ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 210 (2022)

Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 210 (2022)

Дата публикации 30 мая 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года Выходит 15 раз в год

Редакторы-составители выпуска	М. В. Шамолин,
	Т. К. Юлдашев
Научный редактор выпуска	Н. А. Архипова
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782–4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-6-11
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-12-23
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-24-34
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-35-48
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-49-54
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-55-65
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-66-76
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-77-95
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-96-105
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-106-116
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-117-135

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 210

ГЕОМЕТРИЯ, МЕХАНИКА
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

К 55-ЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА М. В. ШАМОЛИНА

22 октября 2021 года исполнилось 55 лет доктору физико-математических наук, профессору, ведущему научному сотруднику Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Максиму Владимировичу Шамолину.

М. В. Шамолин родился в г. Ногинске Московской области в семье служащих. Отец, Владимир Александрович, — преподаватель Московского областного политехникума, выпускник Московского энергетического института, мать, Тамара Николаевна, — учитель русского языка и литературы средней школы. В детстве Максим почти не задумывался о научной деятельности.

В 1983 г. М. В. Шамолин окончил с отличием среднюю школу № 5 г. Ногинска и поступил на механико-математический факультет МГУ и с 1985 г. под руководством профессора В. В. Козлова начал заниматься исследованиями возмущенного биллиарда Биркгофа на предмет интегрируемости. Начиная с 1987 г. под руководством В. А. Самсонова М. В. Шамолин занялся прикладной и на первый взгляд наглядной задачей механики об исследовании движения твердого тела специальной формы, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Это потребовало развития качественного аппарата исследования динамических систем с диссипацией. В 1988 г. М. В. Шамолин с отличием окончил факультет и защитил дипломную работу на тему «К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде и некоторые вопросы существования замкнутых траекторий». В том же году он поступил в аспирантуру кафедры теоретической механики механико-математического факультета МГУ.

В 1991 г. им была представлена и успешно защищена диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (специальность 01.02.01 «теоретическая механика») на тему «Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием». К этому времени уже было опубликовано несколько работ в центральной прессе.

В дальнейшем на протяжении достаточно долгого времени М. В. Шамолина интересовали исключительно качественные методы исследования нестандартных систем с диссипацией, в том числе, и на предмет интегрируемости через конечную комбинацю элементарных функций.

В 1992 г. М. В. Шамолин был принят на работу в Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова в лабораторию навигации и управления на должность научного сотрудника. В 1994 г. он стал победителем конкурса молодых ученых Института, а годом позднее был награжден медалью Л. Эйлера для молодых математиков (Европейское общество GAMM). В 1997 г. он был переведен на должность старшего научного сотрудника и стал обладателем Первой премии конкурса молодых ученых всего Московского университета.

В последующие годы им была представлена и успешно защищена диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (специальность 01.02.01 «теоретическая механика») на тему «Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой», были написаны две монографии на данную тему. В 2005–2006 гг. М. В. Шамолин стал победителем конкурсов Президента Российской Федерации для молодых докторов наук, награжден медалью «Вильгельм Лейбниц». В 1997–2002 гг. — Председатель Совета молодых учёных Института механики МГУ имени М. В. Ломоносова. В 1997–2000 гг. — лауреат Государственной научной стипендии Российской Академии наук.

В настоящее время он имеет более 600 печатных работ, в том числе 13 монографий, из которых выделим следующие: «Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики» (2003 г. — 1 изд., 2007 г. — 2 изд., перераб. и доп.), «Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела» (2007 г.), «Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения» (2009 г.), «Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем» (совместно с профессором В. В. Трофимовым, 2010 г.), «Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил» (2013 г.), «Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения» (2015 г.), «Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Ч. 1, 2» (2017 г.), «Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1, 2» (2019 и 2021 гг.), а также учебники «Высшая математика» (2009 г.), «Современные разделы математики в доступном изложении» (2018 г.) и два сборника задач под его общей редакцией. В настоящее время он работает в должности ведущего научного сотрудника в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова, а также в качестве совместителя в должности профессора на механико-математическом факультете МГУ и Институте математики и информатики МПГУ.

Им разработаны методы качественного и численного исследования динамических систем с диссипацией, позволившие получить условия наличия устойчивых и неустойчивых автоколебательных режимов. При этом метод исследования динамических систем на двумерных поверхностях с помощью плоских топографических систем Пуанкаре и систем сравнения был распространен на высшие размерности.

М. В. Шамолин ввел понятие динамической системы с переменной диссипацией, известен также за нахождение ряда случаев интегрируемости многомерных динамических систем с переменной диссипацией в трансцендентных функциях. В частности, проинтегрировал в явном виде известную задачу о движении сферического маятника, помещённого в поток набегающей среды. Внёс значительный вклад в динамику многомерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном силовом поле, в динамику систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия, а также в общую теорию интегрируемых динамических систем с диссипацией.

Позднее он получил (совместно с Н. Л. Поляковым) полную классификацию симметричных классов функций выбора на r-элементных подмножествах произвольного конечного множества, обладающих свойством Эрроу. Этот результат усиливает теорему Шелаха о свойстве Эрроу и является обобщением теоремы Эрроу о невозможности. Им получены также комбинаторные теоремы, относящиеся к теории коллективного выбора. Эти теоремы описывают достаточно общие условия, при которых задача о сохранении произвольным правилом агрегирования множества предпочтений могут быть сведены к аналогичным задачам для двух конкретных правил агрегирования: правила большинства и правила «считалочки».

М. В. Шамолин также получил крупные результаты по теории фракталов, а именно, им были изучены нетривиальные динамические системы на фракталах, а также развиты методы фрактальной геометрии при анализе некоторых физических и химических процессов в гетерогенных системах.

В настоящее время М. В. Шамолин — высококвалифицированный специалист в области прикладной математики, классической механики, качественной теории динамических систем, дифференциальной и топологической диагностики, теории фракталов, дискретной математики, математической логики и информатики.

М. В. Шамолин ведёт большую педагогическую работу, преподавая в МГУ им. М. В. Ломоносова, а также в МПГУ. Имеет ученое звание профессора. Под его руководством защищены одна докторская и шесть кандидатских диссертаций по разным специальностям. Он руководит семинаром «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени профессора В. В. Трофимова (совместно с профессором Д. В. Георгиевским) на механико-математическом факультете МГУ. М. В. Шамолин — член Редакционной коллегии информационных изданий по математике Всероссийского института научной и технической информации Российской академии наук (ВИНИТИ РАН), член Московского математического общества, Общества прикладной математики и механики (GAMM), Европейского общества по механике (EUROMECH), член диссертационных докторских советов, член Национального комитета по теоретической и прикладной механике. Он является членом редколлегии научных журналов «Фундаментальная и прикладная математика», «Прикладная математика и математическая физика», «Международный научно-исследовательский журнал», научной серии «Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры», выпускаемой ВИНИТИ РАН, Реферативного журнала «Математика» ВИНИТИ РАН, международного научного журнала «Axioms» (MDPI). С 2021 г. он также является экспертом Российской Академии наук.

М. В. Шамолин успешно продолжает свою активную профессиональную деятельность. Вместе с его учениками, а также коллегами и друзьями, мы от души желаем Максиму Владимировичу здоровья и новых открытий.

А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе, В. В. Козлов,
Ю. И. Журавлев, А. В. Михалев, А. В. Овчинников,
Д. О. Орлов, В. Л. Попов, В. Г. Романов,
А. Л. Семенов, В. Г. Чирский, В. А. Шамолин

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 6–11
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-6-11

УДК 517, 531.01

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ» ИМ. ПРОФ. В. В. ТРОФИМОВА ПОД РУКОВОДСТВОМ Д. В. ГЕОРГИЕВСКОГО И М. В. ШАМОЛИНА

© 2022 г. **Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН**

Памяти профессора С. А. Агафонова

Аннотация. Приведена краткая информация о заседаниях семинара в 2020 г.

Ключевые слова: качественная теория динамических систем, геометрия, классическая механика, механика жидкости и газа, механика деформируемого твердого тела.

SESSIONS OF THE WORKSHOP OF THE MATHEMATICS AND MECHANICS DEPARTMENT OF THE LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY, “URGENT PROBLEMS OF GEOMETRY AND MECHANICS” NAMED AFTER V. V. TROFIMOV

© 2022 **D. V. GEORGIEVSKY, M. V. SHAMOLIN**

Abstract. Brief information on sessions of the workshop in 2020 is presented.

Keywords and phrases: qualitative theory of dynamical systems, geometry, classical mechanics, fluid and gas mechanics, solid mechanics.

AMS Subject Classification: 58Cxx, 70Cxx

Заседание 446 (12 февраля 2021 г.)
Ю. А. Тихонов.
О свойствах решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости.

Заседание 447 (19 февраля 2021 г.)
Д. В. Георгиевский.
Динамические режимы растяжения идеально жёсткопластического стержня.

Исследуется напряжённо-деформированное состояние, возникающее при динамическом растяжении однородного стержня из несжимаемого идеально жёсткопластического материала, подчиняющегося критерию Мизеса—Генки. В осесимметричной постановке учитывается возможность утолщения либо утоньшения сечения по длине стержня, что моделирует шейкообразование и дальнейшее развитие шейки. Вводятся три безразмерные функции времени, одна из которых малый геометрический параметр — отношение среднего радиуса к половине длины стержня. Отношения порядков малости двух других безразмерных функций к малому геометрическому параметру определяют влияние на картину распределения напряжений и скоростей деформаций инерционных слагаемых в уравнениях движения. На разных временных интервалах эти отношения могут быть разными, что обусловливает тот или динамический режим растяжения. Таких характерных режимов выявлено два, один из них связан с достаточно большой скоростью удаления торцевых сечений друг от друга, второй с ускорением. В последнем из перечисленных случаев проведённый анализ на основе метода асимптотического интегрирования позволил найти параметры напряжённо-деформированного состояния, являющегося «инерционной поправкой» по отношению к квазистатическому состоянию, реализующемуся в стержне с цилиндрической боковой поверхностью.

Заседание 448 (26 февраля 2021 г.)
М. В. Шамолин.
Рациональные первые интегралы в динамике.

Изучаются вопросы наличия трансцендентных первых интегралов для некоторых классов систем с симметриями. При этом получены достаточные условия наличия в неавтономных однородных системах второго порядка первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями, как в смысле теории элементарных функций, так и в смысле комплексного анализа, и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Результаты предлагаемой работы являются развитием предыдущих исследований, в том числе, и некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела, где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Позднее данное обстоятельство позволило провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которые обладали грубостью и сохранялись для систем более общего вида. Полная интегрируемость таких систем была связана с симметриями скрытого типа. Как известно, понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать в каком смысле оно понимается (имеется в виду некий критерий, по которому делается вывод о том, что траектории рассматриваемой динамической системы устроены особенно «привлекательно и просто»), в классе каких функций ищутся первые интегралы и т. д. В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не только в смысле теории элементарных функций (например, тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки). При этом их необходимо формально продолжить в комплексную область. Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования таких неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Заседание 449 (12 марта 2021 г.)
В. А. Банько.
Сравнение численных алгоритмов на примере оптимизации в задаче Бека.

Заседание 450, совместное с семинаром кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (26 марта 2021 г.).
Н. Г. Мощевитин.
О геометрии диофантовых приближений.

Заседание 451 в рамках конференции «Молодежные чтения» (14 апреля 2021 г.).

В. А. Банько.

Сравнение численных алгоритмов оптимизации критических параметров в задачах динамической устойчивости.

В. А. Емельянов.

Моделирование пластической деформации в металлах методом дискретных краевых дислокаций.

А. А. Вшивкова (Пермский национальный исследовательский политехнический университет).

О построении приближенного аналитического решения задачи Ламе в случае транстропного материала.

А. Р.Мещерякова (МФТИ).

Моделирование качения упругой сферы при наличии слоя третьего тела.

М. Селезнев (МФТИ).

Формирование малой обучающей выборки для построения суррогатной ML-модели упруго-пластического деформирования стержня.

Р. Р. Шабайкин.

Динамическое сдавливание нелинейно вязкопластического тонкого слоя.

А. В. Сероштанов (Донецкий национальный университет).

Решение задачи об изгибе тонкой многосвязной плиты из пьезоматериалов.

Н. С. Стеценко.

Определение характеристик нелинейно вязкоупругих материалов из экспериментов с высокоамплитудными сдвиговыми гармоническими колебаниями.

Заседание 452 (16 апреля 2021 г.)

С. А. Артамонов, Д. А. Третьяков.

Основные теоретические положения компьютерного обучения.

Заседание 453 (14 мая 2021 г.)

И. М. Цветков.

О динамическом растяжении идеально жёсткопластического листа.

Заседание 454 (21 мая 2021 г.)

Д. В. Георгиевский, Н. С. Стеценко.

Комплексное представление Александровича решений в перемещениях в трёхмерной теории упругости.

Обсуждаются аналитические возможности предложенного в 1970-х гг. в работах А. И. Александровича представления решения в перемещениях в трёхмерной теории упругости в виде двумерной комплексной структуры. Комплекснозначные перемещения ищутся в форме голоморфного разложения как ряды по степеням комплексных переменных с антиголоморфными коэффициентами и по степеням сопряжённых комплексных переменных с голоморфными коэффициентами. Все голоморфные и антиголоморфные функции выражаются через четыре произвольные голоморфные функции.

В качестве тестовых частных случаев, приводящих к известным в теории упругости классическим решениям, рассматриваются плоское деформированное состояние, антиплоская деформация, трёхмерное деформированное состояние в тонкой пластинке переменной толщины, осесимметричные поля перемещений, реализующиеся, в частности, при линейной комбинации внутреннего (внешнего) давления, r_θ-кручения и осевого r_z-сдвига в цилиндрическом слое и при θ_z-кручении сплошного цилиндра. В терминах комплекснозначных перемещений выписывается система уравнений осесимметричной теории упругости, фундаментальное решение которой является общим представлением поля перемещений в осесимметричном случае аналогично формулам Колосова–Мусхелишвили в плоской задаче.

Заседание 455 (4 июня 2021 г.)
Ю. Ю. Подладчиков (Университет Лозанны, Швейцария).
Солетарные волны порового флюида в вязко-упругих твёрдых телах.

Заседание 456 (17 сентября 2021 г.)
Д. В. Георгиевский.
Энергетические оценки устойчивости течений сред со сложными свойствами.

Рассматривается широкий класс тензорно нелинейных изотропных несжимаемых сплошных сред, которые могут обладать скалярным потенциалом напряжений по скоростям деформаций. Приводятся постановки линеаризованных задач устойчивости течений таких сред в движущихся трёхмерных областях относительно трёхмерной картины кинематических и силовых возмущений. Развивается техника метода интегральных соотношений, позволяющего получать достаточные интегральные (энергетические) оценки устойчивости. Общие оценки устойчивости, в том числе и экспоненциальной, уточняются для каждого конкретного вида сред — тензорно линейных, или квазилинейных, сред, обладающих либо не обладающих скалярным потенциалом, тела Бингама, тела Сен-Венана, ньютоновской вязкой жидкости.

Заседание 457 (24 сентября 2021 г.)
Х. Ф. Исаев.
Асимптотический анализ в задаче Орра—Зоммерфельда с неклассическими граничными условиями.

Заседание 458 (1 октября 2021 г.)
А. В. Романов.
О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случаях трансверсально-изотропной и ортотропной сред.

Заседание 459, посвященное В. В. Мелешко в связи с 70-летием со дня рождения (8 октября 2021 г.).

Заседание 460 (15 октября 2021 г.)
Р. Р. Шабайкин.
Динамическое деформирование тонкого растекающегося идеально пластического слоя.

Заседание 461 (12 ноября 2021 г.)
А. В. Давыдов.
Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих при изучении флаттера вязкоупругой пластины.

Заседание 462 (19 ноября 2021 г.)
Ф. М. Малышев (МИАН).
Простое доказательство теоремы Брунна–Минковского элементарными средствами.

Представлено новое доказательство теоремы Брунна—Минковского об объёме суммы выпуклых тел P_0, P_1 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, одинакового n-мерного объёма: $V_n((1-t)P_0 + tP_1) \geqslant V_n(P_0) = V_n(P_1)$, $0 < t < 1$, причём равенство имеет место, только если P_1 получается из P_0 параллельным переносом, в остальных случаях теорема утверждает строгое неравенство. Опровергается сформировавшееся мнение о том, что исключение равенства — особая наиболее трудная часть теоремы; приводятся причины сложившейся ситуации.

Заседание 463 (26 ноября 2021 г.)
М. В. Шамолин.
Тензорные инварианты динамических систем с диссипацией с малым числом степеней свободы.

Как известно, наличие достаточного количества не только первых интегралов (скалярных инвариантов), но и других тензорных инвариантов позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной формы фазового объема позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт естествен. А вот для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций.

Так, например, задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т.д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Заседание 464 (3 декабря 2021 г.)

Ю. А. Тихонов.

О полугрупповом подходе к изучению задач, возникающих в теории вязкоупругости.

Заседание 465 (17 декабря 2021 г.)

Н. Л. Поляков, М. В. Шамолин.

О некоторых новых результатах в алгебраической теории коллективного выбора.

В докладе представлены новые результаты в теории коллективного выбора, которые получены с помощью методов универсальной алгебры и теории замкнутых классов дискретных функций. Эти результаты относятся к классу так называемых *теорем возможности*. В частности, получено явное описание локальных правил агрегирования, которые имеют нетривиальные симметричные классы инвариантных множеств предпочтений. По существу, этот результат отвечает на вопрос: для каких локальных правил агрегирования нетривиальное инвариантное множество предпочтений существует и может быть описано теоретико-множественной формулой без констант из множества альтернатив. Рассмотрен класс *нелокальных* правил агрегирования $f_{\mathcal{A},\mathcal{F},\mathcal{J}}$, имитирующих пошаговое принятие решений с правилом $\mathcal{F}$ при фиксированных функции адаптации агентов $\mathcal{A}$ и упорядочении альтернатив $\mathcal{J}$, причем упорядочение $\mathcal{J}$ считается случайным фактором. Оказывается, если правило $\mathcal{F}$ порождается правилом большинства, то для некоторой фунции адаптации $\mathcal{A}$ и любого упорядочения $\mathcal{J}$ каждое такое правило сохраняет множество рациональных предпочтений и позволяет определить *победителя по Кондорсе*, если он существует. В конце доклада сформулирован ряд открытых вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. Фундам. направл. — 2007. — *23.* — С. 16–45.
2. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *62.* — С. 3–13.

3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65.* — С. 3–10.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76.* — С. 3–10.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2013. — *88.* — С. 3–19.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2015. — *98.* — С. 3–8.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100.* — С. 3–11.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *150.* — С. 3–25.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *174.* — С. 3–11.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *187.* — С. 3–11.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2021. — *202.* — С. 3–9.
12. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *205.* — С. 3–9.

Георгиевский Дмитрий Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `cotedurhone@mail.ru`, `georgiev@mech.math.msu.su`

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@imec.msu.ru`, `shamolin.maxim@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 12–23
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-12-23

УДК 517.967

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

© 2022 г. **О. Х. АБДУЛЛАЕВ, А. А. МАТЧАНОВА**

Аннотация. В работе изучены краевые задачи для смешанного дифференциального уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа с дробным оператором Герасимова—Капуто. Определены необходимые классы заданных функций, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленных краевых задач. Доказаны существование и единственность решения краевой задачи.

Ключевые слова: параболо-гиперболическое уравнение, дифференциальный оператор Герасимова—Капуто, интегральное уравнение, единственность решения, существование решения.

ON THE SOLVABILITY OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THIRD-ORDER EQUATIONS OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE WITH LOWER TERMS

© 2022 **O. Kh. ABDULLAEV, A. A. MATCHANOVA**

Abstract. In this paper, boundary-value problems for a third-order mixed differential equation of the parabolic-hyperbolic type with a fractional Gerasimov–Caputo operator are examined. Classes of functions that ensure the unique solvability of the boundary-value problem are found. The existence and uniqueness of a solution of the boundary-value problem are proved.

Keywords and phrases: parabolic-hyperbolic equation, Gerasimov–Caputo differential operator, integral equation, uniqueness of solution, existence of solution.

AMS Subject Classification: 35M10, 34K37, 35R11, 35D30

1. Постановка задачи. Известно, что краевые задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0$$

с параболо-гиперболическим оператором Lu рассматривались в работах Т. Д. Джураева, А. Сопуева и М. Мамажанова [2], М. Мамажанова и Д. Холмуратова [3]. На корректность постановки краевых задач для такого уравнения существенное влияние оказывают коэффициенты a, b и c. В случаях $b=c=0$ и $a=c=0$ различные краевые задачи исследованы в [1,6].

Задачи для уравнения параболо-гиперболического типа с интегро-дифференциальными операторами дробного порядка были изучены многими авторами (см. [7,9,10,13]). Для нагруженного уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором целого порядка были изучены локальные краевые задачи (см. [8,14]). Отметим, что краевые задачи для вышеуказанного уравнения в случае, когда Lu — параболо-гиперболический оператор с дифференциальным оператором дробного порядка, изучены только с операторами без младших членов (см. [7, 12]).

В данной работе исследуется однозначная разрешимость локальных краевых задач для уравнения указанного типа при $a \neq 0$.

2. Постановка задач и необходимые функциональные соотношения. Пусть Ω — односвязная область, ограниченная отрезками BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $x = 1$, $y = h = \text{const} > 0$, $x = 0$ и характеристиками $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$ уравнения колебания струны, пересекающимися в точке $C(1/2, -1/2)$. Введем следующие обозначения:

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}, \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\} = \left\{(x, y) : -\frac{1}{2} < y < 0,\ -y < x < y + 1\right\}.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\right) Lu = 0, \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1u = u_{xx} - {}_cD^{\alpha}_{0y}u + a_1(x, y)u_x + c_1(x, y)u & \text{при } (x, y) \in \Omega_1, \\ L_2u = u_{xx} - u_{yy} + a_2(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c_2(x, y)u & \text{при } (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

и ${}_cD^{\alpha}_{oy}$ — дробная производная Герасимова—Капуто порядка $0 < \alpha < 1$ (см. [11]):

$${}_cD^{\alpha}_{oy}f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y (y - t)^{-\alpha} f'(t)dt,$$

a, b и c — заданные постоянные числа, $a \neq 0$, $a_i(x, y)$, $b_2(x, y)$, $c_i(x, y)$ — заданные функции в областях Ω_i $(i = 1, 2)$, соответственно. В области Ω_1 функции $a_1(x, y)$, $c_1(x, y)$, $\partial a_1(x, y)/\partial x$, $\partial a_1(x, y)/\partial y$ удовлетворяют условию Гельдера, а в области Ω_2 — принадлежат следующим функциональным классам:

$$\text{при } ab = 0\colon \quad a_2(x, y), b_2(x, y) \in C^1(\overline{\Omega_2}), \quad c_2(x, y) \in C^0(\overline{\Omega_2});$$
$$\text{при } ab \neq 0\colon \quad a_2(x, y), b_2(x, y) \in C^2(\Omega_2), \quad c_2(x, y) \in C^1(\overline{\Omega}_2).$$

Определение. Функция $u(x, y)$ называется *регулярным решением* уравнения (1), если она имеет непрерывные производные, входящие в оператор Lu, где $Lu \in C^1(\Omega)$.

Задача 1. Найти в области Ω регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса функций

$$W = \left\{u(x, y) : u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega}_2 \setminus BC),\ u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup AA_0)\right\}$$

и удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y); \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y < h, \tag{3}$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{5}$$

а также условию склеивания

$$u_y(x, -0) = \lim_{y \to +0} {}_cD^{\alpha}_{0y}u(x, y), \quad x \in (0, 1) \tag{6}$$

на интервале AB при $0 < b/a \leqslant 1$, где $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль, $\varphi_i(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ $(i = \overline{1, 3})$ — заданные функции, причем $\psi_1(0) = \varphi_1(0)$.

Теорема 1. *При выполнении условий*

$$\varphi_1(y) \in C^1[0,h] \cap C^2(0,h), \quad \varphi_2(y) \in C[0,h], \quad \varphi_3(y) \in C[0,h] \cap C^1[0,h),$$
$$\psi_1(x) \in C\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap C^1\left[0,\frac{1}{2}\right), \quad \psi_2(x) \in C\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap C^1\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

решение задачи 1 *существует и единственно.*

Доказательство. Полагая

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y) & \text{при } (x,y) \in \Omega_1, \\ u_2(x,y) & \text{при } (x,y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

перепишем уравнение (2) в виде двух систем:

$$\begin{cases} u_{1xx} - {}_cD_{0y}^{\alpha} u_1 + a_1(x,y)u_{1x} + c_1(x,y)u_1 = \upsilon_1(x,y), \\ a\upsilon_{1x} + b\upsilon_{1y} + c\upsilon_1 = 0 \end{cases} \quad \text{при } (x,y) \in \Omega_1, \tag{7}$$

$$\begin{cases} u_{2xx} - u_{2yy} + a_2(x,y)u_{2x} + b_2(x,y)u_{2y} + c_2(x,y)u_2 = \upsilon_2(x,y) \\ a\upsilon_{2x} + b\upsilon_{2y} + c\upsilon_2 = 0, \end{cases} \quad \text{при } (x,y) \in \Omega_2, \tag{8}$$

где $\upsilon_j(x,y)$ $(j=1,2)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Учитывая, что функция

$$\upsilon_{2x}(x,y) = w_2(bx-ay)\exp\left(-\frac{c(bx+ay)}{2ab}\right)$$

является решением второго уравнения системы (8), первое уравнение системы (8) перепишем в следующем виде:

$$L_2 u = w_2(bx-ay)\exp\left(-\frac{c(bx+ay)}{2ab}\right), \tag{9}$$

где $w_2(bx-ay)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. После перехода к характеристическим координатам $\xi = x+y$, $\eta = x-y$ уравнение (9) принимает вид

$$u_{2\xi\eta} + a_3(\xi,\eta)u_{2\xi} + b_3(\xi,\eta)u_{2\eta} + c_3(\xi,\eta)u_2 = \\ = \frac{1}{4}w_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\eta\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi + \frac{b-a}{2}\eta\right)\right], \tag{10}$$

а условия (4) и (5) — вид

$$u_2|_{\xi=0} = \psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right); \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2\left(\frac{\eta}{2}\right). \tag{11}$$

Известно, что решение уравнения (10), удовлетворяющее условиям (11) и $(u_{2\xi} - u_{2\eta})\big|_{\eta=\xi} = \nu(\xi)$, имеет следующий вид (см. [1, 5]):

$$u_2(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) + \int_0^{\xi} T_0(\xi,\eta,t)\nu(t)dt + \\ + \frac{1}{4}\int_0^{\xi} dt \int_t^{\xi} S(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau + \\ + \frac{1}{4}\int_0^{\xi} dt \int_t^{\eta} T(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau, \tag{12}$$

где

$$F(\xi,\eta) = \psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right) + \psi_1\left(\frac{\xi}{2}\right) - \psi_1(0) + \int\limits_0^\xi dt \int\limits_t^\xi \Phi(t,\tau)S(t,\tau,\xi,\eta)d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^\xi dt \int\limits_t^\eta \Phi(t,\tau)T(t,\tau,\xi,\eta)d\tau, \quad (13a)$$

$$\Phi(\xi,\eta) = \frac{1}{2}a_3(\xi,\eta)\psi_1'\left(\frac{\xi}{2}\right) - \frac{1}{2}b_3(\xi,\eta)\psi_1'\left(\frac{\eta}{2}\right) - c_3(\xi,\eta)\left[\psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right) + \psi_1\left(\frac{\xi}{2}\right) + \psi_1(0)\right], \quad (13b)$$

$$T_0(\xi,\eta,t) = 1 - \int\limits_t^\xi a_3(t,\tau)S(t,\tau,\xi,\eta)d\tau - \int\limits_t^\eta a_3(t,\tau)T(t,\tau,\xi,\eta)d\tau -$$
$$- \int\limits_t^\xi d\lambda \int\limits_\lambda^\xi c_3(\lambda,\tau)S(\lambda,\tau,\xi,\eta)d\tau - \int\limits_t^\xi d\lambda \int\limits_\lambda^\eta c_3(\lambda,\tau)S(\lambda,\tau,\xi,\eta)d\tau, \quad (13c)$$

а функции $S(t,\tau,\xi,\eta)$ и $T(t,\tau,\xi,\eta)$ выражаются через коэффициенты $a_3(\xi,\eta)$, $b_3(\xi,\eta)$, $c_3(\xi,\eta)$ и непрерывны в $\overline{D_{\xi\eta}} \times \overline{D_{\xi\eta}}$, функции $T_\eta(t,\tau,\xi,\eta)$, $S_\xi(t,\tau,\xi,\eta)$, $S_\eta(t,\tau,\xi,\eta)$ непрерывны также в области $\overline{D_{\xi\eta}}\times\overline{D_{\xi\eta}}$, а функция $T_\xi(t,\tau,\xi,\eta)$ может иметь разрыв первого рода внутри этой области (см. [5]), где $D_{\xi\eta} = \big\{(\xi,\eta) : 0 < \eta < 1,\ 0 < \xi < \eta\big\}$.

Подставляя (12) в (11), с учетом соотношений

$$\nu(0) = u_{2y}(0,0) = u_{1y}(0,0) = \varphi_1'(0), \quad \psi_1'(0) = \sqrt{2}\psi_2(0) - \varphi_1'(0)$$

получим

$$u_{2\xi}(\xi,\eta) = F_\xi(\xi,\eta) + T_0(\xi,\eta,\xi)\nu(\xi) + \int\limits_0^\xi T_{0\xi}(\xi,\eta,t)\nu(t)dt +$$
$$+ \frac{1}{4}\int\limits_0^\xi S(t,\xi,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\xi\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\xi\right)\right]dt +$$
$$+ \frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt \int\limits_t^\xi S_\xi(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau +$$
$$+ \frac{1}{4}\int\limits_\xi^\eta T(\xi,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau +$$
$$+ \frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt \int\limits_t^\eta T_\xi(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau, \quad (14a)$$

$$u_{2\xi}(0,\eta) = F_\xi(0,\eta) + T_0(0,\eta,0)\nu(0) + \frac{1}{4}\int\limits_0^\eta T(0,\tau,0,\eta)w_2\left(\frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c(b-a)\tau}{4ab}\right]d\tau, \quad (14b)$$

$$F_\xi(0,\eta) = \frac{1}{2}\psi_1'(0) + \int\limits_0^\eta \Phi(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau, \quad (14c)$$

$$T_0(0,\eta,0)=1-\int\limits_0^\eta a_3(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau. \tag{14d}$$

Учитывая второе условие (11), из (14) получим

$$\int\limits_0^\eta T(0,\tau;0,\eta)\omega_2\left(-\frac{(b+a)\tau}{2}\right)\exp\left(-\frac{c(b-a)\tau}{4ab}\right)d\tau=2\sqrt{2}\psi_2\left(\frac{\eta}{2}\right)-2\psi_1'(0)-$$
$$-4\int\limits_0^\eta \Phi(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau-4\left[1-\int\limits_0^\eta a_3(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau\right]\varphi_1'(0). \tag{15}$$

Дифференцируя уравнения (15) по η и учитывая условие $T(0,\eta,0,\eta)=1$, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\omega_2\left(-\frac{(b+a)\eta}{2}\right)+\int\limits_0^\eta K_1(\tau,\eta)\omega_2\left(-\frac{(b+a)\tau}{2}\right)d\tau=g_1(\eta), \tag{16}$$

где

$$K_1(\tau,\eta)=T_\eta(0,\tau;0,\eta)\exp\left[\frac{c(a-b)(\tau-\eta)}{4ab}\right],$$

$$g_1(\eta)=\Bigg\{\sqrt{2}\psi_2'\left(\frac{\eta}{2}\right)-4\Phi(0,\eta)-4\int\limits_0^\eta \Phi(0,\tau)T_\eta(0,\tau;0,\eta)d\tau+$$
$$+4\varphi_1'(0)\left[a_3(0,\eta)+\int\limits_0^\eta a_3(0,\tau)T_\eta(0,\tau,0,\eta)d\tau\right]\Bigg\}\exp\left[\frac{c(b-a)\eta}{4ab}\right].$$

В силу свойств классов принадлежности заданных функций и коэффициентов уравнения (1), из (13) следует, что $|\Phi(0,\eta)|\leqslant \mathrm{const}$. Отсюда, учитывая неравенство $|T_\eta(t,\tau;s,\eta)|\leqslant \mathrm{const}$, получаем

$$|K_1(\tau,\eta)|\leqslant \mathrm{const} \text{ и } |g_1(\eta)|\leqslant \mathrm{const}.$$

Следовательно, уравнение (16) имеет единственное решение, т.е. $\omega_2\left(\frac{\eta}{2}\right)$ однозначно определяется для всех $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\eta}{2}\leqslant 0$. Учитывая неравенство $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\xi-\eta}{2}\leqslant 0$ и подставляя значение $\omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)$ в (12), получаем решение $u_2(\xi,\eta)$ в виде

$$u_2(\xi,\eta)=M(\xi,\eta)+\int\limits_0^\xi T_0(\xi,\eta;t)\nu(t)dt, \tag{17}$$

где

$$M(\xi,\eta)=F(\xi,\eta)+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt\int\limits_t^\xi S(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^\xi dt\int\limits_t^\eta T(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}\tau\right)\right]d\tau.$$

При $\eta = \xi = x$, полагая $M(x) = M(x, x)$, $T_0(x, t) = T_0(x, x; t)$ и $\tau(x) = u_2(x, x)$, из (17) находим

$$\tau(x) = M(x) + \int_0^x T_0(x, t)\nu(t)dt. \tag{18}$$

Дифференцируя уравнения (18), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\nu(x)$:

$$\nu(x) + \int_0^x T_{0x}(x, t)\nu(t)dt = \tau'(x) - M'(x), \tag{19}$$

где

$$M(\xi, \xi) = F(\xi, \xi) +$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^\xi dt \int_t^\xi S(t, \tau, \xi, \xi) w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right) \exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right] d\tau +$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^\xi dt \int_t^\xi T(t, \tau, \xi, \xi) w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right) \exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right] d\tau, \tag{20a}$$

$$M_\xi(\xi, \xi) = F_\xi(\xi, \xi) +$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^\xi \big(S(t, \xi, \xi, \xi) + T(t, \xi, \xi, \xi)\big) w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\xi\right) \exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\xi\right)\right] dt +$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^\xi dt \int_t^\xi \big(S_\xi(t, \xi, \xi, \xi) + T_\xi(t, \xi, \xi, \xi)\big) w_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right) \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right] d\tau, \tag{20b}$$

$$F(\xi, \xi) = 2\psi_1\left(\frac{\xi}{2}\right) - \psi_1(0) + \int_0^\xi dt \int_t^\xi \Phi(t, \tau)(S(t, \tau, \xi, \xi) + T(t, \tau, \xi, \xi))d\tau, \tag{21a}$$

$$F_\xi(\xi, \xi) = \psi_1'\left(\frac{\xi}{2}\right) + \int_0^\xi \Phi(t, \xi)(S(t, \xi, \xi, \xi) + T(t, \xi, \xi, \xi))dt +$$
$$+ \int_0^\xi dt \int_t^\xi \Phi(t, \tau)(S_\xi(t, \xi, \xi, \xi) + T_\xi(t, \xi, \xi, \xi))d\tau. \tag{21b}$$

В силу свойств класса принадлежности заданных функций и свойств функции Римана—Адамара (т.е. в силу свойств функций $S(t, \tau, \xi, \eta)$ и $T(t, \tau, \xi, \eta)$), из (20) и (21) заключаем, что $|M_\xi(\xi, \xi)| \leqslant \text{const}$. Следовательно, учитывая, что $T_{0x}(x, t)$ может иметь разрыв первого рода и правая часть уравнения непрерывна, решение интегрального уравнения (19) можем записать в виде

$$\nu(x) = \tau'(x) - M'(x) + \int_0^x \Gamma_0(x, t)[M'(t) - \tau'(t)]dt, \tag{22}$$

где $\nu(x) \in C[0, 1]$ и $\Gamma_0(x, t)$ — резольвента ядра $T_{0x}(x, t)$. Таким образом, мы нашли первое соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D_2.

Чтобы получить второе соотношение между этими функциями, перепишем уравнение (1) при $y > 0$ в виде

$$L_1 u_1 = \omega_1(bx - ay) \exp\left(-\frac{c}{2ab}(bx + ay)\right), \tag{23}$$

где $\omega_1(bx - ay)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Далее, учитывая условия задачи, с учетом (2) и соотношения

$$_cD^{\alpha}_{0y} u_1(0, y) = {}_cD^{\alpha}_{0y} \varphi_1(y) \quad \text{при } x \to +0$$

из (23) получаем

$$\omega_1(-ay) = \left[\varphi_3(y) - {}_cD^{\alpha}_{oy}\varphi_1(y) + a_1(0, y)u_x(0, y) + c_1(0, y)\varphi_1(y)\right] \exp\left(\frac{cy}{2b}\right).$$

Отсюда, учитывая неравенство $|u_x(0, y)| \leqslant \text{const}$ и предполагая, что функция $a_1(0, y)$ стремится к нулю, получаем

$$\omega_1(bx) = \left[\varphi_3\left(-\frac{bx}{a}\right) - {}_cD^{\alpha}_{0\frac{-bx}{a}}\varphi_1\left(-\frac{bx}{a}\right)\right] \exp\left(-\frac{cx}{2a}\right) + c_1\left(0, -\frac{bx}{a}\right)\varphi_1\left(-\frac{bx}{a}\right)\exp\left(-\frac{cx}{2a}\right). \tag{24}$$

С другой стороны, переходя к пределу при $y \to +0$, из уравнения (23) находим второе соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1:

$$\tau''(x) + a_1(x, 0)\tau'(x) + c_1(x, 0)\tau(x) - \nu(x) = \omega_1(bx) \exp\left(-\frac{cx}{2a}\right). \tag{25}$$

Подставляя (22) в уравнение (25), получаем

$$\tau''(x) + p(x)\tau'(x) + q(x)\tau(x) + \int\limits_0^x \Gamma_0(x, t)\tau'(t)dt = f(x), \tag{26}$$

где $p(x) = a_1(x, 0) - 1$, $q(x) = c_1(x, 0)$,

$$f(x) = \left[\varphi_3\left(-\frac{bx}{a}\right) -_c D^{\alpha}_{0-\frac{bx}{a}}\varphi_1\left(-\frac{bx}{a}\right) + c_1\left(0, -\frac{bx}{a}\right)\varphi_1\left(-\frac{bx}{a}\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{cx}{a}\right) + \int\limits_0^x \Gamma_0(x, t)M'(t)dt - M'(x).$$

Интегрируя уравнения (26) от 0 до x, с учетом начальных условий

$$\tau(0) = \varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \tau'(0) = \sqrt{2}\psi_2(0) - \varphi'_1(0) \tag{27}$$

получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau(x) - \int\limits_0^x K_2(x, t)\tau(t)dt = \Phi_2(x), \tag{28}$$

где

$$K_2(x, t) = -p(t) + (x - t)(p'(t) - q(t) + \Gamma_0(t, t) - \int\limits_t^x dt \int\limits_t^z \Gamma_{0z}(z, t)dz,$$

$$\Phi_2(x) = \int\limits_0^x (f(t) + \Gamma_0(t, 0)\varphi_1(0))(x - t)dt + (\sqrt{2}\psi_2(0) - \varphi'_1(0) - \varphi_1(0)p(0))x + \varphi_1(0),$$

причем $|K_2(x, t)| \leqslant \text{const}$, $|\Phi_2(x)| \leqslant \text{const}$.

Учитывая класс принадлежности ядра и правой части уравнения (28), решение уравнения (28) запишем в виде

$$\tau(x) = \Phi_2(x) + \int\limits_0^x R_2(x, z)\Phi_2(z)dz, \tag{29}$$

где $\Gamma_2(x,t)$ — резольвента ядра $K_2(x,t)$. Таким образом, функция $\tau(x)$ однозначно определена.

После определения функции $\tau(x)$, таким же образом однозначно определим функцию $\nu(x)$ из (22). Следовательно, решение исследуемой задачи в области Ω_2 восстанавливается как решение Коши—Гурса.

Далее, для определения функции $u_1(x,y)$ в области Ω_1 воспользуемся решением первой краевой задачи для уравнения (23), решение которого имеет вид

$$u_1(x,y)=\int\limits_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int\limits_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+\int\limits_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)d\xi-$$
$$-\int\limits_0^y\int\limits_0^1 G(x,y,\xi,\eta)\Big(\omega_1(b\xi-a\eta)\exp\Big[-\frac{c}{2ab}(b\xi+a\eta)\Big]-$$
$$-a_1(\xi,\eta)u_{1\xi}(\xi,\eta)-c_1(\xi,\eta)u_1(\xi,\eta)\Big)d\xi d\eta, \quad (30)$$

где

$$G_0(x-\xi,y)=\frac{1}{(1-\alpha)}\int\limits_0^y \eta^{-\alpha}G_\xi(x,y,\xi,\eta)d\eta,$$

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\alpha/2-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)-e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)\right];$$

здесь

$$e^{1,\delta}_{1,\delta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!(\delta-\delta n)} \quad (31)$$

— функция типа Райта (см. [4]),

$$u_1(x,y)=g(x,y)-\int\limits_0^y\int\limits_0^1\Big[(G(x,y,\xi,\eta)a_1(\xi,\eta))'_\xi-c_1(\xi,\eta)\Big]u_1(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (32)$$

$$g(x,y)=\int\limits_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int\limits_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+$$
$$+\int\limits_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)d\xi-\int\limits_0^y\int\limits_0^1\omega_1(b\xi-a\eta)\exp\left[-\frac{c}{2ab}(b\xi+a\eta)\right]d\xi d\eta+$$
$$+\int\limits_0^y\Big[a_1(1,\eta)G(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)-a_1(0,\eta)G(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)\Big]d\eta. \quad (33)$$

Так как ядро и правая часть уравнения (32) непрерывно дифференцируемы, то оно допускает единственное решение в классе непрерывно дифференцируемых функций. Таким образом, доказана однозначная разрешимость задачи 1.

Пусть теперь $b=0$; тогда вместо систем уравнений (7) и (8) рассмотрим уравнения

$$L_1u=w_1(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right),\quad L_2u=w_2(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right),$$

причем учитываем, что канонический вид второго уравнения таков:

$$u_{2\xi\eta}+a_3(\xi,\eta)u_{2\xi}+b_3(\xi,\eta)u_{2\eta}+c_3(\xi,\eta)u_2=\frac{1}{4}w_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\exp\left(-\frac{c(\xi+\eta)}{2a}\right). \quad (34)$$

Известно, что решение уравнения (34), удовлетворяющее условиям (11) и $(u_{2\xi}-u_{2\eta})\big|_{\eta=\xi}=\nu(\xi)$, имеет следующий вид (см. [1,5]):

$$u_2(\xi,\eta)=F(\xi,\eta)+\\+\int\limits_0^{\xi}T_0(\xi,\eta,t)\nu(t)dt+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi}dt\int\limits_t^{\xi}S(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\exp\left[-\frac{c(t+\tau)}{2a}\right]d\tau+\\+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi}dt\int\limits_t^{\eta}T(t,\tau,\xi,\eta)w_2\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\exp\left[-\frac{c(t+\tau)}{2a}\right]d\tau. \quad (35)$$

Как и выше, учитывая соотношения

$$\nu(0)=u_{2y}(0,0)=u_{1y}(0,0)=\varphi_1'(0),\quad \psi_1'(0)=\sqrt{2}\psi_2(0)-\varphi_1'(0)$$

и применяя второе условие (11), из (35) получим

$$\int\limits_0^{\eta}T(0,\tau;0,\eta)\omega_2\left(-\frac{\tau}{2}\right)\exp\left(-\frac{c\tau}{2a}\right)d\tau=2\sqrt{2}\psi_2\left(\frac{\eta}{2}\right)-2\psi_1'(0)-\\-4\int\limits_0^{\eta}\Phi(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau-4\left[1-\int\limits_0^{\eta}a_3(0,\tau)T(0,\tau,0,\eta)d\tau\right]\varphi_1'(0). \quad (36)$$

Дифференцируя уравнения (36) по η и учитывая условие $T(0,\eta,0,\eta)=1$, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\omega_2\left(-\frac{\eta}{2}\right)+\int\limits_0^{\eta}K_3(\tau,\eta)\omega_2\left(-\frac{\tau}{2}\right)d\tau=g_3(\eta), \quad (37)$$

где

$$K_3(\tau,\eta)=T_\eta(0,\tau;0,\eta)\exp\left[\frac{c(\tau-\eta)}{2a}\right],$$

$$g_3(\eta)=\Bigg\{\sqrt{2}\psi_2'\left(\frac{\eta}{2}\right)-4\Phi(0,\eta)-4\int\limits_0^{\eta}\Phi(0,\tau)T_\eta(0,\tau;0,\eta)d\tau+\\+4\varphi_1'(0)\left[a_3(0,\eta)+\int\limits_0^{\eta}a_3(0,\tau)T_\eta(0,\tau,0,\eta)d\tau\right]\Bigg\}\exp\left(\frac{c\eta}{2a}\right).$$

Аналогичными рассуждениями, учитывая неравенства $|\Phi(0,\eta)|\leqslant\mathrm{const}$ и $|T_\eta(t,\tau;s,\eta)|\leqslant\mathrm{const}$, можем записать $|K_3(\tau,\eta)|\leqslant\mathrm{const}$ и $|g_3(\eta)|\leqslant\mathrm{const}$. Следовательно, в силу теории интегральных уравнений Вольтерра, уравнение (37) имеет единственное решение, т.е. $\omega_2\left(\frac{\eta}{2}\right)$ однозначно определяется для всех $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\eta}{2}\leqslant 0$. Учитывая неравенства $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\xi-\eta}{2}\leqslant 0$ и подставляя значение $\omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)$ в (12), получаем решение $u_2(\xi,\eta)$ в виде

$$u_2(\xi,\eta)=M_1(\xi,\eta)+\int\limits_0^{\xi}T_0(\xi,\eta;t)\nu(t)dt,$$

где

$$M_1(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi} dt \int\limits_t^{\xi} S(t,\tau,\xi,\eta)\exp\left[-\frac{c(t+\tau)}{2a}\right] w_2\left(\frac{t-\tau}{2}\right) d\tau +$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\xi} dt \int\limits_t^{\eta} T(t,\tau,\xi,\eta)\exp\left[-\frac{c(t+\tau)}{2a}\right] w_2\left(\frac{t-\tau}{2}\right) d\tau.$$

Далее, легко заметить, что первое соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D_2, имеет такой же вид как (22), при этом $M(x,x)$ достаточно заменить на $M_1(x,x)$.

Чтобы получить второе соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в параболической части области, рассмотрим уравнение

$$L_1 u_1 = \omega_1(y)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right), \tag{38}$$

где $\omega_1(y)$ — произвольная непрерывная функция. В силу свойств класса принадлежности задачи 1 и (2), с учетом соотношения ${}_cD^{\alpha}_{0y}u_1(0,y) = {}_cD^{\alpha}_{0y}\varphi_1(y)$ при $x \to +0$ из (38) следует, что

$$\omega_1(y) = \Big[\varphi_3(y) - {}_cD^{\alpha}_{oy}\varphi_1(y) + c_1(0,y)\varphi_1(y)\Big]. \tag{39}$$

С другой стороны, переходя в этом уравнении к пределу при $y \to +0$, получаем второе соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1:

$$\tau''(x) + a_1(x,0)\tau'(x) + c_1(x,0)\tau(x) - \nu(x) = \omega_1(0)\exp\left(-\frac{cx}{a}\right). \tag{40}$$

Подставляя (39) в (40), получаем

$$\tau''(x) + p(x)\tau'(x) + q(x)\tau(x) + \int\limits_0^x \Gamma_0(x,t)\tau'(t)dt = \omega_1(0)\exp\left(-\frac{cx}{a}\right) + m(x), \tag{41}$$

где

$$p(x) = a_1(x,0) - 1, \quad q(x) = c_1(x,0), \quad m(x) = \int\limits_0^x \Gamma_0(x,t)M_1'(t)dt - M_1'(x).$$

Интегрируя уравнения (41) от 0 до x, с учетом начальных условий (27) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau(x) - \int\limits_0^x K_4(x,t)\tau(t)dt = \Phi_4(x), \tag{42}$$

где

$$K_4(x,t) = -p(t) + (x-t)\Big(p'(t) - q(t) + \Gamma_0(t,t)\Big) - \int\limits_t^x dt \int\limits_t^z \Gamma_{0z}(z,t)dz,$$

$$\Phi_4(x) = \int\limits_0^x \left(\omega_1(0)\exp\left(-\frac{ct}{a}\right) + m(t) + \Gamma_0(t,0)\varphi_1(0)\right)(x-t)dt +$$
$$+\Big(\sqrt{2}\psi_2(0) - \varphi_1'(0) - \varphi_1(0)p(0)\Big)x + \varphi_1(0),$$

причем $|K_4(x,t)| \leqslant \mathrm{const}$, $|\Phi_4(x)| \leqslant \mathrm{const}$. Учитывая класс принадлежности ядра и правой части уравнения (42), решение уравнения (42) запишем в виде

$$\tau(x) = \Phi_4(x) + \int\limits_0^x R_4(x,z)\Phi_4(z)dz, \tag{43}$$

где $\Gamma_4(x,t)$ — резольвента ядра $K_4(x,t)$. Таким образом, функция $\tau(x)$ однозначно определена.

Мы уже определили функцию $\tau(x)$. Таким же образом однозначно определяем функцию $\nu(x)$ из (22). Следовательно, решение исследуемой задачи в области Ω_2 восстанавливается как решение Коши—Гурса.

Далее, для определения функции $u_1(x,y)$ в области Ω_1 воспользуемся решением первой краевой задачи для уравнения (38), которое имеет вид

$$u_1(x,y)=\int\limits_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int\limits_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+\int\limits_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)d\xi-$$
$$-\int\limits_0^y\int\limits_0^1 G(x,y,\xi,\eta)\Big(\omega_1(\eta)\exp\Big[-\frac{c}{a}\xi\Big]-a_1(\xi,\eta)u_{1\xi}(\xi,\eta)-c_1(\xi,\eta)u_1(\xi,\eta)\Big)d\xi d\eta, \quad (44)$$

где

$$G_0(x-\xi,y)=\frac{1}{(1-\alpha)}\int\limits_0^y \eta^{-\alpha}G_\xi(x,y,\xi,\eta)d\eta,$$

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\alpha/2-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)-e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)\right];$$

здесь $e^{1,\delta}_{1,\delta}$ — функция типа Райта (см. (31));

$$u_1(x,y)=g_1(x,y)-\int\limits_0^y\int\limits_0^1\Big[(G(x,y,\xi,\eta)a_1(\xi,\eta))'_\xi-c_1(\xi,\eta)\Big]u_1(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (45)$$

$$g_1(x,y)=\int\limits_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int\limits_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+\int\limits_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)d\xi-$$
$$-\int\limits_0^y\int\limits_0^1\omega_1(\eta)\exp\Big(-\frac{c}{a}\xi\Big)d\xi d\eta+\int\limits_0^y\Big[a_1(1,\eta)G(x,y,1,\eta)\varphi_2(\eta)-a_1(0,\eta)G(x,y,0,\eta)\varphi_1(\eta)\Big]d\eta.$$

Так как ядро и правая часть уравнения (45) непрерывно дифференцируемы, то оно допускает единственное решение в классе непрерывно дифференцируемых функций. Таким образом, доказана однозначная разрешимость задачи. □

Аналогично исследуется следующая задача.

Задача 2. Требуется найти функцию $u(x,y)$ из класса

$$W=\Big\{u(x,y):\ u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\overline{\Omega}_2),\ u_{xx}\in C(\Omega_1\cup BB_0)\Big\},$$

удовлетворяющую всем условиям задачи 1, но вместо условий (4) и (5) требуем выполнения условий

$$u|_{BC}=\psi_3(x),\qquad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{BC}=\psi_4(x),\quad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,$$

а условия $0<b/a\leqslant 1$ требуем выполнения условия $-1<b/a<0$, где $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$ — заданные функции.

Теорема 2. *При выполнении условий*

$$\varphi_1(y) \in C^1[0,h] \cap C^2(0,h), \quad \varphi_2(y) \in C[0,h], \quad \varphi_3(y) \in C[0,h] \cap C^1[0,h),$$

$$\psi_3(x) \in C\left[\frac{1}{2},1\right] \cap C^1\left(\frac{1}{2},1\right], \quad \psi_4(x) \in C\left[\frac{1}{2},1\right] \cap C^1\left(\frac{1}{2},1\right)$$

решение задачи 2 *существует и единственно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: Фан, 1979.
2. *Джураев Т. Д, Сопуев А., Мамажонов М.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: Фан, 1986.
3. *Мамажанов М., Холмуратов Д.* Краевые задачи для уравнений параболического-гиперболического типа третьего порядка// Диффер. уравн. — 1989. — *25*, № 2. — С. 271–275.
4. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
5. *Пулькин С. П.* Интегральное представление решения задачи Коши—Гурса// Уч. зап. Куйбышев. гос. пед. ин-та. Физ.-мат. науки. — 1959. — № 29. — С. 25–40.
6. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа. — Ташкент: Фан, 1974.
7. *Abdullaev O. Kh., Matchanova A. A.* Non-local boundary-value problems for a loaded parabolic-hyperbolic type equation of third order involving Caputo operator// Bull. Inst. Math. — 2018.. — № 5. — P. 36–42.
8. *Islomov B., Baltaeva U.* Boudanry-value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic type equation with variable coefficients// Electron. J. Differ. Equations. — 2015. — 221.
9. *Kadirkulov B. J.* Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2014. — 57.
10. *Karimov E. T., Akhatov J.* A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2014. — 14.
11. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: North-Holland, 2006.
12. *Praveen A., Abdullaev O. Kh.* A nonlocal problem with integral gluing condition for a third-order loaded equation with parabolic-hyperbolic operator involving fractional derivatives// Math. Meth. Appl. Sci. — 2019. — *43*. — P. 3716–3726.
13. *Sadarangani K., Abdullaev O. Kh.* A non-local problem with discontinuous matching condition for loaded mixed-type equation involving the Caputo fractional derivative// Adv. Difference Equations. — 2016. — 241.
14. *Yuldashev T. K., Islomov B. I., Alikulov E. K.* Boundary-value problems for loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — P. 926–944.

Абдуллаев Обиджон Хайруллаевич
Институт математики имени В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `obidjon.mth@gmail.com`

Матчанова Айгул Азатбаевна
Институт ионно-плазменных и лазерных технологий имени У. А. Арифова
Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `oygul87-87@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 24–34
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-24-34

УДК 517.953.5

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

© 2022 г. **Ю. П. АПАКОВ, Т. К. ЮЛДАШЕВ, А. Х. ЖУРАЕВ**

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости одной краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками. При помощи функции Грина в явном виде построено решение поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, уравнение третьего порядка, уравнение с кратными характеристиками, однозначная разрешимость, краевая задача.

ON THE SOLVABILITY OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

© 2022 **Yu. P. APAKOV, T. K. YULDASHEV, A. Kh. ZHURAEV**

Abstract. In this paper, we discuss the unique solvability of a boundary-value problem for an inhomogeneous third-order partial differential equation with multiple characteristics. Using the Green function, we is construct a solution of this boundary-value problem in the explicit form.

Keywords and phrases: partial differential equation, third-order equation, equation with multiple characteristics, unique solvability, boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 35G15

1. Введение. Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении ряда задач в теории нелинейной акустики, в гидродинамической теории космической плазмы и в фильтрации жидкости в пористых средах. Часто резкие изменения параметров потока происходят в узких областях, прилагающих к ударным волнам. Градиенты параметров потока в таких узких областях могут быть настолько значительными, что наряду с нелинейным характером движения учитываются влияния вязкости и теплопроводности. Такие течения называются короткими волнами. К теории коротких волн относится, в частности, теория трансзвуковых течений. Впервые в работе О. С. Рыжова [12] с учетом свойств вязкости и теплопроводности газа из системы Навье—Стокса было получено вязко-трансзвуковое уравнение (ВТ-уравнение)

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}.$$

При $\nu = 1$ ВТ-уравнение описывает осесимметричный поток. При $\nu = 0$ ВТ-уравнение принимает следующий частный вид, описывающий плоскопараллельный поток (см. [6]):

$$u_{xxx} + u_{yy} = u_x u_{xx}. \tag{1}$$

Уравнение, сопряженное к уравнению (1), было исследовано в [22–24, 26, 27]. В [25] для дифференциального уравнения построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала. В [1, 2] с помощью метода потенциалов изучены различные краевые задачи. В [7, 8] были построены фундаментальные решения для однородного уравнения, сопряженного к уравнению (1). При этом фундаментальные решения выражены через вырожденные гипергеометрические функции $\Psi(a, b; x)$, $\Phi(a, b; x)$:

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{\frac{1}{3}} w(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad V(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{\frac{1}{3}} \varphi(t), \quad t < 0,$$

где

$$w(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi} t \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \quad \varphi(t) = \frac{36t}{\sqrt{3}\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Phi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \quad \tau = \frac{4}{27} t^3, \quad t = (x - \xi)|y - \eta|^{-\frac{2}{3}}.$$

На основе оценок, справедливых для вырожденных гипергеометрических функций, получены оценки для фундаментальных решений при стремлении аргумента в бесконечность. Для функции $U(x, y; \xi, \eta)$ справедливы следующие оценки при $||y - \eta|^{-2/3}(x - \xi)| \to \infty$:

$$\left|\frac{\partial^{h+k} U}{\partial x^h dy^k}\right| \leqslant C_{kh} \big|y - \eta\big|^{\frac{1-(-1)^k}{2}} \big|x - \xi\big|^{-\frac{1}{2}\left[2h+3k-1+\frac{3}{2}(1-(-1)^k)\right]},$$

где $C_{kh} = \mathrm{const}$, $k, h = 0, 1, 2, \ldots$ Для $V(x, y; \xi, \eta)$ имеют место аналогичные оценки при $(x - \xi)|y - \eta|^{-2/3} \to -\infty$. Также отметим работы [3–5, 9–11, 13–21, 28], в которых рассмотрены прямые и обратные краевые задачи для уравнений третьего порядка.

2. Постановка задачи. В прямоугольной области $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y). \tag{2}$$

Регулярным решением уравнения (2) будем называть функцию $u(x, y)$, которая в области D удовлетворяет уравнению (2) и принадлежит классу $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$.

Задача A. Найти регулярное решение уравнения (2) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_y(x, 1) = \varphi_2(x), \tag{3}$$

$$u_{xx}(0, y) = \psi_1(y), \quad u_x(1, y) = \psi_2(y), \quad u_{xx}(1, y) = \psi_3(y), \tag{4}$$

где

$$\varphi_i(x) \in C[0; 1], \quad i = 1, 2, \quad \psi_j(y) \in C[0; 1], \quad j = \overline{1, 3}, \quad g(x, y) \in C^{0,2}_{x,y}(\overline{D}).$$

Кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$\varphi_1''(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_1''(1) = \psi_3(1), \quad \varphi_1'(1) = \psi_2(1),$$
$$\varphi_2''(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2''(1) = \psi_3(1), \quad \varphi_1'(1) = \psi_2(1), \quad g(x, 0) = g(x, 1) = 0.$$

В [3, 9] изучены некоторые краевые задачи в прямоугольной области для уравнения, сопряжённого к уравнению (2). В этих работах решение построено методом Фурье и для этого потребовались нулевые данные на $y = 0$ и $y = l$. В настоящей работе построена функция Грина в прямоугольной области для второй краевой задачи и с помощью функции Грина найден явный вид решения поставленной задачи.

3. Единственность решения.

Теорема 1. *Задача A имеет единственное решение с точностью до постоянного слагаемого, т.е., если существует два решения, то их разность равна постоянному числу.*

Доказательство. Пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ является решением однородной задачи A. Рассмотрим тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(uu_y) + u_y^2 = 0. \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области D и учитывая однородные краевые условия (3), (4), получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2(0,y)dy + \iint_D u_y^2(x,y)dxdy = 0.$$

Отсюда $u_y(x,y) = 0$, т.е. $u(x,y) = k_0(x)$. Подставляя это в уравнение (1), получим $k_0'''(x) = 0$. Тогда из условий $k_0''(0) = k_0'(1) = k_0''(1) = 0$ следует, что $k_0(x) = \mathrm{const}$. Отсюда $u(x,y) = \mathrm{const}$. Теорема 1 доказана. □

4. Существование решения задачи A.

Рассмотрим следующие сопряженные дифференциальные операторы

$$L \equiv \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad L^* \equiv -\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Для этих дифференциальных операторов имеет место тождество

$$\varphi L[\psi] - \psi L^*[\varphi] \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}(\varphi\psi_{\xi\xi} - \varphi_\xi\psi_\xi + \varphi_{\xi\xi}\psi) - \frac{\partial}{\partial \eta}(\varphi\psi_\eta - \varphi_\eta\psi),$$

где φ, ψ — достаточно гладкие функции. Интегрируя тождество по области D, получаем

$$\iint_D [\varphi L[\psi] - \psi L^*[\varphi]]d\xi d\eta = \iint_D \frac{\partial}{\partial \xi}(\varphi\psi_{\xi\xi} - \varphi_\xi\psi_\xi + \varphi_{\xi\xi}\psi)d\xi d\eta - \iint_D \frac{\partial}{\partial \eta}(\varphi\psi_\eta - \varphi_\eta\psi)d\xi d\eta. \tag{6}$$

Возьмем теперь в качестве функции φ фундаментальное решение $U(x,y;\xi,\eta)$ однородного уравнения $u_{xxx} - u_{yy} = 0$, которое как функция от (ξ,η) при $(x,y) \neq (\xi,\eta)$ удовлетворяет сопряженному уравнению:

$$L^*[U] \equiv -U_{\xi\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0.$$

В качестве ψ берем любое регулярное решение $u(x,y)$ однородного дифференциального уравнения $u_{xxx} - u_{yy} = 0$. Учитывая, что функция $U_\eta(x,y;\xi,\eta)$ имеет особенность при $y = \eta$, область D разделим на две области так, чтобы

$$D = \lim_{\varepsilon\to 0}(D_1^\varepsilon \cup D_2^\varepsilon),$$

где

$$D_1^\varepsilon = \Big\{(\xi,\eta) : 0 < \xi < 1,\ 0 < \eta < y - \varepsilon\Big\}, \quad D_2^\varepsilon = \Big\{(\xi,\eta) : 0 < \xi < 1,\ y + \varepsilon < \eta < 1\Big\}.$$

Тогда тождество (6) принимает вид

$$\iint_D U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^1\int_0^{y-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \xi}(Uu_{\xi\xi} - U_\xi u_\xi + U_{\xi\xi}u)d\xi d\eta +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^1\int_{y+\varepsilon}^1\frac{\partial}{\partial \xi}(Uu_{\xi\xi} - U_\xi u_\xi + U_{\xi\xi}u)d\xi d\eta -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1\int\limits_0^{y-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}(Uu_\eta-U_\eta u)d\xi d\eta-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1\int\limits_{y+\varepsilon}^{l}\frac{\partial}{\partial\eta}(Uu_\eta-U_\eta u)d\xi d\eta=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^{y-\varepsilon}(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{y+\varepsilon}^{1}(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1(Uu_\eta-U_\eta u)\Big|_{\eta=0}^{\eta=y-\varepsilon}d\xi-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1(Uu_\eta-U_\eta)\Big|_{\eta=y+\varepsilon}^{\eta=1}d\xi$$

$$=\int\limits_0^{y}(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta+\int\limits_y^{1}(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1[U(x,y;\xi,y-\varepsilon)u_\eta(\xi,y-\varepsilon)-U(x,y;\xi,0)u_\eta(\xi,0)]d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1[U_\eta(x,y;\xi,y-\varepsilon)u(\xi,y-\varepsilon)-U_\eta(x,y;\xi,0)u(\xi,0)]d\xi-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1[U(x,y;\xi,1)u_\eta(\xi,1)-U(x,y;\xi,y+\varepsilon)u_\eta(\xi,y+\varepsilon)]d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1[U_\eta(x,y;\xi,1)u(\xi,1)-U_\eta(x,y;\xi,y+\varepsilon)u(\xi,y+\varepsilon)]d\xi=$$

$$=\int\limits_0^1(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta-\int\limits_0^1[U(x,y;\xi,1)u_\eta(\xi,1)-$$

$$-U(x,y;\xi,0)u_\eta(\xi,0)]d\xi+\int\limits_0^1[U_\eta(x,y;\xi,1)u(\xi,1)-U_\eta(x,y;\xi,0)u(\xi,0)]d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1U_\eta(x,y;\xi,y-\varepsilon)u(\xi,y-\varepsilon)d\xi-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1U_\eta(x,y;\xi,y+\varepsilon)u(\xi,y+\varepsilon)d\xi.$$

Упростив это выражение, получим

$$\iint\limits_D U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int\limits_0^1[Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u]\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta-$$

$$-\int\limits_0^1U(x,y;\xi,\eta)u_\eta(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1}d\xi+\int\limits_0^1U_\eta(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1}d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1U_\eta(x,y;\xi,y-\varepsilon)u(\xi,y-\varepsilon)d\xi-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1U_\eta(x,y;\xi,y+\varepsilon)u(\xi,y+\varepsilon)d\xi.\quad(7)$$

Учитывая [3, теорема 3], из (7) получим

$$\iint\limits_D U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta = \int\limits_0^1 (Uu_{\xi\xi} - U_\xi u_\xi + U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} d\eta -$$

$$- \int\limits_0^1 U(x,y;\xi,\eta)u_\eta(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} d\xi + \int\limits_0^1 U_\eta(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} d\xi - 2u(x,y).$$

Отсюда окончательно находим:

$$2u(x,y) = \int\limits_0^1 (Uu_{\xi\xi} - U_\xi u_\xi + U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} d\eta - \int\limits_0^1 (Uu_\eta - U_\eta u)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} d\xi - \iint\limits_D U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (8)$$

Пусть теперь $W(x,y,\xi,\eta)$ — любое регулярное решение сопряженного уравнения $L^*[W] = 0$, а $u(x,y)$ — любое регулярное решение уравнения $u_{xxx} - u_{yy} = g(x,y)$. Тогда полагая в (6) $\varphi = W(x,y;\xi,\eta)$, $\psi = u(\xi,\eta)$, имеем

$$0 = \int\limits_0^1 (Wu_{\xi\xi} - W_\xi u_\xi + W_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} d\eta - \int\limits_0^1 (Wu_\eta - W_\eta u)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} d\xi - \iint\limits_D W(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (9)$$

Из тождеств (8) и (9) получим

$$2u(x,y) = \int\limits_0^1 (Gu_{\xi\xi} - G_\xi u_\xi + G_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} d\eta - \int\limits_0^1 (Gu_\eta - G_\eta u)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1} d\xi - \iint\limits_D G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (10)$$

где $G(x,y;\xi,\eta) = U(x,y;\xi,\eta) - W(x,y;\xi,\eta)$. Построим теперь функцию $G(x,y;\xi,\eta)$, которая должна обладать следующими свойствами при $(x,y) \neq (\xi,\eta)$:

$$\begin{cases} L[G] = 0, \\ G_y(x,0;\xi,\eta) = G_y(x,1;\xi,\eta) = 0, \\ G_{xx}(0,y;\xi,\eta) = G_{xx}(1,y;\xi,\eta) = G_x(1,y;\xi,\eta) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

по переменным (x,y) и

$$\begin{cases} L^*[G] = 0, \\ G_\eta(x,y;\xi,0) = G_\eta(x,y;\xi,1) = 0, \\ G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta) = G_{\xi\xi}(x,y;1,\eta) = G_\xi(x,y;0,\eta) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

по переменным (ξ,η). С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача A_1. Найти регулярное решение в области D уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,1) = 0, \qquad 0 < x < 1,$$
$$u_{xx}(0,y) = u_x(1,y) = u_{xx}(1,y) = 0, \quad 0 < y < 1.$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде ряда Фурье

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\cos(k\pi y). \quad (13)$$

Предполагается, что функцию $g(x,y)$ можно разложить в ряд Фурье по системе собственных функций $\{\cos(k\pi y)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$g(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\cos(k\pi y), \quad (14)$$

где

$$g_k(x) = 2\int\limits_0^1 g(x,y)\cos(k\pi y)dy.$$

Подставляя ряды Фурье (13) и (14) в уравнение (2), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(X_k'''(x) + \lambda_k^3 X_k(x) - g_k(x))\cos(k\pi y) = 0.$$

Отсюда, используя ортонормированность собственных функций $\{\cos(k\pi y)\}_{k=1}^{\infty}$, придем к следующей спектральной задаче

$$\begin{cases} L[X_k] \equiv X_k'''(x) + \lambda_k^3 X_k(x) = g_k(x), \\ X_k''(0) = X_k'(1) = X_k''(1) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

где $\lambda_k^3 = (k\pi)^2$. Решение задачи (15) будем искать методом построения функции Грина $G_k(x,\xi)$. Как известно, функция Грина обладает следующими свойствами:

(i) функция $G_k(x,\xi)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по x на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$;

(ii) ее вторая производная по x в точке $x = \xi$ имеет разрыв 1-го рода, причем скачок равен 1, т.е.

$$\left.\frac{\partial^2 G_k(x,\xi)}{\partial x^2}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^2 G_k(x,\xi)}{\partial x^2}\right|_{x=\xi-0} = 1;$$

(iii) в каждом из интервалов $0 \leqslant x < \xi$ и $\xi < x \leqslant 1$ функция $G_k(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от x, является решением следующего дифференциального уравнения

$$L[G_k] = \frac{\partial^3 G_k}{\partial x^3} + \lambda_k^3 G_k = 0;$$

(iv) $G_{kxx}(0,\xi) = G_{kx}(1,\xi) = G_{kxx}(1,\xi) = 0$.

Теперь приступим к построению функции Грина. Так как линейно независимые решения уравнения

$$X_k'''(x) + \lambda_k^3 X_k(x) = 0$$

имеют вид

$$X_1(x) = e^{-\lambda_k x}, \quad X_2(x) = e^{\lambda_k x/2}\cos(\beta_k x), \quad X_3(x) = e^{\lambda_k x/2}\sin(\beta_k x), \quad \beta_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k,$$

представим искомую функцию Грина в виде

$$G_k(x,\xi) = \begin{cases} a_1 e^{-\lambda_k x} + a_2 e^{\lambda_k x/2}\cos(\beta_k x) + a_3 e^{\lambda_k x/2}\sin(\beta_k x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ b_1 e^{-\lambda_k x} + b_2 e^{\lambda_k x/2}\cos(\beta_k x) + b_3 e^{\lambda_k x/2}\sin(\beta_k x), & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{16}$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — пока что неизвестные функции от ξ. Из свойств (i) и (ii) для функции Грина и положив $c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$, $k = 1,2,3$, получим следующую систему линейных функционально-алгебраических уравнений относительно функций $c_k(\xi)$:

$$\begin{cases} c_1 e^{-\lambda_k \xi} + c_2 e^{\lambda_k \xi/2}\cos(\beta_k \xi) + c_3 e^{\lambda_k \xi/2}\sin(\beta_k \xi) = 0, \\ -c_1 e^{-\lambda_k \xi} + c_2 e^{\lambda_k \xi/2}\cos\left(\beta_k \xi + \dfrac{\pi}{3}\right) + c_3 e^{\lambda_k \xi/2}\sin\left(\beta_k \xi + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0, \\ c_1 e^{-\lambda_k \xi} + c_2 e^{\lambda_k \xi/2}\cos\left(\beta_k \xi + \dfrac{2\pi}{3}\right) + c_3 e^{\lambda_k \xi/2}\sin\left(\beta_k \xi + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\lambda_k^2}. \end{cases}$$

Определитель этой системы равен значению вронскиана $W(X_1,X_2,X_3)$ в точке $x = \xi$:

$$W(X_1,X_2,X_3) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Вычислив Δc_i, $i=1,2,3$, находим:

$$c_1(\xi)=\frac{e^{\lambda_k\xi}}{3\lambda_k^2},\quad c_2(\xi)=-\frac{2e^{-\lambda_k\xi/2}\sin\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)}{3\lambda_k^2},\quad c_3(\xi)=\frac{2e^{-\lambda_k\xi/2}\cos\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)}{3\lambda_k^2}.$$

Далее, из свойства (iv) для функции Грина получаем следующие соотношения

$$\begin{cases} b_1-\dfrac{1}{2}b_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b_3=\dfrac{1}{3\lambda_k^2}\big(e^{\lambda_k\xi}+2e^{-\lambda_k\xi/2}\cos(\beta_k\xi)\big),\\ -b_1e^{-\lambda_k}+b_2e^{\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\dfrac{\pi}{3}\right)+b_3e^{\lambda_k/2}\sin\left(\beta_k+\dfrac{\pi}{3}\right)=0,\\ b_1e^{-\lambda_k}+b_2e^{\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\dfrac{2\pi}{3}\right)+b_3e^{\lambda_k/2}\sin\left(\beta_k+\dfrac{2\pi}{3}\right)=0. \end{cases}$$

В силу линейной независимости величин $X_1''(0)$, $X_2'(1)$, $X_3''(1)$, определитель этой системы отличен от нуля и равен

$$\Delta=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{\lambda_k}-2e^{-\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\right)\neq 0.$$

Вычислив Δb_i, $i=1,2,3$, находим:

$$\begin{aligned} b_1&=\frac{1}{\overline{\Delta}}\big(e^{\lambda_k\xi}+2e^{-\lambda_k\xi/2}\cos(\beta_k\xi)\big),\\ b_2&=\frac{1}{\overline{\Delta}}\big(2e^{(\xi-3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k)+4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k\xi)\cdot\cos(\beta_k)\big),\\ b_3&=\frac{1}{\overline{\Delta}}\big(2e^{(\xi-3/2)\lambda_k}\sin(\beta_k)+4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k\xi)\cdot\sin(\beta_k)\big), \end{aligned}$$

где

$$\overline{\Delta}=3\lambda_k^2\left(1-2e^{-3\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Учитывая, что $a_k(\xi)=b_k(\xi)-c_k(\xi)$, $k=1,2,3$, находим

$$a_1=\frac{1}{\overline{\Delta}}\left(2e^{-\lambda_k\xi/2}\cos(\beta_k\xi)+2e^{(\xi-3/2)\lambda_k}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$\begin{aligned} a_2=\frac{1}{\overline{\Delta}}\Big(&2e^{(\xi-3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k)+4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k\xi)\cdot\cos(\beta_k)+\\ &+2e^{-\lambda_k\xi/2}\sin\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)-4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\sin\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3=\frac{1}{\overline{\Delta}}\Big(&2e^{(\xi-3/2)\lambda_k}\sin(\beta_k)+4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k\xi)\cdot\sin(\beta_k)-\\ &-2e^{-\lambda_k\xi/2}\cos\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)+4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\cos\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\Big). \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в формулу (16), получим функцию $G_k(x,\xi)$ в виде:

$$\begin{aligned} G_k(x,\xi)=\frac{1}{\overline{\Delta}}\Big\{&2e^{-(\xi+2x)\lambda_k/2}\cos(\beta_k\xi)+\\ &+2e^{-(3-2\xi+2x)\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)+2e^{-(3-2\xi-x)\lambda_k/2}\cos\big[\beta_k(x-1)\big]+\\ &+4e^{-(\xi-x+3)\lambda_k/2}\cos\big[\beta_k\xi\big]\cos\big[\beta_k(x-1)\big]+2e^{-(\xi-x)\lambda_k/2}\sin\left(\beta_k(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right)-\\ &-4e^{-(\xi-x+3)\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta_k(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right)\Big\},\quad 0\leqslant x\leqslant\xi, \end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned} G_k(x,\xi)=\frac{1}{\overline{\Delta}}\Big\{&e^{-(x-\xi)\lambda_k}+2e^{-(\xi/2+x)\lambda_k}\cos(\beta_k\xi)+2e^{-(3-2\xi-x)\lambda_k/2}\cos\big[\beta_k(x-1)\big]+\\ &+4e^{-(3+\xi-x)\lambda_k/2}\cos(\beta_k\xi)\cos\big[\beta_k(x-1)\big]\Big\},\quad \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{aligned}\tag{18}$$

Легко можно убедиться, что функции, определенные формулами (17) и (18), обладают всеми свойствами, сформулированными выше для определения функции Грина.

Так как решение задачи (15) имеет вид

$$X_k(x) = \int_0^1 G_k(x,\xi) g_k(\xi) d\xi, \tag{19}$$

то, подставляя это представление (19) в ряд Фурье (13), получим решение задачи A_1:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 G_k(x,\xi) g_k(\xi) d\xi \cdot \cos(\pi k y) = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi) \cos(\pi k) \cdot g_k(\xi) d\xi. \tag{20}$$

Если функция $u(x,y)$ и ее производные u_{xxx}, u_{yy} сходятся равномерно в области D, то функция $u(x,y)$ определяет решение задачи A_1. Для функции (20) получим оценку

$$|u(x,y)| \leqslant \left| \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi) \cos(\pi k y) g_k(\xi) d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |G_k(x,\xi)| |\cos(\pi k y)| |g_k(\xi)| d\xi \leqslant \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |G_k(x,\xi)| \cdot |g_k(\xi)| d\xi. \tag{21}$$

При сделанных предположениях относительно $g(x,y)$ имеет место неравенство

$$|g_k(\xi)| \leqslant \frac{M_1}{k^2}, \quad M_1 = \mathrm{const} > 0,$$

где $g_k(\xi)$ — коэффициенты Фурье в разложении функции $g(x,y)$ на отрезке $[0;1]$. Учитывая эту оценку, неравенство (21) можно записать в виде

$$|u(x,y)| \leqslant \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |G_k(x,\xi)| \cdot |g_k(\xi)| d\xi \leqslant M_1 \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |G_k(x,\xi)| d\xi. \tag{22}$$

Вычисляя оценки для функции $G_k(x,\xi)$, из (17) и (18), находим:

$$|G_k(x,\xi)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{3} \dfrac{e^{-3\lambda_k/2}}{\lambda_k^2} + \dfrac{2e^{-\lambda_k \delta_1/2}}{\lambda_k^2}, & 0 \leqslant x < \xi, \quad 0 < \delta_1 < \xi - x, \\ \dfrac{4}{3} \dfrac{e^{-3\lambda_k/2}}{\lambda_k^2} + \dfrac{4}{3} \dfrac{e^{-\lambda_k \delta_2/2}}{\lambda_k^2} + \dfrac{1}{3} \dfrac{e^{-\lambda_k \delta_2}}{\lambda_k^2}, & \xi < x \leqslant 1, \quad 0 < \delta_2 < x - \xi \end{cases}$$

или

$$|G_k(x,\xi)| \leqslant \frac{4}{3} \frac{e^{-3\lambda_k/2}}{\lambda_k^2} + 2 \frac{e^{-\lambda_k \delta_1/2}}{\lambda_k^2} + \frac{1}{3} \frac{e^{-\lambda_k \delta_2}}{\lambda_k^2} \leqslant M_2 k^{-\frac{4}{3}}, \quad M_2 = \mathrm{const} > 0. \tag{23}$$

Тогда с учетом оценки (23) из неравенства (22), получим

$$|u(x,y)| \leqslant M_3 k^{-10/3}, \quad M_3 = \mathrm{const} > 0.$$

Отсюда следует, что ряд (20) сходится абсолютно и равномерно. Покажем также, что ряд, составленный из производных u_{xxx}, сходится абсолютно и равномерно. Дифференцируя (20) по x три раза, получим

$$\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3} = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial x^3} G_k(x,\xi) g_k(\xi) d\xi = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 G_k(x,\xi) g_k(\xi) d\xi. \tag{24}$$

Для ряда в (24) имеем оценку

$$\left|\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}\right| \leqslant \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\partial^3}{\partial x^3} G_k(x,\xi)\right| |g_k(\xi)| d\xi \leqslant M_4 \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |\lambda_k^3 G_k(x,\xi)| d\xi, \quad M_4 = \text{const} > 0. \quad (25)$$

Так как

$$|\lambda_k^3 G_k(x,\xi)| \leqslant \frac{4}{3}\lambda_k e^{-3\lambda_k/2} + 2\lambda_k e^{-\lambda_k \delta_1/2} + \frac{1}{3}\lambda_k e^{-\lambda_k \delta_2} \leqslant M_5 k^{\frac{2}{3}}, \quad M_5 = \text{const} > 0,$$

то для (25) имеем оценку

$$\left|\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}\right| \leqslant M_6 k^{-4/3}, \quad M_6 = \text{const} > 0.$$

Отсюда следует, что ряд (24) сходится абсолютно и равномерно. Поскольку

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3},$$

аналогично доказывается абсолютная и равномерная сходимость ряда, составленного из производных $\partial^2 u/\partial y^2$. Отсюда следует возможность почленного дифференцирования ряда (20), необходимый для обоснования существования классического решения уравнения (2). Изменение порядка суммирования и интегрирования всегда законно. В силу этого утверждаем, что ряд под интегралом (20) абсолютно и равномерно сходится по ξ.

Решение (20) задачи A_1 запишем в следующем виде:

$$u(x,y) = \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\cos(\pi k y)\cdot g_k(\xi) d\xi = 2\int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi) \int\limits_0^1 g(\xi,\eta)\cos(\pi k\eta)\cdot\cos(\pi k y) d\eta d\xi =$$

$$= 2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 g(\xi,\eta)\sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\cos(\pi k\eta)\cdot\cos(\pi k y) d\xi d\eta = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 G(x,\xi,y,\eta) g(\xi,\eta) d\xi d\eta,$$

где

$$G(x,\xi,y,\eta) = 2\sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\cos(\pi k\eta)\cdot\cos(\pi k y). \quad (26)$$

Легко убедиться, что для функции $G(x,\xi,y,\eta)$ выполняются условия (11) и (12). Функция (26) является функцией Грина первой краевой задачи в области D. Сходимость ряда (26) следует из оценки (23) для функций $G_k(x,\xi)$, $x \neq \xi$.

Отметим, что для функции $G(x,\xi,y,\eta)$ выполняются краевые условия (11) и (12), а для функции $u(x,y)$ выполняются краевые условия (3) и (4). Поэтому из представления (10) получим решение задачи A в явном виде:

$$2u(x,y) = \int\limits_0^1 G(x,y,1,\eta)\psi_3(\eta) d\eta - \int\limits_0^1 G(x,y,0,\eta)\psi_1(\eta) d\eta -$$

$$- \int\limits_0^1 G_\xi(x,y,1,\eta)\psi_2(\eta) d\eta + \int\limits_0^1 G_\eta(x,y,\xi,1)\varphi_2(\xi) d\xi -$$

$$- \int\limits_0^1 G_\eta(x,y,\xi,0)\varphi_1(\xi) d\xi - \iint\limits_D G(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) d\xi d\eta. \quad (27)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi_i(x) \in C[0;1], \quad i = 1,2, \qquad \psi_j(y) \in C[0;1], \quad j = \overline{1,3}, \qquad g(x,y) \in C^{0,2}_{x,y}(\overline{D}).$$

Если имеют место условия согласования, то задача A однозначно разрешима и её решение имеет вид (27)*, где функция Грина* $G(x,y;\xi,\eta)$ *определяется из формулы* (26)*.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдиназаров С.* Об одном уравнении третьего порядка// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1986. — № 3. — С. 21–27.
2. *Абдиназаров С., Собиров З. А.* Об одной задаче для смешанного уравнения высокого нечетного порядка с кратными характеристиками// Узбек. мат. ж. — 2003. — № 2. — С. 3–8.
3. *Апаков Ю. П.* Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных// Узбек. мат. ж. — 2007. — № 1. — С. 14–23.
4. *Апаков Ю. П.* К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. — Ташкент: Fan va texnologiya, 2019.
5. *Балкизов Ж. А., Кадзаков А. Х.* О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками// Изв. Кабардино-Балкар. науч. центра РАН. — 2010. — № 4. — С. 64–69.
6. *Диесперов В. Н.* О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения.// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1972. — *12*, № 5. — С. 1265–1279.
7. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками// Вестн. Самар. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — № 2 (15). — С. 18–26.
8. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени// Укр. мат. ж. — 2010. — *62*, № 1. — С. 40–51.
9. *Иргашев Ю., Апаков Ю. П.* Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа// Узбек. мат. ж. — 2006. — № 2. — С. 44–51.
10. *Кожанов А. И., Лукина Г. А.* Пространственно-нелокальные задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений третьего порядка// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 7. — С. 906–917.
11. *Лукина Г. А.* Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега—де Фриза// Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Мат. модел. програм. — 2011. — № 17 (234). — С. 52–61.
12. *Рыжов О. С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа// Прикл. мат. мех. — 1952. — *2*, № 6. — С. 1004–1014.
13. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнение смешанного типа третьего порядка// Докл. РАН. — 2009. — *427*, № 5. — С. 593–596.
14. *Шубин В. В.* Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом// Вестн. НГУ. Сер. Мат. мех. информ. — 2012. — *12*, № 1. — С. 126–138.
15. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка// Вестн. Самар. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — № 1 (34). — С. 56–65.
16. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма третьего порядка с вырожденным ядром// Владикавказ. мат. ж. — 2016. — *18*, № 2. — С. 76–85.
17. *Юлдашев Т. К.* Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 9. — С. 74–79.
18. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырождением ядра// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 101–110.
19. *Юлдашев Т. К.* Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром// Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2017. — № 1 (38). — С. 42–54.
20. *Ashyraliev A., Aggez N., Hezenci F.* Boundary-value problem for a third-order partal differential equation// AIP Conf. Proc. — 2012. — *1470*, № 1. — P. 130–133.
21. *Bendjajazia N., Guezane-Lokoudi A., Khaldi R.* On third-order boundary-value problems with multiple characteristics// Differ. Equations Dynam. Systems. — https://doi.org/10.1007/s12591-019-00507-6.

22. *Block H.* Sur les équations linéaires aux dérivées parielles à caratéristiques multiples. Note 1// Ark. Mat. Astron. Fys. — 1912. — *7*, № 13. — P. 1–34.
23. *Block H.* Sur les équations linéaires aux dérivées parielles à caratéristiques multiples. Note 2// Ark. Mat. Astron. Fys. — 1912. — *7*, № 21. — P. 1–30.
24. *Block H.* Sur les équations linéaires aux dérivées parielles à caratéristiques multiples. Note 3// Ark. Mat. Astron. Fys. — 1912-1913. — *8*, № 23. — P. 1–51.
25. *Cattabriga L.* Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple// Rend. Semin. Mat. Univ. Padava. — 1961. — № 31. — P. 1–45.
26. *Del Vicchio E.* Sulle equazioni// Mem. R. Accad. Sci. Ser. 2. — 1915. — *66*. — P. 1–41.
27. *Del Vicchio E.* Sur deux problemes d'integration pour les equazios paraboliques// Ark. For Mat. Astr. Fys. — 1916. — *11*. — P. 32–43.
28. *Yuldashev T. K., Islomov B. I., Alikulov E. K.* Boundary-value problems for loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — P. 926–944.

Апаков Юсупжон Пулатович
Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан;
Наманганское отделение Института математики им. В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Наманган, Узбекистан
E-mail: `yusupjonapakov@gmail.com`

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

Жураев Абдулла Хатамович
Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
E-mail: `juraevabdulla@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 35–48
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-35-48

УДК 517.956.3

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. **А. Т. АСАНОВА**

Аннотация. Рассматривается периодическая задача на плоскости для системы гиперболических уравнений второго порядка со смешанными производными. Исследуются вопросы существования единственного классического решения рассматриваемой задачи и способы его построения.

Ключевые слова: система гиперболических уравнений, двоякопериодическое решение, разрешимость, алгоритм, метод введения функциональных параметров.

ON THE THEORY OF PERIODIC SOLUTIONS OF SYSTEMS OF HYPERBOLIC EQUATIONS IN THE PLANE

© 2022 **A. T. ASSANOVA**

Abstract. A periodic problem on the plane for a system of second-order hyperbolic equations with mixed derivatives is considered. The existence of a unique classical solution of the problem is examined and methods of constructing it are discussed.

Keywords and phrases: system of hyperbolic equations, doubly periodic solution, solvability, algorithm, method of functional parameters.

AMS Subject Classification: 35L51, 35L53, 34B10, 34C25, 34K13

1. Введение и постановка задачи. Периодические задачи для уравнений в частных производных гиперболического типа широко используются в качестве математической модели реальных физических процессов (см. [1,9–16,19,21–28]) и представляют собой важную часть качественной теории уравнений математической физики. Исследованию периодических решений уравнений и систем гиперболического типа посвящены работы многих авторов. Для решения периодической краевой задачи применялись методы качественной теории дифференциальных уравнений, метод Фурье, методы функционального анализа, асимптотические методы, вариационный метод и др. (обзор и библиографию см. в [11, 13, 19, 25, 28]).

Вопросы нахождения эффективных признаков существования единственного периодического на плоскости решений систем гиперболических уравнений со смешанными производными и методы нахождения приближенных решений рассматриваемых задач остаются открытыми и представляют огромный интерес в приложениях (см. [10–12, 26, 27]). Эти вопросы требуют разработки специальных методов решения.

В [4] была исследована периодическая задача на плоскости решения для системы линейных гиперболических уравнений (1), при отсутствии производной по временной переменной, т.е. при $B(t, x) = 0$. Путем сведения к семейству периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональным соотношениям были установлены достаточные условия существования единственного периодического решения на плоскости системы гиперболических уравнений в терминах исходных данных.

В настоящей работе вопросы существования, единственности и нахождения периодических по обеим переменным решений системы гиперболических уравнений второго порядка изучаются на основе введения дополнительных функциональных параметров (см. [2, 5–7, 20]). В настоящем разделе приведена постановка периодической задачи на плоскости для системы гиперболических уравнений второго порядка со смешанными производными. При периодичности коэффициентов и правой части системы исследуемая задача может рассматриваться как периодическая задача для системы гиперболических уравнений в прямоугольной области. В разделе 2 периодическая задача для системы гиперболических уравнений в прямоугольнике сводится к эквивалентной задаче, состоящей из полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений с функциональным параметром и периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Построены алгоритмы нахождения приближенных решений полученной эквивалентной задачи. В разделах 3 и 4 рассмотрены каждая из вспомогательных задач и приведены достаточные условия их однозначной разрешимости в терминах данных задачи. В разделе 5 установлены условия существования единственного решения эквивалентной задачи и доказана сходимость построенного алгоритма в терминах исходных данных. Получены условия существования единственного решения периодической задачи для системы гиперболических уравнений в прямоугольнике. Установлены достаточные условия существования единственного двоякопериодического решения системы гиперболических уравнений на плоскости в терминах коэффициентов и правой части системы, периодов по временной и пространственной переменным. Применение данного подхода позволяет расширить класс систем гиперболических уравнений, для которых существует единственное двоякопериодическое решение.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается система гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

с периодическими условиями

$$u(x+\omega,t) = u(x,t), \tag{2}$$

$$u(x,t+T) = u(x,t), \tag{3}$$

где $(n\times n)$-матрицы $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$ и n-вектор-функция $f(x,t)$ непрерывны на $\mathbb{R}^2$ и (ω,T)-периодичны, т.е. для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ имеют место равенства

$$A(x+\omega,t) = A(x,t) = A(x,t+T), \quad B(x+\omega,t) = B(x,t) = B(x,t+T),$$
$$C(x+\omega,t) = C(x,t) = C(x,t+T), \quad f(x+\omega,t) = f(x,t) = f(x,t+T).$$

Непрерывная на $\mathbb{R}^2$ функция $u(x,t)$, имеющая непрерывные частные производные

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x}$$

называется классическим (ω,T)-периодическим решением системы (1), если она удовлетворяет системе уравнений (1) при всех $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ и условиям периодичности (2), (3).

Пусть

$$\|u(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|, \quad \|A(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|, \quad \Omega = [0,\omega]\times[0,T].$$

Через $C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ (соответственно $C([0,\omega],\mathbb{R}^n)$, $C([0,T],\mathbb{R}^n)$) обозначим пространство непрерывных на Ω функций $u\colon \Omega\to\mathbb{R}^n$ ($\varphi\colon [0,\omega]\to\mathbb{R}^n$, $\psi\colon [0,T]\to\mathbb{R}^n$) с нормой

$$\|u\|_0 = \max_{(x,t)\in\Omega} \|u(x,t)\| \quad \Big(\|\varphi\|_1 = \max_{x\in[0,\omega]} \|\varphi(x)\|, \quad \|\psi\|_2 = \max_{t\in[0,T]} \|\psi(t)\|\Big).$$

Для рассматриваемой задачи аналогом условия периодичности Пуанкаре по (x,t) являются соотношения

$$u(0,t) = u(\omega,t), \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x\in[0,\omega]. \tag{5}$$

Функция $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, имеющая частные производные

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

называется классическим решением задачи (1), (4), (5), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t) \in \Omega$ (при этом функция на границе Ω имеет односторонние производные) и выполнены краевые условия (4), (5).

Пусть $u(x,t)$ — классическое решение задачи (1), (4), (5). Тогда в силу свойств характеристик ($x = m\omega$, $t = kT$, $m, k \in \mathbb{Z}$) и равенств (4), (5) функция $u^*(x,t)$, являющаяся периодическим продолжением $u(x,t)$ на $\mathbb{R}^2$ по x, t соответственно с периодами ω, T, будет классическим (ω, T)-периодическим решением системы (1), т.е. выполнены условия периодичности по обеим переменным $u^*(x+\omega, t) = u^*(x,t)$, $u^*(x, t+T) = u^*(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

К задаче (1)–(3) применяется метод введения функциональных параметров (см. [2, 5–7, 20]): функциональный параметр вводится как значение искомой функции на характеристике $x = 0$.

2. Сведение к эквивалентной задаче. Алгоритм построения решения. Рассмотрим задачу (1), (4), (5). Пусть $\mu(t) = u(0,t)$. Произведем в задаче (1), (4), (5) замену функции $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + \mu(t)$ и перейдем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(x,t)\widetilde{u} + B(x,t)\dot{\mu}(t) + C(x,t)\mu(t) + f(x,t), \tag{6}$$

$$\widetilde{u}(0,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$\widetilde{u}(x,0) = \widetilde{u}(x,T), \quad x \in [0,\omega], \tag{8}$$

$$\widetilde{u}(\omega,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$\mu(0) = \mu(T). \tag{10}$$

Здесь последнее равенство следует из соотношений (5), (7). В силу (9) вытекающее из (5) равенство $\widetilde{u}(x,0) + \mu(0) = \widetilde{u}(x,T) + \mu(T)$ записано в виде (8).

Решением задачи (6)–(10) является пара функций $(\widetilde{u}(x,t), \mu(t))$, где функция $\widetilde{u}(x,t) \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \widetilde{u}(x,t)}{\partial t \partial x},$$

функция $\mu(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, удовлетворяющая системе уравнений (6) и условиям (7)–(10). Если $u(x,t)$ является решением задачи (1), (4), (5), то пара

$$\big(\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) - u(0,t),\ \mu(t) = u(0,t)\big)$$

будет решением задачи (6)–(10). Наоборот, если пара $(\widetilde{u}(x,t), \mu(t))$ — решение задачи (6)–(10), то функция $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + \mu(t)$ — решение задачи (1), (4), (5).

Дополнительное условие (9) вместе с равенством (10) позволяет определить функциональный параметр $\mu(t)$. При найденном $\mu(t)$ функция $\widetilde{u}(x,t)$ является решением полупериодической краевой задачи (6)–(8) (см. [7]).

Пусть

$$\widetilde{v}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial x}, \quad \widetilde{w}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial t}.$$

Так как из условий (7), (9) вытекают равенства

$$\frac{\partial \widetilde{u}(0,t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{u}(\omega,t)}{\partial t} = 0$$

для всех $t \in [0,T]$, то, интегрируя обе части (6) по $x \in [0,\omega]$, получим следующую систему уравнений:

$$\int\limits_0^\omega B(\xi,t)d\xi \cdot \dot{\mu}(t) = -\int\limits_0^\omega C(\xi,t)d\xi \cdot \mu(t) - \int\limits_0^\omega A(\xi,t)\widetilde{v}(\xi,t)d\xi - \int\limits_0^\omega B(\xi,t)\widetilde{w}(\xi,t)d\xi -$$
$$- \int\limits_0^\omega C(\xi,t)\widetilde{u}(\xi,t)d\xi - \int\limits_0^\omega f(\xi,t)d\xi, \quad t \in [0,T]. \quad (11)$$

Система (11) вместе с условием (10) является периодической краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестной функции $\mu(t)$. Соотношения (11) и (9) эквивалентны.

Таким образом, для определения неизвестных функций $\widetilde{u}(x,t)$ (вместе с производными $\widetilde{v}(x,t)$, $\widetilde{w}(x,t)$) и $\mu(t)$ (вместе с производной $\dot{\mu}(t)$) имеем замкнутую систему уравнений (6)–(8) и (11), (10). Так как неизвестными являются как $\widetilde{u}(x,t)$, так и $\mu(t)$, применяется метод последовательных приближений, и решение задачи находится по следующему алгоритму:

Шаг 0. Считая, что $\widetilde{v}=0$, $\widetilde{w}=0$, $\widetilde{u}=0$ и матрица

$$B_\omega(t) = \int\limits_0^\omega B(\xi,t)d\xi$$

обратима при всех $t \in [0,T]$, из периодической краевой задачи (11), (10) находим $\mu^{(0)}(t)$. Из непрерывности на Ω матриц $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$ и функции $f(x,t)$ следует непрерывность $\mu^{(0)}(t)$ и $\dot{\mu}^{(0)}(t)$ на $[0,T]$. Решая полупериодическую краевую задачу для системы гиперболических уравнений (6)–(8) при $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(0)}(t)$, $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$, находим непрерывные на Ω функцию $\widetilde{u}^{(0)}(x,t)$ и ее производные

$$\widetilde{v}^{(0)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}^{(0)}(x,t)}{\partial x}, \quad \widetilde{w}^{(0)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{w}^{(0)}(x,t)}{\partial t}.$$

Шаг 1. Считая, что $\widetilde{u}(x,t)=\widetilde{u}^{(0)}(x,t)$, $\widetilde{v}(x,t)=\widetilde{v}^{(0)}(x,t)$, $\widetilde{w}(x,t)=\widetilde{w}^{(0)}(x,t)$, из периодической краевой задачи (11), (10) находим $\mu^{(1)}(t)$. Из непрерывности на Ω матриц $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$, функций $\widetilde{u}^{(0)}(x,t)$, $\widetilde{v}^{(0)}(x,t)$, $\widetilde{w}^{(0)}(x,t)$ вытекает непрерывность функций $\mu^{(1)}(t)$ и $\dot{\mu}^{(1)}(t)$ на $[0,T]$. Решая полупериодическую краевую задачу для системы гиперболических уравнений (6)–(8) при $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(1)}(t)$, $\mu(t)=\mu^{(1)}(t)$, находятся непрерывные на Ω функцию $\widetilde{u}^{(1)}(x,t)$ и ее производные

$$\widetilde{v}^{(1)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}^{(1)}(x,t)}{\partial x}, \quad \widetilde{w}^{(1)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{w}^{(1)}(x,t)}{\partial t}$$

и так далее.

Шаг k. Считая, что $\widetilde{u}(x,t)=\widetilde{u}^{(k-1)}(x,t)$, $\widetilde{v}(x,t)=\widetilde{v}^{(k-1)}(x,t)$, $\widetilde{w}(x,t)=\widetilde{w}^{(k-1)}(x,t)$, из периодической краевой задачи (11), (10) находим $\mu^{(k)}(t)$. Из непрерывности на Ω матриц $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$, функций $\widetilde{u}^{(k-1)}(x,t)$, $\widetilde{v}^{(k-1)}(x,t)$, $\widetilde{w}^{(k-1)}(x,t)$ вытекает непрерывность функций $\mu^{(k)}(t)$ и $\dot{\mu}^{(k)}(t)$ на $[0,T]$. Решая полупериодическую краевую задачу для системы гиперболических уравнений (6)–(8) при $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(k)}(t)$, $\mu(t)=\mu^{(k)}(t)$, находятся непрерывные на Ω функция $\widetilde{u}^{(k)}(x,t)$ и ее производные

$$\widetilde{v}^{(k)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}^{(k)}(x,t)}{\partial x}, \quad \widetilde{w}^{(k)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{w}^{(k)}(x,t)}{\partial t}, \quad k=1,2,\ldots$$

Введение функционального параметра $\mu(t)$ позволило разбить на два этапа процесс нахождения решения исходной задачи:

этап 1: определение функции $\mu(t)$ из периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (10);

этап 2: определение функции $\widetilde{u}(x,t)$ из полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений.

3. Полупериодическая краевая задача для системы гиперболических уравнений. В данном разделе рассмотрим полупериодическую краевую задачу для системы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(x,t)\widetilde{u} + F(x,t) \tag{12}$$

с условиями (7), (8).

Исходя из матрицы $A(x,t)$ и числа $h>0$, удовлетворяющего условию $Nh=T$, строим $(nN\times nN)$-матрицу

$$Q_\nu(h,x) = \begin{vmatrix} Ih & 0 & 0 & \dots & 0 & -[I+D_{\nu,N}(h,x)]h \\ I+D_{\nu,1}(h,x) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I+D_{\nu,2}(h,x) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I+D_{\nu,N-1}(h,x) & -I \end{vmatrix},$$

где I — единичная матрица размерности n,

$$D_{\nu,r}(h,x) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)d\tau_1 +$$
$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} A(x,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1) \ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1.$$

Пусть

$$\alpha(x) = \max_{t\in[0,T]} \|A(x,t)\|, \quad \alpha = \max_{x\in[0,\omega]} \alpha(x), \quad \beta = \max_{(t,x)\in\Omega} \|B(x,t)\|, \quad \sigma = \max_{(t,x)\in\Omega} \|C(x,t)\|.$$

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (12), (7), (8) и оценку решения дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при некоторых $h>0$ $(Nh=T)$ и ν $(\nu = 1,2,\ldots)$ матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$ и выполняются неравенства*

$$\big\|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\big\| \leqslant \gamma_\nu(h,x), \tag{13}$$

$$q_\nu(h,x) = \gamma_\nu(h,x)\cdot\max(1,h)\bigg[e^{\alpha(x)h} - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\bigg] \leqslant \chi < 1, \tag{14}$$

где $\gamma_\nu(h,x)$ — непрерывная на $[0,\omega]$ функция при фиксированных ν, h, $\chi = \mathrm{const}$. Тогда задача (12), (7), (8) имеет единственное классическое решение $\widetilde{u}^*(x,t)$ и справедлива оценка

$$\max\Big(\|\widetilde{u}^*\|_0, \|\widetilde{v}^*\|_0, \|\widetilde{w}^*\|_0\Big) \leqslant \max\Big(e^{K_0(\beta+\sigma)}[1+K_0], K\big([\beta+\sigma](1+K_0)+1\big)\Big)\|F\|_0, \tag{15}$$

где

$$K = \max_{x\in[0,\omega]}\big[k_1(x,h,\nu)+k_2(x,h,\nu)\big], \quad K_0 = \omega\max(K, \alpha K+1),$$

$$k_0(x,h,\nu) = [e^{\alpha(x)h}-1]\gamma_\nu(h,x)\max\bigg\{1+h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\bigg\}h + he^{\alpha(x)h},$$

$$k_1(x,h,\nu) =$$
$$= \frac{\gamma_\nu(h,x)\max(1,h)}{1-q_\nu(h,x)}\cdot\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}\cdot k_0(x,h,\nu) + h\gamma_\nu(h,x)\max\bigg\{1+h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\bigg\},$$

$$k_2(x,h,\nu)=\left\{[e^{\alpha(x)h}-1]\frac{\gamma_\nu(h,x)}{1-q_\nu(h,x)}\cdot\max(1,h)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}+1\right\}k_0(x,h,\nu).$$

Доказательство. Существование, единственность и оценка (15) следуют из теорем 1 и 2 из [7]. Непрерывность решения $\widetilde{u}^*(x,t)$ и его производных

$$\widetilde{v}^*(x,t)=\frac{\partial\widetilde{u}^*(x,t)}{\partial x},\quad \widetilde{w}^*(x,t)=\frac{\partial\widetilde{u}^*(x,t)}{\partial t}$$

на Ω вытекает из (15) в силу непрерывности функций $k_i(x,h,\nu)$, $i=0,1,2$, $F(x,t)$ соответственно на $[0,\omega]$, Ω. Теорема 1 доказана. □

Отметим, что в работе [24] были приведены следующие результаты для полупериодической краевой задачи (12), (7), (8):

(i) [2, лемма 2]: при отсутствии разбиения области Ω, т.е. при $h=T$, $N=1$. В этом случае матрица $Q_\nu(h,x)$ имеет размерность n и имеет вид

$$Q_\nu(T,x)=\int\limits_0^T A(x,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_0^T A(x,\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1}A(x,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots+$$
$$+\int\limits_0^T A(x,\tau_1)\ldots\int\limits_0^{\tau_{\nu-1}}A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1;$$

(ii) [2, лемма 3]: аналог теоремы 1 при $\nu=1$, где требуется обратимость $(n\times n)$-матрицы

$$I-\prod_{s=N}^{1}\left[I+\int\limits_{(s-1)h}^{sh}A(\tau,x)d\tau\right],$$

составленной из блоков матрицы $Q_\nu(h,x)$.

4. Периодическая краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Теперь рассмотрим периодическую краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mu}(t)=A_1(t)\mu(t)+g_1(t),\quad t\in[0,T],\tag{16}$$
$$\mu(0)=\mu(T),\tag{17}$$

где $(n\times n)$-матрица $A_1(t)$ и n-вектор-функция $g_1(t)$ непрерывны на $[0,T]$.

Функция $\mu(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, имеющая производную $\dot{\mu}(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, называется решением задачи (16), (17), если она удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (16) и периодическому условию (17).

Периодические и двухточечные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследовались в работах многих авторов; подробный анализ и обзор работ можно найти в [8,17,18,28]. Для решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в [8] был разработан метод параметризации. На основе этого метода были получены необходимые и достаточные условия однозначной корректной разрешимости рассматриваемой задачи в терминах исходных данных и предложены алгоритмы поиска решения исследуемой задачи, доказана их сходимость.

В данном разделе приведены результаты работы [8] применительно к периодической краевой задаче (16), (17).

Используя матрицу $A_1(t)$ и число $h > 0$, удовлетворяющее условию $Nh = T$, построим $(nN \times nN)$-матрицу

$$Q_{1,\upsilon}(h) = \begin{vmatrix} Ih & 0 & 0 & \dots & 0 & -[I + D_{1,\upsilon,N}(h)]h \\ I + D_{1,\upsilon,1}(h) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{1,\upsilon,2}(h) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I + D_{1,\upsilon,N-1}(h) & -I \end{vmatrix},$$

где

$$D_{1,\upsilon,r}(h) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A_1(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A_1(\tau_1) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} A_1(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 +$$
$$+ \dots + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A_1(\tau_1) \dots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\upsilon-2}} A_1(\tau_{\upsilon-1}) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\upsilon-1}} A_1(\tau_\upsilon)d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1} \dots d\tau_1.$$

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (12), (7), (8) и оценку решения дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть при некоторых $h > 0$ $(Nh = T)$ и υ $(\upsilon = 1, 2, \dots)$ матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ обратима и выполняются неравенства*

$$\|[Q_{1,\upsilon}(h)]^{-1}\| \leqslant \gamma_{1,\upsilon}(h), \tag{18}$$

$$q_{1,\upsilon}(h) = \gamma_{1,\upsilon}(h) \cdot \max(1, h)\left[e^{\alpha_1 h} - \sum_{j=0}^{\upsilon} \frac{[\alpha_1 h]^j}{j!}\right] < 1, \tag{19}$$

где $\gamma_{1,\upsilon}(h)$ — положительная величина, зависящая от υ, h и

$$\alpha_1 = \max_{t\in[0,T]} \|A_1(t)\|.$$

Тогда периодическая краевая задача (16), (17) *имеет единственное решение $\mu^*(t)$, удовлетворяющее оценке*

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|\mu^*(t)\big\| \leqslant \Big[k_{11}(h,\upsilon) + k_{12}(h,\upsilon)\Big] \max_{t\in[0,T]} \|g_1(t)\|, \tag{20}$$

где

$$k_{11}(h,\upsilon) = \frac{\gamma_{1,\upsilon}(h)\max(1,h)}{1 - q_{1,\upsilon}(h)} \cdot \frac{[\alpha_1 h]^\upsilon}{\nu!} \cdot k_{10}(h,\upsilon) + h\gamma_\upsilon(h,x)\max\left\{1 + h\sum_{j=0}^{\upsilon-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\upsilon-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\},$$

$$k_{10}(h,\upsilon) = [e^{\alpha_1 h} - 1]\gamma_\upsilon(h,x)\max\left\{1 + h\sum_{j=0}^{\upsilon-1} \frac{[\alpha_1 h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\upsilon-1} \frac{[\alpha_1 h]^j}{j!}\right\}h + he^{\alpha_1 h},$$

$$k_{12}(h,\upsilon) = \left\{[e^{\alpha_1 h} - 1]\frac{\gamma_{1,\upsilon}(h)}{1 - q_{1,\upsilon}(h)} \cdot \max(1,h)\frac{[\alpha_1 h]^\upsilon}{\upsilon!} + 1\right\}k_{10}(h,\upsilon).$$

Теорема 2 является частным случаем теоремы 1 из [8, с. 54] при $B = I$, $C = -I$, $d = 0$, $A_1(t)$ вместо $A(t)$ и $f(t)$ вместо $g_1(t)$.

В случае, когда $h = T$ $(N = 1)$, $(n \times n)$-матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ имеет вид

$$Q_{1,\upsilon}(T) = \int\limits_0^T A_1(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_0^T A_1(\tau_1) \int\limits_0^{\tau_1} A_1(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \int\limits_0^T A_1(\tau_1) \dots \int\limits_0^{\tau_{\upsilon-1}} A_1(\tau_\upsilon)d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1} \dots d\tau_1,$$

а ее обратимость будет зависеть от матрицы $A_1(t)$. Если

$$\det \int\limits_0^T A_1(\tau_1)d\tau_1 \neq 0,$$

то можно выбрать такое число $\upsilon \in \mathbb{N}$, при котором будут выполнены условия (18)–(19) теоремы 2, а задача (16), (17) будет однозначно разрешима.

Основным условием однозначной разрешимости исследуемой задачи является обратимость матрицы $Q_{1,\upsilon}(h)$ при некоторых $h > 0$ $(Nh = T)$ и υ $(\upsilon \in \mathbb{N})$. Так как $(nN \times nN)$-матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ при $N \geqslant 2$ имеет специальную блочно-ленточную структуру, то справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *$(nN \times nN)$-Матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ обратима тогда и только тогда, когда обратима $(n \times n)$-матрица*

$$M_{1,\upsilon} = I - \prod_{s=N}^{1} \big[I + D_{1,\upsilon,s}(h)\big].$$

Лемма 2. *Если матрица $M_{1,\upsilon}$ обратима, то $[Q_{1,\upsilon}(h)]^{-1} = \{d_{r,j}\}$, $r, j = \overline{1, N}$, где*

$$\begin{aligned}
&d_{1,1} = h^{-1}M_{1,\upsilon}^{-1};\\
&d_{1,k} = -M_{1,\upsilon}^{-1} \cdot \prod_{s=N}^{k} \big[I + D_{1,\upsilon,s}(h)\big], && 1 < k \leqslant N,\\
&d_{r,r} = [I + D_{1,\upsilon,r-1}(h)]d_{r-1,r} - I, && r = 2, 3, \ldots, N,\\
&d_{r,j} = [I + D_{1,\upsilon,r-1}(h)]d_{r-1,j}, && j \neq r.
\end{aligned}$$

Лемма 1 остается справедливой и в случае $N = 1$: обратимость $(n \times n)$-матрицы $Q_{1,\upsilon}(T)$ эквивалентна обратимости $(n\times n)$-матрицы $M_{1,\upsilon} = I - [I + D_{1,\upsilon,1}(T)]$, т.е. в этом случае они совпадают.

Величина $K_1(h, \upsilon) = k_{11}(h, \upsilon) + k_{12}(h, \upsilon)$ в неравенстве (20) ограничена при фиксированных N, $N \in \mathbb{N}$, $\upsilon \in \mathbb{N}$, и не зависит от функции $g_1(t)$. Поэтому при условиях теоремы 2 периодическая краевая задача (16), (17) корректно разрешима.

5. Условия разрешимости периодической краевой задачи (1)**,** (4)**,** (5)**.** Рассмотрим задачу (6)–(10), эквивалентную задаче (1), (4), (5). Введем обозначения

$$A_1(t) = -[B_\omega(t)]^{-1} \cdot \int\limits_0^\omega C(\xi, t)d\xi,$$

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *при всех $t \in [0, T]$ обратима $(n \times n)$-матрица*

$$B_\omega(t) = \int\limits_0^\omega B(\xi, t)d\xi;$$

(ii) *при некоторых $h > 0$ $(Nh = T)$ и ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ матрица $Q_\nu(h, x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполняются неравенства* (13)–(14) *теоремы* 1;

(iii) *при некоторых $h > 0$ $(Nh = T)$ и υ $(\upsilon = 1, 2, \ldots)$ матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ обратима и выполняются неравенства* (18)–(19) *теоремы* 2;

(iv) *справедливо неравенство*

$$q = \max(K_1(h, \upsilon), \alpha K_1(h, \upsilon) + 1) \max_{t\in[0,T]} \big\|[B_\omega(t)]^{-1}\big\|\omega\big[\alpha + \beta + \sigma\big] \cdot \widetilde{K}(\beta + \sigma) < 1.$$

Тогда задача (6)–(10) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Из обратимости матрицы $B_\omega(t)$ при всех $t \in [0,T]$ и условия (iii) следует существование единственного решения периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (10) — функции $\mu(t)$. Аналогично оценке (20) получим

$$\big\|\mu(t)\big\| \leqslant K_1(h,\upsilon)\big\|[B_\omega(t)]^{-1}\big\| \cdot \left\{\int\limits_0^\omega \|A(\xi,t)\| \cdot \|\widetilde{v}(\xi,t)\|d\xi + \int\limits_0^\omega \|B(\xi,t)\| \cdot \|\widetilde{w}(\xi,t)\|d\xi + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^\omega \|C(\xi,t)\| \cdot \|\widetilde{u}(\xi,t)\|d\xi + \int\limits_0^\omega \|f(\xi,t)\|d\xi\right\}. \quad (21)$$

Пусть выполнено условие (i) теоремы 3. Используем шаг 0 алгоритма. Рассмотрим периодическую краевую задачу

$$\dot{\mu}(t) = A_1(t)\mu(t) - [B_\omega(t)]^{-1}\int\limits_0^\omega f(\xi,t)d\xi, \quad t \in [0,T], \qquad \mu(0) = \mu(T). \quad (22)$$

Из выполнения условия (iii), которое включает условия теоремы 2, вытекает однозначная разрешимость задачи (22). Нулевое приближение $\mu^{(0)}(t)$ находим из периодической краевой задачи (22). Тогда, аналогично оценке (20), для функции $\mu^{(0)}(t)$ и ее производной $\dot{\mu}^{(0)}(t)$ будут справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|\mu^{(0)}(t)\big\| \leqslant K_1(h,\upsilon)\max_{t\in[0,T]}\big\|[B_\omega(t)]^{-1}g_1^{(0)}(t)\big\|, \quad (23)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|\dot{\mu}^{(0)}(t)\big\| \leqslant \big[\alpha_1 K_1(h,\upsilon)+1\big]\max_{t\in[0,T]}\big\|[B_\omega(t)]^{-1}g_1(t)\big\|, \quad (24)$$

где

$$g_1(t) = [B_\omega(t)]^{-1}\int\limits_0^\omega f(\xi,t)d\xi.$$

Решая полупериодическую краевую задачу (6)–(8) при найденных значениях параметров, находим $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$.

Аналогично оценке (15) получаем неравенство

$$\max\Big(\|\widetilde{u}^{(0)}\|_0, \|\widetilde{v}^{(0)}\|_0, \|\widetilde{w}^{(0)}\|_0\Big) \leqslant \widetilde{K}\Big(\beta\cdot\max_{t\in[0,T]}\|\dot{\mu}^{(0)}(t)\| + \sigma\cdot\max_{t\in[0,T]}\|\mu^{(0)}(t)\| + \|f\|_0\Big), \quad (25)$$

где $\widetilde{K} = \max\big(e^{K_0(\beta+\sigma)}[1+K_0],\ K[(\beta+\sigma)[1+K_0]+1]\big)$.

Последовательно, из k-го шага алгоритма определяем функции $\mu^{(k)}(t)$, $\dot{\mu}^{(k)}(t)$, $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, а из $(k+1)$-го шага — $\mu^{(k+1)}(t)$, $\dot{\mu}^{(k+1)}(t)$, $\widetilde{v}^{(k+1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k+1)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k+1)}(t,x)$, $k = 1,2,\ldots$ Оценивая соответствующие разности последовательных приближений, получим

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\big\| \leqslant K_1(h,\upsilon)\max_{t\in[0,T]}\big\|[B_\omega(t)]^{-1}\big\|\omega\big[\alpha+\beta+\sigma\big]\times$$
$$\times\max\Big(\big\|\widetilde{v}^{(k)}-\widetilde{v}^{(k-1)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{w}^{(k)}-\widetilde{w}^{(k-1)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{u}^{(k)}-\widetilde{u}^{(k-1)}\big\|_0\Big), \quad (26)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|\dot{\mu}^{(k+1)}(t)-\dot{\mu}^{(k)}(t)\big\| \leqslant \big[\alpha K_1(h,\upsilon)+1\big]\max_{t\in[0,T]}\big\|[B_\omega(t)]^{-1}\big\|\omega\big[\alpha+\beta+\sigma\big]\times$$
$$\times\max\Big(\big\|\widetilde{v}^{(k)}-\widetilde{v}^{(k-1)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{w}^{(k)}-\widetilde{w}^{(k-1)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{u}^{(k)}-\widetilde{u}^{(k-1)}\big\|_0\Big), \quad (27)$$

$$\max\Big(\big\|\widetilde{u}^{(k+1)}-\widetilde{u}^{(k)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{v}^{(k+1)}-\widetilde{v}^{(k)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{w}^{(k+1)}-\widetilde{w}^{(k)}\big\|_0\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{K}\Big(\beta\cdot\max_{t\in[0,T]}\big\|\dot{\mu}^{(k+1)}(t)-\dot{\mu}^{(k)}(t)\big\| + \sigma\cdot\max_{t\in[0,T]}\big\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\big\|\Big). \quad (28)$$

Пусть

$$\Delta_{k+1} = \max\Big(\max_{t\in[0,T]} \big\|\mu^{(k+1)}(t) - \mu^{(k)}(t)\big\|,\ \max_{t\in[0,T]} \big\|\dot\mu^{(k+1)}(t) - \dot\mu^{(k)}(t)\big\|\Big).$$

Тогда из соотношений (26), (27), (28) получим основное неравенство

$$\Delta_{k+1} \leqslant q\Delta_k. \tag{29}$$

Из условия (iv) теоремы вытекает сходимость последовательности Δ_k при $k \to \infty$ к Δ_*. Это дает равномерную сходимость последовательностей $\mu^{(k)}(t)$, $\dot\mu^{(k)}(t)$ при $k \to \infty$ соответственно к $\mu^*(t)$, $\dot\mu^*(t)$. Функция $\mu^*(t)$ является непрерывной и непрерывно дифференцируемой на $[0,T]$. На основе оценки (28) установим равномерную сходимость последовательностей $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, относительно $(t,x) \in \Omega$ к функциям $\widetilde{v}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$, $\widetilde{u}^*(t,x)$, соответственно. Очевидно, что функции $\widetilde{u}^*(t,x)$, $\widetilde{v}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$ являются непрерывными на Ω. Записав задачи, которые решаем на $(k+1)$-м шаге алгоритма, и переходя к пределу $k \to \infty$, получаем, что функции $\widetilde{u}^*(t,x)$, $\mu^*(t)$ вместе с производными удовлетворяют полупериодической краевой задаче (6)–(8) и периодической краевой задаче (11), (10). Тогда пара функций $(\widetilde{u}^*(t,x), \mu^*(t))$ является решением задачи (6)–(10).

Докажем единственность решения задачи (6)–(10). Пусть существует два решения: пара функций $(\widetilde{u}^*(t,x), \mu^*(t))$ и $(\widetilde{u}^{**}(t,x), \mu^{**}(t))$. Положим

$$\widetilde{\Delta} = \max\Big(\max_{t\in[0,T]} \big\|\mu^*(t) - \mu^{**}(t)\big\|,\ \max_{t\in[0,T]} \big\|\dot\mu^*(t) - \dot\mu^{**}(t)\big\|\Big).$$

Проведя вычисления аналогично (26)–(28), получим

$$\widetilde{\Delta} \leqslant q\widetilde{\Delta}. \tag{30}$$

По условию (iv) теоремы $q < 1$. Тогда неравенство (30) имеет место только при $\widetilde{\Delta} \equiv 0$, откуда получаем $\mu^*(t) = \mu^{**}(t)$ и $\widetilde{u}^*(t,x) = \widetilde{u}^{**}(t,x)$. Таким образом, решение задачи (6)–(10) единственно. Теорема 3 доказана. □

Условия теоремы 3 одновременно с существованием единственного решения задачи (6)–(10) обеспечивают сходимость последовательности $\{\mu^{(k)}(t), \widetilde{u}^{(k)}(x,t)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, определяемой по предложенному алгоритму.

Составим сумму $u^*(t,x) = \widetilde{u}^*(t,x) + \mu^*(t)$. Из эквивалентности задач (1), (4), (5) и (6)–(10) вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv) *теоремы* 3. *Тогда периодическая краевая задача* (1), (4), (5) *имеет единственное классическое решение* $u^*(t,x)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия*:

(i) $n \times n$*-матрицы* $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$ *и* n*-вектор-функция* $f(x,t)$ *непрерывны на* $\mathbb{R}^2$ *и* (ω, T)*-периодичны, т.е. для всех* $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ *имеют место равенства*

$$A(x+\omega,t) = A(x,t) = A(x,t+T), \quad B(x+\omega,t) = B(x,t) = B(x,t+T),$$
$$C(x+\omega,t) = C(x,t) = C(x,t+T), \quad f(x+\omega,t) = f(x,t) = f(x,t+T);$$

(ii) *выполнены условия* (i)–(iv) *теоремы* 3.

Тогда периодическая задача на плоскости для системы гиперболических уравнений (1), (2), (3) *имеет единственное классическое* (ω,T)*-периодическое решение* $u^*(t,x)$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 5 существует единственное двоякопериодическое решение системы (1). Нарушение одного из условий теоремы говорит о том, что задача (1), (2), (3) может не иметь решения или может иметь бесконечно много решений. Коэффициенты системы уравнений $A(t,x)$, $B(t,x)$ и $C(t,x)$ играют важную роль для однозначной разрешимости задачи (1), (2), (3). Это подтверждают и приведенные ниже примеры, иллюстрирующие результаты настоящей работы.

Следующие два примера показывают существенность требований обратимости матриц $Q_\nu(h,x)$, $B_\omega(t)$, $Q_{1,\upsilon}(h)$ для единственности решения периодической задачи на плоскости для системы гиперболических уравнений.

Пример 1. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается система двух гиперболических уравнений
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{31}$$
Разыскивается $(2\pi, 2\pi)$-периодическое решение системы (31). В этом примере матрица $Q_\nu(h,x)$ не имеет обратной при всех $x \in [0,\omega]$, матрица $B_\omega(t) \equiv 0$ необратима, а система (31) имеет семейство $(2\pi, 2\pi)$-периодических решений
$$u(x,t) = C_0 \begin{pmatrix} \sin x \cdot \cos t \\ \cos x \cdot \sin t \end{pmatrix},$$
где C_0 — произвольная постоянная.

Пример 2. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается система двух гиперболических уравнений
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{32}$$
Снова разыскивается $(2\pi, 2\pi)$-периодическое решение системы (32). В этом примере матрица $B_\omega(t) \equiv 0$ необратима, матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ также не имеет обратной. Легко проверить, что
$$u(x,t) = C_0 \begin{pmatrix} \sin(x+t) \\ \cos(x+t) \end{pmatrix}$$
является семейством $(2\pi, 2\pi)$-периодических решений системы (32), где C_0 — произвольная постоянная.

Следующие примеры показывают существенность условий теоремы 5 для существования единственного периодического решения задачи (1), (2), (3).

Пример 3. Пусть $n = 1$ (случай одного уравнения), $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $f = 0$ (постоянные функции периодичны с любым периодом). Уравнение примет вид
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{33}$$
Вспомогательная полупериодическая краевая задача имеет вид
$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + F(x,t), \tag{34}$$
с условиями (7), (8).

Проверим условия теоремы 5. Условие (i) выполняется. Условие (ii) требует выполнения условий (i)–(iv) теоремы 3. Так как
$$B_\omega(t) = \int_0^\omega B(\xi,t)d\xi = \omega \neq 0,$$
то условие (i) теоремы 3 выполняется.

Для задачи (34), (7), (8) существуют такие $h > 0$ $(Nh = T)$ и ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, при которых матрица $Q_\nu(h,x)$ будет обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства (13), (14) теоремы 1. Это означает, что существует единственное решение полупериодической краевой задачи (34), (7), (8). Отметим, что, поскольку $A(t,x) = 1$ и
$$\int_0^T A(\tau,x)d\tau = T \neq 0,$$
всегда можно выбрать такое $\nu \in \mathbb{N}$, при котором будут выполняться неравенства (13), (14) теоремы 1. Условие (ii) теоремы 3 выполнено.

Вспомогательная периодическая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$\dot{\mu}(t) = -\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \widetilde{v}(\xi,t)d\xi - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \widetilde{w}(\xi,t)d\xi, \quad t \in [0,T], \tag{35}$$

с условием (17). Здесь $A_1(t) = -[B_\omega(t)]^{-1}\cdot 0 = 0$, $D_{1,\upsilon,r}(h) = 0$ для всех $\upsilon \in \mathbb{N}$, $r = \overline{1,N}$, так как $A_1(t) = 0$. По лемме 1 обратимость матрицы $Q_{1,\upsilon}(h)$ эквивалентна обратимости $M_{1,\upsilon}(h)$, которая имеет вид

$$M_{1,\upsilon}(h) = 1 - \prod_{s=N}^{1}\big[1 + D_{1,\upsilon,s}(h)\big] = 1 - 1 = 0,$$

т.е. необратима. Тогда необратима и матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$. Таким образом, условие (iii) теоремы 3 не выполнено. Любая ненулевая константа будет решением уравнения (33).

Данный пример показывает нарушение условия (ii) теоремы 5, а именно, нарушение условия (iii) теоремы 3, что привело к бесконечному числу решений задачи (33), (2), (3).

Пример 4. Пусть $n = 1$ (случай одного уравнения), $A = -1$, $B = 1$, $C = -1$, $f = 0$. Уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - u. \tag{36}$$

Проверим условия теоремы 5. Условие (i) выполняется. Условие (ii) требует выполнения условий (i)–(iv) теоремы 3. Здесь

$$B_\omega(t) = \int_0^\omega B(\xi,t)d\xi = \omega \neq 0,$$

условие (i) теоремы 3 выполняется. Имеем

$$A_1(t) = -[B_\omega(t)]^{-1}\cdot\int_0^\omega C(\xi,t)d\xi = 1,$$
$$\alpha = \alpha(x) = 1, \quad \beta = 1, \quad \sigma = 1, \quad \alpha_1 = 1.$$

Можно выбрать $h > 0$ $(Nh = T)$ и ν $(\nu = 1,2,\ldots)$, при которых матрица $Q_\nu(h,x)$ будет обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства (13), (14) теоремы 1. Отметим, что, поскольку $A(t,x) = -1$ и

$$\int_0^T A(\tau,x)d\tau = -T \neq 0,$$

всегда можно выбрать такое $\nu \in \mathbb{N}$, при котором будут выполняться неравенства (13), (14) теоремы 1. Условие (ii) теоремы 3 выполнено.

Можно выбрать $h > 0$ $(Nh = T)$ и υ $(\upsilon = 1,2,\ldots)$, при которых матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ будет обратима и выполняются неравенства (18), (19) теоремы 2. Здесь аналогично, поскольку $A_1(t,x) = 1$ и

$$\int_0^T A(\tau,x)d\tau = T \neq 0,$$

всегда можно выбрать $\upsilon \in \mathbb{N}$, при котором будут выполняться неравенства (18), (19) теоремы 2. Условие (iii) теоремы 3 выполнены.

Проверим условие (iv) теоремы 3. Имеем

$$q = \max\Big(K_1(h,\upsilon),\ \alpha K_1(h,\upsilon)+1\Big)\max_{t\in[0,T]}\big\|[B_\omega(t)]^{-1}\big\|\omega\big[\alpha+\beta+\sigma\big]\cdot\widetilde{K}(\beta+\sigma) =$$
$$= \big(K_1(h,\upsilon)+1\big)\frac{1}{\omega}\omega\big[1+1+1\big]\cdot\widetilde{K}(1+1) > 6\widetilde{K} =$$
$$= 6\max\Big(e^{2K_0}[1+K_0],\ K\big[2[1+K_0]+1\big]\Big) \geqslant 6e^{2K_0} \geqslant 6,$$

т.е. $q > 1$. Условие (iv) теоремы 3 не выполняется. Задача (36), (2), (3) имеет бесконечно много решений вида $u(t,x) = C_0\sin(x+t)$, где $C_0 = \mathrm{const}$.

Замечание. Случай, когда $A(t,x) = B(t,x) = 0$, исследован в [3] при предположении непрерывной дифференцируемости матрицы $C(t,x)$ и функции $f(t,x)$ по t, x. Установлены условия существования решения, периодического по обеим переменным. Случаи, когда $A(t,x) = 0$ или $B(t,x) = 0$, требуют специального изучения. Для этих случаев также потребуется дополнительная гладкость коэффициентов и правой части системы (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артемьев Н. А.* Периодические решения одного класса уравнений в частных производных// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1937. — № 1. — С. 15–50.
2. *Асанова А. Т.* Признаки однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений со смешанными производными// Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 5. — С. 3–21.
3. *Асанова А. Т.* Периодические на плоскости решения системы гиперболических уравнений второго порядка// Мат. заметки. — 2017. — *101*, № 1. — С. 20–30.
4. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Периодические и ограниченные на плоскости решения систем гиперболических уравнений// Укр. мат. ж. — 2004. — *56*, № 4. — С. 562–572.
5. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2002. — *42*, № 11. — С. 1673–1685.
6. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений ooo// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 10. — С. 1343–1354.
7. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений// Диффер. уравн. — 2005. — *41*, № 3. — С. 337–346.
8. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1989. — *29*, № 1. — С. 50–66.
9. *Жестков С. В.* О двоякопериодических решениях нелинейных гиперболических систем в частных производных// Укр. мат. ж. — 1987. — *39*, № 4. — С. 521–523.
10. *Кигурадзе Т. И.* О двоякопериодических решениях одного класса нелинейных гиперболических уравнений// Диффер. уравн. — 1998. — *34*, № 2. — С. 238–245.
11. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1998. — *222*. — С. 1–191.
12. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006.
13. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. — Киев:: Наукова думка, 1991.
14. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев: Наукова думка, 1984.
15. *Рудаков И. А.* Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами// Мат. заметки. — 2004. — *76*, № 3. — С. 427–438.
16. *Рудаков И. А.* Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле// Изв. вузов. Мат. — 2007. — № 2. — С. 46–55.
17. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Вища школа, 1976.

18. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — Киев: Наукова думка, 1985.
19. *Самойленко А. М., Ткач Б. П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. — Киев: Наукова думка, 1992.
20. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.* Well-posedness of nonlocal boundary-value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *402*, № 1. — P. 167–178.
21. *Aziz A. K.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1966. — *17*, № 3. — P. 557–566.
22. *Aziz A. K., Horak M. G.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in the large// SIAM J. Math. Anal. — 1972. — *3*, № 1. — P. 176–182.
23. *Cesari L.* Periodic solutions of partial differential equations// в кн.: Тр. Междунар. симп. по нелинейным колебаниям. — Киев: Изд-во АН УССР, 1963. — С. 440–457.
24. *Cesari L.* Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1965. — *20*, № 2. — P. 170–190.
25. *Kiguradze T.* Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type// Mem. Differ. Equations Math. Phys. — 1994. — *1*. — P. 1–144.
26. *Kiguradze T.* On periodic in the plane solutions of second-order hyperbolic systems// Arch. Math. — 1997. — *33*, № 4. — P. 253–272.
27. *Kiguradze T., Lakshmikantham V.* On doubly periodic solutions of fourth-order linear hyperbolic equations// Nonlin. Anal. — 2002. — *49*, № 1. — P. 87–112.
28. *Vejvoda O., Herrmann L., Lovicar V., et al.* Partial Differential Equations: Time-Periodic Solutions. — Hague–Boston–London: Martinus Nijhoff, 1982.

Асанова Анар Турмаганбеткызы
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: anartasan@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 49–54
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-49-54

УДК 519.175.3

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ КОЛЮЧИХ ГРАФОВ

© 2022 г. **В. А. ВОБЛЫЙ, Н. А. АРХИПОВА**

Аннотация. Колючим графом называется связный граф, который становится гладким после однократного удаления висячих вершин вместе с инцидентными им ребрами. Получена явная формула для числа помеченных колючих графов с заданными числами вершин и ребер, а также найдена соответствующая асимптотика для числа таких графов с большим числом вершин. Доказывается, что при равномерном распределении вероятностей почти все помеченные связные разреженные графы не являются колючими графами.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, колючий граф, асимптотика, вероятность.

ENUMERATION OF LABELED THORN GRAPHS

© 2022 **V. A. VOBLYI, N. A. ARKHIPOVA**

Abstract. A thorn graph is a connected graph that becomes smooth after a single removal of end points together with their incident edges. An explicit formula is obtained for the number of labeled thorn graphs with given numbers of vertices and edges, and the corresponding asymptotics is found for the number of such graphs with a large number of vertices. It is proved that with a uniform probability distribution, almost all labeled connected sparse graphs are not thorn graphs.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, thorn graph, asymptotics, probability.

AMS Subject Classification: 05C30

1. Введение. Рассматриваются неориентированные простые помеченные графы.

Определение 1 (см. [17]). *Гладкий* граф – это связный граф без висячих вершин.

Определение 2 (см. [15]). *Ядром* связного графа называется гладкий граф, полученный из исходного графа многократным удалением висячих вершин. Связный граф можно представить в виде ядра, к вершинам которого прикреплены деревья.

Определение 3. *Внутренняя* вершина графа — это вершина ядра графа. Внутренняя вершина графа принадлежит циклу графа или простой цепи между двумя циклами.

Определение 4 (см. [7]). *Колючим* графом называется связный граф, который становится гладким после однократного удаления висячих вершин вместе с инцидентными им ребрами.

Колючий граф можно также определить как граф, полученный прикреплением пучков висячих вершин к вершинам основного графа (см. [9]). Однако основной граф не всегда должен быть гладким. Рассматриваются не только колючие циклы, но и колючие деревья (см. [9]). Гусеница — это дерево, которое после однократного удаления висячих вершин становится простой цепью. Такие деревья перечислены Ф. Харари и А. Швенком в [13]. Деревья-гусеницы применяются в химии и физике (см. [12]). Отметим, что в [5] колючие графы называются графами-гусеницами.

В математической химии получены формулы для целого ряда топологических индексов колючих молекулярных графов (см. [9, 11, 14]).

При равномерном распределении вероятностей на множестве помеченных связных графов с n вершинами и $n+q$ ребрами в [5] была найдена вероятность появления колючего графа (графа-гусеницы) среди случайных связных разреженных графов. В [7] получена явная формула для числа помеченных колючих кактусов с n вершинами, из которых p невисячих.

В статье доказана явная формула для числа помеченных колючих графов n вершинами, из которых p внутренних, и $n+q$ ребрами. Кроме того, найдена асимптотика для числа колючих графов n вершинами и $n+q$ ребрами при фиксированном числе q и $n \to \infty$.

2. Перечисление графов. Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Обозначим через $V(p, p+q)$ число помеченных гладких графов с p вершинами и $p+q$ ребрами.

Теорема 1. *Пусть $T_p(n, n+q)$ — число помеченных колючих графов с n вершинами, из которых p внутренних, и $n+q$ ребрами. Тогда при $n \geqslant p+1$ и $q \geqslant 0$ верна формула*

$$T_p(n, n+q) = \binom{n}{p} p^{n-p} V(p, p+q). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $C_p(n, n+q, k)$ — число помеченных связных графов с n вершинами, $n+q$ ребрами, причем k вершин висячих, а p внутренних. В [3] получена формула

$$C_p(n, n+q, k) = \frac{n!}{k!(p-1)!} S_p(n-p-1, n-p-k) V(p, p+q),$$

где $S_p(n, k)$ — нецентральные числа Стирлинга 2-го рода (см. [8]). Так как у колючих графов все невисячие вершины являются внутренними, то имеем $k = n-p$ и, следовательно, получим

$$T_p(n, n+q) = \frac{n!}{k!(p-1)!} S_p(n-p-1, 0) V(p, p+q).$$

Учитывая соотношение $S_p(n, 0) = p^n$ [8], получим утверждение теоремы. □

После суммирования по числу невисячих вершин из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Число $T(n, n+q)$ помеченных колючих графов с n вершинами и $n+q$ ребрами равно*

$$T(n, n+q) = \sum_{p=3}^{n-1} T_p(n, n+q) = \sum_{p=3}^{n-1} \binom{n}{p} p^{n-p} V(p, p+q). \tag{2}$$

Следствие 2. *Пусть $TU_p(n)$, $TB_p(n)$ и $TT_p(n)$ — числа помеченных унициклических, бициклических и трициклических колючих графов с n вершинами, из которых p невисячих. Тогда при $p \geqslant 3$ и $n \geqslant p+1$ верны формулы*

$$\begin{gathered} TU_p(n) = \frac{n!}{2(n-p)!} p^{n-p-1}, \quad TB_p(n) = \frac{(p-3)(5p-8)}{48} \frac{n!}{(n-p)!} p^{n-p}, \\ TT_p(n) = \frac{(p-3)(p^4 - 3p^3 - 6p^2 - 42p + 86)}{1152} \frac{n!}{(n-p)!} p^{n-p}. \end{gathered} \tag{3}$$

Доказательство. Подставляя в формулу (1) выражения для чисел помеченных гладких унициклических, бициклических и трициклических графов с p вершинами из работы Э. Райта [17]

$$V(p, p) = \frac{1}{2}(p-1)!, \quad V(p, p+1) = \frac{(p-3)(5p-8)}{48} p!,$$

$$V(p, p+2) = \frac{(p-3)(p^4 - 3p^3 - 6p^2 - 42p + 86)}{1152},$$

получим выражения для $TU_p(n)$, $TB_p(n)$ и $TT_p(n)$.

Отметим, что в [17] для $V(p, p+2)$ приведено выражение

$$V(p, p+2) = \frac{p!}{48} \left(15\binom{n+1}{5} - 5\binom{n}{4} - 2\binom{n-1}{3} - 5\binom{n-2}{2} - \binom{n-3}{1} \right).$$

Представляя биномиальные коэффициенты в виде многочленов от p, после приведения подобных членов, получим сокращенную формулу для $V(p, p+2)$. □

Следствие 3. *Пусть $TU(n)$, $TB(n)$ и $TT(n)$ — числа помеченных унициклических, бициклических и трициклических колючих графов с n вершинами. Тогда при $p \geqslant 3$ и $n \geqslant p+1$ верны формулы*

$$TU(n) = \frac{n!}{2}\sum_{p=3}^{n-1}\frac{p^{n-p-1}}{(n-p)!}, \quad TB(n) = \frac{n!}{48}\sum_{p=4}^{n-1}(p-3)(5p-8)\frac{p^{n-p}}{(n-p)!},$$

$$TT_p(n) = \frac{n!}{1152}\sum_{p=5}^{n-1}(p-3)(p^4-3p^3-6p^2-42p+86)\frac{p^{n-p}}{(n-p)!}.$$

Доказательство. Формулы для $TU(n)$, $TB(n)$ и $TT(n)$ получаются из формул (3) суммированием по p от 3 до $n-1$, от 4 до $n-1$ и от 5 до $n-1$ соответственно. □

3. Асимптотика и вероятность. Обозначим через d_q константы Райта (коэффициенты Степанова—Райта), определяемые с помощью рекуррентного соотношения (см. [6, 18])

$$d_1 = d_2 = \frac{5}{36}, \quad d_{q+1} = d_q + \sum_{s=1}^{q-1}\frac{d_s d_{q-s}}{(q+1)\binom{q}{s}} \text{ при } q \geqslant 2.$$

В [4] доказано, что $d_q \to d = 1/(2\pi)$ при $q \to \infty$.

Теорема 2. *Для числа $T(n, n+q)$ помеченных помеченных колючих графов с n вершинами и $n+q$ ребрами при фиксированном $q \geqslant 0$ и $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$T(n, n+q) \sim \frac{3\,(3/2)^q\, q! d_q}{(b+1)^{3q}(3q)!} n^{3q-1} b^{-n} n!, \tag{4}$$

где $b \approx 0{,}5671$ — корень уравнения $ze^z = 1$, $d_0 = 1/6$.

Доказательство. Введем производящие функции

$$W_q(z) = \sum_{n=3}^{\infty} T(n, n+q)\frac{z^n}{n!}, \quad V_q(z) = \sum_{n=3}^{\infty} V(n, n+q)\frac{z^n}{n!}. \tag{5}$$

Подставим выражение для $T(n, n+q)$ из формулы (2) в производящую функцию и изменим порядок суммирования:

$$W_q(z) = \sum_{n=3}^{\infty}\sum_{p=3}^{n-1} T(n, n+q)\frac{z^n}{n!} = \sum_{p=3}^{\infty}\sum_{n=p+1}^{\infty}\binom{n}{p} p^{n-p} V(p, p+q)\frac{z^n}{n!}.$$

Сделаем замену $k = n-p$ индекса суммирования во внутренней сумме:

$$W_q(z) = \sum_{p=3}^{\infty}\frac{V(p, p+q)}{p!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^k z^{k+p}}{k!} = \sum_{p=3}^{\infty}\frac{V(p, p+q)}{p!} z^p (e^{pz}-1).$$

Э. Райт (см. [16]) при $q \geqslant 1$ получил соотношение

$$V_q(z) = \sum_{n=3}^{\infty} V(n, n+q)\frac{z^n}{n!} = \sum_{s=-3q}^{2} c_{q,s}(1-z)^s, \quad \text{где} \quad b_q = c_{q,-3q} = \left(\frac{3}{2}\right)^q (q-1)! d_q.$$

Таким образом, при $q \geqslant 1$ имеем

$$W_q(z) = V_q(ze^z) - V_q(z) = \sum_{s=-3q}^{2} c_{q,s}\big[(1-ze^z)^s - (1-z)^s\big]. \tag{6}$$

Введем функцию $\phi(z) = 1 - ze^z$; пусть b — корень уравнения $\phi(z) = 0$. С помощью Maple найдем $b \approx 0{,}5671$, $b = W(1)$, где $W(z)$ — главное действительное значение многозначной функции Ламберта (см. [10]). Так как $\phi'(z) = -(z+1)e^z$ и $\phi'(b) = -(b+1)/b \neq 0$, то число b является простым нулем функции $\phi(z)$.

Разлагая аналитическую функцию $\phi(z)$ в окрестности точки $z = b$ в ряд Тейлора, найдем

$$\phi(z) = \phi(b) + \phi'(b)(z-b) + \frac{1}{2}\phi''(b)(z-b)^2 + \cdots = (b+1)\left(1 - \frac{z}{b}\right)\psi(z), \tag{7}$$

где $\psi(z)$ — аналитическая функция и $\psi(b) = 1$.

После подстановки выражения для $\phi(z)$ в (4) получим

$$W_q(z) = b_q(b+1)^{-3q}\left(1 - \frac{z}{b}\right)^{-3q}(\psi(z))^{-3q} + h(z);$$

функция $h(z)$ имеет в точке $z = b$ полюс порядка $3q-1$, а в точке $z = 1$ — полюс порядка $3q$. Так как $b < 1$, то точка $z = b$ будет ближайшей особой точкой функции $W_q(z)$ к началу координат. Следовательно, степенной ряд для $W_q(z)$ имеет радиус сходимости b, причем на границе круга сходимости существует единственная особая точка, являющаяся полюсом порядка $3q$.

В силу теоремы Дарбу (см. [2]), если функция $A(z)$ аналитична в круге $|z| < b$ и имеет на границе круга сходимости единственную алгебраическую особенность $z = b$, причем верно разложение

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \left(1 - \frac{z}{b}\right)^{-\omega} g(z) + h(z),$$

где вес особенности в точке $z = b$ меньше, чем ω, то при $n \to \infty$ верна асимптотика

$$a_n \sim \frac{g(b)}{\Gamma(\omega)} n^{\omega-1} b^{-n}.$$

В нашем случае имеем

$$\omega = 3q, \quad g(b) = b_q(b+1)^{-3q}\psi^{-3q}(b) = \left(\frac{3}{2}\right)^q (q-1)!\, d_q(b+1)^{-3q}.$$

Следовательно, получим при $q \geqslant 1$ и $n \to \infty$

$$T(n, n+q) \sim \frac{(3/2)^q (q-1)! d_q}{(b+1)^{3q}\, b^n\, \Gamma(3q)} n^{3q-1} n!.$$

После умножения числителя и знаменателя дроби на $3q$, учитывая тождество $q(q-1)! = q!$ для факториала, тождество $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ для гамма-функции и выражая $\Gamma(z)$ через факториал, найдем формулу (4) при $q \geqslant 1$.

Рассмотрим теперь случай $q = 0$:

$$W_0(z) = \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{2p} z^p (e^{pz} - 1) = -\frac{1}{2}\ln(1 - ze^z) + \frac{1}{2}\ln(1-z) - \frac{z^2e^{2z}}{4} - \frac{ze^z}{2} - \frac{ze^z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z}{2}.$$

Дифференцируя по z, будем иметь

$$W_0'(z) = \frac{(1+z)e^z}{2(1-ze^z)} - \frac{1}{2(1-z)} - \frac{z}{2}(1+z)e^{2z} - \frac{1}{2}(1+z)e^z + \frac{1}{2}(1+z).$$

Подставляя сюда из (5) выражение для $1 - ze^z$, получим

$$W_0'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} TU(n+1)\frac{z^n}{n!} = \frac{(1+z)e^z}{2(1+b)\psi(z)}\left(1 - \frac{z}{b}\right)^{-1} + h_1(z),$$

где функция $h_1(z)$ аналитична в круге $|z| < b$. Из этого разложения видно, что функция $W_0'(z)$ имеет на границе круга сходимости $|z| < b$ единственную алгебраическую особенность — полюс первого порядка $z = b$. Опять применяя теорему Дарбу, найдем

$$TU(n+1) \sim \frac{1}{2b} b^{-n} n!.$$

После замены n на $n-1$ получим, что при $n \to \infty$

$$TU(n) \sim \frac{1}{2n} b^{-n} n!,$$

что совпадает с формулой (4) при $q = 0$. $\square$

Зададим на множестве помеченных связных графов с n вершинами и $n+q$ ребрами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 4. *Пусть $P_q(n)$ — вероятность того, что помеченный связный граф с n вершинами и $n+q$ ребрами является колючим графом. Тогда при фиксированном $q \geqslant 0$ и $n \to \infty$ верна асимптотика*

$$P_q(n) \sim \frac{\sqrt{\pi}(b+1)^{-3q}}{2^{3q/2-1}\Gamma\left(\frac{3q+1}{2}\right)} n^{3q/2}(be)^{-n}. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим через $C(n, n+q)$ число помеченных связных графов с n вершинами и $n+q$ ребрами. Э. Райт нашел следующую асимптотику при $n \to \infty$ и $0 \leqslant q = o(n^{1/3})$ (см. [18]):

$$C(n, n+q) \sim f_q n^{n+(3q-1)/2}, \quad f_0 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \quad f_q = \frac{\sqrt{\pi}3^q(q-1)!d_q}{2^{(5q-1)/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}q\right)} \text{ при } q \geqslant 1,$$

где d_q — константы Райта (коэффициенты Степанова—Райта).

С помощью асимптотики (2) и формулы Стирлинга для факториала имеем при $q \geqslant 1$

$$P_q(n) = \frac{T(n, n+q)}{C(n, n+q)} \sim \frac{2^{3q/2+1}\Gamma\left(\frac{3}{2}q+1\right) n^{3q/2}}{\Gamma(3q+1)(b+1)^{3q}(be)^n}.$$

Применяя формулу удвоения для гамма-функции (см. [1, с. 19])

$$\Gamma(2z) = \pi^{-1/2} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \text{ при } z = \frac{3q+1}{2},$$

получим требуемое утверждение при $q \geqslant 1$.

Для $q = 0$ с помощью формулы Стирлинга для факториала найдем

$$P_0(n) = \frac{T(n,n)}{C(n,n)} \sim \frac{\frac{1}{2n} n! b^{-n}}{f_0 n^{n-1/2}} = \frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n b^{-n}}{\sqrt{\frac{\pi}{8}} n^{n-1/2}} = \frac{2}{(be)^n},$$

что совпадает с формулой (8) при $q = 0$. $\square$

Так как $be > 1$, то $P_q(n) = o(1)$ при $n \to \infty$. Таким образом, при фиксированном $q \geqslant 0$ почти все помеченные связные графы с n вершинами и $n+q$ ребрами не являются колючими графами.

Известно, что в множестве помеченных связных графов с n вершинами почти все графы являются гладкими (см. [4]). Однако в множестве помеченных связных разреженных графов с n вершинами и $n+q$ ребрами другая картина. Э. Райт (см. [16]) нашел следующую асимптотику для числа $V(n, n+q)$ помеченных гладких графов с p вершинами и $p+q$ ребрами при $1 \leqslant q = O(n^{1/2})$ и $n \to \infty$:

$$V(n, n+q) \sim d_q(3/2)^q \frac{(q-1)!(n+3q-1)!}{(3q-1)!},$$

где d_q — константы Райта (коэффициенты Степанова—Райта).

Следовательно, доля гладких графов среди связных графов с n вершинами и $n+q$ ребрами при фиксированном $q \geqslant 1$ и $n \to \infty$ равна

$$\frac{V(n, n+q)}{C(n, n+q)} \sim \frac{d_q(3/2)^q(q-1)! n^{3q-1} n!}{f_q(3q-1)! n^{n+(3q-1)/2}} \sim \frac{d_q(3/2)^q(q-1)!}{f_q(3q-1)!} n^{(3q-1)/2} e^{-n} = o(1)\ ,$$

т.е. почти все связные графы с n вершинами и $n+q$ ребрами являются негладкими графами.

Сравним еще рост класса колючих графов с ростом класса гладких графов при фиксированном $q \geqslant 1$ и $n \to \infty$:

$$\frac{T(n, n+q)}{V(n, n+q)} \sim \frac{3d_q(3/2)^q q!(3q-1)! n^{3q-1} b^{-n} n!}{d_q(3/2)^q(q-1)! n^{(3q-1)/2} n!} = (3q)! n^{(3q-1)/2}\left(\frac{1}{b}\right)^n.$$

Так как $1/b > 1$, то имеем экспоненциальный рост класса колючих графов по сравнению с классом гладких графов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1965.
2. *Бендер Э. А.* Асимптотические методы в теории перечислений// в кн.: Перечислительные методы комбинаторного анализа. — М.: Мир, 1979. — С. 266–310.
3. *Воблый В. А.* Асимптотическое перечисление помеченных связных разреженных графов с заданным числом висячих вершин// Дискр. анал. — 1985. — № 42. — С. 3–14.
4. *Воблый В. А.* Асимптотическое перечисление графов некоторых типов/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — ВЦ АН СССР, 1985.
5. *Воблый В. А.* О вероятности появления графа-гусеницы среди случайных разреженных графов// Тез. докл. II Всесоюз. конф. «Вероятностные методы в дискретной математике» (Петрозаводск). — Петрозаводск, 1988. — С. 25–26.
6. *Воблый В. А.* О коэффициентах Райта и Степанова—Райта// Мат. заметки. — 1987. — *42*, № 6. — С. 854–862.
7. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных колючих кактусов// Мат. XXIX Междунар. конф. КРОМШ-2018 (Симферополь, 17–29 сентября 2018 г.). — Симферополь: Полипринт, 2018. — С. 137–138.
8. *Медведев Ю. И., Ивченко Г. И.* Асимптотическое представление конечных разностей от степенной функции в произвольной точке// Теор. вер. примен. — 1965. — *10*, № 1. — С. 151–156.
9. *Bonchev D., Klein D. J.* On the Wiener number of thorn trees, stars, rings, and rods// Croat. Chem. Acta. — 2002. — *75*, № 2. — P. 613–620.
10. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* On the Lambert W-function// Adv. Comput. Math. — 1996. — *5*, № 1. — P. 329–359.
11. *De N.* Application of corona product graphs in computing topological indexes of some special chemical graphs// in: Handbook of Research on Applied Cybernetics and System Science. — IGI Global, 2017. — P. 82–101.
12. *El-Basil S.* Applications of caterpillar trees in chemistry and physics// J. Math. Chem. — 1987. — *1*. — P. 153–174.
13. *Harary F., Schwenk A. J.* The number of caterpillars// Discr. Math. — 1973. — *6*. — P. 359–365.
14. *Gutman I.* Distance of thorny graphs// Publ. Inst. Math. Nouv. Ser. — 1998. — *63 (77)*. — P. 31–36.
15. *Pittel B., Wormald N. C.* Counting connected graphs inside-out// J. Combin. Theory. Ser. B. — 2005. — *93*, № 2. — P. 127–172.
16. *Wright E. M.* Enumeration of smooth labelled graphs// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. — 1982. — *A91*, № 3/4. — P. 205–212.
17. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs. II// J. Graph Theory. — 1978. — *2*, № 4. — P. 299–305.
18. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs. III// J. Graph Theory. — 1980. — *4*, № 4. — P. 393–407.

Воблый Виталий Антониевич
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

Архипова Наталия Александровна
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
E-mail: `nataar1956@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 55–65
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-55-65

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

© 2022 г. **Б. Ж. КАДИРКУЛОВ, Г. А. КАЮМОВА**

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы однозначной разрешимости нелокальной задачи для нелокального аналога смешанного параболо-гиперболического уравнения с обобщенным оператором Римана—Лиувилля и с инволюцией относительно пространственной переменной. Установлен критерий единственности решения и определены достаточные условия на данные для однозначной разрешимости поставленной задачи. При помощи метода разделения переменных построено решение в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Установлена устойчивость решения рассматриваемой задачи по нелокальному условию.

***Ключевые слова*:** уравнение смешанного типа, уравнение с инволюцией, нелокальная задача, нелокальное дифференциальное уравнение, условия склеивания, оператор Хилфера, функция Миттаг-Леффлера, ряд Фурье.

NONLOCAL PROBLEM FOR A FRACTIONAL-ORDER MIXED-TYPE EQUATION WITH INVOLUTION

© 2022 **B. Zh. KADIRKULOV, G. A. KAYUMOVA**

Abstract. In this paper, we examine the unique solvability of a nonlocal problem for a nonlocal analog of a mixed parabolic-hyperbolic equation with a generalized Riemann–Liouville operator and involution with respect to the space variable. A criterion for the uniqueness of the solution is established and sufficient conditions for the unique solvability of the problem are determined. By the method of separation of variables, a solution is constructed in the form of an absolutely and uniformly convergent series with respect to eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. The stability of the solution of the problem under consideration under a nonlocal condition is established.

***Keywords and phrases*:** mixed-type equation, equation with involution, nonlocal problem, nonlocal differential equation, gluing conditions, Hilfer operator, Mittag-Leffler function, Fourier series.

***AMS Subject Classification*:** 34K37, 35A09, 35M12

1. Введение и постановка задачи. Пусть $\Omega = \{(x,t) : -1 < x < 1,\ -a < t < b\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$, где a, b — положительные действительные числа. В этой области для уравнения смешанного типа вида

$$\begin{cases} D^{\alpha,\gamma}u(x,t) - u_{xx}(x,t) + \varepsilon u_{xx}(-x,t), & t > 0, \\ u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \varepsilon u_{xx}(-x,t), & t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача A. Найти функцию $u(x,t)$ класса

$$t^{1-\gamma}D^{\alpha,\gamma}u, \quad t^{1-\gamma}\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\overline{\Omega}_1), \quad \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\overline{\Omega}_2), \quad u_{tt} \in C(\Omega_2), \quad u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2), \tag{2}$$

где $k = \overline{0,1}$, которая удовлетворяет уравнению (1) в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$, краевым условиям

$$u(-1,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in [-a,0] \cup (0,b], \tag{3}$$

$$u(x,-a) = u(x,b) + \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4}$$

а также условиям склеивания

$$\lim_{t\to+0} J_{0+}^{1-\gamma} u(x,t) = \lim_{t\to-0} u(x,t), \quad \lim_{t\to+0} J_{0+}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} J_{0+}^{1-\gamma} u(x,t) = \lim_{t\to-0} u_t(x,t). \tag{5}$$

Здесь $\varphi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, $D^{\alpha,\gamma}$, $0 < \alpha \leqslant \gamma \leqslant 1$ — обобщенный оператор дробного дифференцирования, определение которого приведено ниже.

Для функции $\varphi(t)$, заданной на (a,b), $-\infty < a < b < \infty$, выражение

$$I_{a+}^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad x \in (a,b)$$

называется дробным интегралом Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$ (см. [10, с. 25]); здесь $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Пусть $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. Операторы дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля и Герасимова—Капуто функции $\varphi(t)$ порядка α определяются соответственно по формулам

$$D_{a+}^{\alpha} \varphi(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_{a+}^{n-\alpha} \varphi(x), \quad x \in (a,b),$$

$${}_*D_{a+}^{\alpha} \varphi(x) = I_{a+}^{n-\alpha} \varphi^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

(см. [10, с. 27, 34]). При $\alpha = n \in \mathbb{N}$ эти производные сводятся к производным целого порядка (см. [10, с. 27, 34]):

$$D_{a+}^{n} \varphi(x) = {}_*D_{a+}^{n} \varphi(x) = \frac{d^n \varphi}{dx^n}.$$

Обобщенная производная Римана—Лиувилля дробного порядка α, $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$, и типа β, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ (также альтернативное называние — дробная производная Хилфера) функции $\varphi(t)$ определяется по формуле

$$D_{a+}^{\alpha,\beta} \varphi(x) = I_{a+}^{\beta(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)} \varphi(x)$$

(см. [10, с. 35]). Отсюда следует, что при $\beta = 0$ дробная производная Хилфера совпадает с оператором Римана—Лиувилля ($D_{a+}^{\alpha,0} = D_{a+}^{\alpha}$), а в случае $\beta = 1$ получим дробную производную Герасимова—Капуто, т.е. $D_{a+}^{\alpha,1} = {}_*D_{a+}^{\alpha}$. Таким образом, оператор $D^{\alpha,\gamma}$ является непрерывной интерполяцией известных операторов дифференцирования Римана—Лиувилля и Герасимова—Капуто дробного порядка.

Далее для удобства записи мы воспользуемся другим обозначением дробной производной Хилфера, т.е. $D^{\alpha,\gamma} = D_{a+}^{\alpha,\beta}$, где $\gamma = \alpha + \beta n - \alpha\beta$ и $\alpha \leqslant \gamma \leqslant n$.

Оператор $D^{\alpha,\gamma}$ был введен и исследован Р. Хилфером в [11]. Применяя интегральные преобразования Фурье, Лапласа и Меллина, он исследовал задачу Коши для уравнения диффузии с обобщенным оператором $D^{\alpha,\gamma}$, решение которого представлено через H-функции Фокса. В [12] в специальном функциональном пространстве исследованы свойства оператора Хилфера и разработан операционный метод решения дробных дифференциальных уравнений в этом пространстве. Развивая эти результаты, авторы работы [18] предложили операционный метод решения дробных дифференциальных уравнений, содержащий конечную линейную комбинацию операторов Хилфера.

Что касается уравнений в частных производных с операторами дробного порядка, отметим работы [5,6,13,27]. В [21] для уравнения диффузии дробного порядка с оператором Хилфера изучены вопросы разрешимости прямых и обратных задач, а в [25] исследована нелокальная задача для нелинейного уравнения смешанного типа, содержащего дробную производную Хилфера. Отметим также работу [26], где для уравнения в частных производных с обобщенными операторами Римана—Лиувилля исследуется нелокальная задача, аналогичная задаче настоящей работы.

Отметим, что по построению различных моделей практических задач с применением дробного исчисления изложены в [17, 22]. Более подробную информацию, а также библиографию, касающиеся дробной производной Хилфера, о ее свойствах можно найти в монографии [20], где систематически изложена теория дробного интегро-дифференцирования, в том числе о дробной производной Хилфера.

Нелокальные задачи возникают при изучении различных проблем математической биологии, прогнозировании почвенной влаги, проблем физики, плазмы, и в этом направлении существенные результаты получены К. Б. Сабитовым и его учениками (см. [3,4,19]). Заметим, что нелокальные условия типа (3) имеют место при моделировании задач обтекания профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной (см. [19]).

Понятие нелокального дифференциального уравнения появилось в математике сравнительно недавно. Среди нелокальных дифференциальных уравнений особое место занимают уравнения, в которых отклонение аргументов имеет инволютивный характер. Отметим, что отображение I принято называть *инволюцией*, если $I^2 = E$, где E — тождественное отображение.

Дифференциальные уравнения с инволюцией исследовались в работах многих авторов (см. [7–9, 24]). В этом направлении следует отметить работу А. В. Линькова [2], где для аналогов параболического, гиперболического и эллиптического уравнения с инволюцией исследованы краевые и начально-краевые задачи. В [16] исследуются краевые задачи для дробного уравнения Гельмгольца с оператором Герасимова—Капуто и с инволюцией, а в [23] — обратные задачи для дробного параболического уравнения с инволюцией. Отметим также работу [15], где изучаются обратные задачи для вырожденного параболического уравнения дробного порядка с инволюцией.

Все перечисленные работы в основном относятся к нелокальным уравнениям второго порядка. Что касается нелокальных уравнений смешанного типа с производными целого или дробного порядков, то такие уравнения, а также краевые задачи для них ранее не изучались.

В данной работе установлен критерий единственности решения одной задачи для нелокального аналога смешанного параболо-гиперболического уравнения дробного порядка с инволюцией относительно пространственной переменой. При этом решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи и установлена устойчивость решения рассматриваемой задачи по нелокальному условию.

2. Существование и единственность решение задачи. Для решения задачи применим спектральный метод. Решения задачи A ищем в виде $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Подставляя это выражение в уравнение (1) и краевые условия (3), получим следующую спектральную задачу:

$$X''(x) - \varepsilon X''(-x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(-1) = 0, \quad X(1) = 0.$$

Как следует из результатов [23], рассматриваемая задача является самосопряженной, имеет счетное число собственных значений вида

$$\lambda_{1k} = (1+\varepsilon)k^2\pi^2, \quad \lambda_{2k} = (1-\varepsilon)\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad |\varepsilon| < 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а соответствующими собственными функциями являются

$$X_{1k}(x) = \sin k\pi x, \quad X_{2k}(x) = \cos(k - 0,5)\pi x, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{6}$$

более того, они образуют полную ортонормированную систему в $L_2(-1,1)$.

2.1. Единственность решения задачи A. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи A. Рассмотрим ледующие функции

$$u_{1k}(t) = \int_{-1}^{1} u(x,t) \sin k\pi x \, dx, \quad u_{2k}(t) = \int_{-1}^{1} u(x,t) \cos(k - 0,5)\pi x \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Применяя оператор $D^{\alpha,\gamma}$ к обеим частям равенства (7) по t при $t \in (0,b)$, а также дифференцируя два раза по t при $t \in (-a,0)$ и учитывая уравнение (1) относительно функций $u_{1k}(t)$ и $u_{2k}(t)$, получим дифференциальные уравнения

$$D^{\alpha,\gamma}u_{ik}(t) + \lambda_{ik}u_{ik}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{8}$$

$$u''_{ik}(t) + \lambda u_{ik}(t) = 0, \quad t < 0, \quad i = 1,2. \tag{9}$$

Общие решения уравнений (8) и (9) имеют вид

$$u_{ik}(t) = \begin{cases} A_{ik}t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}t^{\alpha}), & t > 0, \\ B_{ik}\sin\sqrt{\lambda_{ik}}t + L_{ik}\cos\sqrt{\lambda_{ik}}t, & t < 0, \end{cases} \tag{10}$$

где A_{ik}, B_{ik}, L_{ik}, $i = 1,2$, $k = 1,2,\ldots,$ — произвольные постоянные, а $E_{\alpha,\beta}(z)$ — функция Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad z,\alpha,\beta \in C, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0$$

(см. [1, с. 117]). Из (8), (9), учитывая условия (1), (4) и (5), получим, что функции $u_{1n}(t)$ и $u_{2n}(t)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{t\to+0}J_{0+}^{1-\gamma}u_{in}(t) = \lim_{t\to-0}u_{in}(t), \quad \lim_{t\to+0}J_{0+}^{1-\alpha}\left(\frac{d}{dt}J_{0+}^{1-\gamma}u_{in}(t)\right) = \lim_{t\to-0}\frac{du_{in}(t)}{dt}, \quad i = 1,2, \tag{11}$$

$$u_{ik}(-a) = u_{ik}(b) + \varphi_{ik}, \quad i = 1,2, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{12}$$

где

$$\varphi_{ik} = \int_{-1}^{1}\varphi(x)X_{ik}(x)\,dx, \quad i = 1,2, \quad k = 1,2,\ldots$$

Далее, подчиняя функции (10) условиям (11), (12), для нахождения постоянных A_{ik}, B_{ik}, L_{ik}, $i = 1,2$, получим следующую систему уравнений:‘

$$\begin{cases} A_{ik} = L_{ik}, \quad -\lambda_{ik}A_{ik} = \sqrt{\lambda_{ik}}B_{ik}, \\ -B_{ik}\sin\sqrt{\lambda_{ik}}a + L_{ik}\cos\sqrt{\lambda_{ik}}a - A_{ik}b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}b^{\alpha}) = \varphi_{ik}. \end{cases} \tag{13}$$

Данная система алгебраических уравнений имеет единственное решение

$$L_{ik} = A_{ik}, \quad B_{ik} = -\sqrt{\lambda_{ik}}A_{ni}, \quad A_{ik} = \frac{\varphi_{ik}}{\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)}$$

при условии, что для всех $k = 1,2\ldots$ имеет место равенство

$$\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon) = \sqrt{\lambda_{ik}}\sin\sqrt{\lambda_{ik}}a + \cos\sqrt{\lambda_{ik}}a - b^{1-\gamma}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}b^{\alpha}) \neq 0, \quad i = 1,2. \tag{14}$$

Подставляя найденные решения в (10), имеем

$$u_{ik}(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{ik}}{\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)}t^{1-\gamma}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}t^{\alpha}), & t > 0, \\ \dfrac{\varphi_{ik}}{\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)}(\cos\sqrt{\lambda_{ik}}t - \sqrt{\lambda_{ik}}\sin\sqrt{\lambda_{ik}}t), & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{15}$$

При выполнении условия (14) с помощью (15) легко доказать единственность решения рассматриваемой задачи. Действительно, пусть задача A имеет два разных решения $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ и пусть $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$. Тогда нетрудно проверить, что $u(x,y)$ является решением однородной задачи A $(\varphi(x) = 0)$. Поэтому достаточно доказать, что однородная задача A имеет только тривиальное решение.

Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи A в области Ω и выполняется условие (14). Так как $\varphi(x)=0$, имеем $\varphi_{ik}=0$, $i=1,2$, и из формул (7) и (15) следует, что

$$\int\limits_0^1 t^{1-\gamma}u(x,t)X_{ik}(x)\,dx=0,\quad t\in[0,b],\quad i=1,2,\quad k=1,2,\dots,$$

$$\int\limits_0^1 u(x,t)X_{ik}(x)\,dx=0,\quad t\in[-a,0],\quad i=1,2,\quad k=1,2,\dots$$

Далее, учитывая полноту системы (6) в пространстве $L_2(-1,1)$, заключаем, что $u(x,t)=0$ почти всюду на $[-1,1]$ при любом $t\in[-a,b]$. Поскольку $t^{1-\gamma}u(x,t)\in C(\bar\Omega_1)$, $u(x,t)\in C(\overline{\Omega}_2)$, то $t^{1-\gamma}u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$, т.е. задача A в рассматриваемой классе имеет единственное решение. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если существует решение задачи A, то оно единственно только и только тогда, когда выполнены условия* (14) *при всех* $k=1,2,\dots$.

Теперь рассмотрим случай, когда нарушается условие (14), т.е. $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=0$ при некоторых a, b, ε, $i=i_0$ и $k=m$. Тогда однородная задача A (где $\varphi(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$V_{i_0m}(x,t)=v_{i_0m}(t)X_{i_0m}(x), \tag{16}$$

где

$$v_{i_0m}(t)=\begin{cases}t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{i_0m}t^\alpha), & t>0,\\ \cos\lambda_{i_0m}t-\sqrt{\lambda_{i_0m}}\sin\lambda_{i_0m}t, & t<0.\end{cases}$$

Представим выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ в виде

$$\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=\sqrt{1+\lambda_{ik}}\sin(\lambda_{ik}a+\rho_{ik})-b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}b^\alpha), \tag{17}$$

где $\rho_{ik}=\arcsin(1/\sqrt{1+\lambda_{ik}})$ и $\rho_{ik}\to 0$ при $k\to+\infty$. Отсюда видно, что выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ обращается в нуль только в том случае, когда

$$\lambda_{ik}a=(-1)^k\arcsin\frac{b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik}b^\alpha)}{\sqrt{1+\lambda_{ik}}}+\pi n-\rho_{ik},\quad n=1,2,\dots.$$

Поскольку $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ является знаменателем дроби, то при достаточно больших k выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема малых знаменателей. Поэтому для обоснования существования решения данной задачи необходимо показать существование таких чисел a, b и ε, что при достаточно больших k выражение $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)$ отделено от нуля.

Лемма 1. *Пусть* b *— любое положительное действительное число, а числа* a *и* ε *таковы, что* $\sqrt{1\pm\varepsilon}\cdot a$ *— рациональное число. Тогда при больших значениях* k *существует такая положительная постоянная* M_i, $i=1,2$, *что справедлива оценка*

$$|\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)|\geqslant M_i>0. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $i=1$ и $\sqrt{1+\varepsilon}\cdot a=p\in\mathbb{N}$. Тогда при всех k и $b>0$ из (14) имеем

$$|\Delta_{1k}(a,b,\varepsilon)|\geqslant|\pm1-b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k}b^\alpha)|\geqslant$$
$$\geqslant|1-b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k}b^\alpha)|\geqslant 1-b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k}b^\alpha).$$

Здесь и далее использованы следующие свойства функции Миттаг-Леффлера:

(i) при $\alpha,\beta\in(0,1]$, $\alpha\leqslant\beta$ функция $E_{\alpha,\beta}(-z)$ вполне монотонна на $(0,\infty)$ (см. [10, с. 280]);

(ii) если $\alpha\in(0,2)$, β — вещественная постоянная и $\arg z=\pi$, то имеет место неравенство

$$|E_{\alpha,\beta}(z)|\leqslant\frac{M}{1+|z|},$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от z (см. [1, с. 136]).

Из свойства полной монотонности функции Миттаг-Леффлера вытекает существование такого натурального числа $k_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > k_0$ имеет место неравенство

$$1 - b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k}b^{\alpha}) \geqslant N_1 > 0;$$

следовательно, $\Delta_{1k}(a,b,\varepsilon) \geqslant N_1 > 0$. Пусть теперь

$$\sqrt{1+\varepsilon}\cdot a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},$$

где $p,q \in \mathbb{N}$, $(p,q)=1$. Разделим kp на q с остатком:

$$kp = sq + r, \quad s,r \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leqslant r \leqslant q-1.$$

Тогда из (17) получим

$$|\Delta_{1k}(a,b,\varepsilon)| = \left|\sqrt{1+\lambda_{1k}}(-1)^s \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \rho_{ik}\right) - b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k}b^{\alpha})\right|.$$

Если $r=0$, то этот случай сводится к уже рассмотренному выше случаю.

Пусть $r>0$. Поскольку $\rho_{1k} \to 0$ при $k \to +\infty$, то существует такая постоянная $k_1 > 0$, что при всех $k > k_1$ имеет место неравенство

$$\rho_{1k} < \frac{\pi}{2q}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}|\Delta_{1k}(a,b)| &\geqslant \left|\sqrt{1+\lambda_{1k}}\sin\left(\frac{\pi r}{q}+\rho_{ik}\right) - b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k}b^{\alpha})\right| \geqslant \\ &\geqslant \sqrt{1+\lambda_{ik}}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q}+\rho_{ik}\right)\right| - b^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{1k}b^{\alpha}) > \\ &> \lambda_{1k}\left|\sin\left(\frac{\pi(q-1)}{q}+\frac{\pi}{2q}\right)\right| - 1 = k\pi\sin\frac{\pi}{2q} - 1 \geqslant kN_2 \geqslant N_2 > 0\end{aligned}$$

при

$$k > \max\{k_0,k_1,k_2\}, \quad k_2 \geqslant \frac{1}{\pi\sin\frac{\pi}{2q} - N_2}, \quad 0 < N_2 < \pi\sin\frac{\pi}{2q}$$

и при любом $b>0$. Случай $i=2$ доказывается аналогично. Лемма доказана. $\square$

Замечание 1. Множество пар (a,ε) чисел a и ε, удовлетворяющее одновременно условиям (18), не пусто. Например, если выбрать числа a и ε в виде

$$a = \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}\cdot r_3, \quad \varepsilon = \frac{r_1^2-r_2^2}{r_1^2+r_2^2},$$

где $r_i \in \mathbb{Q}$, $i=1,2,3$, $r_1 \neq r_2$, то пара (a,ε) удовлетворяет условию (18).

Отметим, что идея доказательства леммы 1 заимствована из [19].

2.2. Существование решение задачи A. Перейдем к доказательству существования решения задачи A. Из (14) и из свойств функции Миттаг-Леффлера, приведенных выше, легко получить доказательство следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (14) *и* (18). *Тогда выполняются следующие неравенства*:

$$|t^{1-\gamma}u_{1k}(t)| \leqslant M_1|\varphi_{1k}|, \quad |t^{1-\gamma}u_{2k}(t)| \leqslant M_2|\varphi_{2k}|, \quad t \in [0,b],$$

$$|t^{1-\gamma}D^{\alpha,\gamma}u_{1k}(t)| \leqslant M_3k^2|\varphi_{1k}|, \quad |t^{1-\gamma}D^{\alpha,\gamma}u_{2k}(t)| \leqslant M_4\left(k-\frac{1}{2}\right)^2|\varphi_{2k}|, \quad t \in [0,b],$$

$$\left|\frac{d^s u_{1k}(t)}{dt^s}\right| \leqslant D_{1s}k^{s+1}|\varphi_{1k}|, \quad \left|\frac{d^s u_{2k}(t)}{dt^s}\right| \leqslant D_{2s}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{s+1}|\varphi_{2k}|, \quad t \in [-a,0],$$

где M_i, $i=\overline{1,4}$, D_{1s}, D_{2s}, $s=\overline{0,2}$, *— положительные постоянные.*

Так как система (6) полна и образует базис в $L_2(-1,1)$, то решение задачи A можем искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{1k}(t)\sin(k\pi x)+u_{2k}(t)\cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right), \tag{19}$$

где $u_{1k}(t)$ и $u_{2k}(t)$ — неизвестные функции.

Подставляя функцию (19) в уравнение (1) и удовлетворяя условиям (3)–(5), для искомых функций получим задачу (8), (9), (11), (12), решения которой имеют вид (15).

Таким образом, решения задачи можно представить в виде (19), где функции $u_{ik}(t)$, $i=1,2$, определяются по формулам (15). Остаётся доказать правомерность всех этих действий. Для этого формально из (19), заменяя x на $-x$ и применяя почленное дифференцирование, составим ряды

$$u(-x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-u_{1k}(t)\sin(k\pi x)+u_{2k}(t)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\right), \tag{20}$$

$$u_x(\pm x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\pm k\pi u_{1k}(t)\cos(k\pi x)-\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi u_{2k}(t)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\right), \tag{21}$$

$$u_{xx}(\pm x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\mp(k\pi)^2u_{1k}(t)\sin(k\pi x)-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2u_{2k}(t)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x),\quad t>0, \tag{22}$$

$$t^{1-\gamma}D^{\alpha,\gamma}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(t^{1-\gamma}D^{\alpha,\gamma}u_{1k}(t)\sin(k\pi x)+t^{1-\gamma}D^{\alpha,\gamma}u_{2k}(t)\cos\frac{(k-1)\pi x}{2}\right),\quad t>0, \tag{23}$$

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(u''_{1k}(t)\sin(k\pi x)+u''_{2k}(t)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\right),\quad t<0, \tag{24}$$

$$u_{xx}(\pm x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mp(k\pi)^2u_{1k}(t)\sin(k\pi x)-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2u_{2k}(t)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\right),\quad t<0. \tag{25}$$

Учитывая леммы 1 и 2, нетрудно видеть, что ряды (19)–(25) мажорируются рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^3|\varphi_{1k}|+\left(k-\frac{1}{2}\right)^3|\varphi_{2k}|\right). \tag{26}$$

Исследуем сходимость ряда (26). Предположим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi(x)\in C^4[-1,1],\quad \varphi^{(s)}(-1)=0,\quad \varphi^{(s)}(1)=0,\quad s=0,2. \tag{27}$$

Тогда ряд (26) оценивается сходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}|\varphi_{1k}^{(4)}|+\frac{1}{k-1/2}|\varphi_{2k}^{(4)}|\right),$$

где

$$\varphi_{1k}=\frac{1}{(\pi k)^4}\varphi_{1k}^{(4)},\qquad \varphi_{1k}^{(4)}=\int_{-1}^{1}\varphi^{(4)}(x)\sin k\pi x\,dx,$$

$$\varphi_{2k}=\frac{1}{(\pi(k-1/2))^4}\varphi_{2k}^{(4)},\quad \varphi_{2k}^{(4)}=\int_{-1}^{1}\varphi^{(4)}(x)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\,dx.$$

Отсюда в силу признака Вейерштрасса вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов (19)–(21) в замкнутой области $\overline{\Omega}$, а рядов (22)–(25) соответственно в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$. Поэтому функция $u(x,t)$, определенная рядом (19), принадлежит классу (2), а также удовлетворяет условиям (3)–(5). Непосредственным вычислением можно показать, что функция $u(x,t)$, определенная рядом (19), удовлетворяет и уравнению (1).

Пусть теперь $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=0$ при некоторых a, ε, $i=i_0$ и $k=k_1,\ldots,k_s$, $1\leqslant k_1<k_1<\ldots<k_s$, $s\in\mathbb{N}$. Тогда для разрешимости системы (13) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\varphi_{i_0k}=\int\limits_0^1\varphi(x)X_{i_0k}\,dx=0,\quad k=k_1,\ldots,k_s. \tag{28}$$

В этом случае решение задачи определяется в виде суммы рядов

$$u(x,t)=\left[\sum_{k=1}^{k_1-1}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}+\ldots+\sum_{k=k_s+1}^{\infty}\right]+\sum_{i=1}^{2}u_{ik}X_{ik}(x)+\\ +\sum_m\sum_{i\neq i_0}u_{im}X_{im}(x)+\sum_m\sum_{i=i_0}P_{i_0m}V_{i_0m}(x,t) \tag{29}$$

где $m=k_1,\ldots,k_s$, P_{i_0m} — произвольные постоянные, функции $V_{i_0m}(x,t)$ определяются из формулы (16).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям* (27). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. *Задача A в области Ω однозначно разрешима только тогда, когда выполняются условия* (14) *и* (18); *при этом решение определяется рядом* (19).
2. *Если для некоторых a, b, ε, $i=i_0$ и $k=k_1,\ldots,k_s$ выполняется условие $\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)=0$, то задача A разрешима только в том случае, если выполняются условия ортогональности* (28); *при этом решение определяется рядом* (29).

Замечание 2. В случае $\alpha=1$, $\beta=0$ или $\alpha=1$, $\beta=1$ и при $\varepsilon=0$ утверждения данной теоремы совпадают с [19, теорема 2].

3. Устойчивость решение задачи A.

Установим устойчивость решения задачи A по ее нелокальному условию (4). Пусть

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})}=\|t^{1-\gamma}u(x,t)\|_{C(\bar\Omega_1)}+\|u(x,t)\|_{C(\bar\Omega_2)},$$
$$\|u(x,t)\|_{L_2(\Omega)}=\|t^{1-\gamma}u(x,t)\|_{L_2(\Omega_1)}+\|u(x,t)\|_{L_2(\Omega_2)},$$

где

$$\|v(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})}=\max_{\overline{\Omega}}|v(x,t)|,\quad \|\varphi(x)\|_{C[-1,1]}=\max_{[-1,1]}|\varphi(x)|,$$

$$\|v(x,t)\|_{L_2(\Omega)}=\left(\iint\limits_{\Omega}|v(x,t)|^2\,dx\,dt\right)^{1/2},\quad \|\varphi(x)\|_{L_2(-1,1)}=\left(\int\limits_0^1|\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда для решения задачи A имеют место оценки*

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})}\leqslant C\|\varphi''(x)\|_{C[-1,1]}, \tag{30}$$
$$\|u(x,t)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C\|\varphi'(x)\|_{L_2(-1,1)}, \tag{31}$$

где $C>0$ — постоянная, не зависящая от $\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть (x,t) — произвольная точка области $\overline{\Omega}_2$. Тогда из (19) следует, что

$$|u(x,t)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(|u_{1k}|+|u_{2k}|).$$

Отсюда, учитывая представления

$$\varphi_{k1} = -\frac{1}{(\pi k)^2}\varphi_{k1}^{(2)}, \qquad \varphi_{k1}^{(2)} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi''(x)\sin k\pi x\,dx,$$

$$\varphi_{k2} = -\frac{1}{(k-1/2)^2\pi^2}\varphi_{k2}^{(2)}, \quad \varphi_{k2}^{(2)} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi''(x)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\,dx,$$

на основании леммы 2 получим

$$|u(x,t)| \leqslant C_1\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\left|\varphi_{1k}^{(2)}\right| + \frac{1}{(k-1/2)}\left|\varphi_{2k}^{(2)}\right|\right), \quad C_1 = \frac{\max\{D_{10}, D_{20}\}}{\pi^2}.$$

Далее, применяя неравенства Коши—Шварца и Бесселя, имеем

$$|u(x,t)| \leqslant C_1\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{1k}^{(2)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1/2)^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{2k}^{(2)}|^2\right)^{1/2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant C_1\|\varphi''(x)\|_{L(-1,1)}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1/2)^2}\right)^{1/2}\right) \leqslant C\|\varphi''(x)\|_{L(-1,1)},$$

которая и доказывает оценку (30) в случае $(x,t) \in \overline{\Omega}_2$. Таким же образом в случае $(x,t) \in \overline{\Omega}_1$ получим оценку

$$\|t^{1-\gamma}u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega}_1)} \leqslant C\|\varphi''(x)\|_{C[-1,1]}.$$

Отсюда вытекает оценка (30).

Теперь докажем оценку (31). Так как

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega_2)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}(u_{in}(t)X_{in}(x)), \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}(u_{ik}(t)X_{ik}(x))\right)_{L_2(\Omega_2)},$$

а система (6) ортонормирована в $L_2(-1,1)$, то из (19), используя равенство Парсеваля, лемму 2, соотношения

$$\varphi_{1k} = \frac{1}{\pi k}\varphi_{1k}^{(1)}, \qquad \varphi_{1k}^{(1)} = \int\limits_{-1}^{1}\varphi'(x)\cos k\pi x\,dx,$$

$$\varphi_{2k} = -\frac{1}{(k-1/2)\pi}\varphi_{2k}^{(1)}, \quad \varphi_{2k}^{(1)} = \int\limits_{-1}^{1}\varphi'(x)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi x\,dx$$

и неравенство Бесселя, получим

$$\|u(x,t)\|_{L_2(\Omega_2)} \leqslant C\|\varphi'(x)\|_{L_2(-1,1)}.$$

Аналогично находим оценку

$$\|(t^{1-\gamma}u(x,t)\|_{L_2(\Omega_1)} \leqslant C\|\varphi'(x)\|_{L_2(-1,1)}.$$

Из последних оценок вытекает оценка (31). Следовательно, решение (19) задачи A непрерывно зависит от функции $\varphi(x)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966.
2. *Линьков А. В.* Обоснование метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением// Вестн. Самар. ун-та. — 1999. — *12*, № 2. — С. 60–66.
3. *Сабитов К. Б., Гущина В. А.* Задача А. А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева—Бицадзе// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 3. — С. 37–50.
4. *Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.* К вопросу о корректности обратных задач для неоднородного уравнения Гельмгольца// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2018. — *22*, № 2. — С. 269–292.
5. *Исломов Б. И., Абдуллаев О. Х.* Задачи типа Геллерстедта для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа с операторами Капуто и Эрдейли—Кобера дробного порядка// Изв. вузов. Мат. — 2020. — № 10. — С. 33–46.
6. *Agarwal P., Abdullaev O. Kh.* A nonlocal problem with integral gluing condition for a third-order loaded equation with parabolic-hyperbolic operator involving fractional derivatives// Math. Meth. Appl. Sci. — 2020. — *43*, № 6. — P. 3716–3726.
7. *Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M.* Initial-boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation// Math. Model. Nat. Phenom. — 2019. — *14*, № 3. — P. 1–15.
8. *Ashyralyev A., Sarsenbi A.* Well-posedness of a parabolic equation with involution// Num. Funct. Anal. Optim. — 2017. — *38*, № 10. — P. 1295–1304.
9. *Cabada A, Tojo F. A. F.* On linear differential equations and systems with reflection// Appl. Math. Comput. — 2017. — *305*. — P. 84–102.
10. *Tenreiro Machado J. A. (ed.).* Handbook of Fractional Calculus with Applications. — Berlin–Boston: De Gruyter, 2019.
11. *Hilfer R. (ed.).* Applications of Fractional Calculus in Physics. — Singapore: World Scientific, 2000.
12. *Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z.* Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2009. — *12*, № 3. — P. 299–318.
13. *Karimov E., Mamchuev M., Ruzhansky M.* Non-local initial problem for second order time-fractional and space-singular equation// Hokkaido Math. J. — 2020. — *49*. — P. 349–361.
14. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
15. *Kirane M., Sadybekov M. A., Sarsenbi A. A.* On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data// Math. Meth. Appl. Sci. — 2019. — *42*, № 6. — P. 2043–2052.
16. *Kirane M., Turmetov B. Kh., Torebek B. T.* A nonlocal fractional Helmholtz equation// Fract. Differ. Calc. — 2017. — *7*, № 2. — P. 225–234.
17. *Kumar D., Baleanu D.* Editorial: Fractional calculus and its applications in physics// Front. Phys. — 2019. — *7*. — 81.
18. *Kim Myong-Ha, Ri Guk-Chol, O Hyong-Chol* Operational method for solving multi-term fractional differential equations with the generalized fractional derivatives// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2014. — *17*, № 1. — P. 79–95.
19. *Сабитов К. Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области// Мат. заметки. — 2011. — *89*, № 4. — С. 596–602.
20. *Sandev T., Tomovski Z.* Fractional Equations and Models: Theory and Applications. — Switzerland: Springer Nature, 2019.
21. *Salakhitdinov M. S., Karimov E. T.* Direct and inverse source problems for two-term time-fractional diffusion equation with Hilfer derivative// Uzbek. Math. J. — 2017. — *4*. — P. 140–149.
22. *Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W.* A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2019. — *22*. — P. 27–59.
23. *Torebek B. T., Tapdigoglu R.* Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative// Math. Meth. Appl. Sci. — 2017. — *40*. — P. 6468–6479.
24. *Turmetov B. Kh, Torebek B. T.* On a class of fractional elliptic problems with an involution perturbation// AIP Conf. Proc. — 2016. — *1759*. — 020070.

25. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Boundary-value problem for weak nonlinear partial differential equations of mixed type with fractional Hilfer operator// Axioms. — 2020. — *9*, № 2. — 68.
26. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Nonlocal problem for a mixed type fourth-order differential equation with Hilfer fractional operator// Ural Math. J. — 2020. — *6*, № 1. — P. 153–167.
27. *Yuldashev T. K., Karimov E.* Inverse problem for a mixed type integro-differential equation with fractional-order Caputo operators and spectral parameters// Axioms. — 2020. — *9*. — 121.

Кадиркулов Бахтиёр Жалилович
Ташкентский государственный университет востоковедения, Ташкент, Узбекистан
E-mail: kadirkulovbj@gmail.com

Каюмова Гавхар Абдушукуровна
Каршинский инженерно-экономический институт, Карши, Узбекистан
E-mail: gavhar88@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 66–76
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-66-76

УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ, СВЯЗАННАЯ С ТЕЧЕНИЕМ ГАЗА В КАНАЛЕ, ОКРУЖЕННОМ ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ

© 2022 г. **А. К. УРИНОВ, Э. Т. КАРИМОВ, С. КЕРБАЛ**

Аннотация. Исследована краевая задача с интегральным условием сопряжения для смешанного уравнения с оператором дробного интегро-дифференцирования. Основным результатом работы является доказательство однозначной разрешимости краевой задачи с интегральным условием сопряжения для уравнения, состоящего из двух уравнений в частных производных с дробной производной Римана—Лиувилля в смешанной прямоугольной области. Задача эквивалентным образом редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Показана особая роль условия сопряжения в разрешимости задачи.

Ключевые слова: краевая задача, интегральное условие сопряжения, смешанное уравнение дробного порядка, течение газа в канале.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONJUGATION CONDITION FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE FRACTIONAL RIEMANN–LIOUVILLE DERIVATIVE THAT DESCRIBES GAS FLOWS IN A CHANNEL SURROUNDED BY A POROUS MEDIUM

© 2022 **A. K. URINOV, E. T. KARIMOV, S. KERBAL**

Abstract. A boundary-value problem with an integral conjugation condition for a mixed equation with a fractional integro-differential operator was examined. The main result of the work is the proof of the unique solvability of the boundary-value problem with an integral conjugation condition for the equation consisting of two partial differential equations with the fractional Riemann–Liouville derivative in a rectangular domain. The problem is reduced to a Volterra integral equation of the second kind. The special role of the conjugation condition in the solvability of the problem is shown.

Keywords and phrases: boundary-value problem, integral conjugation condition, mixed fractional-order equation, gas flow in a channel.

AMS Subject Classification: 35M10

1. Введение. Течение газа или мало сжимаемой жидкости на канале, окруженной пористой средой, описывается уравнением смешанного типа (см. [3]). В канале течение описывается волновым уравнением, а вне его — уравнением диффузии. Изучение двух уравнений, заданных в двух частях пространства и связанных теми или иными условиями сопряжения на границе, диктуется реальными физическими задачами (см. [3]). Исходя из типа структуры пористой среды (коэффициент пористости), уравнения диффузии могут быть разными. Так, учет эффекта памяти среды приводит к необходимости замены обычной производной по времени на производную дробного порядка (см. [17]). Для точного описания процесса в качестве математической модели взята комбинация волнового уравнения и уравнения диффузии с операторами дробного интегро-дифференцирования

$$\frac{\partial^\alpha u(t,\mathrm{x})}{\partial t^\alpha} - L(u) = f(t,u,\mathrm{x}), \tag{1}$$

где $\partial^\alpha u/\partial t^\alpha$ — оператор дробного интегро-дифференцирования порядком $\alpha \in [0;2]$, зависящим от области рассмотрения, $L(u)$ — эллиптический оператор, $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Уравнение (1) рассматривается в области $\Pi = \Pi_1 \cup J \cup \Pi_2$, где Π_1 — односвязная область, в которой рассматривается волновое уравнение с дробной производной, а Π_2 — односвязная область, в которой рассматривается уравнение диффузии с дробной производной. На общей границе этих областей $J = \partial\Pi_1 \cap \partial\Pi_2$ задаются условия сопряжения. Упрощение геометрии рассматриваемых областей, а также линеаризованные уравнения позволяют исследовать задачу аналитическими методами.

Рассмотрим область Π, состоящую из двух прямоугольниковю В качестве оператора дробного интегро-дифференцирования используем оператор Римана—Лиувилля

$$D^\gamma_{0+} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\gamma}_{0+} f, \quad n-1 < \gamma \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где

$$I^\delta_{0+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int\limits_0^t (t-z)^{\delta-1} f(z)\,dz$$

— дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка δ.

Отметим, что в [8–12] исследованы как прямые, так и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольных областях. Различные локальные и нелокальные краевые задачи для таких уравнений с операторами дробного интегро-дифференцирования в прямоугольных областях исследованы в [2,5,7,13,14]. Также отметим работы [4,16,20,21], где рассмотрены задачи для смешанных уравнений четвертого порядка с дробными производными. Такие же задачи для нагруженных уравнений смешанного типа с операторами дробного интегро-дифференцирования были исследованы в [1, 15]. Кроме того, изучались уравнения с несколькими производными дробного порядка [18], со спектральными параметрами [22], с более общими операторами [19] и т. д.

Основными отличиями исследуемой задачи от ранее изученных задач является условие сопряжения на линии изменения типа и редукция задачи к интегральному уравнению. Кроме того, использованы новые свойства функции Грина первой краевой задачи для диффузионно-волнового уравнения.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(t,x) - H(a-x) D^{\gamma_1}_{0+} u(t,x) - [1 - H(a-x)] D^{\gamma_2}_{0+} u(t,x) = f(t,x) \tag{3}$$

в области $\Pi = \Pi_1 \cup J \cup \Pi_2$, где

$$\Pi_1 = \{(t,x) : 0 < x < a,\ 0 < t < T\}, \quad \Pi_2 = \{(t,x) : a < x < b,\ 0 < t < T\},$$
$$J = \{(t,x) : x = a,\ 0 < t < T\}, \quad 1 < \gamma_1 \leqslant 2, \quad 0 < \gamma_2 \leqslant 1,$$

$H(\cdot)$ — функция Хевисайда, D^γ_{0+} — производная дробного порядка γ в смысле Римана—Лиувилля.

Задача. Найти *регулярное решение* уравнения (3) в области Π, удовлетворяющее краевым и начальным условиям

$$u(t,0)=\varphi_0(t), \quad u(t,b)=\varphi_b(t), \quad 0<t<T, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to 0^+} D_{0+}^{\gamma_1-k}u(t,x)=\psi_k(x), \quad k=1,2, \quad 0<x<a, \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0^+} D_{0+}^{\gamma_2-1}u(t,x)=\psi_3(x), \quad a<x<b, \tag{6}$$

а также условиям сопряжения на J

$$I_{0+}^{2-\gamma_1}u(t,a^-)=I_{0+}^{1-\gamma_2}u(t,a^+), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{7}$$

$$u_x(t,a^-)=u_x(t,a^+)+\lambda u_t(t,a^+)+\mu\int\limits_0^t u_x(z,a^+)P(z,a^+)dz, \quad 0<t<T. \tag{8}$$

Здесь λ, μ — заданные действительные числа, $P(t,x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_b(t)$, $\psi_i(x)$ — заданные функции $(i=\overline{1,3})$, $D_{0+}^{-\gamma}u(\cdot)=I_{0+}^{\gamma}u(\cdot)$, $\gamma>0$.

Определение. Под *регулярным решением* уравнения (3) в области Π понимается функция $u(t,x)$ из класса функций

$$W=\Big\{u(t,x):\ t^{2-\gamma_1}u(t,x)\in C(\overline{\Pi}_1),\ t^{1-\gamma_2}u(t,x)\in C(\overline{\Pi}_2),$$
$$u_{xx}(t,x)\in C(\Pi_1\cup\Pi_2),\ D_{0+}^{\gamma_1}u(t,x)\in C(\Pi_1),\ D_{0+}^{\gamma_2}u(t,x)\in C(\Pi_2)\Big\},$$

удовлетворяющая уравнению (1) в областях Π_1 и Π_2.

Таким образом, верны следующие условия согласования:

$$\lim_{t\to 0^+} t^{2-\gamma_1}\varphi_0(t)=\psi_1(0), \quad \lim_{t\to 0^+} t^{1-\gamma_2}\varphi_b(t)=\psi_3(b). \tag{9}$$

3. Основной результат. Однозначную разрешимость поставленной задачи будем доказывать методом интегральных уравнений, т.е. задачу эквивалентным образом редуцируем к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Решение первой краевой задачи для уравнения (3) в Π_1 представляется в следующем виде:

$$u(t,x)=\int\limits_0^t \varphi_0(\eta)G_\xi(t,x,\eta,0)d\eta-\int\limits_0^t \tau_1(\eta)G_\xi(t,x,\eta,a)d\eta+$$
$$+\int\limits_0^a\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\psi_k(\xi)\frac{\partial^{k-1}}{\partial\eta^{k-1}}G(t,x,0,\xi)d\xi-\int\limits_0^t\int\limits_0^a f(\eta,\xi)G(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi, \tag{10}$$

где $u(t,a^-)=\tau_1(t)$,

$$G(t,x,\eta,\xi)=\frac{(t-\eta)^{\hat\alpha-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e_{1,\hat\alpha}^{1,\hat\alpha}\left(-\frac{|x-\xi+2na|}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\right)+e_{1,\hat\alpha}^{1,\hat\alpha}\left(-\frac{|x+\xi+2na|}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\right)\right], \quad \hat\alpha=\frac{\gamma_1}{2}, \tag{11}$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения (3) в Π_1 и

$$e_{1,\hat\alpha}^{1,\hat\alpha}(z)=\Phi(-\hat\alpha,\hat\alpha,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(-\hat\alpha n+\hat\alpha)} \tag{12}$$

— функция типа Райта (см. [6]). Теперь запишем решение первой краевой задачи для уравнения (3) в Π_2:

$$u(t,x)=\int\limits_0^t \tau_2(\eta)\hat{G}_\xi(t,x,\eta,a)d\eta-\int\limits_0^t \varphi_b(\eta)\hat{G}_\xi(t,x,\eta,b)d\eta+$$
$$+\int\limits_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}(t,x,0,\xi)d\xi-\int\limits_0^t\int\limits_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi,\quad (13)$$

где $u(t,a^+)=\tau_2(t)$,

$$\hat{G}(t,x,\eta,\xi)=\frac{(t-\eta)^{\hat{\beta}-1}}{2}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-\xi+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)+e^{1,\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x+\xi-2a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)\right],\quad \hat{\beta}=\frac{\gamma_2}{2},\quad (14)$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения (3) в Π_2 (см. [6]).

Лемма 1. *Функции Грина* (11) *и* (14) *обладают следующими свойствами*:

$$\hat{G}_{\xi x}(t,x,\eta,a)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)\right],\quad (15)$$

$$\hat{G}_{\xi x}(t,x,\eta,b)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-b+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)\right],\quad (16)$$

$$G_{\xi x}(t,x,\eta,0)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\alpha}}_{1,\hat{\alpha}}\left(-\frac{|x+2na|}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\right)\right],\quad (17)$$

$$G_{\xi x}(t,x,\eta,a)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat{\alpha}}_{1,\hat{\alpha}}\left(-\frac{|x+(2n+1)a|}{(t-\eta)^{\hat{\alpha}}}\right)\right].\quad (18)$$

Доказательство. Сначала докажем (15). Используя формулу

$$\frac{d^n}{dz^n}z^{\widehat{\mu}-1}e^{\widehat{\mu},\delta}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(cz^{\widehat{\alpha}})=z^{\widehat{\mu}-n-1}e^{\widehat{\mu}-n,\delta}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(cz^{\widehat{\alpha}})\quad (19)$$

при $n=1$, $\widehat{\mu}=1$, $\widehat{\alpha}=1$, $\delta=\widehat{\beta}=\hat{\beta}$, $c=-(t-\eta)^{-\hat{\beta}}$, $z=|x\pm\xi+2n(b-a)|$, получим

$$\hat{G}_\xi(t,x,\eta,\xi)=\frac{1}{2}(t-\eta)^{\hat{\beta}-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{sign}(x-\xi+2n(b-a))}{|x-\xi+2n(b-a)|}e^{0,\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-\xi+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\operatorname{sign}(x+\xi-2a+2n(b-a))}{|x+\xi-2a+2n(b-a)|}e^{0,\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x+\xi-2a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right)\right].$$

Поэтому

$$\hat{G}_\xi(t,x,\eta,0)=(t-\eta)^{\hat{\beta}-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign}(x-a+2n(b-a))}{|x-a+2n(b-a)|}e^{0,\hat{\beta}}_{1,\hat{\beta}}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}}\right).$$

Теперь, применяя формулу

$$\frac{1}{z}e^{-k,\delta}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(z)=e^{\widehat{\alpha}-k,\delta-\widehat{\beta}}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(z)\quad (20)$$

при

$$k=0,\quad \delta=\widehat{\beta}=\hat{\beta},\quad z=-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}},$$

находим

$$\hat{G}_\xi(t,x,\eta,a) = -(t-\eta)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sign}(x-a+2n(b-a))e^{1,0}_{1,\hat\beta}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\right).$$

Дифференцируя последнее равенство по x и используя формулу (19) при

$$n=1,\quad \widehat{\mu}=1,\quad \delta=0,\quad \widehat{\beta}=\hat\beta,\quad c=-(t-\eta)^{-\hat\beta},\quad z=|x-a+2n(b-a)|,$$

имеем

$$\hat{G}_{\xi x}(t,x,\eta,a) = (t-\eta)^{-\hat\beta-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(t-\eta)^{\hat\beta}}{|x-a+2n(b-a)|}e^{0,0}_{1,\hat\beta}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\right).$$

Теперь, используя формулу (20) при $k=0$, $\delta=0$, $\widehat{\alpha}=1$, $\widehat{\beta}=\hat\beta$, находим

$$\hat{G}_{\xi x}(t,x,\eta,a) = -(t-\eta)^{-\hat\beta-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,-\hat\beta}_{1,\hat\beta}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\right).$$

Наконец, учитывая равенство

$$\frac{d^n}{dz^n}z^{\delta-1}e^{\widehat{\mu},\delta}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}\big(cz^{-\widehat{\beta}}\big) = z^{\delta-n-1}e^{\widehat{\mu},\delta-n}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}\big(cz^{-\widehat{\beta}}\big)$$

при

$$n=1,\quad \widehat{\alpha}=1,\quad \widehat{\mu}=1,\quad \widehat{\beta}=\hat\beta,\quad \delta=1-\hat\beta,\quad c=-|x-a+2n(b-a)|,\quad z=t-\eta,$$

получим (15). Равенства (16)–(18) доказываются аналогично. □

Дифференцируя (10) и (13) один раз по x и учитывая лемму 1, получим

$$u_x(t,x) = \int_0^t \varphi_0(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}K_3(t-\eta,x)d\eta - \int_0^t \tau_1(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}K_4(t-\eta,x)d\eta +$$
$$+\int_0^a \psi_1(\xi)G_x(t,x,0,\xi)d\xi - \int_0^a \psi_2(\xi)G_{\eta x}(t,x,0,\xi)d\xi - \int_0^t\int_0^a f(\eta,\xi)G_x(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi,$$

$$u_x(t,x) = \int_0^t \tau_2(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}K_1(t-\eta,x)d\eta - \int_0^t \varphi_b(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}K_2(t-\eta,x)d\eta +$$
$$+\int_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}_x(t,x,0,\xi)d\xi - \int_0^t\int_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi.$$

Здесь

$$K_1(t-\eta,x) = \frac{1}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat\beta}_{1,\hat\beta}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\right), \tag{21}$$

$$K_2(t-\eta,x) = \frac{1}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat\beta}_{1,\hat\beta}\left(-\frac{|x-b+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\right), \tag{22}$$

$$K_3(t-\eta,x) = \frac{1}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat\alpha}_{1,\hat\alpha}\left(-\frac{|x+2na|}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\right), \tag{23}$$

$$K_4(t-\eta,x) = \frac{1}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,1-\hat\alpha}_{1,\hat\alpha}\left(-\frac{|x+(2n+1)a|}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\right). \tag{24}$$

В некоторых интегралах применим формулу интегрирование по частям:

$$u_x(t,x) = \varphi_0(\eta)K_3(t-\eta,x)\Big|_0^t - \int\limits_0^t \varphi_0'(\eta)K_3(t-\eta,x)d\eta -$$
$$- \tau_1(\eta)K_4(t-\eta,x)\Big|_0^t + \int\limits_0^t \tau_1'(\eta)K_4(t-\eta,x)d\eta + \int\limits_0^a \psi_1(\xi)G_x(t,x,0,\xi)d\xi -$$
$$- \int\limits_0^a \psi_2(\xi)G_{\eta x}(t,x,0,\xi)d\xi - \int\limits_0^t\int\limits_0^a f(\eta,\xi)G_x(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi,$$

$$u_x(t,x) = \tau_2(\eta)K_1(t-\eta,x)\Big|_0^t - \int\limits_0^t \tau_2'(\eta)K_1(t-\eta,x)d\eta - \varphi_b(\eta)K_2(t-\eta,x)\Big|_0^t +$$
$$+ \int\limits_0^t \varphi_b'(\eta)K_2(t-\eta,x)d\eta + \int\limits_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}_x(t,x,0,\xi)d\xi - \int\limits_0^t\int\limits_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi.$$

Учитывая, что

$$\lim_{\eta\to t} K_i(t-\eta,x) = \lim_{z\to 0} K_i(z,x), \quad i=\overline{1,4},$$

отдельно вычислим эти пределы. Для этого воспользуемся формулой

$$-\rho z e_{1,\rho}^{1,\delta-\rho}(z) = e_{1,\rho}^{1,\delta-1}(z) + (1-\delta)e_{1,\rho}^{1,\delta}(z).$$

В результате получим

$$K_3(z,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\hat{\alpha}|x+2na|} e_{1,\hat{\alpha}}^{1,0}\left(-\frac{|x+2na|}{z^{\hat{\alpha}}}\right).$$

Теперь используем следующий предел:

$$\lim_{|\zeta|\to\infty} e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(\zeta) = 0, \quad \pi \geqslant |\arg(\zeta) > \pi\frac{\alpha+\beta}{2} + \varepsilon,\ \varepsilon > 0.$$

В нашем случае при $z \to 0$ имеем $|\zeta| \to \infty$, поэтому

$$\lim_{z\to 0} K_3(z,x) = 0.$$

Таким же образом получим, что

$$\lim_{z\to 0} K_j(z,x) = 0, \quad j=1,2,4.$$

Итак,

$$u_x(t,x) = -\varphi_0(0)K_3(t,x) - \int\limits_0^t \varphi_0'(\eta)K_3(t-\eta,x)d\eta +$$
$$+ \tau_1(0)K_4(t,x) + \int\limits_0^t \tau_1'(\eta)K_4(t-\eta,x)d\eta + \ldots, \quad (25)$$

$$u_x(t,x) = -\tau_2(0)K_1(t,x) - \int\limits_0^t \tau_2'(\eta)K_1(t-\eta,x)d\eta +$$
$$+ \varphi_b(0)K_2(t,x) + \int\limits_0^t \varphi_b'(\eta)K_2(t-\eta,x)d\eta + \ldots \quad (26)$$

Из (7), учитывая обозначения $u(t,a^-)=\tau_1(t)$, $u(t,a^+)=\tau_2(t)$ и полагая, что $\gamma_1 \geqslant 1+\gamma_2$, получим

$$\tau_1(t)=I_{0+}^{\gamma_1-\gamma_2-1}(\tau_2(t))=\frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\int\limits_0^t \tau_2(z)(t-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}dz. \tag{27}$$

Отметим, что из (5) и определения регулярного решения следует, что $\tau_1(0)=\psi_1(a)$. Учитывая (27), преобразуем следующий интеграл:

$$\int\limits_0^t \tau_1'(\eta)K_4(t-\eta,x)d\eta=\frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\int\limits_0^t \frac{d}{d\eta}\left(\int\limits_0^\eta \tau_2(z)(t-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}dz\right)K_4(t-\eta,x)d\eta=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\left[\left(\int\limits_0^\eta \tau_2(z)(t-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}dz\right)K_4(t-\eta,x)\Big|_0^t-\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\eta \tau_2(z)(\eta-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}dz\right)\frac{\partial}{\partial\eta}K_4(t-\eta,x)d\eta\right]=$$
$$=-\frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\int\limits_0^t \tau_2'(\zeta)d\zeta\int\limits_\zeta^t dz\int\limits_z^t(\eta-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}\frac{\partial}{\partial\eta}K_4(t-\eta,x)d\eta-$$
$$-\frac{\psi_3(a)}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\int\limits_0^t dz\int\limits_z^t(\eta-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}\frac{\partial}{\partial\eta}K_4(t-\eta,x)d\eta.$$

Здесь учтено, что $\tau_2(0)=\psi_3(a)$, которая следует из (5) и из определения регулярного решения. Далее, учитывая вид функции типа Райта, а также интегральное представление бета-функции, находим

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2-1)}\int\limits_\zeta^t dz\int\limits_z^t(\eta-z)^{\gamma_1-\gamma_2-2}\frac{\partial}{\partial\eta}K_4(t-\eta,x)d\eta=\int\limits_\zeta^t(t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,x)dz,$$

где

$$K_4(t-z,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{1,\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-1}_{1,\frac{\gamma_1}{2}}\left(-\frac{|x+(2n+1)|a}{(t-z)^{\gamma_1/2}}\right).$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^t \tau_1'(\eta)K_4(t-\eta,x)d\eta=\int\limits_0^t \tau_2'(\zeta)d\zeta\int\limits_\zeta^t(t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,x)dz+$$
$$+\psi_3(a)\int\limits_0^t(t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,x)dz. \tag{28}$$

В (25), (26) переходим к пределу при $x\to a\mp 0$, а затем, учитывая (28), подставим их в (8). В итоге получим:

$$
-\varphi_0(0)K_3(t,a)-\int\limits_0^t \varphi_0'(\eta)K_3(t-\eta,a)d\eta+\psi_1(a)K_4(t,a)+
$$

$$
+\int\limits_0^t \tau_2'(\zeta)d\zeta\int\limits_\zeta^t (t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,a)dz+\psi_3(a)\int\limits_0^t (t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,a)dz+
$$

$$
+\int\limits_0^a \psi_1(\xi)G_x(t,a,0,\xi)d\xi-\int\limits_0^a \psi_2(\xi)G_{\eta x}(t,a,0,\xi)d\xi-\int\limits_0^t\int\limits_0^a f(\eta,\xi)G_x(t,a,\eta,\xi)d\eta d\xi=
$$

$$
=\lambda\tau_2'(t)-\int\limits_0^t \tau_2'(\eta)K_4(t-\eta,a)d\eta-\mu\int\limits_0^t P(z,a)dz\int\limits_0^z \tau_2'(\eta)K_4(z-\eta,a)d\eta-
$$

$$
-\psi_3(a)K_4(t,a)+\varphi_b(0)K_2(t,a)+\int\limits_0^t \varphi_b'(\eta)K_2(t-\eta,a)d\eta+
$$

$$
+\int\limits_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}_x(t,a,0,\xi)d\xi-\int\limits_0^t\int\limits_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(t,a,\eta,\xi)d\eta d\xi-
$$

$$
-\mu\int\limits_0^t P(z,a)\left[\psi_3(a)K_1(z,a)-\varphi_b(0)K_2(z,a)-\int\limits_0^z \varphi_b'(\eta)K_2(z-\eta,a)d\eta+\right.
$$

$$
\left.+\int\limits_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}_x(z,a,0,\xi)d\xi-\int\limits_0^z\int\limits_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(z,a,\eta,\xi)d\eta d\xi\right]dz.
$$

Отсюда, принимая во внимание равенство

$$
\int\limits_0^t P(z,a)dz\int\limits_0^z \tau_2'(\eta)K_1(z-\eta,a)d\eta=\int\limits_0^t \tau_2'(\eta)d\eta\int\limits_\eta^t P(z,a)K_4(z-\eta,a)dz,
$$

получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$
\lambda\tau_2'(t)-\int\limits_0^t \tau_2'(\zeta)K^*(t,\zeta)d\zeta=g(t), \tag{29}
$$

где

$$
K^*(t,\zeta)=K_4(t-\zeta,a)-\int\limits_\zeta^t\left[(t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,a)+\mu P(z,a)K_4(z-\zeta,a)\right]dz, \tag{30}
$$

$$
g(t)=-\varphi_0(0)K_3(t,a)-\int\limits_0^t \varphi_0'(\eta)K_3(t-\eta,a)d\eta+\psi_1(a)K_4(t,a)+
$$

$$
+\psi_3(a)\int\limits_0^t (t-z)^{\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-2}K_4(t-z,a)dz+\int\limits_0^a \psi_1(\xi)G_x(t,a,0,\xi)d\xi-
$$

$$
-\int\limits_0^a \psi_2(\xi)G_{\eta x}(t,a,0,\xi)d\xi-\int\limits_0^t\int\limits_0^a f(\eta,\xi)G_x(t,a,\eta,\xi)d\eta d\xi+\psi_3(a)K_4(t,a)-\varphi_b(0)K_2(t,a)-
$$

$$-\int\limits_0^t \varphi_b'(\eta)K_2(t-\eta,a)d\eta - \int\limits_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}_x(t,a,0,\xi)d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(t,a,\eta,\xi)d\eta d\xi +$$
$$+\mu\int\limits_0^t P(z,a)\left[\psi_3(a)K_4(z,a) - \varphi_b(0)K_2(z,a) - \int\limits_0^z \varphi_b'(\eta)K_2(z-\eta,a)d\eta + \right.$$
$$\left. + \int\limits_a^b \psi_3(\xi)\hat{G}_x(z,a,0,\xi)d\xi - \int\limits_0^z\int\limits_a^b f(\eta,\xi)\hat{G}_x(z,a,\eta,\xi)d\eta d\xi\right] dz. \quad (31)$$

Если $\lambda = 0$, то интегральное уравнение (29) переходит в интегральное уравнение Вольтерра первого рода, которое не всегда разрешимо. В этом случае его можно редуцировать к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Так как $K^*(t,t) = 0$ в силу соотношения

$$\lim_{z\to 0} K_4(z,x) = 0,$$

то это невозможно. Поэтому предполагаем, что $\lambda \neq 0$, откуда следует важность члена $\lambda u_t(t,a^+)$ в условии сопряжения (8).

Итак, задача эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода (29), однозначная разрешимость которого зависит от ядра и функции в правой части. Докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $0 < \theta \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant b$. *Тогда имеют место следующие оценки*:

$$|K_1(t-\eta,x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{(t-\eta)^{\hat\beta}} e_{1,\hat\beta}^{1,1-\hat\beta}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\right)\right| \leqslant C_1(t-\eta)^{\hat\beta\theta}, \quad a\leqslant x\leqslant b,$$
$$|K_2(t-\eta,x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{(t-\eta)^{\hat\beta}} e_{1,\hat\beta}^{1,1-\hat\beta}\left(-\frac{|x-b+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\right)\right| \leqslant C_2(t-\eta)^{\hat\beta\theta}, \quad a\leqslant x\leqslant b,$$
$$|K_3(t-\eta,x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{(t-\eta)^{\hat\alpha}} e_{1,\hat\alpha}^{1,1-\hat\alpha}\left(-\frac{|x+2na|}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\right)\right| \leqslant C_3(t-\eta)^{\hat\alpha\theta}, \quad 0\leqslant x\leqslant a,$$
$$|K_4(t-\eta,x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{(t-\eta)^{\hat\alpha}} e_{1,\hat\alpha}^{1,1-\hat\alpha}\left(-\frac{|x+(2n+1)a|}{(t-\eta)^{\hat\alpha}}\right)\right| \leqslant C_4(t-\eta)^{\hat\alpha\theta}, \quad 0\leqslant x\leqslant a,$$
$$|K_4(t-\eta,x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left| e_{1,\frac{\gamma_1}{2}}^{1,\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2-1}\left(-\frac{|x+(2n+1|\,a)}{(t-\eta)^{\gamma_1/2}}\right)\right| \leqslant C_4(t-\eta)^{\frac{\gamma_1}{2}(1+\theta)}, \quad 0\leqslant x\leqslant a,$$

где C_i, $i=\overline{1,4}$, *— положительные константы.*

Доказательство. Ограничимся доказательством первой оценки, так как остальные доказываются аналогично. Используя формулу (20) при

$$\overline{\alpha}=1, \quad k=0, \quad \overline{\beta}=\hat\beta, \quad \delta=1, \quad z=-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}},$$

получим

$$|K_1(t-\eta,x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left| e_{1,\hat\beta}^{0,1}\left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat\beta}}\right)\right|.$$

Далее, используя оценку

$$|x^{\rho-1}y^{\delta-1}e_{\omega,\tau}^{\rho,\delta}(-x^\omega y^{-\tau})| \leqslant Cx^{\rho-\omega\theta-1}y^{\delta+\tau\theta-1}, \quad 0<\theta\leqslant 1$$

(см. [6]) при $\rho = 0$, $\omega = 1$, $\tau = \widehat{\beta}$, $\delta = 1$, $x = |x - a + 2n(b - a)|$, $y = t - \eta$, получим

$$|K_1(t-\eta, x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{0,1}_{1,\hat{\beta}} \left(-\frac{|x-a+2n(b-a)|}{(t-\eta)^{\hat{\beta}}} \right) \right| \leqslant |t-\eta|^{\hat{\beta}\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x-a+2n(b-a)|^{1+\theta}}.$$

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x-a+2n(b-a)|^{1+\theta}}$$

абсолютно сходится; обозначим его сумму через L_1. Вводя обозначение $C_1 = CL_1$, из последнего неравенство получим первое утверждение леммы 2. □

Оценку для ядра (30) находим, учитывая лемму 2, а также предполагая, что заданная функция $P(t,x)$ непрерывна по t в $[0,T]$. Тогда

$$|K^*(t,\zeta)| \leqslant (t-\zeta)^{\frac{\gamma_1}{2}\theta}[C_4 + C_5(t-\zeta)^{\gamma_1-\gamma_2-1} + C_6(t-\zeta)],$$

где

$$C_5 = \frac{M}{\gamma_1(1+\theta/2) - \gamma_2 - 1}, \quad C_6 = \frac{C}{(\gamma_1\theta)/2 + 1}, \quad M = \sup|p(t,a)| \geqslant 0.$$

Из (31) видно, что если

$$\begin{gathered} t^{2-\gamma_1}\varphi_0(t) \in C[0,T], \quad t^{1-\gamma_2}\varphi_b(t) \in C[0,T], \quad \varphi_0(t) \in C^1[0,T], \quad \varphi_b(t) \in C^1[0,T], \\ \psi_1(x) \in C[0,a], \quad \psi_2(x) \in C[0,a], \quad \psi_3 \in C[a,b], \\ t^{2-\gamma_1} f(t,x) \in C(\overline{\Pi}_1), \quad t^{1-\gamma_2} f(t,x) \in C(\overline{\Pi}_2), \end{gathered} \tag{32}$$

то функция $g(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и непрерывно дифференцируема в $(0,T)$.

На основании установленных свойств функций $K^*(t,\zeta)$ и $g(t)$, согласно теории интегральных уравнений Вольтерра, уравнение (29) однозначно разрешимо, из которого следует разрешимость задачи.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\gamma_1 \geqslant 1 + \gamma_2$. *Если* $\lambda \neq 0$ *и выполнены условия* (32) *и, кроме того,* $f(t,x)$ *удовлетворяет условию Гельдера по* x, *то существует единственное регулярное решение задачи.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев О. Х.* Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2016. — № 2. — С. 220–240.
2. *Балкизов Ж. А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа второго и третьего порядков/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Нальчик, 2014.
3. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 1959. — *14*, № 3. — С. 3–19.
4. *Кадиркулов Б. Ж., Жалилов М. А.* Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка с оператором Хилфера// Бюлл. Ин-та мат. им. В. И. Романовского. — 2020. — № 1. — С. 59–67.
5. *Капустин Н. Ю.* Задачи для параболо-гиперболических уравнений и соответствующие спектральные вопросы с параметром в граничных точках/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — М., 2012.
6. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
7. *Рахманова Л. Х.* Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Казань, 2009.
8. *Сабитов К. Б., Мелишева Е. П.* Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области// Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 7. — С. 62–76.
9. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 1. — С. 46–59.
10. *Сабитов К. Б.* Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения// Мат. заметки. — 2017. — № 3. — С. 415–435.

11. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2017. — *137*. — С. 26–60.
12. *Сабитов К. Б.* Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения// Мат. заметки. — 2017. — *102*, № 3. — С. 415–435.
13. *Тарасенко А. В.* Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5. — С. 263–267.
14. *Юлдашева А. Ю.* Обратная задача для параболо-гиперболического уравнения// в кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. — Ташкент, 2009. — С. 85–88.
15. *Abdullaev O. Kh., Sadarangani K. B.* Non-local problems with integral gluing condition for loaded mixed-type equations involving the Caputo fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2016. — 164.
16. *Berdyshev A. S., Eshmatov B. E., Kadirkulov B. J.* Boundary-value problems for fourth-order mixed-type equation with fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2016. — 36.
17. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. — San Diego, CA: Academic Press, 1999.
18. *Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Torebek B.* On a non–local problem for a multi–term fractional diffusion-wave equation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2020. — № 2. — P. 324–355.
19. *Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Torebek B.* Inverse source problems for positive operators. I. Hypoelliptic diffusion and subdiffusion equations// J. Inv. Ill-posed Probl. — 2019. — *6*. — P. 891–911.
20. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Boundary-value problem for weak nonlinear partial differential equations of mixed type with fractional Hilfer operator// Axioms. — 2020. — *9*, № 2. — 68.
21. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Nonlocal problem for a mixed type fourth-order differential equation with Hilfer fractional operator// Ural Math. J. — 2020. — № 1. — P. 153–167.
22. *Yuldashev T. K., Karimov E. T.* Inverse problem for a mixed type integro-differential equation with fractional order Caputo operators and spectral parameters// Axioms. — 2020. — *9*, № 4. — 121.

Уринов Ахмаджон Кушакович
Ферганский государственный университет, Узбекистан
E-mail: `urinovak@mail.ru`

Каримов Эркинжон Тулкинович
Институт математики имени В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `erkinjon.karimov@mathinst.uz`

Кербал Себти
Университет Султана Кабуса, Оман
E-mail: `skerbal@squ.edu.om`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 77–95
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-77-95

УДК 517, 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ. I. УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Во многих задачах динамики возникают системы, пространствами положений которых являются четырехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к соответствующим многообразиям. Рассматриваемые динамические системы обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В работе показана интегрируемость более общих классов однородных динамических систем с переменной диссипацией на касательных расслоениях к четырехмерным многообразиям.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLDS. I. EQUATIONS OF GEODESIC LINES

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In many problems of dynamics, systems arise whose position spaces are four-dimensional manifolds. Naturally, the phase spaces of such systems are the tangent bundles of the corresponding manifolds. Dynamical systems considered have variable dissipation, and the complete list of first integrals consists of transcendental functions expressed in terms of finite combinations of elementary functions. In this paper, we prove the integrability of more general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on tangent bundles of four-dimensional manifolds.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к четырехмерному многообразию

Необходимо напомнить ряд результатов, без которых рассмотрение систем с диссипацией невозможно (см. также [1, 4, 13, 61, 65]).

1.1. Общие обозначения. Рассмотрим гладкое четырехмерное риманово многообразие M^4 с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ на многообразии порождает гладкую аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим также касательное расслоение

$$T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; x^1, x^2, x^3, x^4\}$$

к гладкому многообразию M^4, где $z = (z_4, z_3, z_2, z_1)$ — координаты в касательном пространстве.

Если $z_i = \dot{x}^i$, $i = 1, \ldots, 4$, где точкой обозначена производная по натуральному параметру, то уравнения геодезических линий на нем примут вид

$$\begin{gathered}\ddot{x}^i + \Gamma^i_{11}(x)(\dot{x}^1)^2 + 2\Gamma^i_{12}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^2) + 2\Gamma^i_{13}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^3) + 2\Gamma^i_{14}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^4) + \\ + \Gamma^i_{22}(x)(\dot{x}^2)^2 + 2\Gamma^i_{23}(x)(\dot{x}^2)(\dot{x}^3) + 2\Gamma^i_{24}(x)(\dot{x}^2)(\dot{x}^4) + \Gamma^i_{33}(x)(\dot{x}^3)^2 + \\ + 2\Gamma^i_{34}(x)(\dot{x}^3)(\dot{x}^4) + \Gamma^i_{44}(x)(\dot{x}^4)^2 = 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \end{gathered} \tag{1.1.1}$$

1.2. Специальные обозначения. Обозначим для наглядности в случае четырехмерного многообразия координаты (x^1, x^2, x^3, x^4) через (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Тогда уравнения (1.1.1) на касательном расслоении $T_*M^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примут вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + \\ \qquad + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^\alpha_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^\alpha_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \\ \qquad + 2\Gamma^\alpha_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \Gamma^1_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^1_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + \\ \qquad + \Gamma^1_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^1_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^1_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \\ \qquad + 2\Gamma^1_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \Gamma^2_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^2_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + \\ \qquad + \Gamma^2_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + \Gamma^2_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \\ \qquad + 2\Gamma^2_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + \Gamma^3_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^3_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^3_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + \\ \qquad + \Gamma^3_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^3_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + \Gamma^3_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \\ \qquad + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma^3_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Пример 1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства, уравнения (1.2.1) примут вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - [\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2\sin^2\beta_1 + \dot{\beta}_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2]\sin\alpha\cos\alpha = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2\sin^2\beta_2)\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \dot{\beta}_3^2\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + 2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} = 0, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

т.е. 12 ненулевых коэффициентов связности равны

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha, & \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1, & \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2,\\
\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, & \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1, & \Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta) = -\sin^2\beta_2\sin\beta_1\cos\beta_1,\\
\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, & \Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_2\cos\beta_2,\\
\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, & \Gamma^{3}_{13}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \Gamma^{3}_{23}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}.
\end{array}
$$

Пример 2. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, но когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. [6, 41–43]), уравнения (1.2.1) примут вид

$$
\begin{cases}
\ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2\sin^2\beta_1 + \dot{\beta}_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2\right]\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0,\\
\ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_1\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - (\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2\sin^2\beta_2)\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,\\
\ddot{\beta}_2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_2\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \dot{\beta}_3^2\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0,\\
\ddot{\beta}_3 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_3\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + 2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} = 0,
\end{cases}
\tag{1.2.3}
$$

т.е. 12 ненулевых коэффициентов связности равны

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) = -\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, & \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) = -\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1, & \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta) = -\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2,\\
\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \dfrac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, & \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1, & \Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta) = -\sin^2\beta_2\sin\beta_1\cos\beta_1,\\
\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \dfrac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, & \Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_2\cos\beta_2,\\
\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \dfrac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, & \Gamma^{3}_{13}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \Gamma^{3}_{23}(\alpha,\beta) = \dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}.
\end{array}
$$

1.3. Замены координат касательного пространства. Исследуем структуру уравнений (1.1.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^4. Рассмотрим обратимую замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$
\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{4} R^{ij}(x) z_j; \quad z_j = \sum_{i=1}^{4} T_{ji}(x)\dot{x}^i, \tag{1.3.1}
$$

при этом $R^{ij}, T_{ji}, i, j = 1, \ldots, 4,$ — функции от $x^1, \ldots, x^4$, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (1.3.1) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^4 (ср. [8, 9, 11]). Справедливы тождества

$$
\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{4} \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{4} T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{4} T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{1.3.2}
$$

где

$$
T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, \ldots, 4.
$$

Подставляя в (1.3.2) уравнения (1.1.1), имеем

$$
\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{4} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{4} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q; \tag{1.3.3}
$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, \ldots, 4$, нужно подставить формулы (1.3.1), и правые части соотношений (1.3.3) будут квадратичными формами по $z_1, \ldots, z_4$ (см. также [3,10,15,16]). Другими словами, равенство (1.3.3) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{4} Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k\big|_{(1.3.1)} = 0, \quad \text{где} \quad Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{4} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{1.3.4}$$

Непосредственно из формул (1.3.3) вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Система* (1.1.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (1.3.1), (1.3.3).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1.1.1) к эквивалентной системе уравнений (1.3.1), (1.3.3) зависит как от замены переменных (1.3.1) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$. В частности, для примеров 1, 2 получаем в явном виде следующие утверждения.

Следствие 1.1. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, *когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства* (*см. также пример* 1), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.2.2), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_4, \qquad \dot{z}_4 = -\dfrac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{\cos\alpha\sin\alpha}, \\ \dot{z}_3 = \dfrac{z_3 z_4}{\cos\alpha\sin\alpha} + \dfrac{z_1^2 + z_2^2}{\cos\alpha\sin\alpha}, \\ \dot{z}_2 = \dfrac{z_2 z_4}{\cos\alpha\sin\alpha} - \dfrac{z_2 z_3}{\cos\alpha\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \dfrac{z_1^2}{\cos\alpha\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \dot{z}_1 = \dfrac{z_1 z_4}{\cos\alpha\sin\alpha} - \dfrac{z_1 z_3}{\cos\alpha\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \dfrac{z_1 z_2}{\cos\alpha\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \dot{\beta}_1 = \dfrac{z_3}{\cos\alpha\sin\alpha}, \qquad \dot{\beta}_2 = -\dfrac{z_2}{\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ \dot{\beta}_3 = \dfrac{z_1}{\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \end{cases} \tag{1.3.5}$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (1.3.5) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Следствие 1.2. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, *но когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий* (*см.* [21,36,38,39], *а также пример* 2), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.2.3), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_4, \qquad \dot{z}_4 = -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot{z}_3 = z_3 z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + z_2^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \dot{\beta}_1 = z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \dot{\beta}_2 = -z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ \dot{\beta}_3 = z_1\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \end{cases} \tag{1.3.6}$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (1.3.6) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Очевидно, что системы (1.3.5) и (1.3.6) имеют аналитический первый интеграл следующего вида:

$$z_1^2 + \ldots + z_4^2 = \mathrm{const}, \tag{1.3.7}$$

т.е. в других координатах для системы (1.3.5) — аналитический первый интеграл

$$\dot\alpha^2 + \dot\beta_1^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \dot\beta_2^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 = \mathrm{const},$$

а для системы (1.3.6) —

$$\dot\alpha^2 + \dot\beta_1^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dot\beta_2^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 = \mathrm{const}.$$

1.4. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай I. Рассмотрим кинематические соотношения следующего вида (случай I):

$$\dot\alpha = -z_4, \quad \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \tag{1.4.1}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения. Такие координаты $z_1, \ldots, z_4$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (см. [45, 48, 49, 51]):

$$\begin{cases} \ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0; \end{cases} \tag{1.4.2}$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (1.4.1) уравнения (1.3.3) примут вид

$$\begin{cases} \dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 - \\ \qquad - f_2(\alpha) g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_4 = f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_3^2 + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \end{cases} \tag{1.4.3}$$

и уравнения геодезических (1.4.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.4.1) почти всюду эквивалентны составной системе (1.4.1), (1.4.3) на многообразии $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Для полного интегрирования системы (1.4.1)–(1.4.3) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

Следствие 1.3. *Если $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.4.2), *может быть приведена к следующему виду*:

$$
\begin{cases}
\dot{\alpha} = -z_4,\\
\dot{z}_4 = f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)z_3^2 + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)z_2^2 + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
\dot{z}_3 = \left[2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)z_2^2-\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
\dot{z}_2 = \left[2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2z_3-\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
\dot{z}_1 = \left[2\Gamma_{\alpha 3}^{3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{13}^{3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1z_3-\\
\qquad -f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^{3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1z_2,\\
\dot{\beta}_1 = z_3f_1(\alpha), \qquad \dot{\beta}_2 = z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1),
\end{cases}
\tag{1.4.4}
$$

$$
\dot{\beta}_3 = z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2). \tag{1.4.5}
$$

Если при этом аффинная связность $\Gamma_{jk}^{i}(\alpha,\beta)$ при всех i, j, k не зависит от угла β_3, то происходит отделение независимой подсистемы седьмого порядка (1.4.4).

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям $z_1,\ldots,z_4$ первого интеграла более общего вида, нежели (1.3.7), а именно,

$$
\sum_{i,j=1;i\leqslant j}^{4} a_{ij}(\alpha,\beta)z_iz_j = \mathrm{const}, \tag{1.4.6}
$$

не требуя даже положительной определенности матрицы $(a_{ij}(\alpha,\beta))$, но мы пока ограничимся следующим случаем (см. также [44, 46, 51, 52]).

Предложение 1.2. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств*

$$
2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7a}
$$

$$
2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7b}
$$

$$
f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7c}
$$

$$
2\Gamma_{\alpha 3}^{3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7d}
$$

$$
f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma_{13}^{3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7e}
$$

$$
f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^{3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.4.7f}
$$

то система (1.4.4), (1.4.5) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида:*

$$
\Phi_1(z_4,z_3,z_2,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 = C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{1.4.8}
$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.4.8) в силу системы (1.4.4), (1.4.5) дает

$$
\begin{gathered}
2\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]z_3^2z_4+\\
+2\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right]z_2^2z_4+\\
+2\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\right]z_1^2z_4-\\
-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_3}{f_1(\alpha)}-\\
-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_3}{f_1(\alpha)}-\\
-2\left[f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_2(\alpha)g_1(\beta_1)}\equiv 0,
\end{gathered}
$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.4.7). □

Согласно предложению 1.2 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.2.2) и (1.2.3) из примеров 1 и 2, соответственно, и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.4.8).

Следствие 1.4. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, *когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства* (*см. также пример* 1), *однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических* (1.2.2) *и имеющая первый интеграл вида* (1.4.8), *примет следующий вид*:

$$
\begin{cases}
\dot\alpha=-z_4, \qquad \dot z_4=-(z_1^2+z_2^2+z_3^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},\\
\dot z_3=z_3z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}+(z_1^2+z_2^2)\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot z_2=z_2z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}-z_2z_3\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}-\\
\qquad -z_1^2\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot z_1=z_1z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}-z_1z_3\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}+\\
\qquad +z_1z_2\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot\beta_1=z_3\dfrac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \qquad \dot\beta_2=-z_2\dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot\beta_3=z_1\dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R},
\end{cases}
\tag{1.4.9}
$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (1.4.9) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Следствие 1.5. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, *но когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий* (*см.* [55,56,58], *а также пример* 2), *однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических* (1.2.3) *и имеющая первый интеграл вида* (1.4.8), *примет следующий вид*:

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = -z_4, \qquad \dot z_4 = -(z_1^2+z_2^2+z_3^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},\\
\dot z_3 = z_3z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + (z_1^2+z_2^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot z_2 = z_2z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_2z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}-\\
\qquad -z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot z_1 = z_1z_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_1z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}+\\
\qquad +z_1z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot\beta_1 = z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \qquad \dot\beta_2 = -z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\
\dot\beta_3 = z_1\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R},
\end{cases}
\tag{1.4.10}
$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (1.4.10) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Системы (1.3.5) и (1.3.6) получаются из систем (1.4.9) и (1.4.10) при $\nu_1 = -1$ и $\nu_1 = 0$ соответственно.

Важно заметить, что, на первый взгляд, при интегрировании системы равенств (1.4.7) должны получиться шесть произвольных постоянных, определяющие шестипараметрические семейства искомых систем вида (1.4.9) и (1.4.10). Но, оказывается, система равенств (1.4.7) определяет не более чем шестипараметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае возможно найти лишь однопараметрические искомые семейства.

Система равенств (1.4.7) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.4.8) (или см. (2.2.1) в части 2) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [20, 26, 27]). Как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ системы равенств (1.4.7) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.4.8) для системы (1.4.4), (1.4.5) уравнений геодезических. Далее будет показано, что данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (1.4.7) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.4.4), (1.4.5) выполнение условия

$$
f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) = f(\alpha); \tag{1.4.11}
$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из системы равенств (1.4.7):

$$
\begin{cases}
2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) \equiv 0,\\
2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta) \equiv 0,\\
g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta) \equiv 0.
\end{cases}
\tag{1.4.12}
$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,2$, $h(\beta_2)$ зависят от коэффициентов связности; ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 1.3. *Если выполнены свойства* (1.4.11), (1.4.12) *и при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)=\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)=\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha), \tag{1.4.13}$$

то система (1.4.4), (1.4.5) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_3,z_2,z_1;\alpha)=\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}\,\Phi_0(\alpha)=C_2=\mathrm{const},\quad \Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}. \tag{1.4.14}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.4.14) в силу системы (1.4.4), (1.4.5) при условиях (1.4.11)—(1.4.13) дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_4\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha). \qquad \square$$

Предложение 1.4. *Если выполнены условия предложения* 1.3 *и справедливы равенства*

$$g_1(\beta_1)\equiv g_2(\beta_2)=g(\beta_1), \tag{1.4.15}$$

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1), \tag{1.4.16}$$

то система (1.4.4), (1.4.5) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta_1)=\sqrt{z_1^2+z_2^2}\;\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)=C_3=\mathrm{const},\quad \Psi_1(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \tag{1.4.17}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.4.17) в силу системы (1.4.4), (1.4.5) при условиях (1.4.15), (1.4.16), а также в условиях предложения 1.3 дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_4\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Psi_1(\beta_1)-$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\}z_3f(\alpha)\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1). \qquad \square$$

Предложение 1.5. *Если выполнены условия предложений* 1.3, 1.4 *и справедливо равенство*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)=\Gamma_3(\beta_2), \tag{1.4.18}$$

то система (1.4.4), (1.4.5) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_4(z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)=C_4=\mathrm{const},\quad \Psi_2(\beta_2)=h(\beta_2)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}. \tag{1.4.19}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.4.19) в силу системы (1.4.4), (1.4.5) при рассматриваемых условиях дает

$$z_1 z_4 \Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+$$
$$+z_1 z_3 f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+$$
$$+z_1 z_2 f(\alpha)g(\beta_1)\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\left[-\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2)+\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),\quad \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}=\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2). \qquad \square$$

Замечание 1.1. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.4.7), а также условия (1.4.13), (1.4.16), (1.4.18), то выполнены равенства

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{11}(\alpha),\qquad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1),\qquad \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1),$$
$$\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),\qquad \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),\qquad \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),$$

а значит, в системе (1.4.4), (1.4.5) появляется независимая подсистема седьмого порядка, состоящая из первых семи уравнений (уравнение на $\dot\beta_3$ отделяется):

$$\begin{cases}
\dot\alpha=-z_4,\\
\dot z_4=f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_3^2+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_3=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2-\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_2=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3-\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_1=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3-\\
\qquad -f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2,\\
\dot\beta_1=z_3f_1(\alpha),\qquad \dot\beta_2=z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1),
\end{cases}\tag{1.4.20}$$

$$\dot\beta_3=z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2).\tag{1.4.21}$$

Предложение 1.6. *Если выполнены условия предложений* 1.3—1.5, *то система* (1.4.20), (1.4.21) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_5(\beta_2,\beta_3)=\beta_3\pm\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\frac{C_4h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b)-C_4^2}}db=C_5=\text{const},\tag{1.4.22}$$

где после взятия интеграла (1.4.22) *вместо постоянных* C_3, C_4 *можно формально подставить левые части равенств* (1.4.17), (1.4.19) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.3—1.5, то система (1.4.20), (1.4.21) обладает тремя первыми интегралами (1.4.14), (1.4.17) и (1.4.19). Нам понадобятся лишь два последних из них. На уровнях C_3 и C_4 первых интегралов (1.4.17) и (1.4.19), соответственно, справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_4}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(\beta_2) - C_4^2}}. \tag{1.4.23}$$

Угол β_3 будем искать из уравнения $\dfrac{d\beta_3}{d\beta_2} = \dfrac{z_1}{z_2}h(\beta_2)$, полученного из системы (1.4.20), (1.4.21). Используя в этом уравнении равенство (1.4.23), получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.2–1.6 является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия предложений* 1.2–1.5, *то система* (1.4.20), (1.4.21) *обладает полным набором, состоящим из пяти независимых первых интегралов вида* (1.4.8), (1.4.14), (1.4.17), (1.4.19), (1.4.22).

Тот факт, что полный набор состоит из *пяти*, а не из семи первых интегралов, будет доказан ниже.

1.5. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай II. Теперь рассмотрим кинематические соотношения в следующем виде (случай II):

$$\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha), \quad \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \tag{1.5.1}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения. Такие координаты $z_1, \ldots, z_4$ в касательном пространстве вводятся, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (см. [60, 62, 64]):

$$\begin{cases} \ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0, \end{cases} \tag{1.5.2}$$

а остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1.5.1) уравнения (1.3.3) примут вид

$$\begin{cases} \dot z_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 - \\ \qquad - f_2(\alpha) g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2, \\ \dot z_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_4 = -f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_4^2 - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_3^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \end{cases} \tag{1.5.3}$$

и уравнения геодезических (1.5.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.5.1) почти всюду эквивалентны составной системе (1.5.1), (1.5.3) на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Для полного интегрирования системы (1.5.1), (1.5.3) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

Следствие 1.6. *Если $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.5.2)*, может быть приведена к следующему виду*:

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_4 f_4(\alpha), \\ \dot z_4 = -f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_4^2 - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_3^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 - \\ \qquad - f_2(\alpha)g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \end{cases} \tag{1.5.4}$$

$$\dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2). \tag{1.5.5}$$

Если при этом аффинная связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ при всех i, j, k не зависит от угла β_3, то происходит отделение независимой подсистемы седьмого порядка (1.5.4).

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям $z_1, \ldots, z_4$ первого интеграла более общего вида (1.4.6), нежели (1.3.7), для рассматриваемой системы, но мы пока ограничимся следующим случаем.

Предложение 1.7. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств*

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.5.6a}$$

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.5.6b}$$

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.5.6c}$$

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.5.6d}$$

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{1.5.6e}$$

$$f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{1.5.6f}$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\equiv 0, \tag{1.5.6g}$$

то система (1.5.4), (1.5.5) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_4,z_3,z_2,z_1)=z_1^2+\ldots+z_4^2=C_1^2=\mathrm{const}. \tag{1.5.7}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.5.7) в силу системы (1.5.4), (1.5.5) дает

$$\begin{aligned}&-2f_4(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_4^3-\\
&-2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)\right]\frac{z_3^2z_4}{f_4(\alpha)}-\\
&-2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_4}{f_4(\alpha)}-\\
&-2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_4}{f_4(\alpha)}-\\
&-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_3}{f_1(\alpha)}-\\
&-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_3}{f_1(\alpha)}-\\
&-2\left[f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_2(\alpha)g_1(\beta_1)}\equiv 0,\end{aligned}$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.5.6). □

Пример 3. Уравнения (1.2.1) геодезических в четырехмерном пространстве Лобачевского (с координатами $x=\beta_1$, $y=\beta_2$, $z=\beta_3$, $w=\alpha$) примут вид

$$\ddot\alpha-\frac{1}{\alpha}(\dot\alpha^2-\dot\beta_1^2-\dot\beta_2^2-\dot\beta_3^2)=0,\quad \ddot\beta_1-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_1=0,\quad \ddot\beta_2-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_2=0,\quad \ddot\beta_3-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_3=0, \tag{1.5.8}$$

т.е. ненулевые коэффициенты связности равны

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha},\ \Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)=\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)=\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta)=\frac{1}{\alpha},\ \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta)=\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta)=\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha}.$$

Согласно предложению 1.7 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.5.8) из примера 3 и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.5.7).

Следствие 1.7. *В случае геодезических в четырехмерном пространстве Лобачевского* (*с координатами* $x=\beta_1$, $y=\beta_2$, $z=\beta_3$, $w=\alpha$; *см. также пример* 3) *четырехпараметрическая система, эквивалентная при* $\nu_1,\nu_3\neq 0$, $\alpha\neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.5.8), *и имеющая первый интеграл вида* (1.5.7), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases}\dot\alpha=z_4\nu_1\alpha, & \dot z_4=-z_3^2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}-z_2^2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_3}-z_1^2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_4},\\[2ex]
\dot z_3=z_3z_4\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}, & \dot z_2=z_2z_4\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_3},\qquad \dot z_1=z_1z_4\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_4},\\[2ex]
\dot\beta_1=z_3\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}}, & \dot\beta_2=z_2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_3}},\qquad \dot\beta_3=z_1\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_4}},\qquad \nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\in\mathbb{R},\end{cases} \tag{1.5.9}$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (1.5.9) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Важно заметить, что, на первый взгляд, при интегрировании системы равенств (1.5.6) должны получиться семь произвольных постоянных, определяющие семипараметрические семейства искомых систем вида (1.5.9). Оказывается, система равенств (1.5.6) определяет не более чем семипараметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае возможно найти лишь четырехпараметрические искомые семейства.

Систему равенств (1.5.6) по-прежнему можно трактовать как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.5.7) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [5, 20, 26, 27]). Но, как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

По-прежнему актуально следующее замечание. Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ системы дифференциальных равенств (1.5.6) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.5.7) для системы (1.5.4), (1.5.5) уравнений геодезических. Далее будет показано, что данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Для систем с диссипацией условия (1.5.6) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.5.4), (1.5.5) выполнение условия

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = f(\alpha); \tag{1.5.10}$$

при этом функции $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять, вообще говоря, преобразованным уравнениям из системы равенств (1.5.6):

$$\begin{cases} 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\ g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0. \end{cases} \tag{1.5.11}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ зависят от коэффициентов связности, а ограничения на функции $f(\alpha)$, $f_4(\alpha)$ будут приведены ниже.

Предложение 1.8. *Если выполнены свойства* (1.5.10), (1.5.11) *и справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{1.5.12}$$

то система (1.5.4), (1.5.5) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\ \Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \quad \Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}. \tag{1.5.13}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.5.13) в силу системы (1.5.4), (1.5.5) при условиях (1.5.10)–(1.5.12) дает

$$-f_4(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_4\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha). \qquad \square$$

Предложение 1.9. *Если выполнены условия предложения* 1.8, *а также справедливы равенства*

$$g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_2) = g(\beta_1), \tag{1.5.14}$$

$$\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma^3_{13}(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{1.5.15}$$

то система (1.5.4), (1.5.5) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\ \Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad \Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp\left\{2 \int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b)db\right\}. \tag{1.5.16}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.5.16) в силу системы (1.5.4), (1.5.5) при условиях (1.5.14), (1.5.15), а также в условиях предложения 1.8 дает

$$-f_4(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_4\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\Psi_1(\beta_1) -$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\} z_3 f(\alpha)\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1). \qquad \square$$

Предложение 1.10. *Если выполнены условия предложений* 1.8, 1.9 *и справедливо равенство*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha, \beta) = \Gamma_3(\beta_2), \tag{1.5.17}$$

то система (1.5.4), (1.5.5) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \text{const}, \quad \Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2) \exp\left\{2 \int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \Gamma_3(b)db\right\}. \tag{1.5.18}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.5.18) в силу системы (1.5.4), (1.5.5) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_4(\alpha)z_1z_4\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right] +$$
$$+ z_1z_3f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) + \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right] +$$
$$+ z_1z_2f(\alpha)g(\beta_1)\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\left[-\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2) + \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1), \quad \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2} = \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2). \qquad \square$$

Замечание 1.2. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.5.6), а также условия (1.5.12), (1.5.15), (1.5.17), то выполнены равенства

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{11}(\alpha),\qquad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1),\qquad \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1),$$
$$\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),\qquad \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),\qquad \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2).$$

Следовательно, в системе (1.5.4), (1.5.5) появляется независимая подсистема седьмого порядка, состоящая из первых семи уравнений (уравнение на $\dot\beta_3$ отделяется):

$$\begin{cases}
\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha),\\
\dot z_4 = -\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_3^2-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2-\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2-\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3-\\
\qquad -\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3-\\
\qquad -f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2,\\
\dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha),\qquad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha)g_1(\beta_1),
\end{cases}\tag{1.5.19}$$
$$\dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2).\tag{1.5.20}$$

Предложение 1.11. *Если выполнены условия предложений* 1.8—1.10, *то система* (1.5.19), (1.5.20) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_5(\beta_2,\beta_3)=\beta_3\pm\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\frac{C_4h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b)-C_4^2}}db=C_5=\mathrm{const},\tag{1.5.21}$$

где после взятия интеграла (1.5.21) *вместо постоянных* C_3, C_4 *можно формально подставить левые части равенств* (1.5.16), (1.5.18) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.8—1.10, то система (1.5.19), (1.5.20) обладает тремя первыми интегралами (1.5.13), (1.5.16) и (1.5.18). Нам понадобятся лишь два последних из них. На уровнях C_3 и C_4 первых интегралов (1.5.16) и (1.5.18) соответственно справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2}=\mp\frac{C_4}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(\beta_2)-C_4^2}}.\tag{1.5.22}$$

Угол β_3 будем искать из уравнения $\dfrac{d\beta_3}{d\beta_2}=\dfrac{z_1}{z_2}h(\beta_2)$, полученного из системы (1.5.19), (1.5.20). Используя в этом уравнении равенство (1.5.22), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.2–1.6 является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Если выполнены условия предложений* 1.2–1.5, *то система* (1.5.19), (1.5.20) *обладает полным набором, состоящим из пяти независимых первых интегралов вида* (1.5.7), (1.5.13), (1.5.16), (1.5.18), (1.5.21).

Тот факт, что полный набор состоит из *пяти*, а не семи первых интегралов, будет доказан ниже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9*. — С. 119–211.
2. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
3. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
14. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.

26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1.* — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4.* — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.

51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
54. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
58. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
60. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
61. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
65. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
70. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
71. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
72. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 96–105
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-96-105

УДК 517, 531.01

НЕКОТОРЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

SOME TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC, POTENTIAL, AND DISSIPATIVE SYSTEMS ON THE TANGENT BUNDLES OF THREE-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we present tensor invariants (differential forms) for homogeneous dynamical systems on the tangent bundles of smooth three-dimensional manifolds and demonstrate the connection between the presence of these invariants and the existence of a complete set of first integrals, which is necessary for integrating geodesic, potential, and dissipative systems.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

1. Введение. Известно [14, 15, 60], что наличие достаточного количества не только первых интегралов, но и других тензорных инвариантов позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт достаточно естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими (асимптотическими) предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций [25, 55, 57].

Как показано ранее, задача о движении четырехмерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, т. е. в «потоке набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее четырехмерное пространство», приводит к системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [36, 38, 39]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В дальнейшем также разобраны задачи о движении точки по трехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [55–57].

В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные (см. также [25, 55, 56]).

2. Инварианты систем уравнений геодезических. Рассмотрим гладкое трехмерное риманово многообразие $M^3\{\alpha,\beta\}$ с координатами (α,β), $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, с аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\dot\beta_2;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ (ср. с [13, 57, 58]). Для этого изучим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot\alpha=z_3f_3(\alpha),\quad \dot\beta_1=z_2f_1(\alpha),\quad \dot\beta_2=z_1f_2(\alpha)g(\beta_1),\tag{1}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, z_2 z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических [37, 57, 59], например, с семью ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на трехмерных поверхностях вращения, в пространстве Лобачевского и т. д.):

$$\begin{cases}\ddot\alpha+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_1+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_2+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2=0,\end{cases}\tag{2}$$

т. е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1) соотношения на касательном расслоении $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ примут вид

$$\begin{aligned}\dot z_1&=-f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3-f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2,\\ \dot z_2&=-f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,\\ \dot z_3&=-f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3^2-\frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{aligned}\tag{3}$$

и уравнения (2) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (1), (3) на многообразии $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ с новыми координатами z_1, z_2, z_3 на касательном пространстве.

Для полного интегрирования системы (1), (3) достаточно знать, вообще говоря, четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [51, 52, 54]).

То, что полный набор состоит из четырех, а не из пяти, тензорных инвариантов, будет показано ниже.

В [36, 41] рассмотрены примеры систем геодезических на трехмерной сфере с различными метриками, а в [57] — примеры систем геодезических на трехмерных поверхностях вращения и в пространстве Лобачевского.

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) = f(\alpha), \tag{4}$$

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad \Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{5}$$

$$\begin{cases} \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_3^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ \Gamma^\alpha_{11}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma^\alpha_{22}(\alpha, \beta) g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha), \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha, \beta) \equiv 0, \end{cases} \tag{6}$$

то система (1), (3) *обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{7}$$

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad \Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp\left\{2 \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db\right\}. \tag{8}$$

$$\Phi_3(z_1; \alpha, \beta_1) = z_1 \Phi_0(\alpha)\Phi(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad \Phi(\beta_1) = g(\beta_1) \exp\left\{2 \int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db\right\}. \tag{9}$$

$$\Phi_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Phi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}. \tag{10}$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_3(\alpha) \frac{d}{d\tau} \tag{11}$$

и фазовых переменных z_k, $k = 1, 2$, *фазовый поток системы* (1), (3) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^3, *т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма.*

Система равенств (6) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики к каноническому виду с законом сохранения энергии (7) (или см. ниже (13)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [1–3, 11]). Ну а поиск как интеграла (7), так и (8)—(10) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [12, 57, 62].

3. Инварианты потенциальных систем. Несколько модифицируем систему (1), (3), вводя в нее консервативное гладкое силовое поле в проекциях на оси $\dot{z}_k$, $k = 1, 2, 3$, соответственно:

$$\tilde{F}(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_2) f_2(\alpha) g(\beta_1) \\ F_2(\beta_1) f_1(\alpha) \\ F_3(\alpha) f_3(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$
\begin{cases}
\dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha), \\
\dot{z}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - f_3(\alpha) \left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3^2 - \\
\qquad - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha, \beta) z_2^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha, \beta) z_1^2, \\
\dot{z}_2 = F_2(\beta_1) f_1(\alpha) - f_3(\alpha) \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_3 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta) z_1^2, \\
\dot{z}_1 = F_1(\beta_2) f_2(\alpha) g(\beta_1) - f_3(\alpha) \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_3 - \\
\qquad - f_1(\alpha) \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_2, \\
\dot{\beta}_1 = z_2 f_1(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1),
\end{cases} \tag{12}
$$

и она почти всюду эквивалентна системе

$$
\begin{cases}
\ddot{\alpha} - F_3(\alpha) f_3^2(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 = 0, \\
\ddot{\beta}_1 - F_2(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 = 0, \\
\ddot{\beta}_2 - F_1(\beta_2) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 = 0
\end{cases}
$$

на касательном расслоении $TM^3\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (4)–(6), *то система* (12) *обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов вида*

$$
\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha, \beta) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{13}
$$

$$
V(\alpha, \beta) = V_3(\alpha) + V_2(\beta_1) + V_1(\beta_2) = -2 \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a) da - 2 \int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} F_2(b) db - 2 \int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} F_1(b) db,
$$

а также при $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$ — *первых интегралов* (8)–(10).

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной вида (11) *и фазовых переменных* z_k, $k = 1, 2$, *фазовый поток системы* (12) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^3, *т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма.*

4. Инварианты систем со знакопеременной диссипацией. Далее несколько модифицируем систему (12), вводя в нее гладкое силовое поле с диссипацией. Ее наличие (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (14) (в отличие от системы (12)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot{z}_k$, $k = 1, 2, 3$, соответственно:

$$
\tilde{F}(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_2) f_2(\alpha) g(\beta_1) \\ F_2(\beta_1) f_1(\alpha) \\ F_3(\alpha) f_3(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \\ z_3 F_3^1(\alpha) \end{pmatrix}.
$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha),\\
\dot z_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3^2 -\\
\qquad -\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha),\\
\dot z_2 = F_2(\beta_1) f_1(\alpha) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 -\\
\qquad -\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha),\\
\dot z_1 = F_1(\beta_2) f_2(\alpha) g(\beta_1) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 -\\
\qquad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha),\\
\dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \qquad \dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1),
\end{cases}
\tag{14}
$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{cases}
\ddot\alpha - \left\{b\tilde\delta(\alpha) + F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\alpha -\\
\qquad -F_3(\beta_1) f_3^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_3^1(\alpha) + b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] +\\
\qquad +\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,\\
\ddot\beta_1 - \left\{F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_1 -\\
\qquad -F_2(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,\\
\ddot\beta_2 - \left\{F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_2 -\\
\qquad -F_1(\beta_2) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0,
\end{cases}
$$

на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Здесь, как и выше, $\tilde\delta(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

Будем интегрировать систему шестого порядка (14) при выполнении свойств (4)—(6), а также при $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$. При этом происходит отделение независимой подсистемы пятого порядка:

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha),\\
\dot z_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)(z_2^2 + z_1^2) + z_3 F_3^1(\alpha),\\
\dot z_2 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 -\\
\qquad - f(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha),\\
\dot z_1 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 -\\
\qquad - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha),\\
\dot\beta_1 = z_2 f(\alpha),
\end{cases}
\tag{15}
$$

при наличии также шестого уравнения

$$\dot{\beta}_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1). \tag{16}$$

Примем также следующие условия на диссипативное силовое поле. Будем предполагать, что выполнены равенства

$$F_1^1(\alpha) \equiv F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha). \tag{17}$$

Для полного интегрирования системы (15), (16) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}, \tag{18}$$

система (15), (16) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) z^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot{z} = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) z z_3 + z F^1(\alpha), \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_* = \pm z\sqrt{1 + z_*^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \dfrac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{20}$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{z}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{21}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (19)—(21) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (19), один — системы (20) (после соответствующей замены независимого переменного в ней), и дополнительный тензорный инвариант, «привязывающий» уравнение (21) (т. е. всего *четыре*).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} \Gamma_3(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \tag{22}$$
$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)},$$

а для некоторых $\lambda_3^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} F_3(\alpha) &= \lambda_3^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_3^0 \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha); \\ F_k^1(\alpha) &= \lambda_k^1 f_3(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_3(\alpha), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{23}$$

Условие (22) назовем «геометрическим», а условия из группы (23) — «энергетическими». При этом $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda^1$, в силу (17).

Условие (22) названо геометрическим, в том числе, потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности Γ_3, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (23) названы энергетическими, в том числе, потому, что силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду также относительно функции $\Delta(\alpha)$ (см. также [46, 47, 49, 51]).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (22) *и* (23). *Тогда система* (19)–(21) *обладает четырьмя независимыми, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами* (см. [10, 24, 26]).

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [10,50]). В частности, если $\varkappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\Theta_1(z_3, z; \alpha) = G_1\left(\frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)}\right) = \\ = \frac{f_3^2(\alpha)(z_3^2 + z^2) + (b - \lambda^1)z_3\delta(\alpha)f_3(\alpha) - \lambda_3^0\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)f_3(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (24)$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (19) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \quad (25)$$

Первый интеграл для системы (20) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}; \quad (26)$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (9).

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (21), находится по аналогии с (10):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}, \quad (27)$$

где после взятия интеграла (27) вместо постоянных C_2, C_3 можно подставить левые части первых интегралов (8), (9) соответственно.

Выражение функций (24), (25) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Так, например, при $\varkappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$ дополнительный первый интеграл системы (19) найдется из дифференциального соотношения

$$d\ln|\Delta(\alpha)| = \frac{(b + u_3)du_3}{U_2(C_1, u_3)}, \quad u_3 = \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \quad u = \frac{z}{\Delta(\alpha)},$$

$$U_1(u_3) = u_3^2 + (b - \lambda^1)u_3 - \lambda_3^0, \quad U_2(C_1, u_3) = 2U_1(u_3) - \frac{C_1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_3)}\right\}, \quad C_1 \neq 0.$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 4. *Если для систем вида* (19)–(21) *выполняются геометрическое и энергетические свойства* (22), (23), *то у нее также существуют следующие четыре функционально независимые инвариантные дифференциальные формы с трансцендентными коэффициентами, зависимые с первыми интегралами* (24)–(27) (ср. [31,32,34,35]):

$$\rho_1(z_3, z; \alpha)dz_3 \wedge dz \wedge d\alpha, \qquad \rho_2(z_3, z; \alpha)dz_3 \wedge dz \wedge d\alpha,$$

$$\rho_3(z_*; \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + z_*^2}}dz_* \wedge d\beta_1, \quad \rho_4(z_3; \alpha, \beta_1, \beta_2)dz_3 \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2,$$

(*форма* $\rho_3(z_*; \beta_1)$ — *после замены независимого переменного в системе* (20)), *где*

$$\rho_1(z_3, z; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\} \cdot \frac{u_3^2 + u^2 + (b - \lambda^1)u_3 - \lambda_3^0}{u};$$

$$\rho_2(z_3, z; \alpha) = \Delta(\alpha)\exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\} \cdot \exp\left\{-\int \frac{(b + u_3)du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\};$$

$$\rho_4(z_3; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_3)}\right\} \cdot \Theta_4(\beta_1, \beta_2).$$

Для полной интегрируемости системы (19)—(21) можно использовать или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством четыре (ср. с [33, 36, 40]).

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [23, 27, 57]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле комплексного анализа — наличия существенно особых точек после продолжения функций) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [10, 24, 29, 30].

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения [23, 28, 42, 43], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к трехмерной сфере, а также более общих систем на расслоении трехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского (см. также [21–23]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. *Вейль Г.* Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
13. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
14. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
15. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
16. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
17. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
18. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
19. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
21. *Трофимов В. В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.

23. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
24. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209-–210.
26. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
27. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
28. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
29. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
30. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
31. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
32. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
33. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
34. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
35. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
36. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
37. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479—481.
38. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
39. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
40. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
41. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
42. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
43. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
45. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
46. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
47. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
48. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.

49. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
50. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
51. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
52. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
60. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
61. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
62. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 106–116
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-106-116

УДК 517, 531.01

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КЛАССИФИКАЦИЯ НЕИСПРАВНОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе рассматривается универсальный подход к изучению управляемых (не всегда гладких) динамических систем и обсуждаются так называемые возможные неисправности в таких динамических системах. Вводятся универсальные понятия опорных неисправностей и их окрестностей.

Ключевые слова: диагностика системы управления движением летательного аппарата, измеряемые координаты, классификация неисправностей.

DYNAMICAL SYSTEMS AND CLASSIFICATION OF MALFUNCTIONS IN PROBLEMS OF DIFFERENTIAL DIAGNOSTICS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we discuss a universal approach to the study of control (not always smooth) dynamical systems and possible malfunctions in such dynamical systems. The universal concepts of reference malfunctions and their neighborhoods are introduced.

Keywords and phrases: diagnostics of aircraft motion control system, measured coordinates, classification of malfunctions.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

1. Введение. Предыдущие исследования автора по дифференциальной и топологической диагностике [1,10,11] уже касались похожих проблем. Отличие данной работы от предыдущих исследований состоит в ее обобщающем характере, а также в более подробном описании динамических процессов.

Как следует из предыдущих аналогичных работ [3, 6, 14], необходимо поставить задачи диагностики на каких-то примерах. В этом качестве рассматриваются системы управления движением летательного аппарата [15, 16]. Она будет представляться в виде двух последовательно решаемых задач: задачи контроля, то есть задачи определения наличия неисправности в системе управления, и задачи диагностирования, то есть задачи распознавания конкретной происшедшей неисправности (см. также [20, 21]).

В задаче контроля естественным образом вводится понятие поверхности контроля, лежащую в фазовом пространстве динамической системы. Критерием наличия неисправности является выход фазовой траектории на эту поверхность. Даны способы построения поверхности контроля.

В некоторых работах даже сформулирована и доказана теорема диагностирования (ср. с [7,9]), в силу которой предлагаются так называемые внешнетраекторные алгоритмы. При помощи их, после выхода фазовой траектории на поверхность контроля или в процессе так называемой непрерывной экспресс-диагностики, осуществляется решение задачи диагностирования неисправностей, возникших в диагностическом пространстве, то есть в рассматриваемом случае в каналах управления движением летательного аппарата (см. также [25, 26]).

Сложность современных управляемых систем, задач решаемых этими системами, многообразие этих задач, снижение аппаратурной избыточности [4,5], высокая ответственность и интенсивность работы операторов, их высвобождение требуют эффективной автоматической диагностики функционального состояния [33, 36, 37] в процессе их движения. По результатам диагностики можно произвести ремонт системы управления, отключение неисправного элемента, которое бывает эффективнее его неправильной информации, или осуществить коррекцию закона управления [29, 31].

Современные интеллектуальные объекты имеют модульную структуру и обладают конечным набором возможных неисправностей. Движение таких объектов и элементов их систем управления, как исправных, так и неисправных, с высокой степенью точности априори можно описать, исходя из опыта и законов классической механики, обыкновенными дифференциальными уравнениями. В силу этого научное направление исследований диагностики функционального состояния управляемых систем и получило название «Дифференциальной диагностики» (хотя оно и не совсем устоялось). В основе ее лежат дифференциальные уравнения, описывающие движение исправной и возможных неисправных систем [2, 18].

Задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления такого рода может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам [7, 9, 12]: задаче контроля, то есть установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, то есть поиску происшедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность π_k. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри поверхности π_k.

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля π_k.

Процедура контроля включает в себя фиксирование выхода траектории объекта на поверхность контроля π_k, что является выходом алгоритма контроля, то есть информацией о наличии неисправности в системе, а также выдачу начальной информации для алгоритма диагностирования.

Задача диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля π_k. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени, например за полупериод или за четвертую часть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. На это указывается, в частности, в [8, 13].

Исходной информацией для решения задачи диагностирования является конечный набор математических моделей неисправных систем, отличающихся друг от друга и от исходной системы той или иной возможной неисправностью, ограниченная область их начальных условий и информация с выхода алгоритма контроля.

Процедура диагностирования включает в себя описание информации, поступающей от датчиков, включая датчик контроля, организацию этой информации, определение последовательности действий, сравнение результатов наблюдений с расчетными возможными ожидаемыми результатами, процесс минимизации в пространстве поиска и выдачу результата, то есть номера происшедшей неисправности.

Процедура диагностирования может состоять из двух этапов: сначала определяется подсистема (например, один из каналов управления), в которой произошла неисправность, а затем осуществляется диагностирование конкретной неисправности в этой подсистеме. Процедура диагностирования может предусматривать не только указание конкретно происшедшей неисправности, но и определение последствий возникших ситуаций, составление рецептов исправления неправильного функционирования системы, выполнение последовательных предписанных исправлений, повторную диагностику, советы по исправлению поведения обучаемого оператора при управлении системой в целом [17, 19, 23, 35].

Существует множество приемов определения неисправностей, основанных, в основном, на анализе внутреннего состояния объекта. В то же время, имеется возможность определения неисправностей динамического объекта по характеру его поведения, по измерению его траектории, то есть с помощью внешнетраекторного контроля. В этом случае возможно автоматическое определение неисправностей чисто вычислительными средствами на базе информации о траектории объекта.

2. Динамические системы дифференциальной диагностики. Рассмотрим динамическую систему, заданную достаточно гладким векторным полем $v(x)$, на гладком многообразии $M^n\{x\}$, $x=(x_1,\dots,x_n)$:

$$\dot{x}=v(x), \tag{1}$$

при поле v имеет компоненты $v^1(x),\dots,v^n(x)$ в координатах x. В правой части системы (1) можно конечно же добавить дополнительную зависимость векторного поля v от управления $u\in U^r$, $u=(u_1,\dots,u_r)$, но в каждом конкретном случае это можно отдельно оговорить.

В качестве примера можно привести управляемую систему, движение которой может быть описано, вообще говоря, неавтономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n\{x\}\times\mathbb{R}^1\{t\}$, которую запишем в векторной форме

$$\frac{dx}{dt}=X(x,t), \tag{2}$$

где $x(t)$ и $X(t)$ — n-мерные гладкие вектор-функции, каждая из которых содержит по набору $x_1(t),\dots,x_n(t)$ и $X_1(x,t),\dots,X_n(x,t)$, соответственно. В данном случае всегда можно неавтономную систему (2) свести к автономной (1), вводя новую переменную и повышая порядок на единицу.

Функцию $X(x,t)$ часто достаточно считать непрерывной (а не гладкой) в некоторой открытой области D фазового пространства. Система (2) задает закон движения некоторой начальной точки $x_0(t_0)$ из $(n+1)$-мерного фазового пространства по траектории

$$x(t)=x(t,x_0(t_0)).$$

Через $\|x\|$ обозначим норму вектора x. В простейшем случае норма вектора может совпадать с евклидовой длиной вектора, то есть

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Наряду с системой (2) рассмотрим и «измененную» систему

$$\frac{dy}{dt}=X(y,t)+R(y,t) \tag{4}$$

в той же области фазового пространства.

Предположим, что вектор-функция $R(y,t)$ непрерывна в области D и в этой области при $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ выполняется неравенство

$$\|R(y,t)\|<\eta, \tag{5}$$

где η — постоянное число и $\eta\geqslant 0$.

Пусть начальные условия, определяющие решения $x=x(t,x_0)$ и $y=y(t,y_0)$ систем (2) и (4), удовлетворяют условиям

$$\|y_0-x_0\|<\delta, \tag{6}$$

где $\delta \geqslant 0$.

Предположим, кроме того, что функция $X(x,t)$ удовлетворяет в любой замкнутой области G, лежащей в D, условиям Липшица

$$\|X(y,t) - X(x,t)\| < L\|y - x\|, \tag{7}$$

где L — положительная постоянная.

В этом случае, то есть при выполнении условий (5)—(7) и условия Липшица в G для $R(y,t)$, гарантируется существование единственного решения $x = x(t, x_0)$ уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0, x_0)$, и справедлива оценка отклонения решения

$$\|y(t) - x(t)\| \leqslant \frac{\eta}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1) + \delta e^{L(t-t_0)}. \tag{8}$$

Отметим, в частности, что, если возмущены только начальные условия, а правые части неизменны, то $\eta = 0$ и оценка (8) принимает вид

$$\|y(t) - x(t)\| \leqslant \delta e^{L(t-t_0)}.$$

Выбирая δ достаточно малым на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$, можно удовлетворить неравенству

$$\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число.

Значит, решение уравнения (2) является непрерывной функцией начальных условий, что можно трактовать как свойства непрерывной зависимости решений на конечном интервале времени, присущее любой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Второй предельный случай ($\delta = 0$, $\eta \neq 0$) выражает свойство непрерывности решения в некотором функциональном пространстве правых частей.

Потребуем также выполнение таких условий на векторное поле системы (1), при которых все решения продолжаемы насколько необходимо.

Таким образом, мы рассматриваем автономную динамическую управляемую систему (хотя и не до конца пока формализованную в терминах пространства управления), функциональное состояние которой может быть описано векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = X(x). \tag{9}$$

Нас особенно интересует поведение решений системы (9) в окрестности некоторого («программного») решения $x_*(t)$. И вот только теперь мы «разделяем» фазовые координаты следующим образом.

Пусть в системе имеется управляющее устройство, целью которого является удержание всех решений системы (9) как можно ближе к решению x_*. Предположим, что все компоненты $x_1, \ldots, x_n$ вектора x можно разделить на два множества: (собственно) координаты системы (объекта) $y_1, \ldots, y_p$ и координаты управления $z_1, \ldots, z_q$, где $p + q = n$. Координаты системы определяют p-мерный вектор y функционального состояния системы, а координаты управления являются составляющими q-мерного вектора управления z (не путать с обозначением y в формулах (4)).

Перепишем уравнения (9) рассматриваемой системы в следующем виде (необходимо наличие тривиального решения):

$$\begin{cases} \dot{y} = Y(y,z), \quad Y(0,0) = 0, \\ \dot{z} = Z(y,z), \quad Z(0,0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Система (10) является системой с так называемым *непрямым управлением* или с управлением по производным. Такие системы применительно к управлению движением реальных объектов рассматривались в [14, 15].

При этом получаем следствие, а именно: объект управления описывается уравнением

$$\dot{y} = Y(y, 0),$$

а управляющее свойство уравнением

$$\dot{z} = Z(0, z).$$

Задачей управляющего устройства является обеспечение или улучшение устойчивости объекта, то есть вектора y, и обеспечение желаемого движения объекта, о котором указано выше.

В частности, часто приходится прибегать к частичной или полной линеаризации системы (10). Предположение о линейности системы, то есть замена системы (10) ее линейным приближением, дает возможность продвинуться в исследовании достаточно далеко. Однако при этом могут ускользнуть некоторые важные свойства функционального поведения системы. Кроме того, многие системы и их управляющие устройства работают вне линейной области их характеристик.

Наряду с системами непрямого управления (10) рассматриваются также системы прямого управления

$$\dot{y} = Y(y, z), \quad \dot{z} = Z(y, z), \tag{11}$$

при котором управляющий сигнал, то есть сигнал обратной связи, воздействует на объект непосредственно.

Таким образом, при проведении математических экспериментов по диагностике управляемых систем используются как математические модели типа (10), так и (11) (визуально они идентичны, но внутренние переменные исполняют разные функции).

Теперь необходимо провести классификацию так называемых *неисправностей* для рассматриваемых систем.

Сделаем это на типичном примере из динамики летательных аппаратов. Рассматриваемые уравнения типа (11) имеют следующую структуру:

$$\dot{x} = X(x) + A(x)\xi, \quad \dot{\xi} = \Phi(\delta), \quad \delta = Bx + \phi(\sigma), \quad \sigma = Cx, \tag{12}$$

где x — фазовый n-мерный вектор состояния, $X(x)$ и $A(x)$ — определенные, непрерывные матрицы-функции; ξ — трехмерный управляющий вектор, элементами которого являются углы отклонения рулей высоты, элеронов, направления; $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, \ldots, n)$ — следующие матрицы коэффициентов:

$$b_{ij}^0 \leqslant b_{ij} \leqslant b_{ij}^*; \quad c_{ij}^0 \leqslant c_{ij} \leqslant c_{ij}^*; \tag{13}$$

здесь b_{ij}^0, b_{ij}^* и c_{ij}^0, c_{ij}^* — некоторые положительные постоянные.

Элементы вектор-функций $\Phi(\delta)$ и $\phi(\sigma)$ определены и непрерывны при всех значениях δ_h и σ_h и принадлежат классу так называемых допустимых характеристик, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\Phi_h(\delta_h) = 0, \text{ если } \delta_h = 0; \quad \phi_h(\sigma_h) = 0, \text{ если } \sigma_h = 0. \tag{14}$$

$$\delta_h \Phi_h(\delta_h) > 0, \text{ если } \delta_h \neq 0; \quad \sigma_h \phi_h(\sigma_h) > 0, \text{ если } \sigma_h \neq 0. \tag{15}$$

Впрочем, условие (14) (для непрерывных функций) является следствием условия (15).

Будем, кроме того, считать, что интегралы в пределах $[0, +\infty)$ и $[0, -\infty)$ от этих функций расходятся. Это условие гарантирует сходимость решений при $t \to +\infty$.

Что касается условий существования и единственности траекторий системы, то дополнительно отметим весьма полную теорему существования, а также теоремы [34, 35], определяющие достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши с фазовыми ограничениями. Отметим, кроме того, работы [22, 24, 27], в которых, в том числе, обсуждаются достаточные и необходимые условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем. При рассмотрении необходимых условий вводятся функции, отличные от функций Ляпунова.

Условия существования и единственности для систем вида (12) будем считать выполненными и возвращаться к этому вопросу уже не будем.

Уравнения (12) приводятся к уравнениям (2) или (11) путем исключения переменных. Будем считать, что система уравнений (12) обладает всеми свойствами, которые приписываются уравнению (2).

Последние три (матричных) уравнения в (12) описывают систему управления движением динамического объекта. Целью управления является удержание траектории $x(t)$, близкой к некоторой программной траектории $x_*(t)$. Будем предполагать, что такое управление построено, то есть подобраны функции ϕ и Φ, а также значения коэффициентов матриц B и C, и именно эти ϕ, Φ, B и C присутствуют в (12).

Допустим также, что в процессе функционирования в системе управления могут возникать неисправности, которые приводят к тому, что управляющий сигнал ξ, вырабатываемый системой управления объекта, формируется неправильно, то есть управление объектом уже не обеспечивает близости траектории $x(t)$ к $x_*(t)$.

Таким неисправностям соответствуют некоторые значения коэффициентов матриц B и C и виды функций ϕ и Φ. Более того, будем предполагать, что существует такой набор из l неисправностей, каждой их которых присущи свои матрицы B_i, C_i и функции ϕ_i, Φ_i, $i = 1, \dots, l$, что решения $x_i(t)$ систем

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i, t)$$

с начальными условиями $x^0 \in M^n$, где функции f_i получаются подстановкой в (13) матриц B_i, C_i и функций ϕ_i, Φ_i и дальнейшим исключением переменных, различны между собой при одних и тех же начальных условиях для всех f_i и отличны также от программной траектории $x_*(t)$.

Тогда при данном наборе неисправностей актуальна задача определения номера неисправности в наборе, то есть определения номера i функции f_i, $i = 1, \dots, l$, заменяющей функцию в правой части в некоторый момент времени t_0. Здесь t_0 — момент возникновения неисправности в системе управления объекта.

В более общем виде задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть в неизвестный момент времени произошла некоторая неисправность. Задача сводится к отображению происшедшей в системе неисправности на множество из l возможных неисправностей и определения такого номера $i = 1, \dots, l$ неисправности из этого множества, который максимально «близок» (вообще говоря, по какой-либо норме) к происшедшей неисправности. Отсутствие неисправности в системе также должно быть выходом решения задачи.

Входными данными для определения номера возникшей в системе управления неисправности будут конечный набор неисправностей, характерных для системы управления объекта и, значит, соответствующий набор дифференциальных уравнений, их решения и измеренные в процессе функционирования объекта значения компонент фазового вектора.

3. Формализация неисправностей. Как указывалось выше, классификацию неисправностей дадим на базе математической модели пространственного движения летательного аппарата (12) и запишем эти уравнения применительно к системе управления, рассмотренной в работах [32–34], в которых, в частности, изучается режим планирующего спуска с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Сохранив в этих уравнениях структуру управления, запишем их в следующем виде:

$$\dot{x} = A(x) + B(x)\xi, \quad \dot{\xi} = \Phi(\delta), \quad \delta = C(t)u + \phi(\sigma), \quad \sigma = E(t)s, \tag{16}$$

где x — фазовый n-мерный вектор состояния, $A(x)$ и $B(x)$ — определенные, непрерывные матрицы-функции; ξ — трехмерный управляющий вектор, элементами которого являются углы отклонения ξ_i $(i = 1, 2, 3)$ рулей высоты, элеронов, направления; составляющие трехмерных векторов u и s в (16) могут быть приборно измерены или алгоритмически вычислены; элементы матриц $C(t) = (c_{ij}(t))$ и $E(t) = (e_{ik}(t))$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &c_{ij} \in [\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}], \quad \underline{c}_{ij} \leqslant \overline{c}_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \\ &e_{ik} \in [\underline{e}_{ik}, \overline{e}_{ik}], \quad \underline{e}_{ik} \leqslant \overline{e}_{ik}, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, q, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\underline{c}_{ij}$, $\overline{c}_{ij}$, $\underline{e}_{ik}$, $\overline{e}_{ik}$ — некоторые постоянные значения.

Элементы вектор-функций $\Phi(\delta)$ и $\phi(\sigma)$ определены и непрерывны при всех значениях δ_h и σ_h и принадлежат классу так называемых допустимых характеристик, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\Phi_h(\delta_h) = 0, \text{ если } \delta_h = 0; \quad \phi_h(\sigma_h) = 0, \text{ если } \sigma_h = 0. \tag{18}$$

$$\delta_h \Phi_h(\delta_h) > 0, \text{ если } \delta_h \neq 0; \quad \sigma_h \phi_h(\sigma_h) > 0, \text{ если } \sigma_h \neq 0. \tag{19}$$

Впрочем, условие (18) (для непрерывных функций) является следствием условия (19).

Будем, кроме того, считать, что интегралы в пределах $[0, +\infty)$ и $[0, -\infty)$ от этих функций расходятся, что гарантирует сходимость решений при $t \to +\infty$.

Зависимость от времени матриц C, E в правой части (16) обусловлена тем, что процесс развития неисправностей может явно зависеть от времени.

Перейдем теперь к классификации возможных неисправностей, дадим определение неисправности и опишем предлагаемый подход.

Классификация дается применительно к неисправностям, которые могут возникнуть в системе управления движением летательного аппарата (16). Она достаточна для описания возможных в системе управления неисправностей, может быть использована и для описания соответствующих возможных неисправностей в других частях летательного аппарата (в системе управления двигателями, навигационной системе, гиростабилизированной платформе и др. (см. также [17, 19])) и расширена.

Необходимым условием расширения классификации неисправностей является наличие в рассматриваемой математической модели движения описания работы прибора, в котором может произойти неисправность, не предусмотренная классификационным списком.

Предлагаемая классификация неисправностей, не претендуя на законченность, позволит в последующем осуществить логические построения, решающие задачу дифференциальной диагностики.

Информационное содержание и силомоментные воздействия системы управления в (16) обеспечиваются датчиками. Современные системы управления имеют модульную структуру, состоящую из конечного набора датчиков (блоков). *Датчиком* назовем любой прибор из цепочки приборов, перерабатывающих информацию о траекторном движении летательного аппарата, начиная от измерительных или алгоритмических приборов и кончая рулевыми исполнительными устройствами, каждый из которых имеет входные и выходные сигналы и самостоятельную функциональную цель.

Неисправностью будем называть такое изменение функционального состояния в системе датчиков управления, которое обуславливает недопустимые отклонения летательного аппарата (16) от цели управления, то есть от программного движения.

Причины возникновения неисправности рассматриваться не будут. Нас главным образом будет интересовать неисправность самого датчика, как одного из приборов системы управления. В силу сказанного, система управления движением объекта (16) будет обладать конечным набором возможных неисправностей. Эти неисправности, благодаря имеющемуся инженерному опыту или в силу интуитивных соображений, можно априори зафиксировать и, исходя из механических представлений, математически описать.

Определим теперь *класс возможных неисправностей* в системе управления движением объекта, описываемым дифференциальными уравнениями (16), то есть определим список конкретных возможных неисправностей в системе датчиков управления, которые могут обуславливать недопустимые отклонения объекта.

Определение 1. Отказом будем называть отсутствие сигнала на выходе датчика.

В математической модели движения объекта и его системы управления отказ можно моделировать обнулением соответствующего коэффициента при выходном сигнале датчика или выходного сигнала датчика. Иначе говоря, поступающая с датчика информация в модели не должна учитываться.

Например, если в третьем уравнении (16) слагаемое

$$\delta_{11} = c_{11}(t)u_1 \tag{20}$$

в некоторый момент времени t_0 становится равным нулю, то есть $\delta_{11}(t) = 0$, $t \geqslant t_0$, то это будет означать, что отказал датчик, формирующий сигнал (20). Из (20) следует, что отказ может быть обусловлен или отказом прибора, формирующего оператор $c_{11}(t)$ при сигнале, поступившем на вход датчика, или исчезновением самого сигнала u_1 в датчике, или того и другого одновременно. Объединение этих возможностей и будет определять отказ формирующего сигнал (20) датчика, то есть отсутствие сигнала на его выходе.

Определение 2. Сбоем будем называть выход сигнала датчика за пределы допустимых номинальных значений.

Сбой датчика может быть обусловлен недопустимым изменением некоторого параметра, характеризующего этот датчик. В уравнениях движения это можно моделировать выбором закона изменения соответствующего параметра. Если закон изменения параметра зависит от времени, то это значит, что рассматриваемая система перестает быть автономной. В реальных условиях закон изменения параметра может быть и не известен.

Например, если сигналу δ_{11} с выхода датчика, формирующего выражение (20), предписано находиться в пределах

$$\underline{\delta_{11}} \leqslant \delta_{11} \leqslant \overline{\delta}_{11},$$

а изменение $c_{11}(t)$, или u_1, или $c_{11}(t)u_1$ в процессе движения таково, что δ_{11} выходит за пределы интервала $[\underline{\delta_{11}}, \overline{\delta}_{11}]$, то это будет означать сбой датчика, формирующего сигнал (20).

Определение 3. Заклиниванием будем называть неисправность, при которой значение выходного сигнала датчика в некоторый момент времени фиксируется и в дальнейшем не изменяется во времени.

К этому отнесем и неисправности, при которых около некоторого фиксированного положения совершаются незатухающие, например, синусоидальные колебания, то есть происходит заклинивание с наложением некоторых колебаний.

В качестве примера можно привести заклинивание руля или колебания руля около некоторого фиксированного положения. Заклинивание руля в нейтральном (нулевом) положении эквивалентно отказу канала управления этим рулем.

Определение 4. Активным отказом будем называть неисправность, при которой сигнал датчика скачкообразно изменяется до определенного максимально возможного значения и фиксируется по величине и во времени.

Определение 5. Нарушением симметрии называется такая неисправность, при которой происходит сдвиг начала отсчета сигнала датчика.

В частности, это может быть сдвиг допустимой характеристики исполнительного органа, то есть характеристика исполнительного органа перестает принадлежать классу допустимых функций (18).

Рассмотренные неисправности из определений 1—5 образуют *класс возможных неисправностей* (и не только для уравнений движения летательного аппарата (см. также [28, 30, 32])).

Любая неисправность из выделенного класса не приводит к изменению фазового пространства модели объекта. Модели объекта с той или иной неисправностью из класса возможных отличаются лишь структурой уравнений движения. Если в заранее неизвестный момент времени произойдет одна из неисправностей из класса возможных, то траектория исходной системы изменится и будет непрерывно продолжаема траекторией системы с происшедшей неисправностью. Некоторые из неисправностей могут доставлять неустойчивость движению объекта.

Рассмотрим некоторый датчик из набора датчиков управляющей системы. Этому датчику можно поставить в соответствие одну, две или более неисправностей из выбранного класса.

Рассмотрим теперь два любых различных датчика из набора датчиков в управляющей системе движением объекта. *Различными* будем называть датчики, перерабатывающие траекторную информацию разной природы, например, траекторную информацию разной размерности. Каждому из таких датчиков можно поставить в соответствие определенные неисправности из выбранного класса. Реакция системы на эти неисправности будет различной.

Для примера рассмотрим первую строку произведения матриц $C(t)u$, взятой из уравнений (16):

$$c_{11}(t)u_1 + c_{12}(t)u_2 + \ldots + c_{1p}(t)u_p.$$

Каждая из входных координат $u_1, u_2, \ldots, u_p$ вырабатывается соответствующим датчиком, содержит свою присущую только ей физическую информацию, в некотором смысле имеет свою размерность, то есть по своему воздействию на движение системы все входные координаты различны между собой. Коэффициенты $c_{11}(t), c_{12}(t), \ldots, c_{1p}(t)$, вырабатываемые операторами, также в некотором смысле имеют свою размерность и различны между собой.

Слагаемые $c_{11}(t)u_1, c_{12}(t)u_2, \ldots, c_{1p}(t)u_p$ в системе управления содержат различную физическую информацию и их влияние на движение системы (16) будет различным.

Функции остальных элементов модели системы управления также различны. Влияние нарушений в работе различных датчиков и операторов, формирующих управление системой, на движение системы также будет различным. Поэтому и влияние различных неисправностей из класса возможных на траекторное движение системы будет различным.

Всему конечному набору различных датчиков системы управления движением объекта можно *поставить в соответствие* конечный набор неисправностей из класса возможных. Такой априорный набор неисправностей будем в дальнейшем называть *опорным*, а неисправности, входящие в этот набор, — *опорными неисправностями*.

Таким образом, конечному набору попарно (в совокупности) различных датчиков системы управления движением объекта можно поставить в соответствие конечный набор H опорных неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^{l} \tag{21}$$

из класса возможных.

В рассматриваемых задачах изучаются движения, соответствующие каждой из неисправностей (21) H_j, $j = 1, \ldots, l$, или нескольким из них, происходящие в геометрической фигуре, представляющей собой плоскости (H_m, t), $m = 1, \ldots, l$, связанные с осью времени t и осями H_m, $m = 1, \ldots, l$, исходящими из единого начала на оси времени t. Изучаться будут также влияние этих движений на движение рассматриваемой управляемой динамической системы, а также диагностика этих движений.

Сделаем следующее предположение, оправдываемое тем, что процесс обнаружения неисправности ограничен малым временем (см. также [28, 33]).

От потока неисправностей требуется следующее.

Пусть распределение интервала времени между последовательными неисправностями системы (16) таково, что вероятность более чем одной неисправности на интервалах времени обнаружения пренебрежимо мала. Это предположение позволит нам детально поставить задачу диагностики, хотя в принципе это предположение, как будет показано в дальнейшем, не обязательно. Важно, чтобы происшедшая в системе (16) неисправность попала в *апостериорный список* $l_1 < l$ неисправностей.

Заметим также, что данный класс задач тесно связан с современными задачами, изложенными в [14, 15, 34], а также в соответствующих задачах, связанных с так называемой *самодиагностикой* [37].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики// Фундам. прикл. мат. — 1999. — *5*, № 3. — С. 775–790.
2. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
3. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем// Автомат. телемех. — 1994. — № 3. — С. 24–36.
4. *Жуков В. П.* О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова// Автомат. телемех. — 2005. — № 12. — С. 51–64.
5. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости// Автомат. телемех. — 2008. — № 1. — С. 30–38.
6. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование динамических систем// Автомат. телемех. — 1980. — № 3. — С. 96–121.
7. *Окунев Ю. М., Парусников Н.* Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
8. *Пархоменко П. П., Сагомонян Е. С.* Основы технической диагностики. — М.: Энергия, 1981.

9. *Чикин М. Г.* Системы с фазовыми ограничениями// Автомат. телемех. — 1987. — № 10. — С. 38–46.
10. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2004.
11. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, перераб. и дополн.. — М.: Экзамен, 2007.
12. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 1. — С. 97–115.
13. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 3. — С. 73–90.
14. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 4. — С. 55–66.
15. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 1. — С. 45–52.
16. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 5. — С. 31–44.
17. *Шамолин М. В.* Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электрон. модел. — 2011. — *33*, № 3. — С. 121–126.
18. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *150.* — С. 88–109.
19. *Шамолин М. В., Кругова Е. П.* Задача диагностики модели гиростабилизированной платформы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *160.* — С. 137–141.
20. *Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B. J., Shwartz A.* Power control in wireless cellular networks// IEEE Trans. Automat. Control. — 2009. — *54*, № 10. — P. 2328–2340.
21. *Anderson B. D. O., Jury E. I., Mansour M.* Schwarz matrix properties for continuous and discrete time systems// Int. J. Contr. — 1976. — *3.* — P. 1–16.
22. *Antoulas A. C., Sorensen D. C., Zhou Y.* On the decay rate of Hankel singular values and related issues// Syst,. Control Lett. — 2002. — *46.* — P. 323–342.
23. *Beck A., Teboulle M.* Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization// Oper. Res. Lett. — 2003. — *31*, № 3. — P. 167–175.
24. *Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A.* The ordered subsets mirror descent optimization method with applications to tomography// SIAM J. Optim. — 2001. — *12*, № 1. — P. 79–108.
25. *Ceci C., Gerardi A., Tardelli P.* Existence of optimal controls for partially observed jump processes// Acta Appl. Math. — 2002. — *74*, № 2. — P. 155–175.
26. *Chiang M., Tan C. W., Hande P., Lan T.* Power control in wireless cellular networks// Found. Trends Networking. — 2008. — *2*, № 4. — P. 381–533.
27. *Choi D. H., Kim S. H., Sung D. K.* Energy-efficient maneuvering and communication of a single UAV-based relay// IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. — 2014. — *50*, № 3. — P. 2119–2326.
28. *Fleming W. H.* Optimal control of partially observable diffusions// SIAM J. Control. — 1968. — *6*, № 2. — P. 194–214.
29. *Ho D.-T., Grotli E. I., Sujit P. B., Johansen T. A., Sousa J. B.* Optimization of wireless sensor network and UAV data acquisition// J. Intel. Robot. Syst. — 2015. — *78*, № 1. — P. 159–179.
30. *Ober R. J.* Balanced parameterization of classes of linear systems *// SIAM J. Control Optim. — 1991. — *29*, № 6. — P. 1251–1287.
31. *Ober R. J., McFarlane D.* Balanced canonical forms for minimal systems: A normalized coprime factor approach// Linear Algebra Appl. — 1989. — *122-124.* — P. 23–64.
32. *Peeters R., Hanzon B., Olivi M.* Canonical lossless state-space systems: Staircase forms and the Schur algorithm// Lin. Alg. Appl. — 2007. — *425*, № 2-3. — P. 404–433.
33. *Rieder U., Winter J.* Optimal control of Markovian jump processes with partial information and applications to a parallel queueing model// Math. Meth. Oper. Res. — 2009. — *70.* — P. 567–596.
34. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — *114*, № 1. — P. 976–1024.
35. *Su W., Boyd S., Candes E.* A differential equation for modeling Nesterov's accelerated gradient method: Theory and insights// J. Machine Learning Res. — 2016. — № 17 (153). — P. 1–43.

36. *Tang X., Wang S.* A low hardware overhead self-diagnosis technique using Reed–Solomon codes for self-repairing chips// IEEE Trans. Comput. — 2010. — *59*, № 10. — P. 1309–1319.
37. *Wilson D. A.* The Hankel operator and its induced norms// Int. J. Contr. — 1985. — *42.* — P. 65–70.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 117–135
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-117-135

УДК 517.977.52

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАТНЫМИ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ ПО ВРЕМЕНИ

© 2022 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ**

Аннотация. Изучены вопросы слабо обобщенной разрешимости нелинейной обратной задачи в нелинейном оптимальном управлении тепловыми процессами для одного типа параболического дифференциального уравнения с нелинейными отклонениями. Сформулированы необходимые условия оптимальности нелинейного управления. Получены формулы для приближенного вычисления функции состояния управляемого процесса, функции восстановления и функции оптимального управления.

Ключевые слова: нелинейная обратная задача, нелинейное отклонение, необходимые условия оптимальности управления, нелинейность управления, минимизация функционала.

OPTIMAL CONTROL OF INVERSE THERMAL PROCESSES IN A PARABOLIC EQUATION WITH NONLINEAR DEVIATIONS IN TIME

© 2022 **T. K. YULDASHEV**

Abstract. In this paper, we examine the weakly generalized solvability of a nonlinear inverse problem in the nonlinear optimal control of thermal processes for one type of parabolic differential equation with nonlinear deviations. We formulate necessary optimality conditions for nonlinear control and obtain formulas for approximate calculating the state functions of the controlled process, the restoration function, and the optimal control function.

Keywords and phrases: nonlinear inverse problem, nonlinear deviation, necessary conditions for optimality of control, nonlinearity of control, minimization of the functional.

AMS Subject Classification: 35B50, 35D30, 35K61, 35Q93, 35R30

1. Постановка задачи. Решение некоторых задач математического моделирования тепловых процессов приводит к рассмотрению нелинейных обратных задач для уравнений параболического типа. Одним из классов качественно новых задач для дифференциальных уравнений являются нелокальные обратные задачи. Нелокальные задачи, содержащие интегральные условия, встречаются при математическом моделировании явлений различной природы, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить некоторые задачи диффузии частиц в турбулентной плазме и распространения тепла. Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами широко применяется при решении задач аэрогазодинамики, химических реакций, диффузии, фильтрации, процессов горения, нагрева и т. д. (см. [2–11]). Эффективно используются различные аналитические и приближенные методы решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами (см., например, [12–17, 23–26]). В данной работе рассматриваются вопросы обобщенного и приближенного решения нелинейной обратной задачи оптимального управления процессом распространения тепла по стержню конечной длины для одного типа параболического дифференциального уравнения с нелинейным отклонением при смешанных и нелокальном условиях и с квадратичным критерием оптимальности. Решаются прямая смешанная и обратная нелокальная нелинейная задачи для параболического уравнения. Формулируются необходимые условия оптимальности, основанные на принципе максимума, вычисляется управляющая функция.

Рассмотрим следующее параболическое уравнение и управления процессом распространения тепла по стержню конечной длины:

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} = \eta_1(t)\beta(t,x) + \eta_2(t)U(t,x) + \\ + f(t,x,U(\tau(t,x,U(t,x),x),\beta(t,x),p(t)), \quad (t,x)\in\Omega, \tag{1}$$

при начальном условии

$$U(t,x) = \varphi(t,x), \quad t\in(-\infty,0)\cup(T,\infty), \quad U(0,x) = \varphi(x), \quad x\in\Omega_l \tag{2}$$

и при граничных условиях Бенара

$$U(t,0) = U(t,l) = 0, \quad t\in\Omega_T, \tag{3}$$

а также при дополнительном условии в интегральной форме

$$\int_0^T \Theta(t,s)U(s,x)ds = \psi(t,x), \tag{4}$$

где $f(t,x,U,\beta,p) \in C(\Omega\times R\times R\times\Upsilon)$ — функция внешнего источника, $\tau(t,x,U)\in C(\Omega\times R)$ — нелинейное отклонение, $\tau(t,x,U)\neq t$, $p(t)\in C(\Omega_T)$ — управляющая функция, $U(t,x)\in C(\Omega)$ — функция состояния управляемого процесса, $\varphi(t,x)$ — функция распределения тепла по стержню в начальный момент времени, $\varphi(0,x)=\varphi(x)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(x)\in C^2(\Omega_l)$, $\beta(t,x)\in C(\Omega)$ — функция восстановления, $\eta_i(t)\in C(\Omega_T)$, $i=1,2$, $\Theta(t,s)\in C(\Omega_T\times\Omega_T)$, $\psi(t,x)\in C(\Omega)$, $\Upsilon\equiv[0,M^*]$, $0<M^*<\infty$, $\Omega\equiv\Omega_T\times\Omega_l$, $\Omega_T\equiv[0,T]$, $\Omega_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$.

Дифференциальное уравнение (1) содержит тройку неизвестных функций:

$$\{U(t,x)\in C(\Omega),\ \beta(t,x)\in C(\Omega),\ p(t)\in C(\Omega_T)\}.$$

Для полного определения этой тройки недостаточно одних условий (2)–(4). Поэтому в работе рассматриваются вопросы минимизации квадратичного функционала качества. В отличие от [18], в работе исследуется параболическое уравнение, которое относительно функции состояния $U(t,x)$ и относительно функции восстановления $\beta(t,x)$ является нелинейным. Рассматривается нелокальная обратная задача нелинейного оптимального управления. Изучаются вопросы разрешимости функции состояния $U(t,x)$ и переопределения функции восстановления $\beta(t,x)$. Интегральная форма в условии (4) связана с тем, что часто на практике встречаются ситуации, когда объект исследования в обратной задаче либо принципиально недоступен для измерения, либо проведение такого измерения дорого. Тогда в качестве дополнительной информации для однозначного определения функции восстановления служит нелокальное условие в интегральной форме. В работе также формулируются необходимые условия оптимальности, основанные на принципе максимума, и вычисляются функция управления и функция состояния. Данная работа является дальнейшим развитием работ [19, 22].

Методику данной работы также можно применять при решении других задач нелинейного оптимального управления, связанных с процессом теплопередачи, например в задачах управления металлургическими печами. При решении таких задач оптимального управления требуется исследование математических моделей управления процессами, позволяющими в режиме реального времени прогнозировать распределение температуры нагреваемых материалов в зависимости от изменения подаваемой мощности, времени нагрева тел, режимов нагрева и т. д.

Здесь, как и в [20, 21, 27], используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения нелокальной обратной задачи (1)–(4) в виде ряда Фурье

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)b_n(x), \tag{5}$$

где функции $b_n(x)$ определены как собственные функции спектральной задачи $b''(x)+\lambda^2 b(x)=0$, $b(0)=b(l)=0$, $0<\lambda$, и образуют полную систему ортонормированных функций $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega_l)$, а λ_n — соответствующие собственные значения. Предполагается, что заданные функции разлагаются в ряды Фурье

$$f(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t))=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(U,\beta,p)b_n(x), \quad \beta(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(t)b_n(x), \tag{6}$$

где

$$f_n(U,\beta,p)=\int_0^l f(t,y,U(\tau,x),\beta(t,y),p(t))b_n(y)dy, \quad \beta_n(t)=\int_0^l \beta(t,y)b_n(y)dy.$$

Задача 1. Найти функцию восстановления $\bar\beta(t,x)$, управляющую функцию

$$\bar p(t)\in\Big\{\bar p:\ |\bar p(t)|\leqslant M^*,\ t\in\Omega_T\Big\}$$

и соответствующую им функцию состояния $\bar u(t,x)$, которые доставляют минимум функционалу

$$J[p]=\int_0^l [U(T,y)-\xi(y)]^2dy+\alpha\int_0^T p^2(t)dt, \tag{7}$$

где $\xi(x)$ — заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\xi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n b_n(x), \quad \xi_n=\int_0^l \xi(y)b_n(y)dy, \quad \xi(0)=0, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|<\infty, \quad 0<\alpha=\mathrm{const}.$$

2. Обратная задача (1)–(4)**.** Будем использовать следующие функциональные пространства:

$$\bar C_U^{1,2}(\Omega)=\{U: U(t,x)\in C^{1,2}(\Omega),\ U(t,0)=U(t,l)=0\},$$
$$\bar C_\Phi^{1,2}(\Omega)=\{\Phi: \Phi(t,x)\in C^{1,2}(\Omega),\ \Phi(T,x)=0\}.$$

Замыкания этих пространств по норме

$$\|U\|_{\bar H(\Omega)}=\sqrt{\int_0^T\int_0^l |U(t,y)|^2dydt}<\infty$$

обозначаются соответственно через $\bar H_u(\Omega)$, $\bar H_\Phi(\Omega)$.

Определение 1. *Обобщенным решением* смешанной задачи (1)–(3) называется функция $U(t,x)\in\bar H_u(\Omega)$, удовлетворяющая для любого $\Phi(t,x)\in\bar H_\Phi(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\Big\{U(t,y)\Big[\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t}-\frac{\partial^2\Phi(t,y)}{\partial y^2}\Big]-\Big[\eta_1(t)\beta(t,y)+\eta_2(t)U(t,y)+$$
$$+f\Big(t,y,U\big(\tau(t,y,U(t,y),y)\big),\beta(t,y),p(t)\Big)\Big]\Phi(t,y)\Big\}dydt=\int_0^l\varphi\big[\Phi(t,y)\big]_{t=0}dy.$$

Рассматриваются также следующие банаховы пространства:

(i) пространство $B_2(T)$ с нормой
$$\|a(t)\|_{B_2(\Omega_T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{t \in \Omega_T} |a_n(t)| \right)^2};$$

(ii) координатное гильбертово пространство ℓ_2, с нормой
$$\|\varphi\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2} < \infty;$$

(iii) пространство $L_2(\Omega_l)$ суммируемых с квадратом функций $\vartheta(x)$ в области Ω_l с нормой
$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(\Omega_l)} = \sqrt{\int_0^l |\vartheta(y)|^2 dy} < \infty.$$

Как и в [18], формальное решение смешанной задачи (1)–(3) при помощи определения обобщенного решения и рядов Фурье (5)–(6) представляется в виде ряда Фурье
$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{ \omega_n(t) + \int_0^t G_n(t,s) \left[\eta_1(s)\beta_n(s) + \eta_2(s)u_n(s) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(s) b_n(y), p(s)\right) b_n(y) dy \right] ds \right\}, \quad (8)$$
где
$$\tau = \tau\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) b_n(y)\right), \quad \omega_n(t) = \varphi_n G_n(t,0), \quad G_n(t,s) = \exp\{-\lambda_n^2 (t-s)\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $\varphi(x) \in L_2(\Omega_l)$, $\|f(t,x,U,\beta,p)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$. *Тогда для функции* (8) *справедливо включение* $U(t,x) \in \bar{H}(\Omega)$.

Доказательство. При фиксированных значениях функции восстановления и функции управления подставляем в интеграл
$$\Im = \int_0^T \int_0^l U^2(t,y) dy dt$$
формулу (8):
$$\Im = \int_0^T \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \left[\omega_n(t) + \int_0^t G_n(t,s) \left(\eta_1(s)\beta_n(s) + \eta_2(s)u_n(s) + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \int_0^l f(s,z,U(\tau(s,z,U(s,z),z),\beta(z),p(s)) b_n(z) dz \right) ds \right] \right\}^2 dy dt = \int_0^T \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) b_n(y) \right\}^2 dy dt +$$
$$+ 2 \int_0^T \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) b_n(y) \right\} \left[\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t G_n(t,s) \left(\eta_1(s)\beta_n(s) + \eta_2(s)u_n(s) \right) ds \right\} + \right.$$
$$\left. + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t G_n(t,s) \int_0^l f(s,z,U(\tau(s,z,U(s,z),z),\beta(s,z),p(s)) b_n(z) dz ds \right\} \right] b_i(y) dy dt +$$

$$+\int_0^T\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t G_n(t,s)\left[\eta_1(s)\beta_n(s)+\eta_2(s)u_n(s)+\int_0^l f(\cdot)b_n(z)dz\right]dsb_n(y)\right\}^2 dydt.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, неравенство Бесселя и учитывая, что собственные функции имеют вид

$$b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}.$$

получаем следующую оценку:

$$\Im\leqslant 2\int_0^T\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n G_n(t,0)|\right]^2dt+\frac{4l}{\pi^2}\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\varphi_n G_n(t,0)\right|\times$$

$$\times\int_0^t\left\{|\eta_1(s)|\left[\sum_{n=1}^{\infty}|G_n(t,s)\beta_n(s)|\right]+|\eta_2(s)|\left[\sum_{n=1}^{\infty}|G_n(t,s)u_n(s)|\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|G_n(t,s)\int_0^l f(\cdot)b_n(y)dy\right|\right]\right\}dsdt+$$

$$+\left\{\int_0^T\int_0^t\left\{|\eta_1(s)|\left[\sum_{n=1}^{\infty}|G_n(t,s)\beta_n(s)|\right]+|\eta_2(s)|\left[\sum_{n=1}^{\infty}|G_n(t,s)u_n(s)|\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|G_n(t,s)\int_0^l f(\cdot)b_n(y)dy\right|\right]\right\}dsdt\right\}^2\leqslant$$

$$\leqslant 2T[\chi_1\chi_2]^2+\frac{4l}{\pi^2}\chi_0\chi_1(\chi_2)^2\left[\chi_3\|\beta(t)\|_{B_2(T)}+\chi_4\|u(t)\|_{B_2(T)}+\int_0^T\int_0^t\|f(\cdot)\|_{L_2(\Omega_l)}dsdt\right]+$$

$$+(\chi_2)^2\left[\chi_3\|\beta(t)\|_{B_2(T)}+\chi_4\|u(t)\|_{B_2(T)}+\int_0^T\int_0^t\|f(\cdot)\|_{L_2(\Omega_l)}dsdt\right]^2<\infty,$$

где

$$\chi_0=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\leqslant 2,\quad \chi_1=\|\varphi\|_{\ell_2},\quad \chi_2=\|G(t,s)\|_{B_2(T)}\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4}}=\frac{l^2}{\pi^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}\leqslant\frac{\sqrt{2}l^2}{\pi^2},$$

$$\chi_{2+i}=\int_0^T\int_0^t|\eta_i(s)|dsdt,\quad i=1,2.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1. □

Теперь переходим к определению функции восстановления. Используем нелокальное условие (4). По условию задачи предполагается, что

$$\psi(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t)b_n(x),\quad \text{где}\quad \psi_n(t)=\int_0^l\psi(t,y)b_n(y)dy.$$

В силу дополнительного условия (4) из формального интегрального представления решения (8) получаем

$$\psi(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\left\{\int\limits_0^T\Theta(t,s)\omega_n(s)ds+\int\limits_0^T\Theta(t,s)\int\limits_0^s G_n(s,\theta)\left[\eta_1(\theta)\beta_n(\theta)+\eta_2(\theta)u_n(\theta)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_0^l f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\theta)b_n(y),p(\theta)\right)b_n(y)dy\right]d\theta ds\right\},$$

где

$$\tau=\tau\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\theta)b_n(y)\right).$$

Отсюда имеем счетную систему нелинейных функционально-интегральных уравнений относительно коэффициента Фурье от функции переопределения:

$$\beta_n(t)=\Im_1(\beta_n,u_n)\equiv\gamma_{1n}(t)-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int\limits_0^T\Theta(t,s)\int\limits_0^s G_n(s,\theta)\left[\eta_2(\theta)u_n(\theta)+\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_0^l f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\theta)b_n(y),p(\theta)\right)b_n(y)dy\right]d\theta ds\right\},\quad(9)$$

где

$$\tau=\tau\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\theta)b_n(y)\right),$$

$$\gamma_{1n}(t)=\frac{1}{\gamma_{0n}}\left(\psi_n(t)-\int\limits_0^T\Theta(t,s)\omega_n(s)ds\right),\quad \gamma_{0n}(t)=\int\limits_0^T\Theta(t,s)\int\limits_0^s G_n(s,\theta)\eta_1(\theta)d\theta ds\neq 0.$$

С другой стороны, из ряда Фурье (8) имеем счетную систему функционально-интегральных уравнений относительно коэффициента Фурье от основной неизвестной функции

$$u_n(t)=\Im_2(\beta_n,u_n)\equiv\omega_n(t)+\int\limits_0^t G_n(t,s)\left[\eta_1(s)\beta_n(s)+\eta_2(s)u_n(s)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(s)b_n(y),p(s)\right)b_n(y)dy\right]ds,\quad(10)$$

где

$$\tau=\tau\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n(s)b_n(y)\right).$$

Теперь рассмотрим систему из двух счетных систем нелинейных уравнений (9) и (10).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если имееюю место оценки*

$$\left|f(t,x,u_1,\beta_1,p)-f(t,x,u_2,\beta_2,p)\right|\leqslant M_{01}(t,x)\Big[|u_1-u_2|+|\beta_1-\beta_2|\Big],$$

$$\left|\tau(t,x,u_1)-\tau(t,x,u_2)\right|\leqslant M_{02}(t,x)|u_1-u_2|,$$

$$\rho=\max\Big\{\Delta_1+\Delta_3;\chi_2(\varepsilon_2+\sigma_1\varepsilon_0)+(\Delta_1+\Delta_3)(1+\Delta_2)\Big\}<1,$$

то при фиксированных значениях функции управления система (9), (10) *имеет единственную пару решений в пространстве* $B_2(T)$, *где*

$$\sigma_1 = \|\gamma_0^{-1}(t)\|_{B_2(T)}, \quad \varepsilon_0 = \max_t \int_0^T |\Theta(t,s)| \int_0^s |\eta_2(\theta)| d\theta ds, \quad \varepsilon_i = \max_t \int_0^t |\eta_i(s)| ds, \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta_1 = \sigma_1 \chi_2 \max_t \int_0^T |\Theta(t,s)| \int_0^s \|M_{01}(\theta, x)\|_{L_2(\Omega_l)} d\theta ds, \quad \Delta_2 = \|f(t,x,u,\beta,p) M_{02}(t,x)\|_{L_2(\Omega_l)},$$

$$\Delta_3 = \chi_2 \left(\varepsilon_1 + \max_t \int_0^t \|M_{01}(s,x)\|_{L_2(\Omega_l)} ds \right).$$

Доказательство. Итерационный процесс для систем (9) и (10) зададим следующим образом:

$$\begin{cases} \beta_n^0(t) = \gamma_{1n}(t), & \beta_n^{k+1} = \Im_1(\beta_n^k(t), u_n^k(t)), \\ u_n^0(t) = \omega_n(t), & u_n^{k+1}(t) = \Im_1(\beta_n^k(t), u_n^k(t)), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{11}$$

В силу условий теоремы, применяя неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя, из (11) получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left\|\beta^1(t) - \beta^0(t)\right\|_{B_2(T)} &\leqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|\gamma_{0n}(t)|} \int_0^T |\Theta(t,s)| \int_0^s G_n(s,\theta) \times \\ &\times \left| \eta_2(\theta) u_n^0(\theta) + \int_0^l f\left(\theta, y, \sum_{n=1}^\infty u_n^0(\theta) b_n(y), \sum_{n=1}^\infty \beta_n^0(\theta) b_n(y), p(\theta)\right) b_n(y) dy \right| d\theta ds \leqslant \\ &\leqslant \sigma_1 \int_0^T |\Theta(t,s)| \int_0^s \sum_{n=1}^\infty G_n(s,\theta) |\eta_2(\theta) \omega_n(\theta)| d\theta ds + \\ &+ \sigma_1 \int_0^T |\Theta(t,s)| \int_0^s \sum_{n=1}^\infty G_n(s,\theta) \left| \int_0^l f(\cdot) b_n(y) dy \right| d\theta ds \leqslant \\ &\leqslant \sigma_1 \int_0^T |\Theta(t,s)| \cdot \|G(t,s)\|_{B_2(T)} \|\omega(s)\|_{B_2(T)} \int_0^s |\eta_2(\theta)| d\theta ds + \\ &+ \sigma_1 \|G(t,s)\|_{B_2(T)} \int_0^T |\Theta(t,s)| \int_0^s \sqrt{\sum_{n=1}^\infty \left[\int_0^l f(\cdot) b_n(y) dy \right]^2} d\theta ds \leqslant \\ &\leqslant \sigma_1 \varepsilon_0 \chi_1 \chi_2^2 + \sigma_1 \chi_2 \int_0^T |\Theta(t,s)| \int_0^s \|f(\theta, x, u^0, \beta^0, p)\|_{L_2(\Omega_l)} d\theta ds < \infty, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\sigma_1 = \|\gamma_0^{-1}(t)\|_{B_2(T)}, \quad \varepsilon_0 = \max_t \int_0^T |\Theta(t,s)| \int_0^s |\eta_2(\theta)| d\theta ds.$$

Далее,

$$\left\|u^1(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \max_t \int_0^t G_n(t,s)\left[|\eta_1(s)|\cdot|\beta_n^0(s)|+|\eta_2(s)|\cdot|u_n^0(s)|+\right.$$

$$\left.+\left|\int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^0(s)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^0(s)b_n(y),p(s)\right)b_n(y)dy\right|\right]ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\max_t \int_0^t |\eta_1(s)|G_n(t,s)|\gamma_{1n}(s)|ds+\sum_{n=1}^{\infty}\max_t\int_0^t |\eta_2(s)|G_n(t,s)|\omega_n(s)|ds+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\max_t\int_0^t G_n(t,s)\left|\int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(s)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{1n}(s)b_n(y),p(s)\right)b_n(y)dy\right|ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1\chi_2\|\gamma_1(t)\|_{B_2(T)}+\varepsilon_2\chi_1\chi_2^2+\chi_2\max_t\int_0^t \|f(s,x,\omega,\gamma_1,p)\|_{L_2(\Omega_l)}ds<\infty, \quad (13)$$

где

$$\varepsilon_i=\max_t\int_0^t|\eta_i(s)|ds, \quad i=1,2.$$

Аналогично, применяя те же приемы, имеем оценку

$$\|\beta^{k+1}(t)-\beta^k(t)\|_{B_2(T)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\gamma_{0n}(t)|}\int_0^T|\Theta(t,s)|\int_0^s G_n(s,\theta)|\eta_2(\theta)|\cdot|u_n^k(\theta)-u_n^{k-1}(\theta)|d\theta+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\gamma_{0n}(t)|}\int_0^T|\Theta(t,s)|\int_0^s G_n(s,\theta)\cdot\int_0^l\left|f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n^k(\tau^k)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^k(\theta)b_n(y),p(\theta)\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{k-1}(\tau^{k-1})b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{k-1}(\theta)b_n(y),p(\theta)\right)\right||b_n(y)|dyd\theta ds \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1\varepsilon_0\chi_2\|u^k(t)-u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}+$$

$$+\sigma_1\chi_2\int_0^T|\Theta(t,s)|\int_0^s\sum_{n=1}^{\infty}|u_n^k(\tau^k)-u_n^{k-1}(\tau^{k-1})|\int_0^l M_{01}(\theta,y)|b_n(y)|dyd\theta ds+$$

$$+\sigma_1\chi_2\int_0^T|\Theta(t,s)|\int_0^s\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n^k(\theta)-\beta_n^{k-1}(\theta)|\int_0^l M_{01}(\theta,y)|b_n(y)|dyd\theta ds \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1\varepsilon_0\chi_2\|u^k(t)-u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}+$$

$$+[\|u^k(\tau^k)-u^{k-1}(\tau^{k-1})\|_{B_2(T)}+\|\beta^k(t)-\beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}]\times$$

$$\times\sigma_1\chi_2\int_0^T|\Theta(t,s)|\int_0^s\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l M_{01}(\theta,y)|b_n(y)|dy\right]^2}d\theta ds \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1\varepsilon_0\chi_2\|u^k(t)-u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}+\Delta_1[\|u^k(\tau^k)-u^{k-1}(\tau^{k-1})\|_{B_2(T)}+\|\beta^k(t)-\beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}], \quad (14)$$

где

$$\tau^k = \tau\left(\theta, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(\theta) b_n(y)\right), \quad \Delta_1 = \sigma_1 \chi_2 \max_t \int_0^T |\Theta(t,s)| \int_0^s \|M_{01}(\theta,x)\|_{L_2(\Omega_l)} d\theta ds.$$

Далее нам понадобится следующая оценка:

$$\|u^k(\tau^k) - u^{k-1}(\tau^{k-1})\|_{B_2(T)} =$$
$$= \left\| u_n^k\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(t)b_n(x)\right)\right) - u_n^{k-1}\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{k-1}(t)b_n(x)\right)\right)\right\|_{B_2(T)} \leqslant$$
$$\leqslant \left\| u_n^k\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(t)b_n(x)\right)\right) - u_n^{k-1}\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(t)b_n(x)\right)\right)\right\|_{B_2(T)} +$$
$$+ \left\| u_n^{k-1}\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(t)b_n(x)\right)\right) - u_n^{k-1}\left(\tau\left(t,x,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{k-1}(t)b_n(x)\right)\right)\right\|_{B_2(T)} \leqslant$$
$$\leqslant \|u_n^k(t) - u_n^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \int_0^l |f(\cdot)| \left|\tau\left(t,y,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(t)b_n(y)\right) - \tau\left(t,y,\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{k-1}(t)b_n(y)\right)\right| dy \leqslant$$
$$\leqslant \|u_n^k(t) - u_n^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^k(t) - u_n^{k-1}(t)| \int_0^l |f(\cdot) M_{02}(t,y) b_n(y)| dy \leqslant$$
$$\leqslant (1+\Delta_2)\|u_n^k(t) - u_n^{k-1}(t)\|_{B_2(T)},$$

где

$$\Delta_2 = \max_t \|f(t,x,u,\beta,p) M_{02}(t,x)\|_{L_2(\Omega_l)}.$$

В силу последней оценки из (14) получим

$$\|\beta^{k+1}(t) - \beta^k(t)\|_{B_2(T)} \leqslant (\sigma_1\varepsilon_0\chi_2 + \Delta_1(1+\Delta_2))\|u^k(t) - u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \Delta_1\|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}. \quad (15)$$

Аналогично (15) получаем оценку

$$\|u^{k+1}(t) - u^k(t)\|_{B_2(T)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \max_t \int_0^t G_n(t,s) \Bigg[|\eta_1(s)| \cdot |\beta_n^k(s) - \beta_n^{k-1}(s)| + |\eta_2(s)| \cdot |u_n^k(s) - u_n^{k-1}(s)| +$$
$$+ \int_0^l \Bigg| f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(\tau^k) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^k(s) b_n(y), p(s)\right) -$$
$$- f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{k-1}(\tau^{k-1}) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{k-1}(s) b_n(y), p(s)\right)\Bigg| |b_n(y)| dy \Bigg] ds \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1\chi_2\|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \varepsilon_2\chi_2\|u^k(t) - u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} +$$
$$+ \|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} \chi_2 \max_t \int_0^t \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l M_{01}(s,y) \cdot |b_n(y)| dy\right]^2} ds \leqslant$$
$$\leqslant \Delta_3[\|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \|u^k(\tau^k) - u^{k-1}(\tau^{k-1})\|_{B_2(T)}] + \varepsilon_2\chi_2\|u^k(t) - u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} \leqslant$$
$$\leqslant (\varepsilon_2\chi_2 + \Delta_3(1+\Delta_2))\|u^k(t) - u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)} + \Delta_3\|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}, \quad (16)$$

где

$$\tau^k = \tau\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^k(s) b_n(y)\right), \quad \Delta_3 = \chi_2\left(\varepsilon_1 + \max_t \int_0^t \|M_{01}(s,x)\|_{L_2(\Omega_l)} ds\right).$$

Тогда методом суммирования из (15) и (16) приходим к оценке

$$\left\|\beta^{k+1}(t) - \beta^k(t)\right\|_{B_2(T)} + \left\|u^{k+1}(t) - u^k(t)\right\|_{B_2(T)} \leqslant$$
$$\leqslant \rho \cdot \left[\left\|\beta^k(t) - \beta^{k-1}(t)\right\|_{B_2(T)} + \left\|u^k(t) - u^{k-1}(t)\right\|_{B_2(T)}\right], \quad (17)$$

где $\rho = \max\left\{\Delta_1 + \Delta_3; \chi_2(\varepsilon_2 + \sigma_1\varepsilon_0) + (\Delta_1 + \Delta_3)(1 + \Delta_2)\right\}$.

Из (17) в силу последнего условия теоремы следует, что операторы в правой части (9) и (10) являются сжимающими и имеют единственную пару неподвижных точек, соответственно, в пространстве $B_2(T)$. Следовательно, из (12), (13) и (17) следует, что система (9) (10) имеет единственную пару решений в пространстве $B_2(T)$. □

Таким образом нетрудно убедиться, что в предположениях поставленной задачи и выполнении условий теорем 1 и 2 обратная задача (1)–(4) имеет единственную пару функций $\{U(t,x); \beta(x)\}$ при фиксированных значениях функции управления $p(t)$, причем абсолютно и равномерно сходятся ряды

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{\mu_n(t) + \int_0^t G_n(t,s) \times \right.$$
$$\times \left[\eta_2(s) u_n(s) + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(s) b_n(y), p(s)\right) b_n(y) dy\right] ds -$$
$$- \frac{1}{\gamma_{0n}(t)} \int_0^t G_n(t,s) \eta_1(s) \int_0^T \Theta(s,\theta) \int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma) \times$$
$$\left. \times \left[\eta_2(\varsigma) u_n(\varsigma) + \int_0^l f\left(\varsigma, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\varsigma) b_n(y), p(\varsigma)\right) b_n(y) dy\right] d\varsigma d\theta ds \right\}, \quad (18)$$

где

$$\mu_n(t) = \omega_n(t) + \gamma_{1n}(t) \int_0^t G_n(t,s) \eta_1(s) ds;$$

$$\beta(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{\gamma_{1n}(t) - \frac{1}{\gamma_{0n}(t)} \int_0^T \Theta(t,s) \int_0^s G_n(s,\theta) \times \right.$$
$$\left. \times \left[\eta_2(\theta) u_n(\theta) + \int_0^l f\left(\theta, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\theta) b_n(y), p(\theta)\right) b_n(y) dy\right] d\theta ds \right\}, \quad (19)$$

где

$$\tau = \tau\left(\theta, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\theta) b_n(y)\right).$$

3. Построение оптимального управления. Применение принципа максимума приводит нашу задачу к следующим необходимым условиям оптимальности (см., например, [24] или [1, с. 36—40])

$$\vartheta(t,x) f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t)) - 2\alpha p(t) = 0, \tag{20}$$

$$\vartheta(t,x) f_{pp}(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t)) - 2\alpha < 0, \tag{21}$$

в котором $\vartheta(t,x)$ — обобщенное решение задачи

$$\vartheta_t(t,x) + \vartheta_{xx}(t,x) = 0, \quad (t,x)\in\Omega,$$
$$\vartheta(t,x) = -2[u(T,x) - \xi(x)], \quad \vartheta(t,0) = \vartheta(t,l) = 0,$$

сопряженной с задачей (1)–(3), которое определяется по формуле

$$\vartheta(t,x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) G_n(T,t)\left\{\mu_n(T) + \int_0^T G_n(T,s)\,\times\right.$$
$$\times\left[\eta_2(s)u_n(s) + \int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(s)b_n(y),p(s)\right)b_n(y)dy\right]ds -$$
$$-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int_0^T G_n(T,s)\eta_1(s)\int_0^T \Theta(s,\theta)\int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\Big[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma) +$$
$$\left.+\int_0^l f\left(\varsigma,y,\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\varsigma)b_n(y),p(\varsigma)\right)b_n(y)dy\Big]d\varsigma d\theta ds - \xi_n\right\}, \tag{22}$$

где

$$\tau = \tau\left(\varsigma, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\varsigma)b_n(y)\right).$$

С учетом того, что $f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t)) \neq 0$, условия оптимальности (20), (21) перепишутся в следующем виде:

$$2\alpha p(t) f_p^{-1}(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t)) = \vartheta(t,x), \tag{23}$$

$$f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t))\left(\frac{p(t)}{f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t))}\right)_p > 0. \tag{24}$$

С учетом неравенства (24) из представлений (22) и (23) получаем

$$\frac{\alpha p(t)}{\int_0^l f_p(t,x,U(\tau,x),\beta(t,x),p(t))b_n(y)dy} + \int_0^T G_n(T,t)G_n(T,s)\times$$
$$\times\left[\eta_2(s)u_n(s) + \int_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(s)b_n(y),p(s)\right)b_n(y)dy\right]ds -$$
$$-\frac{1}{\gamma_{0n}}\int_0^T G_n(T,t)G_n(T,s)\eta_1(s)\int_0^T\Theta(s,\theta)\int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\times$$
$$\times\left[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma) + \int_0^l f\left(\varsigma,y,\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(\varsigma)b_n(y),p(\varsigma)\right)b_n(y)dy\right]d\varsigma d\theta ds =$$
$$= (\mu_n(T) + \xi_n)G_n(T,t), \tag{25}$$

где

$$\tau=\tau\left(\varsigma, y, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\varsigma) b_n(y)\right).$$

Преобразуем следующий интеграл, применяя дважды формулу Дирихле:

$$\int_0^T Q_{0n}(t,s)\int_0^T \Theta(s,\theta)\int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\times$$

$$\times\left[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma)+\int_0^l f(\varsigma,y,U(\tau,y),\beta(\varsigma,y),p(\varsigma))b_n(y)dy\right]d\varsigma d\theta ds=$$

$$=\int_0^T Q_{0n}(t,s)\int_0^T G_n(0,\varsigma)\left[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma)+\int_0^l f(\varsigma,y,U(\tau,y),\beta(\varsigma,y),p(\varsigma))b_n(y)dy\right]d\varsigma d\theta ds=$$

$$=\int_0^T Q_{1n}(t,\varsigma)\left[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma)+\int_0^l f(\varsigma,y,U(\tau,y),\beta(\varsigma,y),p(\varsigma))b_n(y)dy\right]d\varsigma, \quad (26)$$

где

$$Q_{0n}(t,s)=G_n(T,t)G_n(T,s)\eta_1(s), \quad \nu_n(\varsigma)=\int_\varsigma^T \Theta(T,\theta)G_n(\theta,0)d\theta,$$

$$Q_{1n}(t,\varsigma)=G_n(0,\varsigma)\nu_n(\varsigma)\int_\varsigma^T Q_{0n}(t,s)ds, \quad \tau=\tau(\varsigma,y,U(\varsigma,y)).$$

Подставляя (26) в (25), приходим к следующему сложному интегральному уравнению относительно функции управления $p(t)$:

$$\alpha p(t)\Bigg/\left\{\int_0^l f_p(t,y,U(\tau,y),\beta(t,y),p(t))b_n(y)dy\right\}+$$

$$+\int_0^T Q_{2n}(t,s)\left[\eta_2(s)u_n(s)+\int_0^l f(s,y,U(\tau,y),\beta(s,y),p(s))b_n(y)dy\right]ds-$$

$$-\int_0^T Q_{3n}(t,\varsigma)\left[\eta_2(\varsigma)u_n(\varsigma)+\int_0^l f(\varsigma,y,U(\tau,y),\beta(\varsigma,y),p(\varsigma))b_n(y)dy\right]d\varsigma=F(t), \quad (27)$$

где

$$\tau=\tau(s,x,u(s,x)), \quad Q_{2n}(t,s)=G_n(T,t)G_n(T,s),$$

$$Q_{3n}(t,\varsigma)=\frac{1}{\gamma_{0n}}Q_{1n}(t,\varsigma), \quad F(t)=(\mu_n(T)+\xi_n)G_n(T,t).$$

Для решения уравнения (27) воспользуемся следующим подходом. В уравнении (27) положим

$$\alpha p(t)\Bigg/\left\{\int_0^l f_p(t,y,U(\tau,y),\beta(t,y),p(t))b_n(y)dy\right\}=g(t), \quad (28)$$

где $\tau=\tau(s,x,u(s,x))$, $g(t)\in C(\Omega_T)$ — неизвестная пока функция. Сначала предположим, что она задана. Тогда из (28) имеем относительно функции управления $p(t)$ следующее нелинейное функциональное уравнение

$$p(t) = \frac{g(t)}{\alpha} \int\limits_0^l f_p(t, y, U(\tau, y), \beta(t, y), p(t)) b_n(y) dy. \tag{29}$$

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия*:

$$0 < \|f_p(t, x, U(\tau, x), \beta(t, x), p(t))\|_{L_2(\Omega_l)} \leqslant M_1,$$
$$|f_p(t, x, U, \beta, p_1(t)) - f_p(t, x, U, \beta, p_2(t))| \leqslant M_2(x)|p_1(t) - p_2(t)|,$$
$$q = \alpha^{-1} \max_{t\in\Omega_T} |g(t)| \cdot \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} < 1.$$

Тогда нелинейное функциональное уравнение (29) *имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций* $C(\Omega_T)$, *которое находится из следующего итерационного процесса*:

$$p_0(t) = 0, \quad p_{k+1}(t) = \frac{g(t)}{\alpha} \int\limits_0^l f_p(t, y, U(\tau, y), \beta(t, y), p_k(t)) b_n(y) dy, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{30}$$

Доказательство. Из последовательных приближений (30) получаем, что справедливы оценки

$$|p_{k+1}(t) - p_0(t)| \leqslant \left|\frac{g(t)}{\alpha}\right| \int\limits_0^l |f_p(t, y, U(\tau, y), \beta(t, y), p_k(t)) b_n(y)| dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|g(t)|}{\alpha} \|f_p(t, x, U(\tau, x), \beta(t, x), p_k(t))\|_{L_2(\Omega_l)} \leqslant \frac{|g(t)|}{\alpha} M_1 < \infty;$$

$$|p_{k+1}(t) - p_k(t)| \leqslant \left|\frac{g(t)}{\alpha}\right| \int\limits_0^l \Big| f_p(t, y, U(\tau, y), \beta(t, y), p_k(t)) -$$
$$- f_p(t, y, U(\tau, y), \beta(t, y), p_{k-1}(t)) \Big| \cdot |b_n(y)| dy \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{g(t)}{\alpha}\right| \int\limits_0^l M_2(y) |p_k(t) - p_{k-1}(t)| \cdot |b_n(y)| dy \leqslant \frac{|g(t)|}{\alpha} |p_k(t) - p_{k-1}(t)| \cdot \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} \leqslant$$
$$\leqslant q |p_k(t) - p_{k-1}(t)|.$$

Из справедливости этих оценок следует, что оператор в правой части (29) является сжимающим и для этого оператора существует единственная неподвижная точка в пространстве непрерывных функций $C(\Omega_T)$. Следовательно, нелинейное функциональное уравнение (29) имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций $C(\Omega_T)$. Теорема доказана. □

Обозначим это решение через

$$p(t) = h(t, g(t)). \tag{31}$$

Подставляя (31) в (27), с учетом (28) получаем следующее нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$g(t) = \Im(t; g) \equiv$$
$$\equiv F(t) - \int\limits_0^T Q_{2n}(t, s) \left[\eta_2(s) u_n(s) + \int\limits_0^l f(s, y, U(\tau, y), \beta(s, y), h(s, g(s))) b_n(y) dy \right] ds +$$
$$+ \int\limits_0^T Q_{3n}(t, \varsigma) \left[\eta_2(\varsigma) u_n(\varsigma) + \int\limits_0^l f\left(\varsigma, y, U(\tau, y), \beta(\varsigma, y), h(\varsigma, g(\tau))\right) b_n(y) dy \right] d\varsigma. \tag{32}$$

Для произвольной функции $\psi(t) \in C(\Omega_T)$ используется норма

$$\|\psi(t)\|_C = \max_{t\in\Omega_T} |\psi(t)|.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия*:

$$\xi(x) \in L_2(\Omega_l); \quad 0 < \left\|f(t,x,U,\beta,h(t,g(t)))\right\|_{L_2(\Omega_l)} \leqslant M_1(t),$$

$$\left|(t,x,U,\beta,h_1) - f(t,x,U,\beta,h_2)\right| \leqslant M_2(x)|h_1 - h_2|,$$

$$\left|h(t,g_1(t)) - h(t,g_2(t))\right| \leqslant M_3|g_1(t) - g_2(t)|,$$

$$\tau = M_3\|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s)ds < 1,$$

где $K(t,s) \geqslant |Q_{2n}(t,s)| + |Q_{3n}(t,\varsigma)|$. *Тогда нелинейное интегральное уравнение Фредгольма* (32) *имеет единственное решение в классе непрерывных функций:* $g(t) \in C(\Omega_T)$, *которое может быть найдено из следующего итерационного процесса*:

$$g_0(t) = F(t), \quad g_{k+1}(t) = \Im(t; g_k), \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{33}$$

Доказательство. Из последовательных приближений (33) получаем, что справедливы следующие оценки

$$|g_{k+1}(t) - g_0(t)\|_C \leqslant \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s) \int\limits_0^l |f(s,y,U(\tau,y),\beta(s,y),h(s,g_k(s)))b_n(y)|dyds \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s)\|f(s,x,U(\tau,x),\beta(s,x),h_k(s))\|_{L_2(\Omega_l)}ds \leqslant \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s)M_1(s)ds < \infty,$$

где $h_k(s) = h(s,g_k(s))$, $K(t,s) \geqslant |Q_{2n}(t,s)| + |Q_{3n}(t,\varsigma)|$;

$$\|g_{k+1}(t) - g_k(t)\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s)\|f(s,x,U(\tau,x),\beta(s,x),h_k(s)) - f(s,x,U(\tau,x),\beta(s,x),h_{k-1}(s))\|_{L_2(\Omega_l)}ds \leqslant$$

$$\leqslant M_3\|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^T K(t,s)\|g_k(t) - g_{k-1}(t)\|_C ds =$$

$$= \tau \cdot \|g_k(t) - g_{k-1}(t)\|_C < \|g_k(t) - g_{k-1}(t)\|_C.$$

Из справедливости этих оценок следует, что оператор в правой части (32) является сжимающим и для этого оператора существует единственная неподвижная точка в пространстве непрерывных функций $C(\Omega_T)$. Следовательно, нелинейное интегральное уравнение (32) имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций $g(t) \in C(\Omega_T)$. Теорема доказана. □

Подстановкой решения уравнения (32) в (31) определяется управляющая функция $p(t)$.

4. Построение оптимального процесса и вычисление минимального значения функционала. Согласно (18) оптимальный процесс находится по формуле

$$\bar{U}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{ \mu_n(t) + \int\limits_0^t G_n(t,s) \times \right.$$

$$\times \left[\eta_2(s)\bar{u}_n(s) + \int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_n(\tau)b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\beta}_n(s)b_n(y), \bar{p}(s)\right) b_n(y)dy \right] ds-$$

$$-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int\limits_0^t G_n(t,s)\eta_1(s)\int\limits_0^T \Theta(s,\theta)\int\limits_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\times$$

$$\times\left[\eta_2(\varsigma)\bar{u}_n(\varsigma)+\int\limits_0^l f\left(\varsigma,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^\infty \bar{\beta}_n(\varsigma)b_n(y),\bar{p}(\varsigma)\right)b_n(y)dy\right]d\varsigma d\theta ds\Bigg\}, \quad (34)$$

где

$$\tau=\tau\left(s,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n(s)b_n(y)\right).$$

Согласно (19) следующим образом определяется функция восстановления:

$$\bar{\beta}(t,x)=\sum_{n=1}^\infty b_n(x)\left\{\gamma_{1n}(t)-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int\limits_0^T \Theta(t,s)\int\limits_0^s G_n(s,\theta)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\eta_2(\theta)\bar{u}_n(\theta)+\int\limits_0^l f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^\infty \bar{\beta}_n(\theta)b_n(y),p(\theta)\right)b_n(y)dy\right]d\theta dt\right\}, \quad (35)$$

где

$$\tau=\tau\left(\theta,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n(\theta)b_n(y)\right).$$

Оптимальный процесс (34) можно приближенно найти с помощью итерационного процесса

$$\bar{U}^{k+1}(t,x)=\sum_{n=1}^\infty b_n(x)\left\{\mu_n(t)+\int\limits_0^t G_n(t,s)\times\right.$$

$$\times\left[\eta_2(s)\bar{u}_n^k(s)+\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n^k(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^\infty \bar{\beta}_n^k(s)b_n(y),\bar{p}^k(s)\right)b_n(y)dy\right]ds-$$

$$-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int\limits_0^t G_n(t,s)\eta_1(s)\int\limits_0^T \Theta(s,\theta)\int\limits_0^\theta G_n(\theta,\varsigma)\times$$

$$\left.\times\left[\eta_2(\varsigma)\bar{u}_n^k(\varsigma)+\int\limits_0^l f\left(\varsigma,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n^k(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^\infty \bar{\beta}_n^k(\varsigma)b_n(y),\bar{p}^k(\varsigma)\right)b_n(y)dy\right]d\varsigma d\theta ds\right\}, \quad (36)$$

где

$$\tau=\tau\left(s,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n^k(s)b_n(y)\right).$$

Функцию восстановления (35) можно приближенно найти с помощью итерационного процесса

$$\bar{\beta}^{k+1}(t,x)=\sum_{n=1}^\infty b_n(x)\left\{\gamma_{1n}(t)-\frac{1}{\gamma_{0n}(t)}\int\limits_0^T \Theta(t,s)\int\limits_0^s G_n(s,\theta)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\eta_2(s)\bar{u}_n^k(\theta)+\int\limits_0^l f\left(\theta,y,\sum_{n=1}^\infty \bar{u}_n^k(\tau)b_n(y),\sum_{n=1}^\infty \bar{\beta}_n^k(\theta)b_n(y),p^k(\theta)\right)b_n(y)dy\right]d\theta ds\right\}, \quad (37)$$

где

$$\tau = \tau\left(\theta, y, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^k(\theta) b_n(y)\right).$$

Согласно формулам (7) и (36) минимальное значение функционала находится из следующей формулы

$$J[\bar{p}] = \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \left[\mu_n(t) + \int_0^t G_n(t,s) \times \right.\right.$$
$$\times \left[\eta_2(s)\bar{u}_n(s) + \int_0^l f\left(s, z, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\tau) b_n(z), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n(s) b_n(z), \bar{p}(s)\right) b_n(z) dz \right] ds -$$
$$- \frac{1}{\gamma_{0n}} \int_0^t G_n(t,s)\eta_1(s) \int_0^T \Theta(s,\theta) \int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma) \left[\eta_2(\varsigma)\bar{u}_n(\varsigma) + \right.$$
$$\left.\left.\left. + \int_0^l f\left(\varsigma, z, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\tau) b_n(z), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n(\varsigma) b_n(z), \bar{p}(\varsigma)\right) b_n(z) dz \right] d\varsigma d\theta ds - \xi_n \right] \right\}^2 dy +$$
$$+ \alpha \int_0^T (\bar{p}(t))^2 dt, \quad (38)$$

где

$$\tau = \tau\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(s) b_n(y)\right).$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 1*. Тогда функционал* (38) *принимает конечное значение.*

Доказательство. Достаточно показать, что сходятся следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(t), \quad (39)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t G_n(t,s) \int_0^l f\left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\tau) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n(s) b_n(y), \bar{p}(s)\right) b_n(y) dy ds, \quad (40)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0n}(t)} \int_0^t G_n(t,s)\eta_1(s) \int_0^T \Theta(s,\theta) \int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma) \times$$
$$\times \int_0^l f\left(\varsigma, y, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\tau) b_n(y), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n(\varsigma) b_n(y), \bar{p}(\varsigma)\right) b_n(y) dy d\varsigma d\theta ds. \quad (41)$$

Покажем абсолютную и равномерную сходимость рядов (39) и (40). Применим неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n(t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \gamma_{1n}(t) \int_0^t G_n(t,s)\eta_1(s) ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_{\ell_2} \|G(t,0)\|_{B_2(T)} + \varepsilon_1 \|\gamma_1(t)\|_{B_2(T)} \|G(t,s)\|_{B_2(T)} = \chi_2(\chi_1 + \varepsilon_1 \|\gamma_1(t)\|_{B_2(T)}) < \infty,$$

где

$$\varepsilon_1 = \max_t \int_0^t |\eta_1(s)| ds;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left| G_n(t,s) \int_0^l f(\cdot) b_n(y) dy \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \|G(t,s)\|_{B_2(T)} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^l f(\cdot) b_n(y) dy \right|^2} ds \leqslant \chi_2 \int_0^t \|f(s,x,\bar{u},\bar{\beta},\bar{p})\|_{L_2(\Omega_l)} ds < \infty.$$

Сходимость ряда (41) доказывается аналогично. Приближенное значение функционала вычисляется из следующего итерационного процесса:

$$J[\bar{p}^{k+1}] = \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \left[\mu_n(t) + \int_0^t G_n(t,s) \times \right.\right.$$

$$\times \left[\eta_2(s) \bar{u}_n^k(s) + \int_0^l f\left(s, z, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^k(\tau) b_n(z), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n^k(s) b_n(z), \bar{p}^k(s) \right) b_n(z) dz \right] ds -$$

$$- \frac{1}{\gamma_{0n}} \int_0^t G_n(t,s) \eta_1(s) \int_0^T \Theta(s,\theta) \int_0^\theta G_n(\theta,\varsigma) \Big[\eta_2(\varsigma) \bar{u}_n^k(\varsigma) +$$

$$\left.\left. + \int_0^l f\left(\varsigma, z, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^k(\tau) b_n(z), \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n^k(\varsigma) b_n(z), \bar{p}^k(\varsigma) \right) b_n(z) dz \right] d\varsigma d\theta ds - \xi_n \right] \right\}^2 dy +$$

$$+ \alpha \int_0^T (\bar{p}^k(t))^2 dt, \quad (42)$$

где

$$\tau = \tau \left(s, y, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n^k(s) b_n(y) \right). \qquad \square$$

5. Заключение. В работе предложена методика решения нелинейного оптимального управления в нелинейной обратной задаче для одного типа параболического уравнения с нелинейным отклонением, начально-краевыми и нелокальным условиями, основанная на методе Фурье разделения переменных. На основе принципа максимума сформулированы необходимые условия оптимальности функции управления при квадратичных критериях. При помощи метода последовательных приближений однозначно определена функция оптимального управления из сложного интегрального уравнения (27). Получена система из двух счетных систем нелинейных функционально-интегральных уравнений для определения функции восстановления и функции состояния. Функция восстановления и функция состояния оптимального управления построены в виде рядов Фурье (34) и (35). Найдена формула вычисления минимального значения функционала (38). Приведены формулы для приближенного вычисления оптимального процесса, функции восстановления и минимального значения функционала при помощи итерационных процессов (30), (36), (37) и (42). Полученные результаты могут найти дальнейшее применение в развитии математической теории нелинейного оптимального управления в обратных задачах для систем с распределенными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Г.* Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Высшая школа, 1989.
2. *Бутковский А. Г., Пустыльников Л. М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1980.
3. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — Наука 1982.
4. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
5. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами/ Дисс. на соиск. уч. степ. д-ра физ.-мат. наук — Бишкек: Ин-т мат. НАН Кыргыз. Респ., 2003.
6. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972.
7. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975.
8. *Рапопорт Э. Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами.. — М.: Высшая школа, 2009.
9. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
10. *Керимбеков А., Наметкулова Р. Ж., Кадиримбетова А. К.* Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением// Изв. Иркутск. ун-та. Сер. Мат. — 2016. — *15*. — С. 50–61.
11. *Миллер Б. М., Рубинович Е. Я.* Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований// Автомат. телемех. — 2013. — № 12. — С. 56–103.
12. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
13. *Тятюшкин А. И.* Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 1992.
14. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
15. *Юлдашев Т. К.* Приближенное решение нелинейного параболического и обыкновенного дифференциального уравнений и приближенный расчет функционала качества при известных управляющих воздействиях// Пробл. управл. — 2014. — № 4. — С. 2–8.
16. *Юлдашев Т. К.* О построении приближений для оптимального управления в квазилинейных уравнениях с частными производными первого порядка// Мат. теория игр прилож. — 2014. — *6*, № 3. — С. 105–119.
17. *Юлдашев Т. К.* Приближенное решение системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с максимумами и приближенное вычисление функционала качества// Вестн. Воронеж. ун-та ГУ. Сер. Сист. анал. информ. технол. — 2015. — № 2. — С. 13–20.
18. *Юлдашев Т. К.* Нелинейное оптимальное управление в обратной задаче для одной системы с параболическим уравнением// Вестн. Твер. ун-та. Сер. Прикл. мат. — 2017. — № 2. — С. 59–78.
19. *Юлдашев Т. К.* Об одном оптимальном управлении обратными тепловыми процессами с интегральным условием переопределения// Вестн. Твер. ун-та. Сер. Прикл. мат. — 2019. — № 4. — С. 65–87.
20. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 9. — С. 1703–1711.
21. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 1. — С. 112–123.
22. *Юлдашев Т. К., Шабадиков К. Х.* Смешанная задача для нелинейного псевдопараболического уравнения высокого порядка// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *156*. — С. 73–83.
23. *Khurshudyan A. Zh.* On optimal boundary and distributed control of partial integro-differential equations// Arch. Control Sci. — 2014. — *24 (LX)*, № 1. — P. 5–25.
24. *Kerimbekov A. K.* On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semi-linear parabolic equations// Proc. World Cong. Eng. London. — 2011. — *1*. — P. 270–275.
25. *Kowalewski A.* Optimal control of an infinite order hyperbolic system with multiple time-varying lags// Automatyka. — 2011. — *15*. — P. 53–65.

26. *Machado L., Abrunheiro L., Martins N. J.* Variational and optimal control approaches for the second-order Herglotz problem on spheres// Optimal Theory Appl. — 2019 182. — № 3. — P. 965–983.
27. *Yuldashev T. K.* Nonlinear optimal control of thermal processes in a nonlinear inverse problem// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 1. — P. 124–136.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.