

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 208 (2022)



Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 208 (2022)

Дата публикации 11 апреля 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 15 раз в год

Редактор-составитель выпуска
Научный редактор выпуска
Компьютерная вёрстка

М. Ш. Бурлуцкая
И. А. Жлябинкова
А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782-4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-3-10>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-11-14>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-15-23>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-24-28>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-29-36>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-37-48>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-49-62>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-63-78>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-79-90>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-91-121>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-122-127>

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 208

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXXII»

ВОРОНЕЖ, 3–9 МАЯ 2021 г.

Часть 1



Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

О двумерных системах интегральных уравнений Вольтерра первого рода (<i>М. В. Булатов, Л. С. Соловарова</i>)	3
Два комбинаторных тождества, связанных с перечислением графов (<i>В. А. Воблый</i>)	11
О спектральных свойствах одного разностного оператора с инволюцией (<i>Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова</i>)	15
О потоках в сетях с барьерной достижимостью (<i>Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов, В. А. Русаков</i>)	24
Асимптотическая задача о восстановлении высокочастотной правой части телеграфного уравнения (<i>Э. В. Кораблина, В. Б. Левенштам</i>)	29
Качественные свойства решений дифференциальных уравнений четвертого порядка на графах (<i>Р. Ч. Кулаев, А. А. Уртаева</i>)	37
Обратная задача для оператора Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом на временной шкале (<i>М. А. Кузнецова</i>)	49
Принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в некорректных задачах оптимального управления (<i>М. И. Сумин</i>)	63
Сцепленность семейств множеств, суперкомпактность и некоторые обобщения (<i>А. Г. Ченцов</i>)	79
Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил (<i>М. В. Шамолин</i>)	91
Одно из статистических решений задачи дифференциальной диагностики (<i>М. В. Шамолин</i>)	122



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 3–10
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-3-10

УДК 517.968.2

О ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

© 2022 г. М. В. БУЛАТОВ, Л. С. СОЛОВАРОВА

Аннотация. Рассматриваются двумерные системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Хорошо изучен случай, когда путем дифференцирования уравнений получают систему интегральных уравнений второго рода. В работе рассмотрен случай, когда указанный подход дает систему интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. В терминах матричных пучков сформулированы достаточные условия существования единственного гладкого решения.

Ключевые слова: двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра, интегро-алгебраическое уравнение, матричный пучок.

ON TWO-DIMENSIONAL SYSTEMS OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

© 2022 M. V. BULATOV, L. S. SOLOVAROVA

ABSTRACT. In this paper, we consider two-dimensional systems of Volterra integral equations of the first kind. The case where a system of integral equations of the second kind is obtained by differentiating the equations is well studied. We examine the case where this approach leads to a system of integral equations with an degenerate matrix of the principal part. We formulate sufficient conditions for the existence of a unique smooth solution in terms of matrix pencils.

Keywords and phrases: two-dimensional integral equation of Volterra type, integro-algebraic equation, matrix pencil.

AMS Subject Classification: 35R09, 45Fxx, 45Dxx

1. Введение. В настоящей работе рассмотрены системы линейных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\int_0^t \int_0^x K(t, x, \tau, s) u(\tau, s) ds d\tau = \varphi(t, x), \quad (t, x) \in \Omega = [0, T] \times [0, X], \quad (1)$$

где $K(t, x, \tau, s)$ — матрица-ядро размерности $(n \times n)$, $u(t, x)$ — искомая, $\varphi(t, x)$ — заданная n -мерные вектор-функции. Здесь проведено исследование систем (1) с условием

$$\det K(t, x, t, x) \equiv 0. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 20-51-S52003, 20-51-54003).

К настоящему времени системы вида (1) практически не изучены. Исключением являются некоторые частные случаи, например, $K(t, x, \tau, s)$ — функция, причем существуют такие минимальные целые неотрицательные числа r, q , что суперпозиция оператора $\frac{\partial^q}{\partial x^q} \frac{\partial^r}{\partial t^r}$ с уравнением (1) дает интегральное двумерное уравнение Вольтерра второго рода. Другой случай это когда $\det K(t, x, t, x) \neq 0$ при всех $(t, x) \in \Omega$.

К близким по приведенным здесь исследованиям относятся статьи, посвященные интегро-алгебраическим уравнениям (ИАУ). По данной тематике см., например, [1, 3, 10–16, 18–20] и приведенную там библиографию. В работах [13, 14] проведено исследование на предмет существования и единственности решения ИАУ и предложен метод их решения, основанный на простейшей неявной кубатурной формуле. В статье [4] рассмотрены одномерные системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра с тождественно вырожденной матрицей-ядром на диагонали. Для таких систем сформулированы достаточные условия существования единственного достаточно гладкого решения, предложены и обоснованы численные методы решения первого и второго порядков.

Относительно исследования системы (1) на предмет существования и единственности решения с условием (2) авторам неизвестны результаты. Этот факт и послужил мотивацией для проведения данного исследования.

2. Постановка задачи и ее свойства. Рассмотрим систему (1) с условием (2). Здесь и всюду в дальнейшем изложении предполагается, что элементы матрицы $K(t, x, \tau, s)$ и правой части $\varphi(t, x)$ обладают той гладкостью, которая необходима для проведения всех выкладок.

Данные системы уравнений принципиально отличаются от уравнений Вольтерра второго и первого родов. Эти системы могут иметь множество решений, а могут и не иметь решения в классе достаточно гладких функций; кроме того, решение (при корректно заданной правой части (1)) может зависеть от высоких производных (смешанных) входных данных.

Приведем примеры. В ряде примеров двойной интеграл заменен на повторный. Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен. Это возможно в силу гладкости входных данных и теоремы Фубини [7].

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\int_0^t \int_0^x \begin{pmatrix} a_{11}(\tau, s) & (t-\tau)(x-s) & 0 \\ 0 & a_{22}(\tau, s) & (t-\tau)(x-s) \\ (t-\tau)(x-s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\tau, s) \\ u_2(\tau, s) \\ u_3(\tau, s) \end{pmatrix} ds d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t, x) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Будем предполагать, что функции $a_{11}(t, x)$, $a_{22}(t, x)$, $f(t, x)$ обладают той гладкостью, которая необходима для проведения выкладок. Кроме этого будем считать, что правая часть $f(t, x)$ задана корректно.

Дифференцируя дважды третье уравнение по t , затем дважды по x , получим

$$u_1(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x). \quad (4)$$

Подставляя это значение в первое уравнение (3), будем иметь

$$\int_0^t \int_0^x a_{11}(\tau, s) u_1(\tau, s) + (t-\tau)(x-s) u_2(\tau, s) = 0. \quad (5)$$

Аналогично, дифференцируя дважды это уравнение сначала по t , затем по x , получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a_{11}(t, x) u_1(t, x)) + u_2(t, x) = 0,$$

или, учитывая (4) и достаточную гладкость данных,

$$u_2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a_{11}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x)).$$

Проводя такие же выкладки для второго уравнения, имеем

$$u_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a_{22}(t, \tau) (\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} a_1(t, \tau) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x))).$$

У этого примера ранг $K(t, x, t, x)$ равен

- (i) двум, если $a_{11}(t, x)a_{22}(t, x) \neq 0$ при всех $(t, s) \in \Omega$;
- (ii) единице в тех точках $(t, x) \in \Omega$, где $a_{11}(t, x) = 0$ или $a_{22}(t, x) = 0$;
- (iii) нулю, если $a_{11}(t, x) = a_{22}(t, s) \equiv 0$.

Однако в этом случае точки перемены ранга матрицы $K(t, x, t, x)$ не являются сингулярными. Существование единственного непрерывного решения данного примера гарантирует корректно заданная правая часть и достаточная гладкость, по совокупности аргументов, функций $a_{11}(t, x)a_{22}(t, s)$ и $f(t, x)$.

Следующие два примера приведены для случая, когда $K(t, x, t, x) = k(t, \tau)l(x, s)$ и вектор-функции $u(t, x)$, зависящей только от одного аргумента, т.е. $u(t, x) = u(x)$. Тогда исходную систему, с учетом гладкости входных данных, можно записать в виде

$$\int_0^t \int_0^x K(t, x, t, x) u(\tau, s) ds d\tau = \int_0^t k(t, \tau) (\int_0^x l(x, s) u(s) ds) d\tau = \varphi(t, x). \quad (6)$$

Рассмотрим однородную задачу (6), у которой внутренний интеграл равен нулю, т.е.

$$\int_0^x l(x, s) u(s) ds = 0, \quad s \in [0, X]. \quad (7)$$

Если данная система уравнений имеет нетривиальное решение, то и однородная система (6) имеет ненулевое решение.

Пример 2. Легко непосредственно проверить, что система интегральных уравнений

$$\int_0^x \begin{pmatrix} s - 2(x - s) & 1 + x - 2s \\ x - s & x - s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds = 0, \quad s \in [0, 1], \quad (8)$$

имеет множество решений вида

$$u_1 = \begin{cases} 0, & s \in [0, 1/2], \\ c\sqrt{2s-1}, & s \in [1/2, 1], \end{cases} \quad u_2 = \begin{cases} 0, & s \in [0, 1/2], \\ -c\sqrt{2s-1}, & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Таким образом, и система

$$\int_0^t \int_0^x k(t, \tau) l(x, s) u(s) ds d\tau = 0,$$

у которой матрица $l(x, s)$ определена из формулы (8), имеет множество решений.

Пример 3. Однородная система интегральных уравнений вида (6) с матрицей

$$l(x, s) = \begin{pmatrix} a & b(x-s) \\ c(x-s) & d(x-s)^2 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0, \quad (9)$$

при условии $2ad - cb = 0$ имеет множество решений при любой матрице $k(t, \tau)$. В самом деле, система интегральных уравнений (внутренний интеграл)

$$\int_0^x \begin{pmatrix} a & b(x-s) \\ c(x-s) & d(x-s)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

эквивалентна системе

$$au_1(x) + b \int_0^x u_2(s)ds = 0, \quad cu_1 + 2d \int_0^x u_2(s)ds = 0. \quad (10)$$

Дифференцируя первое уравнение (10) один раз, а второе — дважды, находим

$$\begin{cases} au_1'(x) + bu_2(x) = 0, \\ cu_1'(x) + 2du_2(x) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Учитывая условие $2ad - cb = 0$, получим, что данная система, а следовательно, и система (10), и исходные интегральные уравнения имеют множество решений.

Пример 4. Система интегральных уравнений вида

$$\int_0^t \int_0^x \begin{pmatrix} 1 & K(t, x, \tau, s) \\ (t - \tau)(x - s) & (t - \tau)(x - s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\tau, s) \\ u_2(\tau, s) \end{pmatrix} dsd\tau = \begin{pmatrix} \varphi_1(t, x) \\ \varphi_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad (t, x) \in \Omega, \quad (12)$$

имеет единственное решение при корректно заданной правой части и при $K(t, x, t, x) \neq 1$ для всех $(t, x) \in \Omega$. В самом деле, дифференцируя первое уравнение (12) по t , а затем по x , получим

$$\begin{aligned} u_1(t, x) + K(t, x, t, x)u_2(t, x) + \int_0^t K_t'(t, x, \tau, x)u_2(\tau, x)d\tau + \\ + \int_0^x K_x'(t, x, t, s)u_2(t, s)ds + \int_0^t \int_0^x K_{tx}''(t, x, \tau, s)u_2(\tau, s)dsd\tau = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1(t, x). \end{aligned} \quad (13)$$

Дифференцируя второе уравнение (12) по t , а затем дважды по x , получим

$$u_1(t, x) + u_2(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_2(t, x). \quad (14)$$

Объединяя уравнения (13) и (14) в систему, находим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & K(t, x, t, x) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & K_t'(t, x, \tau, x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\tau, x) \\ u_2(\tau, x) \end{pmatrix} d\tau + \\ + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & K_x'(t, x, t, s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t, s) \\ u_2(t, s) \end{pmatrix} ds + \int_0^t \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & K_{tx}''(t, x, \tau, s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\tau, s) \\ u_2(\tau, s) \end{pmatrix} dsd\tau = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1(t, x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_2(t, x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу условия $K(t, x, t, x) \neq 1$, $(t, x) \in \Omega$, матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & K(t, x, t, x) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной, т.е. (15) является системой интегральных уравнений второго рода, которое имеет единственное решение.

Пример 5. Однородная система

$$\int_0^t \int_0^x \begin{pmatrix} 1 & t - \tau \\ x - s & (t - \tau)(x - s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\tau, s) \\ u_2(\tau, s) \end{pmatrix} dsd\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

имеет множество решений. В самом деле, действуя на уравнения (16) операторами

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

соответственно, получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_1(t, x) + u_2(t, x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} u_1(t, x) + u_2(t, x) = 0 \end{cases},$$

которая имеет множество решений. Следовательно, и первоначальная задача имеет множество решений.

Приведем заключительный пример.

Пример 6. Система (1) с матрицей размера (4×4) вида

$$K(t, x, \tau, s) = \text{diag}(1, t - \tau, x - s, (t - \tau)(x - s)) \quad (17)$$

имеет единственное решение

$$u(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(t, x), \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2(t, x), \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_3(t, x), \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_4(t, x) \right)^\top$$

при корректно заданной правой части.

Итак, данные примеры показывают принципиальное отличие уравнений (1) с условием (2) от стандартных систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода, у которых $\det K(t, x, t, x) \neq 0$, $(t, x) \in \Omega$.

В дальнейшем нам потребуются некоторые факты из теории матричных пучков и матричных полиномов.

Определение 1 (см. [6]). Выражение вида $\lambda A(t, x) + B(t, x)$, где $A(t, x)$, $B(t, x) - (m \times n)$ -матрицы, λ — скалярный параметр, $(t, x) \in \Omega[0, T] \times [0, X]$, называется матричным пучком. Матричный пучок является регулярным, если $m = n$ и $\det(\lambda A(t, x) + B(t, x)) \neq 0$ при всех $(t, x) \in \Omega$.

Определение 2 (см. [9]). Регулярный матричный пучок $\lambda A(t, x) + B(t, x)$ удовлетворяет критерию «ранг-степень» (имеет индекс 1), если $\text{rank } A(t, x) = k = \text{const}$ для всех $(t, x) \in \Omega$ и

$$\det(\lambda A(t, x) + B(t, x)) = a_k(t, x)\lambda^k + a_{k-1}(t, x)\lambda^{k-1} + \dots + a_0(t, x),$$

где $a_k(t, x) \neq 0$ при всех $(t, x) \in \Omega$.

Определение 3. Будем говорить, что двухпараметрический матричный полином

$$\lambda \xi A_0(t, x) + \lambda A_1(t, x) + \xi A_2(t, x) + A_3(t, x),$$

где λ и ξ — скалярные параметры, имеет простую структуру в области Ω , если выполнены следующие условия:

- (i) $\text{rank } A_0(t, x) = r_0 = \text{const}$ при всех $(t, x) \in \Omega$;
- (ii) $\text{rank}(A_0(t, x)|A_1(t, x)) = r_0 + r_1 = \text{const}$ при всех $(t, x) \in \Omega$;
- (iii) $\text{rank}(A_0(t, x)|A_1(t, x)|A_2(t, x)) = r_0 + r_1 + r_2 = \text{const}$ при всех $(t, x) \in \Omega$;
- (iv) $\det(\lambda \xi A_0(t, x) + \lambda A_1(t, x) + \xi A_2(t, x) + A_3(t, x)) = \lambda^{r_0+r_1} \xi^{r_0+r_2} \alpha_0(t, x) + \lambda^{r_0+r_1-1} \xi^{r_0+r_2} \alpha_1(t, x) + \lambda^{r_0+r_1} \xi^{r_0+r_2-1} \alpha_2(t, x) + \dots$, где $\alpha_0(t, x), \alpha_1(t, x), \alpha_2(t, x), \dots$ — функции, причем $\alpha_0(t, x) \neq 0$ при всех $(t, x) \in \Omega$.

Если матрица $A_1(t, x)$ (или $A_2(t, x)$) тождественно нулевая и исходные матрицы зависят только от одного аргумента, то такой случай был исследован в [5].

Если матричный полином $\lambda \xi A_0(t, x) + \lambda A_1(t, x) + \xi A_2(t, x) + A_3(t, x)$ имеет простую структуру, то имеют место следующие утверждения:

- (а) при $A_1(t, x) = A_2(t, x) \equiv 0$, или $A_1(t, x) = A_3(t, x) \equiv 0$, или $A_2(t, x) = A_3(t, x) \equiv 0$, будем иметь матричные пучки (соответственно $\omega A_0(t, x) + A_2(t, x)$, $(\lambda A_0(t, x) + A_2(t, x))$, $\lambda(\xi A_0(t, x) + A_2(t, x))$, где $\omega = \lambda\xi$), удовлетворяющие критерию «ранг-степень»;
- (б) при $\lambda = 0$ или $\xi = 0$, будем иметь матричные пучки $\xi A_2(t, x) + A_3(t, x)$ или $\lambda A_1(t, x) + A_3(t, x)$, которые удовлетворяют критерию «ранг-степень».

Лемма 1 (см. [9]). *Если матричный пучок $\lambda A(t, x) + B(t, x)$ удовлетворяет критерию «ранг-степень», матрица $A(t, x)$ имеет блочный вид*

$$\begin{pmatrix} A_{11}(t, x) & A_{12}(t, x) \\ A_{21}(t, x) & A_{22}(t, x) \end{pmatrix},$$

где $\text{rank}(A_{11}(t, x)|A_{12}(t, x)) = r = \text{const}$ в области $\Omega = [0, T] \times [0, X]$, то существует такая невырожденная $(n \times n)$ -матрица $P(t, x)$, элементы которой имеют ту же гладкость, что и элементы матриц $A(t, x)$, $B(t, x)$, что

$$P(t, x)(\lambda A(t, x) + B(t, x)) = \lambda \begin{pmatrix} A_1(t, x) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(t, x) \\ B_2(t, x) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Здесь $A_1(t, x)$, $B_1(t, x)$ — $(r \times n)$ -матрицы, $B_2(t, x)$ — $((n - r) \times n)$ -матрица и

$$\text{rank } A_1(t, x) = r = \text{const}, \quad (t, x) \in \Omega.$$

Лемма 2. *Если матричный пучок (18) удовлетворяет критерию «ранг-степень» в области Ω и $\text{rank } A_1(t, x) = r = \text{const}$, то*

$$\det \begin{pmatrix} A_1(t, x) \\ cB_2(t, x) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (t, x) \in \Omega$$

для любого скаляра $c \neq 0$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству в [13].

Приведем следующий факт о системах интегральных уравнений Вольтерра.

Утверждение 1. *Система интегральных уравнений Вольтерра*

$$u(t, x) + \int_0^t L(t, x, \tau, x) u(t, x) d\tau + \int_0^x M(t, x, \tau, s) u(t, s) ds + \int_0^t \int_0^x N(t, x, \tau, s) u(t, s) ds d\tau = \Psi(t, x), \quad (19)$$

где $L(\cdot)$, $M(\cdot)$, $N(\cdot)$ — $(n \times n)$ -матрицы с непрерывными элементами, $\Psi(t, x)$ — n -мерная вектор-функция с непрерывными элементами, имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство этого утверждения вытекает из принципа сжатых отображений (см. [7, 8]).

Вернемся к исходной системе (1) с условием (2). Приведем достаточные условия существования единственного непрерывного решения данной задачи.

Утверждение 2. *Предположим, что для однородной задачи (1) с условием (2) выполнены следующие условия:*

- (1) элементы матриц $K(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ обладают достаточной гладкостью по совокупности элементов;
- (2) $\varphi(0, x) = \varphi(t, 0)$;
- (3) матричный полином

$$R(\lambda, \xi, t, x) = \lambda \xi K(t, x, t, x) + \xi K'_t(t, x, t, x)|_{\tau=t} + \lambda K'_x(t, x, t, s)|_{s=x} + K''_{tx}(t, x, \tau, s)|_{\tau=t, s=x}$$

имеет простую структуру:

$$K'_t(t, x, t, x)|_{\tau=t} \equiv 0; \quad K'_x(t, x, t, s)|_{s=x} \equiv 0; \quad K'_t(t, x, t, x)|_{\tau=t} = K'_x(t, x, t, s)|_{s=x} \equiv 0.$$

Тогда исходная система имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство этого факта основано на блочном представлении исходных матриц, которое обобщает результаты [13].

Для неоднородной задачи (1) с условием (2) справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть для задачи (1) выполнены условия утверждения 2. Если правая часть задана корректно, т.е. задача имеет решение, то это решение единственно в области Ω .

Доказательства этих утверждений основаны на построении дифференциального оператора

$$D = D_0(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + D_1(t, x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x} + D_2(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_3(t, x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (20)$$

суперпозиция которого с исходной системой (1) дает систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода вида (19). При конструировании оператора (20) использованы результаты их теории проекторов и обобщенных обратных матриц [2, 4, 17].

Приведем анализ примеров. В примере 1 матричный полином

$$R(\lambda, \xi, t, x) = \lambda \xi K(t, x, t, x) + \xi K'_t(t, x, t, x)|_{\tau=t} + \lambda K'_x(t, x, t, s)|_{s=x} + K''_{tx}(t, x, \tau, s)|_{\tau=t, s=x}$$

не имеет простой структуры. В самом деле, ранг матрицы $K(t, x, t, x)$ может равняться либо нулю, либо единице, либо двум, в то время как определитель матрицы $R(\lambda, \xi, t, x)$ не зависит от λ и ξ , он всегда равен единице.

Пример 2 является одномерной системой интегральных уравнений. В этом случае мы имеем не матричный полином $R(\lambda, \xi, t, x)$, а матричный пучок $\lambda K(x, x) + K'_x(x, s)|_{s=x}$. У данного пучка ранг матрицы $K(x, x)$ равен 1 при всех $x \in [0, 1]$,

$$\det \lambda K(x, x) + K'_x(x, s)|_{s=x} = \lambda(2x - 1) - 3.$$

При $x = 1/2$ имеем $2x - 1 = 0$; таким образом, в точке $x = 1/2$ нарушено условие

$$\det(\lambda K(x, x) + K'_x(x, s))|_{s=x} = a_1(x)\lambda^k + a_0,$$

где $a_1(x) \neq 0$. Точка $x = 1/2$ является для данного примера сингулярной.

В примере 3 матричный пучок $\lambda K(x, x) + K'_x(x, s)|_{s=x}$ не обладает свойством «ранг-степень». В самом деле, ранг матрицы $K(x, x)$ равен 1 при всех $x \in [0, 1]$ и $a \neq 0$, $\det \lambda K(x, x) + K'_x(x, s)|_{s=x} = bc$, поэтому, как и в предыдущем случае, гарантировать существование единственного решения нельзя.

В примере 4 матричный полином имеет вид

$$\begin{aligned} R(\lambda, \xi, t, x) = & \lambda \xi K(t, x, t, x) + \xi K'_t(t, x, t, x)|_{\tau=t} + \lambda K'_x(t, x, t, s)|_{s=x} + \\ & + K''_{tx}(t, x, \tau, s)|_{\tau=t, s=x} \lambda \xi \begin{pmatrix} 1 & K(t, x, t, x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & K'_t(t, x, \tau, x)|_{\tau=t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + \xi \begin{pmatrix} 0 & K'_x(t, x, t, \xi)|_{\xi=x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \xi \begin{pmatrix} 0 & K''(t, x, \tau, \xi)|_{\tau=t, \xi=x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если $K(t, x, t, x) \neq 1$ при всех $(t, x) \in \Omega$, то данный матричный полином имеет простую структуру, а при $K(t, x, t, x) = 1$ матрица $R(\lambda, \xi, t, x)$ будет тождественно вырожденной.

Точно так же можно показать, что в примере 5 матричный полином $R(\lambda, \xi, t, x)$ не имеет простой структуры, так как матрица

$$\lambda \xi K(t, x, t, x) + \xi K'_t(t, x, t, x)|_{\tau=t} + \lambda K'_x(t, x, t, s)|_{s=x} + K''_{tx}(t, x, \tau, s)|_{\tau=t, s=x}$$

является тождественно вырожденной. Аналогично можно показать, что в примере 6 матричный полином будет иметь простую структуру.

3. Заключение. В работе сформулированы достаточные условия существования решения двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода в терминах матричных пучков. В дальнейшем планируется получить обобщение этих результатов (формулировка достаточных условий) на многомерные системы интегральных уравнений, а также на системы со слабой особенностью

$$\int_0^t \int_0^x (t-\tau)^{-\alpha} (x-s)^{-\beta} K(t, x, \tau, s) u(\tau, s) ds d\tau = \varphi(t, x), \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta < 1.$$

Также планируется разработка и обоснование численных методов решения задачи (1), основанных на кубатурных формулах средних прямоугольников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ботороева М. Н. Моделирование развивающихся систем на основе интегральных уравнений Вольтерра/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Бурят. гос. ун-т, 2019.
2. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980.
3. Будникова О. С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многшаговыми методами/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — МГУ, 2015.
4. Булатов М. В. Численное решение систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода I рода// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1998. — 38, № 4. — С. 607–611.
5. Булатов М. В. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка// Диффер. уравн. — 2008. — 44, № 10. — С. 1299–1306.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966.
7. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2004.
8. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. — М.: Наука, 1975.
9. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск: Наука, 1996.
10. Balakumar V. Numerical solution of Volterra integral-algebraic equations using block pulse functions// Appl. Math. Comp. — 2015. — 263. — P. 165–170.
11. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
12. Brunner H. Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.
13. Bulatov M. V. Two-dimensional integral-algebraic systems: Analysis and computational methods// J. Comput. Appl. Math. — 2011. — 236, № 2. — P. 132–140.
14. Bulatov M. V. Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral, algebraic and integro-differential equations// Centr. Eur. J. Math. — 2014. — 12, № 2. — P. 308–321.
15. Bulatov M. V. Construction of implicit multistep methods for solving integral algebraic equations// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2019. — 1, № 3. — С. 310–322.
16. Hadizadeh M. Jacobi spectral solution for integral-algebraic equations of index 2// Appl. Numer. Math. — 2011. — 61. — P. 131–148.
17. Lamour R., März R., Tischendorf C. Differential-Algebraic Equations: A Projector- Based Analysis. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
18. Pishbin S. The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernels: the numerical treatments// J. Comput. Appl. Math. — 2013. — 245. — P. 121–132.
19. Pishbin S. Optimal convergence results of piecewise polynomial collocation solutions for integral-algebraic equations of index 3// J. Comput. Appl. Math. — 2015. — 279. — P. 209–224.
20. Pishbin S. Numerical solution and structural analysis of two-dimensional integral-algebraic equations// Numer. Algorithms. — 2016. — 73, № 2. — P. 305–322.

Булатов Михаил Валерьянович

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск
E-mail: mvbul@icc.ru

Соловарова Любовь Степановна

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск
E-mail: soleilu@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 11–14
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-11-14

УДК 519.117, 519.175.3

ДВА КОМБИНАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВА, СВЯЗАННЫХ С ПЕРЕЧИСЛЕНИЕМ ГРАФОВ

© 2022 г. В. А. ВОБЛЫЙ

Аннотация. Из полученной автором явной формулы для числа помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с заданным числом вершин выведены два комбинаторных тождества. Приведены также не зависящие от перечисления графов доказательства полученных тождеств.

Ключевые слова: комбинаторное тождество, метод коэффициентов, перечисление, последовательно-параллельный граф, 2-связный граф.

TWO COMBINATORIAL IDENTITIES RELATED TO ENUMERATION OF GRAPHS

© 2022 V. A. VOBLYI

ABSTRACT. From the explicit formula for the number of labeled, series-parallel, 2-connected graphs with a given number of vertices obtained by the author, two combinatorial identities are derived. Also, proofs of these identities independent of the enumeration of graphs are given.

Keywords and phrases: combinatorial identity, method of coefficients, enumeration, series-parallel graph, 2-connected graph.

AMS Subject Classification: 05A19, 05C30

Определение 1 (см. [4, с. 118]). *Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин.

Определение 2. *k-Циклический граф* — это граф с цикломатическим числом, равным k .

Определение 3 (см. [7]). Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит подразбиения полного графа K_4 .

Последовательно-параллельные графы применяются при построении надежных коммуникационных сетей (см. [9]).

В [3] получена явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с заданным числом вершин. В данной заметке из этой формулы выведены два комбинаторных тождества, а также приведено не зависящее от перечисления графов доказательство полученных тождеств.

Теорема 1. *Верны следующие комбинаторные тождества:*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+i} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!} \binom{n}{i} \binom{n+i}{j} \binom{j}{n+1} = n, \quad n \geq 3; \quad (1)$$

$$\sum_{i=2}^n \sum_{j=n+2}^{n+i} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!} \binom{n}{i} \binom{n+i}{j} \binom{j}{n+2} = \frac{n(n-1)(n+3)(n+4)}{12}, \quad n \geq 4. \quad (2)$$

Доказательство. В [3] для числа $B_k(n)$ помеченных последовательно-параллельных k -циклических 2-связных графов с n вершинами при $n \geq k+2$ получено выражение

$$B_k(n) = \frac{n!}{2} \sum_{i=k}^{n-2} \sum_{j=n+k-2}^{n+i-2} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-2}}{i!} \binom{n-3}{i-1} \binom{n-i-2}{j+k-1} \binom{j+1}{n+k-1}. \quad (3)$$

Так как полный граф K_4 является трициклическим, то все унициклические и бициклические 2-связные графы не содержат в качестве подграфа подразделения K_4 и потому являются последовательно-параллельными графами.

Унициклический 2-связный граф — это простой цикл с помеченными вершинами. Число таких циклов известно (см. [8, с. 20]); следовательно, $B_1(n) = (n-1)!/2$, и при $k=1$ из (3) получим

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=n-1}^{n+i-2} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-2}}{i!} \binom{n-3}{i-1} \binom{n+i-2}{j} \binom{j+1}{n} = \frac{1}{n}, \quad n \geq 3. \quad (4)$$

Э. Райт доказал (см. [10]), что число помеченных бициклических блоков с n вершинами равно $(n-3)(n+2)/24$; при $k=2$ из (3) получим

$$\sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=n}^{n+i-2} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-2}}{i!} \binom{n-3}{i-1} \binom{n+i-2}{j} \binom{j+1}{n+1} = \frac{(n-3)(n+2)}{12}, \quad n \geq 4. \quad (5)$$

Преобразуем тождества (4) и (5). Заменяем n на $n+2$; поскольку

$$\binom{n-1}{i-1} = \frac{i}{n} \binom{n}{i}, \quad \binom{j+1}{n+2} = \frac{j+1}{n+2} \binom{j}{n+1},$$

тождество (4) эквивалентно тождеству (1), а тождество (5) эквивалентно тождеству (2). $\square$

Дадим теперь не зависящее от перечисления графов доказательство тождеств (1) и (2).

Обозначим левую часть тождества (1) через $L(n)$. Поскольку $\binom{n}{k} = 0$ при $0 \leq n < k$, то нижний индекс во внутренней сумме можно заменить на 0. С помощью метода коэффициентов (см. [5, с. 8]) имеем

$$\frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!} = \text{Coef}_z e^{(j+1)z} z^{-i},$$

$$L(n) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \text{Coef}_z e^z z^{-i} \sum_{j=0}^{n+i} (-1)^j e^{jz} \binom{n+i}{j} \binom{j}{n+1}.$$

В силу комбинаторного тождества

$$\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \binom{j}{l} x^j = \binom{m}{l} x^l (1+x)^{m-l} \quad (6)$$

(см. [6, с. 625]) имеем

$$\begin{aligned} L(n) &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \operatorname{Coef}_z e^z z^{-i} \binom{n+i}{n+1} (-1)^{n+1} e^{(n+1)z} (1-z)^{i-1} = \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+1} (-1)^{n-1} \operatorname{Coef}_z \frac{1}{z} e^{(n+2)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-1}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$f(z) = e^{(n+2)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-1}.$$

Функция $f(z)$ аналитична в нуле, и по формуле для вычета в полюсе первого порядка имеем

$$\operatorname{Coef}_z \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} f(z), \quad L(n) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+1} (-1)^{n-1} (-1)^{i-1}.$$

Используем теперь комбинаторное тождество

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \binom{a+i}{l} = (-1)^m \binom{a}{l-m} \quad (7)$$

(см. [8, с. 619]). Так как в $L(n)$ под знаком суммы второй биномиальный коэффициент равен нулю при $i = 0$, то окончательно получим

$$L(n) = (-1)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+1} (-1)^i = (-1)^n (-1)^n \binom{n}{1} = n.$$

Для тождества (2) опять с помощью метода коэффициентов имеем

$$L(n) = \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \operatorname{Coef}_z e^z z^{-i} \sum_{j=0}^{n+i} (-1)^j e^{jz} \binom{n+i}{j} \binom{j}{n+2}.$$

В силу комбинаторного тождества (6) найдем

$$\begin{aligned} L(n) &= \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \operatorname{Coef}_z e^z z^{-i} \binom{n+i}{n+2} (-1)^n e^{(n+2)z} (1-e^z)^{i-2} = \\ &= \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+2} (-1)^n \operatorname{Coef}_z \frac{1}{z^2} e^{(n+3)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-2}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$f(z) = e^{(n+3)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-2}.$$

Функция $f(z)$ аналитична в нуле, и по формуле для вычета в полюсе второго порядка найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{Coef}_z \frac{f(z)}{z^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} f'(z) = (n+3) e^{(n+3)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-2} + \\ &+ (i-2) e^{(n+3)z} \left(\frac{1-e^z}{z} \right)^{i-3} \frac{-ze^z + e^z - 1}{z^2} = (-1)^i \left(n+3 + \frac{i-2}{2} \right), \\ L(n) &= \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+2} (-1)^{n+i} \left(n+2 + \frac{i}{2} \right) = L_1(n) + L_2(n). \end{aligned}$$

Еще раз применим комбинаторное тождество (7):

$$L_1(n) = (n+2) (-1)^n \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+2} (-1)^i = (n+2) \binom{n}{2}.$$

Так как $i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1}$, в силу тождества (7) имеем

$$\begin{aligned} L_2(n) &= \frac{1}{2}(-1)^n \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} \binom{n+i}{n+2} (-1)^i = \\ &= \frac{n}{2}(-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \binom{n+i+1}{n+2} (-1)^{i+1} = \frac{n}{2} \binom{n+1}{3}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$L(n) = (n+2) \binom{n}{2} + \frac{n}{2} \binom{n+1}{3} = \frac{1}{12} n(n-1)(n+3)(n+4).$$

Отметим, что для чисел помеченных последовательно-параллельных трициклических и тетрациклических блоков известны выражения в виде многочленов от числа вершин графа (см. [1] и [2], соответственно). Поэтому из формулы (3) при $k = 3$ и $k = 4$ можно получить еще два тождества типа (1). Однако степень многочленов от n в правой части тождеств быстро растет; при $k = 4$ она равна 9.

Автор благодарит профессора В. К. Леонтьева за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воблый В. А., Мелешко А. К. О числе помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков // Мат. XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения» (Тула, 28–31 мая 2018 г.)). — Тула: ТПГУ. — С. 168–170.
2. Воблый В. А. Число помеченных последовательно-параллельных тетрациклических блоков // Прикл. дискр. мат. — 2020. — № 47. — С. 57–61.
3. Воблый В. А. О перечислении помеченных последовательно-параллельных k -циклических 2-связных графов // Дискр. анал. исслед. опер. — 2021. — 28, № 1. — С. 7–14.
4. Зыков А. А. Основы теории графов. — М.: Наука, 1987.
5. Леонтьев В. К. Избранные задачи комбинаторного анализа. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
7. Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M. Enumeration and limit laws of series-parallel graphs // Eur. J. Combin. — 2007. — 28, № 8. — P. 2091–2105.
8. Moon J. W. Counting Labelled Trees. — Can. Math. Monogr., 1970.
9. Raghavan S. Low-connectivity network design on series-parallel graphs // Networks. — 2004. — 43, № 3. — P. 163–176.
10. Wright E. M. The number of connected sparsely edged graphs. II. Smooth graphs and blocks // J. Graph Theory. — 1978. — 2, № 4. — P. 299–305.

Воблый Виталий Антониевич

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва

E-mail: vitvobl@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 15–23
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-15-23

УДК 517.9

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

© 2022 г. Г. В. ГАРКАВЕНКО, Н. Б. УСКОВА

Аннотация. Рассматривается разностный оператор с инволюцией, действующий в комплексном гильбертовом пространстве $l_2(\mathbb{Z})$. При помощи метода подобных операторов он приводится к диагональному (блочнo-диагональному) виду, что позволяет получить различные спектральные характеристики исходного оператора и построить для него биинвариантные подпространства.

Ключевые слова: метод подобных операторов, разностный оператор, спектр, спектральный проектор.

ON SPECTRAL PROPERTIES OF ONE DIFFERENCE OPERATOR WITH INVOLUTION

© 2022 G. V. GARKAVENKO, N. B. USKOVA

ABSTRACT. We consider a difference operator with involution acting in the complex Hilbert space $l_2(\mathbb{Z})$. Using the method of similar operators, we reduce it to the diagonal (block diagonal) form, which allows one to obtain various spectral characteristics of the original operator and to construct biinvariant subspaces for it.

Keywords and phrases: method of similar operators, difference operator, spectrum, spectral projector.

AMS Subject Classification: 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. В последнее время (см., например, [5–11, 19, 22, 24, 30] и ссылки в них) рассматривались дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией. Исследование таких операторов производилось различными методами, например, в [8–10] — резольвентным методом. В [5, 6, 19, 22, 24] применялся к дифференциальным операторам с инволюцией метод подобных операторов. В настоящей работе рассматривается не дифференциальный, а разностный оператор с инволюцией. С помощью метода подобных операторов получены условия его диагонализации (блочной диагонализации), что позволяет оценивать спектральные характеристики этого оператора. Отметим, что проблема диагонализации некоторых классов операторов рассматривалась, например, в [12, 21, 26].

Отметим, что применяется та же модификация метода подобных операторов, что при исследовании дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией в [19, 22, 24] (без предварительного преобразования подобия). Эта модификация представлена в работах [2, 23], на теоремы из этих работ мы и будем опираться в дальнейшем. Другие примеры применения этой модификации можно найти в [3].

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

Перейдем к постановке задачи. В работе, как обычно, через $\mathbb{Z}$ обозначена группа целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Везде символом $\mathcal{H}$ обозначено гильбертово пространство и символом $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, с нормой $\|X\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|$, $x \in \mathcal{H}$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Введем в рассмотрение следующие два пространства последовательностей, вначале напомним, что под последовательностью мы понимаем отображение из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}$. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$ суммируемых с квадратом модуля комплексных последовательностей $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Скалярное произведение в l_2 задается формулой

$$(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \overline{y(n)}, \quad x, y: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C},$$

и норма, порождаемая этим скалярным произведением, имеет вид

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2 \right)^{1/2}.$$

Векторы e_k , $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие условию $e_k(n) = \delta_{nk}$, $n, k \in \mathbb{Z}$, δ_{nk} — символ Кронекера, образуют безусловный ортонормированный базис в l_2 . Также в дальнейшем будем использовать банахово пространство $l_1 = l_1(\mathbb{Z})$ комплексных суммируемых последовательностей, т.е. $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \in l_1$,

$$\|x\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)| < \infty.$$

Определение 1 (см. [20]). Оператор $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ называется нормальным, если $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ и выполнены 2 условия: $D(A) = D(A^*)$, $\|Ax\| = \|A^*x\|$, для всех $x \in D(A)$. При этом если $A = A^*$, то оператор A называется самосопряженным.

В пространстве l_2 рассмотрим линейный оператор $A: D(A) \subset l_2 \rightarrow l_2$, действующий по формуле $(Ax)(n) = (an + b)x(n)$, где $n \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $x \in D(A)$, с областью определения

$$D(A) = \left\{ x \in l_2 : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |nx(n)|^2 < \infty \right\}.$$

Рассматриваемый оператор A является нормальным. В случае, если $a, b \in \mathbb{R}$, то оператор A будет самосопряженным.

Спектральные характеристики оператора A известны. А именно, его простыми изолированными собственными значениями являются числа $\lambda_n = an + b$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствующими собственными векторами — векторы стандартного базиса $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ пространства l_2 , спектральные проекторы Рисса $P_n(\sigma_n, A)$, где $\sigma_n = \{an + b\}$, задаются формулой $P_n x = x(n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Также введем обозначение

$$P_{(n)} = \sum_{|i| \leq n} P_i, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Оператор A в дальнейшем будет играть роль невозмущенного оператора. Также важно отметить выполнение двух условий, которые понадобятся для возможности применения модификации метода подобных операторов из [2] (это условие разделенности спектра (1) и условие (6)):

$$\inf_{i \neq j} \text{dist}(\sigma_i, \sigma_j) = a > 0, \quad \sup_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{i\}} (|a||i - n|)^{-2} < \infty.$$

Возмутим оператор A ограниченным оператором $B \in \mathcal{B}(l_2)$, действующим по формуле

$$(Bx)(n) = c_1(n)x(n-1) + c_2(n)x(n+1) + c_0(n)x(-n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где последовательности $c_1: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $c_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $c_0: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, суммируемы с квадратом, т.е. $c_1, c_2, c_0 \in l_2$.

Напомним, что оператор $\mathcal{E} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется инволюцией, если $\mathcal{E}^2 = I$, где I — тождественный оператор в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. В нашем случае $(\mathcal{E}x)(n) = x(-n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H} = l_2$, поэтому $\mathcal{E}^2 = I$ и B — оператор с инволюцией.

Далее рассматривается возмущенный оператор $A - B: D(A) \subset l_2 \rightarrow l_2$. Сразу же остановимся на одном важном вопросе. Оператор $A - B$ не есть разностный аналог дифференциального оператора первого порядка с инволюцией. Это совершенно другой оператор, не связанный с дифференциальным, но его спектральные свойства удобно изучать с помощью той же модификации метода подобных операторов из [2, 23], что и для дифференциального оператора с инволюцией. Более того, для дифференциального оператора с инволюцией вначале применяют предварительное преобразование подобия. Для оператора $A - B$ такого делать не надо. А также отметим, что оператор $A - B$ можно рассматривать как хороший иллюстративный пример применения метода, так как для него далее будут построены три различные допустимые тройки.

Отметим, что рассматриваемая в работе проблема близка к проблеме оценки собственных значений бесконечных трехдиагональных матриц со скалярными или матричными элементами (см. [7, 25, 27–29, 31–33]). При этом в [7] исследование также проводилось с помощью метода подобных операторов, но из-за специфики рассматриваемых в ней блочных трехдиагональных матриц использовалась другая модификация метода подобных операторов, разработанная в статье [4]. В [27–29, 31–33] использовался другой подход к решению задачи оценки собственных значений, связанный с приближениями их собственными значениями усеченных (конечных) трехдиагональных матриц.

Трехдиагональные матрицы специального типа также возникают при дискретизации дифференциальных уравнений второго порядка. У них последовательности $c_1, c_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ — постоянные и каждый элемент этих последовательностей равен единице, а последовательность $c_0: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ нулевая. Они не укладываются в приводимую ниже схему. Поэтому для них удобны другие модификации метода подобных операторов (см. [13–16]). Заметим, что если возмущение B рассматривать как элемент пространства $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то и для исследуемого оператора $A - B$ подойдет одна из модификаций метода подобных операторов из [15, 16], связанная с использованием в качестве пространства допустимых возмущений пространства $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Оператор-возмущение $B \in \mathcal{B}(l_2)$ принадлежит более узкому операторному пространству, вложенному в $\mathcal{B}(l_2)$, двустороннему идеалу операторов Гильберта—Шмидта $\mathfrak{S}_2(l_2) \subset \mathcal{B}(l_2)$. Как обычно, норма в $\mathfrak{S}_2(l_2)$ определяется формулой $\|X\|_2 = (\text{tr}(XX^*))^{1/2}$. Здесь $\text{tr}(XX^*)$ след оператора XX^* , принадлежащего двустороннему идеалу $\mathfrak{S}_1(l_2)$ ядерных операторов из $\mathcal{B}(l_2)$ с нормой

$$\|X\|_1 = \text{tr}(XX^*) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n,$$

где s_n — последовательность s -чисел оператора X . Формула $(X, Y) = \text{tr}(XY^*)$ определяет скалярное произведение в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Мы будем использовать стандартные свойства идеала $\mathfrak{S}_2(l_2)$ из, например, [17, 18].

Пусть $\{Q_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — система ортопроекторов из $\mathcal{B}(l_2)$, образующая разложение единицы, т.е. обладающая свойствами $Q_n Q_m = Q_m Q_n = 0$ при $n \neq m$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x = x, \quad x \in l_2.$$

Тогда в $\mathfrak{S}_2(l_2)$ можно ввести эквивалентную норму по формуле

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \|P_i X P_j\|_2^2.$$

Оператор Гильберта—Шмидта имеет матрицу Гильберта—Шмидта: для $X \in \mathfrak{S}_2(l_2)$, $X \sim (x_{ij})$ при выполнении условия

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} |x_{ij}|^2 < \infty$$

имеем

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} |x_{ij}|^2.$$

Возмущение B , очевидно, принадлежит $\mathfrak{S}_2(l_2)$ и

$$\|B\|_2^2 = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (|c_1(n)|^2 + |c_2(n)|^2 + |c_0(n)|^2) \right)^{1/2}.$$

Перейдем к краткому описанию метода.

2. Об используемом методе исследования.

Определение 2 (см. [4]). Два линейных оператора $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, что

$$UD(A_2) = D(A_1), \quad A_1 Ux = UA_2 x, \quad x \in D(A_2).$$

Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в оператор A_2 .

Подобные операторы интересны тем, что зная спектральные свойства одного оператора, мы знаем и спектральные свойства другого. Соответствующий результат удобно привести в виде следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — подобные операторы и $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — оператор преобразования. Имеют место следующие утверждения.

1. $\text{Im } A_1 = U(\text{Im } A_2)$.
2. $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$, $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2$, — спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i , $i = 1, 2$.
3. Пусть e — собственный вектор оператора A_2 , отвечающий собственному значению λ , $A_2 e = \lambda e$; тогда Ue — собственный вектор оператора A_1 , причем $A_1 Ue = \lambda Ue$.
4. Если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A_2|_{\mathcal{H}_k}$, $k = 1, 2$, — сужение A_2 на $\mathcal{H}_k$ относительно прямой суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, то подпространства $\tilde{\mathcal{H}}_k = U(\mathcal{H}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A_1|_{\tilde{\mathcal{H}}_k}$, $k = 1, 2$, относительно разложения $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2$. Кроме того, если P — проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ (т.е. $\mathcal{H}_1 = \text{Im } P$ — образ проектора P , $\mathcal{H}_2 = \text{Im}(I - P)$ — образ дополнительного проектора $I - P$), то проектор $\tilde{P} \in \text{End } \mathcal{H}$, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2$, определяется формулой $\tilde{P} = UPU^{-1}$.
5. Если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $T_2: \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (полугруппы класса C_0), то оператор A_1 является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов

$$T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}, \quad t \geq 0, \quad T_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Определение 3 (см. [2, 23]). Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_*$ и $J: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $\Gamma: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $J, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — трансформаторы (т.е. линейные операторы, действующие в пространстве линейных операторов). Тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ назовем допустимой тройкой для оператора A , а $\mathcal{M}$ — допустимым пространством возмущений, если выполнены следующие условия:

- (i) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор и $J^2 = J$;
- (ii) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и имеют место равенства $A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX$ для любого $X \in \mathcal{M}$, выполняемые на векторах из $D(A)$, причем $Y = \Gamma X$ единственное решение уравнения $AY - YA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;

(iii) $XGY, (GX)Y \in \mathcal{M}$ для любых $X, Y \in \mathcal{M}$, и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что

$$\|\Gamma\| \leq \gamma, \quad \max \left\{ \|XGY\|_*, \|(GX)Y\|_* \right\} \leq \gamma \|X\|_* \|Y\|_*$$

для любых $X, Y \in \mathcal{M}$;

(iv) $J((GX)JY) = 0$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}$;

(v) для любых $X \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| \leq \varepsilon.$$

Отметим, что для одного невозмущенного оператора иногда можно построить несколько разных допустимых троек. Мы построим три допустимые тройки.

Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ некоторая допустимая тройка. Оператор преобразования оператора $A - B$, $B \in \mathcal{M}$, в оператор $A - JX$, $X \in \mathcal{M}$, имеющий по сравнению с $A - B$ более простую структуру, в виде $U = I + \Gamma X$. Мы будем рассматривать два случая: $JB = 0$ и $JB \neq 0$.

Теорема 1 (см. [2, 23]). Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка, $JB = 0$, и выполнено условие

$$3\gamma \|B\|_* \|J\| < 1. \quad (1)$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, т.е. имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - JX_*), \quad (2)$$

где $X \in \mathcal{M}$ — решение уравнения

$$\Phi(X) = B\Gamma X - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B, \quad (3)$$

причем единственное. Оно может быть найдено методом простых итераций $X_{n+1} = \Phi(X_n)$, $n \geq 0$, где $X_0 = 0$, $X_1 = B, \dots$

Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка, $JB \neq 0$ и выполнено условие

$$4\gamma \|B\|_* \|J\| < 1.$$

Тогда имеет место равенство (2), где оператор $X_* \in \mathcal{M}$ — решение уравнения

$$\Phi_1(X) = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B, \quad (4)$$

и оно может быть найдено методом простых итераций $X_{i+1} = \Phi_1(X_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $X_0 = 0$.

Заметим, что условия определения 3 — это условия корректного определения операторов $J, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, и, в частности, операторов $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $\Phi_1: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ в правой части уравнений (3), (4).

Следствие 1. Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая тройка для оператора A , оператор $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ удовлетворяет условию (1) и оператор $A - JX_*$, где X_* — решение нелинейного операторного уравнения (3), является генератором полугруппы операторов $\tilde{T}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тогда оператор $A - B$ является генератором полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, определенной равенствами

$$T(t) = (I + \Gamma X_*)\tilde{T}(t)(I + \Gamma X_*)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

3. Основные результаты. Применим к исходному оператору $A - B$ все рассуждения из работы [2], еще раз подчеркнув, что он полностью удовлетворяет условиям, накладываемым на возмущенный оператор в этой работе.

Начнем с построения семейства трансформаторов $J_k, \Gamma_k \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_2(l_2))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, используя для этого матричный подход, согласно [2]. Также обозначим J и Γ через J_0 и Γ_0 соответственно.

Трансформаторы $J, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_2(l_2))$ и $J_k, \Gamma_k \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_2(l_2))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определяются для оператора $X \in \mathfrak{S}_2(l_2)$, имеющего матрицу $X \sim (x_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, через свои матрицы следующим образом:

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ \frac{x_{ij}}{a(i-j)}, & i \neq j, \end{cases}$$

$$(J_k X)_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \max\{|i|, |j|\} \leq k, \\ x_{ij}, & i = j, |i| > k, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (\Gamma_k X)_{ij} = \begin{cases} 0, & \max\{|i|, |j|\} \leq k, \\ 0, & i = j, |i| > k, \\ \frac{x_{ij}}{a(i-j)}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что оператор $J \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_2(l_2))$ определяется формулой

$$JX = J_0 X = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X P_i,$$

а оператор $J_k \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_2(l_2))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, — формулой

$$J_k X = \sum_{|i| > k} P_i X P_i + P_{(k)} X P_{(k)}, \quad X \in \mathfrak{S}_2(l_2), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Подчеркнем, что если оператор X из $\mathfrak{S}_2(l_2)$, то операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X$ при любом $k \geq 0$ определены корректно, их матрицы являются матрицами Гильберта—Шмидта и константа γ из определения 3 равна $1/|a|$.

Отметим, что возмущение B можно также рассматривать как оператор из $\mathcal{B}(l_2)$. Тогда в качестве пространства допустимых возмущений удобно брать также $\mathcal{B}(l_2)$ и для любого $X \in \mathcal{B}(l_2)$ операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X$, $k \in \mathbb{Z}_+$, также принадлежат $\mathcal{B}(l_2)$ и их матричные элементы определяются теми же формулами (см., например, [14, 15]). Но в этом случае константа γ оценивается величиной $\gamma = \gamma_k = C|a|^{-1}$, где точное значение константы C неизвестно, а известна лишь ее оценка $C \leq 5$ (см. [1]).

Теорема 2 (см. [23, Lemma 3.5]). *Тройка $(\mathfrak{S}_2(l_2), J_k, \Gamma_k)$ является допустимой тройкой для невозмущенного оператора A при любом $k \geq 0$.*

Теорема 3 (см. [23, лемма 1]). *Тройка $(\mathcal{B}(l_2), J_k, \Gamma_k)$ является допустимой тройкой при любом $k \in \mathbb{Z}_+$.*

Из [3, теорема 5.3] (для $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_2(l_2)$), а также теоремы 1 и леммы 1 (для $\mathcal{M} = \mathcal{B}(l_2)$) немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $B \in \mathfrak{S}_2(l_2)$ и выполнено одно из следующих условий:*

$$3\|B\|_2 < |a|, \quad (5)$$

$$15\|B\| < |a|. \quad (6)$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_$, имеющему диагональную матрицу, где $X_* \in \mathcal{M}$ — решение рассматриваемого в $\mathcal{M}$ нелинейного уравнения (2). При этом в случае условия (5) выполнено $X \in \mathfrak{S}_2(l_2) \subset \mathcal{B}(l_2)$, а в случае условия (6) — $X \in \mathcal{B}(l_2)$.*

Отметим, что оба условия (5) и (6) очень ограничительны, поэтому удобно рассмотреть другое пространство допустимых возмущений $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2)$, в котором возможна блочная диагонализация оператора $A - B$ при отсутствии условий на малость нормы оператора B .

Теперь, следуя работам [2, 23], рассмотрим для ненулевого $X \in \mathfrak{S}_2(l_2)$ двустороннюю последовательность вещественных чисел вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-1/2} \max \left\{ \left(\sum_{|k| \geq n, k \in \mathbb{Z}} \|P_k X\|_2^2 \right)^{1/4}, \left(\sum_{|k| \geq n, k \in \mathbb{Z}} \|X P_k\|_2^2 \right)^{1/4} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим $\alpha_n(B) = \alpha_n$. Введем в рассмотрение подпространство $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2)$ операторов из $\mathfrak{S}_2(l_2)$, представимых в виде $X = X_l f(A_0)$, $X = f(A_0) X_r$, где $X_r, X_l \in \mathfrak{S}_2(l_2)$ и

$$f(A_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n P_n.$$

Норма в $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2)$ определяется формулой $\|X\|_{2,\alpha} = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$. Сразу же отметим, что так как $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2) \subset \mathfrak{S}_2(l_2)$, то трансформаторы J и Γ определены, при этом $J, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2))$. Причем легко показать, что они переводят $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2)$ в $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2)$.

Из [2, теорема 5.7] следует теорема о блочной диагонализации оператора A .

Теорема 5. *Существует такое $k \geq 0$, что оператор $A - B$ подобен блочно-диагональному оператору*

$$\tilde{A} = A - P_{(k)} X P_{(k)} - \sum_{|i| > k} P_i X P_i,$$

где $X \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2) \subset \mathfrak{S}_2(l_2)$ — есть решение уравнения (4). Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $\tilde{A}$ осуществляет такой оператор $U = I + \Gamma_k X \in \mathcal{B}(l_2)$, что $U - I \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2) \subset \mathfrak{S}_2(l_2)$.

Перейдем к оценке спектральных характеристик оператора $A - B$, используя, опять же, результаты из [2, 3]. Из [2, замечание 6.2], а также теоремы 5 и леммы 1 немедленно вытекает

Следствие 2. *Собственные векторы $\tilde{e}_i$, $i \in \mathbb{Z}$, оператора $A - B$ образуют в пространстве l_2 базис Рисса, базис Бари со скобками и p -базис со скобками при $p \geq 2$.*

Теорема 6. *Спектр $\sigma(A - B)$ оператора $A - B$ допускает представление в виде объединения взаимно непересекающихся конечных множеств $\tilde{\sigma}_{(k)}$, $\tilde{\sigma}_i$, $|i| > k$, при этом*

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{(k)} &= \sigma((A - P_{(k)} X_*) | \mathcal{H}_{(k)}), \quad \mathcal{H}_{(k)} = \text{Im } P_{(k)}, \\ \tilde{\sigma}_i &= \sigma((A - P_i X_*) | \mathcal{H}_i), \quad \mathcal{H}_i = \text{Im } P_i, \quad |i| > k, \\ \sigma(A - B) &= \tilde{\sigma}_{(k)} \bigcup \left(\bigcup_{|i| > k} \tilde{\sigma}_i \right), \end{aligned}$$

где множество $\tilde{\sigma}_{(k)}$ содержит не более чем $2k + 1$ собственных значений, множества $\tilde{\sigma}_i = \{\tilde{\lambda}_i\}$, $|i| > k$, одноточечны. Для собственных значений $\tilde{\lambda}_i$, $|i| > k$, оператора $A - B$ и соответствующих собственных векторов $\tilde{e}_i$, $|i| > k$, имеют место асимптотические оценки

$$|\tilde{\lambda}_i - ai - b| = \delta_i, \quad \|\tilde{e}_i - e_i\| = \delta'_i, \quad |i| > k,$$

где последовательности $\delta_i \in l_1$ и $\delta'_i \in l_2$.

Обозначим через $\tilde{P}_i$, $|i| > k$, спектральные проекторы оператора $A - B$, построенные по спектральным множествам $\tilde{\sigma}_i = \{\tilde{\lambda}_i\}$, $|i| > k$, $\tilde{P}_{(k)} = P(\tilde{\sigma}_k, A - B)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Имеет место следующая теорема, вытекающая из [2, теорема 6.3] и леммы 1.

Теорема 7. *Спектральные проекторы связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i &= P_i U^{-1} + \Gamma_k X_* P_i U^{-1}, \quad \tilde{P}_i - P_i = (\Gamma_k X_* P_i - P_i \Gamma_k X_*) U^{-1}, \quad |i| > k, \\ \tilde{P}_{(k)} &= P_{(k)} U^{-1} + \Gamma_k X_* P_{(k)} U^{-1}, \quad \tilde{P}_{(k)} - P_{(k)} = (\Gamma_k X_* P_{(k)} - P_{(k)} \Gamma_k X_*) U^{-1}, \end{aligned}$$

где $U = I + \Gamma_k X_*$,

$$U^{-1} = (I + \Gamma_k X_*)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\Gamma_k X_*)^j.$$

При этом $\|\tilde{P}_i - P_i\|_2 \leq \eta_i$, $|i| > k$, и последовательность η принадлежит l_2 .

Определение 4. Нетривиальное замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ называется биинвариантным для линейного замкнутого оператора $\mathcal{E}: D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, если $\mathcal{H}_0$ и его ортогональное дополнение $\mathcal{H}_0^\perp$ инвариантны относительно $\mathcal{E}$.

Очевидно, что если оператор $\mathcal{E}$ перестановочен с некоторым ортопроектором Q , то подпространства $\text{Im } Q$ и $\text{Ker } Q$ являются биинвариантными для оператора $\mathcal{E}$.

Таким образом, подпространства $\text{Im } P_{(k)}$, $\text{Im } P_i$, $|i| > k$, образуют в пространстве l_2 базис из подпространств (см. определение в [1]), а также счетную систему биинвариантных подпространств для невозмущенного оператора A .

Определение 5 (см. [17]). Пусть $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$ — базис из подпространств в пространстве $\mathcal{H}$, $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и оператор $I+U$ обратим. Тогда подпространства $(I+U)\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, образуют в пространстве $\mathcal{H}$ базис из подпространств, эквивалентный ортогональному, или спрямляемый, или базис Рисса из подпространств.

Определение 6. Пусть $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ подобны, $A_1 U = U A_2$, $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Пусть также подпространства $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$ — биинвариантны для оператора A_2 . Тогда подпространства $(I+U)\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, назовем для оператора A_1 биинвариантными подпространствами Рисса. Если же $U \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то назовем их биинвариантными для A_1 подпространствами Бари.

Из основной теоремы о подобии (теоремы 5) операторов $A-B$ и $A-J_k X_*$ немедленно следует

Теорема 8. Подпространства $(I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_i$, $|i| > k$, $(I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_{(n)}$, образуют в пространстве l_2 базис Бари из подпространств и систему Бари биинвариантных подпространств для оператора $A-B$.

Далее предполагается, что невозмущенный оператор A самосопряжен (т.е. $a, b \in \mathbb{R}$).

Из следствия 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. Оператор $i(A-B)$ является генератором сильно непрерывной группы операторов $T_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(l_2)$ и эта группа подобна группе $\tilde{T}_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ вида

$$\tilde{T}_0(t) = e^{i(A-P_{(k)}X_*|\mathcal{H}_{(k)})I_{(k)}t}P_{(k)} + \sum_{|n|>k} e^{i\tilde{\lambda}_n I_n t} P_n,$$

где через I_n обозначен тождественный оператор в $\mathcal{H}_n = I_m P_n$, $|n| > k$, а через $I_{(k)}$ тождественный оператор в $\mathcal{H}_{(n)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. мат. ж. — 1983. — 24, № 1. — С. 21–39.
2. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц // Прикл. мат. физ. — 2020. — 52, № 2. — С. 71–85.
3. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры. I // Прикл. мат. физ. — 2020. — 52, № 3. — С. 185–194.
4. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб. — 2017. — 208, № 1. — С. 3–47.
5. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Обобщенный метод Фурье для системы дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов // Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 2. — С. 276–280.
6. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Спектральный анализ дифференциальных операторов с инволюцией и группы операторов // Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 9. — С. 1281–1291.
7. Бройтигам И. Н., Поляков Д. М. Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц // Уфим. мат. ж. — 2019. — 11, № 3. — С. 10–29.
8. Бурлуцкая М. Ш. Смешанная задача для системы дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 2. — С. 145–151.
9. Бурлуцкая М. Ш. Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для системы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — 59, № 3. — С. 380–390.

10. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями// Докл. РАН. — 2014. — 454, № 1. — С. 15–17.
11. Владыкина В. Е., Шкаликов А. А. Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией// Докл. РАН. — 2019. — 484, № 1. — С. 12–17.
12. Гаркавенко Г. В. О диагонализации некоторых классов линейных операторов// Изв. вузов. Мат. — 1994. — № 11. — С. 14–19.
13. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Спектральный анализ разностных операторов второго порядка с растущим потенциалом// Таврич. вестн. информ. мат. — 2015. — 28, № 3. — С. 40–48.
14. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств одного класса разностных операторов// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2016. — № 3. — С. 101–111.
15. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 4. — С. 395–402.
16. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Асимптотика собственных значений разностного оператора с растущим потенциалом и полугруппы операторов// Мат. физ. комп. модел. — 2017. — 20, № 4. — С. 6–17.
17. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
18. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. 3. — М.: Мир, 1974.
19. Криштал И. А., Ускова Н. Б. Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — 16. — С. 1091–1132.
20. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
21. Скрынников А. В. О квазинильпотентном варианте метода Фридрихса в теории подобия линейных операторов// Функци. анал. прилож. — 1983. — 17, № 3. — С. 89–90.
22. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu. Spectral analysis of a differential operator with an involution// J. Evol. Equations. — 2017. — 17. — P. 669–684.
23. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — 477, № 2. — P. 930–960.
24. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions// Eurasian Math. J. — 2020. — 11, № 2. — P. 30–39.
25. Boutet de Monvel A., Zielinski L. Approximation of eigenvalues for unbounded Jacobi matrices using finite submatrices// Centr. Eur. J. Math. — 2014. — 12, № 3. — P. 445–463.
26. Hinkkannen A. On the diagonalization of a certain class of operators// Michigan Math. J. — 1985. — 32, № 3. — P. 349–359.
27. Ikebe Y., Asai N., Miyazaki Y., Cai D. The eigenvalue problem for infinite complex symmetric tridiagonal matrices with application// Lin. Alg. Appl. — 1996. — 241–243. — P. 599–618.
28. Janas J., Malejki M. Alternative approaches to asymptotic behavior of eigenvalues of some unbounded Jacobi matrices// J. Comput. Appl. Math. — 2007. — 200. — P. 342–356.
29. Janas J., Naboko S. Infinite Jacobi matrices with unbounded entries: Asymptotics of eigenvalues and the transformation operator approach// SIAM J. Math. Anal. — 2004. — 36, № 2. — P. 643–658.
30. Kopzhassarova A. A., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M. Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution// Abstr. Appl. Anal. — 2012. — 2012. — 590781.
31. Malejki M. Asymptotics of large eigenvalues for some discrete unbounded Jacobi matrices// Lin. Alg. Appl. — 2009. — 431. — P. 1952–1970.
32. Malejki M. Asymptotic behaviour and approximation of eigenvalues for unbounded block Jacobi matrices// Opuscula Math. — 2010. — 30, № 3. — P. 311–330.
33. Malejki M. Eigenvalues for some complex infinite tridiagonal matrices// J. Adv. Math. Comp. Sci. — 2018. — 26, № 5. — P. 1–9.

Гаркавенко Галина Валериевна

Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Ускова Наталья Борисовна

Воронежский государственный технический университет

E-mail: nat-uskova@mail.ru



О ПОТОКАХ В СЕТЯХ С БАРЬЕРНОЙ ДОСТИЖИМОСТЬЮ

© 2022 г. Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, В. А. СКОРОХОДОВ, В. А. РУСАКОВ

Аннотация. Рассмотрена задача о потоках в сетях с ограничениями на достижимость барьерного типа. Представлены новые определения, позволяющие описать поток в сети с ограничениями на достижимость, в частности, представление потока как вектор-функции. Условия сохранения потока и ограничения максимального потока по дуге сформулированы в терминах вектор-функции. Это позволяет рассматривать потоковые задачи, не переходя к развертке, которая является графом со связанными дугами.

Ключевые слова: теория графов, нестандартная достижимость, барьерная достижимость, сеть, поток в сетях, алгоритм прорыва.

FLOWS IN NETWORKS WITH BARRIER REACHABILITY

© 2022 Ya. M. ERUSALIMSKIY, V. A. SKOROHODOV, V. A. RUSAKOV

ABSTRACT. The problem of flows in networks with barrier-type reachability restrictions is considered. We introduce new definitions that allow one to describe a flow in a network with reachability constraints, in particular, a representation of a flow as a vector-valued function. Conditions for preserving the flow and restricting the maximum flow along an arc are formulated in terms of vector-valued functions. This allows one to consider flow problems without passing to an unfolding, which is a graph with connected arcs.

Keywords and phrases: graph theory, nonstandard reachability, barrier reachability, network, flow in network, breakthrough algorithm.

AMS Subject Classification: 05C38

1. Сети с барьерной достижимостью. Графы и сети с барьерной достижимостью были введены в рассмотрение в работах [2,3,5]. Напомним, что такое граф с барьерной достижимостью.

На графе с барьерной достижимостью множество дуг U состоит из трех непересекающихся подмножеств U_N — нейтральных дуг, $U_{\uparrow}$ — «увеличивающих» дуг, U_B — барьерных дуг. Последние два множества не равны пустому множеству. Для каждой барьерной дуги графа u задана ее высота (высота барьера) — натуральное число h_u . Опишем, какие пути являются допустимыми на графе с барьерной достижимостью.

С каждым отрезком пути μ на графе с барьерной достижимостью связана характеристика этого отрезка пути $\chi_\mu(i)$, $i \in \mathbb{Z}_+$, которая определена индуктивно следующим образом:

$$\chi_\mu(0) = 0; \quad (1)$$

$$\chi_\mu(i+1) = \begin{cases} \chi_\mu(i), & \text{если } \mu(i+1) \in U_N; \\ \chi_\mu(i) + 1, & \text{если } \mu(i+1) \in U_{\uparrow}; \\ \chi_\mu(i) - h_{\mu(i+1)}, & \text{если } \mu(i+1) \in U_B \text{ и } \chi_\mu(i) \geq h_{\mu(i+1)}. \end{cases} \quad (2)$$

Третья строка в (2), в частности, означает, что в случае $\chi_\mu(i) < h_{\mu(i+1)}$ барьерная дуга закрыта для прохождения путем μ .

Выписанные требования на допустимость пути на графе с барьерной достижимостью в терминах характеристики $\chi_\mu(i) \geq h_{\mu(i+1)}$ можно воспринимать «энергетически». Начиная движение по пути μ , перемещаемая по сети единица вещества обладает нулевой энергией (п. 1.), при прохождении по нейтральной дуге её энергия не изменяется (см. (1)), при прохождении по увеличивающей дуге она увеличивается на 1 (см. (2)), барьерная дуга доступна для прохождения, только, если накопленная энергия не меньше, чем высота барьера, а после прохождения по барьерной дуге накопленная энергия уменьшается на величину равную высоте барьера (см. (2)).

Классическая задача о стационарном потоке в сети (см. [6]) — это задача о транспортировке вещества из источника сети в сток по путям на графе, ведущим из источника в сток, таким образом, чтобы на каждой из дуг величина потока не превышала пропускную способность дуги $\rho(u)$ (см. (3), и чтобы в каждой промежуточной вершине сети выполнялось условие сохранения потока (суммарный поток по всем дугам, приходящим в вершину, должен быть равен суммарному потоку по все выходящим из неё дугам (см. (4)). Таким образом, поток в сети является функцией $\varphi(u)$, определенной на дугах сети и удовлетворяющей двум условиям:

$$\varphi(U) \leq \rho(u), \quad u \in U, \quad (3)$$

$$\sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u) = \sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u), \quad x \in X_{\text{вн}}; \quad (4)$$

здесь $U_+(x)$, $U_-(x)$ — множества входящих и исходящих, соответственно, дуг вершины x , а $X_{\text{вн}}$ — множество внутренних вершин сети, не являющихся источниками и стоками. В результате осуществляется транспортировка вещества по путям сети, ведущим из источника в сток.

Понятно, что такое определение потока для сети с барьерной достижимостью не подходит, поскольку мы должны учитывать, что транспортировка вещества из источника в сток должна осуществляться из источника в сток только по допустимым путям и при этом должны выполняться условия сохранения потока в промежуточных вершинах сети. Ясно, что условия классические условия сохранения потока Форда—Фалкерсона (условия (3), (4)) не содержат никаких требований на допустимость путей, по которым осуществляется транспортировка. Эту коллизию в работе [2] авторы разрешали следующим образом. По исходному графу строили его развертку, на которой кроме исходных вершин графа, имелись слои их двойников (слои соответствовали уровням накопленной энергии), а дугам исходного графа на развертке соответствовали дуги, построение которых определялось типом исходной дуги и высотой барьерных дуг. (Подробно о развертке графа см. в [5]).

Поскольку одной дуге исходного графа на развертке соответствует целый набор дуг, возникает задача «переноса» пропускной способности исходной на построенные из неё дуги развертки. Наделив все эти дуги пропускной способностью породившей их дуги, мы получаем сеть, на которой потоки проходят по допустимым путям. Однако при переносе построенного потока на исходную сеть может нарушаться условие (3).

Вариант нахождения допустимого потока в сетях с ограничениями на достижимость, учитывающий соблюдение условия (3), был предложен Я. М. Ерусалимским и В. А. Скороходовым в [4]. В этой работе было введено понятие графов со связанными дугами, состоящее в том, что на графе имеются выделенные непустые непересекающиеся подмножества дуг. Для дуг из таких подмножеств определена их суммарная пропускная способность (а не пропускная способность каждой дуги). Это позволило предложить эвристический алгоритм, позволяющий распределять суммарную пропускную способность связанных дуг в пропускную способность каждой из дуг с целью нахождения потока, который можно было бы истолковать как допустимый поток на исходном графе с барьерной достижимостью.

Связанными на развертке объявлялись подмножества дуг, построенных из одной дуги исходного графа. Фактически, задача нахождения максимального потока в сети с барьерной достижимостью сводилась к отысканию такого варианта раздачи пропускных способностей, в результате которого пропускная способность полученной развертки была максимальной. Понятно, что задача раздачи пропускных способностей является NP -полной, а предложенный авторами алгоритм

раздачи пропускных способностей, названный «алгоритмом прорыва», является эвристическим (см., например, [1]).

2. Поток в сети с барьерной достижимостью как вектор-функция. Попробуем определить, что такое поток в сети с барьерной достижимостью, не используя для этого переход к развертке. Для этого нам потребуется пересмотреть основное понятие — поток в сети.

Определение. Поток в сети с барьерной достижимостью будем называть вектор-функцию $\{\varphi_i(u)\}_{0 \leq i \leq M}$, определенную на множестве дуг графа, каждая координата которой принимает неотрицательные значения, и для которой выполнены следующие условия:

$$\sum_{i=0}^M \varphi_i(u) \leq \rho(u), \quad u \in U. \quad (5)$$

$$\varphi_i(u) = 0, \quad 0 \leq i \leq h_u, \quad u \in U_B \quad (6)$$

$$\sum_{u \in U_N \cup U_+(x)} \varphi_i(x) + \sum_{u \in (U_+ \cap U_+(x))} \varphi_{i-1}(x) + \sum_{u \in U_B \cap U_+(x)} \varphi_{i+h_u}(x) = \sum_{u \in U_-(x)} \varphi_i(x) \quad (7)$$

Ясно, что при этом выполняется и условие (8):

$$\sum_{u \in U_+(x)} \varphi_i(x) = \sum_{u \in U_-(x)} \varphi_i(x), \quad x \in X_{\text{вн}}, \quad 0 \leq i \leq M. \quad (8)$$

Условие (5) — аналог условия (3), условие (6) — учет высот барьеров, условие (7) — условие сохранения потока как вектор-функции во внутренних вершинах сети (аналог условия (4)).

Для того чтобы понять смысл сказанного выше, рассмотрим сеть, приведенную на рис. 1. Около дуг выписаны их пропускные способности. Знаком «+» помечена увеличивающая дуга. В сети есть две барьерные дуги (3;6) — высоты 4 и (3;7) — высоты 2. Если эту сеть рассматривать без ограничений на достижимость, то величина максимального потока в сети равна 3, и он реализуем следующим потоком: $\varphi((1;2)) = 3$; $\varphi((2;3)) = 3$; $\varphi((3;7)) = 2$; $\varphi((7;8)) = 2$; $\varphi((3;6)) = 1$; $\varphi((6;8)) = 1$; $\varphi((3;4)) = 0$; $\varphi((4;5)) = 0$; $\varphi((5;2)) = 0$;

Ясно, что этот поток не является допустимым в этой сети с барьерной достижимостью (энергия вещества, протекающего по барьерным дугам, равна 0). При этом дуги (2;3), (3;4), (4;5), (5;2) недогружены этим потоком.

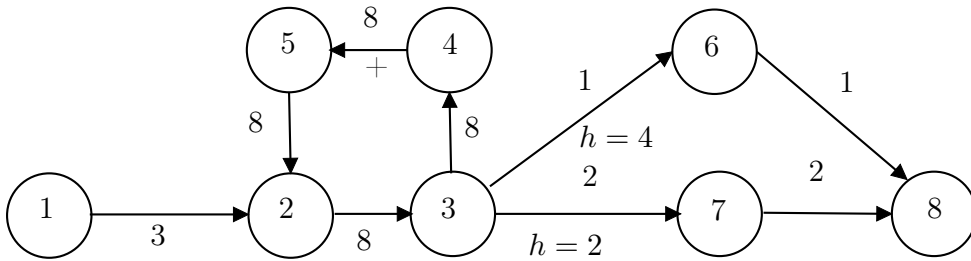


Рис. 1. Сеть с барьерной достижимостью

В таблице 1, приведен пример потока как вектор-функции, заданной на дугах этой сети с барьерной достижимостью (рис. 1).

Легко проверить, что приведенный поток удовлетворяет условиям (5)–(7) и, значит, является потоком в сети с барьерной достижимостью.

Таблица 1 позволяет понять, что происходит в этой сети с барьерной достижимостью. Из источника в каждый момент времени поступает 2-единицы вещества с энергетическим уровнем равным нулю, эта порция вещества перемешивается по сети и «закручивается» на контуре, две единицы вещества совершают двойную прокрутку, одна единица вещества совершает двойную

Таблица 1

Дуга	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	Величина потока на дуге	Пропускная способность дуги
(1; 2)	2	0	0	0	0	2	3
(2; 3)	2	2	2	1	1	8	8
(3; 4)	2	2	1	1	0	6	8
(4; 5)	2	2	1	1	0	6	8
(5; 2)	0	2	2	1	1	6	8
(3; 7)	0	0	1	0	0	1	2
(7; 8)	1	0	0	0	0	1	2
(3; 6)	1	0	0	0	0	1	1
(6; 8)	1	0	0	0	0	1	1

Таблица 2

Дуга	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	Величина потока на дуге	Пропускная способность дуги
(1; 2)	2,4	0	0	0	0	2,4	3
(2; 3)	2,4	2,4	2,4	0,4	0,4	8	8
(3; 4)	2,4	2,4	0,4	0,4	0	5,6	8
(4; 5)	2,4	2,4	0,4	0,4	0	5,6	8
(5; 2)	0	2,4	2,4	0,4	0,4	5,6	8
(3; 7)	0	0	2	0	0	2	2
(7; 8)	2	0	0	0	0	2	2
(3; 6)	0	0	0	0	0	0,4	1
(6; 8)	0,4	0	0	0	0	0,4	1

прокрутку по контуру, а вторая — четырехкратную. Таким образом, на дугах контура возникает ситуация, которую мы назвали наложением потока.

Рассмотрим еще один поток в этой сети, заданный таблицей 2. Таблица позволяет понять, что происходит в этой сети с барьерной достижимостью для этого потока. Из источника в каждый момент времени поступает 2,4 единицы вещества с энергетическим уровнем равным нулю, эта порция вещества перемешается по сети и «закручивается» на контуре, две единицы вещества совершают двойную прокрутку, а 0,4 единицы из них (из 2,4) — четырехкратную.

Ясно, что поток, заданный таблицей 1, не является максимальным, а поток, заданный таблицей 2, является максимальным потоком в этой сети с барьерной достижимостью (хотя оба потока полностью загружают дугу (2; 3), образующую разрез в этой сети).

Замечание 1. Понятно, что обычную сеть можно считать сетью с барьерной достижимостью, у которой $U_N = U$, $U_B = U_{\uparrow} = \emptyset$. При этом вектор-функция потока такова, что для каждой дуги сети $\varphi_1(u) = \varphi_2(u) = \dots = \varphi_M(u) = 0$, а функция $\varphi_0(u)$ представляет собой обычный поток в сети в соответствии с классическим определением потока (см. [6]).

Замечание 2. Если вектор-функция $\{\varphi_i(u)\}_{0 \leq i \leq M}$ — поток в сети с барьерной достижимостью (см. определение 2), то функция φ , определенная на множестве дуг сети равенством

$$\varphi(u) = \sum_{i=0}^M \varphi_i(u)$$

является обычным потоком в этой сети без ограничений на достижимость.

Замечание 3. Если вектор-функция $\{\varphi_i(u)\}_{0 \leq i \leq M}$ — поток в сети с барьерной достижимостью (см. определение), то функция φ , определенная на множестве дуг сети равенством

$$\varphi(u) = \sum_{i=0}^M \varphi_i(u)$$

является обычным потоком в этой сети без ограничений на достижимость, но не обязательно максимальным.

Действительно, увеличим пропускную способность каждой из дуг (1; 2), (3; 6) и (6; 8) на единицу. Величина максимального потока в этой сети с барьерной достижимостью не изменится (приведенный в таблице 2 поток останется максимальным), а величина максимального потока в этой сети без ограничений на достижимость увеличится на единицу.

Рассмотрению эффектов падения величины максимального потока в сети при введении ограничений на достижимость посвящена статья [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Водолазов Н. Н., Ерусалимский Я. М.* NP-полнота задачи нахождения максимального потока в графах с дополнительными ограничениями на достижимость // в кн.: Мат. Воронеж. весенней мат. школы «Современные методы теории краевых задач. Понtryгинские чтения—XXI». — Воронеж: Изд-во ВГУ, 2010. — С. 14–15.
2. *Ерусалимский Я. М.* Потоки в сетях с нестандартной достижимостью // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2012. — № 1. — С. 17–21.
3. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А.* Общий подход к нестандартной достижимости на ориентированных графах // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. — 2005. — С. 64–67.
4. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А.* Потоки в сетях со связанными дугами // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. Прилож. — 2003. — № 8. — С. 9–12.
5. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Петросян А. Г., Кузьмина М. В.* Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный ун-т, 2009.
6. *Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р.* Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.
7. *Erusalimskiy I. M., Skorokhodov V. A.* On flows in networks with reachability restrictions // J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 1902. — 012063.

Ерусалимский Яков Михайлович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: ymerusalimskiy@sfedu.ru

Скороходов Владимир Александрович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: vaskorohodov@sfedu.ru

Русаков Владислав Андреевич
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: vrusakov@sfedu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 29–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-29-36

УДК 517.928

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2022 г. Э. В. КОРАБЛИНА, В. Б. ЛЕВЕНШТАМ

Аннотация. В работе рассматривается задача Коши для телеграфного уравнения. Младший коэффициент и правая часть уравнения осциллируют по времени с большой частотой, причём амплитуда младшего коэффициента мала — обратно пропорциональна частоте, а правая часть не известна. Исследован вопрос о её восстановлении по заданной в некоторой точке пространства трёхчленной асимптотике решения. При решении задачи используется неклассический алгоритм решения обратных коэффициентных задач с быстро осциллирующими по времени данными.

Ключевые слова: обратная задача, асимптотические методы, телеграфное уравнение, быстро осциллирующие данные.

ASYMPTOTIC PROBLEM OF RESTORING THE HIGH-FREQUENCY RIGHT-HAND SIDE OF THE TELEGRAPH EQUATION

© 2022 E. V. KORABLINA, V. B. LEVENSHTAM

ABSTRACT. In this paper, we consider the Cauchy problem for the telegraph equation. The lower coefficient and the right-hand side of the equation oscillate in time with a high frequency, the amplitude of the lower coefficient is small, namely, is inversely proportional to the frequency, and the right-hand side is unknown. We examine the problem on the recovery of the right-hand side from the three-term asymptotics of the solution given at some point in space. For this purpose, we use a nonclassical algorithm for solving inverse coefficient problems with rapidly oscillating data.

Keywords and phrases: inverse problem, asymptotic methods, telegraph equation, rapidly oscillating data.

AMS Subject Classification: 34D05

1. Введение. В работе рассматривается задача Коши для телеграфного уравнения. Младший коэффициент и правая часть уравнения осциллируют по времени с большой частотой ω , причём амплитуда младшего коэффициента мала — пропорциональна ω^{-1} , а правая часть не известна. (Термин «телеграфное уравнение» в данной работе можно заменить на «волновое уравнение с малым младшим членом».) Исследован вопрос о её восстановлении по заданной в некоторой точке пространства трёхчленной асимптотике решения (на самом деле, непосредственно задаётся принципиально меньше — подробнее об этом сказано в последнем абзаце введения). При решении задачи используется неклассический алгоритм решения обратных коэффициентных задач с быстро осциллирующими по времени данными (см. [1, 2, 10, 13, 14]).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20141).

В настоящее время теория обратных задач (включая задачу о восстановлении источника) разработана с большой полнотой (см., например, [3–6, 11, 15]). Однако задачи с быстро осциллирующими данными в классической теории не рассматривались. Вместе с тем обратные задачи для уравнений такого типа часто встречаются при математическом моделировании физических, химических и иных процессов, протекающих в средах с неизвестными характеристиками, подверженных высокочастотному воздействию электромагнитных, акустических, вибрационных и т. п. полей. Укажем некоторые примеры таких уравнений: уравнение теплопроводности для стержня, через который пропускается высокочастотный электрический ток, вследствие чего в стержне образуются высокочастотные тепловые источники; волновое уравнение, описывающее колебания стержня под действием высокочастотных внешних сил (вспомним знаменитую задачу В. Н. Челомея о высокочастотных сжатиях — растяжениях стержня, стабилизирующих его прямолинейную форму); уравнение переноса вещества в несжимаемой жидкости при наличии высокочастотных источников; уравнения тепловой конвекции жидкости в сосуде при его высокочастотных вибрациях (см. [7–9, 12]) и др.

В работах [1, 2, 10, 13, 14] и в данной работе используется новый подход к постановке и решению обратных коэффициентных высокочастотных задач, лежащий на стыке двух дисциплин — асимптотические методы и обратные задачи. В связи с этим решение обратной задачи разбито там на две части (этапы), относящиеся к соответствующим дисциплинам, и нужно следить за согласованностью (например, в смысле гладкости функций) указанных частей. В этих работах исследуются обратные задачи для эволюционных уравнений с неизвестным быстро осциллирующим источником (в [1, 2, 10, 13, 14] — начально-краевые задачи; в данной работе — задача Коши). Подчеркнём в заключение, что специфика используемого подхода к постановке обратной задачи состоит в следующем: здесь в условии переопределения участвует не точное решение, как в классике, а лишь его частичная асимптотика, длина которой вычисляется на первом этапе решения обратной задачи; при этом необходимая для условия переопределения информация задаётся не для всех коэффициентов этой асимптотики, а лишь для некоторых «базисных» (нужные сведения для остальных коэффициентов однозначно определяются из «базисных»). Так, в данной работе в постановке обратной задачи (в условии переопределения) участвуют коэффициенты трёхчленной асимптотики, вычисленные в фиксированной точке пространства — это функции $q(t)$, $\phi(t)$ и $\psi(t) + \chi(t, \omega t)$, но непосредственно задаются лишь функции $q(t)$ и $\chi(t, \tau)$. Поставленная обратная задача при этом однозначно разрешима.

2. Построение асимптотики. Пусть $T > 0$, $\Pi = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ — полоса, $\Omega = \{(x, t, \tau) : (x, t) \in \Pi, \tau \in [0; \infty)\}$ — бесконечный прямоугольный параллелепипед. На множестве Π рассмотрим задачу Коши с большим параметром ω вида:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + \frac{1}{\omega} a(x, t, \omega t) u(x, t) = f(x, t, \omega t) \\ u(x, t)|_{t=0} = 0 \\ u_t(x, t)|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $f(x, t, \tau)$ и $a(x, t, \tau)$ — вещественные функции, определённые и непрерывные на множестве Ω , 2π — периодические по τ . Символом $F(x, t)$ обозначим среднее функции $f(x, t, \tau)$ по τ :

$$F(x, t) = \langle f(x, t, \tau) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t, \tau) d\tau.$$

(Всюду в работе среднее вычисляется по переменной τ , $\tau = \omega t$). Пусть функция $F(x, t)$ непрерывна на Π вместе с двумя производными по x . Введём в рассмотрение функцию $\phi(x, t, \tau) = f(x, t, \tau) - F(x, t)$ и будем предполагать, что она непрерывна на множестве Ω и вместе с производной по x дифференцируема по (x, t) вплоть до 4-го порядка и все указанные производные непрерывны в Ω . Символом $A(x, t)$ обозначим среднее функции $a(x, t, \tau)$ по τ :

$$A(x, t) = \langle a(x, t, \tau) \rangle$$

и предположим, что функция $A(x, t)$ непрерывна на Π вместе с двумя производными по x . Далее введём в рассмотрение функцию $b(x, t, \tau) = a(x, t, \tau) - A(x, t)$ и предположим, что она три раза непрерывно дифференцируема по совокупности переменных (x, t) , причём все эти производные непрерывны на Ω .

Пусть $u_\omega(x, t)$ — решение задачи (1). Его асимптотику можно строить в виде ряда:

$$u_\omega(x, t) \sim u_0(x, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x, t) + \frac{1}{\omega^2} (u_2(x, t) + v_2(x, t, \omega t)) + \dots + \frac{1}{\omega^k} (u_k(x, t) + v_k(x, t, \omega t)) + \dots, \quad (2)$$

где функции $u_k(x, t)$ и $v_k(x, t, \tau)$ определены и непрерывны в Π и Ω соответственно, а также дважды непрерывно дифференцируемы по x и по (t, τ) , причём $v_k(x, t, \tau) - 2\pi$ — периодические по τ с нулевым средним:

$$\langle v_k(x, t, \tau) \rangle = 0.$$

Для формулировки теоремы определим два типа линейных однозначно разрешимых задач. К первому отнесём задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 s(x, t, \tau)}{\partial \tau^2} = \psi(x, t, \tau), \\ s(x, t, \tau + 2\pi) = s(x, t, \tau), \\ \langle s(x, t, \tau) \rangle = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\psi(x, t, \tau)$ — определённая и непрерывная на множестве Ω функция, 2π — периодическая по $\tau \in [0; \infty)$ с нулевым средним. Как известно, решение задачи (3) имеет вид

$$s(x, t, \tau) = \int_0^\tau \left(\int_0^z \psi(x, t, s) ds - \left\langle \int_0^\tau \psi(x, t, s) ds \right\rangle \right) dz - \left\langle \int_0^\tau \left(\int_0^z \psi(x, t, s) ds - \left\langle \int_0^\tau \psi(x, t, s) ds \right\rangle \right) dz \right\rangle.$$

Ко второму типу отнесём задачу Коши для волнового уравнения второго порядка в полосе $(x, t) \in \Pi$ вида

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = g(x, t), \\ u(x, t)|_{t=0} = a(x), \\ u_t(x, t)|_{t=0} = b(x), \end{cases} \quad (4)$$

где функции $g(x, t)$ и $a(x)$, $b(x)$ определены и непрерывны в полосе Π и на $\mathbb{R}$ соответственно, причём $g(x, t)$ и $b(x)$ — непрерывно дифференцируемы по x и g_x непрерывна в Π , а $a(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема. Решение задачи (4), как известно, выражается формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (a(x-t) + a(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} b(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} g(\xi, s) d\xi.$$

Для любого положительного числа M определим прямоугольник $\Pi_M = \{(x, t) : |x| \leq M, t \in [0; T]\}$, а также введём в рассмотрение $(k+1)$ -членную, $k = 1, 2$, асимптотику решения задачи (1) (см. (2)):

$$u_\omega^k(x, t) = u_0(x, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x, t) + \dots + \frac{1}{\omega^k} (u_k(x, t) + v_k(x, t, \omega t)).$$

Теорема 1. Для каждого $M > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$\|u_\omega(x, t) - u_\omega^2(x, t)\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty,$$

где $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2$, и $v_2(x, t, \tau)$ — решения задач типа (4) и (3) соответственно.

Доказательство. Подставим формально ряд (2) в уравнения (1):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} + \\ & + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_2(x, t, \omega t)}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial^2 v_2(x, t, \omega t)}{\partial t \partial \tau} + \omega^2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, \omega t)}{\partial \tau^2} \right) - \\ & - \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2(x, t, \omega t)}{\partial x^2} \right) + \\ & + \frac{1}{\omega} a(x, t, \omega t) \left[u_0(x, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x, t) + \frac{1}{\omega^2} (u_2(x, t) + v_2(x, t, \omega t)) \right] + \dots = f(x, t, \omega t), \\ & \left[u_0(x, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x, t) + \frac{1}{\omega^2} (u_2(x, t) + v_2(x, t, \omega t)) + \dots \right] \Big|_{t=0} = 0, \\ & \left[\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_2(x, t, \omega t)}{\partial t} + \omega \frac{\partial v_2(x, t, \omega t)}{\partial \tau} \right) + \dots \right] \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned} \right.$$

В каждом из этих трёх последних равенств поочерёдно приравняем коэффициенты при степенях $\omega^0, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \omega^{-3}$, а затем применим к полученным уравнениям операцию усреднения. В результате придём к следующему набору задач:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} = F(x, t), \\ & u_0(x, t)|_{t=0} = 0, \\ & \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0; \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_2(x, t, \tau)}{\partial \tau^2} = \phi(x, t, \tau), \\ & v_2(x, t, \tau + 2\pi) = v_2(x, t, \tau), \\ & \langle v_2(x, t, \tau) \rangle = 0; \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} = -A(x, t)u_0(x, t), \\ & u_1(x, t)|_{t=0} = 0, \\ & \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial v_2(x, t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t, \tau=0} = 0; \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_3(x, t, \tau)}{\partial \tau^2} = -2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, \tau)}{\partial t \partial \tau} - b(x, t, \tau)u_0(x, t), \\ & v_3(x, t, \tau + 2\pi) = v_3(x, t, \tau), \\ & \langle v_3(x, t, \tau) \rangle = 0; \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} = -A(x, t)u_1(x, t), \\ & u_2(x, t)|_{t=0} + v_2(x, t, \tau)|_{t, \tau=0} = 0, \\ & \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial v_2(x, t, \tau)}{\partial t} \Big|_{t, \tau=0} + \frac{\partial v_3(x, t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t, \tau=0} = 0; \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_4(x, t, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 v_2(x, t, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_2(x, t, \tau)}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 v_3(x, t, \tau)}{\partial t \partial \tau} - b(x, t, \tau)u_1(x, t), \\ & v_4(x, t, \tau + 2\pi) = v_4(x, t, \tau), \\ & \langle v_4(x, t, \tau) \rangle = 0; \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial x^2} = -A(x, t)u_2(x, t) - \langle b(x, t, \tau)v_2(x, t, \tau) \rangle, \\ u_3(x, t)|_{t=0} + v_3(x, t, \tau)|_{t, \tau=0} = 0, \\ \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial v_3(x, t, \tau)}{\partial t} \Big|_{t, \tau=0} + \frac{\partial v_4(x, t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t, \tau=0} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Положив

$$\hat{u}_\omega^3(x, t) = u_\omega^3(x, t) + \frac{1}{\omega^4}v_4(x, t, \omega t),$$

придём к задаче

$$\begin{cases} (\hat{u}_\omega^3(x, t))_{tt} - (\hat{u}_\omega^3(x, t))_{xx} + \frac{1}{\omega}a(x, t, \omega t) \hat{u}_\omega^3(x, t) = f(x, t, \omega t) + z(x, t, \omega t), \\ \hat{u}_\omega^3(x, t)|_{t=0} = w(x), \\ (\hat{u}_\omega^3(x, t))_t|_{t=0} = r(x), \end{cases} \quad (12)$$

где функции $z(x, t, \tau)$, $w(x)$ и $r(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} z(x, t, \tau) = & \frac{1}{\omega^3} \left(\frac{\partial^2 v_3(x, t, \tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_3(x, t, \tau)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_4(x, t, \tau)}{\partial t \partial \tau} + \right. \\ & + [b(x, t, \tau) + A(x, t)](u_2(x, t) + v_2(x, t, \tau)) - A(x, t)u_2(x, t) - \langle b(x, t, \tau)v_2(x, t, \tau) \rangle \Big) + \\ & + \frac{1}{\omega^4} \left(\frac{\partial^2 v_4(x, t, \tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_4(x, t, \tau)}{\partial x^2} + [b(x, t, \tau) + A(x, t)](u_3(x, t, \tau) + v_3(x, t, \tau)) \right) + \\ & + \frac{1}{\omega^5} [b(x, t, \tau) + A(x, t)]v_4(x, t, \tau), \\ w(x) = & \frac{1}{\omega^4}v_4(x, 0, 0), \quad r(x) = \frac{1}{\omega^4} \frac{\partial v_4(x, t, \tau)}{\partial t} \Big|_{t, \tau=0}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают следующие асимптотические равенства:

$$z(x, t, \tau) = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (13)$$

равномерно относительно (x, t, τ) , $(x, t, \tau) \in \Omega_M$, где $\Omega_M = \{(x, t, \tau) : (x, t) \in \Pi_M, \tau \in [0; \infty)\}$;

$$w(x) = O(\omega^{-4}), \quad r(x) = O(\omega^{-4}), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (14)$$

равномерно относительно x , $|x| \leq M$.

Согласно неравенству треугольника

$$\|u_\omega(x, t) - \hat{u}_\omega^2(x, t)\|_{C(\Pi_M)} \leq \|u_\omega(x, t) - \hat{u}_\omega^3(x, t)\|_{C(\Pi_M)} + \|\hat{u}_\omega^3(x, t) - \hat{u}_\omega^2(x, t)\|_{C(\Pi_M)}. \quad (15)$$

Оценим каждое из слагаемых правой части (15). Очевидно, что

$$\|\hat{u}_\omega^3(x, t) - \hat{u}_\omega^2(x, t)\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Разность $v_\omega(x, t) \equiv u_\omega(x, t) - \hat{u}_\omega^3(x, t)$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} v_\omega(x, t) = & -\frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} z(\xi, s) d\xi - \\ & - \frac{1}{2} (w(x-t) + w(x+t)) - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} r(\xi) d\xi - \frac{1}{2\omega} \int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} a(\xi, s, \omega s) v_\omega(\xi, s) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда и из (13), (14) следует, что

$$\|v_\omega(x, t)\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Из (15)–(17) при любом фиксированном $M > 0$ получим:

$$\|u_\omega(x, t) - u_\omega^2(x, t)\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Теорема 1 доказана. $\square$

3. Обратная задача. Пусть T , Ω и Π — те же, что в пункте 2. В полосе Π рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + \frac{1}{\omega} a(x, t, \omega t) u(x, t) = f(x, t) r(t, \omega t), \\ u(x, t)|_{t=0} = 0, \\ u_t(x, t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Относительно функций $a(x, t, \tau)$, $f(x, t)$ и $r(t, \tau)$ сделаем следующие предположения. Функция $f(x, t)$ определена на Π и вместе с производной по x непрерывно дифференцируема по (x, t) вплоть до 4-го порядка. Функция $a(x, t, \tau)$ определена и непрерывна на множестве Ω и 2π -периодична по τ . Функция $A(x, t) = \langle a(x, t, \tau) \rangle$ непрерывна на Π вместе с двумя производными по x . Функция $b(x, t, \tau) = a(x, t, \tau) - A(x, t)$ определена на множестве Ω , три раза непрерывно дифференцируема по совокупности переменных (x, t) и все эти производные непрерывны на Ω . Функция $r(t, \tau)$ определена и непрерывна на множестве $Q = \{(t, \tau) : t \in [0, T], \tau \in [0; \infty)\}$ и 2π -периодична по τ . Положим $r(t, \tau) = r_0(t) + r_1(t, \tau)$, где $r_0(t) = \langle r(t, \tau) \rangle$. Пусть функция $r_0(t)$ непрерывна на отрезке $[0; T]$, а $r_1(t, \tau)$ имеет на Q непрерывные производные по переменной t вплоть до четвертого порядка. Функцию $r(t, \tau)$, удовлетворяющую указанным выше условиям, будем называть функцией класса (I). В этом пункте будем считать её неизвестной.

Пусть заданы следующие объекты: точка x_0 , для которой $f(x_0, t) \neq 0$, $t \in [0, T]$; функция $q \in C^2([0; T])$ и удовлетворяющая условию $q(0) = q'(0) = 0$; функция $\chi(t, \tau)$, непрерывная на множестве Q , 2π -периодическая по τ с нулевым средним и дважды непрерывно дифференцируемая по переменной τ , причём $\chi''_{\tau^2}(t, \tau)$ имеет непрерывные на Q производные по переменной t вплоть до четвёртого порядка. Отметим следующий факт, который докажем позже: задача (5) с $F = f r_0$ при дополнительном условии $u_0(x_0, t) = q(t)$ имеет единственное решение $r_0(t)$. Теперь введём в рассмотрение ещё две функции

$$\phi(t) = \tilde{u}_1(x_0, t), \quad \psi(t) = \tilde{u}_2(x_0, t),$$

где $\tilde{u}_1(x, t)$, $\tilde{u}_2(x, t)$ — решения задач (7)–(9), в которых положено

$$v_2(x, t, \tau) = \frac{f(x, t) \chi(t, \tau)}{f(x_0, t)},$$

$$\begin{aligned} v_3(x, t, \tau) = & - \int_0^\tau \left(\int_0^z \left[2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, s)}{\partial t \partial \tau} + b(x, t, s) u_0(x, t) \right] ds + \left\langle \int_0^\tau \left[2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, s)}{\partial t \partial \tau} + b(x, t, s) u_0(x, t) \right] ds \right\rangle \right) dz + \\ & + \left\langle \int_0^\tau \left(\int_0^z \left[2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, s)}{\partial t \partial s} + b(x, t, \tau) u_0(x, t) \right] ds + \left\langle \int_0^\tau \left[2 \frac{\partial^2 v_2(x, t, s)}{\partial t \partial \tau} + b(x, t, s) u_0(x, t) \right] ds \right\rangle \right) dz \right\rangle, \end{aligned}$$

где $u_0(x, t)$ — решение задачи (5) с правой частью $f(x, t) r_0(t)$.

Определение. Задачу о нахождении функции $r(t, \tau)$ класса (I), при которой решение задачи (18) на отрезке (x_0, t) , $t \in [0, T]$, удовлетворяет условию

$$\left\| u_\omega(x_0, t) - q(t) - \frac{1}{\omega} \phi(t) - \frac{1}{\omega^2} (\psi(t) + \chi(t, \omega t)) \right\|_{C([0, T])} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (19)$$

будем называть обратной задачей.

Теорема 2. *Обратная задача имеет единственное решение.*

Доказательство. Согласно теореме 1 решение задачи Коши (18) при известной функции r класса (I) удовлетворяет условию

$$\left\| u_\omega(x, t) - u_0(x, t) - \frac{1}{\omega} u_1(x, t) - \frac{1}{\omega^2} (u_2(x, t) + v_2(x, t, \omega t)) \right\|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \quad \omega \rightarrow \infty,$$

где u_i, v_i — те же, что в п. 2. Отсюда, с учётом (19), следует асимптотическая формула

$$\begin{aligned} u_0(x_0, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x_0, t) + \frac{1}{\omega^2} (u_2(x_0, t) + v_2(x_0, t, \omega t)) = \\ = q(t) + \frac{1}{\omega} \phi(t) + \frac{1}{\omega^2} (\psi(t) + \chi(t, \omega t)) + O(\omega^{-3}). \end{aligned} \quad (20)$$

Приравняв коэффициенты при степенях $\omega^0, \omega^{-1}, \omega^{-2}$ в равенстве (20). Отсюда, используя операцию усреднения по $\tau, \tau = \omega t$, получим равенства:

$$\begin{aligned} (a) \quad u_0(x_0, t) &= q(t), & (b) \quad u_1(x_0, t) &= \phi(t), \\ (c) \quad u_2(x_0, t) &= \psi(t), & (d) \quad v_2(x_0, t, \tau) &= \chi(t, \tau). \end{aligned} \quad (21)$$

В силу п. 2

$$u_0(x_0, t) = \frac{1}{2} \int_0^t r_0(s) \int_{x_0-(t-s)}^{x_0+(t-s)} f(\xi, s) d\xi ds.$$

Отсюда и из (21)(a) следует равенство

$$q(t) = \frac{1}{2} \int_0^t r_0(s) \int_{x_0-(t-s)}^{x_0+(t-s)} f(\xi, s) d\xi ds.$$

Продифференцировав его дважды по t , получим уравнение Вольтерра второго рода

$$q''(t) = r_0(t)f(x_0, t) + \frac{1}{2} \int_0^t r_0(s)[f'_x(x_0 + (t-s), s) - f'_x(x_0 - (t-s), s)]ds,$$

из которого следует существование и единственность решения $r_0 \in C([0, T])$. Теперь продифференцируем (21)(d) по переменной τ дважды. В силу (6) получим

$$f(x_0, t)r_1(t, \tau) = \frac{\partial^2 \chi(t, \tau)}{\partial \tau^2}.$$

Таким образом, функция $r_1(t, \tau)$ также определяется единственным образом. В силу условий, наложенных на функции $q(t)$ и $\chi(t, \tau)$, полученная функция $r(t, \tau) = r_0(t) + r_1(t, \tau)$ принадлежит классу (I).

Нетрудно показать, что при найденной функции $r(t, \tau)$ решение задачи Коши (18) удовлетворяет требуемой асимптотической формуле (19). Теорема 2 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич П. В., Левенштам В. Б. Восстановление быстро осциллирующего свободного члена в многомерном гиперболическом уравнении// Мат. заметки. — 2018. — 104, № 4. — С. 489–497.
2. Бабич П. В., Левенштам В. Б., Прика С. П. Восстановление быстро осциллирующего источника в уравнении теплопроводности по асимптотике решения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 12. — С. 1955–1965.
3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. — М.: Физматлит, 2007.
4. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. — М.: Наука, 1994.
5. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск, 2008.

6. *Лавретьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. — Новосибирск: Наука, 1982.
7. *Левенштам В. Б.* Метод усреднения в задаче конвекции при высокочастотных наклонных вибрациях// Сиб. мат. ж. — 1996. — 37, № 5. — С. 1103–1116.
8. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование задачи о вибрационной конвекции// Диффер. уравн. — 1998. — 34, № 4. — С. 523–532.
9. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2000. — 40, № 9. — С. 1416–1424.
10. *Левенштам В. Б.* Параболические уравнения с большим параметром. Обратные задачи// Мат. заметки. — 2020. — 107, № 3. — С. 412–425.
11. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984.
12. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений// Мат. сб. — 1972. — 87, № 2. — С. 236–253.
13. *Babich P. V., Levenshtam V. B.* Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms// Asympt. Anal. — 2016. — 97. — P. 329–336.
14. *Babich P. V., Levenshtam V. B.* Inverse problem in the multidimensional hyperbolic equation with rapidly oscillating absolute term// in: Operator Theory and Differential Equations (*Kusraev A. G., Totieva Zh. D.*, eds.). — Birkhäuser, 2021. — P. 7–25.
15. *Prilepko A. U., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York: Marsel Dekker, 2000.

Кораблина Элла Викторовна

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва;

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

E-mail: ellakorablina1998@gmail.com

Левенштам Валерий Борисович

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва;

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

E-mail: vlevenshtam@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 37–48
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-37-48

УДК 517.925

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФАХ

© 2022 г. Р. Ч. КУЛАЕВ, А. А. УРТАЕВА

Посвящается памяти Александра Дмитриевича Басова

Аннотация. В работе изучаются свойства решений дифференциальных уравнений четвертого порядка на геометрических графах (положительность, колеблемость, распределение нулей). Доказаны теоремы о перемежаемости нулей решений, разработана теория неосцилляции. Определение неосцилляции для уравнения четвертого порядка на графе базируется на введенном в работе понятии двойной зоны знакопостоянства. Новый подход позволяет обобщить основные принципы теории неосцилляции уравнений второго порядка на графе на уравнения четвертого порядка.

Ключевые слова: осцилляционность, уравнение на графе, уравнение четвертого порядка.

QUALITATIVE PROPERTIES OF SOLUTIONS TO FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS ON GRAPHS

© 2022 R. Ch. KULAEV, A. A. URTAEVA

ABSTRACT. In this paper, we examine properties of solutions to fourth-order differential equations on geometric graphs (positivity, oscillatory behavior, distribution of zeros, etc.). We prove theorems on alternation of zeros of solutions and develop the theory of nonoscillation. The definition of nonoscillation for fourth-order equations on graphs is based on the concept of a double constancy zone introduced in the paper. The new approach allows one to generalize the basic principles of the theory of nonoscillation of second-order equations on a graph to fourth-order equations.

Keywords and phrases: oscillation, graph equation, fourth-order equation.

AMS Subject Classification: 34C10, 34B45

1. Введение. В статье устанавливаются теоремы о перемежаемости нулей решений дифференциальных уравнений четвертого порядка на геометрических графах и развиваются основные факты теории неосцилляции для таких уравнений. В классической теории уравнение n -го порядка называется неосциллирующим на интервале $I \subset \mathbb{R}$, если любое из его нетривиальных решений имеет не более $n - 1$ нулей (с учетом кратности), см. [8, 16]. Вопрос о неосцилляции дифференциального уравнения занимает центральное место в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 7–9, 12, 13, 15]. Это свойство лежит в основе изучения осцилляционных свойств спектра дифференциальных операторов и положительности функции Грина некоторых классов краевых задач. Так, например, для уравнения второго порядка на интервале (a, b) неосцилляция эквивалентна, с одной стороны, существованию решения уравнения, положительного на полуоткрытом интервале $[a, b)$, а с другой стороны, чтобы функция Грина для задачи Дирихле была положительной.

Свойство неосцилляции уравнения второго порядка на графе базируется на понятии S -зоны, являющейся аналогом промежутка между соседними нулями непрерывной на отрезке функции

(см. [9, 12]). Для непрерывной на графе функции под S -зоной понимается любой подграф, на котором функция не имеет нулей и на границе которого она равна нулю (более точное определение будет дано ниже). Уравнение второго порядка на графе называется неосциллирующим, если любое его нетривиальное решение не имеет S -зон на графе. Замена в определении неосцилляции уравнения второго порядка «числа нулей» на «число S -зон» позволила получить для уравнения второго порядка на графе точный аналог теории неосцилляции уравнения на отрезке — аналог теорем сравнения Штурма и критерия неосцилляции Валле-Пуссена. При этом, как и в случае уравнения на отрезке, условия неосцилляции уравнения второго порядка на графе оказались эквивалентны, с одной стороны, положительности решений специальных задач Дирихле, а с другой стороны — положительности функции Грина задачи Дирихле.

Уравнения четвертого порядка на графах изучены гораздо меньше. Практически все исследования в этом направлении относятся к системам стержней: Эйлера—Бернулли на ребрах и различные условия соединения в узлах [3, 14, 18]. Несмотря на кажущуюся простоту формулировок, даже модели физического происхождения оказываются весьма трудными для анализа. Первые попытки развития теории неосцилляции для уравнений четвертого порядка на графах были приняты в [3–6]. В этих работах определение неосцилляции давалось в терминах знакопостоянства специальной фундаментальной системы решений уравнения.

В данной статье мы предлагаем иной подход к определению неосцилляции дифференциальных уравнений четвертого порядка на графах. Для этого вводится понятие двойной S -зоны. На этом пути устанавливаются аналогии классической теоремы о разделении нулей решений дифференциального уравнения четвертого порядка [19, Гл. 3], [17]. Также устанавливается эквивалентность определений неосцилляции в терминах двойной S -зоны и в терминах знаковых свойств специальной фундаментальной системы решений уравнения. Такой подход также позволяет установить связь свойства неосцилляции уравнения четвертого порядка на графе и положительности функции Грина краевой задачи Дирихле.

2. Основные определения и обозначения. Под геометрическим графом Γ в настоящей работе понимается ограниченное связное множество, имеющее структуру сети и вложенное в $\mathbb{R}^2$. Ребро графа — это интервал в $\mathbb{R}^2$, а вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. При этом ребра графа занумерованы и обозначаются через γ_i , а вершины — через a, b, c .

Обозначим через $V(\Gamma)$ множество всех вершин графа, а через $J(\Gamma)$ — множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем внутренними. Вершины графа, не принадлежащие $J(\Gamma)$, будем называть граничными и обозначать их множество через $\partial\Gamma$. Мы считаем, что граф Γ — это объединение множества всех его ребер $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ и множества всех внутренних вершин $J(\Gamma)$. При этом граничные вершины в граф не входят. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i , то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a . Множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине a , обозначим $I(a)$. Множество, получаемое удалением из графа всех его вершин, обозначим через $E(\Gamma)$. Подграфом графа Γ назовем любое связное подмножество графа Γ .

Замечание 1. Всюду в данной работе мы считаем, что $\partial\Gamma \neq \emptyset$.

Под функцией на графе понимается отображение $u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Через $u_i(x)$ будем обозначать сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i . Если a — граничная вершина графа Γ , то под $u(a)$ понимается

$$\lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a} u_i(x), \quad i \in I(a).$$

Через $C[\Gamma]$ будем обозначать пространство функций, равномерно непрерывных на каждом ребре графа Γ . Для таких функций в каждой вершине $a \in J(\Gamma)$ при $i \in I(a)$ существует предел

$$\lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a} u_i(x),$$

который мы также обозначаем через $u_i(a)$. При этом величины $u_k(a)$ и $u_i(a)$ не обязаны совпадать при $k \neq i$ ($k, i \in I(a)$). Выделим в пространстве $C[\Gamma]$ подпространство функций, для которых

$u_k(a) = u(a)$ при любой $a \in J(\Gamma)$ и любом $k \in I(a)$. Множество всех таких функций обозначим через $C(\Gamma)$ и назовем их непрерывными на графе.

Определим понятие производной функции, заданной на графе. Для этого введем в рассмотрение функцию $\mu(x) \in C[\Gamma]$, взаимно однозначно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset \Gamma$ на некоторый интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$ при $l_i > 0$. Функцию $\mu(x)$ будем называть метрической, а величину l_i — длиной ребра γ_i . Для сужения функции $\mu(x)$ на ребро γ_i существует обратное отображение $x(\mu)$ интервала $(0, l_i)$ на ребро γ_i . Метрическая функция определяет на каждом ребре графа ориентацию. Более того, она позволяет ввести для точек, принадлежащих замыканию одного и того же ребра графа, отношение порядка, а также понятие окрестности точки графа. Именно, для $x_1, x_2 \in \bar{\gamma}_i$ будем писать $x_1 < x_2$ (или $x_1 \leq x_2$), если $\mu(x_1) < \mu(x_2)$ (или $\mu(x_1) \leq \mu(x_2)$). Следует отметить, что при такой упорядоченности точки, принадлежащие разным ребрам, не сравнимы. Назовем окрестностью точки $x_0 \in \Gamma \cup \partial\Gamma$ множество всех точек графа Γ , для которых $|\mu(x) - \mu(x_0)| < \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Заметим, что при нашем определении окрестность граничной вершины по сути является полуокрестностью и не содержит саму граничную вершину.

Функцию $u(x) \in C[\Gamma]$ назовем дифференцируемой на графе Γ , если для каждого ребра $\gamma_i \subset \Gamma$ ее сужение $u_i(x)$ дифференцируемо относительно $\mu_i(x)$. При этом полагаем

$$u'_i(x) = du_i(x)/d\mu_i(x) = \lim_{\Delta\mu_i(x) \rightarrow 0} \frac{\Delta u_i(x)}{\Delta \mu_i(x)}, \quad x \in \gamma_i.$$

Аналогично определяются производные высших порядков. В дальнейшем при записи условий связи с производными в вершинах графа нам будет удобно использовать производные по направлению «от вершины», которые мы будем обозначать $u_{i\nu}^{(k)}(a)$ (одномерный аналог производных по внутренней нормали). Отметим, что для четной производной ориентация не важна, и поэтому, для краткости, вместо $u_{i\nu}''(a)$ мы пишем просто $u_i''(a)$. Обозначим через $C^n[\Gamma]$ пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$, производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[\Gamma]$, а через $C^n(\Gamma)$ обозначаем $C^n[\Gamma] \cap C(\Gamma)$.

3. Постановка задачи. Нами будет рассматриваться однородное дифференциальное уравнение

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

заданное на геометрическом графе Γ . При этом под дифференциальным уравнением (1) на графе мы подразумеваем, следуя [12], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах.

В данной работе мы рассматриваем уравнение, порождаемое совокупностью дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')' - r_i(x)u = 0, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \quad (2)$$

с коэффициентами, определяемыми функциями $p(x) \in C^2[\Gamma]$,

$$\inf_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0,$$

$r(x) \in C[\Gamma]$, $r(x) > 0$ на Γ , дополняемой в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$u_i(a) = u_k(a), \quad \beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i, k \in I(a), \quad (3)$$

в которых коэффициенты $\beta(a)$, $\vartheta(a)$ неотрицательны и не равны одновременно нулю¹, и условием с третьими производными

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i(a)u_i''(a))'_{\nu} - r(a)u(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma). \quad (4)$$

Решением дифференциального уравнения (1) будем называть всякую функцию $u(x) \in C^4(\Gamma)$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (2), а в каждой внутренней вершине — условиям (3), (4).

¹Всюду далее в условиях на производные вида (3) мы будем считать выполненными аналогичные условия на коэффициенты, не оговаривая этого.

Если в соотношениях (2), (4) коэффициент $r(x) \equiv 0$, то рассматриваемое уравнение описывает малые упругие деформации плоской стержневой системы, узлы которой образованы в результате упруго-шарнирного соединения двух и более стержней. Такое уравнение изучалось в работах [1, 10, 11, 14]. В указанных работах были рассмотрены вопросы разрешимости некоторых краевых задач для этого уравнения и установлен принцип максимума, на основе которого удалось доказать положительную обратимость краевой задачи и положительность ее функции Грина.

Во всех дальнейших рассмотрениях мы полагаем $r(x) > 0$ на Γ . По этому поводу стоит отметить, что даже в классическом случае — на отрезке — свойства решений уравнения (2) существенно разнятся. Для нас изучение качественных свойств решений уравнения (1) представляет интерес в контексте изучения спектральных (и, в частности, осцилляционных) свойств соответствующего дифференциального оператора, моделирующего колебания стержневой системы. Поэтому первостепенный интерес представляет случай с положительным коэффициентом $r(x)$.

4. Теоремы о перемежаемости нулей.

Лемма 1 (см. [19]). Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение уравнения

$$(p(x)u'')'' - r(x)u = 0, \quad x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad (5)$$

в котором $p(x) \in C^2[a, b]$ и $p(x), r(x) > 0$ на $[a, b]$. Если u, u', u'' и $(pu'')'$ неотрицательны в точке a , то все эти функции положительны на $(a, b]$.

Следствие 1 (см. [19]). Если функция $u(x)$ та же, что и в лемме 1, а значения функций $u, -u', u''$ и $-(pu'')'$ неотрицательны в точке b , то все эти функции положительны на $[a, b)$.

Следствие 2. Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение уравнения (5), удовлетворяющее условию $u(b)(\beta u_i''(b) + \vartheta u_i'(b)) = 0$, где $\beta, \vartheta \geq 0$, $\beta + \vartheta > 0$. Тогда среди значений $u(a), u'(a), u''(a)$ и $(pu'')'(a)$ по крайней мере два отличны от нуля.

Следствие 3. Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение уравнения (5), удовлетворяющее граничным условиям

$$u(a)(\beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_i'(a)) = 0, \quad u(b)(\beta(b)u_i''(b) + \vartheta(b)u_i'(b)) = 0. \quad (6)$$

Тогда в любой точке $x^* \in [a, b]$ среди значений $u(x^*), u'(x^*), u''(x^*), (pu'')'(x^*)$ по крайней мере два имеют различные знаки.

Следствие 4. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (6). Если $u(a) = 0$, то $u'(a)(pu'')'(a) \leq 0$ и $u''(a)(pu'')'(a) \leq 0$, причем одновременное выполнение равенств влечет тождество $u(x) \equiv 0$.

Следствие 5. Пусть уравнение (5) имеет положительное на $[a, b]$ решение, удовлетворяющее условиям (6). Тогда любое решение уравнения (5), удовлетворяющее тем же краевым условиям, имеет не более одного (с учетом кратности) нуля на $[a, b]$.

Лемма 2. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее в каждой граничной вершине графа условию

$$u(a)(\beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_{i\nu}'(a)) = 0, \quad a \in \partial\Gamma. \quad (7)$$

Если в некоторой точке $x^* \in \gamma_i \subset \Gamma$ выполнены равенства $u_i(x^*) = u_i'(x^*) = 0$, то $u_i(x) \equiv 0$.

Доказательство следует из условий (3) для вторых производных, леммы 1 и её следствий.

Лемма 3. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (7). Если функция $u(x)$ равна нулю в вершине $b \in J(\Gamma)$ и знакопостоянна в некоторой окрестности этой вершины. Тогда $u(x) \equiv 0$ на всех ребрах, примыкающих к b .

Доказательство. Пусть $u(x) \geq 0$ в некоторой окрестности вершины $b \in J(\Gamma)$. Тогда, учитывая (3), неравенства $u_{i\nu}'(b) \geq 0, u_i''(b) \geq 0$ для всех $i \in I(b)$ и следствие 4 получаем неравенство

$$(p_i u_i'')'_{\nu}(b) \leq 0 \quad (8)$$

для любого индекса $i \in I(b)$. Поскольку $u(x)$ — решение уравнения (1), то во внутренней вершине b выполнено условие согласования третьих квазипроизводных (4), которое вместе с (8) даёт равенства $(p_i u_i'')(b) = 0$ для всех $i \in I(b)$. Тогда из того же следствия 4 получаем, что $u_i(x) \equiv 0$ для любого индекса $i \in I(b)$. $\square$

Лемма 4. Для любой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ существует такое решение $z_a(x)$ уравнения (1), что $z_a(x) \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \gamma_a$, $z_a(x)$, $z_a'(x)$, $z_a''(x)$ и $(pz_a'')'(x)$ строго положительны на $\gamma_a \cup a$.

Доказательство. Пусть b — внутренняя вершина графа смежная с $a \in \partial\Gamma$. Рассмотрим условие (3) для производных в вершине b , соответствующее граничному ребру $\gamma_a = (a, b)$. Без ограничения общности можно считать, что $\beta(b) > 0$. Пусть $z_a(x)$ — решение уравнения (5) на ребре γ_a , удовлетворяющее начальным условиям

$$z_a(b) = 0, \quad z_{av}'(b) = 1, \quad z_a''(b) = \frac{\vartheta(b)}{\beta(b)}, \quad (pz_a'')'(b) = 0.$$

Доопределяя функцию $z_a(x)$ нулем на $\Gamma \setminus \gamma_a$ и привлекая лемму 1, получим решение уравнения (1) на Γ , обладающее всеми необходимыми свойствами. $\square$

Из лемм 3, 4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. Пусть $u(x)$ — неотрицательное решение уравнения (1), имеющее нуль на внутреннем ребре графа Γ . Тогда

$$u(x) = \sum c_a z_a(x),$$

где сумма берется по всем $a \in \partial\Gamma$, в которых $u'_\nu(a)u''(a) < 0$, а константы $c_a \geq 0$.

Следующая лемма и её следствия являются аналогами свойств уравнения второго порядка на графе [9, теорема 2.2.1, следствия 2.2.2 и 2.2.3].

Лемма 5. Всякое знакопостоянное решение уравнения (1), удовлетворяющее в каждой вершине $a \in \partial\Gamma$ условию (7), либо равно тождественно нулю, либо не имеет нулей в Γ .

Доказательство. Рассмотрим произвольное решение $u(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(x) \geq 0$ на Γ . Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество нулей функции $u(x)$ в Γ . Если $\mathfrak{S} = \emptyset$, то $u(x) > 0$ на Γ и теорема верна.

Предположим, что $\mathfrak{S} \neq \emptyset$. Покажем, что множество $\mathfrak{S}$ является одновременно и открытым и замкнутым в Γ , откуда будет следовать, что $\mathfrak{S} = \Gamma$, т.е. $u(x) \equiv 0$ на Γ . Замкнутость $\mathfrak{S}$ следует из непрерывности функции $u(x)$ на $\bar{\Gamma}$. Покажем, что $\mathfrak{S}$ — открытое множество в Γ . Рассмотрим произвольную точку $\xi \in \mathfrak{S}$. Если $\xi \notin J(\Gamma)$, то из леммы 2 получаем, что $u(x) \equiv 0$ на всем ребре, содержащем ξ . Если же $\xi \in J(\Gamma)$, то из леммы 3 вытекает, что $u(x) \equiv 0$ на всех ребрах, примыкающих к ξ . Стало быть, ξ — внутренняя точка множества $\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{S}$ — открытое множество в Γ . $\square$

Определение 1. Точку экстремума функции мы называем *нетривиальной*, если в любой ее окрестности функция отлична от тождественной постоянной.

Следствие 7. Пусть $u(x)$ — знакопостоянное решение уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$. Тогда для любого решения $v(x)$ того же уравнения, равного нулю на $\partial\Gamma$ и неколлинеарного $u(x)$, отношение $v(x)/u(x)$ не может иметь внутри Γ нетривиальных локальных экстремумов.

Доказательство. Поскольку функции $u(x)$ и $v(x)$ не коллинеарны, из леммы 5 следует $u(x) > 0$, $x \in \Gamma$. Следовательно, отношение $v(x)/u(x)$ определено в каждой точке $x \in \Gamma$. Пусть $x_0 \in \Gamma$ является точкой экстремума отношения $v(x)/u(x)$. Тогда функция $w(x) = u(x_0)v(x) - v(x_0)u(x)$ есть решение уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$ и знакопостоянное в некоторой окрестности точки x_0 . Кроме того, $w(x_0) = 0$. Если $x_0 \in J(\Gamma)$, то из леммы 3 следует, что x_0 — точка тривиального экстремума. Если же $x_0 \in \Gamma \setminus J(\Gamma)$, то $w'(x_0) = 0$ и, как показывает лемма 2, $w(x) \equiv 0$ на всем ребре, которому принадлежит точка x_0 . $\square$

Следствие 8. Пусть $u(x)$ — знакопостоянное решение уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$. Тогда для любого решения $v(x)$ того же уравнения, равного нулю на $\partial\Gamma$ и неколлинеарного $u(x)$, отношение $v(x)/u(x)$ не может иметь внутри Γ точек глобального экстремума.

Доказательство. Если предположить, что $x_0 \in \Gamma$ является точкой глобального экстремума отношения $v(x)/u(x)$, то функция $w(x) = u(x_0)v(x) - v(x_0)u(x)$, будучи нетривиальным решением уравнения (1), знакопостоянна на Γ и равна нулю в точке $x_0 \in \Gamma$ и на $\partial\Gamma$, что противоречит утверждению леммы 5. $\square$

Замечание 2. В формулировке следствий 7 и 8 условие равенства нулю решений уравнения (1) в граничных вершинах (не обязательно во всех) можно заменить на условие

$$\beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$ и имеющее внутри графа S -зону Γ_0 , $\Gamma_0 \subset \subset \Gamma$. Тогда любое знакопостоянное на Γ_0 решение $v(x)$ уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$, коллинеарно $u(x)$ на Γ_0 .

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $u(x) > 0$ и $v(x) \geq 0$ на Γ_0 , причем $v(x) \not\equiv 0$ на Γ_0 . Тогда $v(x) > 0$ на Γ_0 . Действительно, если предположить, что $v(x)$ равна нулю в некоторой точке подграфа Γ_0 , то из лемм 2, 3 будет следовать, что $v(x) \equiv 0$ на Γ_0 . Поскольку функция $v(x)$ удовлетворяет условиям (3) для производных, то из леммы 2 и её следствия 2 следует, что во всех точках из $\partial\Gamma_0$, в которых $v(x) = 0$, хотя бы одно из значений $v'(x)$ или $v''(x)$ не равно нулю. Это свойство позволяет определить функцию $u(x)/v(x)$, непрерывную на $\bar{\Gamma}_0$. Введем обозначение

$$\lambda = \max_{x \in \bar{\Gamma}_0} \{u(x)/v(x)\}$$

и рассмотрим решение $w(x) = \lambda v(x) - u(x)$ уравнения (1) на Γ_0 . Очевидно, что $w(x) \geq 0$ на Γ_0 и существует такая точка $x_0 \in \bar{\Gamma}_0$, что $w(x_0) = w'(x_0) = 0$. Применяя к функции $w(x)$ леммы 2 и 3, легко убедиться, что $w(x) \equiv 0$ на Γ_0 . $\square$

Теорема 2 (о перемежаемости нулей). Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$ и имеющее внутри графа S -зону Γ_0 , $\Gamma_0 \subset \subset \Gamma$. Тогда любое решение $v(x)$ уравнения (1), равное нулю на $\partial\Gamma$ и неколлинеарное $u(x)$ на Γ_0 , меняет знак в Γ_0 .

Теорема 2 является аналогом теоремы о перемежаемости нулей для уравнения (5) на отрезке [17, теорема 3.1]: нули любых двух линейно независимых решений уравнения (5) на отрезке $[a, b]$, равных нулю на концах отрезка, перемежаются в (a, b) .

Замечание 3. В формулировке теоремы 1 условия на границе графа могут быть заменены на условия (9). Такая замена избавляет от необходимости требования компактного вложения S -зоны $\Gamma_0 \subset \subset \Gamma$. Точнее, граничные вершины S -зоны Γ_0 могут содержаться в $\partial\Gamma$, если в этих вершинах условие равенства нулю двух решений заменить на условие (9). В частности, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ условиям (9) и имеющее S -зону Γ_0 , $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Тогда любое знакопостоянное на Γ_0 решение $v(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ тем же условиям (9), коллинеарно $u(x)$ на Γ_0 .

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие 9 (перемежаемость нулей). Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ условиям (9) и имеющее S -зону Γ_0 , $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Тогда любое решение $v(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ тем же условиям (9), и неколлинеарное $u(x)$ на Γ_0 , меняет знак в Γ_0 .

5. Теория неосцилляции уравнения четвертого порядка на графе. Всюду в данной пункте мы будем считать, что $|\partial\Gamma| \geq 2$. Учитывая, что уравнение (1), порождаемое соотношениями (2)–(4), является модельным и описывает деформации стержневой системы с условиями упруго-шарнирного соединения, то такое ограничение является вполне естественным.

Введем в рассмотрение для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ графа Γ по две краевые задачи

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \quad u(a) = 1, \quad u'(a) = 0, \quad u(b) = u'(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma \setminus a, \quad (10)$$

$$Lv = 0, \quad x \in \Gamma, \quad v(a) = 0, \quad v'(a) = 1, \quad v(b) = v'(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma \setminus a. \quad (11)$$

Если задачи разрешимы, то будем обозначать их решения через $u_a(x)$ и $v_a(x)$ соответственно.

Лемма 6. Пусть для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ существует положительное на Γ решение $u_a(x)$ краевой задачи (10). Тогда краевая задача (12) не вырождена.

Доказательство. Предположим, что задача (11) имеет нетривиальное решение $u(x)$ при $f(x) \equiv 0$, $x \in \Gamma$, и рассмотрим функцию

$$v(x) = \sum_{a \in \partial\Gamma} u_a(x).$$

Функция $v(x)$ является положительным решением однородного уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям

$$v(a) = 1, \quad v'(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma.$$

Пусть

$$\lambda = \max_{x \in \bar{\Gamma}} \{u(x)/v(x)\}.$$

Тогда функция $w(x) = u(x) - \lambda v(x)$, будучи нетривиальным решением уравнения (1), знакопостоянна на Γ , удовлетворяет на границе графа условиям $w'(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, и имеет внутри графа Γ точку нулевого экстремума, что противоречит утверждению леммы 5. $\square$

Лемма 7. Пусть для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ существует положительное на Γ решение $u_a(x)$ краевой задачи (10). Тогда для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ краевая задача (11) однозначно разрешима, а соответствующее решение $v_a(x)$ положительно на всем графе Γ и пропорционально $u_a(x)$ на $\Gamma \setminus \gamma_a$.

Доказательство. Однозначная разрешимость задачи (11) следует из леммы 6. Покажем, что для произвольной вершины $a \in \partial\Gamma$ соответствующее решение $v_a(x)$ положительно на Γ . Действительно, если $v_a(x)$ меняет знак на Γ , то существует такая S -зона $\Gamma_0 \subset \Gamma$ функции $v_a(x)$, что $a \notin \partial\Gamma_0$. В этом случае функция

$$u(x) = \sum_{b \in \partial\Gamma \setminus a} u_b(x)$$

положительна на $\bar{\Gamma}_0$ и выполнены равенства

$$v_a(a) = u(a) = 0, \quad v'_a(b) = u'(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma \setminus a,$$

что противоречит утверждению леммы 5. Следовательно, $v_a(x) > 0$ на Γ и остается показать, что решения $v_a(x)$ и $u_a(x)$ пропорциональны на $\Gamma \setminus \gamma_a$.

Обозначим через b внутреннюю вершину графа, смежную с граничной вершиной a и рассмотрим функцию $w(x) = v_a(b)u_a(x) - u_a(b)v_a(x)$. Очевидно, что $w(x) = 0$ во всех граничных вершинах подграфа $\Gamma \setminus \gamma_a$. Если $w(x) \not\equiv 0$ на $\Gamma \setminus \gamma_a$, то $w(x)$ имеет S -зону в $\Gamma \setminus \gamma_a$ (быть может, совпадающую с $\Gamma \setminus \gamma_a$). Но тогда функции $w(x)$ и

$$u(x) = \sum_{c \in \partial\Gamma} u_c(x)$$

удовлетворяют на границе $\Gamma \setminus \gamma_a$ условиям

$$\beta_i(b)u''_i(b) - \vartheta_i(b)u'_{i\nu}(b) = 0, \quad i \in I(b), \quad u'(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus a,$$

и согласно следствию 9 функция $u(x)$ меняет знак на Γ , что противоречит условию $u_c(x) > 0$ на Γ при всех $c \in \partial\Gamma$. Следовательно, $w(x) \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \gamma_a$, а поскольку значения $u_a(b)$ и $v_a(b)$ не равны нулю, то $v_a(x)$ и $u_a(x)$ пропорциональны на $\Gamma \setminus \gamma_a$. $\square$

Замечание 4. Утверждения лемм 6, 7 останутся справедливыми, если в их формулировках поменять местами задачи (10), (11). Доказательство этого факта опирается на те же идеи.

Лемма 8. Пусть $a, b \in \partial\Gamma$ и $u_a(x)$, $u_b(x)$ — решения соответствующих краевых задач (10). Тогда для любой граничной вершины $c \in \partial\Gamma \setminus \{a, b\}$ функции $u_a(x)$, $u_b(x)$ пропорциональны на граничном ребре γ_c .

Доказательство. Если обе рассматриваемые функции нетривиальны на ребре γ_c , то из граничных условий $u(c) = u'(c) = 0$ следует, что их нетривиальная линейная комбинация $w(x)$ имеет в точке c тройной нуль и при этом удовлетворяет условиям (3) для производных во внутренней вершине, смежной с вершиной $c \in \partial\Gamma$. Тогда из следствия 4 получается $w(x) \equiv 0$ на γ_c . $\square$

Определение 2. S -Зоной функции $u(x) \in C(\Gamma)$ будем называть такой подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$, что

- (i) $u(x) \neq 0$ на Γ_0 ;
- (ii) $u(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0$;
- (iii) $u(x)$ имеет нуль на любом подграфе, для которого Γ_0 является собственным подмножеством.

Определение 3. S^2 -Зоной функции $u(x) \in C^1(\Gamma)$ будем называть такой подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$, что

- (i) $u(x) \neq 0$ на Γ_0 ;
- (ii) существует такой подграф Γ_1 , что $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma$ и $u(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0 \cup \partial\Gamma_1$;
- (iii) $u'(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0 \cap \partial\Gamma_1$.

Определение 4. Дифференциальное уравнение (1) и соответствующий дифференциальный оператор L , порождаемый соотношениями (2)–(4), назовем *неосциллирующими* на графе Γ , если любое нетривиальное решение этого уравнения не может иметь S^2 -зоны в Γ .

Заметим, что данное определение неосциллирующего дифференциального уравнения на графе является полным аналогом неосцилляции в одномерном случае. Отсутствие S^2 -зон у решения уравнения на $(a, b) \subset \mathbb{R}$ как раз означает, что решение на может иметь более трех нулей в (a, b) .

Отметим также, что в определении 4 не допускается, чтобы сам граф Γ был S^2 -зоной, когда однородное уравнение (1) имеет решение $u(x) \neq 0$ на Γ , удовлетворяющее граничным условиям $u(a) = u'(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$. Кроме того, из определения 4 следует, что для неосциллирующего на Γ оператора краевая задача

$$Lu = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad u(a) = u'(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma, \quad (12)$$

невырожденна для любой правой части $f(x) \in C[\Gamma]$.

Теорема 4. Следующие свойства эквивалентны:

- (a) каждая из задач (10) имеет положительное на Γ решение;
- (b) существует такое решение уравнения (1) $w(x)$, что $w'(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, $\inf_{x \in \bar{\Gamma}} w(x) > 0$;
- (c) существует положительное на Γ решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям $u'(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, и не равное нулю хотя бы в одной вершине из $\partial\Gamma$;
- (d) каждая из задач (11) имеет положительное на Γ решение;
- (e) уравнение (1) не осциллирует на Γ .

Доказательство. Импликации (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) очевидны. Соотношение (c) $\Rightarrow$ (a) тоже почти очевидно. Действительно, из (c), теоремы 3 и следствия 9 вытекает невырожденность задачи (12). Следовательно, каждая из задач (10) однозначно разрешима. Положительность соответствующего решения опять же следует из (c) и следствия 9.

Эквивалентность (a) $\Leftrightarrow$ (d) вытекает из леммы 7 и замечания 4. Импликация (c) $\Rightarrow$ (d) следует из определения неосциллирующего уравнения. Действительно, если для некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$

соответствующая функция $v_a(x)$ меняет знак на Γ , то любая ее S -зона, в которой $v_a(x) < 0$, является S^2 -зоной.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается установить импликацию (d) $\Rightarrow$ (e). Доказательство этого факта проведем в предположении, что импликация неверна. Сначала мы построим решение уравнения (1), обладающее следующим свойством на Γ .

Свойство (А). Решение имеет S -зону на некотором подграфе $\Gamma^* \subset \Gamma$, удовлетворяя при этом в каждой вершине $b \in \partial\Gamma^*$ хотя бы одному из условий $u(b) = 0$ или $\beta(b)u''(b) - \vartheta(b)u'_\nu(b) = 0$ с коэффициентами $\beta(b), \vartheta(b) \geq 0, \beta(b) + \vartheta(b) \neq 0$.

Затем построим решение уравнения (1), положительное на Γ и удовлетворяющее в каждой вершине $b \in \partial\Gamma^*$ тому же условию, что и первое. Далее, привлекая теоремы 2 и 3 (см. также замечание 3), придем к противоречию.

Итак, предположим, что при выполнении условия (d) существует решение $u(x)$, имеющее в Γ S^2 -зону, которую обозначим через Γ_0 . Согласно лемме 6 задача (12) невырождена. Поэтому $\Gamma_0 \neq \Gamma$. Если функция $u(x)$ обладает свойством (А) на Γ , то нужное нам решение уравнения (1) построено.

Рассмотрим ситуацию, когда $u(x)$ не обладает необходимым нам свойством. Такая ситуация возникает в двух случаях:

- (1) $\Gamma_0 \subset \gamma_a$ для некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$ и $u(a)u'(a) \neq 0$;
- (2) найдется такое граничное ребро $\gamma_a = (a, a_1)$, $a \in \partial\Gamma$, $a_1 \in J(\Gamma)$, что $a_1 \in \Gamma_0$ и $u(a)u'(a) \neq 0$.

Рассмотрим первый случай. Введем в рассмотрение решение $z_a(x)$ уравнения (1), определенное в лемме 4. Из определения S^2 -зоны Γ_0 следует, что функция $u(x)$ имеет на ребре γ_a не менее трех нулей. Сужение функции $w(x) = u(x) - u(a)z_a(a)/z_a(x)$ равно нулю в точке a , удовлетворяет условию $\beta(a_1)u''(a_1) - \vartheta(a_1)u'_\nu(a_1) = 0$ и имеет S -зону внутри $\Gamma_0 \subset \gamma_a$. Свойства на границе ребра γ_a очевидны, а вот наличие S -зоны внутри γ_a требует пояснений. Если, например, $w(x) < 0$ на γ_a , то существует такое число $\mu < u(a)/z_a(a)$, что функция $y(x) = u(x) - \mu z_a(x)$ имеет двойной нуль, скажем, $x_0 \in \gamma_a$, и еще хотя бы один нуль x_1 между a и x_0 . Тогда $y(x_1) = y(x_0) = y'(x_0) = 0$ и $\beta(a_1)y''(a_1) - \vartheta(a_1)y'_\nu(a_1) = 0$, что противоречит следствию 5. Следовательно, $w(x)$ нужное нам решение с двумя нулями в Γ_0 , а $\Gamma^* = \gamma_a$.

Перейдем к рассмотрению второго случая. Из определения S^2 -зоны Γ_0 следует, что функция $u(x)$ имеет на полуинтервале $[a, a_1)$ по крайней мере два нуля x_1, x_2 (быть может, совпадающие). При этом $u(x) \neq 0$ на $[a, x_1)$, $x_2 \in \partial\Gamma_0$, а значит, $u(x) \neq 0$ на $(x_2, a_1]$. Если $u(x)$ имеет третий нуль на γ_a , то получается случай, рассмотренный выше. Поэтому будем считать, что других нулей на γ_a функция $u(x)$ не имеет. Как и выше, рассмотрим решение $z_a(x)$ уравнения (1), определенное в лемме 4 и построим новое решение $w(x) = u(x) - u(a)z_a(a)/z_a(x)$ уравнения (1). Функция $w(x)$ равна нулю в вершине a , имеет нуль $x^* \in (x_2, a_1] \subset \gamma_a$ и совпадает с $u(x)$ на $\Gamma \setminus \gamma_a$. Стало быть, $w(x)$ имеет S^2 -зону в Γ_0 и $w(a) = 0$. Поэтому мы можем начать наши рассуждения с начала, но применительно к решению $w(x)$. Поскольку граф Γ имеет конечное число ребер, то через конечное число итераций мы построим решение, для которого выполнено свойство (А).

Пусть $u(x)$ — найденное нами решение и Γ^* — соответствующий подграф, содержащий S^2 -зону Γ_0 . Представим границу подграфа Γ^* в виде дизъюнктного объединения $\partial\Gamma^* = \partial\Gamma_1^* \sqcup \partial\Gamma_2^*$, в котором $\partial\Gamma_1^*$ — множество простых нулей функции $u(x)$, принадлежащих $\partial\Gamma \cap \partial\Gamma^*$. Рассмотрим функцию

$$v(x) = \sum_{a \in \partial\Gamma \cap \partial\Gamma_1^*} v_a(x) + \sum_{a \in \partial\Gamma \cap \partial\Gamma_2^*} u_a(x) + \sum_{a \in \partial\Gamma \setminus \partial\Gamma^*} u_a(x).$$

В каждой вершине $b \in \partial\Gamma^* \cap J(\Gamma)$ обе функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют одному и тому же условию

$$\beta_i(b)u''_i(b) - \vartheta_i(b)u'_{i\nu}(b) = 0, \quad \gamma_i \subset \Gamma^*, \quad i \in I(b),$$

а в точках $\partial\Gamma^* \cap \partial\Gamma$ обе функции либо обращаются в нуль, либо имеют нулевую производную. Поэтому к сужениям этих функций на Γ^* применимы теоремы 2 и 3 (см. также замечание 3). Согласно этим утверждениям $v(x)$ меняет знак в S^2 -зоне Γ_0 функции $u(x)$. Но этого не может быть ввиду (d) $\Rightarrow$ (a). Противоречие. Теорема доказана. $\square$

Как показывают выкладки в доказательстве теоремы 4, имеет место следующее утверждение.

Следствие 10. Пусть уравнение (1) осциллирует на Γ и Γ_0 — это S^2 -зона некоторого его решения. Тогда существует решение уравнения (1), имеющее S^2 -зону $\tilde{\Gamma}_0 \subset \Gamma_0$, для которого на Γ выполнено свойство (A).

Следствие 11. Решения краевых задач (10) либо одновременно положительны на Γ , либо одновременно знакопеременны.

Следствие 12. Соответствие между решениями неосциллирующего дифференциального уравнения (1) и упорядоченными парами значений решений и их первой производной на границе является взаимно однозначным.

Доказательство. Для неосциллирующего оператора L краевые задачи (10) и (11) невырожденные. Поэтому всякое решение уравнения $Lw = 0$ единственным образом представляется в виде

$$w(x) = \sum_{a \in \partial\Gamma} w(a)u_a(x) + \sum_{a \in \partial\Gamma} w'_\nu(a)v_a(x). \quad \square$$

6. Положительность функции Грина краевой задачи Дирихле. В данном пункте мы рассматриваем свойства краевой задачи (12). Устанавливается связь между неосцилляцией дифференциального оператора L , порождаемого соотношениями (2)–(4) с краевыми условиями (12), и положительностью его функции Грина.

Определение 5. Функцией Грина невырожденной краевой задачи (12) назовем такую функцию $G(x, s): \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, что решение задачи может быть представлено в виде

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, s)f(s)ds + \sum_{a \in J(\Gamma)} f(a)G(x, a).$$

Из результатов монографии [12, Гл. 6] следует, что функция Грина существует и обладает следующими свойствами:

- (I) функция $G(x, s)$ вместе со своими производными по x до четвертого порядка непрерывна по совокупности переменных вплоть до границы на каждом из прямоугольников $\gamma_i \times \gamma_j$ ($i \neq j$) и на каждом из треугольников, на которые диагональю $x = s$ разбивается квадрат $\gamma_i \times \gamma_i$;
- (II) при каждом фиксированном s , являющемся внутренней точкой некоторого ребра $\gamma \in \Gamma$, функция $g_s(x) = G(x, s)$ является решением однородного уравнения (1) на $\Gamma \setminus s$;
- (III) при каждом фиксированном s , являющемся внутренней точкой некоторого ребра $\gamma \in \Gamma$, функция $g_s(x)$ удовлетворяет однородным краевым условиям

$$u(a) = u'(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma; \quad (13)$$

- (IV) на диагонали $x = s$, $x \in \Gamma \setminus J(\Gamma)$, функция $G(x, s)$ удовлетворяет условиям непрерывности вместе со своими производными

$$\frac{\partial G(x, s)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial x^2}$$

и условию скачка третьей производной по x

$$\frac{\partial^3 G(s+0, s)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 G(s-0, s)}{\partial x^3} = \frac{1}{p(s)}, \quad (14)$$

где ориентация предельного перехода $s \pm 0$ и направление дифференцирования определяются заданной на графе метрической функцией;

- (V) при $s = a \in J(\Gamma)$ функция $g_a(x)$ является решением однородного уравнения (1) на $\Gamma \setminus a$, удовлетворяющим краевым условиям (13), а в вершине a удовлетворяет соотношениям (3) и условию

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i g''_{ai})'_\nu(a) - r(a)g_a(a) = 1; \quad (15)$$

(VI) функция $G(x, s)$ условиями (I)–(IV) определяется однозначно.

В наших дальнейших рассуждениях нам потребуются формулы, описывающие поведение функции Грина $G(x, s)$ задачи (12) в тех случаях, когда переменная $s \in \Gamma$ принимает значения близкие к граничным вершинам (см. [3]).

Пусть $a \in \partial\Gamma$. Тогда при $s \in \gamma_a$ и $x \in \Gamma \setminus (s, a)$ для функции Грина краевой задачи (12) имеет место следующее представление (см. [3]):

$$G(x, s) = u_a(x)\psi_1(s) + v_a(x)\psi_2(s), \quad (16)$$

где $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ непрерывны на γ_a , а при $\gamma_a \ni s \rightarrow a$ имеют место соотношения

$$\psi_2(s) \rightarrow +0, \quad \psi_1(s) = o(\psi_2(s)). \quad (17)$$

Теорема 5. *Уравнение (1) не осциллирует на Γ тогда и только тогда, когда функция Грина краевой задачи (12) положительна на $\Gamma \times \Gamma$.*

Доказательство. Необходимость. Из неосцилляции уравнения (1) следует невырожденность краевой задачи (12), а следовательно, и существование её функции Грина $G(x, s)$. Уравнение (1) не осциллирует. Поэтому $u_a(x) > 0$, $v_a(x) > 0$ на Γ для всех $a \in \partial\Gamma$. Из следствия 2 получаем соотношения

$$u_a(b) = u'_a(b) = v_a(b) = v'_a(b) = 0, \quad u''_a(b) \neq 0, \quad v''_a(b) \neq 0, \quad b \in \partial\Gamma \setminus a.$$

Следовательно, с учетом (17) формулу (16) можно переписать в виде

$$G(x, s) = v_a(x)\psi_2(s) + o(v_a(x)\psi_2(s)) \text{ при } \gamma_a \ni s \rightarrow a. \quad (18)$$

Из формулы (18) следует, что функция Грина $G(x, s)$ положительна в некоторой окрестности границы множества $\Gamma \times \Gamma$. Из свойств (I)–(V) следует, что функция Грина непрерывна на $\Gamma \times \Gamma$. Поэтому, если предположить, что $G(x, s)$ не строго положительна всюду на $\Gamma \times \Gamma$, то найдется такая точка $(x_0, s_0) \in \Gamma \times \Gamma$, что $g_{s_0}(x) \geq 0$ на Γ и $g_{s_0}(x_0) = 0$. Поскольку $g_{s_0}(x)$ — решение уравнения (1) на $\Gamma \setminus s_0$, удовлетворяющее граничным условиям (13) и положительное вблизи границы $\partial\Gamma$, то из леммы 2 и следствия 6 следует, что найдется такое ребро $\gamma_{i_0} \subset \Gamma$, что $x_0 \in \gamma_{i_0}$, $s_0 \in \bar{\gamma}_{i_0}$ и $g_{s_0}(x) > 0$ на $\Gamma \setminus \gamma_{i_0}$. Более того, $x_0 \neq s_0$. Действительно, для $s_0 \in J(\Gamma)$, привлекая свойство (V) функции Грина и рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве леммы 3, получим $(p_i g''_{s_0 i})'_\nu(s_0) \leq 0$ для любого индекса $i \in I(s_0)$, что противоречит (15). Аналогично, с привлечением свойства (IV), рассматривается случай $s_0 \in \Gamma \setminus J(\Gamma)$.

Рассмотрим функцию $g_{s_0}(x)$ на ребре $\gamma_{i_0} = (a, b)$. Для упрощения записи будем считать, что ребро γ_{i_0} ориентированно от a к b . Функция $g_{s_0}(x)$ является нетривиальным решением уравнения (5) на $\gamma_{i_0} \setminus s_0$, удовлетворяет краевым условиям вида (6) и имеет точку нулевого минимума $x_0 \in (a, s_0)$. Из леммы 2 следует, что $s_0 \neq b$, а из леммы 1 и её следствий следует, что

$$g_{s_0}(s_0) > 0, \quad g'_{s_0}(s_0) > 0, \quad g''_{s_0}(s_0) > 0, \quad (p g''_{s_0})'(s_0 - 0) > 0.$$

Привлекая сюда свойство (IV) функции Грина и краевое условие в вершине b , получим неравенство $(p g''_{s_0})'(s_0 + 0) < 0$. Следовательно,

$$(p g''_{s_0})'(s_0 + 0) - (p g''_{s_0})'(s_0 - 0) = p(s_0)(g'''_{s_0}(s_0 + 0) - g'''_{s_0}(s_0 - 0)) < 0,$$

что противоречит (14).

Достаточность следует из формул (16)–(14) и теоремы 4. $\square$

Следствие 13. *Пусть уравнение (1) не осциллирует на Γ . Тогда любое нетривиальное решение неравенства $Lu \geq 0$, удовлетворяющее на границе $\partial\Gamma$ условиям*

$$u(a) \geq 0, \quad u'_\nu(a) \geq 0, \quad a \in \partial\Gamma, \quad (19)$$

строго положительно на Γ .

Доказательство. Пусть $w(x)$ — решение неравенства и $Lw = f(x) \geq 0$. Тогда из определения 5 и следствия 12 получаем однозначное представление

$$w(x) = \int_{\Gamma} G(x, s) f(s) ds + \sum_{a \in J(\Gamma)} f(a) G(x, a) + \sum_{a \in \partial \Gamma} w(a) u_a(x) + \sum_{a \in \partial \Gamma} w'(a) v_a(x). \quad \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровских А. В., Мустафокулов Р., Лазарев К. П., Покорный Ю. В. Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети // Докл. РАН. — 1995. — 345, № 6. — С. 730–732.
2. Дерр В. Я. Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2009. — № 1. — С. 46–89.
3. Кулаев Р. Ч. Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина для уравнения четвертого порядка на графе // Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 3. — С. 302–316.
4. Кулаев Р. Ч. О функции Грина краевой задачи на графе-пучке // Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 2. — С. 56–66.
5. Кулаев Р. Ч. Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе // Мат. сб. — 2015. — 206, № 12. — С. 79–118.
6. Кулаев Р. Ч. О свойстве неосцилляции уравнения на графе // Сиб. мат. ж. — 2016. — 57, № 1. — С. 85–97.
7. Кулаев Р. Ч. Принцип сравнения для функции Грина краевой задачи четвертого порядка на графе // Уфим. мат. ж. — 2015. — 7, № 4. — С. 99–108.
8. Левин А. Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // Усп. мат. наук. * — 1969. — 24, № 2 (146). — С. 43–96.
9. Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. — М.: Физматлит, 2009.
10. Покорный Ю. В., Мустафокулов Р. О позитивной обратимости некоторых краевых задач для уравнения четвертого порядка // Диффер. уравн. — 1997. — 33, № 10. — С. 1358–1365.
11. Покорный Ю. В., Мустафокулов Р. О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе // Изв. вузов. Мат. — 1999. — № 2. — С. 75–82.
12. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2007.
13. M. Bohner, O. Došlý Disconjugacy and transformation for symplectic systems // Rocky Mount. J. Math. — 1997. — 27, № 3. — P. 707–743.
14. Borovskikh A. V., Lazarev K. P. Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. Math. Sci. — 2004. — 119, № 6. — P. 719–738.
15. Cabada A., Saavedra L., Disconjugacy characterization by means of spectral $(k, n - k)$ problems // Appl. Math. Lett. — 2016. — 52. — P. 21–29.
16. Elias U. Oscillation Theory of Two-Term Differential Equations. — Springer-Verlag, 1997.
17. Leighton W., Nehari Z. On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order // Trans. Am. Math. Soc. — 1958. — 89. — P. 325–377.
18. Mercier D., Régnier V. Control of a network of Euler–Bernoulli beams // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 342, № 2. — P. 874–894.
19. Swanson C. A. Comparison Theorems and Oscillation Theory of Linear Differential Equations. — New York–London: Academic Press, 1968.

Кулаев Руслан Черменович

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ

E-mail: kulaevrch@mail.ru

Уртаева Александра Артуровна

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ

E-mail: urtaeva-96@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 49–62
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-49-62

УДК 517.984, 517.927

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ЗАМОРОЖЕННЫМ АРГУМЕНТОМ НА ВРЕМЕННОЙ ШКАЛЕ

© 2022 г. М. А. КУЗНЕЦОВА

Аннотация. В статье изучается задача восстановления потенциала в уравнении Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом на временной шкале по спектру краевой задачи Дирихле. Рассматривается случай временной шкалы, состоящей из двух отрезков, и замороженного аргумента в конце первого отрезка. Получена теорема единственности и алгоритм решения обратной задачи вместе с необходимыми и достаточными условиями ее разрешимости. Рассмотренный случай существенно отличается от случая классического оператора Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, замороженный аргумент, оператор Штурма—Лиувилля, временная шкала, замкнутое множество.

INVERSE PROBLEM FOR THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH A FROZEN ARGUMENT ON THE TIME SCALE

© 2022 М. А. KUZNETSOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider the problem of constructing the potential of the Sturm–Liouville equation with a frozen argument on the time scale by the spectrum of the Dirichlet boundary-value problem, where the time scale consists of two segments and the argument is frozen at the end of the first segment. We obtain the uniqueness theorem and construct an algorithm for solving the inverse problem together with necessary and sufficient conditions for its solvability. The case considered substantially differs from the case of the classical Sturm–Liouville operator with a frozen argument.

Keywords and phrases: inverse spectral problem, frozen argument, Sturm–Liouville operator, time scale, closed set.

AMS Subject Classification: 34K29, 34B24, 34N05

1. Введение. Целью статьи является исследование обратной спектральной задачи для оператора Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом на временной шкале. Под временными шкалами обычно подразумеваются произвольные замкнутые множества $T \subseteq \mathbb{R}$. Дифференциальные операторы на временных шкалах обобщают классические дифференциальные и разностные операторы, поскольку содержат Δ -производную (см. [9, 10, 17]).

В последнее время возник интерес к обратным спектральным задачам для дифференциальных операторов на временных шкалах (см. [1, 6, 19, 20, 23, 24, 26]). Подобные задачи заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Наиболее полные результаты в этом направлении получены для классического оператора Штурма—Лиувилля на отрезке (см. [2, 3, 15]). Постановка и изучение обратных задач существенно зависят от структуры рассматриваемой временной шкалы, что приводит к необходимости тех или иных ограничений. Наиболее

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00102).

общий вид временных шкал, на которых к настоящему моменту получено решение обратной задачи, представляет собой объединение конечного числа отрезков и изолированных точек (см. [1, 19]).

Обратные задачи для оператора Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом на отрезке изучались в ряде работ [7, 11, 13, 14, 18, 21, 25]. Данный оператор определяется дифференциальным выражением Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом

$$\ell y(x) := -y''(x) + q(x)y(\gamma), \quad 0 < x < r,$$

где $\gamma \in [0, r]$ фиксировано. В отличие от классического оператора Штурма—Лиувилля, операторы с замороженным аргументом являются нелокальными. По этой причине методы классической теории обратных задач [2, 3, 15] для них неприменимы. В то же время, нелокальные операторы имеют приложения во многих областях математики и естествознания (см. [4, 5, 16]).

Задача восстановления потенциала q по спектру краевой задачи

$$\ell y = \lambda y, \quad y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(r) = 0, \quad \alpha, \beta \in \{0, 1\},$$

исследовалась в работах [11, 13, 14, 25]. В [13] изучался случай произвольного $\gamma/r \in \mathbb{Q}$, и было дано полное описание так называемых невырожденных и вырожденных случаев в зависимости от значений тройки параметров γ/r , α и β . В частности, краевые условия Дирихле ($\alpha = \beta = 0$) соответствуют вырожденному случаю при любых $\gamma/r \in \mathbb{Q}$. В невырожденном случае потенциал однозначно восстанавливается по спектру, а в вырожденном для единственности восстановления требуется дополнительная информация (например, задание q на части интервала). Также были получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. В невырожденном случае последние включают лишь асимптотику спектра

$$\lambda_n = \frac{\pi^2}{r^2} \left(n - \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\kappa_n}{n} \right)^2, \quad n \geq 1, \quad \{\kappa_n\}_{n \geq 1} \in l_2.$$

В вырожденном случае добавляется условие совпадения некоторой бесконечной части собственных значений с собственными значениями соответствующего оператора с нулевым потенциалом. Для иррационального случая $\gamma/r \notin \mathbb{Q}$ в работе [25] была доказана единственность восстановления потенциала по спектру при любых α и β . Что касается обратных спектральных задач для операторов с замороженным аргументом на временных шкалах, ранее они не рассматривались.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для уравнения Штурма—Лиувилля с замороженным аргументом на временной шкале T специального вида:

$$-y^{\Delta\Delta}(t) + y(\gamma)q(t) = \lambda y(\sigma(t)), \quad t \in T, \quad (1)$$

$$y(0) = y(b) = 0, \quad (2)$$

где

$$T = [0, \gamma] \cup [a, b], \quad d := a - \gamma, \quad l := b - a. \quad (3)$$

Структура (3) является одной из простейших, которые позволяют выявить существенные отличия от случая отрезка.

В работе исследуется восстановление потенциала $q \in C(T)$ по спектру краевой задачи (1)—(2). Установлены условия на величины d , γ и l , при которых выполняется теорема единственности решения обратной задачи (теорема 1). В частности, единственность восстановления будет иметь место, если $l = k\gamma$, $k \in \mathbb{N}$. Здесь наблюдается отличие от случая уравнения с замороженным аргументом на отрезке, т.е. при $\gamma = a$ и $r = a + l$, в котором потенциал не восстанавливается однозначно по спектру краевой задачи Дирихле ни при каком рациональном k . Также получены алгоритм восстановления потенциала (алгоритм 1), необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи (теорема 5). Особый вид характеристической функции (18) значительно усложняет исследование в сравнении со случаем отрезка. В частности, характеристика спектра не исчерпывается одной лишь асимптотикой, как в невырожденном случае оператора на отрезке.

2. Постановка обратной задачи. Теорема единственности. Рассмотрим уравнение (1) на временной шкале (3) с непрерывным потенциалом $q \in C(T)$. Пусть $C_\Delta^n(T)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначает класс функций, имеющих n -ю Δ -производную, непрерывную на T . Определим решения как функции $y \in C_\Delta^2(T)$, для которых выполняется тождество (1). Те λ , при которых существуют ненулевые решения y , удовлетворяющие условиям Дирихле (2), называются собственными значениями.

Так как временная шкала T имеет вид (3), для любой $f \in C_\Delta^1(T)$ имеем (см. [20, 26])

$$f^\Delta(t) = \begin{cases} \frac{f(a) - f(\gamma)}{d}, & t = \gamma, \\ f'(t), & t \in [0, \gamma] \cup [a, b], \end{cases} \quad (4)$$

где классическая производная $f'(t)$ существует, а равенство $f'(\gamma) = f^\Delta(\gamma)$ выполнено в силу непрерывности. Применяя данную формулу к решению y уравнения (1) и его Δ -производной, получим, что уравнение (1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} -y''(x_1) + q(x_1)y(\gamma) = \lambda y(x_1), & x_1 \in [0, \gamma]; \\ -y''(x_2) + q(x_2)y(\gamma) = \lambda y(x_2), & x_2 \in [a, b], \end{cases} \quad (5)$$

с условиями скачков

$$\begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ d(q(\gamma) - \lambda) & 1 - \lambda d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(\gamma) \\ y'(\gamma) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Также из (4) получается, что условие $y \in C_\Delta^2(T)$ эквивалентно условию $y \in C^2[0, \gamma] \cap C^2[a, b]$, где $C^2(B)$ — класс дважды непрерывно дифференцируемых функций на B в обычном смысле.

Введем решения $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ первого уравнения в (5) при начальных условиях

$$S(\gamma, \lambda) = 0, \quad S'(\gamma, \lambda) = 1; \quad C(\gamma, \lambda) = 1, \quad C'(\gamma, \lambda) = 0.$$

Для этих функций известны следующие формулы (см. [11]):

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho(x - \gamma)}{\rho}, \quad C(x, \lambda) = \cos \rho(x - \gamma) + \int_{\gamma}^x \frac{\sin \rho(x - t)}{\rho} q(t) dt, \quad x \in [0, \gamma]; \quad (7)$$

здесь и далее $\lambda = \rho^2$. Любое решение системы (5)–(6) на $[0, \gamma]$ может быть представлено в виде

$$y(x) = AS(x, \lambda) + BC(x, \lambda). \quad (8)$$

С учетом (6) при $x \in [a, b]$ имеем

$$\begin{aligned} y(x) = & (y(\gamma) + dy'(\gamma)) \cos \rho(x - a) + \\ & + ((1 - d^2 \lambda)y'(\gamma) - d\lambda y(\gamma) + dy(\gamma)q(\gamma)) \frac{\sin \rho(x - a)}{\rho} + B \int_a^x \frac{\sin \rho(x - t)}{\rho} q(t) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив представления (8) и (9) в краевые условия (2), получим следующую систему линейных уравнений относительно A и B :

$$\begin{cases} AS(0, \lambda) + BC(0, \lambda) = 0, \\ A \left(d \cos \rho l + [1 - d^2 \lambda] \frac{\sin \rho l}{\rho} \right) + B \left(\cos \rho l + [dq(\gamma) - d\lambda] \frac{\sin \rho l}{\rho} + \int_a^b \frac{\sin \rho(b - t)}{\rho} q(t) dt \right) = 0. \end{cases}$$

Число λ является собственным значением краевой задачи (1)–(2) тогда и только тогда, когда существует ненулевое решение этой системы. Определитель системы $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией краевой задачи (1)–(2). Он является целой функцией порядка $1/2$. Спектром краевой задачи (1)–(2) называется последовательность нулей $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ характеристической функции (с учетом кратности).

Используя формулы (7), получим

$$\Delta(\lambda) = -c_1(\lambda) \frac{\sin \rho \gamma}{\rho} - c_2(\lambda) \cos \rho \gamma - \frac{\sin \rho \gamma}{\rho} \int_a^b \frac{\sin \rho(b-t)}{\rho} q(t) dt - c_2(\lambda) \int_0^\gamma \frac{\sin \rho t}{\rho} q(t) dt - dq(\gamma) \frac{\sin^2 \rho \gamma}{\rho^2}, \quad (10)$$

где

$$c_1(\lambda) := \cos \rho l - d \rho \sin \rho l, \quad c_2(\lambda) := d \cos \rho l + \frac{1 - d^2 \lambda}{\rho} \sin \rho l.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Из положительных нулей функции $c_2(z^2)$ можно составить такую последовательность $\{z_n\}_{n \geq 1}$, что системы $\{\sin z_n t\}_{n \geq 1}$ и $\{1\} \cup \{\cos z_n t\}_{n \geq 1}$ являются базисами Рисса в $L_2(0, l)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$g(z) := \frac{dz}{d^2 z^2 - 1} - \operatorname{tg} z l = 0.$$

Если z — ненулевой корень данного уравнения, то число z является нулем $c_2(z^2)$. Заметим, что функция $g(z)$ непрерывна и монотонна на любом интервале, не содержащем точек $\pm 1/d, \pm \pi(n + 1/2)/l, n \in \mathbb{Z}$. С помощью теоремы о промежуточном значении можно показать, что каждому интервалу

$$I_n = \left(\frac{\pi n}{l} - \frac{\pi}{2l}, \frac{\pi n}{l} + \frac{\pi}{2l} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

принадлежит не менее одного нуля $g(z)$. Выберем в качестве z_n любой нуль из $I_n, n \in \mathbb{N}$, тогда все $z_n > 0$ и различны.

Используя стандартную технику с применением теоремы Руше (см. [15]), можно доказать, что последовательность нулей $c_2(z^2)$ имеет вид $\{-z_n\}_{n \geq 0} \cup \{z_n\}_{n \geq 0}$ и выполнены асимптотические формулы

$$z_n = \frac{\pi n}{l} + \frac{1}{d \pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Докажем, что $\{\sin z_n t\}_{n \geq 1}$ является базисом Рисса; для $\{1\} \cup \{\cos z_n t\}_{n \geq 1}$ доказательство аналогично. Согласно [15, утверждение 1.8.5], достаточно доказать полноту системы $\{\sin z_n t\}_{n \geq 1}$.

Пусть $f \in L_2(0, l)$ и

$$\int_0^l f(t) \sin z_n t dt = 0.$$

Тогда функция

$$F(\lambda) = \frac{\lambda - z_0^2}{\rho c_2(\lambda)} \int_0^l f(t) \sin \rho t dt$$

является целой по λ . Используя стандартную оценку (см. [15])

$$|\sin \rho l| \geq M^{-1} e^{|\operatorname{Im} \rho| l}, \quad |\rho| = \frac{\pi(n + 1/2)}{l}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N^*,$$

получим, что $|F(\lambda)| \leq M$ на окружностях $|\lambda| = (\pi(n + 1/2)/l)^2$ при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Тогда из принципа максимума модуля и теоремы Лиувилля следует, что $F(\lambda) \equiv C$. В то же время имеем

$$\int_0^l f(t) \sin \rho t dt = o(1), \quad \frac{\rho c_2(\lambda)}{\lambda - z_0^2} = (-1)^{n+1} d^2 (1 + o(1))$$

при $\rho = \pi(n + 1/2)/l$ в силу леммы Римана—Лебега. Отсюда следует, что возможно только $C = 0$. Тогда $f \equiv 0$, и полнота системы $\{\sin z_n t\}_{n \geq 1}$ доказана. $\square$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 1. По спектру $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ восстановить потенциал q .

Докажем утверждение, которое позволяет свести обратную задачу к нахождению q из характеристической функции.

Утверждение 1. Характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ строится однозначно по спектру $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$.

Доказательство. Обозначим $s(\lambda) = \rho^{-1} \sin \rho \gamma$. Из представления (10) легко получается асимптотика

$$\Delta(\lambda) = \begin{cases} d^2 \rho \sin \rho l \cos \rho \gamma + O(e^{|\operatorname{Im} \rho|(\gamma+l)}), & \gamma \leq l \text{ или } q(\gamma) = 0, \\ -dq(\gamma)s^2(\lambda) + O(\rho e^{|\operatorname{Im} \rho|(\gamma+l)}), & \gamma > l \text{ и } q(\gamma) \neq 0, \end{cases} \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Пусть k_0 — кратность нуля в спектре. Без потери общности можно предположить, что нуль встречается только среди первых k_0 членов спектра, т.е. $\lambda_0 = \dots = \lambda_{k_0-2} = \lambda_{k_0-1} = 0$. По теореме Адамара, характеристическая функция определяется с точностью до некоторой постоянной $C \neq 0$:

$$\Delta(\lambda) = CG(\lambda), \quad G(\lambda) := \lambda^{k_0} \prod_{n=k_0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right). \quad (13)$$

Согласно (12), тип построенного бесконечного произведения $G(\lambda)$ может быть равен либо $\gamma + l$, либо 2γ . Если тип равен $\gamma + l$, то постоянная C в (13) определяется первой асимптотической формулой в (12). Пусть теперь тип равен 2γ , что возможно только при $\gamma > l$ и $q(\gamma) \neq 0$. Определим

$$C_1 = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{G(\lambda)}{s^2(\lambda)}.$$

Из (10) видно, что $C_1 = -dq(\gamma)/C$. Также из (10) и (13) следует, что

$$G(\lambda) - C_1 s^2(\lambda) = \frac{d^2 \rho \sin \rho d_2 \cos \rho \gamma (1 + o(1))}{C}, \quad \lambda \rightarrow -\infty,$$

$$C = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{d^2 \rho \sin \rho l \cos \rho \gamma}{G(\lambda) - C_1 s^2(\lambda)}.$$

Таким образом, C определяется однозначно, и лемма доказана. $\square$

Докажем теорему единственности решения обратной задачи 1. Доказательство основано на вычислении коэффициентов разложений функции q по базисам $\{\sin \pi n t / \gamma\}_{n \geq 1}$ и $\{\sin z_n t\}_{n \geq 1}$ на отрезках $[0, \gamma]$ и $[a, b]$. Эти коэффициенты вычисляются путем подстановки значений $\lambda = (\pi n / \gamma)^2$ и $\lambda = z_n^2$ в представление (10), если $c_2((\pi n / \gamma)^2) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Данный подход аналогичен тому, который был использован в [25] для доказательства теоремы единственности.

Теорема 1. Обозначим через $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$ спектр краевой задачи (1)–(2) с некоторым потенциалом $\tilde{q} \in C(T)$. Если функции $c_2(\lambda)$ и $s(\lambda) := \rho^{-1} \sin \rho \gamma$ не имеют общих нулей, то из равенства $\{\lambda_n\}_{n \geq 0} = \{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$ следует $q = \tilde{q}$.

Доказательство. Согласно утверждению 1, функция $\Delta(\lambda)$ однозначно определяется заданием своих нулей $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$. Обозначим через $\tilde{\Delta}(\lambda)$ характеристическую функцию краевой задачи (1)–(2) с потенциалом $\tilde{q}$. Таким образом, если $\{\lambda_n\}_{n \geq 0} = \{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$, то $\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)$. Подставив в представление (10) значения $\lambda = (\pi n / \gamma)^2$, получим соотношения

$$\Delta \left(\left(\frac{\pi n}{\gamma} \right)^2 \right) = k_n \left((-1)^{n+1} - \frac{\gamma}{\pi n} \varkappa_n \right), \quad k_n := c_2 \left(\left(\frac{\pi n}{\gamma} \right)^2 \right), \quad \varkappa_n := \int_0^\gamma \sin \frac{\pi n}{\gamma} t q(t) dt,$$

откуда приходим к формуле

$$\varkappa_n = -\frac{\pi n}{k_n \gamma} \left(\Delta \left(\left(\frac{\pi n}{\gamma} \right)^2 \right) + (-1)^n k_n \right), \quad n \geq 1. \quad (14)$$

Аналогично получается равенство

$$\int_0^\gamma \sin \frac{\pi n}{\gamma} t \tilde{q}(t) dt = \varkappa_n, \quad n \geq 1,$$

с теми же $\varkappa_n$. Тогда

$$\int_0^\gamma \sin \frac{\pi n}{\gamma} t (q(t) - \tilde{q}(t)) dt = 0, \quad n \geq 1,$$

и из полноты системы $\{\sin \pi n t / \gamma\}_{n \geq 1}$ в $L_2(0, \gamma)$ следует, что $q = \tilde{q}$ на $[0, \gamma]$.

Подставим в характеристическую функцию $\lambda = z_n^2$. Полнота системы $\{\sin z_n t\}_{n \geq 1}$ в $L_2(0, l)$ была доказана в лемме 1. Действуя так же, как в первой части доказательства, получаем для коэффициентов

$$\xi_n := \int_0^l \sin z_n t q(b - t) dt$$

формулы

$$\xi_n = -\frac{z_n^2}{\sin z_n \gamma} \left(\Delta(z_n^2) + c_1(z_n^2) \frac{\sin z_n \gamma}{z_n} + dq(\gamma) \frac{\sin^2 z_n \gamma}{z_n^2} \right), \quad n \geq 1, \quad (15)$$

и равенство $q = \tilde{q}$ на $[a, b]$. $\square$

Основываясь на формулах (14) и (15), получим следующий алгоритм восстановления.

Алгоритм 1. Пусть функции $c_2(\lambda)$ и $s(\lambda)$ не имеют общих нулей. Восстановление потенциала по $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ производится в следующей последовательности:

1. Построить $\Delta(\lambda)$ (см. утверждение 1);
2. Вычислить коэффициенты $\varkappa_n$ по формуле (14) и найти

$$q(t) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n \sin \frac{\pi n}{\gamma} t, \quad t \in (0, \gamma).$$

3. Вычислить коэффициенты ξ_n по формуле (15) и построить

$$q(b - t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \chi_n(t), \quad t \in (0, l),$$

где система $\{\chi_n(t)\}_{n \geq 1}$ является биортогональной к базису $\{\sin z_n t\}_{n \geq 1}$ в $L_2(0, l)$.

Утверждение 2. Можно гарантировать, что $c_2(\lambda)$ и $s(\lambda)$ не имеют общих нулей, наложив одно из трех ограничений на d , γ и l :

- (i) имеет место равенство $l = k\gamma$ при некотором $k \in \mathbb{N}$;
- (ii) числа $\pi l / \gamma$ и $\pi d / \gamma$ рациональны;
- (iii) числа l / γ , $\pi d / \gamma$ рациональны и $\cos l / d \neq 0$.

Доказательство. Если выполнено (i), то $c_2((\pi n / \gamma)^2) = (-1)^{nk} d$. Пусть выполнено (ii) или (iii) и $c_2((\pi n / \gamma)^2) = 0$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\cos \pi n l / \gamma \neq 0$ и

$$\left(1 - \left(\frac{\pi n}{\gamma} d \right)^2 \right) \operatorname{tg} \frac{\pi n l}{\gamma} = \frac{\pi n}{\gamma} d. \quad (16)$$

Если выполнено (ii), то $\pi n l / \gamma \in \mathbb{Q}$, и $\operatorname{tg} \pi n l / \gamma$ является иррациональным числом (см. [22]). Тогда в (16) слева имеем либо нуль, либо иррациональное число, а справа — ненулевое рациональное число; противоречие.

Если выполнено (iii), то $\pi n l / \gamma$ обозначает рациональное число градусов, и согласно [22]

$$\operatorname{tg} \frac{\pi n l}{\gamma} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\} \cup \{\pm 1\}.$$

Случаи иррационального и нулевого $\operatorname{tg} \pi n l / \gamma$ аналогичны (ii). Если же $\operatorname{tg} \pi n l / \gamma = \pm 1$, то (16) приводит к противоречию потому, что рациональное число $\pi n d / \gamma$ не может быть корнем ни одного из квадратных уравнений $1 - x^2 = \pm x$. $\square$

3. Необходимые и достаточные условия. Далее получим необходимые и достаточные условия на спектр в случае

$$l = \gamma, \quad q \in W_2^1[0, \gamma] \cap W_2^1[a, b]. \quad (17)$$

При выполнении данных условий формулу (10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \frac{d^2 \rho}{2} \sin 2\rho l - d \cos 2\rho l - \frac{\sin 2\rho l}{\rho} - dq(\gamma) \frac{\sin^2 \rho l}{\rho^2} + \\ & + \left[\frac{\rho^2 d^2 - 1}{\rho^2} \sin \rho l - \frac{d}{\rho} \cos \rho l \right] \int_0^l q(t) \sin \rho t dt - \frac{\sin \rho l}{\rho^2} \int_0^l \sin \rho t q(b - t) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Выполнив подстановки $\lambda = (\pi n / l)^2$ и $\lambda = z_n^2$ в (18), с помощью интегрирования по частям получим следующее утверждение.

Утверждение 3. При $n \in \mathbb{N}$ имеют место формулы

$$\begin{aligned} \Delta\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) &= -d + d \left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 [q(l) - (-1)^n q(0) + \kappa_n], \\ \Delta(z_n^2) &= (-1)^n \frac{\sin z_n l}{z_n^3} \left[\frac{1}{d^2} + q(a) - q(l) - (-1)^n q(b) + \eta_n \right] \end{aligned}$$

с некоторыми последовательностями $\{\kappa_n\}_{n \geq 1}, \{\eta_n\}_{n \geq 1} \in l_2$.

Введем обозначения

$$Q_1(z) = \int_z^b q(t) dt, \quad Q_2(z) = \int_0^{l-z} q(a + t) dt.$$

Интегрируя по частям, получаем представление

$$\Delta(\lambda) = \frac{d^2 \rho}{2} \sin 2\rho l - d \cos 2\rho l - \frac{\sin 2\rho l}{\rho} + d^2 q(0) \frac{\sin \rho l}{\rho} - d^2 \frac{\sin 2\rho l}{2\rho} q(l) + \frac{1}{2\rho} \int_0^{2l} \sin \rho t W(t) dt, \quad (19)$$

где функция $W \in L_2[0, 2l]$ имеет вид

$$W(t) = \begin{cases} dq(l - t) - dq(l) - Q_1(l - t) + d^2 q'(l - t) - Q_2(t), & t \in [0, l], \\ -dq(t - l) - dq(l) - Q_1(t - l) + d^2 q'(t - l) - Q_2(2l - t), & t \in [l, 2l]. \end{cases}$$

Используя формулу (19), с помощью стандартной техники [15] можно получить асимптотику спектра.

Теорема 2. Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \rho_n = \frac{\pi n}{2l} + \frac{2}{d\pi n} + \frac{4l\delta_n q(0)}{\pi^2 n^2} + \frac{\mu_n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (20)$$

где $\delta_n = \sin \pi n / 2$, $\{\mu_n\}_{n \geq 1} \in l_2$.

С помощью этих асимптотик формула (13) может быть уточнена следующим образом:

$$\Delta(\lambda) = l d^2 (\lambda - \lambda_0) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{(\frac{\pi n}{2l})^2} \quad (21)$$

(доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.4 в [15] для классического оператора Штурма—Лиувилля).

Пусть теперь задана произвольная последовательность $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, члены которой удовлетворяют асимптотическим формулам

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \rho_n = \frac{\pi n}{2l} + \frac{2}{d\pi n} + \frac{4l\delta_n u}{\pi^2 n^2} + \frac{\mu_n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

где $u \in \mathbb{C}$, $\{\mu_n\}_{n \geq 1} \in l_2$. Наша следующая цель — получить условия, которые нужно наложить на данную последовательность, чтобы она являлась спектром некоторой краевой задачи (1)–(2) в частном случае (17).

Теорема 3. Пусть функция $\Delta(\lambda)$ построена по формуле (21) с произвольными числами λ_n вида (22). Имеет место представление

$$\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda) + C_0 \frac{\sin 2\rho l}{\rho} + \int_0^{2l} W(t) \frac{\sin \rho t}{2\rho} dt, \quad W \in L_2(0, 2l), \quad (23)$$

где

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \frac{d^2 \rho}{2} \sin 2\rho l - d \cos 2\rho l + d^2 u \frac{\sin \rho l}{\rho}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на технике, примененной в [12], где представление для другой характеристической функции было получено с меньшим числом слагаемых.

1. Обозначим через $\tilde{\lambda}_n = \tilde{\rho}_n^2$, $n \geq 0$, нули функции $\tilde{\Delta}(\lambda)$; при этом $\tilde{\rho}_n$ имеют ту же асимптотику, что и ρ_n в формулах (20). Заметим, что $\tilde{\Delta}(\lambda)$ восстанавливается по формуле (21), если в ней заменить λ_n на $\tilde{\lambda}_n$. Рассмотрим числа

$$\theta_k = \frac{\pi k}{2l} [\Delta(\lambda) - \tilde{\Delta}(\lambda)] \Big|_{\lambda = (\frac{\pi k}{2l})^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Введем функцию $\Delta^*(\lambda) = d^2 \rho / 2 \sin 2\rho l$. Используя (21), запишем представление

$$\Delta(\lambda) = \Delta^*(\lambda) F(\lambda), \quad F(\lambda) := \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{(\frac{\pi n}{2l})^2 - \lambda},$$

и, аналогично,

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \Delta^*(\lambda) \tilde{F}(\lambda), \quad \tilde{F}(\lambda) := \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_n - \lambda}{(\frac{\pi n}{2l})^2 - \lambda}.$$

С учетом этих представлений имеем

$$\theta_k = \frac{\pi k}{2l} [\Delta^*(\lambda)]' \Big|_{\lambda = (\frac{\pi k}{2l})^2} \left[\left(\tilde{\lambda}_k - \left(\frac{\pi k}{2l} \right)^2 \right) \tilde{d}_k - \left(\lambda_k - \left(\frac{\pi k}{2l} \right)^2 \right) d_k \right], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

где

$$d_k = \prod_{n \neq k} \frac{\lambda_n - (\frac{\pi k}{2l})^2}{(\frac{\pi n}{2l})^2 - (\frac{\pi k}{2l})^2}, \quad \tilde{d}_k = \prod_{n \neq k} \frac{\tilde{\lambda}_n - (\frac{\pi k}{2l})^2}{(\frac{\pi n}{2l})^2 - (\frac{\pi k}{2l})^2}.$$

Далее оценим d_k (для $\tilde{d}_k$ вычисления аналогичны) и $\tilde{d}_k - d_k$. Перепишем первый коэффициент в виде

$$d_k = \prod_{\substack{n \leq N, \\ n \neq k}} (1 + x_{n,k}) \exp H_k, \quad H_k := \sum_{\substack{n > N, \\ n \neq k}} \ln(1 + x_{n,k}), \quad x_{n,k} := \frac{\lambda_n - (\frac{\pi n}{2l})^2}{(\frac{\pi n}{2l})^2 - (\frac{\pi k}{2l})^2}, \quad (25)$$

с некоторым фиксированным N . В силу (22) имеем $\lambda_n - [\pi n / (2l)]^2 = O(1)$, и можно выбрать такое N , не зависящее от k , что $|x_{n,k}| < 1/2$ при $n > N$. Используя разложение Тейлора для $\ln(1 + x_{n,k})$, можно оценить

$$|H_k| \leq 2 \sum_{\substack{n > N, \\ n \neq k}} |x_{n,k}| \leq 2C \sum_{n > k} \frac{1}{(n - k)^2} = O(1). \quad (26)$$

Тогда из (25) мы получим, что $d_k = O(1)$. Покажем, что $d_k - \tilde{d}_k = O(1/k^2)$. Для этого запишем

$$d_k - \tilde{d}_k = \left(\prod_{\substack{n \leq N, \\ n \neq k}} (1 + x_{n,k}) - \prod_{\substack{n \leq N, \\ n \neq k}} (1 + \tilde{x}_{n,k}) \right) \exp H_k + \prod_{\substack{n \leq N, \\ n \neq k}} (1 + \tilde{x}_{n,k}) (\exp H_k - \exp \tilde{H}_k),$$

где $\tilde{H}_k$ и $\tilde{x}_{n,k}$ вводятся аналогично H_k и $x_{n,k}$. Первое слагаемое в данном равенстве оценивается как $O(1/k^2)$, поскольку $x_{n,k} = O(1/k^2)$ и $\tilde{x}_{n,k} = O(1/k^2)$ при $n < N$, а также выполнено (26). Для оценки второго слагаемого заметим, что из разложения Тейлора для $\ln(1 + x_{n,k})$, $k > N$, можно получить формулу

$$H_k = \sum_{\substack{n > N, \\ n \neq k}} (x_{n,k} + O(x_{n,k}^2));$$

формула такого же вида имеет место для $\tilde{H}_k$. Используя их и формулу оценки разности значений функции через ее производную, получим

$$\begin{aligned} |\exp H_k - \exp \tilde{H}_k| &\leq \max_{z \in [H_k, \tilde{H}_k]} |\exp z| |H_k - \tilde{H}_k| \leq \\ &\leq C \sum_{\substack{n > N, \\ n \neq k}} |x_{n,k} - \tilde{x}_{n,k}| + C \sum_{\substack{n > N, \\ n \neq k}} \frac{1}{k^2(n-k)^2} \leq C \sum_{\substack{n > N, \\ n \neq k}} \frac{\hat{\mu}_n}{n(n^2 - k^2)} + \frac{C}{k^2}, \end{aligned}$$

где $\{\hat{\mu}_n\}_{n \geq 0} \in l_2$ в силу асимптотических формул (22). При этом

$$\sum_{\substack{n \geq 1, \\ n \neq k}} \frac{\hat{\mu}_n}{n(n^2 - k^2)} \leq \frac{1}{k} \sum_{\substack{n \geq 1, \\ n \neq k}} \frac{\hat{\mu}_n}{n(n-k)} \leq \frac{1}{k} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}_n^2} \sqrt{\sum_{\substack{n \geq 1, \\ n \neq k}} \frac{1}{n^2(n-k)^2}} \leq \frac{C}{k^2},$$

следовательно, $|\exp H_k - \exp \tilde{H}_k| = O(1/k^2)$ и $d_k - \tilde{d}_k = O(1/k^2)$.

Из асимптотик (22) следует, что

$$\lambda_k - \tilde{\lambda}_k = \frac{\nu_k}{k}, \quad \lambda_k - \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 = O(1), \quad \tilde{\lambda}_k - \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 = O(1),$$

где последовательность $\{\nu_k\}_{k \geq 1} \in l_2$. Тогда

$$k \left[\left(\lambda_k - \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 \right) d_k - \left(\tilde{\lambda}_k - \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 \right) \tilde{d}_k \right] = k \left[d_k (\lambda_k - \tilde{\lambda}_k) + \left(\tilde{\lambda}_k - \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 \right) (d_k - \tilde{d}_k) \right] \in l_2,$$

и из (24) мы получаем, что $\{\theta_k\}_{k \geq 1} \in l_2$.

2. Так как система $\{\sin \pi k t / (2l)\}_{k \geq 1}$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2(0, 2l)$, существует функция $W \in L_2(0, 2l)$, для которой

$$\int_0^{2l} W(t) \sin \frac{\pi k}{2l} t dt = 2\theta_k.$$

Введем в рассмотрение функции

$$\theta(\rho) = \int_0^{2l} W(t) \sin \rho t dt, \quad P(\lambda) = \lambda \frac{\theta(\rho)/(2\rho) - \Delta(\lambda) + \tilde{\Delta}(\lambda)}{\Delta^*(\lambda)} = \frac{\theta(\rho)}{d^2 \sin 2\rho l} + \lambda(\tilde{F}(\lambda) - F(\lambda)).$$

Функция $P(\lambda)$ является целой. Действуя аналогично доказательству в части 1, можно показать, что $|\tilde{F}(\lambda) - F(\lambda)| \leq M/k^2$ на каждой окружности $|\lambda| = [\pi k / (2l) + \pi / (4l)]^2$, $k > N$. Отсюда следует, что функция $P(\lambda)$ ограничена по модулю во всей плоскости, и по теореме Лиувилля $P(\lambda) \equiv C_0$. Таким образом, представление (23) доказано. $\square$

Построим $\Delta(\lambda)$ по формуле (21) с заданными λ_n с асимптотикой (22). Мы доказали, что данная функция имеет вид (23) с некоторыми $W \in L_2(0, 2l)$ и $C_0 \in \mathbb{C}$. Легко заметить, что функция W определяется единственным образом:

$$W(t) = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{\pi n}{2l} t, \quad \beta_n := \frac{\pi n}{l} \Delta \left(\left(\frac{\pi n}{2l} \right)^2 \right) + \frac{\pi n}{l} (-1)^n d - 2d^2 u \delta_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

Согласно формуле (19), построенная $\Delta(\lambda)$ является характеристической функцией некоторой краевой задачи только в случае, когда для W выполнено представление

$$W(t) = \begin{cases} dg(l-t) - dg(l) - G_1(l-t) + d^2 g'(l-t) - G_2(t), & t \in [0, l], \\ -dg(t-l) - dg(l) - G_1(t-l) + d^2 g'(t-l) - G_2(2l-t), & t \in [l, 2l], \end{cases} \quad (28)$$

с функциями g , G_1 и G_2 , удовлетворяющими следующим условиям:

(а) $g \in W_2^1[0, l]$, $G_2 \in W_2^2[0, l]$ и

$$G_1(z) = \int_z^l g(t) dt, \quad z \in [0, l];$$

(б) $g(l) = -2(C_0 + 1)/d^2$ и $g(0) = u$;

(с) $G_2(l) = 0$.

Легко заметить, что в случае представления (28) можно восстановить последовательно g , G_1 и G_2 по формулам

$$g(t) = \frac{1}{2d} \{W(l-t) - W(l+t)\}, \quad G_1(t) = \int_t^l g(w) dw, \quad (29)$$

$$G_2(t) = -dg(l-t) - dg(l) - G_1(l-t) + d^2 g'(l-t) - W(2l-t),$$

где $t \in [0, l]$. Обратно, пусть функция $W(t)$ из представления (23) имеет вид (28). Рассмотрим функцию

$$q(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [0, \gamma], \\ G_2'(l-t+a), & t \in [a, b]. \end{cases}$$

Из условия (а) следует, что $q \in W_2^1[0, \gamma] \cap W_2^1[a, b]$. Сравнивая формулу (19) с (23) при условиях (б)–(с), получим, что характеристическая функция краевой задачи (1)–(2) с построенным q равна $\Delta(\lambda)$, и $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ является спектром данной краевой задачи.

Далее получим условия, из которых следует вид (28) функции W . Для этого понадобятся две следующие леммы.

Лемма 2 (см. [12]). Пусть $\{\gamma_k\}_{k \geq 1} \in l_2$ и $f \in L_2(0, l)$. Функция f принадлежит классу $W_2^1[0, l]$ тогда и только тогда, когда имеет место асимптотика

$$\int_0^l f(x) \sin \left(\frac{\pi k}{l} + \gamma_k \right) x dx = \frac{l}{\pi k} (w_1 - (-1)^k w_2) + \frac{\tilde{\gamma}_k}{k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \{\tilde{\gamma}_k\}_{k \geq 1} \in l_2;$$

при этом $w_1 = f(0)$, $w_2 = f(l)$.

Лемма 3. Пусть $f \in L_2(0, l)$. Функция f принадлежит классу $W_2^2[0, l]$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^l f(x) \cos z_k x dx = \frac{1}{z_k^2} ((-1)^k v_2 - v_1 + \tilde{\gamma}_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \{\tilde{\gamma}_k\}_{k \geq 1} \in l_2; \quad (30)$$

при этом $v_1 = f'(0)$ и $v_2 = f'(l) + f(l)/d$.

Доказательство. Необходимость. Если $f \in W_2^2[0, l]$, то формула (30), в которой

$$v_1 = f'(0), \quad v_2 = f'(l) + \frac{f(l)}{d}$$

получается двукратным интегрированием по частям.

Достаточность. Пусть выполнена формула (30). Построим такую функцию $g \in W_2^2[0, l]$, что её коэффициенты по системе $\{1\} \cup \{\cos z_n t\}_{n \geq 1}$ совпадают с коэффициентами f . Найдем g в виде

$$g(x) = \int_x^l \tilde{g}(t) dt + C.$$

Вычисляя коэффициент при $\cos z_k t$, с помощью интегрирования по частям получим

$$\frac{C \sin z_k l}{z_k} + \frac{1}{z_k} \int_0^l \tilde{g}(t) \sin z_k t dt = \frac{1}{z_k^2} ((-1)^k v_2 - v_1 + \tilde{\gamma}_k).$$

Тогда $\tilde{g}(x) = h(x) - C F_s(x)$, где функции h и F_s определяются единственным образом равенствами

$$\int_0^l h(t) \sin z_k t dt = \frac{1}{z_k} ((-1)^k v_2 - v_1 + \tilde{\gamma}_k), \quad \int_0^l F_s(t) \sin z_k t dt = \sin z_k l, \quad k \geq 1. \quad (31)$$

Из формулы (11) следует, что $k(\sin z_k l - (-1)^k l / (d\pi k)) \in l_2$. Согласно лемме 2 выполнены включения $h, F_s \in W_2^1[0, l]$. Для построения искомой $g \in W_2^2[0, l]$ остается выбрать C таким образом, чтобы

$$\int_0^l f(t) dt = \int_0^l g(t) dt = \int_0^l \int_x^b h(t) dt - C \int_0^l t F_s(t) dt + Cl.$$

Эта постоянная C существует, если

$$\int_0^l t F_s(t) dt \neq l. \quad (32)$$

Докажем от противного, что неравенство (32) выполняется. Построим целую функцию

$$F(\lambda) = \frac{\lambda - z_0^2}{\rho c_2(\lambda)} \left(\sin \rho l - \int_0^l F_s(t) \sin \rho t dt \right),$$

где $\{z_n^2\}_{n \geq 0}$ — последовательность нулей $c_2(\lambda)$. Действуя так же, как в доказательстве леммы 1, получим $F(\lambda) \equiv C$, откуда следует

$$\sin \rho l - \int_0^l F_s(t) \sin \rho t dt \equiv \frac{C \rho c_2(\lambda)}{\lambda - z_0^2}.$$

Подставляя в последнее равенство $\rho = \pi n / l + \pi / (2l)$, применяя лемму Римана—Лебега, находим $C = -1/d^2$. Тогда

$$\int_0^l F_s(t) \sin \rho t dt \equiv \frac{1}{d^2(\lambda - z_0^2)} [(1 - z_0^2) \sin \rho l + d \rho \cos \rho l]. \quad (33)$$

Ясно, что $F_s(t)$ однозначно определяется по коэффициентам

$$\int_0^l F_s(t) \sin \frac{\pi n}{l} t dt = \frac{\pi n}{dl} \frac{(-1)^n}{(\frac{\pi n}{l})^2 - z_0^2}, \quad z_0 \neq \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу полноты системы $\{\sin \pi n t / l\}_{n \geq 1}$ имеем $F_s(t) = -\sin z_0 t / (d \sin z_0 l)$. Подставив данную функцию в (33), приходим к противоречию. Следовательно, неравенство (32) выполняется.

Мы доказали, что существует функция $g \in W_2^2[0, l]$ с такими же коэффициентами по системе $\{1\} \cup \{\cos z_n t\}_{n \geq 1}$, что и у f . В силу полноты этой системы получим $f = g$. Сравнивая (30) с формулой, записанной по необходимости, приходим к $v_1 = f'(0)$ и $v_2 = f'(l) + f(l)/d$. $\square$

Теорема 4. Для того чтобы функция $W(t)$ из представления (23) имела вид (28) с условиями (а)–(б), достаточно выполнения следующих асимптотик:

$$\Delta\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) = -d + d\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 [c - (-1)^n u + \kappa_n], \quad c := -\frac{2(C_0 + 1)}{d^2}, \quad (34)$$

$$\Delta(z_n^2) = \frac{\sin z_n l}{z_n^3} [h_2 - (-1)^n h_1 + \eta_n] \quad (35)$$

с некоторыми $h_1, h_2 \in \mathbb{C}$ и последовательностями $\{\kappa_n\}_{n \geq 1}, \{\eta_n\}_{n \geq 1} \in l_2$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для построенных по формуле (29) функций выполняются включения $g \in W_2^1[0, l]$ и $G_2 \in W_2^2[0, l]$, при этом $g(0) = u$, $g(l) = c$. Подставив в (23) $\rho = \pi n / l$, получаем

$$\Delta\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) = -d + \frac{l}{2\pi n} \int_0^{2l} W(t) \sin \frac{\pi n}{l} t dt.$$

Разбивая последний интеграл на два, имеем

$$\int_0^l W(l-t) \sin \frac{\pi n}{l} (l-t) dt + \int_0^l W(l+t) \sin \frac{\pi n}{l} (l+t) dt = (-1)^{n+1} \int_0^l 2dg(t) \sin \frac{\pi n}{l} t dt.$$

Таким образом, из (35) следует асимптотика

$$\int_0^l g(t) \sin \frac{\pi n}{l} t dt = \frac{l}{\pi n} [u - (-1)^n c - (-1)^n \kappa_n].$$

Согласно лемме 2 имеем $g \in W_2^1[0, l]$, а также $g(0) = u$, $g(l) = c$. Подставив в (23) $\rho = z_n$, находим

$$\Delta(z_n^2) = \frac{(C_0 + 1) \sin 2z_n l}{z_n} + d^2 u \frac{\sin z_n l}{z_n} + \frac{\sin^2 z_n l}{dz_n^2} + \frac{1}{2z_n} \int_0^{2l} W(t) \sin z_n t dt.$$

Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2l} W(t) \sin z_n t dt &= \frac{1}{2} \int_0^l W(t) \sin z_n t dt + \frac{1}{2} \int_0^l W(2l-t) \sin z_n (2l-t) dt = \\ &= \int_0^l dg(l-t) \sin z_n t dt + \sin z_n l \int_0^l W(2l-t) \cos z_n (l-t) dt = \\ &= \sin z_n l \int_0^l W(l+t) \cos z_n t dt + d \int_0^l g(t) \sin z_n (l-t) dt = \\ &= \sin z_n l \int_0^l W(l+t) \cos z_n t dt + d \sin z_n l \int_0^l g(t) \cos z_n t dt - d \cos z_n l \int_0^l g(t) \sin z_n t dt. \end{aligned}$$

Выполняя подстановку $\cos z_n l = [dz_n - 1/(dz_n)] \sin z_n l$ в последнем слагаемом и интегрируя по частям, получаем

$$\left(d^2 z_n - \frac{1}{z_n}\right) \int_0^l g(t) \sin z_n t dt = d^2 \left[u - c \cos z_n l + \int_0^l g'(t) \cos z_n t dt \right] + \int_0^l G_1(t) \cos z_n t dt.$$

В итоге с учетом (29) и $c = -2(C_0 + 1)/d^2$ имеем

$$\Delta(z_n^2) = \frac{\sin^2 z_n l}{dz_n^2} + \frac{\sin z_n l}{z_n} \int_0^l f(t) \cos z_n t dt, \quad f(t) = -G_2(l-t) - 2G_1(t) - dg(l).$$

Приравнявая полученное выражение к правой части (35) и деля на $z_n^{-1} \sin z_n l$, приходим к формуле

$$\int_0^l f(t) \cos z_n t dt = \frac{1}{z_n^2} [h_2 - (-1)^n h_1 + \eta_n] - \frac{\sin z_n l}{z_n d} = \frac{1}{z_n^2} \left[h_2 - (-1)^n \left(h_1 + \frac{1}{d^2} \right) + \tilde{\eta}_n \right], \quad n \geq 1,$$

где $\{\tilde{\eta}_n\}_{n \geq 1} \in l_2$. Применив лемму 3, получим $f \in W_2^2[0, l]$ и $G_2 \in W_2^2[0, l]$. $\square$

Из утверждения 3 следует, что асимптотики (34) и (35) являются необходимыми для того, чтобы $\Delta(\lambda)$ была характеристической функцией. Основываясь на вышесказанном, сформулируем следующий результат.

Теорема 5. Для того чтобы последовательность $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ являлась спектром некоторой краевой задачи (1)–(2) в случае (17), необходимыми и достаточными являются следующие условия:

- (i) выполнены асимптотические формулы (22);
- (ii) построенная по формуле (21) функция $\Delta(\lambda)$ удовлетворяет условиям (34), (35);
- (iii) функция G_2 , построенная с помощью последовательного применения формул (21), (27) и (29), обращается в нуль в точке b .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Кузнецова М. А. О восстановлении дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля на временных шкалах // Мат. заметки. — 2021. — 109, № 1. — С. 82–100.
- Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма—Лиувилля. — М.: Наука, 1984.
- Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.
- Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
- Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012.
- Adalar İ., Ozkan A. S. An interior inverse Sturm–Liouville problem on a time scale // Anal. Math. Phys. — 2020. — 10. — 58.
- Albeverio S., Hryniv R. O., Nizhnik L. P. Inverse spectral problems for nonlocal Sturm–Liouville operators // Inverse Probl. — 2007. — 23, № 2. — P. 523–535.
- Ambarzumyan V. A. Über eine Frage der Eigenwerttheorie // 53 — 1929. — P. 690–695.
- Bohner M., Peterson A. Advances in Dynamic Equations on Time Scales. — Boston: Birkhäuser, 2003.
- Bohner M., Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales. — Boston: Birkhäuser, 2001.
- Bondarenko N. P., Buterin S. A., Vasiliev S. V. An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with frozen argument // J. Math. Anal. Appl. — 2019. — 472, № 1. — P. 1028–1041.
- Buterin S. A. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Res. Math. — 2007. — 50, № 3. — P. 173–181.
- Buterin S., Kuznetsova M. On the inverse problem for Sturm–Liouville-type operators with frozen argument: rational case // Comp. Appl. Math. — 2020. — 39, № 1. — P. 1–15.

14. Buterin S. A., Vasiliev S. V. On recovering a Sturm–Liouville-type operator with the frozen argument rationally proportioned to the interval length// J. Inverse and Ill-Posed Probl. — 2019. — 27, № 3. — P. 429–438.
15. Freiling G., Yurko V. A. Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications. — New York: NOVA Science, 2001.
16. Hale J. Theory of Functional-Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1977.
17. Hilger S. Analysis on measure chains—a unified approach to continuous and discrete calculus// Res. Math. — 1990. — 18, № 1. — P. 18–56.
18. Hu Y.-T., Bondarenko N. P., Yang C.-F. Traces and inverse nodal problem for Sturm–Liouville operators with frozen argument// Appl. Math. Lett. — 2020. — 102. — 106096.
19. Kuznetsova M. A. A uniqueness theorem on inverse spectral problems for the Sturm–Liouville differential operators on time scales// Res. Math — 2020. — 75. — 44.
20. Kuznetsova M. A., Buterin S. A., Yurko V. A. On inverse spectral problems for Sturm–Liouville differential operators on closed sets// Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 6. — P. 1201–1209.
21. Nizhnik L. P. Inverse nonlocal Sturm–Liouville problem// Inverse Probl. — 2010. — 26, № 12. — 125006.
22. Niven I. Irrational Numbers. — New Jersey: Mathematical Association of America, 1956.
23. Ozkan S. Ambarzumyan-type theorems on a time scale// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2018. — 26, № 5. — P. 633–637.
24. Ozkan A. S., Adalar İ. Half-inverse Sturm–Liouville problem on a time scale// Inverse Probl. — 2020. — 36, № 2. — 025015.
25. Wang Yu P., Zhang M., Zhao W., Wei X. Reconstruction for Sturm–Liouville operators with frozen argument for irrational cases// Appl. Math. Lett. — 2021. — 111. — 106590.
26. Yurko V. Inverse problems for Sturm–Liouville differential operators on closed sets// Tamkang J. Math. — 2019. — 50, № 3. — P. 199–206.

Кузнецова Мария Андреевна

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: kuznetsovama@info.sgu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 63–78
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-63-78

УДК 517.9

ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА И ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2022 г. М. И. СУМИН

Аннотация. Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности — принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина — в выпуклой задаче оптимального управления для параболического уравнения с распределенным и граничным управлениями, а также с конечным числом функциональных ограничений-равенств, задаваемых недифференцируемыми по Фреше «точечными» функционалами, представляющими собою значения решения третьей начально-краевой задачи для указанного уравнения в заранее выбранных фиксированных, возможно граничных, точках цилиндрической области изменения независимых переменных.

Ключевые слова: выпуклое оптимальное управление, параболическое уравнение, граничное управление, недифференцируемый по Фреше функционал, усреднение по Стеклову, минимизирующая последовательность, двойственная регуляризация, регуляризирующий алгоритм, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина.

THE LAGRANGE PRINCIPLE AND THE PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE IN ILL-POSED OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© 2022 M. I. SUMIN

ABSTRACT. We consider the regularization of the classical optimality conditions—the Lagrange principle and the Pontryagin maximum principle—in a convex optimal control problem for a parabolic equation with distributed and boundary controls, and also with a finite number functional equality constraints given by “point” functionals nondifferentiable in the Fréchet sense, which are the values of the solution of the third initial-boundary-value problem for the specified equation at preselected fixed (possibly boundary) points of the cylindrical domain of the independent variables.

Keywords and phrases: convex optimal control, parabolic equation, boundary control, Fréchet nondifferentiable functional, Steklov averaging, minimizing sequence, dual regularization, regularizing algorithm, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle.

AMS Subject Classification: 49K20, 49N15, 47A52

1. Введение. Статья продолжает линию работы [11] и посвящена вопросу регуляризации классических условий оптимальности (КУО) — принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) — в задачах оптимального граничного управления для линейного параболического уравнения, однако в отличие от [11], где рассматривалась задача с операторным (бесконечномерным, т.е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством, здесь, во-первых, задача содержит конечное число функциональных ограничений-равенств, и, во-вторых, это конечномерное ограничение-равенство задается недифференцируемыми по Фреше «точечными» функционалами, представляющими собою значения решения третьей начально-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00199_а).

краевой задачи для указанного уравнения в заранее выбранных фиксированных, возможно граничных, точках цилиндрической области изменения независимых переменных.

Хорошо известно, что для задач оптимального управления и, более общо, задач условной оптимизации характерны различные проявления некорректности, к которым относятся несуществование их решений, решений двойственных к ним задач, неустойчивость решений как по аргументу, так и по функции (см., например, [4, гл. 9]) при возмущении исходных данных задач. Подобные свойства некорректности однозначно говорят в пользу того, что на задачи условной оптимизации и оптимального управления, в целом, следует смотреть как на совокупность составляющих типичный для некорректных задач [4, 18] раздел математической теории. Безусловно, свойства некорректности оптимизационных задач в полной мере наследуют и соответствующие КУО [12], составляющие основу всей теории задач на условный экстремум, теории оптимального управления [1, 4].

Одним из главных при доказательстве КУО является предположение точного задания исходных данных оптимизационной задачи. Без этого предположения невозможно представить, например, вычисление первых вариаций составляющих ее функционалов (функционала качества, задающих ограничения задачи функционалов), т.е. основную «процедуру» при получении ПЛ в дифференциальной форме, ПМП. В то же время, как известно, сама теория КУО обязана своим происхождением, прежде всего, потребностям решения чисто практических задач [1, 6]. Таким образом, два этих важных обстоятельства находятся во взаимном противоречии: с одной стороны, при доказательстве КУО необходимо знать точно исходные данные оптимизационных задач, с другой же, такое требование точности плохо согласуется с естественным желанием воспользоваться КУО, несмотря на свойства их некорректности, как инструментом для непосредственного решения различных оптимизационных задач. Представляется, что естественный выход из указанного противоречия состоит в целенаправленном отношении к КУО как к математическим объектам, составляющим специфический раздел теории некорректных задач и требующим соответствующего адекватного подхода к их регуляризации.

Регуляризацию КУО впервые было предложено проводить в работе [13]. Аргументация в пользу необходимости такой регуляризации для преодоления свойств некорректности КУО, соответствующие определения и понятия, а также обсуждение истории вопроса приведены в [11, 12] (см. также библиографию этих работ), достаточно подробное обсуждение различных иллюстративных примеров некорректности ПЛ и ПМП можно найти в [12]. Подчеркнем, одновременно, что, как и в [11, 12, 14], центральными понятиями здесь являются понятие обобщенной минимизирующей последовательности — минимизирующего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги [3] и жестко с ним связанное понятие МПР-образующего (регуляризирующего) алгоритма [11, 14]. Последнее, так же, как и в [11, 14], «встраивается» в получаемые регуляризованные ПЛ и ПМП, превращая их в соответствующие регуляризирующие алгоритмы. Другими словами, несмотря на свою некорректность, ПЛ и ПМП могут служить инструментами для устойчивого решения задач оптимального управления, но после соответствующей регуляризации, которая, как важно заметить, не меняет структурного устройства этих КУО. Базовой для регуляризованных ПЛ и ПМП является задача минимизации регулярной функции Лагранжа. «Сложность» ее решения характеризует их эффективность, возможность практической реализации. МПР, генерируемые регуляризованными КУО, представляют собою последовательности минималей функции Лагранжа, взятых при значениях двойственной переменной, которые, в свою очередь, определяются в соответствии с алгоритмом двойственной регуляризации [16, 17].

Приведем далее важные на наш взгляд аргументы, связанные с постановкой задачи настоящей работы, подчеркнув, прежде всего, что эта постановка в целях более компактного изложения существенно упрощена.

1. Так как ограничение-равенство рассматриваемой задачи оптимального управления (ОС) (см. ниже раздел 2) является конечномерным, то некорректность КУО проявляется здесь лишь в виде их возможной неустойчивости по возмущению исходных данных и нет смысла говорить об их возможной невыполнимости [12].

2. Рассматриваемую здесь задачу (ОС) в частном случае, когда ее целевой функционал f имеет простейший квадратичный вид $f(\pi) \equiv \|\pi\|^2 \equiv \|u\|^2 + \|w\|^2$ ($A_{0,1} = 0$, $A_{0,2} = 0$, $A_{0,3} = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = 1$), а матрица A_1 в векторном ограничении-равенстве является единичной, можно трактовать как обратную задачу дискретного наблюдения, в том числе и граничного, в которой решение параболического уравнения наблюдается (измеряется) в конечном наборе фиксированных точек, возможно на боковой поверхности цилиндрической области изменения независимых переменных, и требуется найти по этим наблюдениям (измерениям) вызывающее их воздействие-управление, в том числе граничное. Данное обстоятельство подчеркивает возможность применения получаемых в работе регуляризованных КУО для непосредственного решения актуальных с точки зрения приложений обратных задач (в данном случае, для параболических уравнений), в которых погрешности исходных данных неразрывно связаны с физической сутью их постановок.
3. Специфическая сложность задачи (ОС) состоит в недифференцируемости по Фреше задающих ограничение-равенство «точечных» функционалов, и, как следствие, в аналогичной недифференцируемости ее функционала Лагранжа. С помощью операции усреднения (сглаживания) по Стеклову эти функционалы аппроксимируются (см. раздел 3) дифференцируемыми по Фреше функционалами и, как следствие, формулируемые в разделе 4 регуляризованные КУО конструктивно порождают сходящиеся к решению исходной задачи МПР, состоящие из минималей «сглаженного» и, как следствие, дифференцируемого по Фреше, функционала Лагранжа. Помимо того, в разделе 5 показывается, как эти «сглаженные» регуляризованные КУО могут быть применены для приближенного решения задач с бесконечномерными фазовыми ограничениями-равенствами, «сосредоточенными» в точках произвольного замкнутого (возможно, с пустой внутренностью) множества, принадлежащего цилиндрической области изменения независимых переменных.
4. Дополнительную сложность задаче (ОС) добавляет наличие регулярных борелевских мер (мер Радона, в данном случае — атомических) в правых частях уравнения и краевого условия, а также в «концевом» условии сопряженной краевой задачи классического ПМП (см., например, [15]). Формулируемый и обсуждаемый в разделе 4 регуляризованный ПМП на основе сглаживания по Стеклову, «преодолевая» неустойчивость ПМП, позволяет также «обойтись» при формулировании без «абстрактных мер», которые заменяются соответствующими аппроксимирующими последовательностями обычных функций. В то же время, предельный переход в регуляризованном ПМП, подобно [15], ведет к получению «привычного» в таких задачах ПМП для оптимального управления с указанными атомическими мерами в коэффициентах сопряженной краевой задачи.

2. Постановка задачи оптимального управления с недифференцируемыми функционалами. Пусть $U \subset \mathbb{R}^1$, $W \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклые компакты, $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x, t) : x \in S, t \in (0, T)\}$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_2(Q_T) : u(x, t) \in U \text{ п. в. на } Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{w \in L_2(S_T) : w(x, t) \in W \text{ п. в. на } S_T\}$, $\mathcal{D} \subset L_2(Q_T) \times L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$. Для нормы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с элементами $\pi \equiv (u, w)$ будем использовать обозначение $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Рассмотрим выпуклую задачу условной минимизации сильно выпуклого функционала с конечным числом функциональных ограничений-равенств

$$f(\pi) \rightarrow \min, \quad g(\pi) = 0, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}. \quad (\text{ОС})$$

Здесь сильно выпуклый функционал $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ и векторный функционал $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^l$ задаются равенствами

$$f(\pi) \equiv \langle A_{0,1}(\cdot, \cdot)z[\pi](\cdot, \cdot), z[\pi](\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} \langle A_{0,2}(\cdot)z[\pi](\cdot, T), z[\pi](\cdot, T) \rangle_{L_2(\Omega)} + \\ + \langle A_{0,3}(\cdot, \cdot)z[\pi](\cdot, \cdot), z[\pi](\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)} \langle B_1(\cdot, \cdot)u(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} + \langle B_2(\cdot, \cdot)w(\cdot, \cdot), w(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)},$$

$$g(\pi) \equiv A_1 z_m[\pi] + A_2,$$

$$z_m[\pi] \equiv (z[\pi](x_1, t_1), \dots, z[\pi](x_m, t_m))^*(x_i, t_i) \in \overline{Q}_{\iota, T}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \iota \in (0, T),$$

где $z[\pi]$ — решение класса $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ [8, гл. III] третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения

$$z_t - \sum_{i=1}^n z_{x_i x_i} + a(x, t)z + u(x, t) = 0, \quad (1)$$

$$z(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x, t)z = w(x, t), \quad (x, t) \in S_T.$$

Здесь и ниже мы используем обозначения функциональных пространств и норм их элементов, принятые в монографии [8]; символ $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве.

Ниже будут нужны следующие условия на исходные данные оптимизационной задачи (ОС):

- (i) функции $A_{0,1}: Q_T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $A_{0,3}: S_T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $B_1: Q_T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $B_2: S_T \rightarrow \mathbb{R}^1$ являются измеримыми по Лебегу, $A_{0,2} \in C(\overline{\Omega})$;
- (ii) справедливы неравенства

$$0 \leq A_{0,1}(x, t) \leq L \text{ при п. в. } (x, t) \in Q_T, \quad 0 \leq A_{0,2}(x) \leq L \text{ при п. в. } x \in \Omega,$$

$$0 \leq A_{0,3}(x, t) \leq L \text{ при п. в. } (x, t) \in S_T, \quad \kappa < B_1(x, t) \leq L, \text{ при п. в. } (x, t) \in Q_T,$$

$$\kappa < B_2(x, t) \leq L \text{ при п. в. } (x, t) \in S_T,$$

где κ, L — некоторые положительные постоянные;

- (iii) функции $a: Q_T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\sigma: S_T \rightarrow \mathbb{R}^1$ измеримы в смысле Лебега, $v_0 \in C(\overline{\Omega})$, A_1 — заданная $(l \times m)$ -матрица, A_2 — заданный вектор из $\mathbb{R}^l$;
- (iv) справедливы оценки

$$|a(x, t)| \leq K_1 \text{ п. в. на } Q_T, \quad |\sigma(s, t)| \leq K_1 \text{ п. в. на } S_T,$$

где $K_1 > 0$ — некоторая постоянная;

- (v) граница S является границей класса $C^{2,\gamma}$, $\gamma \in (0, 1]$, т.е. S — такая $(n-1)$ -мерная поверхность класса $C^{2,\gamma}$, что область Ω лежит локально по одну сторону от S . При этом функция принадлежит классу $C^{2,\gamma}$, если она дважды гладкая и ее вторые производные принадлежат гильбертовскому классу H^γ .

Пусть $\mathbf{F}$ — множество всевозможных наборов исходных данных

$$\mathbf{f} \equiv \{A_{0,i}, i = 1, 2, 3, A_i, i = 1, 2, B_i, i = 1, 2, a, v_0, \sigma\},$$

для каждого из которых выполняются условия (i)–(v) с постоянными L, κ, K_1, C_0 , не зависящими от набора. Определим наборы невозмущенных $\mathbf{f}^0$ и возмущенных $\mathbf{f}^\delta$ исходных данных, соответственно:

$$\mathbf{f}^0 \equiv \{A_{0,i}^0, i = 1, 2, 3, A_i^0, i = 1, 2, B_i^0, i = 1, 2, a^0, v_0^0, \sigma^0\},$$

$$\mathbf{f}^\delta \equiv \{A_{0,i}^\delta, i = 1, 2, 3, A_i^\delta, i = 1, 2, B_i^\delta, i = 1, 2, a^\delta, v_0^\delta, \sigma^\delta\},$$

где $\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки:

$$\|A_{0,1}^\delta - A_{0,1}^0\|_{\infty, Q_T}, |A_{0,2}^\delta - A_{0,2}^0|_{\overline{\Omega}}^{(0)}, \|A_{0,3}^\delta - A_{0,3}^0\|_{\infty, S_T}, |A_i^\delta - A_i^0| \leq \delta, \quad i = 1, 2,$$

$$\|B_1^\delta - B_1^0\|_{\infty, Q_T}, \|B_2^\delta - B_2^0\|_{\infty, S_T}, \|a^\delta - a^0\|_{\infty, Q_T}, |v_0^\delta - v_0^0|_{\overline{\Omega}}^{(0)}, \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty, S_T} \leq \delta. \quad (2)$$

Обозначим задачу (ОС), функционал f , оператор g , решение $z[\pi]$ начально-краевой задачи (1), соответствующие набору исходных данных $\mathbf{f}^\delta$, $\delta \in [0, \delta_0]$, через (ОС^δ) , f^δ , g^δ , $z^\delta[\pi]$, соответственно. Единственное решение (так как $\kappa > 0$, то функционал $f^0: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ сильно выпуклый) задачи (ОС^0) , если оно существует, обозначим через π^0 . Определим обобщенное значение β задачи (ОС^0) :

$$\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon, \quad \beta_\epsilon \equiv \inf_{\pi \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} f^0(\pi), \quad \beta_\epsilon \equiv +\infty, \quad \text{если } \mathcal{D}^{0,\epsilon} = \emptyset,$$

где $\mathcal{D}^{\delta, \epsilon} \equiv \{\pi \in \mathcal{D} : |g^\delta(\pi)| \leq \epsilon\}$, $\epsilon \geq 0$, $\mathcal{D}^{0,0} \equiv \mathcal{D}^0$. Очевидно, в общей ситуации $\beta \leq \beta_0$, где

$$\beta_0 \equiv \inf_{\pi \in \mathcal{D}^0} f^0(\pi)$$

— классическое значение в задаче (OC⁰). В задаче (OC⁰) ввиду сильной выпуклости f^0 имеет место равенство $\beta = \beta_0$.

Как уже отмечалось выше, центральным для нас в данной работе является понятие минимизирующего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги (см. [3]). Напомним, что МПР в задаче (OC⁰) — это такая последовательность элементов $\pi^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$, что $f^0(\pi^i) \leq \beta + \delta^i$, $\pi^i \in \mathcal{D}^{\epsilon^i}$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i , ϵ^i , $i = 1, 2, \dots$.

В соответствии с общим определением МПР-образующего оператора (см. [14]) введем соответствующее определение для задачи (OC⁰).

Определение 1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k , $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k} , удовлетворяющих оценкам (2) при $\delta = \delta^k$, элемент $\pi^{\delta^k} \in \mathcal{D}$ называется МПР-образующим в задаче (OC⁰), если $f^0(\pi^{\delta^k}) \rightarrow \beta$, $|g^0(\pi^{\delta^k})| \rightarrow 0$, $\delta^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Определим, наконец, функционал Лагранжа задачи (OC ^{δ}):

$$L^\delta(\pi, \lambda) \equiv f^\delta(\pi) + \langle \lambda, g^\delta(\pi) \rangle, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l,$$

и поставим двойственную задачу:

$$V^\delta(\lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l, \quad V^\delta(\lambda) \equiv \min_{\pi \in \mathcal{D}} L^\delta(\pi, \lambda).$$

3. Задача оптимального управления как задача выпуклого программирования, усреднение по Стеклову недифференцируемых функционалов.

3.1. Разрешимость начально-краевой задачи (1). Сформулируем прежде всего необходимые утверждения, связанные с разрешимостью начально-краевой задачи (1).

Во-первых, из условий (iii)–(v) и [8, гл. III, § 5, теорема 5.1] (см. также [10]), следует разрешимость краевых задач (прямой и сопряженной) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$.

Утверждение 1. Для любой пары $\pi \equiv (u, w) \in L_2(Q_T) \times L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$ при любом $T > 0$ и любом наборе исходных данных $f \in \mathcal{F}$ исходная (прямая) задача (1) однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T)$ и справедлива оценка¹

$$|z[\pi]|_{Q_T} + \|z[\pi]\|_{2, S_T} \leq C_T(\|u\|_{2, Q_T} + \|v_0\|_{2, \Omega} + \|w\|_{2, S_T}), \quad (3)$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f и пары управляющих параметров $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{H}$. Кроме того, однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любых функций $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$ при любом $T > 0$ и сопряженная задача

$$-\eta_t - \sum_{i=1}^n \eta_{x_i x_i} + a(x, t)\eta = \chi(x, t), \quad (4)$$

$$\eta(x, T) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \eta}{\partial N} + \sigma(x, t)\eta = \omega(x, t), \quad (x, t) \in S_T.$$

Для ее решения $\eta[\chi, \psi, \omega]$ так же, как в случае прямой задачи, справедлива оценка

$$|\eta[\chi, \psi, \omega]|_{Q_T} + \|\eta[\chi, \psi, \omega]\|_{2, S_T} \leq C_T^1(\|\chi\|_{2, Q_T} + \|\psi\|_{2, \Omega} + \|\omega\|_{2, S_T}), \quad (5)$$

в которой постоянная C_T^1 не зависит от набора исходных данных f и тройки $(\chi, \psi, \omega) \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$.

¹Как и в [8], $|z|_{Q_T} \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|z(\cdot, t)\|_{2, \Omega} + \|z_x\|_{2, Q_T}$ — норма в банаховом пространстве $V_2^{1,0}(Q_T)$.

Во-вторых, одновременно, из условий (iii)–(v) и теорем существования обобщенного решения класса $V_2^{1,0}(Q_T)$, традиционно обозначаемого еще как $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$, третьей краевой задачи для линейного параболического уравнения дивергентного вида [20, теорема 3.2] (см. также [21, утверждения 3.3, 3.4]) следует разрешимость краевых задач (прямой (1) и сопряженной (4)) в классе $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$. Можно утверждать, что справедливо следующее утверждение, которое аналогично утверждению 1, но речь в нем идет о несколько иных свойствах решений и коэффициентов краевых задач.

Утверждение 2. Для любой пары $\pi \equiv (u, w) \in L_p(Q_T) \times L_r(S_T)$ при любом $T > 0$ и любом наборе исходных данных $f \in F$ однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ прямая задача (1) и справедлива при $p > n/2 + 1$, $r > n + 1$ оценка¹

$$|z[\pi]|_{\overline{Q_T}}^{(0)} \leq C_T(\|u\|_{p, Q_T} + |v_0|_{\overline{\Omega}}^{(0)} + \|w\|_{r, S_T}), \quad (6)$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f и пары управляющих параметров $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{D}$. Помимо того, одновременно однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ для любой тройки (χ, ψ, ω) , $\chi \in L_p(Q_T)$, $\psi \in C(\overline{\Omega})$, $\omega \in L_r(S_T)$, и сопряженная задача (4). Для ее решения также справедлива оценка

$$|\eta[\chi, \psi, \omega]|_{\overline{Q_T}}^{(0)} \leq C_T(\|\chi\|_{p, Q_T} + |\psi|_{\overline{\Omega}}^{(0)} + \|\omega\|_{r, S_T}), \quad (7)$$

в которой постоянная C_T также не зависит от набора исходных данных f и тройки (χ, ψ, ω) .

3.2. Задача оптимального управления как задача выпуклого программирования. В силу линейности начально-краевой задачи (1) и оценок утверждений 1, 2 при любом наборе исходных данных f значения непрерывного функционала $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ и непрерывного векторного функционала $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^l$ определены на каждой паре управлений $\pi \in \mathcal{D}$ (функционал $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ определен на самом деле на всем пространстве $\mathcal{H}$). Одновременно функционал $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ является сильно выпуклым и его постоянная сильной выпуклости κ благодаря условиям на исходные данные не зависит от набора f .

С формальной точки зрения мы имеем задачу выпуклого программирования, невозмущенную при $\delta = 0$ и возмущенную при $\delta > 0$, с непрерывным сильно выпуклым функционалом качества и с векторным ограничением-равенством (с конечным числом функциональных ограничений-равенств),

$$f^\delta(\pi) \rightarrow \min, \quad g^\delta(\pi) = 0, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}. \quad (P^\delta)$$

Мы не можем утверждать, что непрерывный векторный функционал $g^\delta: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^l$ является аффинным непрерывным векторным функционалом на всем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (точнее говоря, мы не можем утверждать, что непрерывный векторный функционал $A_1^\delta z_m^\delta[\pi], \pi \in \mathcal{D}$ является линейным непрерывным на всем $\mathcal{H}$), так как предложения 1, 2, строго говоря, не обеспечивают его определенность для элементов $\pi \in \mathcal{H} \setminus L_p(Q_T) \times L_r(S_T)$. В этом состоит важная особенность задачи (P^δ) . При этом векторный функционал g^δ таков, что

$$g^\delta(\alpha\pi_1 + (1 - \alpha)\pi_2) = \alpha g^\delta(\pi_1) + (1 - \alpha)g^\delta(\pi_2) \quad \forall \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{D}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Получим в силу оценок (2) оценки отклонения возмущенных исходных данных $\{f^\delta, g^\delta\}$ от невозмущенных $\{f^0, g^0\}$ в задаче выпуклого программирования (P^0) . С этой целью нам потребуются прежде всего оценки отклонения решений начально-краевой задачи (1) при возмущении управлений и исходных данных. Следствием априорных оценок утверждений 1, 2 с учетом неравенств $p > n/2 + 1 \geq 2$, $r > n + 1 \geq 2$ является

Лемма 1. Справедлива оценка

$$|z[\pi]|_{Q_T} + |z[\pi]|_{\overline{Q_T}}^{(0)} \leq C_T,$$

¹Как и в [8], $|z|_X^{(0)} \equiv \max_{x \in X} |z(x)|$ — норма в банаховом пространстве $C(X)$.

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных $\mathbf{f}$ и пары $\pi \in \mathcal{D}$. Пусть $\mathbf{f}, \mathbf{f}^\dagger \in \mathbf{F}$ — два произвольных набора исходных данных. Для любых двух пар управлений $\pi^1, \pi \in \mathcal{D}$ имеет место оценка

$$|z^\dagger[\pi^1] - z[\pi]|_{Q_T} + |z^\dagger[\pi^1] - z[\pi]|_{Q_T}^{(0)} \leq C_T \left(|z[\pi]|_{Q_T}^{(0)} \|a^\dagger - a\|_{p, Q_T} + \right. \\ \left. + \|u^1 - u\|_{p, Q_T} + |v_0^\dagger - v_0|_{\Omega}^{(0)} + \|w^1 - w\|_{r, S_T} + |z[\pi]|_{Q_T}^{(0)} \|\sigma^\dagger - \sigma\|_{r, S_T} \right), \quad (8)$$

в которой, как и выше, постоянная C_T не зависит от наборов исходных данных $\mathbf{f}, \mathbf{f}^\dagger$ и пар управлений $\pi, \pi^1 \in \mathcal{D}$.

В силу непрерывности сильно выпуклого функционала $f^0: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ и классических свойств слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала на выпуклом множестве в гильбертовом пространстве, а также с учетом дифференцируемости по Фреше функционала $f^0: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ в точках множества $\mathcal{D}$ (последнее устанавливается на основе оценки (3) утверждения 1 подобно тому как это сделано для функционала Лагранжа в лемме 3 ниже) можно утверждать, что справедлива

Лемма 2. Если $\beta < +\infty$, то для любого МПР π^i , $i = 1, 2, \dots$, в задаче (P^0) справедливы предельные соотношения

$$f^0(\pi^i) \rightarrow \beta = \beta_0 = f^0(\pi^0), \quad \|\pi^i - \pi^0\|_{\mathcal{H}}, \quad i \rightarrow \infty.$$

В силу ограниченности множеств U, W , оценок (2), (3) и оценки (8) можем записать

$$|z^\delta[\pi] - z^0[\pi]|_{Q_T}^{(0)} \leq C\delta, \quad (9)$$

где постоянная C не зависит от набора исходных данных $\mathbf{f}$ и управления $\pi \in \mathcal{D}$. Из оценок (2), (9), в свою очередь, следуют оценки для отклонения целевого функционала

$$|f^\delta(\pi) - f^0(\pi)| \leq C_1\delta, \quad (10)$$

а также векторного функционала, задающего ограничение-равенство

$$|A_1^\delta z_m^\delta[\pi] + A_2^\delta - A_1^0 z_m^0[\pi] - A_2^0| = |g^\delta(\pi) - g^0(\pi)| \leq C_2\delta,$$

в которых постоянные $C_1, C_2 > 0$ следует считать не зависящими от δ и управления $\pi \in \mathcal{D}$. Таким образом, оценки отклонения возмущенных исходных данных $\{f^\delta, g^\delta\}$ от невозмущенных $\{f^0, g^0\}$ в задаче (P^0) получены. Кроме того, можно утверждать, что для функционалов $f^\delta, \delta \in [0, \delta_0]$ в силу предложений 1, 2 выполняется неравенство

$$|f^\delta(\pi^1) - f^\delta(\pi^2)| \leq L_1 \|\pi^1 - \pi^2\|_{\mathcal{H}},$$

с независимой от $\pi^1, \pi^2 \in \mathcal{D}$, $\delta \in [0, \delta_0]$ постоянной $L_1 > 0$, а функционал $g^\delta, \delta \in [0, \delta_0]$ благодаря тем же предложениям и компактности множеств U, W является непрерывным (и ограниченным) на $\mathcal{D}$.

3.3. Усреднение по Стеклову недифференцируемых функционалов, задающих ограничения-равенства. Мы получили формальную возмущенную задачу (P^δ) и одновременно оценки отклонения ее исходных данных от исходных данных «точной» задачи (P^0) .

Эти оценки дают формальную возможность получения, по аналогии с [14], регуляризованных ПЛ в задаче (P^0) , а затем, как следствие, регуляризованных ПЛ и ПМП и в исходной задаче (OS^0) . При этом основную роль, как и в [14], играют точки минимума функционала Лагранжа. Однако, если мы в данный момент будем получать условия оптимальности этой точки, как точки доставляющей минимум функционалу Лагранжа в задаче его минимизации, как простейшей задачи оптимального управления, мы неизбежно получим принцип максимума, сопряженная задача в котором будет содержать атомические меры Радона в «правых» частях уравнения и краевого условия, а также в «начальном» условии на правом конце временного интервала $[0, T]$. Такая ситуация была рассмотрена ранее в работе [15]. Здесь мы поступим несколько иначе. Для того чтобы избежать в конечном итоге использования мер Радона при формулировке регуляризованных

ПМП, мы организуем еще одно возмущение в задаче (ОС^δ), а именно организуем «сглаживание» функционала g^δ и будем использовать вместо «точечных» функционалов $z[\cdot](x_i, t_i)$, $i = 1, \dots, m$, более «привычные» интегральные функционалы. Это «сглаживание» гарантирует нам, кроме того, такое важное с практической точки зрения свойство как дифференцируемость по Фреше функционала Лагранжа в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (см. ниже первое утверждение леммы 3).

Для реализации этой схемы нам потребуется ниже следующее условие:

- (vi) для решения $z[\pi]$, $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{D}$, начально-краевой задачи (1) при $0 < \iota < T$ для некоторой постоянной $\gamma \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$|z[\pi]|_{\overline{\Omega} \times [\iota, T]}^{(\gamma, \gamma/2)} \leq C_T^2, \quad (11)$$

в которой постоянная C_T^2 зависит лишь от $T, \Omega, n, p, r, C_0, \iota$, но не зависит, как и показатель γ , от набора исходных данных $\mathbf{f}$ и пары управляющих параметров $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{D}$.

Существуют разные группы условий на исходные данные задач оптимального управления, подобных задаче (ОС^δ), которые обеспечивают выполнимость условия (vi). В частности, можно заметить, что его выполнимость вытекает из [22, следствие 3.2] (в случае полулинейного параболического уравнения дивергентного вида) с учетом того, что решение $z[\pi]$ класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ является одновременно, в силу [21, предложение 3.3], и решением класса $W(0, T)^1$.

Введем далее «сглаженные» с помощью усреднения по Стеклову функционалы

$$z^{\delta, h, i}[\pi] \equiv \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \int_{S_h(x_i, t_i) \cap Q_T} z^\delta[\pi](x, t) dx dt, \quad i = 1, \dots, m$$

где $S_h(x_i, t_i)$ — шар достаточно малого радиуса h с центром в $(x_i, t_i) \in \overline{Q}_{\iota, T}$ и определим формально новую возмущенную задачу

$$f^\delta(\pi) \rightarrow \inf, \quad g^{\delta, h}(\pi) = 0, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad (P^{\delta, h})$$

где

$$g^{\delta, h}(\pi) \equiv A_1^\delta z_m^{\delta, h}[\pi] + A_2^\delta, \quad z_m^{\delta, h}[\pi] \equiv (z^{\delta, h, 1}[\pi], \dots, z^{\delta, h, m}[\pi]).$$

Оценим отклонение $g^{\delta, h}(\pi) - g^0(\pi)$. Можем записать

$$\begin{aligned} |z^{\delta, h, i}[\pi] - z^0[\pi](x_i, t_i)| &= \left| \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \int_{S_h(x_i, t_i) \cap Q_T} (z^\delta[\pi](x, t) - z^0[\pi](x_i, t_i)) dx dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \int_{S_h(x_i, t_i) \cap Q_T} |z^\delta[\pi](x, t) - z^0[\pi](x, t)| dx dt + \\ &\quad + \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \int_{S_h(x_i, t_i) \cap Q_T} |z^0[\pi](x, t) - z^0[\pi](x_i, t_i)| dx dt, \end{aligned}$$

откуда в силу оценки (9) и оценки (11), считая, что параметр сглаживания h достаточно мал, получаем

$$|z^{\delta, h, i}[\pi] - z^0[\pi](x_i, t_i)| \leq L_2(\delta + h^\gamma),$$

где постоянная $L_2 > 0$ не зависит от δ, h , а также от $\pi \in \mathcal{D}$. Таким образом, учитывая равномерную ограниченность решений $z^\delta[\pi]$ (см. оценки леммы 1) и оценки (2) для отклонений $|A_1^\delta - A_1^0|$, $|A_2^\delta - A_2^0|$ можем записать искомую оценку

$$|g^{\delta, h}(\pi) - g^0(\pi)| \leq L_3(\delta + h^\gamma), \quad (12)$$

¹Подробности, связанные с пространством решений $W(0, T; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))') = \left\{ y \in L_2(0, T; H^1(\Omega)) : \frac{dy}{dt} \in L_2(0, T; (H^1(\Omega))') \right\}$, обозначаемого также через $W(0, T)$, можно найти в [5, 9].

где постоянная $L_3 > 0$ не зависит от δ , h , а также от $\pi \in \mathcal{D}$. Итак, вместо задачи (P^δ) мы имеем теперь сглаженную задачу $(P^{\delta,h})$ и соответствующие оценки (10) и (12) для отклонений ее исходных данных от исходных данных задачи (P^0) . Кроме того, непрерывный векторный функционал $g^{\delta,h}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^l$ является теперь при $\delta \geq 0$, $h > 0$ аффинным непрерывным векторным функционалом и на всем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, так как предложение 1 теперь обеспечивает его определенность и для элементов $\pi \in \mathcal{H} \setminus L_p(Q_T) \times L_r(S_T)$, а также дифференцируемость по Фреше на $\mathcal{H}$ при $h > 0$.

4. Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с конечным числом «точечных» ограничений-равенств.

Задача $(P^{\delta,h})$ представляет собою частный случай задачи выпуклого программирования, рассматривавшейся ранее в [13, 14, 17]. Это задача $(P_{p,r}^\delta)$ в [13], задача (P^δ) в [14, с. 256], задача (P^δ) в [17, с. 608]. Здесь в качестве гильбертова пространства допустимых элементов Z выступает пространство $\mathcal{H}$, в качестве пространства H — пространство $\mathbb{R}^l$ и отсутствуют ограничения-неравенства. Поэтому для получения анонсированных регуляризованных КУО в задаче (OC^0) необходимо далее «расшифровать» касающиеся регуляризации КУО соответствующие утверждения этих работ в терминах исходной задачи (OC^0) .

Переходим к формулировкам регуляризованных ПЛ и ПМП в задаче (OC^0) . Определим, прежде всего, функционал Лагранжа задачи $(P^{\delta,h}) = (OC^{\delta,h})$

$$L^{\delta,h}(\pi, \lambda) \equiv f^\delta(\pi) + \langle \lambda, g^{\delta,h}(\pi) \rangle, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l,$$

его точку минимума $\pi^{\delta,h}[\lambda] \equiv \operatorname{argmin}\{L^{\delta,h}(\pi, \lambda) : \pi \in \mathcal{D}\}$ и двойственную задачу

$$V^{\delta,h}(\lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l, \quad V^{\delta,h}(\lambda) \equiv \min_{\pi \in \mathcal{D}} L^{\delta,h}(\pi, \lambda).$$

Отметим при этом, что операция $\min$ в определении целевой функции двойственной задачи законна, так как функционал $L^{\delta,h}(\cdot, \lambda)$ при каждом $\lambda \in \mathbb{R}^l$, благодаря условиям на исходные данные задачи $(P^{\delta,h})$ при $\delta \in [0, \delta_0]$, $h > 0$ является сильно выпуклым на выпуклом замкнутом множестве $\mathcal{D}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$. При этом минимум достигается для каждого $\delta \in [0, \delta_0]$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$ в единственной точке $\pi^{\delta,h}[\lambda] \in \mathcal{D}$. Функция $V^{\delta,h}$ является определенной для любой точки $\lambda \in \mathbb{R}^l$ и вогнутой на $\mathbb{R}^l$, $V^{\delta,0}(\lambda) \equiv V^\delta(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$, $\delta \in [0, \delta_0]$.

В отличие от функционала $L^\delta(\cdot, \lambda) \equiv L^{\delta,0}(\cdot, \lambda)$ мы можем гарантировать дифференцируемость по Фреше функционала $L^{\delta,h}(\cdot, \lambda)$ при $h > 0$. Обоснование этого факта см. ниже в лемме 3. Это обстоятельство важно с точки зрения практического нахождения минимали функционала $L^{\delta,h}(\cdot, \lambda)$.

4.1. Теорема сходимости алгоритма двойственной регуляризации. Прежде всего, сформулируем теорему сходимости алгоритма двойственной регуляризации для задачи (OC^0) . Обозначим через $\lambda^{\delta,h,\alpha(\delta,h)}$ точку максимума в задаче

$$V^{\delta,h}(\lambda) - \alpha(\delta, h) \|\lambda\|^2 \rightarrow \sup, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l.$$

Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta + h^\gamma}{\alpha(\delta, h)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta, h) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (13)$$

Следствием утверждений [14, теорема 1] и [17, теорема 1] является следующая теорема.

Теорема 1 (алгоритм двойственной регуляризации в задаче оптимального управления).

Пусть выполняются условия (i)–(vi) и задача (OC^0) разрешима. Пусть также δ^k , h^k , $k = 1, 2, \dots$ — произвольные сходящиеся к нулю последовательности положительных чисел. Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) задача, при условии согласования (13) справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} (\delta^k + (h^k)^\gamma) |\lambda^{\delta^k, h^k, \alpha(\delta^k, h^k)}| &\rightarrow 0, \quad f^0(\pi^{\delta^k, h^k}[\lambda^{\delta^k, h^k, \alpha(\delta^k, h^k)}]) \rightarrow f^0(\pi^0), \\ g^0(\pi^{\delta^k, h^k}[\lambda^{\delta^k, h^k, \alpha(\delta^k, h^k)}]) &\rightarrow 0, \quad \delta^k \rightarrow 0, \quad h^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, алгоритм $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий элемент $R(f^{\delta^k}, \delta^k) \equiv \pi^{\delta^k, h^k}[\lambda^{\delta^k, h^k, \alpha(\delta^k, h^k)}] \in \mathcal{D}$ в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k} , удовлетворяющих оценкам (2) при $\delta = \delta^k$, является МПР-образующим в смысле определения 1 в задаче (ОС⁰). Одновременно, так как сильно выпуклый функционал f^0 является и субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках $\mathcal{D}$, то справедливо и предельное соотношение

$$\|\pi^{\delta^k, h^k}[\lambda^{\delta^k, h^k, \alpha(\delta^k, h^k)}] - \pi^0\| \rightarrow 0, \quad \delta^k \rightarrow 0, \quad h^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

4.2. *Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина.* Переходим далее непосредственно к формулировкам регуляризованных ПЛ и ПМП. Следствием теоремы 3 из [14], в которой ввиду сильной выпуклости функционала f^δ следует регуляризирующий параметр ε^k равным нулю, является следующее утверждение.

Теорема 2 (регуляризованный ПЛ в задаче оптимального управления). Пусть выполняются условия (i)–(vi) и $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $\delta^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $h^k > 0$, $h^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ — произвольные фиксированные последовательности.

Для того, чтобы в задаче (ОС⁰) существовало МПР, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\lambda^k \in \mathbb{R}^l$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что $\delta^k |\lambda^k| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и выполняются включения

$$\pi^{\delta^k, h^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k, \gamma^k}, \quad \gamma^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (14)$$

и предельное соотношение

$$\langle \lambda^k, g^{\delta^k, h^k}(\pi^{\delta^k, h^k}[\lambda^k]) \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Указанная последовательность $\pi^{\delta^k, h^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым МПР и

$$\|\pi^{\delta^k, h^k}[\lambda^k] - \pi^0\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Другими словами, оператор, задаваемый равенством $R(f^{\delta^k}, \delta^k) = \pi^{\delta^k, h^k}[\lambda^k]$, является МПР-образующим (см. определение 1) в задаче (ОС⁰). Одновременно с предельным соотношением $\delta^k |\lambda^k| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ и соотношениями (14), (15) выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^k) \rightarrow \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^l} V^0(\lambda) = \min_{\pi \in \mathcal{D}^0} f^0(\pi).$$

В качестве конкретной последовательности $\lambda^k \in \mathbb{R}^l$, $k = 1, 2, \dots$, может быть взята, например, последовательность $\lambda^{\delta^k, h^k, \alpha(\delta^k, h^k)}$, $k = 1, 2, \dots$, вырабатываемая МПР-образующим алгоритмом теоремы 1.

Получим теперь регуляризованный ПМП для задачи (ОС⁰) на основе теоремы 2. Рассмотрим для этого «простейшую» задачу оптимального управления

$$L^{\delta, h}(\pi, \lambda) \equiv f^\delta(\pi) + \langle \lambda, g^{\delta, h}(\pi) \rangle \rightarrow \min, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad (16)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^l$ — фиксированный вектор. Единственным решением этой задачи является управление $\pi^{\delta, h}[\lambda]$. Получим ПМП для него в задаче (16).

Введем предварительно стандартные обозначения:

$$H_1^\delta(x, t, u, \eta) \equiv -u\eta - B_1^\delta(x, t)u^2, \quad H_2^\delta(s, t, w, \eta) \equiv w\eta - B_2^\delta(s, t)w^2.$$

Лемма 3. Пусть выполняются условия (i)–(vi). Справедливы следующие два утверждения:

1. Функционал $L^{\delta, h}(\pi, \lambda)$, $\pi \in L_2(Q_T) \times L_2(S_T)$ непрерывно дифференцируем по Фреше.
2. Пара $\pi^{\delta, h}[\lambda]$ при $\lambda \in \mathbb{R}^l$, доставляющая минимальное значение в задаче (16), удовлетворяет ПМП, т.е. удовлетворяет при $\pi \equiv (u, w) = \pi^{\delta, h}[\lambda] \equiv (u^{\delta, h}[\lambda], w^{\delta, h}[\lambda])$ соотношениям максимума

$$\begin{aligned} H_1^\delta(x, t, u(x, t), \eta^{\delta, h}[\pi](x, t)) &= \max_{u \in U} H_1^\delta(x, t, u, \eta^{\delta, h}[\pi](x, t)) \text{ н. в. на } Q_T, \\ H_2^\delta(s, t, w(s, t), \eta^{\delta, h}[\pi](s, t)) &= \max_{w \in W} H_2^\delta(s, t, w, \eta^{\delta, h}[\pi](s, t)) \text{ н. в. на } S_T, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\eta^{\delta,h}[\pi]$ — решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned}
 & -\eta_t - \sum_{i=1}^n \eta_{x_i x_i} + a^\delta(x, t)\eta + 2A_{0,1}^\delta(x, t)z^\delta[\pi](x, t) + \\
 & \quad + \sum_{i=1}^l (A_1^{\delta*}\lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \chi_i^h(x, t) = 0, \quad (18) \\
 & \eta(x, T) = -2A_{0,2}^\delta(x)z^\delta[\pi](x, T), \quad x \in \Omega, \\
 & \frac{\partial \eta}{\partial N} + \sigma^\delta(x, t)\eta = -2A_{0,3}^\delta(s, t)z^\delta[\pi](s, t), \quad (x, t) \in S_T,
 \end{aligned}$$

$\chi_i^h(x, t) \equiv \{1, (x, t) \in S_h(x_i, t_i) \cap Q_T; 0, (x, t) \in Q_T \setminus S_h(x_i, t_i) \cap Q_T\}$ — характеристическая функция множества $S_h(x_i, t_i) \cap Q_T$, а через $(A_1^{\delta*}\lambda)_i$ обозначена i -я компонента вектора $A_1^{\delta*}\lambda$.

Обратно, в силу выпуклости задачи любой элемент $\pi \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий вместе с некоторой $\lambda \in \mathbb{R}^l$ соотношениям (17), (18) доставляет минимум в задаче (16), т.е. $\pi = \pi^{\delta,h}[\lambda]$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Как можно заметить, для приращения функционала $L^{\delta,h}$ справедливо следующее равенство для любых двух пар $\pi^1, \pi \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
 L^{\delta,h}(\pi^1, \lambda) - L^{\delta,h}(\pi, \lambda) = & \langle A_{0,1}^\delta(\cdot, \cdot)(z^\delta[\pi^1](\cdot, \cdot) + z^\delta[\pi](\cdot, \cdot)), z^\delta[\pi^1](\cdot, \cdot) - z^\delta[\pi](\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} + \\
 & + \langle A_{0,2}^\delta(\cdot)(z^\delta[\pi^1](\cdot, T) + z^\delta[\pi](\cdot, T)), z^\delta[\pi^1](\cdot, T) - z^\delta[\pi](\cdot, T) \rangle_{L_2(\Omega)} + \\
 & + \langle A_{0,3}^\delta(\cdot, \cdot)(z^\delta[\pi^1](\cdot, \cdot) + z^\delta[\pi](\cdot, \cdot)), z^\delta[\pi^1](\cdot, \cdot) - z^\delta[\pi](\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)} + \\
 & + \langle B_1^\delta(\cdot, \cdot)u^1(\cdot, \cdot), u^1(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} - \langle B_1^\delta(\cdot, \cdot)u(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} + \\
 & + \langle B_2^\delta(\cdot, \cdot)w^1(\cdot, \cdot), w^1(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)} - \langle B_2^\delta(\cdot, \cdot)w(\cdot, \cdot), w(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)} + \\
 & + \sum_{i=1}^m (A_1^{\delta*}\lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \int_{Q_T} \chi_i^h(x, t) (z^\delta[\pi^1](x, t) - z^\delta[\pi](x, t)) dx dt.
 \end{aligned}$$

Можем записать также начально-краевую задачу для приращения $\Delta z^\delta \equiv z^\delta[\pi^1] - z^\delta[\pi]$:

$$\begin{aligned}
 \Delta z_t^\delta - \sum_{i=1}^n \Delta z_{x_i x_i}^\delta + a^\delta(x, t)\Delta z^\delta + (u^1(x, t) - u(x, t)) &= 0, \\
 \Delta z^\delta(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \Delta z^\delta}{\partial N} + \sigma^\delta(x, t)\Delta z^\delta &= (w^1(x, t) - w(x, t)), \quad (x, t) \in S_T.
 \end{aligned}$$

Преобразуя выражение для приращения функционала $L^{\delta,h}$ с учетом этой начально-краевой задачи в силу [11, лемма 3.3] (см. также [16, лемма 3]), получаем

$$\begin{aligned}
 L^{\delta,h}(\pi^1, \lambda) - L^{\delta,h}(\pi, \lambda) = & \int_{S_T} (u^1(x, t) - u(x, t)) \eta^{\delta,h}[\pi^1, \pi](x, t) dx dt - \int_{S_T} (w^1(s, t) - w(s, t)) \eta^{\delta,h}[\pi^1, \pi](s, t) ds dt + \\
 & + \langle B_1^\delta(\cdot, \cdot)u^1(\cdot, \cdot), u^1(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} - \langle B_1^\delta(\cdot, \cdot)u(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} + \\
 & + \langle B_2^\delta(\cdot, \cdot)w^1(\cdot, \cdot), w^1(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)} - \langle B_2^\delta(\cdot, \cdot)w(\cdot, \cdot), w(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)}, \quad (19)
 \end{aligned}$$

где $\eta^{\delta,h}[\pi^1, \pi] \equiv \eta^{\delta,h}[\pi^1, \pi, \lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$, $\eta^{\delta,h}[\pi, \pi] \equiv \eta^{\delta,h}[\pi, \pi, \lambda] \equiv \eta^{\delta,h}[\pi]$, — решение вспомогательной (промежуточной) сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -\eta_t - \sum_{i=1}^n \eta_{x_i x_i} + a^\delta(x, t)\eta + A_{0,1}^\delta(x, t)(z^\delta[\pi^1](x, t) + z^\delta[\pi](x, t)) + \\ + \sum_{i=1}^l (A_1^{\delta*} \lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \chi_i^h(x, t) = 0, \\ \eta(x, T) = -A_{0,2}^\delta(x)(z^\delta[\pi^1](x, T) + z^\delta[\pi](x, T)), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \eta}{\partial N} + \sigma^\delta(x, t)\eta = -A_{0,3}^\delta(s, t)(z^\delta[\pi^1](s, t) + z^\delta[\pi](s, t)), \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned}$$

Замечая теперь, что в силу оценки (3) утверждения 1 для любого фиксированного $\pi \in \mathcal{H}$

$$\|z^\delta[\pi^1] - z^\delta[\pi]\|_{Q_T} + \|z^\delta[\pi^1] - z^\delta[\pi]\|_{2, S_T} \rightarrow 0 \text{ при } \|\pi^1 - \pi\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0,$$

и, как следствие, с учетом оценки (5) того же утверждения

$$\|\eta^{\delta,h}[\pi^1, \pi] - \eta^{\delta,h}[\pi]\|_{Q_T} + \|\eta^{\delta,h}[\pi^1, \pi] - \eta^{\delta,h}[\pi]\|_{2, S_T} \rightarrow 0 \text{ при } \|\pi^1 - \pi\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0,$$

можем заключить, опустив некоторые элементарные преобразования, что первое утверждение доказываемой леммы является верным.

Докажем второе утверждение. Необходимость. Пусть теперь в (19) $\pi^1, \pi \in \mathcal{D}$. В качестве π возьмем пару $\pi^{\delta,h}[\lambda] \equiv (u^{\delta,h}[\lambda], w^{\delta,h}[\lambda])$, в качестве π^1 — ее вариацию $\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda] \equiv (u_\epsilon^{\delta,h}[\lambda], w_\epsilon^{\delta,h}[\lambda])$, которую определим ниже. При получении ПМП в задаче (16) нам потребуется, как и в [11], игольчатое варьирование граничного управления $w^{\delta,h}[\lambda]$ и одновременно понятие точки Лебега суммируемой функции, задаваемой на боковой поверхности S_T . Используем ниже достаточно подробное описание такого варьирования и соответствующую лемму 3.6 в [11] (см. также [19, лемма 7.2]).

Пусть далее $(\bar{x}, \bar{t})$ — точка Лебега (см., например, [2, гл. I, § 1, п. 1.7]) функций

$$(u' - u^{\delta,h}[\lambda](x, t))\eta^{\delta,h}[\pi^{\delta,h}[\lambda]](x, t), \quad B_1^\delta(s, t)[(u')^2 - (u^{\delta,h}[\lambda](x, t))^2], \quad (x, t) \in Q_T, \quad u' \in U^*,$$

$(\bar{s}, \bar{\tau})$ — точка Лебега функций (см. определение точки Лебега для заданной на боковой поверхности S_T функции и лемму 3.6 в [11])

$$(w' - w^{\delta,h}[\lambda](s, t))\eta^{\delta,h}[\pi^{\delta,h}[\lambda]](s, t), \quad B_2^\delta(s, t)[(w')^2 - (w^{\delta,h}[\lambda](s, t))^2], \quad (s, t) \in S_T, \quad w' \in W^*,$$

а U^*, W^* — счетные всюду плотные множества в U и W соответственно.

Благодаря классическим свойствам точек Лебега (см., в частности, [2, гл. I, § 1, п. 1.7] и лемму 3.6 в [11]), такой выбор точек $(\bar{x}, \bar{t})$, $(\bar{s}, \bar{\tau})$ возможен, причем лебегова мера множеств всех таких точек $(\bar{x}, \bar{t})$, $(\bar{s}, \bar{\tau})$ совпадает с лебеговыми мерами цилиндра Q_T и его боковой поверхности S_T соответственно.

Определим вариации управлений $u^{\delta,h}[\lambda]$, $w^{\delta,h}[\lambda]$ следующим образом:

$$u_\epsilon^{\delta,h}[\lambda](x, t) \equiv \begin{cases} u \in U^*, & \text{если } (x, t) \in P_{\bar{x}, \bar{t}}^\epsilon \equiv \{\bar{x}_i - \epsilon \leq x_i \leq \bar{x}_i, i = 1, \dots, n, \bar{t} - \epsilon \leq t \leq \bar{t}\}; \\ u^{\delta,h}[\lambda](x, t), & \text{если } (x, t) \in Q_T \setminus P_{\bar{x}, \bar{t}}^\epsilon; \end{cases} \quad (20)$$

$$w_\epsilon^{\delta,h}[\lambda](s, t) \equiv \begin{cases} w \in W^*, & \text{если } (s, t) \in S_T^\epsilon(\bar{s}, \bar{\tau}); \\ w^{\delta,h}[\lambda](s, t), & \text{если } (s, t) \in S_T \setminus S_T^\epsilon(\bar{s}, \bar{\tau}); \end{cases} \quad (21)$$

где множество $S_T^\epsilon(\bar{s}, \bar{\tau})$ определяется равенством 3.26 в [11]. Так как в силу оценки (6)

$$\|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda]] - z^\delta[\pi^{\delta,h}[\lambda]]\|_{Q_T}^{(0)} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

то, учитывая оценку (7), можем утверждать, что справедливо предельное соотношение

$$\left| \eta^{\delta,h}[\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda], \pi^{\delta,h}[\lambda]] - \eta^{\delta,h}[\pi^{\delta,h}[\lambda]] \right|_{Q_T}^{(0)} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Последнее предельное соотношение с учетом классических свойств точек Лебега (см., в частности, [2, гл. I, § 1, п. 1.7] и лемму 3.6 в [11]) позволяет нам для получения ПМП использовать выражение для приращения (19) функционала Лагранжа $L^{\delta,h}(\cdot, \lambda)$ и сначала вычислить первую вариацию для этого функционала в случае $\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda] = (u_\epsilon^{\delta,h}[\lambda], w^{\delta,h}[\lambda])$ как предел (см. формулу (20))

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \left(L^{\delta,h}(\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda], \lambda) - L^{\delta,h}(\pi^{\delta,h}[\lambda], \lambda) \right),$$

а затем — в случае $\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda] = (u^{\delta,h}[\lambda], w_\epsilon^{\delta,h}[\lambda])$ — как предел (см. формулу (21))

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_T(S_T^\epsilon(\bar{s}, \bar{\tau}))} \left(L^{\delta,h}(\pi_\epsilon^{\delta,h}[\lambda], \lambda) - L^{\delta,h}(\pi^{\delta,h}[\lambda], \lambda) \right).$$

В результате этих двух предельных переходов получаем неравенства

$$\begin{aligned} (u' - u^{\delta,h}[\lambda](\bar{x}, \bar{t}))\eta^{\delta,h}[\pi^{\delta,h}[\lambda]](\bar{x}, \bar{t}) + (B_1^\delta(\bar{x}, \bar{t})(u')^2 - B_1^\delta(\bar{x}, \bar{t})(u^{\delta,h}[\lambda](\bar{x}, \bar{t}))^2) &\geq 0 \quad \forall u' \in U^*, \\ (w' - w^{\delta,h}[\lambda](\bar{s}, \bar{\tau}))\eta^{\delta,h}[\pi^{\delta,h}[\lambda]](\bar{s}, \bar{\tau}) + (B_2^\delta(\bar{s}, \bar{\tau})(w')^2 - B_2^\delta(\bar{s}, \bar{\tau})(w^{\delta,h}[\lambda](\bar{s}, \bar{\tau}))^2) &\geq 0 \quad \forall w' \in W^*. \end{aligned}$$

Так как лебегова мера множеств всех таких точек $(\bar{x}, \bar{t})$, $(\bar{s}, \bar{\tau})$ совпадает с лебеговыми мерами цилиндра Q_T и его боковой поверхности S_T соответственно, а функции в левых частях последних двух неравенств непрерывны по u' и по w' , также соответственно, то приходим к формулировке поточечного ПМП (17) доказываемой леммы 3 в задаче (16).

Как результат, получаем ПМП для управления $\pi^{\delta,h}[\lambda]$, замечая одновременно, что доказательство достаточности соотношений ПМП в этом случае проводится аналогично доказательству достаточности в случае леммы 3.4 в [11]. $\square$

После доказательства ПМП леммы 3 для простейшей задачи оптимального управления (16) мы можем переформулировать полученный выше регуляризованный ПЛ теоремы 2, для задачи (P^0) в форме регуляризованного ПМП. С целью указанной переформулировки прежде всего обозначим через $\Pi_m^{\delta,h}[\lambda]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих ПМП леммы 3 в задаче (16). Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости $f^\delta(\cdot)$, это множество состоит из одного элемента $\Pi_m^{\delta,h}[\lambda] \equiv \pi_m^{\delta,h}[\lambda]$ и справедливо равенство $\pi_m^{\delta,h}[\lambda] = \pi^{\delta,h}[\lambda] \equiv \operatorname{argmin}\{L^{\delta,h}(\pi, \lambda) : \pi \in \mathcal{D}\}$. Тогда непосредственным следствием теоремы 2 и леммы 3 является регуляризованный ПМП для задачи оптимального управления (OC⁰).

Теорема 3 (регуляризованный ПМП в задаче оптимального управления). *Предположим, что выполняются условия (i)–(vi). Тогда все утверждения теоремы 2 остаются справедливыми и в том случае, если в них $\pi^{\delta^k, h^k}[\lambda^k]$ заменяется везде на $\pi_m^{\delta^k, h^k}[\lambda^k]$.*

5. О приближенном решении задачи оптимального управления с бесконечномерным поточечным фазовым ограничением-равенством на основе регуляризованных принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина. Выше была рассмотрена регуляризация ПЛ и ПМП в задаче оптимального управления (OC⁰) с конечным числом «точечных» ограничений-равенств

$$\begin{aligned} g(\pi) &\equiv A_1 z_m[\pi] + A_2 = 0, \\ z_m[\pi] &\equiv (z[\pi](x_1, t_1), \dots, z[\pi](x_m, t_m))^*(x_i, t_i) \in \bar{Q}_{i,T}, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \in (0, T). \end{aligned}$$

В данном разделе мы обсудим как эти результаты можно применить для приближенного решения задачи оптимального управления с бесконечномерным поточечным фазовым ограничением-равенством

$$f^\delta(\pi) \rightarrow \min, \quad \tilde{g}^\delta(\pi) = 0, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}, \quad (\text{OC}_{\text{IDE}}^\delta)$$

которая отличается от задачи (OC^δ) лишь тем, что вместо конечномерного ограничения-равенства содержит бесконечномерное (вообще говоря) поточечное фазовое ограничение-равенство

$$\tilde{g}^\delta[\pi](x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathcal{Q} \subseteq \overline{Q}_{\iota, T},$$

где

$$\tilde{g}^\delta[\pi](x, t) \equiv \tilde{A}_1^\delta(x, t)z[\pi](x, t) + \tilde{A}_2^\delta(x, t),$$

$\mathcal{Q}$ — произвольное замкнутое множество из $\overline{Q}_{\iota, T}$, $\tilde{A}_1^\delta, \tilde{A}_2^\delta: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^1$ — заданные непрерывные функции, $\delta \in [0, \delta_0]$. При этом «роль» матрицы A_1^δ и вектора A_2^δ задачи (OC^δ) здесь играют соответственно непрерывные функции $\tilde{A}_1^\delta, \tilde{A}_2^\delta$, для которых имеют место оценки для отклонений

$$|\tilde{A}_i^\delta - \tilde{A}_i^0|_{\mathcal{Q}}^{(0)} \leq \delta, \quad i = 1, 2,$$

заменяющие оценки $|A_i^\delta - A_i^0| \leq \delta$, $i = 1, 2$, в (2). Подчеркнем, что в отличие от задачи (OC^0) , в которой множество $\mathcal{Q}$ состоит из конечного числа точек в $\overline{Q}_{\iota, T}$, в задаче (OC_{IDE}^0) оно может быть произвольным замкнутым множеством из $\overline{Q}_{\iota, T}$.

Предположим, что точная задача OC_{IDE}^δ разрешима. Ее (единственное) решение обозначим через π^0 . Введем конечную $1/N(m)$ -сеть $\{(x_1, t_1), \dots, (x_m, t_m)\}$, $m = 1, 2, \dots$, множества $\mathcal{Q}$, $N(m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, и обозначим, как и в задаче (OC^δ) ,

$$z_m^\delta[\pi] \equiv (z^\delta[\pi](x_1, t_1), \dots, z^\delta[\pi](x_m, t_m)).$$

Определим вспомогательную задачу

$$f^\delta(\pi) \rightarrow \min, \quad \tilde{g}_m^\delta(\pi) = 0, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}, \quad (OC_m^\delta)$$

где

$$\tilde{g}_m^\delta(\pi) \equiv \left\{ \tilde{A}_1^\delta(x_1, t_1)z^\delta[\pi](x_1, t_1) + \tilde{A}_2^\delta(x_1, t_1), \dots, \tilde{A}_1^\delta(x_m, t_m)z^\delta[\pi](x_m, t_m) + \tilde{A}_2^\delta(x_m, t_m) \right\}.$$

Можно утверждать, что ввиду разрешимости задачи OC_{IDE}^δ является разрешимой и точная задача (OC_m^0) при каждом $m = 1, 2, \dots$. Ее единственное решение обозначим через π_m^0 . Можно заметить, что задача (OC_m^δ) соответствует задаче (OC^δ) с $(m \times m)$ -матрицей A_1^δ , у которой на главной диагонали стоят элементы $\tilde{A}_1^\delta(x_i, t_i)$, $i = 1, \dots, m$, а все остальные ее элементы равны нулю. Покажем, что справедливо предельное соотношение

$$\|\pi_m^0 - \pi^0\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Заметим для этого прежде всего, что, так как π_m^0 , $m = 1, 2, \dots$ — последовательность равномерно ограниченных функций (U, W — выпуклые компакты), то можно без ограничения общности считать, что π_m^0 слабо в $\mathcal{H}$ сходится к некоторой паре управлений $\bar{\pi} \in \mathcal{D}$. Покажем, что $\bar{\pi} = \pi^0$, что, в конечном итоге, и обеспечит справедливость предельного соотношения (22).

Действительно, во-первых, так как $f^0: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ непрерывный выпуклый функционал, то он является и слабо полунепрерывным снизу. По этой причине в силу слабой сходимости π_m^0 к $\bar{\pi}$ при $m \rightarrow \infty$ получаем, что

$$f^0(\bar{\pi}) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} f^0(\pi_m^0). \quad (23)$$

Так как при этом $f^0(\pi_m^0) \leq f^0(\pi^0)$ (в силу равенства $\tilde{g}^0(\pi^0) = 0$), то

$$f^0(\pi_0) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} f^0(\pi_m^0), \quad f^0(\bar{\pi}) \leq f^0(\pi^0). \quad (24)$$

Покажем, во-вторых, что $\tilde{g}^0(\bar{\pi}) = 0$. Но это равенство является следствием следующих обстоятельств. Первое из них, благодаря оценке (6), обеспечивающей непрерывность линейного оператора

$$z[\cdot]: L_p(Q_T) \times L_r(S_T) \rightarrow C(\overline{Q}_T),$$

позволяет утверждать, что из слабой без ограничения общности сходимости

$$\pi_m^0 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \bar{\pi}$$

в пространстве $L_p(Q_T) \times L_r(S_T)$ вытекает и слабая сходимость

$$z^0[\pi_m^0] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} z^0[\bar{\pi}]$$

в пространстве $C(\bar{Q}_T)$, т.е. (см. [7, гл. VIII, § 3, теорема 3]) поточечная сходимость

$$z^0[\pi_m^0] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} z^0[\bar{\pi}]$$

всюду в $C(\bar{Q}_T)$. Так как одновременно в силу условия (vi) функции семейства $z^0[\pi_m^0]$, $m = 1, 2, \dots$, являются равномерно ограниченными и равномерно непрерывными и, к тому же $\tilde{g}^0(\pi_m^0) = 0$, то указанная поточечная сходимость приводит к доказываемому равенству $\tilde{g}^0(\bar{\pi}) = 0$. Последнее равенство и полученное выше неравенство $f^0(\bar{\pi}) \leq f^0(\pi^0)$ позволяют заключить, что $\bar{\pi} = \pi^0$ и, стало быть, в силу единственности решения π^0 исходной задачи, π_m^0 слабо в $\mathcal{H}$ сходится при $m \rightarrow \infty$ к π^0 , причем

$$f^0(\pi^0) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} f^0(\pi_m^0)$$

в силу (23). Таким образом, объединяя (23) и (24), получаем

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} f^0(\pi_m^0) \leq f^0(\pi^0) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} f^0(\pi_m^0).$$

Последние неравенства означают, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f^0(\pi_m^0) = f^0(\pi^0).$$

Последняя сходимость в совокупности с доказанной слабой сходимостью π_m^0 к π^0 при $m \rightarrow \infty$ и тем фактом, что f^0 — сильно выпуклый и дифференцируемый по Фреше функционал (дифференцируемость по Фреше устанавливается так же, как и аналогичная дифференцируемость функционала Лагранжа из первого утверждения леммы 3), позволяют утверждать, что предельное соотношение (22) справедливо.

Благодаря предельному соотношению (22) и конечной $1/N(m)$ -сети при достаточно больших m мы можем сколь угодно точно аппроксимировать оптимальное управление π^0 в задаче ОС $_{\text{IDE}}^\delta$ посредством оптимальных управлений π_m^0 задач (ОС $_{\text{IDE}}^\delta$). Наконец, каждое из управлений π_m^0 можно сколь угодно точно аппроксимировать посредством элементов генерируемых регуляризованными ПЛ и ПМП теорем 2, 3 МПР с достаточно большими порядковыми номерами. Тем самым оптимальное управление π^0 в задаче ОС $_{\text{IDE}}^\delta$ с бесконечномерным фазовым ограничением-равенством может быть сколь угодно точно аппроксимировано посредством элементов МПР с достаточно большими порядковыми номерами генерируемых регуляризованными ПЛ и ПМП указанных теорем, полученных для задач с конечномерными ограничениями-равенствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
2. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.
4. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. — М.: МЦНМО, 2011.
5. Гаевский Г., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1978.
6. Гамкрелидзе Р. В. Математические работы Л. С. Понтрягина // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 1998. — 60. — С. 5–23.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
9. Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
10. Плотников В. И. Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений // Докл. АН СССР. — 1965. — 165, № 1. — С. 33–35.

11. *Сумин М. И.* О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклом оптимальном управлении // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 207. — С. 120–143.
12. *Сумин М. И.* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2019. — 25, № 1. — С. 279–296.
13. *Сумин М. И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — 51, № 9. — С. 1594–1615.
14. *Сумин М. И.* О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2020. — 26, № 2. — С. 252–269.
15. *Сумин М. И.* Двойственная регуляризация и принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального граничного управления для параболического уравнения с недифференцируемыми функционалами // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2011. — 17, № 1. — С. 229–244.
16. *Сумин М. И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2004. — 44, № 11. — С. 2001–2019.
17. *Сумин М. И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2007. — 47, № 4. — С. 602–625.
18. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
19. *Casas E.* Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations // SIAM J. Control Optim. — 1997. — 35. — P. 1297–1327.
20. *Casas E., Raymond J.-P., Zidani H.* Pontryagin's principle for local solutions of control problems with mixed control-state constraints // SIAM J. Control Optim. — 2000. — 39, № 4. — P. 1182–1203.
21. *Raymond J.-P., Zidani H.* Hamiltonian Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations // Appl. Math. Optim. — 1999. — 39, № 2. — P. 143–177.
22. *Raymond J.-P., Zidani H.* Pontryagin's principle for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls // SIAM J. Control Optim. — 1998. — 36, № 6. — P. 1853–1879.

Сумин Михаил Иосифович

Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина;

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

E-mail: m.sumin@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 79–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-79-90

УДК 515.12

СЦЕПЛЕННОСТЬ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ, СУПЕРКОМПАКТНОСТЬ И НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

© 2022 г. А. Г. ЧЕНЦОВ

Аннотация. Исследуется конструкция, имеющая смысл абстрактного аналога суперрасширения топологического пространства, а также некоторые новые типы суперкомпактных топологических пространств. Кроме того, изучаются соотношения, связывающие ультрафильтры и максимальные сцепленные системы на широко понимаемом измеримом пространстве.

Ключевые слова: сцепленность, суперкомпактность, топология, ультрафильтр.

LINKEDNESS OF FAMILIES OF SETS, SUPERCOMPACTNESS, AND SOME GENERALIZATIONS

© 2022 А. G. CHENTSOV

ABSTRACT. We examine a construction that has the meaning of an abstract analog of a superextension of a topological space and new types of supercompact topological spaces. In addition, we study relations between ultrafilters and maximal linked systems on measurable spaces.

Keywords and phrases: linkedness, supercompactness, topology, ultrafilter.

AMS Subject Classification: 54A09, 54A10, 54B05

1. Введение. Свойство компактности и свойства типа компактности играют в современной математике исключительно важную роль; см. [2]. Одним из таких свойств является суперкомпактность; см. [2, 5.11] и [12, гл. VII, § 4]. В связи с изучением данного свойства, а также вопроса о построении суперрасширения топологического пространства (ТП), особо отметим оригинальные работы [27–29] (как правило, рассматриваются суперрасширения T_1 -пространств; здесь и ниже используем терминологию [25]). Точками пространства суперрасширения являются [12, гл. VII, § 4] максимальные сцепленные системы (МСС) замкнутых множеств в ТП (обычно в T_1 -пространстве). Напомним, что сцепленным называется семейство множеств, у которого любые два множества пересекаются; сцепленными являются все фильтры (см. [4, гл. I, § 6]). Наиболее интересными свойствами обладают максимальные сцепленные подсемейства заданных априори семейств множеств. Что касается самого заданного априори семейства, то в [2, 12, 27–29] оно предполагалось совпадающим с решеткой замкнутых множеств T_1 -пространства. Можно однако поставить вопрос шире, а именно можно предполагать заданной некоторую первичную «измеримую» структуру; в качестве таковой можно принять π -систему [3, с. 14] с «нулем» и «единицей». Для данной π -системы можно рассматривать сцепленные подсемейства, выделяя среди последних максимальные; упомянутые максимальные сцепленные подсемейства исходной π -системы именуем далее МСС на данной π -системе или просто МСС, если понятно, о какой π -системе идет речь. При этом фильтры π -системы являются сцепленными подсемействами последней, а ультрафильтры (u/f), т. е.

максимальные фильтры, являются МСС. В то же время возможны МСС, не являющиеся у/ф. Такие МСС называем собственными. Отмечено, что пространство МСС в волмэновском оснащении суперкомпактно и может рассматриваться в виде абстрактной версии суперрасширения.

Семейство МСС на π -системе общего вида оснащается двумя сравнимыми топологиями волмэновского и стоуновского типов (см. [18, 19, 22] и др.), которые в совокупности реализуют битопологическое пространство (БТП). Аналогичное БТП реализуется на множестве у/ф при оснащении топологиями волмэновского и стоуновского типов. Эти топологии индуцируются, как оказалось, волмэновской и стоуновской топологиями на множестве МСС. Иными словами, БТП с точками в виде у/ф может рассматриваться как подпространство БТП с точками в виде МСС. Указаны случаи, когда оба вышеупомянутых БТП вырождаются (волмэновская и стоуновская топологии совпадают), а также условия, при которых, напротив, оба БТП не вырождены в том смысле, что волмэновская и стоуновская топологии различаются. Отдельно рассматривается вопрос о существовании и представлении собственных МСС. При отсутствии собственных МСС пространство у/ф с топологией волмэновского типа оказывается суперкомпактным (соответствующие условия на π -систему будут указаны).

Наконец, представляется важным вопрос об условиях делимости пространства МСС в волмэновском оснащении. Для классического варианта суперрасширения они указаны, например, в [12, гл. VII, предложение 4.16]; имеется в виду делимость суперрасширения T_4 -пространства. Однако в абстрактной версии суперрасширения, когда предваряющая «измеримая» структура задается π -системой, упомянутые условия [12, гл. VII, предложение 4.16] оказываются ограничительными и, в ряде случаев, неприменимыми. Так или иначе, они не охватывают ряд случаев, когда делимость топологии волмэновского типа имеет место. В этой связи предлагаются более общие достаточные условия. Указаны также некоторые следствия, касающиеся вопроса об делимости пространства у/ф с топологией волмэновского типа.

2. Общие сведения и обозначения. Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки; $\emptyset$ — пустое множество); через $\triangleq$ обозначаем равенство по определению. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x и y — объекты, то через $\{x; y\}$ обозначаем их неупорядоченную пару (множество, содержащее x , y и не содержащее никаких других элементов). Для произвольного объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z . Объектами являются множества, а потому для произвольных объектов u и v в виде $(u, v) \triangleq \{\{u\}; \{u; v\}\}$ имеем [10, с. 67] упорядоченную пару (УП) с первым элементом u и вторым элементом v . Если же h есть какая-либо УП, то через $\text{pr}_1(h)$ и $\text{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h соответственно; эти элементы однозначно определяются условием $h = (\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h))$. Для любых трех объектов u , v и w полагается, что $\{u; v; w\} \triangleq \{u; v\} \cup \{w\}$.

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H ; тогда $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$ (семейство всех непустых п/м H) и $\text{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Для любых двух множеств A и B через B^A обозначаем (см. [10, гл. II, § 6]) множество всех отображений (функций), действующих из A в B ; разумеется, выражение $f \in B^A$ тождественно тому, что $f: A \rightarrow B$. Значения отображений обозначаем традиционно: $f(x) \in B$, где $f \in B^A$ и $x \in A$. Если A, B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ множества C при действии f , а $(f|C) \in B^C$ есть сужение f на C : $(f|C)(\tilde{x}) \triangleq f(\tilde{x}) \forall \tilde{x} \in C$.

2.1. Операции над семействами. Если $\mathbf{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{M}))$ (т. е. $\mathcal{M}$ есть непустое семейство п/м $\mathbf{M}$), то

$$\mathcal{C}_{\mathbf{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbf{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{M}))$$

есть семейство п/м $\mathbf{M}$, двойственное к $\mathcal{M}$. Непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

$\mathcal{A}$ на множество B . Произвольному непустому семейству $\mathfrak{X}$ сопоставляем семейства $\{\cup\}(\mathfrak{X})$, $\{\cap\}(\mathfrak{X})$, $\{\cup\}_\#(\mathfrak{X})$ и $\{\cap\}_\#(\mathfrak{X})$, определяемые в [19, раздел 2] (имеются в виду семейство всех объединений подсемейств $\mathfrak{X}$, семейство всех пересечений непустых подсемейств $\mathfrak{X}$, семейства всех конечных объединений и конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$ соответственно).

2.2. Специальные семейства. До конца настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. В виде

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \left\{ \mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\emptyset \in \mathcal{I}) \ \& \ (\mathbf{I} \in \mathcal{I}) \ \& \ (A \cap B \in \mathcal{I} \ \forall A \in \mathcal{I} \ \forall B \in \mathcal{I}) \right\} \quad (1)$$

имеем семейство всех π -систем п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей»; π -системы из семейства

$$\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \triangleq \left\{ \mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{I} \ \forall x \in \mathbf{I} \setminus L \ \exists \Lambda \in \mathcal{I} : (x \in \Lambda) \ \& \ (\Lambda \cap L = \emptyset) \right\} \quad (2)$$

называем отделимыми; кроме того, пусть

$$\begin{aligned} \pi_\#^*[\mathbf{I}] \triangleq \left\{ \mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall I_1 \in \mathcal{I} \ \forall I_2 \in \mathcal{I} \ \forall I_3 \in \mathcal{I} \right. \\ \left. ((I_1 \cap I_2 \neq \emptyset) \ \& \ (I_2 \cap I_3 \neq \emptyset) \ \& \ (I_1 \cap I_3 \neq \emptyset)) \implies (I_1 \cap I_2 \cap I_3 \neq \emptyset) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

В виде $(\text{alg})[\mathbf{I}] \triangleq \{ \mathcal{A} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A} \ \forall A \in \mathcal{A} \}$ имеем семейство всех алгебр п/м $\mathbf{I}$, а

$$(\text{top})[\mathbf{I}] \triangleq \left\{ \tau \in \pi[\mathbf{I}] : \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau) \right\}$$

есть семейство всех топологий на $\mathbf{I}$; $(\text{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{ \mathbf{C}_\mathbf{I}[\tau] : \tau \in (\text{top})[\mathbf{I}] \}$ — семейство всех замкнутых топологий [1, с. 98] на $\mathbf{I}$. Последние три семейства являются решетками. В этой связи введем семейство

$$(\text{LAT})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{ \mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid A \cup B \in \mathcal{I} \ \forall A \in \mathcal{I} \ \forall B \in \mathcal{I} \}$$

всех решеток п/м $\mathbf{I}$. Итак,

$$(\text{alg})[\mathbf{I}] \subset (\text{LAT})_0[\mathbf{I}], \quad (\text{top})[\mathbf{I}] \subset (\text{LAT})_0[\mathbf{I}], \quad (\text{clos})[\mathbf{I}] \subset (\text{LAT})_0[\mathbf{I}].$$

Полуалгебры п/м $\mathbf{I}$ являются π -системами из семейства $\pi[\mathbf{I}]$, но, вообще говоря, не являются решетками п/м $\mathbf{I}$. Из вышеупомянутых построений следует, что именно π -системы (см. (1)–(3)) образуют очень общий класс подсемейств $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, охватывающий структуры теории меры и топологии. Если $\mathcal{I}$ — семейство и H — множество, то

$$[\mathcal{I}](H) \triangleq \{ I \in \mathcal{I} \mid H \subset I \} \in \mathcal{P}(\mathcal{I}). \quad (4)$$

2.3. Базы и предбазы топологических пространств. Через $(\text{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\text{p-BAS})[\mathbf{I}]$ обозначаем семейства всех открытых баз и предбаз на множестве $\mathbf{I}$ соответственно; обозначения соответствуют [19, раздел 2] и [23, (1.8), (1.9)] (имеются в виду базы и предбазы некоторых топологий на $\mathbf{I}$). Если же $\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]$, то через $(\tau\text{-BAS})_0[\mathbf{I}]$ и $(\text{p-BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$ обозначаем соответственно семейства всех открытых баз и предбаз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$; см. [19, раздел 2] и [23, раздел 1]. Ясно, что $\{\cup\}(\beta) \in (\text{top})[\mathbf{I}]$ при $\beta \in (\text{BAS})[\mathbf{I}]$; кроме того, $\{\cap\}_\#(\kappa) \in (\text{BAS})[\mathbf{I}]$ при $\kappa \in (\text{p-BAS})[\mathbf{I}]$.

2.4. Покрывтия, суперкомпактность. Если $\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то в виде

$$(\text{COV})[\mathbf{I}|\mathcal{I}] \triangleq \left\{ \kappa \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) : \mathbf{I} = \bigcup_{X \in \kappa} X \right\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{I}))$$

имеем семейство всех покрытий $\mathbf{I}$ множествами из $\mathcal{I}$. Пусть

$$((\text{SC})\text{-p-BAS})[\mathbf{I}] \triangleq \left\{ \chi \in (\text{p-BAS})[\mathbf{I}] \mid \forall \mathcal{G} \in (\text{COV})[\mathbf{I}|\chi] \ \exists G_1 \in \mathcal{G} \ \exists G_2 \in \mathcal{G} : \mathbf{I} = G_1 \cup G_2 \right\}; \quad (5)$$

элементы семейства (5) называем суперкомпактными открытыми предбазами; при $\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]$ полагаем

$$((\text{SC})\text{-p-BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \triangleq ((\text{SC})\text{-p-BAS})[\mathbf{I}] \cap (\text{p-BAS})_0[\mathbf{I}; \tau],$$

получая семейство (возможно пустое) суперкомпактных открытых предбаз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. В виде

$$((\mathbb{S}\mathbb{C})\text{-top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}] \mid ((\mathbb{S}\mathbb{C})\text{-p-BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \neq \emptyset\} \quad (6)$$

имеем семейство всех топологий, превращающих $\mathbf{I}$ в суперкомпактное ТП. Итак, ТП суперкомпактно тогда и только тогда, когда оно обладает открытой предбазой, для которой из всякого покрытия «единицы» множествами данной предбазы можно извлечь бинарное подпокрытие. Если $\tau \in ((\mathbb{S}\mathbb{C})\text{-top})[\mathbf{I}]$ и при этом $(\mathbf{I}, \tau)$ есть T_2 -пространство, то $(\mathbf{I}, \tau)$ называем суперкомпактом (см. [2, 5.11]). Суперкомпактность — топологическое свойство (сохраняется при действии гомеоморфизмов). Напомним здесь же, что компактное T_2 -пространство называют компактом (см. [2, 1.1]).

3. Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры. Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E и π -систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$; рассматриваем $(E, \mathcal{L})$ в качестве (широко понимаемого) измеримого пространства (ИП). Введем в рассмотрение семейство

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] \triangleq \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\} \quad (7)$$

всех сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$, а также семейство всех МСС на $\mathcal{L}$:

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] \mid \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] (\mathcal{E} \subset \mathcal{S} \implies (\mathcal{E} = \mathcal{S}))\}. \quad (8)$$

Как уже отмечалось, фильтры (на $\mathcal{L}$) являются сцепленными подсемействами $\mathcal{L}$ (см. (7)):

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\emptyset \notin \mathcal{F}) \ \& \ (A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F}) \ \& \ ([\mathcal{L}](F) \subset \mathcal{F} \ \forall F \in \mathcal{F})\} \subset \subset \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E]. \quad (9)$$

Введем в рассмотрение центрированные подсемейства $\mathcal{L}$, полагая, что

$$(\text{Cen})[\mathcal{L}] \triangleq \left\{ \mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) : \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} Z \neq \emptyset \ \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{Z}) \right\}.$$

Через $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ обозначим семейство всех u/ϕ на π -системе $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) &\triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) (\mathcal{U} \subset \mathcal{F} \implies (\mathcal{U} = \mathcal{F}))\} = \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} (L \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \ \forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}) \implies (L \in \mathcal{U})\} = \\ &= \{\mathcal{U} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}] (\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \implies (\mathcal{U} = \mathcal{V}))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*(\mathcal{L})). \end{aligned} \quad (10)$$

Итак, u/ϕ — суть максимальные центрированные подсемейства π -системы $\mathcal{L}$ и только они. Поскольку, как легко видеть,

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] \mid \forall L \in \mathcal{L} (L \cap \Sigma \neq \emptyset \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \implies (L \in \mathcal{E})\}, \quad (11)$$

имеем из (10), (11) следующее весьма очевидное равенство:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \mid U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U} \ \forall U_1 \in \mathcal{U} \ \forall U_2 \in \mathcal{U}\}; \quad (12)$$

при проверке (12) следует учитывать (см. (4)) очевидные свойства: $\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$

$$([\mathcal{L}](\Sigma) \subset \mathcal{E} \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \ \& \ (E \in \mathcal{E}). \quad (13)$$

Итак, u/ϕ являются МСС; называем МСС $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ собственной. Простой пример собственной МСС имеется в [12, гл. VII, 4.18].

Пример. Напомним пример [12, гл. VII, 4.18] с несущественными изменениями, полагая, что $E = \{1; 2; 3\}$. Полагаем здесь, что $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$. Пусть $\mathcal{H} \triangleq \{\{1; 2\}; \{2; 3\}; \{1; 3\}\}$ и $\mathcal{E} \triangleq \mathcal{H} \cup \{E\}$. Тогда $\mathcal{H} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E]$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ (итак, $\mathcal{E}$ — собственная МСС).

Если $L \in \mathcal{L}$, то (см. (10)) полагаем

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \cap U \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}\}. \quad (14)$$

В виде семейства всех множеств (14) реализуется, как легко видеть, π -система

$$(\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) : L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \quad (15)$$

и, в частности, открытая база: $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \in (\text{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$; порождаемая этой базой топология стоуновского типа

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \triangleq \{\cup\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]) \in (\text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \quad (16)$$

превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в нульмерное [25, 6.2] T_2 -пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \quad (17)$$

Замечание. Легко видеть (см. (14)), что

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]].$$

Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то (17) — нульмерный компакт (компактное T_2 -пространство), а последнее вложение превращается в равенство.

Другая схема (по смыслу схема Волмэна) связана с множествами, имеющими вид

$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|H] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists U \in \mathcal{U} : U \subset H\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E). \quad (18)$$

При этом, как легко видеть (см. (18)), имеем предбазу

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda] : \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]] \in (\text{p-BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})], \quad (19)$$

порождающую следующую топологию волмэновского типа:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\#}(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}^{\natural}[\mathcal{L}])) \in (\text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \quad (20)$$

При этом (см. (19), (20); [26, теорема 6.2]) в виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle) \quad (21)$$

имеем компактное T_1 -пространство. Итак, в виде (17) и (21) имеем два ТП с «единицей» $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Аналогичные пространства создаются для случая, когда точками являются МСС. Итак, при $L \in \mathcal{L}$ в виде

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0^0[E|L] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \mid L \in \mathcal{E}\} = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \mid L \cap \Sigma \neq \emptyset \forall \Sigma \in \mathcal{E}\} \quad (22)$$

имеем (см. [19, предложение 6.2], [23, (3.1)]) естественный аналог (14). Пусть, кроме того,

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|H] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \mid \exists \Sigma \in \mathcal{E} : \Sigma \subset H\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E). \quad (23)$$

С учетом (22), (23) вводим два непустых семейства

$$(\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0^0[E|L] : L \in \mathcal{L}\}) \ \& \ (\hat{\mathcal{C}}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|\Lambda] : \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\}), \quad (24)$$

обладающие свойством

$$\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] = \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]}[\hat{\mathcal{C}}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}]],$$

характеризующим (см. (24)) естественную двойственность; $\hat{\mathcal{C}}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}] \in (\text{p-BAS})[\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]]$ порождает (см. [19, раздел 5]) суперкомпактную топологию волмэновского типа:

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\#}(\hat{\mathcal{C}}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}])) \in ((\mathbb{SC})\text{-top})[\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]]. \quad (25)$$

Отметим, что (см. [23, §3]) при этом в виде

$$(\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle) \quad (26)$$

реализуется суперкомпактное T_1 -пространство, являющееся абстрактным аналогом суперрасширения [12, гл. VII, 4.12]. В то же время, как легко видеть, предбаза $\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \in (\text{p-BAS})[\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]]$ порождает топологию стоуновского типа:

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\#}(\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}])) \in (\text{top})[\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]]; \quad (27)$$

при этом (см. [19, предложение 6.4]) в виде

$$(\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle) \quad (28)$$

реализуется нульмерное T_2 -пространство (см., в частности, [19, предложение 6.1, (6.5)]). Отметим, что (см. [19, предложения 5.3, 6.5])

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}) \ \& \ (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}). \quad (29)$$

Итак, (17) есть подпространство ТП (28), а (21) — подпространство ТП (26). Согласно [19, предложение 7.1] получаем следующее предложение.

Теорема 1. *Топологии (25) и (27) сравнимы и при этом $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle$.*

Из данной теоремы с учетом (29) получаем важное свойство сравнимости топологий (16), (20):

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]. \quad (30)$$

Если X — множество, $\tau_1 \in (\text{top})[X]$, $\tau_2 \in (\text{top})[X]$ и $\tau_1 \subset \tau_2$, то триплет (X, τ_1, τ_2) будем называть битопологическим пространством (БТП); если при этом $\tau_1 = \tau_2$, то БТП (X, τ_1, τ_2) называем вырожденным (в связи с теорией и применениями БТП см. [26]). Мы получили следующие два БТП:

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]), \quad (\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle); \quad (31)$$

свойства (29) позволяют рассматривать первое (в (31)) БТП как подпространство второго.

Отметим несколько частных случаев. Прежде всего напомним, что при $L \in \mathcal{L}$

$$[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L) = \{\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}] \mid L \subset \Lambda\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (32)$$

Множества из семейства (32) называем квазиокрестностями L ; все они содержатся в $\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, т. е. являются «двойственно измеримыми»; свойство принадлежности к $\mathcal{L}$ рассматриваем как «измеримость». Итак, определено пересечение всех множеств семейства (32), которое, однако, может не принадлежать $\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, т. е. не быть «двойственно измеримым». Если же

$$\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}] \quad \forall L \in \mathcal{L}, \quad (33)$$

то каждое множество из $\mathcal{L}$ обладает наименьшей квазиокрестностью. Согласно [20, теорема 2.2] справедливо следующее

Утверждение 1. *Если выполнено (33), то справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \left\{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) : \forall L \in \mathcal{L} (L \in \mathcal{U}) \vee \left(E \setminus \left(\prod_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda \right) \in \mathcal{U} \right) \right\}. \quad (34)$$

В связи с (34) отметим, что при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \cup (\text{top})[E]$ свойство (33) истинно; при этом

$$(\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]) \implies \left(\prod_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda = L \quad \forall L \in \mathcal{L} \right) \quad (35)$$

(в случае $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ имеем равенство $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$). Если же $\mathcal{L} = \tau$, где $\tau \in (\text{top})[E]$, то при $L \in \mathcal{L}$ наименьшей квазиокрестностью L является замыкание L в ТП (E, τ) . Согласно [20, теорема 5.1] имеем полезное положение.

Утверждение 2. *Если выполнено условие (33), то $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$.*

Из предложения 1 и (35) следует, в частности, известное представление у/ф для ИП с алгеброй множеств: фильтр является у/ф тогда и только тогда, когда для каждого измеримого множества либо оно само, либо его дополнение принадлежит данному фильтру. В дополнение к предложению 2 напомним свойство, отмеченное в [19, раздел 7]: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \cup (\text{top})[E]$, то

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle, \quad (36)$$

а получающееся при этом «единое» ТП $(\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle) = (\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle)$ является нульмерным суперкомпактом (нульмерным суперкомпактным T_2 -пространством). Итак, при

$$(\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]) \vee (\mathcal{L} \in (\text{top})[E]) \quad (37)$$

оба БТП (31) вырождены (действительно, в силу (36) вырождено второе в (31) БТП, а тогда в силу (29) и (36) вырождено и первое в (31) БТП). Ясно также, что при условии (33) в виде «единого» ТП (см. предложение 2) $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle) = (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ реализуется непустой нульмерный компакт (в этой связи см. [21, теорема 5]).

В связи с рассмотрением случая, когда вышеупомянутые БТП не вырождены, напомним сначала о некоторых свойствах плотности. Для этого введем тривиальные фильтры: если $x \in E$, то $(\mathcal{L}\text{-triv})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$; при этом (см. [21, раздел 3], [15, § 8])

$$((\mathcal{L}\text{-triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall x \in E) \iff (\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]).$$

С учетом этого полагаем, пока не оговорено противное, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ (условие отделимости π -системы). Тогда E погружается в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ посредством оператора

$$\mathfrak{L} \triangleq ((\mathcal{L}\text{-triv})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E.$$

При $\tau \in (\text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ и $H \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$ через $\text{cl}(H, \tau)$ обозначим замыкание H в ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \tau)$; в качестве H можно использовать $\mathfrak{L}^1(\Sigma)$, где $\Sigma \in \mathcal{P}(E)$. Согласно [15, предложение 1, (3.2)]

$$\text{cl}(\mathfrak{L}^1(\Sigma), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap U \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}\} \ \forall \Sigma \in \mathcal{P}(E). \quad (38)$$

Вместе с тем (см. [20, предложение 7.1]) имеем свойство

$$\text{cl}(\mathfrak{L}^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle) = \text{cl}(\mathfrak{L}^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \Phi_{\mathcal{L}}(L) \ \forall L \in \mathcal{L}. \quad (39)$$

В частности, $\text{cl}(\mathfrak{L}^1(E), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle) = \text{cl}(\mathfrak{L}^1(E), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ (свойство «универсальной» плотности).

Пусть до конца настоящего раздела $\tau \in (\text{top})[E]$, ТП (E, τ) удовлетворяет аксиоме T_1 и $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$. Тогда (см. [25, 1.5]) $\{x\} \in \mathcal{L} \ \forall x \in E$. Из (2) следует, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и мы можем использовать (38), (39).

Теорема 2. Пусть T_1 -пространство (E, τ) не является дискретным, т. е. $\tau \neq \mathcal{P}(E)$. Тогда при $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle \neq \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \ \& \ (\mathbf{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle \neq \mathbf{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle). \quad (40)$$

Доказательство. Итак, пусть ТП (E, τ) не является дискретным; как следствие,

$$\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau] \neq \mathcal{P}(E), \quad \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{L} \neq \emptyset.$$

Выберем произвольно $\mathbb{H} \in \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{L} \neq \emptyset$, получая, что (см. (38))

$$\text{cl}(\mathfrak{L}^1(\mathbb{H}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathbb{H} \cap U \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}\}.$$

Поскольку $\mathbb{H} \notin \mathcal{L}$, то (см. [17, теорема 8.1]) имеем свойство

$$\text{cl}(\mathfrak{L}^1(\mathbb{H}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle) \neq \text{cl}(\mathfrak{L}^1(\mathbb{H}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]), \quad (41)$$

где $\mathfrak{L}^1(\mathbb{H}) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$. Из (41) следует первое положение в (40). Второе положение вытекает из первого с учетом (29). $\square$

Таким образом, в случае, рассматриваемом обычно при построении суперрасширения (пространство МСС на семействе замкнутых множеств T_1 -пространства) оба БТП в (31) являются невырожденными.

4. Об условиях отождествимости ультрафильтров и максимальных сцепленных систем. Полагаем в дальнейшем, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$, если не оговорены дополнительные условия. Напомним, что $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ есть множество всех собственных МСС. Пример такой МСС был рассмотрен ранее. Сейчас рассмотрим одно общее представление множества всех собственных МСС (см. [20, раздел 5]).

Утверждение 3. Справедливо равенство

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \mid \exists \Sigma_1 \in \mathcal{E} \ \exists \Sigma_2 \in \mathcal{E} \ \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E} : \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \emptyset\}. \quad (42)$$

Доказательство. Обозначим через Ω множество в правой части (42). В силу (9), (10) каждый $u/\mathfrak{f}$ (более того, каждый фильтр) замкнут относительно конечных пересечений, а потому

$$\Omega \subset \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \quad (43)$$

Пусть $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и в силу (12) для некоторых $V_1 \in \mathcal{V}$ и $V_2 \in \mathcal{V}$ имеет место свойство $V_1 \cap V_2 \notin \mathcal{V}$, а потому $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{V}$. С учетом (10) имеем для некоторого $V_3 \in \mathcal{V}$ свойство $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$. В итоге $\mathcal{V} \in \Omega$, чем и завершается проверка вложения

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \Omega.$$

С учетом (43) получаем требуемое равенство. $\square$

Теорема 3. *Следующие два условия эквивалентны:*

- (a) $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$;
- (b) $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$.

Доказательство. Учитывая (3), проверим эквивалентность отрицаний:

- (a') $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \neq \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$;
- (b') $\exists I_1 \in \mathcal{L} \exists I_2 \in \mathcal{L} \exists I_3 \in \mathcal{L} : (I_1 \cap I_2 \neq \emptyset) \& (I_2 \cap I_3 \neq \emptyset) \& (I_1 \cap I_3 \neq \emptyset) \& (I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset)$.

Пусть истинно (a'). Тогда

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset.$$

Выберем произвольно

$$\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

В силу предложения 3 существуют множества $\Sigma_1 \in \mathcal{E}$, $\Sigma_2 \in \mathcal{E}$ и $\Sigma_3 \in \mathcal{E}$, обладающие свойством

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \emptyset.$$

Поскольку $\mathcal{E}$ сцеплено и $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$, имеем (b'). Итак, (a') $\implies$ (b').

Пусть истинно (b'). Выберем и зафиксируем $M_1 \in \mathcal{L}$, $M_2 \in \mathcal{L}$ и $M_3 \in \mathcal{L}$, обладающие свойствами

$$(M_1 \cap M_2 \neq \emptyset) \& (M_2 \cap M_3 \neq \emptyset) \& (M_1 \cap M_3 \neq \emptyset) \& (M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset). \quad (44)$$

Тогда

$$\mathcal{M} \triangleq \{M_1; M_2; M_3\} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E]$$

(см. (7)). С учетом леммы Цорна $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ для некоторой МСС $\mathcal{N} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$. Тогда $M_1 \in \mathcal{N}$, $M_2 \in \mathcal{N}$ и $M_3 \in \mathcal{N}$ таковы, что $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$. В силу предложения 3 получаем, что

$$\mathcal{N} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Поэтому истинно (a'). Итак, (b') $\implies$ (a'). Следовательно, (a') $\iff$ (b'), что достаточно для того, чтобы (a) $\iff$ (b). $\square$

Заметим, что в [23] указано большое число содержательных примеров широко понимаемых ИП $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{L}})$, $\tilde{E} \neq \emptyset$, со свойством $\tilde{\mathcal{L}} \in \pi_*^\sharp[\tilde{E}]$ (см. (3)); сейчас отметим особо построения [23, § 6], касающиеся сохранения свойства принадлежности семейству (3) при произведениях, понимаемых в декартовом и в «ящичном» (имеется в виду аналогия с базой ящичной топологии; см. [7, гл. 3, задачи]) смыслах. Отметим одно полезное свойство (см. [23, предложение 4.1]).

Утверждение 4. *Если $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$, то $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] = (\text{Cen})[\mathcal{L}]$.*

Доказательство. Свойство $(\text{Cen})[\mathcal{L}] \subset \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E]$ следует из определений в общем случае π -системы $\mathcal{L}$. Пусть $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$. Выберем произвольно сцепленное семейство $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E]$. С использованием леммы Цорна можно указать МСС $\mathcal{N} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$, для которой $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. В силу теоремы 3 $\mathcal{N} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, а потому $\mathcal{N}$ замкнуто относительно конечных пересечений (см. (9), (10)); тогда согласно (9)

$$\bigcap_{U \in \mathcal{K}} U \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{N}) \quad (45)$$

(действительно, $\emptyset \notin \mathcal{N}$). Но $\text{Fin}(\mathcal{M}) \subset \text{Fin}(\mathcal{N})$, а потому из (45) вытекает, что $\mathcal{M} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}]$. Итак, $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle[E] \subset (\text{Cen})[\mathcal{L}]$ установлено. $\square$

Отметим на содержательном уровне одно полезное применение предложения 2, следуя [23, замечание 10.1] и имея в виду абстрактную задачу о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). Сейчас отметим только одно ключевое обстоятельство (подробнее см. в [23, замечание 10.1]).

Мы рассматриваем E как пространство обычных решений задачи о достижимости в регулярном [25, 1.5] ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ на значениях оператора $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$ (условия на $\mathbf{h}$ указаны в [23, § 10]). Полагаем, что на E задается некоторая первичная измеримая структура в виде π -системы $\mathcal{L} \in \pi_*^\# [E] \cap \pi^0 [E]$, а также семейство $\mathfrak{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle [E]$, определяющее ОАХ (см. [11, 14, 16]). Итак, $\mathfrak{E}$ есть сцепленное подсемейство π -системы $\mathcal{L}$. Тогда семейство $\{\cap\}_\#(\mathfrak{E})$ всех конечных пересечений множеств из $\mathfrak{E}$ является базой фильтра (в силу предложения 2 семейство $\mathfrak{E}$ центрировано, а стало быть, все множества из $\{\cap\}_\#(\mathfrak{E})$ непусты). В силу [23, (10.10)] получаем (при условии на $\mathbf{h}$, связанном с реализацией представления, подобного [23, (10.3)]) свойство непустоты множества притяжения (МП), т. е. факт существования асимптотически достижимых элементов регулярно-го пространства $(\mathbf{H}, \tau)$. При этом свойство центрированности $\mathfrak{E}$, получающееся в силу предложения 2, приводит к тому, что, как уже отмечалось, $\{\cap\}_\#(\mathfrak{E})$ есть база фильтра. В этой связи отметим построения [11, 16].

Заметим, что ОАХ, определяемые посредством $\mathfrak{E}$, могут, в частности, соответствовать случаю задач управления, в которых допускается ослабление стандартных ограничений в духе [5, гл. III, IV]; в этом случае МП может, в частности, играть роль асимптотического аналога области достижимости (см. [8, 14] и др.). Заметим, что в абстрактных задачах о достижимости с ОАХ у/ф выступают в роли обобщенных элементов, что в логическом отношении подобно применению обобщенных управлений в [6, 9, 14].

5. Об условиях отделимости топологий волмэновского типа. Напомним, что компактное ТП (21) в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ удовлетворяет аксиоме T_1 . Аналогичное свойство реализуется для суперкомпактного ТП (26); отметим в этой связи достаточные условия T_2 -отделимости пространства суперрасширения в [12, гл. VII, 4.16] (имеется в виду построение суперрасширения T_4 -пространства, когда реализуется аксиома T_2 для самого суперрасширения). В общем случае пространства МСС на π -системе $\mathcal{L}$ аналоги условий [12, гл. VII, 4.16] могут быть излишне жесткими и не охватывать случаи, когда отделимость упомянутого пространства заведомо имеет место. Речь идет о следующем условии на выбор $\mathcal{L} \in \pi[E]$: $\forall L_1 \in \mathcal{L} \forall L_2 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 \cap L_2 = \emptyset) \implies (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_1) \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_2) : \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset) \quad (46)$$

(если $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\text{top})[E]$, то (46) сводится к аксиоме T_4 ; в общем же случае $\mathcal{L}$ в (46) реализуется аналог условия, используемого в [12, гл. VII, 4.16]). Заметим, кстати, что при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ (46) выполнено. Если же $\mathcal{L} = \tau \in (\text{top})[E]$, то свойство (46) может нарушаться (это имеет место уже в случае вещественной прямой с обычной $|\cdot|$ -топологией); в то же время согласно (36) $\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$ с топологией волмэновского типа отделимо. В этой связи введем сейчас другое условие; для этого сначала отметим, что при $H \in \mathcal{P}(E)$

$$]\mathcal{L}[(H) \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid L \subset H\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}); \quad (47)$$

$\emptyset \in]\mathcal{L}[(H)$. Теперь введем требуемое (более общее) условие: $\forall L_1 \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \forall L_2 \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$

$$(L_1 \cap L_2 = \emptyset) \implies (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_1) \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_2) :]\mathcal{L}[(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \{\emptyset\}). \quad (48)$$

Разумеется, (46) $\implies$ (48). В связи с (48) см. [24, (3.13)]. Заметим, что при $L \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ непременно $\{L\} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle [E]$ и, стало быть, $L \in \mathcal{E}$ для некоторого $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$.

Теорема 4. Если выполнено условие (48), то ТП (26) является хаусдорфовым.

Доказательство. Пусть выполнено условие (48). Выберем произвольно

$$\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E], \quad \mathcal{V} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E] \setminus \{\mathcal{U}\}.$$

В силу максимальной $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ имеем

$$(\mathcal{U} \setminus \mathcal{V} \neq \emptyset) \ \& \ (\mathcal{V} \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset).$$

Выберем $V \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. Тогда в силу (11) для некоторого $U \in \mathcal{U}$ имеем свойство $U \cap V = \emptyset$. В частности, $U \in \mathcal{L}$ и $V \in \mathcal{L}$; в силу сцепленности семейств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ получаем, что $U \neq \emptyset$ и $V \neq \emptyset$, а тогда

$$(U \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}) \& (V \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}).$$

С учетом (48) можно указать $W_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U)$ и $W_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](V)$, для которых

$$\mathcal{L}[(W_1 \cap W_2) = \{\emptyset\}]. \quad (49)$$

Разумеется (см. (23)–(25)),

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_1] \in \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle, \quad \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_2] \in \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle;$$

при этом (см. (23)), конечно,

$$\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_1], \quad \mathcal{V} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_2],$$

а потому мы в виде двух вышеупомянутых множеств имеем окрестности МСС $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно. Покажем, что эти окрестности не пересекаются. Действительно, допустим противное: пусть упомянутые два множества пересекаются и

$$\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_1] \cap \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_2]. \quad (50)$$

Тогда $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_0[E]$, причем для некоторых $M_1 \in \mathcal{M}$ и $M_2 \in \mathcal{M}$ реализуются вложения $M_1 \subset W_1$ и $M_2 \subset W_2$ (см. (23), (50)). Тогда $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{L}[(W_1 \cap W_2)]$ и в силу (49) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, что противоречит сцепленности $\mathcal{M}$. Полученное противоречие показывает, что

$$\langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_1] \cap \langle \mathcal{L}\text{-link} \rangle_{\text{op}}^0[E|W_2] = \emptyset.$$

Итак, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ обладают непересекающимися окрестностями. Поскольку выбор $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ был произвольным, установлено, что ТП (26) является хаусдорфовым. $\square$

Следствие 1. Если выполнено условие (48), то ТП (26) является суперкомпактом.

Доказательство получается комбинацией (25) и теоремы 4. Заметим, что условие (46) является, конечно, достаточным для отделимости ТП (26), но, как уже отмечалось, излишне жестким; в частности, оно не охватывает случай открытых МСС. Новое условие (48) свободно от этого недостатка.

Утверждение 5. Если $\tau \in (\text{top})[E]$ и $\mathcal{L} = \tau$, то условие (48) выполнено.

Доказательство следует из [24, предложение 3.2]. Отметим теперь естественное применение теоремы 4 к исследованию ТП (21).

Теорема 5. Если выполнено условие (48), то ТП (21) является хаусдорфовым.

Доказательство получается непосредственной комбинацией (29) и теоремы 4. Теперь уже вполне очевидно

Следствие 2. При условии (48) ТП (21) является компактом.

В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая. Рассмотрим один «нестандартный» вариант T_2 -пространства МСС с топологией вольтмановского типа.

Пример (см. [24, раздел 5]). Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и $E =]a, b[$ (непустой открытый интервал). Пусть, кроме того,

$$\mathcal{L} = \{]\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z)[: z \in [a, b] \times [a, b] \}$$

(здесь и ниже все промежутки $\mathbb{R}$, понимаемые в обычном порядковом смысле, обозначаем посредством квадратных скобок, см. [13, § 1.3]; допускаем при этом произвольные соотношения для концевых точек, так что $\emptyset$ также рассматриваем как промежуток). Итак, $\mathcal{L}$ есть семейство всех открытых интервалов (включая пустой), содержащихся в E , $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Как показано в [24, предложение 4.1], в рассматриваемом случае $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию (48), а потому ТП (26) в данном конкретном случае является суперкомпактом.

Отметим также некоторые примеры, рассмотренные в [24, § 7], для которых выполнено (46), но которые не охватываются «топологическим» вариантом [12, гл. VII, 4.16], поскольку в них π -система не является, вообще говоря, семейством замкнутых множеств в ТП.

5.1. Пространство-стрелка. Сохраняем предположения предыдущего примера в отношении чисел a и b , но полагаем, что $E = [a, b[$, а $\mathcal{L} = \{ [\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z)[: z \in [a, b] \times [a, b] \}$. Получающийся вариант ИП $(E, \mathcal{L})$ (здесь $\mathcal{L} \in \pi[E]$; более того, $\mathcal{L}$ — полуалгебра п/м E) называем пространством-стрелкой. Условие (46) в рассматриваемом случае выполнено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
2. Архангельский А. В. Компактность// Итоги науки техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — 1989. — 50. — С. 7–128.
3. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1968.
5. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.
6. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1977.
7. Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981.
8. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
9. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
10. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970.
11. Пыткеев Е. Г., Ченцов А. Г. Волмэновский компактификатор и его применение для исследования абстрактной задачи о достижимости// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2018. — 28, № 2. — С. 199–212.
12. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. — М.: Физматлит, 2006.
13. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. — Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008.
14. Ченцов А. Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2011. — № 1. — С. 113–142.
15. Ченцов А. Г. Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2014. — № 1. — С. 87–101.
16. Ченцов А. Г. Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2016. — 22, № 1. — С. 294–309.
17. Ченцов А. Г. Суперрасширение как битопологическое пространство// Изв. Ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2017. — 49. — С. 55–79.
18. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2017. — № 3. — С. 122–141.
19. Ченцов А. Г. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2018. — 24, № 1. — С. 257–272.
20. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции// Изв. Ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2018. — 52. — С. 86–102.
21. Ченцов А. Г. Некоторые свойства ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств// Докл. РАН. — 2019. — 486, № 1. — С. 24–29.
22. Ченцов А. Г. Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2019. — 25, № 2. — С. 240–257.
23. Ченцов А. Г. О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа// Изв. Ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2019. — 54. — С. 74–101.
24. Ченцов А. Г. Некоторые топологические свойства пространства максимальных сцепленных систем с топологией волмэновского типа// Изв. Ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2020. — 56. — С. 122–137.
25. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
26. Dvalishvili B. P. Bitopological Spaces: Theory, Relations with Generalized Algebraic Structures, and Applications. — North-Holland, 2005.
27. de Groot J. Superextensions and supercompactness// Proc. I Int. Symp. “Extension Theory of Topological Structures and Its Applications. — Berlin: VEB Deutscher Verlag, 1969. — P. 89–90.

- 28. *van Mill J.* Supercompactness and Wallman Spaces. — Amsterdam: Math. Center Tract, 1977.
- 29. *Strok M., Szymanski A.* Compact metric spaces have binary subbases// Fund. Math. — 1975. — 89, № 1. — P. 81–91.

Ченцов Александр Георгиевич

Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского
Уральского отделения РАН, Екатеринбург;

Уральский федеральный университет

имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург

E-mail: chentsov@imm.uran.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 91–121
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-91-121

УДК 517.9; 531.01

СИСТЕМЫ С ПЯТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ.

I. ПОРОЖДАЮЩАЯ ЗАДАЧА ИЗ ДИНАМИКИ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОМЕЩЕННОГО В НЕКОНСЕРВАТИВНОЕ ПОЛЕ СИЛ

© 2022 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Работа является первой частью обзора по вопросам интегрируемости систем с пятью степенями свободы. Обзор состоит из трех частей. В данной первой части подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил. Во второй и третьей частях, которые будут опубликованы в следующем выпуске, рассмотрены более общие динамические системы на касательных расслоениях к пятимерной сфере и к достаточно обширному классу других гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

Ключевые слова: динамическая система с пятью степенями свободы, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH DISSIPATION WITH FIVE DEGREES OF FREEDOM: ANALYSIS AND INTEGRABILITY.

I. PRIMORDIAL PROBLEM FROM DYNAMICS OF A MULTIDIMENSIONAL RIGID BODY IN A NONCONSERVATIVE FIELD OF FORCES

© 2022 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. This paper is the first part of a survey on the integrability of systems with five degrees of freedom. The review consists of three parts. In this first part, the primordial problem from the dynamics of a multidimensional rigid body placed in a nonconservative force field is described in detail. In the second and third parts, which will be published in the next issue, we consider more general dynamical systems on tangent bundles to the five-dimensional sphere and other smooth manifolds of a sufficiently wide class. Theorems on sufficient conditions for the integrability of the considered dynamical systems in the class of transcendental functions are proved.

Keywords and phrases: dynamical system with five degrees of freedom, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Введение. Данная работа является обзором по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с пятью степенями свободы (ранее были опубликованы аналогичные работы автора по системам с четырьмя степенями свободы). Если конфигурационное многообразие системы — гладкое пятимерное многообразие, то касательное (кокасательное) его расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно, с системами, в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т. е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти и речи [6, 22, 30, 33].

Работа состоит из трех частей. В данной первой части проведен достаточно подробный анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики шестимерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении пятимерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [5, 24, 31, 41]).

Во второй части рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к пятимерной сфере. Данные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в первой части. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по пятимерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [50, 51, 53]).

В заключительной третьей части рассмотрены касательные расслоения к достаточно обширным классам гладких пятимерных многообразий и также предъявлены достаточные условия интегрируемости.

1. ПОРОЖДАЮЩАЯ ЗАДАЧА ИЗ ДИНАМИКИ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОМЕЩЕННОГО В НЕКОНСЕРВАТИВНОЕ ПОЛЕ СИЛ

1. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного шестимерного твердого тела, граница которого является кусочно-гладкой пятимерной поверхностью. В частности, часть этой поверхности может иметь форму пятимерного диска, являющегося многомерным «передним торцом», «взаимодействующим со средой, заполняющей шестимерное пространство», в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности (см. также [13, 19, 25]).

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (в частности, D — центр пятимерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), $\Omega \in \mathfrak{so}(6)$ — тензор угловой скорости тела. При этом $Dx_1 \dots x_6$ — такая система координат, связанная с телом, что ось динамической симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, \dots, Dx_6$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2 = \dots = I_6, m$ — главные моменты инерции тела в рассматриваемых осях и масса тела.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \dots x_6$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, 0, 0, 0, 0\}, \quad \mathbf{v}_D = v \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4), \quad (1.1.1)$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta_1 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

— единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$. Примем также следующее разложение для обобщенной силы (в частности, силы воздействия среды, при этом касательные силы, действующие на пятимерный диск, отсутствуют), действующей на шестимерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, 0, 0, 0, 0\}, \quad (1.1.3)$$

т. е. в данном случае внешняя сила $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [28, 40, 60, 64], см. далее), которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbb{R}^6$. В интересующем нас случае данная система примет вид:

$$\begin{aligned} & \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \omega_{15} v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_{14} v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \\ & - \omega_{12} v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \omega_9 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 - \\ & - \omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \sigma(\omega_{15}^2 + \omega_{14}^2 + \omega_{12}^2 + \omega_9^2 + \omega_5^2) = \frac{F_1}{m} = -\frac{S}{m}, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \omega_{15} v \cos \alpha - \\ & - \omega_{13} v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_{11} v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \omega_8 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \omega_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 - \sigma(\omega_{13} \omega_{14} + \omega_{11} \omega_{12} + \omega_8 \omega_9 + \omega_4 \omega_5) - \sigma \dot{\omega}_{15} = 0, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \\ & - \omega_{14} v \cos \alpha + \omega_{13} v \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_{10} v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ & + \omega_7 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 - \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 - \\ & - \sigma(\omega_{13} \omega_{15} - \omega_{10} \omega_{12} - \omega_7 \omega_9 - \omega_3 \omega_5) + \sigma \dot{\omega}_{14} = 0, \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ & + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 - \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \omega_{12} v \cos \alpha - \omega_{11} v \sin \alpha \cos \beta_1 + \\ & + \omega_{10} v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \omega_6 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \sigma(\omega_{11} \omega_{15} + \omega_{10} \omega_{14} - \omega_6 \omega_9 - \omega_2 \omega_5) - \sigma \dot{\omega}_{12} = 0, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 \cos \beta_4 - \dot{\beta}_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 - \\ & - \omega_9 v \cos \alpha + \omega_8 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_7 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \\ & + \omega_6 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 - \\ & - \sigma(\omega_8 \omega_{15} + \omega_7 \omega_{14} + \omega_6 \omega_{12} - \omega_1 \omega_5) + \sigma \dot{\omega}_9 = 0, \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \\ & + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \\ & + \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 \sin \beta_4 + \dot{\beta}_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \omega_5 v \cos \alpha - \omega_4 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \\ & - \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \\ & + \sigma(\omega_4 \omega_{15} + \omega_3 \omega_{14} + \omega_2 \omega_{12} + \omega_1 \omega_9) + \sigma \dot{\omega}_5 = 0, \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

$\sigma = CD$, где внешнее поле — квадратично по v (при этом можно рассмотреть более общий случай зависимости внешнего поля сил квадратичным образом и от тензора угловой скорости, но это

нам пока не потребуется):

$$S = s(\alpha)v^2. \quad (1.1.10)$$

Вспомогательная матрица для вычисления момента внешней силы (приложенной в точке N) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N} & x_{6N} \\ -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1.11)$$

тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathfrak{so}(6)$. В таком случае данная система примет вид (см. также [14, 15, 26, 27]):

$$(\lambda_5 + \lambda_6)\dot{\omega}_1 + (\lambda_5 - \lambda_6)(\omega_5\omega_9 + \omega_4\omega_8 + \omega_3\omega_7 + \omega_2\omega_6) = 0, \quad (1.1.12)$$

$$(\lambda_4 + \lambda_6)\dot{\omega}_2 + (\lambda_6 - \lambda_4)(-\omega_5\omega_{12} - \omega_4\omega_{11} - \omega_3\omega_{10} + \omega_1\omega_6) = 0, \quad (1.1.13)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_6)\dot{\omega}_3 + (\lambda_3 - \lambda_6)(\omega_5\omega_{14} + \omega_4\omega_{13} - \omega_2\omega_{10} - \omega_1\omega_7) = 0, \quad (1.1.14)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_6)\dot{\omega}_4 + (\lambda_6 - \lambda_2)(-\omega_5\omega_{15} + \omega_3\omega_{13} + \omega_2\omega_{11} + \omega_1\omega_8) = 0, \quad (1.1.15)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_6)\dot{\omega}_5 + (\lambda_1 - \lambda_6)(-\omega_4\omega_{15} - \omega_3\omega_{14} - \omega_2\omega_{12} - \omega_1\omega_9) = x_{6N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (1.1.16)$$

$$(\lambda_4 + \lambda_5)\dot{\omega}_6 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_9\omega_{12} + \omega_8\omega_{11} + \omega_7\omega_{10} + \omega_1\omega_2) = 0, \quad (1.1.17)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_5)\dot{\omega}_7 + (\lambda_5 - \lambda_3)(-\omega_9\omega_{14} - \omega_8\omega_{13} + \omega_6\omega_{10} - \omega_1\omega_3) = 0, \quad (1.1.18)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_5)\dot{\omega}_8 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_9\omega_{15} - \omega_7\omega_{13} - \omega_6\omega_{11} + \omega_1\omega_4) = 0, \quad (1.1.19)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_5)\dot{\omega}_9 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_8\omega_{15} + \omega_7\omega_{14} + \omega_6\omega_{12} - \omega_1\omega_5) = -x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (1.1.20)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_4)\dot{\omega}_{10} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_{12}\omega_{14} + \omega_{11}\omega_{13} + \omega_6\omega_7 + \omega_2\omega_3) = 0, \quad (1.1.21)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_{11} + (\lambda_4 - \lambda_2)(-\omega_{12}\omega_{15} + \omega_{10}\omega_{13} - \omega_6\omega_8 - \omega_2\omega_4) = 0, \quad (1.1.22)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_4)\dot{\omega}_{12} + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_{11}\omega_{15} + \omega_{10}\omega_{14} - \omega_6\omega_9 - \omega_2\omega_5) = x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (1.1.23)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_3)\dot{\omega}_{13} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_{14}\omega_{15} + \omega_{10}\omega_{11} + \omega_7\omega_8 + \omega_3\omega_4) = 0, \quad (1.1.24)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_{14} + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_{13}\omega_{15} - \omega_{10}\omega_{12} - \omega_7\omega_9 - \omega_3\omega_5) = -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (1.1.25)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_{15} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_{13}\omega_{14} + \omega_{11}\omega_{12} + \omega_8\omega_9 + \omega_4\omega_5) = x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2. \quad (1.1.26)$$

Таким образом, фазовым пространством системы (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) 21-го порядка является прямое произведение следующего 6-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathfrak{so}(6)$:

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbf{S}^5 \times \mathfrak{so}(6). \quad (1.1.27)$$

2. Следствия динамической симметрии. Поскольку имеется отмеченная выше динамическая симметрия

$$I_2 = \dots = I_6, \quad (1.2.1)$$

то система (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) обладает первыми интегралами

$$\begin{aligned} \omega_1 &\equiv \omega_1^0, & \omega_2 &\equiv \omega_2^0, & \omega_3 &\equiv \omega_3^0, & \omega_4 &\equiv \omega_4^0, & \omega_6 &\equiv \omega_6^0, \\ \omega_7 &\equiv \omega_7^0, & \omega_8 &\equiv \omega_8^0, & \omega_{10} &\equiv \omega_{10}^0, & \omega_{11} &\equiv \omega_{11}^0, & \omega_{13} &\equiv \omega_{13}^0, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

которые в данной работе будем рассматривать на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_4^0 = \omega_6^0 = \omega_7^0 = \omega_8^0 = \omega_{10}^0 = \omega_{11}^0 = \omega_{13}^0 = 0. \quad (1.2.3)$$

Ненулевых же компонент тензора Ω осталось *пять*: $\omega_{r_1} = \omega_5$, $\omega_{r_2} = \omega_9$, $\omega_{r_3} = \omega_{12}$, $\omega_{r_4} = \omega_{14}$, $\omega_{r_5} = \omega_{15}$.

3. Более общая задача и новые квазискорости в системе. Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$ (имеющей, вообще говоря, шесть компонент), лежащей на прямой Dx_1 и обеспечивающей во все время движения выполнение определенного векторного равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [32, 34, 35]), например,

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (1.3.1)$$

то в системе (1.1.4)—(1.1.9), (1.1.12)—(1.1.26) вместо F_1 должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \quad (1.3.2)$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (1.3.3)$$

Случай (1.3.3) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка в системе (1.1.4)—(1.1.9), (1.1.12)—(1.1.26) после некоторого преобразования.

Укажем на *достаточное условие* такого отделения. Пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$\begin{aligned} T = T_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega) &= \sum_{i,j=0, i \leq j}^5 \tau_{i,j} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) \omega_{r_i} \omega_{r_j} = \\ &= T_1 \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \omega_{r_0} = v. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Введем новые квазискорости, для чего преобразуем величины $\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_5}$ посредством композиции четырех поворотов, описываемых углами $\beta_1, \dots, \beta_4$:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = T_{4,5}(-\beta_1) \circ T_{3,4}(-\beta_2) \circ T_{2,3}(-\beta_3) \circ T_{1,2}(-\beta_4) \begin{pmatrix} \omega_5 \\ \omega_9 \\ \omega_{12} \\ \omega_{14} \\ \omega_{15} \end{pmatrix}, \quad (1.3.5)$$

где

$$\begin{aligned} T_{4,5}(\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad T_{3,4}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ T_{2,3}(\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{1,2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда (касательно системы (1.1.4)—(1.1.9), (1.1.12)—(1.1.26)) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_5 \cos \beta_4 + \omega_9 \sin \beta_4, \\ z_2 &= (\omega_9 \cos \beta_4 - \omega_5 \sin \beta_4) \cos \beta_3 + \omega_{12} \sin \beta_3, \\ z_3 &= [(\omega_5 \sin \beta_4 - \omega_9 \cos \beta_4) \sin \beta_3 + \omega_{12} \cos \beta_3] \cos \beta_2 + \omega_{14} \sin \beta_2, \\ z_4 &= [(\omega_9 \cos \beta_4 - \omega_5 \sin \beta_4) \sin \beta_3 - \omega_{12} \cos \beta_3] \sin \beta_2 + \omega_{14} \cos \beta_2] \cos \beta_1 + \omega_{15} \sin \beta_1, \\ z_5 &= [(\omega_5 \sin \beta_4 - \omega_9 \cos \beta_4) \sin \beta_3 + \omega_{12} \cos \beta_3] \sin \beta_2 - \omega_{14} \cos \beta_2] \sin \beta_1 + \omega_{15} \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

4. Редукции в системе и системы нормального вида. Динамическую часть уравнений движения в случаях (1.2.1)–(1.2.3) (а также при наличии следящей силы и условия (1.3.4)) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma \left(\sum_{s=1}^5 z_s^2 \right) \cos \alpha - \sigma \frac{v^2}{4I_2} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = \\ = \frac{T_1 \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} v + z_5 v - \sigma \left(\sum_{s=1}^5 z_s^2 \right) \sin \alpha - \sigma \frac{v^2}{4I_2} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = \\ = \frac{s(\alpha) v^2 - T_1 \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

$$\dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_4 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{4I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = 0. \quad (1.4.3)$$

$$\dot{\beta}_2 \sin \alpha \sin \beta_1 + z_3 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{4I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (1.4.4)$$

$$\dot{\beta}_3 \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - z_2 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{4I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (1.4.5)$$

$$\dot{\beta}_4 \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + z_1 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{4I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,4} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (1.4.6)$$

$$\dot{\omega}_5 = \frac{v^2}{4I_2} x_{6N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (1.4.7)$$

$$\dot{\omega}_9 = -\frac{v^2}{4I_2} x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (1.4.8)$$

$$\dot{\omega}_{12} = \frac{v^2}{4I_2} x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (1.4.9)$$

$$\dot{\omega}_{14} = -\frac{v^2}{4I_2} x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \quad (1.4.10)$$

$$\dot{\omega}_{15} = \frac{v^2}{4I_2} x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \quad (1.4.11)$$

Здесь введены следующие функции:

$$\begin{aligned} \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\beta_1 + \frac{\pi}{2}, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \right) \right\rangle, \\ \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \beta_2 + \frac{\pi}{2}, \beta_3, \beta_4 \right) \right\rangle, \\ \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \beta_3 + \frac{\pi}{2}, \beta_4 \right) \right\rangle, \\ \Delta_{v,4} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \beta_4 + \frac{\pi}{2} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

здесь $\langle \dots, \dots \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^6$, а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega/v)$ представляется в виде

$$\begin{aligned}\Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= |\mathbf{r}_N| = \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \dots, \beta_4) \rangle = \\ &= 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^6 x_{sN} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) i_{sN}(\beta_1, \dots, \beta_4).\end{aligned}\quad (1.4.13)$$

И теперь здесь $i_{sN}(\beta_1, \dots, \beta_4)$, $s = 1, \dots, 6$, ($i_{1N}(\beta_1, \dots, \beta_4) \equiv 0$) — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \dots, x_{6N}\}$ на четырехмерной сфере $\mathbf{S}^4\{\beta_1, \dots, \beta_4\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$.

Таким образом,

$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \dots, \beta_4) = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \dots, \beta_4 \right), \quad (1.4.14)$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4)$ определяется в (1.1.2).

Зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, z_1/v, \dots, z_5/v)$ в силу (1.3.6).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, \dots, 5, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const}, \quad (1.4.15)$$

система (1.4.1)–(1.4.11) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.16)$$

$$\begin{aligned}\alpha' &= -Z_5 + \sigma n_1 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - \\ &\quad - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \quad (1.4.17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_5' &= \frac{s(\alpha)}{4I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - (Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &\quad + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \{ -Z_4 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) + Z_3 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - \\ &\quad - Z_2 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \} + Z_1 \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \} - Z_5 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_4' &= Z_4 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + \dots + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \times \\ &\quad \times \left\{ Z_5 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_3 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \right. \\ &\quad \left. + Z_2 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - Z_1 \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right\} - \\ &\quad - \frac{s(\alpha)}{4I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_4 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_3' &= Z_3 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \times \\ &\quad \times \left\{ \left[-Z_5 + Z_4 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right] \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_3 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \right. \\ &\quad \left. + Z_1 \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} \right\} + \\ &\quad + \frac{s(\alpha)}{4I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_3 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z'_2 = & Z_2 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\
& + Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + \\
& + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left\{ \left[Z_5 - Z_4 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + Z_3 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \right] \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - \right. \\
& - Z_1 \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} \left. \right\} - \\
& - \frac{s(\alpha)}{4I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_2 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z'_1 = & Z_1 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - \\
& - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \times \\
& \times \left\{ -Z_5 + Z_4 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - Z_3 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + Z_2 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} \right\} + \\
& + \frac{s(\alpha)}{4I_2 n_1^2} \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.4.22)
\end{aligned}$$

$$\beta'_1 = Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), \quad (1.4.23)$$

$$\beta'_2 = -Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), \quad (1.4.24)$$

$$\beta'_3 = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), \quad (1.4.25)$$

$$\beta'_4 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3} + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3} \Delta_{v,4}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), \quad (1.4.26)$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z) = & -\sigma n_1 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha + \\
& + \frac{\sigma}{4I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha. \quad (1.4.27)
\end{aligned}$$

Видно, что в системе (1.4.16)–(1.4.26) одиннадцатого порядка может быть выделена независимая подсистема (1.4.17)–(1.4.26) десятого порядка, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем десятимерном фазовом пространстве — касательном расслоении

$$T_* \mathbf{S}^5 \{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$$

пятимерной сферы $\mathbf{S}^5 \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$.

В частности, при выполнении условия (1.3.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы десятого порядка также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, z_1/v, \dots, z_5/v)$: сложная зависимость от

$$(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z_1, \dots, n_1 Z_5)$$

в силу (1.3.6) и (1.4.15).

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (1.4.12)

Левая часть системы (1.4.17)—(1.4.26)	Распределение индексов s набора функций (1.4.12)			
Z'_4	1	2	3	4
Z'_3	2	2	3	4
Z'_2	3	3	3	4
Z'_1	4	4	4	4

5. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (1.4.17)—(1.4.26) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{4I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z)$, $s = 1, \dots, 4$, входят линейным образом (и всегда ровно 4 штуки). Так, например, в уравнении (1.4.18) (с левой частью Z'_5) функции (1.4.12) входят со всеми индексами s от 1 до 4 (по одному разу каждый индекс), т. е.

$$1 \ 2 \ 3 \ 4. \quad (1.5.1)$$

А вот далее, в уравнения (1.4.19)—(1.4.22) появление набора функций (1.4.12) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для Z'_4 по-прежнему входит набор функций (1.4.12) с индексами (1.5.1). А в уравнение для Z'_3 входит уже набор с индексами

$$2 \ 2 \ 3 \ 4, \quad (1.5.2)$$

т. е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z)$ уже повторяется дважды.

Общее распределение индексов дается таблицей 1.

Так, минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n = 3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функции (1.4.12) (лишь при $s = 1$). Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (1.4.12) (лишь при $s = 1, 2$). Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.4.17)—(1.4.26) функций (1.4.12) (лишь при $s = 1, 2, 3$).

И, наконец, там же минор четвертого порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 6$ (какой мы, собственно, и рассматриваем) и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.4.17)—(1.4.26) функций (1.4.12) (при всех $s = 1, \dots, 4$).

6. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости.

6.1. *Приведенная система.* Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [28], пользуясь (1.1.2), (1.4.14), динамические функции $s, x_{2N}, \dots, x_{6N}$ примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha) \mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A, B > 0, \quad (1.6.1)$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4$).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z), s = 1, \dots, 4$, входящие в систему (1.4.16)–(1.4.26), примут следующий вид:

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) = R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, n_1 Z) \equiv 0, \quad s = 1, \dots, 4. \quad (1.6.2)$$

Выбирая безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{4I_2}, \quad n_1 = n_0, \quad (1.6.3)$$

будем рассматривать следующую систему одиннадцатого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z), \quad (1.6.4)$$

$$\alpha' = -Z_5 + b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (1.6.5)$$

$$Z_5' = \sin \alpha \cos \alpha - (Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_5(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.6)$$

$$Z_4' = Z_4 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_4(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.7)$$

$$Z_3' = Z_3 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + bZ_3(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.8)$$

$$Z_2' = Z_2 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.9)$$

$$Z_1' = Z_1 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - \\ - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_1(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.10)$$

$$\beta_1' = Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (1.6.11)$$

$$\beta_2' = -Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (1.6.12)$$

$$\beta_3' = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (1.6.13)$$

$$\beta_4' = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \quad (1.6.14)$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Итак, система (1.6.4)–(1.6.14) может быть рассмотрена на своем фазовом одиннадцатимерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}_+^1 \{v\} \times T_* \mathbf{S}^5 \{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}, \quad (1.6.15)$$

т. е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к пятимерной сфере.

Видно, что в системе (1.6.4)—(1.6.14) одиннадцатого порядка образовалась независимая система (1.6.5)—(1.6.14) десятого порядка на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$. При этом в независимой системе (1.6.5)—(1.6.14) десятого порядка образовалась еще одна независимая система (1.6.5)—(1.6.13) девятого порядка на своем девятимерном многообразии.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. *У системы (1.1.4)—(1.1.9) при условиях (1.2.1), (1.2.2)—(1.3.1) выделяется динамическая система (1.4.17)—(1.4.26) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$. В частности, при условии (1.6.1) — выделяется система (1.6.5)—(1.6.14).*

6.2. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.3.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.4.1)—(1.4.11) (при условии (1.3.3)), а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, z_1, \dots, z_5) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + \dots + z_5^2) - 2\sigma z_5 v \sin \alpha = V_C^2 \quad (1.6.16)$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1, \dots, z_5$ выбираются в силу (1.3.6)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.4.16)—(1.4.26) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z_1, \dots, Z_5) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) - 2bZ_5 \sin \alpha) = V_C^2 \quad (1.6.17)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

В частности, равенство (1.6.17) позволяет, не решая системы (1.6.4)—(1.6.14), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (точки D пятимерного диска) от других фазовых переменных, а именно при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) - 2bZ_5 \sin \alpha}. \quad (1.6.18)$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.6.4)—(1.6.14) существуют асимптотические (или притягивающие, или отталкивающие) предельные множества, то, как будет видно, равенство (1.6.17) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.6.4)—(1.6.14) во всем фазовом пространстве (ср. с [54, 55, 57]).

6.3. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы десятого порядка (1.6.5)—(1.6.14) необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до шести для интегрирования системы.

6.4. Система при отсутствии внешнего силового поля. Для начала рассмотрим систему (1.6.5)—(1.6.14) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ так, что получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.4.13) тождественно равна нулю. В частности, коэффициент $\sin \alpha \cos \alpha$ в уравнении (1.6.7) отсутствует, а также $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + \dots + Z_5^2.$$

Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_5 + b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \sin \alpha, \quad (1.6.19)$$

$$Z_5' = -(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_5(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.20)$$

$$Z_4' = Z_4 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_4(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.21)$$

$$Z'_3 = Z_3 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + b Z_3 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.22)$$

$$Z'_2 = Z_2 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + b Z_2 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.23)$$

$$Z'_1 = Z_1 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + b Z_1 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.24)$$

$$\beta'_1 = Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (1.6.25)$$

$$\beta'_2 = -Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (1.6.26)$$

$$\beta'_3 = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (1.6.27)$$

$$\beta'_4 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \quad (1.6.28)$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.6.4) на величину v функцию $\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha.$$

Система (1.6.19)–(1.6.28) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил, хотя, как показано в [42, 43, 45, 46], некое внутреннее поле сил в системе присутствует, и отвечает за это как раз параметр b .

Теорема 6.2. Система (1.6.19)–(1.6.28) обладает шестью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) = C_1 = \text{const}, \quad (1.6.29)$$

$$\Phi_2(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2} \sin \alpha = C_2 = \text{const}, \quad (1.6.30)$$

$$\Phi_3(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin \alpha \sin \beta_1 = C_3 = \text{const}, \quad (1.6.31)$$

$$\Phi_4(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 = C_4 = \text{const}, \quad (1.6.32)$$

$$\Phi_5(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 Z_1 \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 = C_5 = \text{const}, \quad (1.6.33)$$

$$\Phi_6(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6 = \text{const}. \quad (1.6.34)$$

Замечание 6.1. Поскольку в первые интегралы (1.6.29)–(1.6.34), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.19)–(1.6.28) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Первые пять первых интеграла (1.6.29)–(1.6.33) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются пять (вообще говоря, ненулевых) компонент тензора угловой скорости шестимерного твердого тела, а именно:

$$\begin{aligned} \omega_5 &\equiv \omega_5^0 = \text{const}, & \omega_9 &\equiv \omega_9^0 = \text{const}, \\ \omega_{12} &\equiv \omega_{12}^0 = \text{const}, & \omega_{14} &\equiv \omega_{14}^0 = \text{const}, & \omega_{15} &\equiv \omega_{15}^0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.6.35)$$

В частности, наличие первого интеграла (1.6.29) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2 (Z_1^2 + \dots + Z_5^2) = \omega_5^2 + \omega_9^2 + \omega_{12}^2 + \omega_{14}^2 + \omega_{15}^2 \equiv n_0^2 C_1 = \text{const}. \quad (1.6.36)$$

Шестой первый интеграл (1.6.34) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_4 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_4}{d\beta_3} = -\frac{Z_1}{Z_2} \frac{1}{\sin \beta_3}, \quad (1.6.37)$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (1.6.32), (1.6.33) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm \sqrt{\frac{C_4^2}{C_5^2} \sin^2 \beta_3 - 1}, \quad (1.6.38)$$

то квадратура (1.6.37) примет вид

$$\beta_4 = \pm \int \frac{du}{(1-u^2) \sqrt{\left(\frac{C_4^2}{C_5^2} - 1\right) - \frac{C_4^2}{C_5^2} u^2}}, \quad u = \cos \beta_3. \quad (1.6.39)$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\beta_4 + C_6 = \pm \operatorname{arctg} \frac{\cos \beta_3}{\sqrt{\frac{C_4^2}{C_5^2} \sin^2 \beta_3 - 1}}, \quad C_6 = \text{const}, \quad (1.6.40)$$

позволяющему получить первый интеграл (1.6.34). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(\beta_4 + C_6) = \frac{C_5^2}{(C_4^2 - C_5^2) \operatorname{tg}^2 \beta_3 - C_5^2}. \quad (1.6.41)$$

Теперь перефразируем теорему 6.2.

Теорема 6.3. Система (1.6.19)–(1.6.28) обладает шестью независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Psi_1(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \dots + Z_5^2}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2} \sin \alpha} = C'_1 = \text{const}, \quad (1.6.42)$$

$$\Psi_2(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C'_2 = \text{const}, \quad (1.6.43)$$

$$\Psi_3(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_4}{\Phi_5} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin \beta_3} = C'_3 = \text{const}, \quad (1.6.44)$$

$$\Psi_4(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \beta_2} = C'_4 = \text{const}, \quad (1.6.45)$$

$$\Psi_5(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin \beta_1} = C'_5 = \text{const}, \quad (1.6.46)$$

$$\Psi_6(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C'_6 = \text{const}. \quad (1.6.47)$$

Замечание 6.2. Поскольку в первые интегралы (1.6.42)–(1.6.47), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.19)–(1.6.28) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Шестой первый интеграл (1.6.47) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_4 , а функции Ψ_2 , Ψ_6 можно выбрать соответственно равными Φ_2 , Φ_6 .

В формулировке теоремы 6.3 (в отличие от теоремы 6.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.6.42)–(1.6.47) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6.3 преобразованный набор первых интегралов (1.6.42)–(1.6.47) системы (1.6.19)–(1.6.28) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.6.19)–(1.6.28) десятого порядка необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_5 \\ Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_5 \\ w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} w_5 &= Z_5, \\ w_4 &= \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2}, \\ w_3 &= \frac{Z_2}{Z_1}, \end{aligned} \quad \begin{aligned} w_2 &= \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \\ w_1 &= \frac{Z_4}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}, \end{aligned} \quad (1.6.48)$$

система (1.6.19)–(1.6.28) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha, \quad (1.6.49)$$

$$w_5' = -w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.50)$$

$$w_4' = w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.51)$$

$$\left. \begin{aligned} w_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_3^2 \cos \beta_3}{w_3 \sin \beta_3}, \\ \beta_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.52)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.53)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.54)$$

$$\beta_4' = d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \quad (1.6.55)$$

где

$$\begin{aligned} d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= Z_4(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= -Z_3(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\ d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= Z_2(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \\ d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= -Z_1(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \end{aligned} \quad (1.6.56)$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_5, \dots, w_1), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (1.6.57)$$

— функции в силу замены (1.6.48).

Видно, что система десятого порядка (1.6.49)–(1.6.55) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.6.49)–(1.6.51) — третьего, а системы (1.6.52)–(1.6.54) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.6.49)–(1.6.55) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.6.49)–(1.6.51), по одному — для систем (1.6.52)–(1.6.54) (их три), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.6.55) (*т. е. всего шесть*).

Замечание 6.3. Выпишем первые интегралы (1.6.42)–(1.6.47) в переменных $w_1, \dots, w_5$ в силу (1.6.48). Получим:

$$\Theta_1(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{w_4^2 + w_5^2}{w_4 \sin \alpha} = C_1'' = \text{const}, \quad (1.6.58)$$

$$\Theta_2(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 w_4 \sin \alpha = C_2'' = \text{const}, \quad (1.6.59)$$

$$\Theta_3(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1+w_3^2}}{\sin \beta_3} = C_3'' = \text{const}, \quad (1.6.60)$$

$$\Theta_4(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin \beta_2} = C_4'' = \text{const}, \quad (1.6.61)$$

$$\Theta_5(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_5'' = \text{const}, \quad (1.6.62)$$

$$\Theta_6(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6'' = \text{const}. \quad (1.6.63)$$

Замечание 6.4. Поскольку в первые интегралы (1.6.58)–(1.6.63), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.49)–(1.6.55) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.6.58), (1.6.59) достаточны для интегрирования системы (1.6.49)–(1.6.51), первые интегралы (1.6.60)–(1.6.62) достаточны для интегрирования трех независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s} \frac{\cos \beta_s}{\sin \beta_s}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (1.6.64)$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.6.52)–(1.6.54), и, наконец, первый интеграл (1.6.63) достаточен для «привязывания» уравнения (1.6.55). Доказана следующая теорема.

Теорема 6.4. Система (1.6.19)–(1.6.28) десятого порядка обладает достаточным количеством (шестью) независимых первых интегралов.

6.5. Частичное введение внешнего силового поля. Теперь рассмотрим систему (1.6.5)–(1.6.14) при условии $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + \dots + Z_5^2.$$

При этом частично добавим внешнее силовое поле. А именно, его наличие характеризует коэффициент $\sin \alpha \cos \alpha$ в уравнении (1.6.66) (в отличие от системы (1.6.19)–(1.6.28)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_5 + b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \sin \alpha, \quad (1.6.65)$$

$$Z_5' = \sin \alpha \cos \alpha - (Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_5(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.66)$$

$$Z_4' = Z_4 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + bZ_4(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.67)$$

$$Z_3' = Z_3 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + bZ_3(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.68)$$

$$Z_2' = Z_2 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.69)$$

$$Z_1' = Z_1 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_1(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.70)$$

$$\beta'_1 = Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (1.6.71)$$

$$\beta'_2 = -Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (1.6.72)$$

$$\beta'_3 = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (1.6.73)$$

$$\beta'_4 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}; \quad (1.6.74)$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.6.4) на величину v функцию $\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha.$$

Теорема 6.5. Система (1.6.65)–(1.6.74) обладает шестью независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2 + \sin^2 \alpha) = C_1 = \text{const}, \quad (1.6.75)$$

$$\Phi_2(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2} \sin \alpha = C_2 = \text{const}, \quad (1.6.76)$$

$$\Phi_3(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin \alpha \sin \beta_1 = C_3 = \text{const}, \quad (1.6.77)$$

$$\Phi_4(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 = C_4 = \text{const}, \quad (1.6.78)$$

$$\Phi_5(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 Z_1 \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 = C_5 = \text{const}, \quad (1.6.79)$$

$$\Phi_6(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6 = \text{const}. \quad (1.6.80)$$

Замечание 6.5. Поскольку в первые интегралы (1.6.75)–(1.6.80), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.65)–(1.6.74) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Первый интеграл (1.6.75) по своей структуре похож на интеграл полной энергии. Шестой первый интеграл (1.6.80) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_4 и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 6.5.

Теорема 6.6. Система (1.6.65)–(1.6.74) обладает шестью независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Psi_1(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \dots + Z_5^2 + \sin^2 \alpha}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2} \sin \alpha} = C'_1 = \text{const}, \quad (1.6.81)$$

$$\Psi_2(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C'_2 = \text{const}, \quad (1.6.82)$$

$$\Psi_3(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_4}{\Phi_5} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin \beta_3} = C'_3 = \text{const}, \quad (1.6.83)$$

$$\Psi_4(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \beta_2} = C'_4 = \text{const}, \quad (1.6.84)$$

$$\Psi_5(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin \beta_1} = C'_5 = \text{const}, \quad (1.6.85)$$

$$\Psi_6(v; Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C'_6 = \text{const}. \quad (1.6.86)$$

Замечание 6.6. Поскольку в первые интегралы (1.6.81)–(1.6.86), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.65)–(1.6.74) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Функции Ψ_2 , Ψ_6 можно выбрать соответственно равными Φ_2 , Φ_6 .

В формулировке теоремы 6.6 (в отличие от теоремы 6.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.6.81)—(1.6.86) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6.6 преобразованный набор первых интегралов (1.6.81)—(1.6.86) системы (1.6.65)—(1.6.74) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.6.65)—(1.6.74) десятого порядка необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.6.48) система (1.6.65)—(1.6.74) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha, \quad (1.6.87)$$

$$w_5' = \sin \alpha \cos \alpha - w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.88)$$

$$w_4' = w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha, \quad (1.6.89)$$

$$\left. \begin{aligned} w_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_3^2 \cos \beta_3}{w_3 \sin \beta_3}, \\ \beta_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.90)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.91)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.92)$$

$$\beta_4' = d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \quad (1.6.93)$$

где выполнены условия (1.6.56).

Видно, что система десятого порядка (1.6.87)—(1.6.93) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.6.87)—(1.6.89) — третьего, а системы (1.6.90)—(1.6.92) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.6.87)—(1.6.93) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.6.87)—(1.6.89), по одному — для систем (1.6.90)—(1.6.92) (их три), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.6.93) (*т. е. всего шесть*).

Замечание 6.7. Выпишем первые интегралы (1.6.81)—(1.6.86) в переменных $w_1, \dots, w_5$ в силу (1.6.48). Получим:

$$\Theta_1(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{w_4^2 + w_5^2 + \sin^2 \alpha}{w_4 \sin \alpha} = C_1'' = \text{const}, \quad (1.6.94)$$

$$\Theta_2(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = v^2 w_4 \sin \alpha = C_2'' = \text{const}, \quad (1.6.95)$$

$$\Theta_3(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1 + w_3^2}}{\sin \beta_3} = C_3'' = \text{const}, \quad (1.6.96)$$

$$\Theta_4(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin \beta_2} = C_4'' = \text{const}, \quad (1.6.97)$$

$$\Theta_5(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_5'' = \text{const}, \quad (1.6.98)$$

$$\Theta_6(v; w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) = C_6'' = \text{const}. \quad (1.6.99)$$

Замечание 6.8. Поскольку в первые интегралы (1.6.94)—(1.6.99), вообще говоря, входит величина v , то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.6.18), либо вместе с системой (1.6.87)—(1.6.93) использовать вспомогательное уравнение (1.6.4).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.6.94), (1.6.95) достаточны для интегрирования системы (1.6.87)—(1.6.89), первые интегралы (1.6.96)—(1.6.98) достаточны для интегрирования трех независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2 \cos \beta_s}{w_s \sin \beta_s}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (1.6.100)$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.6.90)—(1.6.92), и, наконец, первый интеграл (1.6.99) достаточен для «привязывания» уравнения (1.6.93). Доказана следующая теорема.

Теорема 6.7. Система (1.6.65)—(1.6.74) десятого порядка обладает достаточным количеством (шестью) независимых первых интегралов.

6.6. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы десятого порядка (1.6.5)—(1.6.14) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (1.6.5)—(1.6.14) десятого порядка необходимо знать, вообще говоря, девять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.6.48) система (1.6.5)—(1.6.14) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (1.6.101)$$

$$w_5' = \sin \alpha \cos \alpha - w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.102)$$

$$w_4' = w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (1.6.103)$$

$$\left. \begin{aligned} w_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_3^2 \cos \beta_3}{w_3 \sin \beta_3}, \\ \beta_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.104)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.105)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.6.106)$$

$$\beta_4' = d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \quad (1.6.107)$$

где выполнены условия (1.6.56).

Видно, что система десятого порядка (1.6.101)—(1.6.107) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.6.101)—(1.6.103) — третьего, а системы (1.6.104)—(1.6.106) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.6.101)—(1.6.107) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.6.101)—(1.6.103), по одному — для систем (1.6.104)—(1.6.106) (их три), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.6.107) (*т. е. всего шесть*).

Для начала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (1.6.101)—(1.6.103) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_5}{d\alpha} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha - w_4^2 \cos \alpha / \sin \alpha}{-w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha}, \\ \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + w_4 w_5 \cos \alpha / \sin \alpha}{-w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (1.6.108)$$

Используя замену $\tau = \sin \alpha$, перепишем систему (1.6.108) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dw_5}{d\tau} &= \frac{\tau + bw_5(w_4^2 + w_5^2) - bw_5\tau^2 - w_4^2/\tau}{-w_5 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_4^2 + w_5^2)}, \\ \frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{bw_4(w_4^2 + w_5^2) - bw_4\tau^2 + w_4w_5/\tau}{-w_5 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_4^2 + w_5^2)}.\end{aligned}\quad (1.6.109)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_1\tau, \quad w_5 = u_2\tau, \quad (1.6.110)$$

приводим систему (1.6.109) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)},\end{aligned}\quad (1.6.111)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}.\end{aligned}\quad (1.6.112)$$

Сопоставим системе второго порядка (1.6.112) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \quad (1.6.113)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \quad (1.6.114)$$

Итак, уравнение (1.6.113) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (1.6.115)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_5, w_4; \alpha) = \frac{w_5^2 + w_4^2 - bw_5 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_4 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (1.6.116)$$

Замечание 6.9. При $b = 0$ первый интеграл (1.6.116) системы (1.6.101)–(1.6.103) совпадает с первым интегралом (1.6.94) системы (1.6.87)–(1.6.89), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (1.6.116), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (1.6.101)–(1.6.103) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель и знаменатель выражения (1.6.116) являются первыми интегралами системы (1.6.87)–(1.6.89)).

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.6.101)–(1.6.103). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.6.115) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \quad (1.6.117)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (1.6.118)$$

и фазовое пространство системы (1.6.101)–(1.6.103) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.6.117).

Таким образом, в силу соотношения (1.6.115) первое уравнение системы (1.6.112) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1 - \tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \quad (1.6.119)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)} \right\}, \quad (1.6.120)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.6.118), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \quad (1.6.121)$$

Уравнение (1.6.121) (при учете (1.6.120)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (1.6.122)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т. е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.6.122) зависит от произвольной постоянной C_2 . Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.6.122), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1] \exp \left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}} \right], \quad C = \text{const}. \quad (1.6.123)$$

Замечание 6.10. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.6.116).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_5, w_4; \alpha) = \ln |\sin \alpha| + G_2 \left(\sin \alpha, \frac{w_5}{\sin \alpha}, \frac{w_4}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (1.6.124)$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.6.116), (1.6.124) независимой системы третьего порядка (1.6.101)–(1.6.103). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.6.104)–(1.6.106), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.6.107).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.6.96)–(1.6.99), а именно:

$$\Theta_3(w_3; \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_3^2}}{\sin \beta_3} = C_3 = \text{const}, \quad (1.6.125)$$

$$\Theta_4(w_2; \beta_2) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin \beta_2} = C_4 = \text{const}, \quad (1.6.126)$$

$$\Theta_5(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_5 = \text{const}, \quad (1.6.127)$$

$$\Theta_6(\beta_3, \beta_4) = \beta_4 \pm \arctg \frac{C_5 \cos \beta_3}{\sqrt{C_4^2 \sin^2 \beta_3 - C_5^2}} = C_6 = \text{const}, \quad (1.6.128)$$

при этом в левую часть равенства (1.6.128) вместо C_4, C_5 можно подставить интегралы (1.6.126), (1.6.127).

Теорема 6.8. Система (1.6.101)–(1.6.107) десятого порядка обладает достаточным количеством (шестью) независимых первых интегралов (1.6.116), (1.6.124), (1.6.125)–(1.6.128).

Итак, в данном случае система динамических уравнений (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) при условии (1.6.1) имеет 17 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.3.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.6.16), циклические первые интегралы вида (1.2.2), (1.2.3), первый интеграл вида (1.6.116), также имеется первый интеграл (1.6.124), который может быть найден из уравнения (1.6.122), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.6.125)–(1.6.128).

Теорема 6.9. Система (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) при условиях (1.3.1), (1.6.1), (1.2.2), (1.2.3) обладает 17 инвариантными соотношениями (полным набором), шесть из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.

7. Случай зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.

7.1. Введение зависимости от тензора угловой скорости и приведенная система. Продолжаем изучать динамику шестимерного твердого тела в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^6$. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \dots, x_{6N})$ — координаты точки N приложения внешней силы на тело (в частности, на пятимерный диск, задаваемый равенством $x_{1N} = 0$), $Q = (Q_1, \dots, Q_6)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $x = (x_{1N}, \dots, x_{6N})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку даже само данное введение априори не очевидно [3, 4, 11, 12].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (1.7.1)$$

где $R = (R_1, \dots, R_6)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{15} & \omega_{14} & -\omega_{12} & \omega_9 & -\omega_5 \\ \omega_{15} & 0 & -\omega_{13} & \omega_{11} & -\omega_8 & \omega_4 \\ -\omega_{14} & \omega_{13} & 0 & -\omega_{10} & \omega_7 & -\omega_3 \\ \omega_{12} & -\omega_{11} & \omega_{10} & 0 & -\omega_6 & \omega_2 \\ -\omega_9 & \omega_8 & -\omega_7 & \omega_6 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_5 & -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7.2)$$

Здесь $\Omega \in \mathfrak{so}(6)$ — тензор угловой скорости, $(h_1, \dots, h_6)$ — некоторые положительные параметры (ср. с [61, 62, 65]). Применительно к нашей задаче можно считать, что $x_{1N} \equiv 0$; при этом

$$\begin{aligned} x_{2N} &= Q_2 - h_1 \frac{\omega_{15}}{v}, & x_{3N} &= Q_3 + h_1 \frac{\omega_{14}}{v}, & x_{4N} &= Q_4 - h_1 \frac{\omega_{12}}{v}, \\ x_{5N} &= Q_5 + h_1 \frac{\omega_9}{v}, & x_{6N} &= Q_6 - h_1 \frac{\omega_5}{v}, \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

где $h_2 = \dots = h_6$, в силу динамической симметрии (что, в принципе, нам в данном конкретном месте не требуется).

Здесь $\omega_5, \omega_9, \omega_{12}, \omega_{14}, \omega_{15}$ — оставшиеся, вообще говоря, ненулевые компоненты тензора угловой скорости Ω .

7.2. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [28, 73], пользуясь (1.4.14), имеем:

$$Q = R(\alpha) \mathbf{i}_N, \quad (1.7.4)$$

а динамические функции $s, x_{2N}, \dots, x_{6N}$ примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A, B > 0, \quad (1.7.5)$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент

неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \Omega/v)$, $s = 1, \dots, 4$, входящие в систему (1.4.17)–(1.4.26), примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha - \frac{h_1}{v} z_5, \\ \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \frac{h_1}{v} z_4, \\ \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= -\frac{h_1}{v} z_3, \\ \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= \frac{h_1}{v} z_2, \\ \Delta_{v,4} \left(\alpha, \beta_1, \beta_1, \dots, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= -\frac{h_1}{v} z_1.\end{aligned}\tag{1.7.6}$$

Тогда благодаря условиям (1.3.1), (1.7.5) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.4.16)–(1.4.26)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z),\tag{1.7.7}$$

$$\alpha' = -Z_5 + b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_5 \cos^2 \alpha,\tag{1.7.8}$$

$$\begin{aligned}Z_5' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_5(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_5^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_5 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{1.7.9}$$

$$\begin{aligned}Z_4' &= (1 + bH_1)Z_4 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &\quad + bZ_4(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - bZ_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_4 Z_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_4 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{1.7.10}$$

$$\begin{aligned}Z_3' &= (1 + bH_1)Z_3 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \\ &\quad - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + bZ_3(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_3 Z_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_3 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{1.7.11}$$

$$\begin{aligned}Z_2' &= (1 + bH_1)Z_2 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ &\quad - (1 + bH_1)Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + (1 + bH_1)Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ &\quad + (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_2 Z_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{1.7.12}$$

$$\begin{aligned}Z_1' &= (1 + bH_1)Z_1 Z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ &\quad - (1 + bH_1)Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + (1 + bH_1)Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - \\ &\quad - (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} + bZ_1(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_1 Z_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{1.7.13}$$

$$\beta'_1 = (1 + bH_1)Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (1.7.14)$$

$$\beta'_2 = -(1 + bH_1)Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (1.7.15)$$

$$\beta'_3 = (1 + bH_1)Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (1.7.16)$$

$$\beta'_4 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \quad (1.7.17)$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1 Z_5 \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерные параметры b , H_1 и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{4I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{4I_2 n_0}, \quad n_1 = n_0. \quad (1.7.18)$$

Итак, система (1.7.7)–(1.7.17) может быть рассмотрена на своем фазовом одиннадцатимерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}_+^1 \{v\} \times T_* \mathbf{S}^5 \{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}, \quad (1.7.19)$$

т. е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к пятимерной сфере.

Видно, что в системе (1.7.7)–(1.7.17) одиннадцатого порядка образовалась независимая система (1.7.8)–(1.7.17) десятого порядка на касательном расслоении $T_* \mathbf{S}^5 \{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5 \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$. При этом в независимой системе (1.7.8)–(1.7.17) десятого порядка образовалась еще одна независимая система (1.7.8)–(1.7.16) девятого порядка на своем девятимерном многообразии.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. *У динамической части уравнений движения при условиях (1.2.1), (1.2.2)–(1.3.1) выделяется динамическая система (1.4.17)–(1.4.26) на касательном расслоении*

$$T_* \mathbf{S}^5 \{Z_5, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$$

пятимерной сферы $\mathbf{S}^5 \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$. В частности, при условии (1.7.5) – выделяется система (1.7.8)–(1.7.17).

7.3. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.3.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.4.1)–(1.4.11) (при условии (1.3.3)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, z_1, \dots, z_5) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + \dots + z_5^2) - 2\sigma z_5 v \sin \alpha = V_C^2 \quad (1.7.20)$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1, \dots, z_5$ выбираются в силу (1.3.6)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.7.7)–(1.7.17) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, Z_1, \dots, Z_5) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) - 2bZ_5 \sin \alpha) = V_C^2 \quad (1.7.21)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (1.7.21) позволяет, не решая системы (1.7.7)–(1.7.17), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D пятимерного диска) от других фазовых переменных, а именно при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \dots + Z_5^2) - 2bZ_5 \sin \alpha}. \quad (1.7.22)$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.7.7)–(1.7.17) существуют асимптотические (или притягивающие, или отталкивающие) предельные множества, то, как будет видно, равенство (1.7.21) задает, как будет показано, единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.7.7)–(1.7.17) во всем фазовом пространстве (ср. с [66, 68, 69]).

7.4. *Полный список первых интегралов.* Для полного интегрирования системы (1.7.8)—(1.7.17) десятого порядка необходимо знать, вообще говоря, *девять* независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до *шести* для интегрирования систем.

Действительно, после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_5 \\ Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_5 \\ w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} w_5 &= Z_5, \\ w_4 &= \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_4^2}, \\ w_3 &= \frac{Z_2}{Z_1}, \end{aligned} \quad \begin{aligned} w_2 &= \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \\ w_1 &= \frac{Z_4}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}, \end{aligned} \quad (1.7.23)$$

система (1.7.8)—(1.7.17) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 w_5 \cos^2 \alpha, \quad (1.7.24)$$

$$\begin{aligned} w_5' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bw_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 w_5^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_5 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.7.25)$$

$$\begin{aligned} w_4' &= (1 + bH_1)w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bw_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 w_4 w_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_4 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.7.26)$$

$$\left. \begin{aligned} w_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_3^2 \cos \beta_3}{w_3 \sin \beta_3}, \\ \beta_3' &= d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.7.27)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.7.28)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.7.29)$$

$$\beta_4' = d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4), \quad (1.7.30)$$

где выполнены условия

$$\begin{aligned} d_1(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= (1 + bH_1) \mathcal{Z}_4(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ d_2(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= -(1 + bH_1) \mathcal{Z}_3(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\ d_3(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= (1 + bH_1) \mathcal{Z}_2(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \\ d_4(w_5, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_4) &= -(1 + bH_1) \mathcal{Z}_1(w_5, \dots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}, \end{aligned} \quad (1.7.31)$$

при этом

$$Z_k = \mathcal{Z}_k(w_5, \dots, w_1), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (1.7.32)$$

— функции в силу замены (1.7.23).

Видно, что система (1.7.24)—(1.7.30) десятого порядка распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.7.24)—(1.7.26) — третьего, а системы (1.7.27)—(1.7.29) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.7.24)—(1.7.30) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.7.24)—(1.7.26), по одному — для систем (1.7.27)—(1.7.29) (их три), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.30) (*т. е. всего шесть*).

Для начала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (1.7.24)–(1.7.26) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dw_5}{d\alpha} &= \frac{R_2(\alpha, w_4, w_5)}{-w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 w_5 \cos^2 \alpha}, \\ \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{R_1(\alpha, w_4, w_5)}{-w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 w_5 \cos^2 \alpha},\end{aligned}\quad (1.7.33)$$

где

$$\begin{aligned}R_2(\alpha, w_4, w_5) &= \sin \alpha \cos \alpha + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \\ &\quad - (1 + bH_1)w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bH_1 w_5^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_5 \cos \alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_1(\alpha, w_4, w_5) &= bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - bw_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + (1 + bH_1)w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bH_1 w_4 w_5 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_4 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Используя замену $\tau = \sin \alpha$, перепишем систему (1.7.33) в алгебраическом виде Ж

$$\begin{aligned}\frac{dw_5}{d\tau} &= \frac{\tau + bw_5(w_4^2 + w_5^2) - bw_5 \tau^2 - (1 + bH_1)w_4^2/\tau + bH_1 w_5^2 \tau - H_1 w_5}{-w_5 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_4^2 + w_5^2) - bH_1 w_5(1 - \tau^2)}, \\ \frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{bw_4(w_4^2 + w_5^2) - bw_4 \tau^2 + (1 + bH_1)w_4 w_5/\tau + bH_1 w_4 w_5 \tau - H_1 w_4}{-w_5 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_4^2 + w_5^2) - bH_1 w_5(1 - \tau^2)}.\end{aligned}\quad (1.7.34)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_1 \tau, \quad w_5 = u_2 \tau, \quad (1.7.35)$$

приводим систему (1.7.34) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - bu_2 \tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1 u_2 + bH_1 u_2^2 \tau^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1 \tau^2 + (1 + bH_1)u_1 u_2 - H_1 u_1 + bH_1 u_1 u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)},\end{aligned}\quad (1.7.36)$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}.\end{aligned}\quad (1.7.37)$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (1.7.37) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}, \quad (1.7.38)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \quad (1.7.39)$$

Итак, уравнение (1.7.38) имеет первый интеграл

$$\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (1.7.40)$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_5, w_4; \alpha) = \frac{(1 + bH_1)(w_5^2 + w_4^2) - (b + H_1)w_5 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_4 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (1.7.41)$$

Замечание 7.1. Рассмотрим систему (1.7.24)–(1.7.26) с переменной диссипацией с нулевым средним [9, 10, 58, 59], становящейся консервативной при $b = H_1$:

$$\alpha' = -(1 + b^2)w_5 + b(w_4^2 + w_5^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - b^2 w_5 \cos^2 \alpha, \quad (1.7.42a)$$

$$w_5' = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + b^2)w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_5(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - \\ - bw_5 \sin^2 \alpha \cos \alpha + b^2 w_5^2 \sin \alpha \cos \alpha - bw_5 \cos \alpha, \quad (1.7.42b)$$

$$w_4' = (1 + b^2)w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bw_4(w_4^2 + w_5^2) \cos \alpha - \\ - bw_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + b^2 w_4 w_5 \sin \alpha \cos \alpha - bw_4 \cos \alpha. \quad (1.7.42c)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b^2)(w_5^2 + w_4^2) - 2bw_5 \sin \alpha + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (1.7.43)$$

$$w_4 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (1.7.44)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.7.43), (1.7.44) также является первым интегралом системы (1.7.42). Но при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1 + bH_1)(w_5^2 + w_4^2) - (b + H_1)w_5 \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad (1.7.45)$$

и (1.7.44) по отдельности не является первым интегралом системы (1.7.24)–(1.7.26). Однако отношение функций (1.7.45), (1.7.44) является первым интегралом системы (1.7.24)–(1.7.26) при любых b, H_1 .

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.7.24)–(1.7.26). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.7.40) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 = \frac{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + bH_1)^2}. \quad (1.7.46)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (1.7.47)$$

и фазовое пространство системы (1.7.24)–(1.7.26) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.7.46).

Таким образом, в силу соотношения (1.7.40) первое уравнение системы (1.7.37) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1 - \tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2) - bH_1u_2(1 - \tau^2)}, \quad (1.7.48)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)} \right\}, \quad (1.7.49)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.7.47), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - (1 + bH_1)u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2 - H_1u_2)}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}. \quad (1.7.50)$$

Уравнение (1.7.50) (при учете (1.7.49)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1 + bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (1.7.51)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т. е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.7.51) зависит от произвольной постоянной C_2 . Полные выкладки в данном месте приводить

не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.7.51), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее достаточно громоздкое решение:

$$p = p_0(u_2) = C[1 - A_1 u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times \\ \times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4)A_1(A_1 u_2 - 1)}, \quad C = \text{const.} \quad (1.7.52)$$

Замечание 7.2. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.7.41).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_5, w_4; \alpha) = \ln |\sin \alpha| + G_2 \left(\sin \alpha, \frac{w_5}{\sin \alpha}, \frac{w_4}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (1.7.53)$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.7.41), (1.7.53) независимой системы третьего порядка (1.7.24)–(1.7.26). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.7.27)–(1.7.29) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.30).

Действительно, искомые первые интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_3(w_3; \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_3^2}}{\sin \beta_3} = C_3 = \text{const}, \quad (1.7.54)$$

$$\Theta_4(w_2; \beta_2) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin \beta_2} = C_4 = \text{const}, \quad (1.7.55)$$

$$\Theta_5(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_5 = \text{const}, \quad (1.7.56)$$

$$\Theta_6(\beta_3, \beta_4) = \beta_4 \pm \arctg \frac{C_5 \cos \beta_3}{\sqrt{C_4^2 \sin^2 \beta_3 - C_5^2}} = C_6 = \text{const}, \quad (1.7.57)$$

при этом в левую часть равенства (1.7.57) вместо C_4, C_5 можно подставить интегралы (1.7.55), (1.7.56).

Теорема 7.2. Система (1.7.24)–(1.7.30) десятого порядка обладает достаточным количеством (шестью) независимых первых интегралов (1.7.41), (1.7.53), (1.7.54)–(1.7.57).

Итак, в данном случае система динамических уравнений (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) при условии (1.7.5) имеет 17 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.3.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.6.16), циклические первые интегралы вида (1.2.2), (1.2.3), первый интеграл вида (1.7.41), также имеется первый интеграл (1.7.53), который может быть найден из уравнения (1.7.51), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.7.54)–(1.7.57).

Теорема 7.3. Система (1.1.4)–(1.1.9), (1.1.12)–(1.1.26) при условиях (1.3.1), (1.7.5), (1.2.2), (1.2.3) обладает 17 инвариантными соотношениями (полным набором), шесть из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.

7.5. *Топологические аналогии.* Имеют место следующие топологические и механические аналогии.

1. Движение свободного шестимерного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [20, 21, 23]).
2. Движение закрепленного шестимерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [36, 37, 39]).
3. Вращение шестимерного твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [38, 67, 70]).

О более общих топологических аналогиях см. также [1, 2, 7, 8, 16, 18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Архимедовы равномерные структуры // Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 46–51.
2. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Многообразия непрерывных структур // Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 71–86.
3. Богдавленский О. И. Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // Докл. АН СССР. — 1983. — 272, № 6. — С. 1364–1367.
4. Богдавленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 5. — С. 1105–1108.
5. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
6. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. Веселов А. П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$ // Докл. АН СССР. — 1983. — 270, № 6. — С. 1298–1300.
8. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
9. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
10. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
11. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела // Совр. мат. прилож. — 2012. — 76. — С. 22–39.
12. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
15. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
16. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
17. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
18. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
19. Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Маятниковые системы с динамической симметрией // Совр. мат. прилож. — 2016. — 100. — С. 76–133.
20. Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела // Функц. анализ. прилож. — 1976. — 10, № 4. — С. 93–94.

21. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
22. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
23. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
24. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. Тихонов А. А. Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
27. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
28. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
29. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
30. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1992. — 1. — С. 52–58.
31. Шамолин М. В. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — 57, № 4. — С. 40–49.
32. Шамолин М. В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1996. — 4. — С. 57–69.
33. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
34. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
35. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
36. Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
37. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbf{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
38. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
39. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
40. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
41. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
42. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
43. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
45. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
46. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.

47. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
48. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
49. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
50. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
51. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
52. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
53. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
54. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
55. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
56. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
57. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анализ. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
58. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
59. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
60. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
61. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
62. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
63. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
64. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
65. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
66. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
67. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
68. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
69. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
70. Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — 1959. — 080001.
71. Poincaré H. Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.

72. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
73. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — 13, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 122–127
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-122-127

УДК 517.9; 531.01

ОДНО ИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ

© 2022 г. М. В. ШАМОЛИН

Памяти Ивана Терентьевича Борисёнка

Аннотация. Показано, что диагностика в случае траекторных измерений с шумом, представляющим собой случайный процесс типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром, осуществима с помощью алгоритмов диагностирования, полученных в предыдущих работах автора. Получен функционал диагностирования, который в предыдущих работах автора вводился априори.

Ключевые слова: задача диагностирования, алгоритмы диагностирования, статистическое решение.

ONE OF THE STATISTICAL SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF DIFFERENTIAL DIAGNOSTICS

© 2022 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we show that in the case of trajectory measurements with noise, which is a normal white-noise random process with zero mean value and a limited spectrum, diagnostics is feasible using the diagnostic algorithms developed in the author's previous works. The diagnostic functional was obtained, which was introduced a priori in the previous works of the author.

Keywords and phrases: diagnostic problem, diagnostic algorithms, statistical solution.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

1. Введение. Данное исследование начинается с изучения движения летательного аппарата (см. [10, 11, 15]), которое описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. На базе этих уравнений дается классификация возможных неисправностей в системе управления движением. Вводятся понятия опорных неисправностей и их окрестностей, дается математическое моделирование этих неисправностей и их окрестностей, будет введено понятие диагностического пространства и его математической структуры. При этом обсуждаются уравнения движения, а также дается классификация возможных неисправностей. Все это становится подготовительной частью к задаче диагностики, которая представляется в виде двух последовательно решаемых задач: задачи контроля, т.е. задачи определения наличия неисправности в системе управления, и задачи диагностирования, т.е. задачи распознавания конкретной происшедшей неисправности.

В дальнейшем (см. [12, 13, 32]) дается классификация опорных неисправностей, вводится понятие окрестности опорной неисправности, предложены простейшие математические модели опорных неисправностей и их окрестностей; вводится понятие диагностического пространства, рассматривается его математическая структура, формализующая непрерывность процессов в диагностическом пространстве, показано, что в этом пространстве рассматриваемые опорные неисправности и соответствующие им дифференциальные уравнения невырождены, т.е. измеряемые траектории рассматриваемого летательного аппарата с двумя различными опорными неисправностями не могут совпадать. Подготовлен материал к рассмотрению задачи дифференциальной диагностики.

Далее, в [14, 16] объясняются такие понятия, как сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля. Предлагается решение задачи контроля методом статистических испытаний. Дается постановка расширенной задачи контроля. Подготовлен материал к рассмотрению задачи диагностирования.

Для случая точных траекторных измерений [18] формулируются постановка задачи диагностирования, теорема диагностирования и, как следствие теоремы, два алгоритма диагностирования. Рассмотрена методика априорного счета констант, которые в случае использования первого алгоритма диагностирования требуется запоминать в программе диагностирования на компьютере и других параметров алгоритма. Второй алгоритм не требует запоминания констант, а основан на поиске минимального значения функционала диагностирования из его значений, полученных в процессе диагностирования для априори выбранного набора опорных неисправностей. Обсуждаются различные обобщения теоремы диагностирования: вопросы применимости полученных алгоритмов диагностики при использовании вектора диагностирования меньшей чем вектор состояния размерности и в случае непрерывной экспресс-диагностики без применения поверхности контроля, задача о выборе «минимального» времени диагностирования, задача диагностирования неисправностей, происшедших в окрестностях опорных невырожденных неисправностей и непредусмотренных априорным списком, рассмотрены другие функционалы, решающие задачу диагностирования. Наконец, сформулирована расширенная постановка задачи диагностирования, решение которой осуществимо с помощью предложенных алгоритмов.

В дальнейшем дается оценка погрешностей метода полей направлений в случае не точных траекторных измерений, а траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю заданной гладкой функцией времени, и в случае, если эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с фиксированными параметрами. Показано, что и в этих более сложных случаях можно указать такое «наилучшее» число необходимых траекторных измерений, при котором предложенные алгоритмы диагностирования будут работать конструктивно, а неисправность будет определяться однозначно (ср. с [3, 5, 9, 26, 27, 29]).

В данной работе показано, что диагностика в случае траекторных измерений с шумом, представляющим собой случайный процесс типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром, осуществима с помощью алгоритмов диагностирования, полученных в предыдущих исследованиях, т.е. результаты данной работы остаются справедливыми и в этом достаточно общем случае, при этом получен функционал диагностирования, который в предыдущих работах автора вводился априори [15, 16, 32].

Итак, в [6, 8, 21, 22], в рамках доказательства предельной теоремы, была показана возможность диагностики динамических управляемых систем в случае траекторных измерений с ошибкой ограниченной по модулю заданной функцией времени и в случае, если эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с дисперсией σ^2 . Также было и будет показано, что в этих случаях можно указать «наилучшее» число необходимых траекторных измерений, при которых возможно разделение траекторий неисправных систем, т.е. точное определение происшедшей в системе неисправности [31, 33, 34].

Покажем теперь, что с помощью предложенных алгоритмов можно осуществить диагностику динамических управляемых систем в случае траекторных измерений с шумом, исходя из более общих вероятностных представлений [4, 7, 20].

2. Некоторые статистические алгоритмы и дифференциальные уравнения. Напомним, что конечному набору опорных невырожденных неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^l \quad (1)$$

из класса возможных, введенного в работах [23, 25], поставим в соответствие набор обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 1, \dots, l. \quad (2)$$

Здесь $f_j(x, t)$ — известные вектор-функции, отличающиеся друг от друга той или иной неисправностью (1). Модели (2) будем называть *невырожденными*. Таким образом, на выбор правых частей уравнений (2) вводятся некоторые ограничения (см. также [24, 28]).

В соответствии с (2) рассмотрим (вообще говоря, несколько другие) уравнения

$$x' = \bar{f}_j(x, t), \quad j = 1, \dots, l, \quad (3)$$

(в дальнейшем черту опустим).

Предположим, что в момент $t = 0$ произошла j -я неисправность, т.е. в правой части (3) присутствует одна из функций $f_j(x, t)$, причем это может быть любая f_j ($j = 1, \dots, l$) с *равной вероятностью*.

Предположим, что доступен наблюдению вектор

$$z(t) = x(t) + \xi(t),$$

где $x(t)$ — вектор состояния системы, а $\xi(t)$ — случайный процесс типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром $W(\omega)$ следующего вида:

$$W(\omega) = \begin{cases} M_0, & |\omega| \leq \Delta; \\ 0, & |\omega| > \Delta. \end{cases} \quad (4)$$

Величина $\xi(t)$ является *ошибкой измерения вектора состояния системы $x(t)$* (см. также [17, 19]).

На основе анализа наблюдаемого суммарного сигнала $z(t)$ можно вычислить распределение $P_z(x)$ для всех возможных значений сигнала $x(t)$. Распределение $P_z(x)$ называют распределением обратных вероятностей [30], так как оно указывает на то, каковы вероятности тех или иных значений причины x , если известно вызванное этой причиной следствие z .

На основе анализа этого распределения принимается решение о том, каково было значение сигнала $x(t)$, т.е. в нашем случае — каков был номер правой части системы (3), решением которой является вектор x . Будем обозначать решение системы (3) с правой частью $f_j(x, t)$ буквой x с индексом j .

Номер j может быть определен, например, на основе принципа *максимальной обратной вероятности*, т.е. в качестве j принимается номер решения x_j , для которого вероятность $P_z(x_j)$ имеет наименьшее значение (см. также [24, 30]).

Вероятность $P_z(x)$ находим из классических соотношений

$$P(x, z) = P(x)P_x(z) = P(z)P_z(x),$$

где $P(x, z)$ — совместная вероятность двух случайных функций x и z , $P_x(z)$ — условная вероятность z при заданном x , $P(z)$ — безусловная вероятность z . Тогда, заменяя $1/P(z)$ на постоянную K (так как нас интересует зависимость $P_z(x)$ при данном измеренном z), получим:

$$P_z(x) = KP(x)P_x(z).$$

Постоянная K определяется из условия нормировки

$$\int_{A_x} P_z(x) dx = 1,$$

где A_x — область всех возможных значений x . Величины

$$P(x) = P(x_j) = \frac{1}{l}$$

(где l — число возможных правых частей (3)) априорно известны. Требуется найти зависимость величины $P_x(z)$ от x при данном измеренном z (см. также [20]).

При данном векторе $x_j(t)$ вероятность реализации величины $z(t)$ равна вероятности реализации величины

$$\xi_j(t) = z(t) - x_j(t).$$

Считая величины $\xi_j(t)$ и $x_j(t)$ статистически независимыми, получим:

$$P_x(z) = F(\xi_j) = \frac{1}{(2\pi M)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} \xi_j^2(t) dt \right\}.$$

Здесь $M_0 = M/2\Delta$ — единичная интенсивность шума (4), M — средняя интенсивность, $N = [\Delta(\tau - \tau_0)]$ (квадратные скобки в данном случае означают взятие целой части числа), где Δ — ширина спектра, $\tau - \tau_0$ — время определения номера j (время диагностирования). Таким образом, справедливо представление

$$P_x(z) = \frac{1}{(2\pi M)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \right\}.$$

Тогда

$$P_z(x_j) = \frac{K}{l} \frac{1}{(2\pi M)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \right\}. \quad (5)$$

В силу того, что величины K и l постоянны, величина $(2\pi M)^N$ в (5) при конкретном значении $\xi(t)$ и заданной разности $\tau - \tau_0$ также постоянна. Нахождение же максимума обратной вероятности сводится к нахождению максимума величины

$$\exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \right\}$$

или, что то же самое, к нахождению минимума величины

$$\int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \quad (6)$$

(так как $M_0 = \text{const}$ при фиксированных величинах M и Δ).

3. Преобразование ключевой величины, основной функционал и решающее правило. Покажем, что величина (6), путем использования теоремы Котельникова о разложении случайной функции, может быть сведена от интеграла к сумме.

Действительно, так как время диагностирования $\tau - \tau_0$ задано, и характеристика шума $\xi(t)$ известна (в частности, известна ширина спектра Δ), то по теореме Котельникова существует число $N = [\Delta(\tau - \tau_0)]$ такое, что N значений

$$\xi_j(t_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad t_i = \frac{i}{\Delta},$$

являются некоррелированными (а при нашем предположении о нормальности белого шума и статистически независимыми) координатами процесса $\xi_j(t)$, и на конечном интервале времени (τ_0, τ) применимо разложение следующего вида:

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \xi_j^2(t) dt = \sum_{i=1}^N \xi_j^2(t_i). \quad (7)$$

Моменты времени t_i в (7) являются моментами измерений вектора $z(t)$ в процессе функционирования системы. Для тех же моментов времени t_i (в бортовом вычислителе по модели объекта) вычисляются все векторы состояний $\bar{x}_j$, $j = 1, \dots, l$.

Решающее правило определения номера j правой части (3) сформулируем теперь следующим образом.

На интервале времени (τ_0, τ) для всех возможных значений номеров j правой части (3) вычисляются следующие суммы:

$$S_j = \sum_{i=1}^N (z(t) - \bar{x}_j(t))^2. \quad (8)$$

Число j , для которого значение S_j минимально, указывает номер правой части (3), т.е. номер случившейся в системе неисправности.

Таким образом, в результате статистического решения задачи дифференциальной диагностики при траекторных измерениях с шумом получен алгоритм диагностики, аналогичный алгоритму, который влечет теорема из [32], а также функционал диагностики (8), который в теореме вводился априори, т.е. получено *замкнутое детерминированное решение* задачи дифференциальной диагностики: получен функционал, решающий задачу, и указано правило его минимизации (см. также [26, 28]).

Полученный алгоритм верен и в случае, если вектор $z(t)$ содержит несущее информацию о характере функций $f_j(x, t)$, $j = 1, \dots, l$, в правых частях уравнений (3) подмножество $d < n$ измеряемых координат фазового вектора состояния $x(t)$.

Если динамическая управляемая система подвержена внутренним и внешним воздействиям шумов, и математическая модель движения этой системы так или иначе описывает эти шумы, то диагностика управления такой системой также может быть осуществлена с помощью полученного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисенок И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики// Фундам. прикл. мат. — 1999. — 5, № 3. — С. 775–790.
2. Борисенок И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
3. Жуков В. П. О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем// Автомат. телемех. — 1994. — № 3. — С. 24–36.
4. Жуков В. П. О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова// Автомат. телемех. — 2005. — № 12. — С. 51–64.
5. Жуков В. П. О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости// Автомат. телемех. — 2008. — № 1. — С. 30–38.
6. Мироновский Л. А. Функциональное диагностирование динамических систем// Автомат. телемех. — 1980. — № 3. — С. 96–121.
7. Окунев Ю. М., Парусников Н. Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
8. Пархоменко П. П., Сагомонян Е. С. Основы технической диагностики. — М.: Энергия, 1981.
9. Чикин М. Г. Системы с фазовыми ограничениями// Автомат. телемех. — 1987. — № 10. — С. 38–46.
10. Шамолин М. В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2004.
11. Шамолин М. В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, перераб. и дополн.. — М.: Экзамен, 2007.
12. Шамолин М. В. Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электрон. модел. — 2009. — 31, № 1. — С. 97–115.
13. Шамолин М. В. Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электрон. модел. — 2009. — 31, № 3. — С. 73–90.
14. Шамолин М. В. Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электрон. модел. — 2009. — 31, № 4. — С. 55–66.

15. Шамолин М. В. Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электрон. модел. — 2010. — 32, № 1. — С. 45–52.
16. Шамолин М. В. Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электрон. модел. — 2010. — 32, № 5. — С. 31–44.
17. Шамолин М. В. Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электрон. модел. — 2011. — 33, № 3. — С. 121–126.
18. Шамолин М. В. Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 150. — С. 88–109.
19. Шамолин М. В., Кругова Е. П. Задача диагностики модели гиростабилизированной платформы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 160. — С. 137–141.
20. Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B. J., Shwartz A. Power control in wireless cellular networks// IEEE Trans. Automat. Control. — 2009. — 54, № 10. — P. 2328–2340.
21. Antoulas A. C., Sorensen D. C., Zhou Y. On the decay rate of Hankel singular values and related issues// Syst., Control Lett. — 2002. — 46. — P. 323–342.
22. Beck A., Teboulle M. Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization// Oper. Res. Lett. — 2003. — 31, № 3. — P. 167–175.
23. Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The ordered subsets mirror descent optimization method with applications to tomography// SIAM J. Optim. — 2001. — 12, № 1. — P. 79–108.
24. Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of optimal controls for partially observed jump processes// Acta Appl. Math. — 2002. — 74, № 2. — P. 155–175.
25. Chiang M., Tan C. W., Hande P., Lan T. Power control in wireless cellular networks// Found. Trends Networking. — 2008. — 2, № 4. — P. 381–533.
26. Choi D. H., Kim S. H., Sung D. K. Energy-efficient maneuvering and communication of a single UAV-based relay// IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. — 2014. — 50, № 3. — P. 2119–2326.
27. Fleming W. H. Optimal control of partially observable diffusions// SIAM J. Control. — 1968. — 6, № 2. — P. 194–214.
28. Ho D.-T., Grotli E. I., Sujit P. B., Johansen T. A., Sousa J. B. Optimization of wireless sensor network and UAV data acquisition// J. Intel. Robot. Syst. — 2015. — 78, № 1. — P. 159–179.
29. Ober R. J. Balanced parameterization of classes of linear systems */ SIAM J. Control Optim. — 1991. — 29, № 6. — P. 1251–1287.
30. Ober R. J., McFarlane D. Balanced canonical forms for minimal systems: A normalized coprime factor approach// Linear Algebra Appl. — 1989. — 122–124. — P. 23–64.
31. Rieder U., Winter J. Optimal control of Markovian jump processes with partial information and applications to a parallel queueing model// Math. Meth. Oper. Res. — 2009. — 70. — P. 567–596.
32. Shamolin M. V. Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — 114, № 1. — P. 976–1024.
33. Su W., Boyd S., Candes E. A differential equation for modeling Nesterov's accelerated gradient method: Theory and insights// J. Machine Learning Res. — 2016. — № 17 (153). — P. 1–43.
34. Wilson D. A. The Hankel operator and its induced norms// Int. J. Contr. — 1985. — 42. — P. 65–70.

Шамолин Максим Владимирович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
SISSA)
Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)
Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н.
(ВИНИТИ РАН)
Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)
Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент
(МГУ им. М. В. Ломоносова)
Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Воблый Виталий Антониевич,
д.ф.-м.-н.
(ВИНИТИ РАН)
Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор
(МПГУ,
ВИНИТИ РАН)
Дудин Евгений Борисович,
к.т.н.
(ВИНИТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, МГУ им.
М. В. Ломоносова)
Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)
Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)
Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)
Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)
Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)
Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)
Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый
университет при Правительстве РФ,
ВИНИТИ РАН)
Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Кругова Елена Павловна
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Шамолин Максим Владимирович
Юлдашев Турсун Камалдинович