), (32), получим оценки

$$\|\omega_{xx}\|\leqslant C_5,\quad \|\omega_{xy}\|\leqslant C_6. \tag{33}$$

Далее, умножив (25) скалярно на ω_{tyy} и проводя те же рассуждения, как и при выводе (30), (32), (33), можно получить оценки

$$\|\omega_{xx}\|\leqslant C_5,\quad \|\omega_{xy}\|\leqslant C_7. \tag{34}$$

Из уравнения и оценок (34) следует, что

$$\|\omega_t\|\leqslant C_7. \tag{35}$$

Оценки (30), (32)—(35) позволяют утверждать, что

$$\|\omega\|_{W_2^{2,1}}(Q_T)\leqslant C_8. \tag{36}$$

С помощью (36) можно доказать разрешимость задачи (25)—(28), например, методом Галёркина.

Единственность решения задачи (25)—(28) доказывается стандартным образом: доказательством равенства нулю разности двух возможных решений.

Рассмотрим задачу (20)—(24) с $\varepsilon\neq 0$. Выведем ряд априорных оценок на функцию $\omega^\varepsilon(t,x,y)$ в предположении гладкости этой функции. Умножим (20) скалярно на $\omega_t^\varepsilon(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$:

$$\varepsilon(\omega_{tt}^\varepsilon,\omega_t^\varepsilon)+(\omega_t^\varepsilon,\omega_t^\varepsilon)=(\omega_{xx}^\varepsilon,\omega_t^\varepsilon)+(\omega_{yy}^\varepsilon,\omega_t^\varepsilon)+(\bar f(t,x,y),\omega_t^\varepsilon). \tag{37}$$

Так как из определений скалярного произведения и нормы, формулы интегрирования по частям и однородных граничных условий следует, что

$$(\omega^\varepsilon_{tt}, \omega^\varepsilon_t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_t\|^2, \qquad (\omega^\varepsilon_t, \omega^\varepsilon_t) = \|\omega^\varepsilon_t\|^2,$$
$$(\omega^\varepsilon_{xx}, \omega^\varepsilon_t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_x\|^2, \quad (\omega^\varepsilon_{yy}, \omega^\varepsilon_t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_y\|^2,$$

то выражение (37) преобразуется к следующему виду:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_t\|^2\right) + \|\omega^\varepsilon_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_x\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_y\|^2 = (\bar f(t,x,y), \omega^\varepsilon_t).$$

Применяя к правой части последнего выражения неравенство Коши и учитывая условия на входные данные, получим

$$\varepsilon\left(\frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_t\|^2\right) + \frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_x\|^2 + \frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_y\|^2 \leqslant C_9.$$

Проинтегрируем полученное неравенство от 0 до t и применим формулу Ньютона—Лейбница. Тогда справедливо неравенство

$$\varepsilon\Big(\|\omega^\varepsilon_t\|^2\Big)(t) + \|\omega^\varepsilon_x\|^2(t) + \|\omega^\varepsilon_y\|^2(t) \leqslant \varepsilon\Big(\|\omega^\varepsilon_t\|^2\Big)(0) + \|\omega^\varepsilon_x\|^2(0) + \|\omega^\varepsilon_y\|^2(0) + C_9T,$$

из которого с учетом условий на входные данные и неравенства Пуанкаре—Фридрихса следуют оценки

$$\|\omega^\varepsilon_x\| \leqslant C_{10}, \quad \|\omega^\varepsilon_y\| \leqslant C_{11}, \quad \|\omega^\varepsilon\| \leqslant C_{12}. \tag{38}$$

Умножим (20) скалярно на $\omega^\varepsilon_{txx}(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$:

$$\varepsilon(\omega^\varepsilon_{tt}, \omega^\varepsilon_{txx}) + (\omega^\varepsilon_t, \omega^\varepsilon_{txx}) = (\omega^\varepsilon_{xx}, \omega^\varepsilon_{txx}) + (\omega^\varepsilon_{yy}, \omega^\varepsilon_{txx}) + (\bar f(t,x,y), \omega^\varepsilon_{txx}).$$

Это равносильно следующему выражению:

$$\varepsilon\left(\frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_{tx}\|^2\right) + \|\omega^\varepsilon_{tx}\|^2 + \frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_{xx}\|^2 + \frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_{xy}\|^2 \leqslant \|f_x\|^2 + \|\omega^\varepsilon_{tx}\|^2.$$

Таким образом, учитывая условия на входные данные, имеем:

$$\varepsilon\left(\frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_{tx}\|^2\right) + \|\omega^\varepsilon_{tx}\|^2 + \frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_{xx}\|^2 + \frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_{xy}\|^2 \leqslant C_{13}.$$

Интегрируя последнее неравенство от 0 до t, применяя формулу Ньютона—Лейбница и условия на входные данные, получим следующие оценки:

$$\|\omega^\varepsilon_{xx}\|^2 \leqslant C_{14}, \quad \|\omega^\varepsilon_{yy}\|^2 \leqslant C_{15}, \quad \|\omega^\varepsilon_{tx}\|^2 \leqslant C_{16}. \tag{39}$$

Из (39) и неравенства Пуанкаре—Фридрихса следует, что

$$\|\omega^\varepsilon_t\|^2 \leqslant C_{17}. \tag{40}$$

Умножая (20) скалярно на $\omega^\varepsilon_{tyy}(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$ и применяя технику получения оценки (35), получим

$$\|\omega^\varepsilon_{yy}\|^2 \leqslant C_{18}. \tag{41}$$

Из (20), (38)—(41) следует, что

$$\|\omega^\varepsilon\|^2_{W_2^{2,1}} \leqslant C_{18}, \quad \|\omega^\varepsilon\|^2_{W_2^2} \leqslant C_{19}. \tag{42}$$

Заметим, что постоянная C_{19} зависит от $\varepsilon > 0 : C_{19} = C(\varepsilon)$. Оценка (42) позволяет доказать разрешимость задачи (20)—(24) в классе $W_2^2(Q_T)$, например, методом Галеркина.

Единственность решения задачи (20)—(24) доказывается стандартным образом, т.е. доказательством равенства нулю разности двух возможных решений. Умножим (20) скалярно на $\omega^\varepsilon_{tt}(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$:

$$\varepsilon\|\omega^\varepsilon_{tt}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega^\varepsilon_t\|^2 = (\omega^\varepsilon_{xx}, \omega^\varepsilon_{tt}) + (\omega^\varepsilon_{yy}, \omega^\varepsilon_{tt}) + (\bar f, \omega^\varepsilon_{tt}).$$

Проинтегрировав полученное равенство от 0 до t и применив к правой части полученного выражения формулу интегрирования по частям, неравенство Коши и доказанные ранее оценки, получим неравенство

$$\varepsilon\|\omega_{tt}^{\varepsilon}\|_{L_2(Q_T)}^2 \leqslant C_{20}. \tag{43}$$

Используя условия согласования, можно показать, что функции $u^{\varepsilon}(t,x,y)$, $g^{\varepsilon}(t,y)$ выражаются формулами

$$u^{\varepsilon} = \int\limits_{\bar{x}}^{x} \omega^{\varepsilon}(t,\eta,y)d\eta + \beta(t,y) - \beta(t,0) - \frac{y}{y_0}\big(\beta(t,y_0) - \beta(t,0)\big) - \\ - \bar{x}\mu_1(t,y) - \frac{\bar{x}^2}{2x_0}\big(\mu_2(t,y) - \mu_1(t,y)\big), \tag{44}$$

$$g^{\varepsilon} = \varepsilon\beta_{tt} + \beta_t - u_{xx}^{\varepsilon}(t,\bar{x},y) - \beta_{yy},$$

а функции $u(t,x,y)$, $g(t,y)$, являющиеся решениями предельной задачи, соответственно формулой

$$u = \int\limits_{\bar{x}}^{x} \omega(t,\eta,y)d\eta + \beta(t,y) - \beta(t,0) - \frac{y}{y_0}\big(\beta(t,y_0) - \beta(t,0)\big) - \\ - \bar{x}\mu_1(t,y) - \frac{\bar{x}^2}{2x_0}\big(\mu_2(t,y) - \mu_1(t,y)\big), \tag{45}$$

$$g(t,y) = \beta_t - u_{xx}(t,\bar{x},y) - \beta_{yy}.$$

□

Доказательство теоремы 2. Положим $\xi = \omega - \omega^{\varepsilon}$, где ω — решение задачи (25)—(28), а ω^{ε} — решение задачи (20)—(24). Тогда функция $\xi(t,x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi_t = \xi_{xx} + \xi_{yy} + \varepsilon\omega_{tt}^{\varepsilon}, \tag{46}$$

начальному условию

$$\xi(0,x,y) = 0, \tag{47}$$

и граничным условиям

$$\xi(t,0,y) = \xi(t,x_0,y) = 0, \quad \xi(t,x,0) = \xi(t,x,y_0) = 0. \tag{48}$$

Умножим (46) на $\xi(t,x,y)$ скалярно в $L_2(\Omega)$. Применяя к полученному выражению формулу интегрирования по частям, неравенство Коши и учитывая однородные граничные условия (48), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi\|^2 + \|\xi_x\|^2 + \|\xi_y\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2\|\omega_{tt}\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi_x\|^2,$$

или

$$\frac{d}{dt}\|\xi\|^2 + \|\xi_x\|^2 + 2\|\xi_y\|^2 \leqslant \varepsilon^2\|\omega_{tt}\|^2.$$

Проинтегрировав последнее неравенство от 0 до t, учитывая однородное начальное условие (41) и оценку (43), получим

$$\|\xi\|^2 \leqslant C_{21}\varepsilon. \tag{49}$$

Умножим (46) на $\xi_{xx}(t,x,y)$ скалярно в $L_2(\Omega)$. Применяя к полученному выражению формулу интегрирования по частям, неравенство Коши и учитывая однородные граничные условия (48) и (43), можно получить оценку

$$\|\xi_{xx}\| \leqslant C_{22}\sqrt{\varepsilon}. \tag{50}$$

Умножая (46) на $\xi_{xx}(t,x,y)$ скалярно в $L_2(\Omega)$ и применяя технику получения оценок (44), (45), получим

$$\|\xi_{xx}\| \leqslant C_{22}\sqrt{\varepsilon}. \tag{51}$$

Из оценок (49)—(51) и формул (44), (45) следует утверждение теоремы 2. □

Отметим, что задача идентификации функции источника для уравнения Бюргерса [5,8] исследована в [6]. Задача определения функции источника гиперболического уравнения теплопроводности исследована в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра// Мат. сб. — 1948. — *22 (64)*, № 2. — С. 193–204.
2. *Тихонов А. Н.* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры// Мат. сб. — 1950. — *27 (69)*, № 1. — С. 97–111.
3. *Градштейн И. С.* Дифференциальные уравнения с малыми множителями при производных и теория устойчивости Ляпунова// Докл. АН СССР. — 1949. — *65 (6)*. — С. 789–792.
4. *Градштейн И. С.* Линейные уравнения с переменными коэффициентами и малыми параметрами при старших производных// Мат. сб. — 1950. — *27 (69)*, № 1. — С. 47–68.
5. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
6. *Саватеев Е. Г.* О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения// Сиб. мат. ж. — 1995. — *36*, № 1. — С. 177–185.
7. *Саватеев Е. Г., Слынько О. Н.* Корректность и качественные свойства задачи определения функции источника гиперболического уравнения теплопроводности// в кн.: Актуальные вопросы современной математики. — Новосибирск, 1995. — С. 134–142.
8. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t = uu_x = \mu u_{xx}$// Commun. Pure Appl. Math — 1950. — *3*. — P. 201–230.

Черепанова Ольга Николаевна
Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: `Ocherepanova@sfu-kras.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 120–138
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-120-138

УДК 517, 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ. III. СИЛОВЫЕ ПОЛЯ С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Во многих задачах динамики возникают системы, пространствами положений которых являются четырехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к соответствующим многообразиям. Рассматриваемые динамические системы обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В работе показана интегрируемость более общих классов однородных динамических систем с переменной диссипацией на касательных расслоениях к четырехмерным многообразиям. Первая часть работы: Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *210.* — С. 77–95. Вторая часть работы: Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *211.* — С. 29–40.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLDS. III. FORCE FIELDS WITH DISSIPATION

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In many problems of dynamics, systems arise whose position spaces are four-dimensional manifolds. Naturally, the phase spaces of such systems are the tangent bundles of the corresponding manifolds. Dynamical systems considered have variable dissipation, and the complete list of first integrals consists of transcendental functions expressed in terms of finite combinations of elementary functions. In this paper, we prove the integrability of more general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on tangent bundles of four-dimensional manifolds. The first part of the paper is: Integrable homogeneous dynamical systems with dissipation on the tangent bundles of four-dimensional manifolds. I. Equations of geodesic lines// *Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **210** (2022), pp. 77–95. The second part of the paper is: Integrable homogeneous dynamical systems with dissipation on the tangent bundles of four-dimensional manifolds. II. Potential force fields// *Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **211** (2022), pp. 29–40.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

Настоящая работа является продолжением исследования, начатого в [70, 71]. Ссылки вида (1.m.n) и «предложение 2.n» относятся к первой и второй частям работы.

3. Уравнения движения на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в силовом поле с диссипацией

3.1. Приведенная система. Случай I. Модифицируя систему (**??**), получим систему с диссипацией. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b>0$, в первом уравнении системы (3.1.1) (в отличие от системы (**??**)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot z_1,\ldots,\dot z_4$ соответственно:

$$\tilde F(z_4,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\F(\alpha)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z_1F_1^1(\alpha)\\z_2F_2^1(\alpha)\\z_3F_3^1(\alpha)\\z_4F_4^1(\alpha)\end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ примет вид

$$\begin{cases}\dot\alpha=-z_4+b\delta(\alpha),\\
\dot z_4=F(\alpha)+f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)z_3^2+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)z_2^2+\\
\qquad+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta)z_1^2+z_4F_4^1(\alpha),\\
\dot z_3=\left[2\Gamma_{\alpha1}^1(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)z_2^2-\\
\qquad-\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)z_1^2+z_3F_3^1(\alpha),\\
\dot z_2=\left[2\Gamma_{\alpha2}^2(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3-\\
\qquad-\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)z_1^2+z_2F_2^1(\alpha),\\
\dot z_1=\left[2\Gamma_{\alpha3}^3(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3-\\
\qquad-f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2+z_1F_1^1(\alpha),\\
\dot\beta_1=z_3f_1(\alpha),\qquad\dot\beta_2=z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\qquad\dot\beta_3=z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2).\end{cases}\tag{3.1.1}$$

Система (3.1.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases}\ddot\alpha-[b\tilde\delta(\alpha)+F_4^1(\alpha)]\dot\alpha+F(\alpha)+b\delta(\alpha)F_4^1(\alpha)+\Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\\
\qquad+\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2+\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2=0,\\
\ddot\beta_1-\left\{b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha1}^1(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+F_3^1(\alpha)\right\}\dot\beta_1+\\
\qquad+2\Gamma_{\alpha1}^1(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2+\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2=0,\\
\ddot\beta_2-\left\{b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha2}^2(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]+F_2^1(\alpha)\right\}\dot\beta_2+\\
\qquad+2\Gamma_{\alpha2}^2(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2+\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2=0,\\
\ddot\beta_3-\left\{b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha3}^3(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]+F_1^1(\alpha)\right\}\dot\beta_3+\\
\qquad+2\Gamma_{\alpha3}^3(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3+2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3+2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3=0;\end{cases}\tag{3.1.2}$$

здесь и далее $\tilde\delta(\alpha)=d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.2. Первые интегралы для уравнений в поле с диссипацией. Случай I. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.1.1) при выполнении свойств (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**). Тогда система (3.1.1) допускает отделение независимой подсистемы седьмого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_4 = F(\alpha) + f^2(\alpha)\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha)z_3^2 + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta_1)z_2^2 + \\ \qquad + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2 + z_4F_4^1(\alpha), \\ \dot{z}_3 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3z_4 - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)z_2^2 - \\ \qquad - f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1,\beta_2)z_1^2 + z_3F_3^1(\alpha), \\ \dot{z}_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2z_4 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2z_3 - \\ \qquad - f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1z_4 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1z_3 - \\ \qquad - f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 = z_3f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = z_2f(\alpha)g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.2.1}$$

при наличии также восьмого уравнения

$$\dot{\beta}_3 = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \tag{3.2.2}$$

Замечание 3.1. Будем переходить теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.2.1), (3.2.2) при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha) = \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta_1)g^2(\beta_1) = \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta_1,\beta_2)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \tag{3.2.3}$$

Введем также ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять первому дифференциальному равенству из (**??**), преобразованному в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) = 0. \tag{3.2.4}$$

При переходе от системы (3.1.1) к системе (3.2.1), (3.2.2) использовалась система дифференциальных равенств (**??**), а также группа условий (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**). Но нетрудно показать, что из только что всех перечисленных условий условия (3.2.3), (3.2.4) вытекают. Но если систему дифференциальных равенств (**??**) заменить на ее ослабленный вариант — систему дифференциальных равенств (**??**) — то для проведения дальнейшего анализа выполнение условий (3.2.3), (3.2.4) нужно требовать.

Далее наложим определенные ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому также предположим, что выполнены (в некотором смысле, технические) равенства:

$$F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F_3^1(\alpha) = F^1(\alpha). \tag{3.2.5}$$

Для полного интегрирования (по Якоби [4, 12, 17, 18]) рассматриваемой системы (3.2.1), (3.2.2) при условии (3.2.5) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \tag{3.2.6}$$

система (3.2.1), (3.2.2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -w_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot w_4 = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2 + w_4 F_4^1(\alpha), \\ \dot w_3 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4 + w_3 F^1(\alpha), \end{cases} \tag{3.2.7}$$

$$\begin{cases} \dot w_2 = \pm w_3 \sqrt{\dfrac{1+w_2^2}{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \dot\beta_2 = \pm \dfrac{w_2 w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.2.8}$$

$$\begin{cases} \dot w_1 = \pm w_3 \sqrt{1+w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot\beta_1 = \pm \dfrac{w_1 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{3.2.9}$$

$$\dot\beta_3 = \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \tag{3.2.10}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.2.7)–(3.2.10) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.2.7), по одному — для систем (3.2.8) и (3.2.9) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.2.10)(т.е. всего *пять*).

Продолжим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторых $\kappa, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ выполнены группы равенств

$$f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \tag{3.2.11}$$

а также

$$F(\alpha) = \lambda_0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}, \quad F^1(\alpha) = \lambda_1 \frac{d}{d\alpha}\delta(\alpha), \quad F_4^1(\alpha) = \lambda_4 \frac{d}{d\alpha}\delta(\alpha). \tag{3.2.12}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (3.2.11) *и* (3.2.12). *Тогда система* (3.2.7) — (3.2.10) *обладает полным набором, состоящим из пяти независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Условие (3.2.11) назовем *геометрическим*, а условия группы (3.2.12) — *энергетическими*.

Условие (3.2.11) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения.

Условия группы (3.2.12) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся в некотором смысле «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\delta^2(\alpha)/2$ (или $\delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\delta(\alpha)$). При этом функция $\delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (*знако*)*переменную диссипацию* (см. также [19, 22, 24, 25]).

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 3.1 для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (3.2.7) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2 + w_4 F_4^1(\alpha)}{-w_4 + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dz}{d\alpha} = \dfrac{[2\Gamma_1(\alpha) + d\ln|f(\alpha)|/d\alpha] w_3 w_4 + w_3 F^1(\alpha)}{-w_4 + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.2.13}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1 \delta(\alpha), \quad w_4 = u_2 \delta(\alpha), \tag{3.2.14}$$

приведем систему (3.2.13) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha)u_2 = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u_1^2 + \delta(\alpha)u_2F_4^1(\alpha)}{-u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha)u_1 = \dfrac{[2\Gamma_1(\alpha) + d\ln|f(\alpha)|/d\alpha]\delta^2(\alpha)u_1u_2 + \delta(\alpha)u_1F^1(\alpha)}{-u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}; \end{cases} \tag{3.2.15}$$

с учетом (3.2.4) последняя система почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{H_4(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_1^2 + u_2F_4^1(\alpha) + \tilde{\delta}(\alpha)u_2^2 - b\tilde{\delta}(\alpha)u_2}{-u_2 + b}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{-\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_1u_2 + u_1F^1(\alpha) + \tilde{\delta}(\alpha)u_1u_2 - b\tilde{\delta}(\alpha)u_1}{-u_2 + b}, \end{cases} \tag{3.2.16}$$

где

$$H_4(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}.$$

Теперь для интегрирования системы (3.2.16) нам потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (3.2.11) и (3.2.12), которые можно переписать следующим образом.

(i) Для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}. \tag{3.2.17}$$

(ii) Для некоторых $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ должны выполняться равенства

$$H_4(\alpha) = \lambda_0\tilde{\delta}(\alpha), \quad F^1(\alpha) = \lambda_1\tilde{\delta}(\alpha), \quad F_4^1(\alpha) = \lambda_4\tilde{\delta}(\alpha). \tag{3.2.18}$$

Действительно, после выполнения условий (3.2.11) и (3.2.12) (или (3.2.17) и (3.2.18)) система (3.2.16) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_0 + \kappa u_1^2 + u_2^2 + (\lambda_4 - b)u_2}{(1-\kappa)u_1u_2 + (\lambda_1 - b)u_1}. \tag{3.2.19}$$

Уравнение (3.2.19) имеет вид уравнения Абеля (см. [29, 30, 32]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_4$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{3.2.20}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{w_4^2 + w_3^2 + (\lambda_1 - b)w_4\delta(\alpha) + \lambda_0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{3.2.21}$$

Замечание 3.2. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.2.7) (как часть системы (3.2.7)—(3.2.10)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [21, 23, 25, 31]). При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (3.2.4), геометрического и энергетических условий (3.2.11), (3.2.12) (но при любой гладкой функции $F(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda_1 = \lambda_4 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F(\alpha) + \kappa\dfrac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}w_3^2 - bw_4\tilde{\delta}(\alpha), \\ \dot{w}_3 = -\kappa\dfrac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}w_3w_4 - bw_3\tilde{\delta}(\alpha). \end{cases} \tag{3.2.22}$$

Действительно, система (3.2.22) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_4, w_3; \alpha) = w_3^2 + w_4^2 - 2bw_4\delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad V(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da, \tag{3.2.23}$$

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}. \tag{3.2.24}$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем:

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3 f(\alpha) \exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\} =$$

$$= w_3 f(\alpha) \exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\Gamma_4(b)f^2(b) + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right] db\right\} \cong w_3 \exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_4(b)f^2(b)db\right\},$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (3.2.11) (или (3.2.17)) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_4 = -b$, перепишется в виде

$$w_3 \exp\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db} \ln|\delta(b)|db\right\} \cong w_3\delta(\alpha) \tag{3.2.25}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.2.23), (3.2.24) также является первым интегралом системы (3.2.22). При $\lambda_1 = \lambda_4 \neq -b$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 + (\lambda_1 - b)w_4\delta(\alpha) + \lambda_0\delta^2(\alpha) \tag{3.2.26}$$

и (3.2.24) по отдельности не является первым интегралом системы (3.2.7), однако их отношение является первым интегралом системы (3.2.7) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda_1 = \lambda_4$, b.

Найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.2.7) при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_4$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.2.20) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{\lambda_1 - b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2}{4} - \lambda_0. \tag{3.2.27}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 - 4\lambda_0 \geqslant 0, \tag{3.2.28}$$

и фазовое пространство системы (3.2.7) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.2.27).

Таким образом, в силу соотношения (3.2.20) первое уравнение системы (3.2.16) при условиях (3.2.11) и (3.2.12) и при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_4$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda_0 + (\lambda_1 - b)u_2 + u_2^2) - C_1U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \tag{3.2.29}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0)}\right\}, \tag{3.2.30}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.2.28). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.2.7) примет вид

$$\int \frac{d\delta(\alpha)}{\delta(\alpha)} = \int \frac{(b - u_2)du_2}{2(\lambda_0 + (\lambda_1 - b)u_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0)}\}/2}. \tag{3.2.31}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln|\delta(\alpha)|$. Если
$$u_2+\frac{\lambda_1-b}{2}=r_1,\quad b_1^2=(\lambda_1-b)^2+C_1^2-4\lambda_0, \tag{3.2.32}$$
то правая часть равенства (3.2.31) примет вид
$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}-b\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1}\pm 1\right|\mp\frac{b}{2}I_1, \tag{3.2.33}$$
$$I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\quad r_3=\sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \tag{3.2.34}$$
При вычислении интеграла (3.2.34) возможны три случая.

I. $(\lambda_1-b)^2>4\lambda_0$:
$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right|+\mathrm{const}. \tag{3.2.35}$$
II. $(\lambda_1-b)^2<4\lambda_0$:
$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4\lambda_0-(\lambda_1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{3.2.36}$$
III. $(\lambda_1-b)^2=4\lambda_0$:
$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{3.2.37}$$
Возвращаясь к переменной
$$r_1=\frac{z_2}{\delta(\alpha)}+\frac{\lambda_1-b}{2}, \tag{3.2.38}$$
получим окончательный вид для величины I_1:

I. $(\lambda_1-b)^2>4\lambda_0$:
$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right|+\mathrm{const}. \tag{3.2.39}$$
II. $(\lambda_1-b)^2<4\lambda_0$:
$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4\lambda_0-(\lambda_1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{3.2.40}$$
III. $(\lambda_1-b)^2=4\lambda_0$:
$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{3.2.41}$$
Итак, мы нашли дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.2.7) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa=-1$, $\lambda_1=\lambda_4$) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [28, 31, 32, 34, 35]).

Замечание 3.3. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.2.20). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G\left(\delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{3.2.42}$$

Выражение первого интеграла (3.2.42) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы восьмого порядка (3.2.7)—(3.2.10) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.2.7). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти по одному первому интегралу — для систем (3.2.8) и (3.2.9) (меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.2.10).

Первые интегралы для систем (3.2.8) и (3.2.9) будут иметь следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2; \tag{3.2.43}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (**??**), (**??**). В предыдущих переменных z первые интегралы (3.2.43) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered}
\Theta_3'(z_3, z_2, z_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}\,\Psi_1(\beta_1)} = C_3' = \text{const}, \\
\Theta_4'(z_2, z_1; \beta_2) = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\Psi_2(\beta_2)} = C_4' = \text{const}.
\end{gathered} \tag{3.2.44}$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.2.10), находится по аналогии с (**??**):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}, \tag{3.2.45}$$

где после взятия интеграла (3.2.45) вместо постоянных C_3, C_4 можно формально подставить левые части равенств (3.2.43) (или (3.2.44)) при $s = 1, 2$ соответственно.

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.2.7)–(3.2.10) имеет пять первых интегралов, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа). Теорема 3.1 доказана. □

3.3. Приведенная система. Случай II. Модифицируя систему (**??**), получим систему с диссипацией. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (3.3.1) (в отличие от системы (**??**)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot z_1, \ldots, \dot z_4$ соответственно:

$$\tilde F(z_4, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) \\ F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) \\ F_3(\beta_1) f_1(\alpha) \\ F_4(\alpha) f_4(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \\ z_3 F_3^1(\alpha) \\ z_4 F_4^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha),\\
\dot z_4 = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_4^2 - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_3^2 -\\
\qquad - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)z_1^2 + z_4F_4^1(\alpha),\\
\dot z_3 = F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 -\\
\qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2 + z_3F_3^1(\alpha),\\
\dot z_2 = F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2z_4 -\\
\qquad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2z_3 -\\
\qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha),\\
\dot z_1 = F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1z_4 -\\
\qquad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1z_3 -\\
\qquad - f_2(\alpha)g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha),\\
\dot\beta_1 = z_3f_1(\alpha), \qquad \dot\beta_2 = z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \qquad \dot\beta_3 = z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2).
\end{cases}
\tag{3.3.1}
$$

Система (3.3.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{cases}
\ddot\alpha - \left\{b\tilde\delta(\alpha) + F_4^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\alpha -\\
\qquad - F_4(\beta_1)f_4^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F_4^1(\alpha) + b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] +\\
\qquad + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_1 - \left\{F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_1 -\\
\qquad - F_3(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_2 - \left\{F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_2 -\\
\qquad - F_2(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
\ddot\beta_3 - \left\{F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_3 -\\
\qquad - F_1(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 +\\
\qquad + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0;
\end{cases}
\tag{3.3.2}
$$

здесь, как и выше, $\tilde\delta(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.4. Первые интегралы для уравнений в поле с диссипацией. Случай II. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.3.1) при выполнении свойств (**??**),

(**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), а также при отсутствии проектирования внешней силы на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$ и $\dot z_3$ (т.е. присутствует проекция внешней силы лишь на ось $\dot z_4$):

$$F_1(\beta_3) \equiv F_2(\beta_2) \equiv F_3(\beta_1) \equiv 0.$$

Тогда система (3.3.1) допускает отделение независимой подсистемы седьмого порядка:

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot z_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma^\alpha_{11}(\alpha) z_3^2 - \\ \qquad - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1) z_2^2 - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2) z_1^2 + z_4 F_4^1(\alpha), \\ \dot z_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - f(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1) z_2^2 - \\ \qquad - f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot z_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 - \\ \qquad - f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\beta_2) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 - \\ \qquad - f(\alpha) g(\alpha)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \qquad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \end{cases} \tag{3.4.1}$$

при наличии также восьмого уравнения

$$\dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2). \tag{3.4.2}$$

Замечание 3.4. Будем переходить теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.4.1), (3.4.2) при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1) g^2(\beta_1) = \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \tag{3.4.3}$$

Введем также ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять первому дифференциальному равенству из (**??**), преобразованному в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) = 0. \tag{3.4.4}$$

При переходе от системы (3.3.1) к системе (3.4.1), (3.4.2) использовалась система дифференциальных равенств (**??**), а также группа условий (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**). Нетрудно показать, что из только что всех перечисленных условий условия (3.4.3), (3.4.4) вытекают. Но если систему дифференциальных равенств (**??**) заменить на ее ослабленный вариант — систему дифференциальных равенств (**??**) — то для проведения дальнейшего анализа выполнение условий (3.4.3), (3.4.4) нужно требовать.

Далее наложим определенные ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому также предположим, что выполнены (в некотором смысле, технические) равенства:

$$F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F_3^1(\alpha) = F^1(\alpha). \tag{3.4.5}$$

Для полного интегрирования (по Якоби, см. [1, 4, 37, 40]) рассматриваемой системы (3.4.1), (3.4.2) при условии (3.4.5) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \tag{3.4.6}$$

система (3.4.1), (3.4.2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot w_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) w_3^2 + w_4 F_4^1(\alpha), \\ \dot w_3 = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) w_3 w_4 + w_3 F^1(\alpha), \end{cases} \tag{3.4.7}$$

$$\begin{cases} \dot w_2 = \pm w_3 \sqrt{\dfrac{1+w_2^2}{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d \ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \\ \dot\beta_2 = \pm \dfrac{w_2 w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.4.8}$$

$$\begin{cases} \dot w_1 = \pm w_3 \sqrt{1+w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot\beta_1 = \pm \dfrac{w_1 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{3.4.9}$$

$$\dot\beta_3 = \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \tag{3.4.10}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.4.7)—(3.4.10) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.4.7), по одному — для систем (3.4.8) и (3.4.9) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.10) (т.е. всего *пять*).

Продолжим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторых $\kappa, \lambda_4^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, 4$, выполнены группы равенств

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \tag{3.4.11}$$

а также

$$F_4(\alpha) = \lambda_4^0 \frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_4(\alpha) \frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha), \quad k = 1, \ldots, 4. \tag{3.4.12}$$

Здесь, как уже отмечалось, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = \lambda^1$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (3.4.11) *и* (3.4.12). *Тогда система* (3.4.7)—(3.4.10) *обладает полным набором* (*пятью*) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Условие (3.4.11) назовем *геометрическим*, а условия группы (3.4.12) — *энергетическими.*

Условие (3.4.11) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения.

Условия группы (3.4.12) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (*знако*)*переменную диссипацию* (см. также [14, 47, 50]).

Схема доказательства. Поставим в соответствие системе третьего порядка (3.4.7) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{F_4(\alpha) f_4(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) w_3^2 / f_4(\alpha) + w_4 F_4^1(\alpha)}{w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_3}{d\alpha} = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) w_3 w_4 / f_4(\alpha) + w_3 F^1(\alpha)}{w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.4.13}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_3 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \tag{3.4.14}$$

приведем систему (3.4.13) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \dfrac{F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_4(\alpha) + \Delta(\alpha)F_4^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_4(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.4.15}$$

С учетом (3.4.4) система (3.4.15) почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\Big[F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_4(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + \\ \qquad + \big[\Delta(\alpha)F_4^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\big]u_2\Big], \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\Big[\big[f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)/f_4(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\big]u_1u_2 + \\ \qquad + \big[\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\big]u_1\Big]; \end{cases} \tag{3.4.16}$$

здесь и далее $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$.

Теперь для интегрирования системы (3.4.16) нам потребуется выполнение, которые можно переписать следующим образом:

(i) Для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}. \tag{3.4.17}$$

(ii) Для некоторых $\lambda_4^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, 4$, должны выполняться равенства

$$F_4(\alpha) = \lambda_4^0\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha), \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_4(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad k = 1, \ldots, 4. \tag{3.4.18}$$

Действительно, после выполнения условий (3.4.11) и (3.4.12) (или (3.4.17) и (3.4.18)) система (3.4.16) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_4^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_4^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 + (\lambda^1 - b)u_1}. \tag{3.4.19}$$

Уравнение (3.4.19) имеет вид уравнения Абеля (см. [29,30]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_4^0}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{3.4.20}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{f_4^2(\alpha)(w_4^2 + w_3^2) + (b - \lambda^1)w_4\delta(\alpha)f_4(\alpha) - \lambda_4^0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)f_4(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{3.4.21}$$

Замечание 3.5. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.4.7) (как часть системы (3.4.7)–(3.4.10)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [53,54,57]). При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (3.4.4), геометрического и энергетических условий (3.4.11), (3.4.12) (но при любой гладкой функции $F_4(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_4^1 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot w_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \kappa f_4(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3^2 - b w_4 f_4(\alpha)\tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w_3 = \kappa f_4(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 w_4 - b w_3 f_4(\alpha)\tilde\Delta(\alpha). \end{cases} \tag{3.4.22}$$

Действительно, система (3.4.22) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_4, w_3; \alpha) = w_3^2 + w_4^2 + 2bw_4\Delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad V(\alpha) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a)da, \tag{3.4.23}$$

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3\Delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{3.4.24}$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов имеем

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3 f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} =$$

$$= w_3 f(\alpha)\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma_4(b)\frac{f^2(b)}{f_4^2(b)} + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right]db\right\} \cong w_3\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_4(b)\frac{f^2(b)}{f_4^2(b)}db\right\},$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (3.4.11) (или (3.4.17)) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1 = -b$, перепишется в виде

$$w_3\exp\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{db}\ln|\delta(b)|db\right\} \cong w_3\delta(\alpha) \tag{3.4.25}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.4.23), (3.4.24) также является первым интегралом системы (3.4.22). При $\lambda^1 = \lambda_4^1 \neq -b$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 + (b - \lambda^1)w_4\Delta(\alpha) - \lambda_4^0\Delta^2(\alpha) \tag{3.4.26}$$

и (3.4.24) по отдельности не является первым интегралом системы (3.4.7), однако их отношение является первым интегралом системы (3.4.7) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_4^1$, b.

Найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.4.7) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.4.20) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_4^0. \tag{3.4.27}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_4^0 \geqslant 0, \tag{3.4.28}$$

и фазовое пространство системы (3.4.7) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.4.27).

Таким образом, в силу соотношения (3.4.20) первое уравнение системы (3.4.16) при условиях (3.4.11) и (3.4.12) и при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde\Delta(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda_4^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1U_1(C_1, u_2)}{u_2 + b}, \tag{3.4.29}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_4^0)}\right\}; \tag{3.4.30}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.4.28). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.4.7) примет вид

$$-\int\frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}=\int\frac{(b+u_2)du_2}{2(\lambda_4^0-(\lambda^1-b)u_2+u_2^2)+C_1\{-C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-(\lambda^1-b)u_2-\lambda_4^0)}\}/2}. \quad (3.4.31)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln|\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2-\frac{\lambda^1-b}{2}=r_1,\quad b_1^2=(\lambda^1-b)^2+C_1^2+4\lambda_4^0, \quad (3.4.32)$$

то правая часть равенства (3.4.31) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}+b\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1}\pm 1\right|\mp\frac{b}{2}I_1, \quad (3.4.33)$$

$$I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\quad r_3=\sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \quad (3.4.34)$$

При вычислении интеграла (3.4.34) возможны три случая.

I. $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_4^0$:

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2+4\lambda_4^0}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\right|+\text{const.} \quad (3.4.35)$$

II. $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_4^0$:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_4^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\text{const.} \quad (3.4.36)$$

III. $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_4^0$:

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\text{const.} \quad (3.4.37)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1=\frac{z_3}{\Delta(\alpha)}-\frac{\lambda^1-b}{2}, \quad (3.4.38)$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_4^0$:

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\right|+\text{const.} \quad (3.4.39)$$

II. $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_4^0$:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_4^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\text{const.} \quad (3.4.40)$$

III. $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_4^0$:

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\text{const.} \quad (3.4.41)$$

Итак, мы нашли дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.4.7) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [17, 52, 59, 63]).

Замечание 3.6. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.4.20). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G\left(\Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{3.4.42}$$

Выражение первого интеграла (3.4.42) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы восьмого порядка (3.4.7)–(3.4.10) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.4.7). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти по одному первому интегралу — для систем (3.4.8) и (3.4.9) (меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.10).

Первые интегралы для систем (3.4.8) и (3.4.9) будут иметь следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2; \tag{3.4.43}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (**??**), (**??**).

В предыдущих переменных z первые интегралы (3.4.43) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered}\Theta_3'(z_3, z_2, z_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\Psi_1(\beta_1)} = C_3' = \text{const},\\ \Theta_4'(z_2, z_1; \beta_2) = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \Psi_2(\beta_2)} = C_4' = \text{const}.\end{gathered} \tag{3.4.44}$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.10), находится по аналогии с (**??**):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}, \tag{3.4.45}$$

где после взятия интеграла (3.4.45) вместо постоянных C_3, C_4 можно формально подставить левые части равенств (3.4.43) (или (3.4.44)) при $s = 1, 2$ соответственно.

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.4.7)—(3.4.10) имеет пять первых интегралов, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа). Теорема 3.2 доказана. □

Заключение

Как известно, понятию интегрируемости придают различные значения в соответствии с тем, в каких функциях производится интегрирование (аналитических, гладких, мероморфных и др.; см. [3, 4, 16, 66, 67]). В данной работе обсуждается вопрос интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классе трансцендентных функций, т.е. функций, которые после продолжения в комплексную область имеют существенно особые точки. Понятие интегрируемости в классе трансцендентных функций возникает по причине наличия у системы асимптотических (или притягивающих, или отталкивающих) предельных множеств, т.е. множеств размерности $d \geqslant 1$, или притягивающих, или отталкивающих некоторые области фазового пространства (см. [68, 69, 73]).

Более того, если разрыв трансцендентных интегралов происходит на асимптотических предельных множествах, размерностей $d \geqslant 1$, то удается выяснить наличие в системе, например, предельных циклов. И хотя в последнем случае трансцендентный первый интеграл, как правило, не выражается через элементарные функции, он имеет многообразие неизолированных существенно особых точек.

В работе проанализированы как уже известные ранее работы автора, так и полученные впервые случаи интегрируемости систем с диссипацией разного знака на касательном расслоении к четырехмерному гладкому многообразию, являющемуся пространством положений (конфигурационным пространством) рассматриваемой динамической системы. При этом в работе только что был применен следующий подход. Мы начинаем рассмотрение систем, в которых отсутствует какое-либо («внешнее» или «внутреннее») силовое поле (т.е. мы изучаем по сути дела геодезические потоки). В дальнейшем мы переходим к системам, в которых уже присутствует внешнее силовое поле, но только консервативное. В результате же дальнейшего анализа мы проводим исследование систем, в которых появляется внешнее неконсервативное силовое поле, обладающее диссипацией, причем разных знаков (так называемая (знако)переменная диссипация) (ср. [72,74]).

В следующих работах автора будут получены аналогичные результаты и в системах более высокого порядка (ср. [18, 58, 63, 69, 72]). Более того, в данном случае в многомерных системах будет присутствовать силовое поле существенно неконсервативное, в отличие от монографий автора [67, 68].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9*. — С. 119–211.
2. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
3. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
14. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.

18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.

44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
54. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
58. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
60. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
61. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
65. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.

69. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
70. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *xxx*. — С. xxx–xxx.
71. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *xxx*. — С. xxx–xxx.
72. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
73. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
74. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 139–148
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-139-148

УДК 517.9; 531.01

СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ. II. ОБЩИЙ КЛАСС ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЫ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Работа является второй частью обзора по вопросам интегрируемости систем с любым числом n степеней свободы (первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *211*. — С. 41–74). Обзор состоит из трех частей. В первой части подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил. В данной второй части рассмотрены более общие динамические системы на касательных расслоениях к n-мерной сфере. В третьей части, которая будет опубликована в следующем выпуске, рассмотрены динамические системы на касательных расслоениях к достаточно обширному классу других гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

Ключевые слова: динамическая система с большим числом степеней свободы, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH DISSIPATION WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM: ANALYSIS AND INTEGRABILITY. II. GENERAL CLASS OF DYNAMICAL SYSTEMS ON THE TANGENT BUNDLE OF A MULTIDIMENSIONAL SPHERE

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. This paper is the second part of a survey on the integrability of systems with a large number n of degrees of freedom (the first part: *Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **211** (2022), pp. 41–74). The review consists of three parts. In the first part, the primordial problem from the dynamics of a multidimensional rigid body placed in a nonconservative force field is described in detail. In this second part, we consider more general dynamical systems on the tangent bundles to the n-dimensional sphere. In the third part, which will be published in the next issue, we will consider dynamical systems on the tangent bundles to smooth manifolds of a sufficiently wide class. Theorems on sufficient conditions for the integrability of the considered dynamical systems in the class of transcendental functions are proved.

Keywords and phrases: dynamical system with a large number of degrees of freedom, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Введение. Данная работа является обзорной по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с n степенями свободы (ранее были опубликованы аналогичные работы по системам с четырьмя и пятью степенями свободы). Если конфигурационное многообразие системы — гладкое n-мерное многообразие, то его касательное (кокасательное) расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно с системами, в которых в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т.е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти и речи (см. [6, 22, 30, 33]).

Работа состоит из трех частей. В первой части (см. [71]) проведен достаточно подробный анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики n-мерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении $(n-1)$-мерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [5, 24, 31, 41]).

В данной второй части рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к n-мерной сфере. Указанные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в первой части. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по n-мерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [50, 51, 53]).

В заключительной третьей части, которая будет опубликована в следующем выпуске, рассмотрены динамические системы на касательных расслоениях к достаточно обширным классам гладких n-мерных многообразий; для таких систем также предъявлены достаточные условия интегрируемости.

2. Более общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы

Как известно, в динамике систем со многими степенями свободы часто возникают системы с пространствами положений — конечномерными сферами. Таким образом, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к данным сферам. Так, например, изучение n-мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [7, 17, 18, 73]).

Рассмотренные ранее автором задачи из динамики и свободного n-мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле также породили системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом исследование проводилось, начиная от систем при отсутствии силового поля, и продолжалось системами при наличии неконсервативных силовых полей с дополнительными группами симметрий (см. [20, 23, 37]).

Построение неконсервативного силового поля, действующего на n-мерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных твердых тел, находящихся, в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для n-мерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля (см. [42, 43, 45]).

Естественным образом в рассматриваемый класс задач помещается классическая задача о движении материальной точки по поверхности $(n-1)$-мерной сферы, вложенной во объемлющее n-мерное пространство, вообще говоря, в неконсервативном поле сил.

В данном разделе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих в динамике n-мерного твердого тела, а также в динамике точки, на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним и обобщают ранее рассмотренные.

2.1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к n-мерному многообразию. Рассмотрим гладкое n-мерное риманово многообразие M^n с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x=(x^1,\ldots,x^n)$ на многообразии порождает аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим также касательное расслоение $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;x^1,\ldots,x^n\}$, где $z=(z_n,\ldots,z_1)$ — координаты в касательном пространстве.

Если $z_i=\dot{x}^i$, $i=1,\ldots,n$, то уравнения геодезических линий на нем примут вид (дифференцирование в данном случае выполняется по натуральному параметру)

$$\ddot{x}^i+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k=0,\quad i=1,\ldots,n. \tag{2.1.1}$$

2.2. Системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. Рассмотрим следующую систему (2.2.1), (2.2.2) порядка $2(n-1)$:

$$\dot{\alpha}=-z_{n-1}+bg(\alpha), \tag{2.2.1a}$$

$$\dot{z}_{n-1}=F(\alpha)-(z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)f(\alpha), \tag{2.2.1b}$$

$$\dot{z}_{n-2}=z_{n-2}z_{n-1}f(\alpha)+(z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)f(\alpha), \tag{2.2.1c}$$

$$\dot{z}_{n-3}=z_{n-3}z_{n-1}f(\alpha)-z_{n-3}z_{n-2}f(\alpha)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-(z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2)f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{2.2.1d}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{z}_1=z_1f(\alpha)\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{2.2.1e}$$

$$\dot{\beta}_1=z_{n-2}f(\alpha), \tag{2.2.2a}$$

$$\dot{\beta}_2=-z_{n-3}f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{2.2.2b}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{\beta}_{n-2}=(-1)^{n+1}z_1f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{2.2.2c}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ к $(n-1)$-мерной сфере

$$\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}:\ 0\leqslant\alpha,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_{n-3}\leqslant\pi,\ \beta_{n-2}\bmod 2\pi\}.$$

Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — 2π-периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha=0\bmod\pi/2$, $b\geqslant 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — (внешнее) силовое поле. О задачах как с внешним, так и внутренним полями см. также в [61, 62, 65].

Первое уравнение подсистемы (2.2.1) и подсистема (2.2.2) задают координаты $z_{n-1},\ldots,z_1$ в касательном пространстве к сфере (являются обобщенными кинематическими соотношениями). При этом система (2.2.1), (2.2.2) без последнего уравнения является независимой подсистемой порядка $2n-3$ (ввиду цикличности переменной β_{n-2}).

Система (2.2.1), (2.2.2) также может быть представлена в маятниковом виде:

$$
\begin{gathered}
\ddot{\alpha}-b\dot{\alpha}\tilde{g}(\alpha)+F(\alpha)- \\
-\left[\dot{\beta}_1^2+\dot{\beta}_2^2\sin^2\beta_1+\dot{\beta}_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2+\ldots+\dot{\beta}_{n-2}^2\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-3}\right]\frac{1}{f(\alpha)}=0,
\end{gathered} \tag{2.2.3a}
$$

$$
\begin{gathered}
\ddot{\beta}_1-b\dot{\beta}_1 g(\alpha)f(\alpha)+\dot{\alpha}\dot{\beta}_1\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)}\right]-\left[\dot{\beta}_2^2+\dot{\beta}_3^2\sin^2\beta_2+\right. \\
\left.+\dot{\beta}_4^2\sin^2\beta_2\sin^2\beta_3+\ldots+\dot{\beta}_{n-2}^2\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-3}\right]\sin\beta_1\cos\beta_1=0,
\end{gathered} \tag{2.2.3b}
$$

$$
\begin{gathered}
\ddot{\beta}_2-b\dot{\beta}_2 g(\alpha)f(\alpha)+\dot{\alpha}\dot{\beta}_2\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)}\right]+2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\left[\dot{\beta}_3^2+\dot{\beta}_4^2\sin^2\beta_3+\right. \\
\left.+\dot{\beta}_5^2\sin^2\beta_3\sin^2\beta_4+\ldots+\dot{\beta}_{n-2}^2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-3}\right]\sin\beta_2\cos\beta_2=0,
\end{gathered} \tag{2.2.3c}
$$

$$
\begin{gathered}
\ddot{\beta}_3-b\dot{\beta}_3 g(\alpha)f(\alpha)+\dot{\alpha}\dot{\beta}_3\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)}\right]+2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}-\left[\dot{\beta}_4^2+\dot{\beta}_5^2\sin^2\beta_4+\right. \\
\left.+\dot{\beta}_6^2\sin^2\beta_4\sin^2\beta_5+\ldots+\dot{\beta}_{n-2}^2\sin^2\beta_4\ldots\sin^2\beta_{n-3}\right]\sin\beta_3\cos\beta_3=0,
\end{gathered} \tag{2.2.3d}
$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$
\begin{gathered}
\ddot{\beta}_{n-4}-b\dot{\beta}_{n-4} g(\alpha)f(\alpha)+\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-4}\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)}\right]+2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-4}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\ldots+ \\
+2\dot{\beta}_{n-5}\dot{\beta}_{n-4}\frac{\cos\beta_{n-5}}{\sin\beta_{n-5}}-\left[\dot{\beta}_{n-3}^2+\dot{\beta}_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3}\right]\sin\beta_{n-4}\cos\beta_{n-4}=0,
\end{gathered} \tag{2.2.3e}
$$

$$
\begin{gathered}
\ddot{\beta}_{n-3}-b\dot{\beta}_{n-3} g(\alpha)f(\alpha)+\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-3}\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)}\right]+2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-3}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\ldots+ \\
+2\dot{\beta}_{n-4}\dot{\beta}_{n-3}\frac{\cos\beta_{n-4}}{\sin\beta_{n-4}}-\dot{\beta}_{n-2}^2\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-3}=0,
\end{gathered} \tag{2.2.3f}
$$

$$
\begin{gathered}
\ddot{\beta}_{n-2}-b\dot{\beta}_{n-2} g(\alpha)f(\alpha)+\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2}\left[\frac{f^2(\alpha)-\tilde{f}(\alpha)}{f(\alpha)}\right]+ \\
+2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\ldots+2\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}=0,
\end{gathered} \tag{2.2.3g}
$$

где

$$\tilde{g}(\alpha)=\frac{dg(\alpha)}{d\alpha},\quad \tilde{f}(\alpha)=\frac{df(\alpha)}{d\alpha}.$$

2.3. Первые интегралы, метрики и силовые поля. При $b=0$ система (2.2.1), (2.2.2) является консервативной и обладает полным набором (n штук) первых интегралов:

$$F_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha)=z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2+2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F(\xi)d\xi=C_1=\mathrm{const},$$

$$F_2(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}f(\xi)d\xi=C_2=\mathrm{const},$$

$$F_3(z_{n-3},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}f(\xi)d\xi\cdot\sin\beta_1=C_3=\mathrm{const},$$

. . . .

$$F_{n-1}(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3})=z_1\exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}f(\xi)d\xi\cdot\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}=C_{n-1}=\mathrm{const},$$

$$F_n(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=C_n=\mathrm{const}.$$

При $b>0$ система (2.2.1), (2.2.2) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним.

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.3.1}$$

$$f(\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{2.3.2}$$

Случай (2.3.1) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного n-мерного твердого тела на нулевых уровнях первых интегралов (т.е. при наличии дополнительных групп симметрий), вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. часть 1 данной работы: [71]).

Случай (2.3.2) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на $(n-1)$-мерной сфере, вложенной во объемлющее n-мерное пространство, также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. При этом в последнем случае метрика на сфере индуцируется естественным образом евклидовой метрикой объемлющего n-мерного пространства. В частности, при $g(\alpha)\equiv F(\alpha)\equiv 0$ система (2.2.1), (2.2.2) описывает геодезический поток на $(n-1)$-мерной сфере.

Замечание 2.3.1. В случае (2.3.1), если

$$g(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}, \tag{2.3.3}$$

то система (2.2.1), (2.2.2) описывает движение свободного n-мерного твердого тела в силовом поле под действием следящей силы. В частности, если

$$F(\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha,\quad g(\alpha)=\sin\alpha, \tag{2.3.4}$$

то система (2.2.1), (2.2.2) описывает также закрепленный n-мерный маятник на обобщенном сферическом шарнире, помещенный в поток набегающей среды, заполняющей n-мерное пространство, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим (асимптотическим) предельным множествам системы (2.2.1), (2.2.2).

Для полного интегрирования системы (2.2.1), (2.2.2) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных в касательном пространстве

$$\begin{gathered}w_1=\frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}},\quad w_2=\frac{z_{n-3}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2}},\\ w_{n-4}=\frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}},\quad w_{n-3}=\frac{z_2}{z_1},\quad w_{n-2}=w=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2},\quad w_{n-1}=z_{n-1},\end{gathered} \tag{2.3.5}$$

система (2.2.1), (2.2.2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -w_{n-1} + g(\alpha), \\ \dot w_{n-1} = F(\alpha) - w_{n-2}^2 f(\alpha), \\ \dot w_{n-2} = w_{n-2} w_{n-1} f(\alpha), \end{cases} \tag{2.3.6}$$

$$\begin{cases} \dot w_k = d_k \dfrac{1+w_k^2}{w_k} \dfrac{\cos\beta_k}{\sin\beta_k}, \\ \dot\beta_k = d_k, \ k = 1, \ldots, n-3, \end{cases} \tag{2.3.7}$$

$$\dot\beta_{n-2} = (-1)^{n+1} \mathcal{Z}_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin\beta_1 \sin\beta_2 \ldots \sin\beta_{n-3}}, \tag{2.3.8}$$

где $\mathcal{Z}_1(w_1, \ldots, w_{n-1}) = z_1$ в силу замены (2.3.5), d_k, $k = 1, \ldots, n-3$, — некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что для полной интегрируемости системы (2.3.6)–(2.3.8) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.3.6), по одному — для систем (2.3.7) (т.е. $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.3.8)(т.е. всего n).

2.4. Случай (2.3.1)**.** Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m \alpha \cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a \alpha, \quad m = 2a-1, \quad m, a \in \mathbb{R}. \tag{2.4.1}$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (2.3.4).

Теорема 2.4.1. *В случаях* (2.3.1), (2.4.1) *система* (2.2.1), (2.2.2) *обладает полным набором* (n *штук*)*, вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

Следствие 2.4.1. *Система* (2.2.3) *при условиях* (2.3.1), (2.4.1) *обладает* n*, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad w_{n-2} = u_1 \tau^a, \quad w_{n-1} = u_2 \tau^a,$$

то поиск ключевого первого интеграла

$$\Phi_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_1$$

системы (2.3.6) приведет к уравнению Абеля (см. [29])

$$[(a+1)u_2 - ab] u_1 du_2 = [1 - u_1^2 + a u_2^2 - ab u_2] du_1, \tag{2.4.2}$$

общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ если и интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций, то выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл

$$\Phi_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_2$$

системы (2.3.6) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b - u_2) du_2}{1 - U_1^2(u_2) + a u_2^2 - ab u_2}. \tag{2.4.3}$$

Первые интегралы для систем (2.3.7) имеют вид

$$\Phi_{k+2}(w_k; \beta_k) = \frac{\sqrt{1+w_k^2}}{\sin\beta_k} = C_{k+2} = \mathrm{const}, \quad k = 1, \ldots, n-3, \tag{2.4.4}$$

а дополнительный первый интеграл

$$\Phi_n(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n,$$

«привязывающий» уравнение (2.3.8), найдется из равенства

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{z_1}{z_2 \sin\beta_{n-3}}; \tag{2.4.5}$$

при этом, используя первый интеграл (2.4.4) при $k = n-4, n-3$, окончательно получим его вид:

$$\Phi_n(\beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \beta_{n-2} \pm \operatorname{arctg} \frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \mathrm{const}. \tag{2.4.6}$$

В частности, при $a = 1$ равенство (2.4.2) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}.$$

2.5. Случай (2.3.2)**.** Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k\alpha}{\cos^k\alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.5.1}$$

Теорема 2.5.1. *В случаях* (2.3.2), (2.5.1) *система* (2.2.1), (2.2.2) *обладает полным набором* (n *штук*)*, вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

Следствие 2.5.1. *Система* (2.2.3) *при условиях* (2.3.2), (2.5.1) *обладает* n*, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad w_{n-2} = u_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k, \quad w_{n-1} = u_2\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k,$$

то поиск ключевого первого интеграла $\Phi_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_1$ системы (2.3.6) приведет к уравнению Абеля (2.4.2) (только с подстановкой $a \leftrightarrow k$), общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл

$$\Phi_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_2$$

системы (2.3.6) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \frac{(b-u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + ku_2^2 - kbu_2}.$$

Первые интегралы для систем (2.3.7) имеют вид (2.4.4), а дополнительный первый интеграл

$$\Phi_n(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n,$$

«привязывающий» уравнение (2.3.8), найдется из равенства (2.4.5), при этом, используя первый интеграл (2.4.4) при $k = n-3, n-4$, окончательно получим его в виде (2.4.6).

В частности, при $k = 1$ равенство (2.4.2) ($a \leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_{n-1}\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2)\cos^2\alpha - bw_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha\cos\alpha} = C_1 = \mathrm{const}.$$

В предыдущих работах автора [60, 64] уже рассматривались задачи о движении свободного n-мерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к $(n-1)$-мерной сфере. Данная работа присоединяет к данной задаче динамики многомерного твердого тела задачу о движении точки по $(n-1)$-мерной сфере в более общих, чем ранее, неконсервативных силовых полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Архимедовы равномерные структуры// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 46–51.
2. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Многообразия непрерывных структур// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 71–86.
3. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
4. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.

5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
15. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
16. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
17. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
18. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
28. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
29. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
30. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
31. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.

32. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4.* — С. 57–69.
33. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
34. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
35. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
36. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
37. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
38. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
39. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
40. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
41. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
42. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
43. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
45. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
48. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
49. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
50. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
51. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
53. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.

57. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
70. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.
71. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *211*. — С. xx–xx.
72. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
73. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
74. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
75. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с C2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.