ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 207 (2022)

Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 207 (2022)

Дата публикации **28 марта** 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года — Выходит 15 раз в год

Редактор-составитель выпуска	М. Ш. Бурлуцкая
Научный редактор выпуска	Е. Е. Букжалёв
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782-4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-3-9
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-10-15
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-16-26
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-27-36
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-37-47
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-48-60
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-61-67
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-68-76
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-77-90
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-91-100
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-101-106
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-107-119
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-120-143
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-207-144-156

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 207

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЗИМНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ»

ВОРОНЕЖ, 28 ЯНВАРЯ – 2 ФЕВРАЛЯ 2021 г.

Часть 2

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-3-9

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ И ВНЕШНИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2022 г. **К. А. БЛИЗНЮК, Е. А. МАЗЕПА**

Аннотация. В работе изучаются вопросы существования и принадлежности к заданному функциональному классу решений уравнений Пуассона на некомпактном римановом многообразии M без края. Для описания асимптотического поведения решения вводится понятие φ-эквивалентности на множестве непрерывных на римановом многообразии функций и устанавливается взаимосвязь между разрешимостью краевых задач для уравнений Пуассона на многообразии M и вне некоторого компактного подмножества $B \subset M$ с тем же ростом «на бесконечности». При этом понятие φ-эквивалентности непрерывных функций на M позволяет оценить скорость асимптотической сходимости решений краевой и внешней краевой задач к граничным данным.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Пуассона, некомпактное риманово многообразие, асимптотическое поведение.

BOUNDARY AND OUTER BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THE POISSON EQUATION ON NONCOMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

© 2022 **K. A. BLIZNYUK, E. A. MAZEPA**

Abstract. In this paper, we examine the existence of solutions of the Poisson equations on a noncompact Riemannian manifold M without boundary. To describe the asymptotic behavior of a solution, we is introduce the notion of φ-equivalence on the set of continuous functions on a Riemannian manifold and establish a relationship between the solvability of boundary-value problems for the Poisson equations on the manifold M and outside some compact subset $B \subset M$ with the same growth “at infinity.” Moreover, the notion of φ-equivalence of continuous functions on M allows one to estimate the rate of asymptotic convergence of solutions of boundary-value and outer boundary-value problems to boundary data.

***Keywords and phrases*:** boundary-value problem, Poisson equation, noncompact Riemannian manifold, asymptotic behavior.

***AMS Subject Classification*:** 31C12

1. Введение. Данная статья посвящена исследованию асимптотического поведения решений уравнения Пуассона на некомпактном римановом многообразии без края. Подобного рода задачи часто возникают в классификационной теории некомпактных римановых поверхностей и многообразий (см. [22]). Для некомпактной римановой поверхности хорошо известная задача идентификации конформного типа может быть сформулирована следующим образом: существует ли

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № 0633-2020-0003).

на этой поверхности нетривиальная положительная супергармоническая функция? Именно это свойство послужило основой для расширения понятия параболичности для произвольных некомпактных римановых многообразий. В работе [3] показано, что параболичность типа полного риманова многообразия эквивалентна тому, что емкость любого его компактного подмножества равна нулю. Кроме того, емкостная методика показала высокую эффективность при изучении поведения решений эллиптических уравнений и неравенств на некомпактных римановых многообразиях (см. [1,2,5,14]). Было показано, что отличительным свойством многообразий параболического типа является выполнение для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данном многообразии является тождественной постоянной.

С другой стороны, оказалось, что класс многообразий, на которых существуют нетривиальные решения различных эллиптических уравнений, достаточно широк. Например, в работах [12,13,21,23] были найдены условия, обеспечивающие разрешимость задачи Дирихле с непрерывными граничными данными «на бесконечности» для гармонических функций на некоторых некомпактных многообразиях, допускающих естественную геометрическую компактификацию. Аналогичные вопросы для ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера изучались в [9,10]).

Заметим, что большая часть статей по данной проблематике посвящена исследованию решений однородных эллиптических уравнений. Однако в последние годы появились первые работы, посвященные изучению асимптотического поведения решений неоднородных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях (см., например, [8,16,19,20]).

В исследованиях, посвященных разрешимости краевых задач, наряду с вопросом существования решения часто параллельно изучаются вопросы: в каком смысле (в какой метрике) понимать близость решения к граничным данным, с какой скоростью идет сближение (см. [4,7,18]). Также вызывает интерес получение количественных характеристик, оценивающих эту скорость. Данная работа выполнена в указанном направлении. В частности, даны некоторые функциональные оценки скорости приближения решений краевых задач для уравнения Пуассона к своим граничным данным на произвольных некомпактных римановых многообразиях.

2. Основные определения и постановка задачи. Постановка краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений (в частности, задачи Дирихле) на некомпактном римановом многообразии M и в неограниченных областях этого многообразия может оказаться достаточно проблематичной, поскольку неясно, как интерпретировать граничные данные. Естественная геометрическая компактификация некоторых некомпактных римановых многообразий (например, поверхности вращения, псевдосферы и др.), позволяет в этих случаях осуществлять постановку краевых задач аналогично классической постановке задачи Дирихле в ограниченных областях $\mathbb{R}^n$ (см., например, [9,10,12,13,21,23]).

В [11] предложен новый подход к постановке краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях, основанный на рассмотрении классов эквивалентности непрерывных функций на M. Опишем его подробнее.

Пусть M — произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие без края и $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание M, т.е. последовательность таких предкомпактных непустых открытых подмножеств в M, что $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$ и $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Всюду далее предполагаем, что границы ∂B_k являются гладкими подмногообразиями.

Обозначим через v_k гармоническую функцию в $B_k \setminus B$, удовлетворяющую условиям $v_k|_{\partial B} = 1$, $v_k|_{\partial B_k} = 0$. Используя принцип максимума для гармонических функций, легко показать, что последовательность v_k равномерно ограничена на любом компактном подмножестве в $M \setminus B$. Более того, при $k \to \infty$ она монотонно возрастает и, следовательно, сходится на $M \setminus B$ к гармонической функции

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k$$

и удовлетворяет условиям $0 < v \leqslant 1$, $v|_{\partial B} = 1$. Функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ и является емкостным потенциалом компакта B относительно многообразия M (см. также [2,11]).

Определение 1 (см. [2])**.** Многообразие M будем называть многообразием *параболического типа*, если для некоторого компакта B его емкостный потенциал тождественно равен 1. Многообразие, на котором существует нетривиальный емкостный потенциал v, будем называть многообразием *непараболического типа*.

Определение 2 (см. [11])**.** Непрерывные функции f_1 и f_2 будем называть *эквивалентными* на M (обозначение $f_1 \sim f_2$), если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M имеем

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{M\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0.$$

Замечание 1. Это отношение эквивалентности характеризует асимптотическое поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$ и обеспечивает приближение функций друг к другу на «бесконечности» в равномерной норме. Ясно, что если изменить значения функции f на компакте B, то вновь полученная функция будет эквивалентна исходной.

С помощью такого подхода была установлена взаимосвязь между разрешимостью краевых задач и разрешимостью внешних краевых задач для стационарного уравнения Шредингера на некомпактном римановом многообразии (см. [11]). Аналогичный результат для неоднородных эллиптических уравнений был получен в [16].

Описанный выше подход был развит в дальнейшем в ряде работ. В частности, в работах [6,15] было введено понятие слабой эквивалентности решений однородных эллиптических уравнений и получена некоторая оценка скорости асимптотической сходимости этих решений к граничным данным в терминах слабой эквивалентности. В работе [17] было введено понятие φ-эквивалентности (где $\varphi > 0$ — непрерывная на M функция, $\varphi \sim 0$) и исследовано асимптотическое поведение решений краевых и внешних краевых задач для уравнения Лапласа—Бельтрами в терминах φ-эквивалентности.

В данной статье исследуются вопросы существования и принадлежности к заданному функциональному классу решений $u \in C^2(M)$ уравнения Пуассона

$$\Delta u = g(x), \tag{1}$$

где $g \in C^{0,\alpha}(M)$, $0 < \alpha < 1$ на некомпактном римановом многообразии M на основе понятия φ-эквивалентности.

Пусть $B \subset M$ — произвольное связное предкомпактное подмножество с гладкой границей и $B \subset B_k$ для всех k, $\varphi > 0$ — такая непрерывная на M функция, что $\varphi \sim 0$. Из определения 2 эквивалентных функций следует, что функция φ будет ограничена на M.

Определение 3 (см. также [17])**.** Будем говорить, что непрерывные функции f_1 и f_2 *φ-эквивалентны на M* и обозначать $f_1 \overset{\varphi}{\sim} f_2$, если существует такая константа $C > 0$, что

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leqslant C \cdot \varphi(x),$$

для любого $x \in M$.

Легко показать, что введенное отношение является отношением эквивалентности и разбивает множество всех непрерывных на M функций на классы эквивалентности. Будем обозначать класс φ-эквивалентных f функций через $[f]_{\varphi}$.

Отношение φ-эквивалентности также как и отношение эквивалентности характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$, и если изменить значения функции f на компакте B, то вновь полученная функция будет φ-эквивалентна исходной. Ясно также, что если $f_1 \overset{\varphi}{\sim} f_2$, то $f_1 \sim f_2$.

Определение 4 (см. также [17])**.** Будем говорить, что для уравнения (1) на M *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]_{\varphi}$, если на M существует такое решение $u(x)$ уравнения (1), что $u \in [f]_{\varphi}$.

Определение 5 (см. [17])**.** Будем говорить, что для уравнения (1) на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]_{\varphi}$, если для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M \setminus B$ существует такое решение $u(x)$ уравнения (1), что $u \in [f]_{\varphi}$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Таким образом, понятие φ-эквивалентности, с одной стороны, обобщает понятия эквивалентности, а с другой стороны, позволяет более точно оценить скорость асимптотического приближения решения краевой задачи к граничным условиям.

В [17] также были доказаны некоторые свойства φ-эквивалентных функций, в частности, получен принцип сравнения и теорема единственности для решений краевых и внешних краевых задач для уравнения Лапласа—Бельтрами с граничными данными из класса $[f]_\varphi$.

Теорема 1 (принцип сравнения, [17]). *Пусть $\Delta w \leqslant \Delta u$ на $M \setminus B$, $w|_{\partial B} \geqslant u|_{\partial B}$ и $w \overset{\mathcal{L}}{\sim} u$. Тогда $w \geqslant u$ на $M \setminus B$. Пусть $\Delta w \leqslant \Delta u$ на M и $w \overset{\mathcal{L}}{\sim} u$. Тогда $w \geqslant u$ на M.*

Теорема 2 (теорема единственности, [17]). *Пусть $\Delta w = \Delta u$ на $M \setminus B$, $w|_{\partial B} = u|_{\partial B}$ и $w \overset{\mathcal{L}}{\sim} u$, тогда $w = u$ на $M \setminus B$. Пусть $\Delta w = \Delta u$ на M и $w \overset{\mathcal{L}}{\sim} u$, тогда $w = u$ на M.*

Доказательство этих теорем основано на классических утверждениях теории уравнений с частными производными: принципе максимума, теоремах сравнения и единственности для линейных эллиптических дифференциальных уравнений (подробнее см. в [17]).

3. Основной результат. Следующая теорема устанавливает взаимосвязь между разрешимостью краевой и внешней краевой задачами с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$ для уравнения Пуассона на некомпактном римановом многообразии.

Теорема 3. *Пусть M — произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие, $B \subset M$ произвольное связное предкомпактное подмножество с гладкой границей ∂B, f — непрерывная на M функция. Следующие условия эквивалентны:*

- (i) *На $M \setminus B$ для уравнения* (1) *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$,*
- (ii) *На непараболическом многообразии M для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$.*

Доказательство. Докажем импликацию (i)⇒(ii).

Пусть u_0 решение внешней краевой задачи для уравнения Пуассона из условий п. (i) данной теоремы. Рассмотрим функцию $U = u_0 \cdot \zeta$, где ζ — такая гладкая функция на M, что $\zeta = 0$ на предкомпактном множестве $B' \subset B$ и $\zeta = 1$ вне $\overline{B}$. Тогда $U \in C^{2,\alpha}(M)$ и $\Delta U = \Delta(u_0 \cdot \zeta) = g^*$, где $g^* \in C^{0,\alpha}(M)$, $g^*(x) = 0$ на B', $g^*(x) = g(x)$ вне $\overline{B}$.

Рассмотрим теперь последовательность функций ζ_k — решений задач

$$\Delta\zeta_k = g \quad \text{в} \quad B_k, \quad \zeta_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$$

и последовательность функций $\psi_k = \zeta_k - U$. Для этих функций имеем

$$\Delta\psi_k = g - g^* \quad \text{в} \quad B_k, \quad \psi_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Далее покажем, что многообразие M является непараболическим, т.е. на $M \setminus B$ существует нетривиальный емкостный потенциал. Для этого рассмотрим функции v_1 и v_2 — решения следующих внешних краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v_1 = g \quad \text{в} \quad M \setminus B, \\ v_1|_{\partial B} = 1, \\ v_1 \in [f]_\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v_2 = g \quad \text{в} \quad M \setminus B, \\ v_2|_{\partial B} = 2, \\ v_2 \in [f]_\varphi \end{cases} .$$

Существование этих функций следует из условия п. (i) теоремы. Тогда разность $v = v_2 - v_1$ является по теореме единственности нетривиальным емкостным потенциалом на $M \setminus B$, так как для гармонической на $M \setminus B$ функции v выполнены следующие условия $0 < v \leqslant 1$, $v|_{\partial B} = 1$.

На каждом множестве B_k существует функция Грина, т.е. такая функция $G_k(x, y)$, что

$$\Delta_x G_k(x, y) = -\delta_y(x), \quad G_k|_{x \in \partial B_k} = 0$$

для любого $y \in B_k$, где $\delta_y(x)$ — δ-функция Дирака. По формуле Грина в B_k, имеем

$$\psi_k(x) = -\int\limits_{B_k} G_k(x,y)(g(y) - g^*(y))dy.$$

Непараболичность многообразия M влечет существование конечной функции Грина

$$G(x,y) = \lim_{k\to\infty} G_k(x,y)$$

на всем M, что в свою очередь влечет существование предела последовательности $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть

$$\psi = \lim_{k\to\infty} \psi_k,$$

тогда $\Delta\psi = g - g^*$ на M (см. также [2]).

Покажем, что $\psi \in [0]_\varphi$. В силу непрерывности функции $\psi(x)$ существует

$$A^* = \max_{\partial B} |\psi(x)|.$$

Очевидно, что

$$-(A^*+1) \leqslant \psi|_{\partial B} \leqslant A^*+1$$

и для любого достаточно большого номера k

$$-(A^*+1) \leqslant \psi_k|_{\partial B} \leqslant A^*+1.$$

Рассмотрим функции $u_1 = -(A^*+1)v$ и $u_2 = (A^*+1)v$ на $M \setminus B$, где v — емкостный потенциал подмножества B, $v \in [0]_\varphi$. Функции u_1 и u_2 являются гармоническими функциями на $M \setminus B$ и удовлетворяют условиям

$$u_1|_{\partial B} = -(A^*+1), \quad -(A^*+1) \leqslant u_1 \leqslant 0, \quad u_1 \in [0]_\varphi,$$
$$u_2|_{\partial B} = A^*+1, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant A^*+1, \quad u_2 \in [0]_\varphi.$$

Тогда $u_1 \leqslant u_2$ на $M \setminus B$ и, по принципу сравнения для гармонических функций на $B_k \setminus B$ для любого достаточно большого номера k выполнены неравенства

$$u_1 \leqslant \psi_k \leqslant u_2.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим $u_1 \leqslant \psi \leqslant u_2$. Учитывая, что $u_1 \overset{\varphi}{\sim} u_2 \overset{\varphi}{\sim} 0$, имеем $\psi \in [0]_\varphi$.

Из существования функции

$$\psi = \lim_{k\to\infty} \psi_k$$

следует существование предельной функции

$$u = \lim_{k\to\infty} \zeta_k = \lim_{k\to\infty} (\psi_k + U) = \psi + U,$$

причем $\Delta u = \Delta\psi + \Delta U = g - g^* + g^* = g$ на M и на $M \setminus B$ выполнено

$$|u - f| = |\psi + U - f| = |\psi + u_0 - f| \leqslant |\psi| + |u_0 - f| \leqslant C_1\varphi + C_2\varphi = C\varphi,$$

отсюда $u \overset{\varphi}{\sim} u_0 \overset{\varphi}{\sim} f$. Первая часть теоремы доказана.

Докажем импликацию (ii)$\Rightarrow$(i). Пусть теперь u_0 — решение краевой задачи для уравнения Пуассона на всем M из условий п. (ii) данной теоремы. Сначала покажем, что для каждой непрерывной на ∂B функции Φ существует такая гармоническая функция w на $M \setminus B$, что $w|_{\partial B} = \Phi$ и $w \in [0]_\varphi$. Рассмотрим последовательность функций w_k, являющихся решением следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta w_k = 0 \text{ в } B_k \setminus B, \\ w_k|_{\partial B} = \Phi(x), \\ w_k|_{\partial B_k} = \varphi(x). \end{cases}$$

По принципу максимума для гармонических функций для каждого k имеем

$$|w_k| \leqslant \sup_{\partial(B_k\setminus B)} |w_k| \leqslant \sup_{\partial B} |\Phi| + \sup_{M\setminus B} \varphi,$$

т.е. последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на $M \setminus B$ и, следовательно, компактна в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на каждом компактном подмножестве в $M \setminus B$ (см., например, [7, с. 37]). Пусть

$$w = \lim_{k\to\infty} w_k$$

— предельная функция. Ясно, что w — гармоническая функция и $w|_{\partial B} = \Phi$.

Как и в [17] можно показать, что $w \in [0]_\varphi$, т.е. для некоторой константы $C > 0$ выполнено $|w(x)| \leqslant C\varphi(x)$, для любого $x \in M \setminus B$. Так как

$$w = \lim_{k\to\infty} w_k,$$

то достаточно показать, что $|w_k(x)| \leqslant C\varphi(x)$, для любого $x \in B_k \setminus B$.

Пусть сначала $x \in \partial B_k$. Так как $w_k|_{\partial B_k} = \varphi|_{\partial B_k}$, то неравенство $|w_k(x)| \leqslant C\varphi(x)$ выполнено при $C \geqslant 1$. Если же $x \in \partial B$, то $w_k|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$. Покажем, что $|w_k(x)| \leqslant C^*\varphi(x)$, где константа

$$C^* = \frac{\max_{\partial B}|\Phi(x)|}{\min_{\partial B}\varphi(x)}.$$

Действительно, в силу непрерывности функций $\Phi(x)$ и $\varphi(x) > 0$ на ∂B выполнено

$$|w_k| = |\Phi(x)| \leqslant \max_{\partial B}|\Phi(x)|\cdot 1 \leqslant \max_{\partial B}|\Phi(x)|\frac{\varphi(x)}{\min_{\partial B}\varphi(x)} \leqslant \varphi(x)\frac{\max_{\partial B}|\Phi(x)|}{\min_{\partial B}\varphi(x)} = C^*\varphi(x).$$

Тогда согласно принципу максимума для гармонических функций в $B_k \setminus B$ имеем

$$|w_k(x)| \leqslant C^{**}\varphi(x), \quad \text{где} \quad C^{**} = \max\{C^*, 1\}.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в последнем неравенстве, получаем, что выполнено $w \in [0]_\varphi$.

Далее, возьмем $u_0 \in [f]_\varphi$ — решение краевой задачи для уравнения Пуассона на M, и рассмотрим непрерывную на ∂B функцию $\Phi^* = u_0 - \Phi$, где Φ — произвольная непрерывная на ∂B функция из определения краевой задачи. Как доказано выше, на $M \setminus B$ существует такая гармоническая функция w, что $w|_{\partial B} = \Phi^*$ и $w \in [0]_\varphi$. Тогда функция $u = u_0 - w$ будет искомым решением внешней краевой задачи на $M \setminus B$ с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$. Действительно,

$$\Delta(u_0 - w) = g, \quad (u_0 - w)|_{\partial B} = u_0|_{\partial B} - (u_0 - \Phi)|_{\partial B} = \Phi.$$

Кроме того, на $M \setminus B$ выполнено неравенство $|u - f| = |u_0 - w - f| \leqslant |u_0 - f| + |w| \leqslant (C + C^{**})\varphi$, где C и C^{**} некоторые положительные константы. Следовательно, по определению $u \in [f]_\varphi$. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьян А. А., Лосев А. Г.* О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях// Мат. физ. компьют. модел. — 2017. — *20*, № 3. — С. 34–42.
2. *Григорьян А. А., Надирашвили Н. С.* Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи// Изв. вузов. Мат. — 1987. — № 5. — С. 25—33.
3. *Григорьян А. А.* О существовании положительных фундаментальных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях// Мат. сб. — 1985. — *128*, № 3. — С. 354–363.
4. *Гущин А. К.* Некоторое усиление свойства внутренней непрерывности по Гельдеру решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка// Теор, мат. физ. — 2008. — *157*, № 3. — С. 345–363.
5. *Кесельман В. М.* Понятия и критерии емкостного типа некомпактного риманового многообразия на основе обобщенной емкости// Мат. физ. компьют. модел. — 2019. — *22*, № 2. — С. 21–32.
6. *Корольков С. А.* О разрешимости краевых задач для стационарного уравнения Шредингера в неограниченных областях римановых многообразий// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 6. — С. 726–732.
7. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М.: Наука, 1971.
8. *Лосев А. Г.* О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 12. — С. 1643–1652.

9. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях// Изв. вузов. Мат. — 1999. — № 6. — С. 41–49.
10. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях// Алгебра и анализ. — 2001. — *13*, № 1. — С. 84–110.
11. *Мазепа Е. А.* Краевые задачи для стационарного уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях// Сиб. мат. ж. — 2002. — *43*, № 3. — С. 591–599.
12. *Ancona A.* Negative curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary// Ann. Math. (2). — 1987. — *125*, № 3. — P. 495–536.
13. *Anderson M. T.* The Dirichlet problem at innity for manifolds of negative curvature// J. Differ. Geom. — 1983. — *18*. — P. 701–721.
14. *Grigor'yan A.* Analitic and geometric background of recurence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds// Bull. Am. Math. Soc. — 1999. — *36*. — P. 135–249.
15. *Korolkov S. A., Losev A. G.* Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends// Math. Z. — 2012. — *272*, № 1–2. — P. 459–472.
16. *Losev A. G., Mazepa E. A.* On solvability of the boundary value problems for the inhomogeneous elliptic equations on noncompact Riemannian manifolds// Probl. Anal. Issues Anal. — 2018. — *7 (25)*. — P. 101–112.
17. *Losev A. G., Mazepa E. A.* On solvability of the boundary value problems for harmonic function on noncompact Riemannian manifolds// Probl. Anal. Issues Anal. — 2019. — *8 (26)*, № 3. — P. 73–82.
18. *Losev A., Mazepa E., Romanova I.* Eigenfunctions of the Laplace operator and harmonic functions on model Riemannian manifolds// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 11. — P. 2190–2197.
19. *Mastrolia P., Monticelli D. D., Punzo F.* Elliptic and parabolic equations with Dirichlet conditions at infinity on Riemannian manifolds// Adv. Differ. Equations. — 2018. — *23*, № 1/2. — P. 89–108.
20. *Munteanu O., Sesum N.* The Poisson equation on complete manifolds with positive spectrum and applications// Adv. Math. — 2010. — *223*. — P. 198–219.
21. *Murata M.* Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds// Proc. Int. Conf. on Potential Theory (Nagoya (Japan), August 30 – September 4, 1990). — Berlin–New York: De Gruyter, 1991. — P. 251–260.
22. *Sario L., Nakai M., Wang C., Chang L. O.* Classification Theory of Riemannian Manifolds. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1977.
23. *Sullivan D.* The Dirichlet problem at innity for a negatively curved manifold// J. Differ. Geom. — 1983. — *18*. — P. 723–732.

Близнюк Кристина Алексеевна
Волгоградский государственный университет
E-mail: `bliznjukka@volsu.ru`

Мазепа Елена Алексеевна
Волгоградский государственный университет
E-mail: `elena.mazepa@volsu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 10–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-10-15

УДК 517.953, 517.968

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. **В. Б. ВАСИЛЬЕВ, Н. В. ЭБЕРЛЕЙН**

Аннотация. Рассматривается задача сопряжения для эллиптического псевдодифференциального уравнения на плоскости с угловым разрезом в пространстве Соболева—Слободецкого. Кроме условий на границе задаются дополнительные интегральные условия. При наличии специальной волновой факторизации символа псевдодифференциального оператора с определенным индексом описано сведение такой краевой задачи к эквивалентной системе линейных интегральных уравнений.

***Ключевые слова*:** псевдодифференциальное уравнение, интегральное условие, задача сопряжения, волновая факторизация, разрешимость, система линейных интегральных уравнений.

CONJUGATION PROBLEM FOR ELLIPTIC PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE PLANE

© 2022 **V. B. VASILYEV, N. V. EBERLEIN**

Abstract. The conjugation problem for an elliptic pseudodifferential equation on the plane with an angular cut in the Sobolev–Slobodetskii space is considered. In addition to the boundary conditions, integral conditions are posed. Under a specific wave factorization of the symbol of the pseudodifferential operator, we reduce this boundary-value problem to an equivalent system of linear integral equations.

***Keywords and phrases*:** pseudodifferential equation, integral condition, conjugation problem, wave factorization, solvability, system of linear integral equations.

***AMS Subject Classification*:** 35J58, 45A05

1. Введение. Пусть плоский сектор имеет вид $C^a_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, \ a > 0\}$, A— эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1 \leqslant |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \leqslant c_2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим задачу нахождения нетривиальной пары функций $u_+ \in H^{s_1}(C^a_+)$, $u_- \in H^{s_2}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C^a_+})$ из соответствующих пространств Соболева—Слободецкого [5], удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$(Au_+)(x) = 0, \quad x \in C^a_+,$$
$$(Av_-)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C^a_+},$$

и условий, при которых такая пара может быть определена единственным образом.

Простейший вариант задачи сопряжения представляет собой классическая краевая задача Римана о нахождении пары аналитический функций в двух областях с общей границей, на которой

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FZWG-2020-0029).

их граничные значения связаны линейным соотношением [3, 4]. Для других дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений варианты таких задач сопряжения рассмотрены в [5, 6, 8].

Если предположить, что символ допускает волновую факторизацию [1] относительно конуса с индексом $\varkappa$, то сразу можно заключить, что при

$$|\varkappa - s| < 1/2$$

имеется только тривиальное решение. Рассматриваем случай $\varkappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$ и подбираем различные типы дополнительных условий на пары, при которых такая пара может быть однозначно определена. Некоторые варианты условий рассматривались в [7,8]; здесь вводим в рассмотрение комбинацию локальных и нелокальных условий на искомые функции.

Так, в частности, при дополнительном условии

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2) dx_2 = g(x_1),$$

где g — заданная функция, и линейному соотношению, связывающему граничные значения u_+, u_- на ∂C_+^a, вопрос об однозначной разрешимости сформулированной задачи сопряжения сводится к однозначной разрешимости полученной системы линейных интегральных уравнений. Эта система строится по элементам волновой факторизации и коэффициентам линейного соотношения граничных значений $u_\pm$.

2. Постановка задачи. Рассмотрим случай $s_1 = s_2$. Обозначим $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = a|x_1|, a > 0\}$. Рассмотрим следующую задачу о нахождении функции U, состоящей из двух элементов

$$U(x) = \begin{cases} U_+(x), & x \in C_+^a, \\ U_-(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}. \end{cases}.$$

в пространстве $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$, удовлетворяющую некоторым дополнительным условиям, более точно

$$\begin{cases} (AU)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_+(x_1, x_2) dx_2 = g_0(x_1), & x_1 \in \mathbb{R}, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_-(x_1, x_2) dx_2 = g_1(x_1), & x_1 \in \mathbb{R}, \\ u_+(x) - u_-(x) = g_2(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

где u_+, u_- — граничные значения U из C_+^a и $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}$, соответственно, решение u разыскивается в пространстве $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$, функции $g_0, g_1 \in H^{s+1/2}(\mathbb{R})$, $g_2 \in H^{s-1/2}(\Gamma)$ заданы.

Напомним, что пространство $H^s(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, определяется как подпространство функций $u(x) \in H^s(\mathbb{R}^2)$ с носителем в $\overline{D}$ и с индуцированной нормой

$$\|u\|_s = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi \right)^{1/2},$$

где $\tilde{u}(\xi)$ обозначает преобразование Фурье функции u:

$$\tilde{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi} u(x) dx.$$

Пространство $H^s(\Gamma)$ можно трактовать как прямую сумму $H^s(\mathbb{R}_+) \oplus H^s(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+$ — положительная полуось $\{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$.

3. Волновая факторизация символа и структура общего решения. Обозначим $\overset{*}{C^a_+}$ сопряженный конус к C^a_+, который имеет вид

$$\overset{*}{C^a_+}= \{x \in \mathbb{R}^2 : ax_2 > |x_1|\},$$

и положим $\overset{*}{C^a_-}= - \overset{*}{C^a_+}$.

Радиальной трубчатой областью $T(\overset{*}{C^a_+})$ над конусом $\overset{*}{C^a_+}$ понимается область двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$ вида $\mathbb{R}^2 + i\,\overset{*}{C^a_+}$ [2].

Определение 1. Волновой факторизацией символа $A(\xi)$ относительно конуса C^a_+ называется его представление в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ определены всюду в $\mathbb{R}^2$ кроме, возможно, точек $a^2\xi_2^2 = \xi_1^2$;

(ii) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(\overset{*}{C^a_+})$, $T(-\overset{*}{C^a_+})$ соответственно, и эти продолжения удовлетворяют оценкам

$$|A^{\pm1}_{\neq}(\xi + i\tau)| \leqslant c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm\varkappa}, \quad |A^{\pm1}_{=}(\xi - i\tau)| \leqslant c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha-\varkappa)}, \quad \forall\tau \in\overset{*}{C^a_\pm} .$$

Число $\varkappa \in \mathbb{R}$ называется индексом волновой факторизации.

Рассмотрим отдельно уравнение

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in C^a_+. \tag{2}$$

Воспользуемся здесь одним из ключевых результатов работы [1].

Теорема 1. *Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C^a_+ с таким индексом $\varkappa$, что $\varkappa - s = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$, то общее решение $u \in H^s(C^a_+)$ уравнения (2) в образах Фурье имеет вид*

$$\tilde{u}(\xi) = A^{-1}_{\neq}(\xi)\sum_{k=0}^{n-1}(\tilde{a}_k(\xi_1 - a\xi_2)(\xi_1 + a\xi_2)^k + \tilde{b}_k(\xi_1 + a\xi_2)(\xi_1 - a\xi_2)^k),$$

где a_k, b_k — произвольные функции из $H^{s_k}(\mathbb{R})$, $s_k = s - \varkappa + k + 1/2$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. Имеют место априорные оценки

$$\|u\|_s \leqslant C\sum_{k=0}^{n-1}([a_k]_{s_k} + [b_k]_{s_k}),$$

где $[\cdot]_s$ обозначает $H^s(\mathbb{R})$-норму.

4. Разрешимость задачи сопряжения. При $n = 1$ утверждение теоремы 1 выглядит следующим образом:

$$\tilde{U}_+(\xi) = A^{-1}_{\neq}(\xi)(\tilde{a}_0(\xi_1 - a\xi_2) + \tilde{b}_0(\xi_1 + a\xi_2)).$$

Рассмотрим другое уравнение

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C^a_+}. \tag{3}$$

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что общее решение уравнения (3) выглядит подобным образом,

$$\tilde{U}_-(\xi) = A^{-1}_{=}(\xi)(\tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2) + \tilde{d}_0(\xi_1 + a\xi_2)),$$

где c_0, d_0 — другая пара произвольных функций.

Наша задача — описать алгоритм однозначного определения четверки произвольных функций при заданных граничных условиях.

Во-первых, отметим, что интегральные условия задачи (1) в образах Фурье принимает вид

$$\begin{aligned}\tilde{U}_+(\xi_1,0) &= \tilde{g}_0(\xi_1),\\ \tilde{U}_-(\xi_1,0) &= \tilde{g}_1(\xi_1).\end{aligned} \tag{4}$$

Во-вторых, сужение функции $u(x_1,x_2)$ на прямую, например, $x_2=0$ в образах Фурье выглядит следующим образом:

$$F_{x_1\to\xi_1}(u(x_1,0)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\xi_1,\xi_2)d\xi_2. \tag{5}$$

Используя (4) и (5), сконструируем систему линейных интегральных уравнений, эквивалентную задаче (1).

Применение условий (4) сразу позволяет выписать одну зависимость, связывающую четыре произвольные функции. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}\tilde{U}_+(\xi_1,0) &= A_{\neq}^{-1}(\xi_1,0)(\tilde{a}_0(\xi_1)+\tilde{b}_0(\xi_1)),\\ \tilde{U}_-(\xi_1,0) &= A_{=}^{-1}(\xi_1,0)(\tilde{c}_0(\xi_1)+\tilde{d}_0(\xi_1)),\end{aligned}$$

откуда получаем первое два соотношения

$$\begin{aligned}A_{\neq}^{-1}(\xi_1,0)(\tilde{a}_0(\xi_1)+\tilde{b}_0(\xi_1)) &= \tilde{g}_0(\xi_1),\\ A_{=}^{-1}(\xi_1,0)(\tilde{c}_0(\xi_1)+\tilde{d}_0(\xi_1)) &= \tilde{g}_1(\xi_1).\end{aligned} \tag{6}$$

Теперь перейдем к граничным значениям. Делаем замену переменных, которая переводит $\overset{*}{C}{}^a_+$ во второй квадрант,

$$\begin{cases}\xi_1 - a\xi_2 = t_1\\ \xi_1 + a\xi_2 = t_2\end{cases}$$

и переобозначаем

$$\tilde{U}_\pm\left(\frac{t_2+t_1}{2},\frac{t_2-t_1}{2a}\right) \equiv \tilde{V}_\pm(t_1,t_2),$$

$$A_{\neq}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\frac{t_2-t_1}{2a}\right) \equiv a_{\neq}(t_1,t_2), \quad A_{=}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\frac{t_2-t_1}{2a}\right) \equiv a_{=}(t_1,t_2),$$

так что граничные значения $u_\pm$ на сторонах угла представляют собой граничные значения $v_\pm$ осях координат в переменных t_1, t_2. Теперь можем переписать общее решение в новых координатах

$$\begin{aligned}\tilde{V}_+(t_1,t_2) &= a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)(\tilde{a}_0(t_1)+\tilde{b}_0(t_2)),\\ \tilde{V}_-(t_1,t_2) &= a_{=}^{-1}(t_1,t_2)(\tilde{c}_0(t_1)+\tilde{d}_0(t_2)).\end{aligned}$$

Согласно свойству преобразования Фурье о линейной замене переменных C^a_+ также трансформируется в квадрант, так что граничные значения решения в новых координатах также будут определены на осях координат. Тогда по свойству (5) можем записать

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)(\tilde{a}_0(t_1)+\tilde{b}_0(t_2))dt_1 = \tilde{v}_+(0,t_2)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)(\tilde{a}_0(t_1)+\tilde{b}_0(t_2))dt_2 = \tilde{v}_+(t_1,0),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)(\tilde{c}_0(t_1)+\tilde{d}_0(t_2))dt_1 = \tilde{v}_-(0,t_2),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)(\tilde{c}_0(t_1)+\tilde{d}_0(t_2))dt_2 = \tilde{v}_-(t_1,0).$$

Обозначим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)dt_1 \equiv r_1(t_2), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)dt_2 \equiv r_2(t_1),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)dt_1 = r_3(t_2), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)dt_2 = r_4(t_1).$$

Теперь можем выписать два интегральных уравнения в соответствии с граничным условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{a}_0(t_1)dt_1 + \tilde{b}_0(t_2)r_1(t_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{c}_0(t_1)dt_1 - \tilde{d}_0(t_2)r_3(t_2) = \tilde{g}_{21}(t_2),$$

$$r_2(t_1)\tilde{a}_0(t_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{b}_0(t_2)dt_2 - r_4(t_1)\tilde{c}_0(t_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{d}_0(t_2))dt_2 = \tilde{g}_{22}(t_1),$$

где $\tilde{g}_{21}(t_2)$, $\tilde{g}_{22}(t_1)$ — преобразования Фурье граничных функций (элементов g_2) на сторонах квадранта.

Таким образом, получены 4 уравнения для определения четырех неизвестных функций. Очевидно, что из выражается через, и — через

$$\tilde{b}_0(\xi_1) = A_{\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}_0(\xi_1) - \tilde{a}_0(\xi_1),$$
$$\tilde{d}_0(\xi_1) = A_{=}(\xi_1,0)\tilde{g}_1(\xi_1) - \tilde{c}_0(\xi_1).$$

Тогда получим систему двух линейных интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций $\tilde{a}_0, \tilde{c}_0$:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{a}_0(t_1)dt_1 - \tilde{a}_0(t_2)r_1(t_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{c}_0(t_1)dt_1 + \tilde{c}_0(t_2)r_3(t_2) = \tilde{f}_1(t_2) \\ r_2(t_1)\tilde{a}_0(t_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{a}_0(t_2)dt_2 - r_4(t_1)\tilde{c}_0(t_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{c}_0(t_2))dt_2 = \tilde{g}_{22}(t_1), \end{cases} \tag{7}$$

где введены обозначения

$$\tilde{f}_1(t_2) = \tilde{g}_{21}(t_2) - A_{\neq}(t_2,0)\tilde{g}_0(t_2)r_1(t_2) - A_{=}(t_2,0)\tilde{g}_1(t_2)r_3(t_2),$$
$$\tilde{f}_2(t_1) = \tilde{g}_{22}(t_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)A_{\neq}(t_2,0)\tilde{g}_0(t_2)dt_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)A_{=}(t_2,0)\tilde{g}_1(t_2)dt_2.$$

Таким образом, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_+^a с таким индексом $\varkappa$, что $\varkappa - s = 1+\delta, |\delta| < 1/2$, то однозначная разрешимость задачи* (1) *эквивалентна однозначной разрешимости системы интегральных уравнений* (7).

5. Заключение. Конечно, пока неясно, что можно сказать о разрешимости этой системы интегральных уравнений, однако с точки зрения вычисления система одномерных уравнений выглядит предпочтительней двумерной задачи. В некоторых специальных случаях возможно дальнейшее продвижение и сведение системы (7) к системе линейных алгебраических уравнений (см., например, [9]). Авторы надеются разобрать эти ситуации в последующих публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: КомКнига, 2010.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
5. *Эскин Г. И.* Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1970. — *21*. — С. 245–292.
6. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
7. *Vasil'ev V. B.* On some new boundary-value problems in nonsmooth domains// J. Math. Sci. — 2011. — *173*, № 2. — P. 225–230.
8. *Vasilyev V. B.* On some transmission problems in a plane corner// Tatra Mt. Math. Publ. — 2015. — *63*. — P. 291–301.
9. *Vasilyev V. B.* General boundary-value problems for pseudo-differential equations and related difference equations// Adv. Difference Equations. — 2013. — *1*. — P. 289–295.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: vbv57@inbox.ru

Эберлейн Николай Владимирович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: eberlein92@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 16–26
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-16-26

УДК 517.95

ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КОВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА

© 2022 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. Э. НОВОСЕЛЬЦЕВА**

Аннотация. Рассмотрен специальный класс систем квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Рассматриваемые системы имеют дивергентный тип, инвариантны относительно трансляций времени и пространства, а также преобразуется ковариантным образом при преобразованиях группы вращений пространства. Приведено описание класса нелинейных дифференциальных операторов первого порядка, соответствующих системам рассматриваемого класса. Доказана теорема об эквивалентности понятий гиперболичности и гиперболичности по Фридрихсу.

Ключевые слова: дифференциальный оператор первого порядка, квазилинейная система уравнений, гиперболичность, векторное поле, ковариантность, дивергентность, плотность потока поля, симметричный тензор.

HYPERBOLICITY OF A CLASS OF FIRST-ORDER QUASILINEAR COVARIANT EQUATIONS OF DIVERGENT TYPE

© 2022 **Yu. P. VIRCHENKO, A. E. NOVOSELTSEVA**

Abstract. A special class of systems of first-order quasilinear partial differential equations is considered. These divergent-type systems are invariant under time and space translations; they are transformed covariantly under the action of the rotation group. We give a description of the class of nonlinear first-order differential operators corresponding to the systems of the considered class and prove a theorem on the equivalence of the concepts of hyperbolicity and hyperbolicity in the sense of Friedrichs.

Keywords and phrases: first-order differential operator, quasilinear system, hyperbolicity, vector field, covariance, divergence, field flux density, symmetric tensor.

AMS Subject Classification: 35L02

1. Введение. Распределенные физические системы описываются полями $\mathsf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ на $\mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ — временной параметр, которые принимают значения в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^n$. Обычно математическим инструментом, посредством которого решается задача описания изменения со временем этих полей, являются системы дифференциальных уравнений с частными производными «эволюционного типа», которые имеют вид

$$\dot{\mathsf{a}}(\boldsymbol{x}, t) = (\mathsf{L}[\mathsf{a}, \boldsymbol{x}, t])(\boldsymbol{x}, t), \tag{1}$$

где $\mathsf{L}[\cdot, \boldsymbol{x}, t]$ — некоторый зависящий от параметра t, вообще говоря, нелинейный дифференциальный оператор по $\boldsymbol{x}$, действующий в пространстве достаточное число раз непрерывно дифференцируемых полей. Поэтому такие системы уравнений являются объектом исследования в математической физике.

С точки зрения физических приложений, ввиду того, что замкнутые физические системы обладают т. н. фундаментальными симметриями — однородности и изотропности, наибольший интерес представляют дифференциальные операторы первого порядка, которые генерируют эволюционные уравнения (1), обладающие такими же симметриями (см. по этому поводу, например, [8, 9]). Применяемый в настоящей работе подход для изучения уравнений (1), обладающих фундаментальными симметриями, использовался нами в работах [1–4].

Во-первых, уравнения (1) должны быть инвариантны относительно сдвигов начала отсчета времени $t \Rightarrow t+s$, $s \in \mathbb{R}$. В этом случае дифференциальные операторы $\mathsf{L}[\cdot, \boldsymbol{x}, t]$ должны обладать свойством $\mathsf{L}[\mathsf{a}, \boldsymbol{x}, t+s] = \mathsf{L}[\mathsf{a}, \boldsymbol{x}, t]$, $s \in \mathbb{R}$ и, очевидно, что требование инвариантности относительно сдвига времени приводит к независимости коэффициентов оператора от t, $\mathsf{L}[\cdot, \boldsymbol{x}, t] \equiv \mathsf{L}[\cdot, \boldsymbol{x}]$. Во-вторых, уравнения должны быть инвариантны относительно пространственных сдвигов $\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}$, т.е. $\mathsf{L}[\cdot, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}, t] = \mathsf{L}[\cdot, \boldsymbol{x}]$ для любого $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$. Таким образом, требование пространственной однородности приводит к тому, что коэффициенты оператора $\mathsf{L}[\cdot]$ не зависят явно от $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

Наконец, фундаментальной симметрией физической системы является инвариантность ее относительно поворотов пространства $\mathbb{R}^3$. Требование симметрии такого рода для уравнений (1) с операторами $\mathsf{L}[\cdot]$, не зависящими явно от t и $\boldsymbol{x}$, означает ковариантность этих уравнений относительно действия преобразований группы $\mathbb{O}_3$. В свою очередь, это требование ковариантности приводит к тому, что набор полей $\mathsf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ должен преобразовываться по представлению $\mathcal{U}$ группы $\mathbb{O}_3$ (см., например, [13]) и при этом набор полей $\mathsf{L}[\mathsf{a}]$ преобразуется по этому же представлению. Таким образом, обозначив посредством $\mathsf{L}^{(\mathcal{A})}[\cdot]$ дифференциальный оператор, преобразованный в результате поворота пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$, требование ковариантности уравнения (1) приводит к тому, что оператор $\mathsf{L}[\cdot]$ обладает свойством $\mathsf{L}^{(\mathcal{A})}[\mathcal{U}\mathsf{a}] = \mathcal{U}\mathsf{L}[\mathsf{a}]$.

Сформулированное свойство ковариантности уравнения (1) накладывает уже довольно значительные ограничения на общий вид операторов $\mathsf{L}[\cdot]$ и, в связи с этим, возникает важная, с точки зрения физических приложений, задача (см. по этому поводу [4]) об описании классов допустимых дифференциальных уравнений (1). Так как неприводимые представления группы $\mathbb{O}_3$ образуют бесконечную серию спин-тензорных представлений (см. [13]), то такая задача оказывается все же довольно необозримой, даже при ограничении порядка операторов $\mathsf{L}[\cdot]$, например, не выше второго. Поэтому важно, на первом этапе, изучить допустимые операторы, когда поля $\mathsf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ преобразуются по простейшим неприводимым представлениям, а именно, когда значения поля $\mathsf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ являются векторами или тензорами второго ранга в $\mathbb{R}^3$.

В дальнейшем будем мыслить системы (1) как уравнения в подходящем функциональном пространстве. В настоящей работе рассматриваем эволюционные уравнения вида (1) с дифференциальными операторами $\mathsf{L}[\cdot]$ первого порядка. Поэтому далее предполагаем, что поля $\mathsf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ непрерывно дифференцируемы. Кроме того, так как мы не касаемся вопроса о существовании решений конкретных начально-краевых задач, связанных с уравнениями (1), то в качестве функционального пространства, на котором действуют операторы $\mathsf{L}[\cdot]$, выбираем самое широкое из возможных пространств, на которых разумно их изучение, а именно, $C^n_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Опишем общий вид дифференциальных операторов первого порядка, обладающих описанными выше свойствами симметрии, в том случае, когда поле $\mathsf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ представляется векторным полем $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, а сами операторы $\mathsf{L}[\cdot]$ имеют дивергентный тип. Результат действия каждого такого оператора $\mathsf{L}[\cdot]$ на поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ также представляет собой векторное поле $\mathsf{L}[\boldsymbol{u}]$. Вводя покомпонентное описание векторного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \langle u_j(\boldsymbol{x}, t); j = 1, 2, 3\rangle$ и соответствующего ему образа $\mathsf{L}[\boldsymbol{u}] = \langle \mathsf{L}_j[\boldsymbol{u}]; j = 1, 2, 3\rangle$, получаемого в результате действия оператора первого порядка дивергентного типа, запишем

$$\mathsf{L}_j[\boldsymbol{u}] = \nabla_k S_{jk}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)), \quad j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где $\nabla_j \equiv \partial/\partial x_j$, $S_{jk}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t))$; $j, k = 1, 2, 3$ — значение тензор-функции $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ для значения поля $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ в фиксированной текущей пространственно временной точке $\langle \boldsymbol{x}, t\rangle$. Это значение представляет собой плотность потока векторного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$. Здесь и далее принимается соглашение тензорной алгебры о суммировании по повторяющимся индексам $k = 1, 2, 3$ (см., например, [15]).

Также не будем делать различия между ковариантными и контравариантными тензорами. Соответственно, уравнение (1) записывается в виде системы уравнений для компонент поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$:

$$\dot{u}_j(\boldsymbol{x},t) = (\nabla_k S_{jk}(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{x},t), \quad j=1,2,3. \tag{3}$$

Класс всех дифференциальных операторов $\mathsf{L}[\cdot]$, соответствующих таким уравнениям, будем обозначать как $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Описание пространства всех уравнений вида (3) сводится, таким образом, к описанию возможных непрерывно дифференцируемых тензор-функций $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ от векторного аргумента $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ и решение этой задачи представляется в разд. 2.

Ковариантность уравнения (2) еще не обеспечивает его «разумность» с точки зрения правильности описания эволюции поля. Корректное описание эволюции возникает в том случае, когда система уравнений (2) является гиперболической (см. разд. 5). В связи с этим основной целью настоящего исследования является выделение в классе $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ подкласса операторов, соответствующих системам гиперболических уравнений.

2. Класс $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Для описания класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ необходимо указать общий вид всех возможных непрерывно дифференцируемых по $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ тензор-функций $S_{jk}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ (здесь опущена зависимость от параметра t). Такие функции называются *комитантами* (см. [7]) или *форм-инвариантами* (см. [17]). Их общий вид записывается в виде линейного разложения по *базисным форм-инвариантным функциям* $S^{(r)}_{jk}(\boldsymbol{u})$, порождаемым вектором $\boldsymbol{u}$ с коэффициентами в виде произвольных функций f_r, $r=1,\ldots,s$, от инвариантов, составляющих т. н. *целый рациональный базис* [17]. Так как вектор $\boldsymbol{u}$ обладает единственным инвариантом $\boldsymbol{u}^2$ относительно группы $\mathbb{O}_3$, то целый рациональный базис состоит только из этого одного инварианта и, следовательно, требуемое линейное разложение имеет вид

$$S_{jk}(\boldsymbol{u}) = \sum_{r=1}^{s} S^{(r)}_{jk}(\boldsymbol{u}) f_r(\boldsymbol{u}^2). \tag{4}$$

Наконец, так как на тензор-функцию $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ накладывается условие непрерывной дифференцируемости по $\boldsymbol{u}$, то функции $f_r(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}_+$, должны быть непрерывно дифференцируемы по η при условии непрерывной дифференцируемости по $\boldsymbol{u}$ базисных форм-инвариантных функций $S^{(r)}_{jk}(\boldsymbol{u})$, $r=1,\ldots,s$.

Так как каждая функция вида (4) может быть представлена в виде предела таких функций, которые представляются полиномами от компонент вектора $\boldsymbol{u}$, то базисные функции $S^{(r)}_{jk}(\boldsymbol{u})$ достаточно построить в виде линейно независимых мономов в тензорной алгебре с одной образующей $\boldsymbol{u}$, определяемых с точностью до произвольного множителя инвариантного относительно преобразований группы $\mathbb{R}^3$. На этом пути получаются только два линейно независимых тензора второго ранга: универсальный тензор δ_{jk} — символ Кронекера и диада $u_j u_k$. Тогда $s=2$ и, обозначив $f=f_1$, $g=f_2$, разложение (4) запишем в виде

$$S_{jk}(\mathbf{u}) = \delta_{jk} f(\mathbf{u}^2) + u_j u_k g(\mathbf{u}^2). \tag{5}$$

Таким образом, класс всех функций $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ и, следовательно, класс $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ всех операторов $\mathsf{L}[\cdot]$ полностью описывается формулой (5) с парой произвольно выбираемых непрерывно дифференцируемых функций f и g на $\mathbb{R}_+$.

3. Гиперболические системы уравнений первого порядка. В этом разделе будет установлена связь между понятиям гиперболичности систем квазилинейных уравнений первого порядка и связанным с ним понятием гиперболичности по Фридрихсу — так называемой t-гиперболичности, в частности, для систем дивергентного типа.

Сопоставим уравнению (3) следующее линеаризованное уравнение, которому подчиняется векторное поле $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \langle v_j(\boldsymbol{x},t); j=1,2,3\rangle$ при фиксации поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$:

$$\dot{v}_j(\boldsymbol{x},t) = \left(\frac{\partial S_{jk}(\boldsymbol{u})}{\partial u_l} \cdot \nabla_k v_l\right)_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)} (\boldsymbol{x},t) \tag{6}$$

и сформулируем в его терминах определение понятия гиперболичности.

Определение 1 (см. [14, с. 25])**.** Уравнение (3) назовем гиперболическим, если в соответствующем ему уравнении (6) матрица $\mathcal{T}$ с матричными элементами

$$T_{jl} = q_k \frac{\partial S_{jk}(\boldsymbol{u})}{\partial u_l}$$

диагонализируема и имеет только вещественные собственные числа $\omega^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$, для любого вектора $\boldsymbol{q} = \langle q_j; j = 1, 2, 3\rangle \in \mathbb{R}^3$ и для любого поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$.

Учитывая выражение (5) для функции $S_{jk}(\boldsymbol{u})$, выразим явную зависимость матрицы $\mathcal{T}$ от функций f и g

$$T_{jl} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q})[g\delta_{jl} + 2g' u_j u_l] + g u_j q_l + 2f' q_j u_l, \tag{7}$$

где мы опустили указание аргументов у функций f', g', g. Таким образом, условие гиперболичности уравнения (5) состоит в вещественности корней $\omega^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$, кубического уравнения

$$\det(\omega - \mathcal{T}) = 0 \tag{8}$$

относительно ω.

Проверка факта гиперболичности систем квазилинейных уравнений первого порядка в том случае, когда коэффициенты уравнения (8) являются конкретными числами, осуществляется по несложному алгоритму. Наоборот, если коэффициенты зависят от большого числа параметров, которые могут изменяться в широких пределах, и, более того, если коэффициенты являются функционалами от некоторого набора функций, то исследование на гиперболичность уравнения требует установления в области их изменения той подобласти, в которой, действительно, имеет место его гиперболичность. Решение такой задачи может представлять довольно трудоемкую процедуру (см., например, [10–12]). В связи с этим, в таких случаях прибегают к проверке выполнимости более сильного свойства (см. Теорема 1, *Достаточность*), чем гиперболичность, а именно, так называемой t-гиперболичности (гиперболичности по Фридрихсу) (см., например, [6, 16]).

Дадим следующее, несколько модернизированное определение t-гиперболичности уравнения в такой трактовке, которая применима для решения поставленной во введении задачи.

Определение 2. Уравнение (5) назовем t-гиперболическим, если для любого вектора $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ и для любого поля $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ матрица $\mathcal{T}$ диагонализируема и существует такая симметричная положительная матрица $\mathcal{B}$, что матрица $\mathcal{B}\mathcal{T}$ симметрична.

Докажем, что определенное таким образом понятие t-гиперболичности эквивалентно понятию гиперболичности, данному в определении 1. (Здесь и далее при формулировке и доказательстве утверждений следуем терминологии монографии [5].)

Теорема 1. *Если матрица $\mathcal{B}$ оператора, действующего в $\mathbb{R}^n$, диагонализируема, то для того чтобы все ее собственные числа $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n\rangle$ были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая симметричная положительная матрица $\mathcal{D}$, для которой матрица $\mathcal{D}\mathcal{B}$ симметрична.*

Доказательство. Необходимость. Пусть все собственные числа матрицы $\mathcal{B}$ вещественны. Доказательство существования матрицы $\mathcal{D}$ состоит из следующих пп. 1–5.

1. Пусть вещественная матрица $\mathcal{B}$ представляет оператор в стандартном базисе $\{\mathsf{e}_r^{(0)} \in \mathbb{R}^n;\ r = 1, \ldots, n\}$, $(\mathsf{e}_j^{(0)})_k = \delta_{jk}$, действующий в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\langle \xi_1, \ldots, \xi_n\rangle \in \mathbb{R}^n$ — собственный вектор, соответствующий вещественному собственному числу λ. Тогда этот собственный вектор всегда можно выбрать так, чтобы все его компоненты были вещественны. В самом деле, при указанном условии, по крайней мере один из вещественных векторов $\langle \mathrm{Re}(\xi_1), \ldots, \mathrm{Re}(\xi_n)\rangle$, либо $\langle \mathrm{Im}(\xi_1), \ldots, \mathrm{Im}(\xi_n)\rangle$ не равен тождественно нулю и поэтому является собственным вектором, соответствующим тому же самому собственному числу. Тогда, так как вещественная матрица $\mathcal{B}$ диагонализируема и все ее собственные числа $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n\rangle$ вещественны, то она имеет полный набор собственных векторов $\{\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n\}$ с вещественными компонентами.

2. В пространстве $\mathbb{R}^n$ для любого базисного набора векторов $\{\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n\}$ найдется такой неособенный оператор $\mathcal{V}$, что набор векторов $\{\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_1, \ldots, \mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_n\}$ является ортонормированным. Матрица этого оператора может быть построена, например, на основе коэффициентов разложения векторов ортонормированного базиса, получаемого в результате процесса ортогонализации Сонина—Шмидта набора векторов $\{\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n\}$ по векторам этого набора.

3. Из пп. 1 и 2 следует, что для любой диагонализируемой вещественной матрицы $\mathcal{B}$, все собственные числа которой вещественны, существует такая матрица $\mathcal{V}$, для которой матрица $\mathcal{V}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{V}$ диагонализируема, имеет только вещественные собственные числа и собственные векторы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Это связано с тем, что набор векторов $\{\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_1, \ldots, \mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_n\}$ является ортонормированным и для каждого вектора $\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_r$, $r = 1, \ldots, n$, из этого набора имеет место

$$(\mathcal{V}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{V})\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_r = \mathcal{V}^{-1}\mathcal{B}\mathsf{e}_r = \lambda_r \mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}_r, \quad r = 1, \ldots, n,$$

так как векторы $\{\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n\}$ являются собственными для матрицы $\mathcal{B}$ с собственными числам $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle$, $\mathcal{B}\mathsf{e}_r = \lambda_r \mathsf{e}_r$.

4. Тогда матрица $\mathcal{C} = \mathcal{V}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{V}$ симметрична, $\mathcal{C}^\top = \mathcal{C}$, как любая матрица, имеющая полный ортонормированный набор собственных векторов с вещественными собственными числами.

5. Следовательно, $(\mathcal{V}^{-1})^\top \mathcal{C}\mathcal{V}^{-1}$ — симметричная матрица. Так как

$$((\mathcal{V}\mathcal{V}^\top)^{-1})^\top = ((\mathcal{V}\mathcal{V}^\top)^\top)^{-1} = (\mathcal{V}\mathcal{V}^\top)^{-1}$$

и $\mathcal{V}\mathcal{V}^\top$ — положительная симметричная матрица, то $\mathcal{D} = (\mathcal{V}\mathcal{V}^\top)^{-1}$ — также положительная симметричная матрица. Тогда

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = (\mathcal{V}\mathcal{V}^\top)^{-1}\mathcal{B} = (\mathcal{V}^{-1\top}\mathcal{V}^{-1})\mathcal{B} = \mathcal{V}^{-1\top}\mathcal{C}\mathcal{V}^{-1},$$

откуда следует, что $\mathcal{D}\mathcal{B}$ — симметричная матрица.

Достаточность. Пусть теперь, наоборот, известно, что существует вещественная симметричная положительная матрица $\mathcal{D}$, для которой матрица $\mathcal{D}\mathcal{B}$ вещественна и симметрична. Доказательство диагонализируемости матрицы $\mathcal{B}$ и вещественности ее собственных чисел состоит из следующих пп. 6–10.

6. В заданных условиях существует ортонормированный набор $\{\mathsf{e}_r;\ r = 1, \ldots, n\}$, с каждым вектором которого связано положительное собственное число $\lambda_r > 0$, $r = 1, \ldots, n$. При этом, согласно п. 1, векторы набора могут быть выбраны вещественными. Кроме того, существует унитарная и, следовательно, неособенная матрица $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}\mathcal{U}^+ = \mathbf{1}$ ($+$ обозначает эрмитовское сопряжение), которая диагонализирует матрицу $\mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{U}\mathsf{e}_r^{(0)} = \mathsf{e}_r$, $r = 1, \ldots, n$, где $\{\mathsf{e}_r^{(0)};\ r = 1, \ldots, n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{U}\mathcal{D}\mathcal{U}^+ = \mathrm{diag}\langle \lambda_r;\ r = 1, \ldots, n\rangle$. Матрица $\mathcal{U}$ вещественная. Это следует из того, что из выполнимости для каждого $r = 1, \ldots, n$ равенства $\mathcal{U}\mathsf{e}_r^{(0)} = \mathsf{e}_r$ и вещественности векторов e_r и $\mathsf{e}_r^{(0)}$ получается $(\mathrm{Im}\,\mathcal{U})\mathsf{e}_r^{(0)} = 0$, $r = 1, \ldots, n$. Так как это равенство имеет место для всех векторов $\mathsf{e}_r^{(0)}$, $r = 1, \ldots, n$, стандартного базиса, то матрица $\mathrm{Im}\,\mathcal{U} = 0$. Из унитарности и вещественности матрицы $\mathcal{U}$ следует, что она ортогональна $\mathcal{U}^\top\mathcal{U} = \mathbf{1}$.

7. Определим неособенную вещественную матрицу $\mathcal{V}^\top = \mathcal{U}^\top \mathrm{diag}\langle \lambda_r^{1/2}; r = 1, \ldots, n\rangle$ как произведение неособенных вещественных матриц. Тогда из равенства $\mathcal{U}\mathcal{D}\mathcal{U}^+ = \mathrm{diag}\langle \lambda_r; r = 1, \ldots, n\rangle$ и вещественности матрицы $\mathcal{U}$ следует, что матрица $\mathcal{D}$ симметрична и положительна, так как

$$\mathcal{D} = \mathcal{U}^\top \mathrm{diag}\langle \lambda_r; r = 1, \ldots, n\rangle \mathcal{U} = \mathcal{V}^\top\mathcal{V}.$$

8. Так как матрица $\mathcal{V}$ неособенная, то определим матрицу $\mathcal{C}$ посредством равенства $\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{V}^\top\mathcal{C}\mathcal{V}$. Из него равенства следует, что матрица $\mathcal{C}$ симметрична, так как матрица $\mathcal{D}\mathcal{B}$ симметрична и, кроме того,

$$\mathcal{V}^\top\mathcal{V}\mathcal{B} = \mathcal{V}^\top\mathcal{C}\mathcal{V}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{V}^{-1}\mathcal{C}\mathcal{V}.$$

9. Рассмотрим характеристическое уравнение для симметричной матрицы $\mathcal{C}$, $\det(\mathcal{C}-\mu)=0$. Все решения этого уравнения вещественны. Но так как

$$\det(\mathcal{B}-\mu)=\det\mathcal{V}\cdot\det(\mathcal{B}-\mu)\cdot\det\mathcal{V}^{-1}=\det(\mathcal{V}\mathcal{B}\mathcal{V}^{-1}-\mu)=\det(\mathcal{C}-\lambda),$$

то все эти решения являются собственными числами матрицы $\mathcal{B}$ и, следовательно, вещественными числами.

10. Если e'_r, $r=1,\ldots,n$, — набор собственных векторов симметричной матрицы $\mathcal{C}$ и μ_r, $r=1,\ldots,n$, — набор соответствующих им собственных чисел, $\mathcal{C}\mathsf{e}'_r=\mu_r\mathsf{e}'_r$, то $\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}'_r$, $r=1,\ldots,n$, — набор собственных векторов матрицы $\mathcal{B}$, так как, после подстановки выражения $\mathcal{V}\mathcal{B}\mathcal{V}^{-1}$ для матрицы $\mathcal{C}$, получаем

$$\mathcal{V}\mathcal{B}\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}'_r=\mu_r\mathsf{e}'_r,\quad \mathcal{B}(\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}'_r)=\mu_r\mathcal{V}^{-1}\mathsf{e}'_r,\quad r=1,\ldots,n.$$

Таким образом, матрица $\mathcal{B}$ имеет ровно n собственных векторов, т.е. матрица $\mathcal{B}$ диагонализируема. □

Замечание 1. Выбор матрицы $\mathcal{D}$, существование которой утверждается как необходимое условие в теореме, не является, вообще говоря, единственным. Класс возможных матриц $\mathcal{D}$ существенно зависит от вида матрицы $\mathcal{B}$, даже в случае, когда она является невырожденной.

Рассмотрим системы квазилинейных уравнений (1) первого порядка общего вида (см. [14]), описывающие эволюцию полей $\mathsf{a}(\boldsymbol{x},t)$ при $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, $\mathsf{a}(\boldsymbol{x},t)=\langle a_r(\boldsymbol{x},t);\ r=1,\ldots,n\rangle$. Вводя набор полей $\mathsf{b}_{\boldsymbol{x}}=\langle\mathsf{b}_j(\boldsymbol{x},t)=\nabla_j\mathsf{a}(\boldsymbol{x},t);\ j=1,\ldots,m\rangle$, оператор $\mathsf{L}[\cdot]\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ — генератор эволюции таких систем определяется непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $F_r(\mathsf{a},\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x},t)$, $r=1,\ldots,r$, на $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$ так, что

$$\dot a_r(\boldsymbol{x},t)=F_r(\mathsf{a},\nabla_{\boldsymbol{x}}\mathsf{a},\boldsymbol{x},t),\quad r=1,\ldots,n. \tag{9}$$

Вводя линеаризованную систему уравнений

$$\dot\varphi_r(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{\partial F_r(\mathsf{a},\mathsf{b}_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x},t)}{\partial b_{r',j}}\nabla_j\varphi_{r'}\right)(\boldsymbol{x},t)$$

для поля $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ на $\mathbb{R}^m$, условие гиперболичности системы (9) формулируется как диагонализируемость матрицы

$$T_{r,r'}=\frac{\partial F_r(\mathsf{a},\mathsf{b}_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x},t)}{\partial b_{r',j}}q_j,\quad \mathsf{b}_j=\langle b_{r,j};j=1,\ldots,m\rangle,\quad r,r'=1,\ldots,n, \tag{10}$$

и вещественность ее собственных значений при произвольном выборе вектора $\boldsymbol{q}=\langle q_j;j=1,\ldots,m\rangle$ и поля $\mathsf{a}(\boldsymbol{x},t)$.

Из доказанной теоремы непосредственно следует

Теорема 2. *Для того чтобы система* (9) *квазилинейных уравнений была системой гиперболического типа, необходимо и достаточно, чтобы она была t-гиперболической.*

Доказательство.

Исходя из определения гиперболичности систем квазилинейных уравнений первого порядка (см. [14, с. 25]), доказательство получается применением утверждения теоремы 1 к матрице $\mathcal{T}$ с матричными элементами (10). □

4. Гиперболические системы класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Этот раздел посвящен решению основной задачи, поставленной во введении, описанию общего вида гиперболических уравнений (3) для векторного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$. Доказанная в разд. 3 теорема существенно упрощает процедуру описания класса всех таких уравнений. Совпадение понятий гиперболичности и t-гиперболичности для систем квазилинейных уравнений позволяет не анализировать коэффициенты характеристического уравнения, а сосредоточиться только на возможности построения подходящей матрицы $\mathcal{D}$.

Принадлежность уравнения (3) к классу $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ позволяет существенно сократить число параметров матрицы $\mathcal{D}$, подлежащих определению. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если для любого значения параметра $t \in \mathbb{R}$, в любой точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ и для любой координатной системы в $\mathbb{R}^3$ существует такая симметричная матрица $\mathcal{D}$ с матричными элементами D_{jk}, $j,k = 1,2,3$, для которой матрица $\mathcal{DT}$ симметрична, то среди всех матриц такого типа обязательно существует такая, которая не зависит от t и $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ и которая представляет симметричный тензор второго ранга и, следовательно, она представима следующим разложением*

$$D_{jk} = c_1\delta_{jk} + c_2 u_j u_k + c_3 q_j q_k + c_4(u_j q_k + q_j u_k), \tag{11}$$

где коэффициентные функции c_a, $a = 1,\dots,4$, зависят от инвариантов $\eta = \boldsymbol{u}^2$, $\zeta = \boldsymbol{q}^2$, $\xi = (\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$ преобразований группы $\mathbb{O}_3$ и непрерывно дифференцируемы по этим переменным.

Доказательство. Так как матрица $\mathcal{T}$ не зависит явно от t и $\boldsymbol{x}$, то достаточно построить матрицу $\mathcal{D}$ для каких-либо фиксированных значений t_0 и $\boldsymbol{x}_0$ и эта матрица будет удовлетворять условиям теоремы для любых t и $\boldsymbol{x}$. Построив матрицу $\mathcal{D}$ для какой-либо фиксированной ортогональной системы координат, произведем преобразование этой системы посредством произвольной ортогональной матрицы $\mathcal{A}$. Тогда матрица $\mathcal{ADA}^{-1}$ также будет вещественной симметричной и положительной. При указанном изменении системы координат, принимая во внимание тот факт, что матрица $\mathcal{T}$ является координатным представлением тензора второго ранга, то она преобразуется в $\mathcal{ATA}^{-1}$. Тогда получаем выражение для матрицы $\mathcal{DT}$ в новой системе координат $\mathcal{ADA}^{-1}\mathcal{ATA}^{-1} = \mathcal{ADTA}^{-1}$. Следовательно, полученная матрица является симметричной, так как получена ортогональным преобразованием симметричной матрицы $\mathcal{DT}$. Из вида преобразования следует, что $\mathcal{DT}$ является координатным представлением тензора второго ранга.

Разложение (11) для тензора $\mathcal{D}$ аналогично разложению (4). Поэтому оно получается посредством аналогичных рассуждений с той лишь разницей, что базисные форм-инвариантные функции должны теперь строиться в тензорной алгебре с двумя образующими векторами $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{q}$ с учетом симметрии тензора $\mathcal{D}$. В этом случае имеется 4 базисных функции: δ_{jk}, $u_j u_k$, $q_j q_k$, $u_j q_k + q_j u_k$. При этом целый рациональный базис состоит из трех инвариантов $\boldsymbol{u}^2$, $\boldsymbol{q}^2$, $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$. □

Определение 3. Оператор $\mathsf{L}[\cdot]$ и связанную с ним систему класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$, определяемую (3), (5), назовем невырожденной, если $2f' + g \neq 0$, $g \neq 0$, $f' \neq 0$.

Следующее утверждение отвечает на основной вопрос о гиперболичности систем (3). Используя эквивалентность понятий гиперболичности и t-гиперболичности, доказывается возможность выбора не равного нулю тождественно набора коэффициентов c_j, $j = 1,\dots,4$, удовлетворяющих равенству (12).

Теорема 4. *Невырожденные системы уравнений* (3) *класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$, определяемые тензором* (5) *с непрерывно дифференцируемыми функциями $f(\eta)$ и $g(\eta)$ являются гиперболическими в том и только в том случае, если $f'g > 0$.*

Доказательство. Доказательство состоит из следующих пп. 1–6.

1. Заметим, что при $g = 2f'$ матрицу $\mathcal{D}$ можно положить единичной, так как в этом случае матрица $\mathcal{T}$ симметрична. Поэтому далее будем полагать $g \neq 2f'$. По той же причине будем считать, что $\eta = \boldsymbol{u}^2 \neq 0$ и $\zeta = \boldsymbol{q}^2 \neq 0$.

На основании Теоремы 3 выберем матрицу $\mathcal{D}$ в виде (11) и вычислим, в рамках тензорной алгебры, произведение $\mathcal{DT}$,

$$\begin{aligned} D_{jk}T_{kl} = [c_1\delta_{jk} + c_2 u_j u_k + c_3 q_j q_k + c_4(u_j q_k + q_j u_k)] \cdot [g u_k q_l + 2f' q_k u_l + \xi(g\delta_{kl} + 2g' u_k u_l)] = \\ = \alpha_1\delta_{jl} + \alpha_2 u_j u_l + \alpha_3 q_j q_l + u_j q_l[gc_1 + \eta g c_2 + 2\xi g c_4] + \\ + q_j u_l[2f'c_1 + 2(\zeta f' + \xi^2 g')c_3 + \xi(g + 2(f' + \eta g'))c_4], \end{aligned}$$

где коэффициенты α_1, α_2, α_3 являются функциями от введенных ранее инвариантов ξ, η, ζ целого рационального базиса. Учитывая, что первые слагаемые представляют собой симметричные тензоры, находим, что для симметричности тензора $D_{jk}T_{kl}$ необходимо и достаточно совпадения коэффициентов, заключенных в квадратные скобки. Это эквивалентно выполнению равенства

$$c_1(g-2f')+\eta g c_2-2(\zeta f'+\xi^2 g')c_3+\xi(g-2(f'+\eta g'))c_4=0.$$

Так как $g-2f'\neq 0$, то

$$c_1=(2f'-g)^{-1}[\eta g c_2-2(\zeta f'+\xi^2 g')c_3+\xi(g-2(f'+\eta g'))c_4]. \tag{12}$$

В общем случае набор из коэффициентов c_j, $j=1,\dots,4$, на основе которого получается матрица $\mathcal{D}$, необходимая для t-гиперболичности системы (3) с тензором (5), получается выбором в правой части (12) не тождественно равного нулю набора $\langle c_2,c_3,c_3\rangle$.

2. Коэффициенты c_r, $r=1,\dots,4$, являются, в общем случае, функциями от инвариантов ξ, η, ζ. Нужно найти необходимые и достаточные условия для значений этих функций, при выполнении которых симметричная матрица (11) является строго положительной при любом выборе векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{q}$, если система (3), (5) является невырожденной.

Введем матрицу $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}-c_1\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ — единичная матрица. Матрица $\mathcal{D}_1$ имеет по крайней мере одно собственное число, равное нулю, с собственным вектором $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]$, ортогональным векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{q}$ (скобками $[\cdot,\cdot]$ обозначена операция векторного произведения в $\mathbb{R}^3$). В самом деле, используя полную антисимметрию символа Леви-Чивиты ε_{klm}, находим

$$(\mathcal{D}_1)_{jk}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]_k=(c_2u_ju_k+c_3q_jq_k+c_4(u_jq_k+q_ju_k)\varepsilon_{klm}u_lq_m=0.$$

Следовательно,

$$\det\mathcal{D}_1=0.$$

С учетом этого равенства запишем характеристическое уравнение для матрицы $\mathcal{D}_1$,

$$\det(\lambda\mathcal{I}-\mathcal{D}_1)=\lambda^3-p_1\lambda^2-p_2\lambda=0, \tag{13}$$

где

$$p_1=\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1=\boldsymbol{u}^2c_2+\boldsymbol{q}^2c_3+2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})c_4. \tag{14}$$

Вычислим коэффициент p_2. Так как

$$(\mathcal{D}_1^2)_{jk}=[c_2^2\boldsymbol{u}^2+c_4^2\boldsymbol{q}^2+2c_2c_4(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})]u_ju_k+[c_4^2\boldsymbol{u}^2+c_3^2\boldsymbol{q}^2+2c_3c_4(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})]q_jq_k+$$
$$+[c_4(c_2\boldsymbol{u}^2+c_3\boldsymbol{q}^2)+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})(c_4^2+c_2c_3)](u_jq_k+q_ju_k);$$
$$(\mathcal{D}_1\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)_{jk}=c_2[c_2\boldsymbol{u}^2+c_3\boldsymbol{q}^2+2c_4(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})]u_ju_k+c_3[c_2\boldsymbol{u}^2+c_3\boldsymbol{q}^2+2c_4(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})]q_jq_k+$$
$$+c_4[c_2\boldsymbol{u}^2+c_3\boldsymbol{q}^2+2c_4(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})](u_jq_k+q_ju_k).$$

то

$$(\mathcal{D}_1^2-\mathcal{D}_1\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)_{jk}=(c_4^2-c_2c_3)[\boldsymbol{q}^2u_ju_k+\boldsymbol{u}^2q_jq_k-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})(u_jq_k+q_ju_k)]$$

и, следовательно, согласно [5], коэффициент p_2 характеристического уравнения для матрицы $\mathcal{D}_1$ равен

$$p_2=\frac{1}{2}[\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1^2-(\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)^2]=-D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2,\quad D\equiv c_2c_3-c_4^2. \tag{15}$$

Таким образом, собственные числа матрицы $\mathcal{D}_1$ равны $\lambda_1=0$ и

$$\lambda_\pm=\frac{1}{2}(\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1\pm[(\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)^2-4D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2]^{1/2}). \tag{16}$$

При этом дискриминант $(\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)^2-4D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2$ неотрицателен, так как $\lambda_\pm$ — вещественные собственные числа симметричной матрицы $\mathcal{D}_1$.

Согласно связи между матрицами $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_1$, собственные числа матрицы $\mathcal{D}$ равны c_1 и $c_1+\lambda_\pm$.

3. Докажем, что можно построить такую вектор-функцию

$$\boldsymbol{c}(\xi,\eta,\zeta)=\langle c_2(\xi,\eta,\zeta),c_3(\xi,\eta,\zeta),c_4(\xi,\eta,\zeta)\rangle\in\mathbb{R}^3,$$

для которой функции $c_1(\xi,\eta,\zeta)$ и $c_1(\xi,\eta,\zeta)+\lambda_\pm(\xi,\eta,\zeta)$, которые являются собственными числами матрицы $\mathcal{D}$, строго положительны. Для этого необходимо и достаточно найти в $\mathbb{R}^3$ непустую область допустимых значений $\boldsymbol{c}=\langle c_2,c_3,c_4\rangle$ этой вектор-функции.

В искомой области расположения допустимых векторов $\boldsymbol{c}$ необходимо и достаточно, чтобы были положительными c_1 и $c_1+\lambda_-$, так как $\lambda_+ \geqslant \lambda_-$. Тогда согласно (12) должно выполняться

$$(2f'-g)^{-1}[\eta g c_2 - 2(\zeta f' + \xi^2 g')c_3 + \xi(g-2(f'+\eta g'))c_4] > 0. \tag{17}$$

Неравенство же $c_1+\lambda_- > 0$ дает

$$c_1 + \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1 - \frac{1}{2}((\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)^2 - 4D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2)^{1/2} > 0 \tag{18}$$

и поэтому необходимо, чтобы имело место

$$2c_1 + \operatorname{Sp}\mathcal{D}_1 = (2f'-g)^{-1}[\eta(2f'+g)c_2 - ((2f'+g)\zeta + 4\xi^2 g')c_3 - 4\xi\eta g' c_4] \geqslant 0, \tag{19}$$

где знак равенства недопустим при

$$(\operatorname{Sp}\mathcal{D}_1)^2 = 4D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2. \tag{20}$$

Кроме того, необходимо, чтобы имело место следующее неравенство, которое получается из (18) посредством несложного преобразования,

$$c_1(c_1 + \operatorname{Sp}\mathcal{D}_1) + D[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2 > 0. \tag{21}$$

На основании (12) и (14) находим, что должно иметь место

$$c_1 + \operatorname{Sp}\mathcal{D}_1 = (2f'-g)^{-1}[2\eta f' c_2 - (\zeta g + 2\xi^2 g')c_3 + \xi(2f'-g-2\eta g')c_4] \geqslant 0. \tag{22}$$

Учитывая также (21) и равенства $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2 = \eta\zeta - \xi^2$ и $D = c_2c_3 - c_4^2$, получаем

$$\begin{split}[\eta g c_2 - 2(\zeta f' + \xi^2 g')c_3 + \xi(g-2(f'+\eta g'))c_4]\cdot[2\eta f' c_2 - (\zeta g + 2\xi^2 g')c_3 + \xi(2f'-g-2\eta g')c_4] + \\ + D(2f'-g)^2(\eta\zeta - \xi^2) > 0.\end{split} \tag{23}$$

Заметим, что в (17) и (19) можно, не ограничивая общности, считать $2f'-g>0$, так как, в противном случае, если $2f'-g<0$, нужно, при определении вектора $\boldsymbol{c}$, обратить знаки всех его компонент c_j, $j=2,3,4$. При учете этого замечания, из (17) и (19) получаем неравенства

$$\eta g c_2 - 2(\zeta f' + \xi^2 g')c_3 + \xi(g-2(f'+\eta g'))c_4 > 0. \tag{24}$$

$$(2f'+g)\eta c_2 - ((2f'+g)\zeta + 4\xi^2 g')c_3 - 4\xi\eta g' c_4 \geqslant 0, \tag{25}$$

где равенство в (25) недопустимо при

$$(c_2\eta + c_3\zeta + 2c_4\xi)^2 = 4(c_2c_3 - c_4^2)(\eta\zeta - \xi^2). \tag{26}$$

Таким образом, для определения области возможных значений вектор-функции $\boldsymbol{c}(\xi,\eta,\zeta)$ достаточно показать, что при всех значениях наборов $\langle \xi, \eta \geqslant 0, \zeta \geqslant 0\rangle$ не пуста область в $\mathbb{R}^3$, в которой должны одновременно выполняться неравенства (23), (24) и (25) с учетом (26).

4. Так как f и g зависят только от η, то для того, чтобы квадратные относительно ξ неравенства (24), (25) выполнялись при любом значении $\xi \in \mathbb{R}$, независимо от значений η и ζ. Следовательно, если $g'c_3 \neq 0$, то из (24) с необходимостью следует $g'c_3 < 0$, а из (25) — $g'c_3 > 0$. Ввиду полученного противоречия, необходимо считать, что $g'c_3 = 0$. При этом условии из (24), ввиду произвольности $\xi \in \mathbb{R}$, получаем

$$[g - 2(f'+\eta g')]c_4 = 0, \quad \eta g c_2 - 2\zeta f' c_3 > 0, \tag{27}$$

а из неравенства (25), по той же причине, следует $g'c_4 = 0$ и $(\eta c_2 - \zeta c_3)(2f'+g) \geqslant 0$, откуда, в силу условия теоремы $2f'+g \neq 0$, следует

$$\begin{cases} \eta c_2 \geqslant \zeta c_3 & \text{при } 2f'+g>0; \\ \eta c_2 \leqslant \zeta c_3 & \text{при } 2f'+g<0. \end{cases} \tag{28}$$

Учитывая независимость изменения $\eta > 0$ и $\zeta > 0$ в формуле (28), находим, что:

(i) либо обе компоненты c_2 и c_3 имеют одинаковые знаки;

(ii) либо одна из компонент обязательно равна нулю.

Случай же, когда компоненты имеют разные знаки, но значение одной из функций f' или g равно нулю, исключен условием невырожденности. Опять же, ввиду независимости $\eta > 0$ и $\zeta > 0$ в неравенстве (27), получаем, с необходимостью, что: в случае (i) f' и g имеют одинаковые знаки, т.е. $f'g > 0$ и поэтому необходимость условия $f'g > 0$ доказана.

Наконец, заметим, что в случае, если $g' \neq 0$, то в силу равенств $g'c_3 = g'c_4 = 0$ получаем $c_3 = c_4 = 0$ и поэтому $c_2 \neq 0$, так как из условия $c_1 > 0$ следует, что набор $\langle c_2, c_3, c_4 \rangle$ не может быть равным нулю тождественно. Если же $g' = 0$, то из (27), ввиду предположения $2f' \neq g$, следует, что так же, как и первом случае, $c_4 = 0$.

5. Проанализируем неравенство (23) в случае (ii) п. 4. Так как $c_4 = 0$ и, согласно (ii), имеет место $c_2c_3 = 0$. Тогда $D = c_2c_3 - c_4^2 = 0$ и поэтому (23) записывается в виде

$$[\eta g c_2 - 2(\zeta f' + \xi^2 g')c_3] \cdot [2\eta f' c_2 - (\zeta g + 2\xi^2 g')c_3] > 0. \tag{29}$$

Далее, в силу $c_2c_3 = 0$ при $c_3 = 0$ из (29) следует $2\eta^2 g f' c_2^2 > 0$, а при $c_2 = 0$, что возможно только при $g' = 0$, получаем $2\zeta^2 f' g c_3^2 > 0$. Так как в первом случае $c_2 \neq 0$, а во втором — $c_3 \neq 0$, то в обоих случаях следствием является указанное в формулировке теоремы необходимое условие $f'g > 0$.

6. Докажем достаточность условия $gf' > 0$. Положим $c_2 \neq 0$, $c_3 = c_4 = 0$. В этом случае $c_1 = (2f' - g)^{-1}\eta g c_2$, $D = 0$ и поэтому $\lambda_- = 0$, $\lambda_+ = \operatorname{Sp} \mathcal{D}_1 = \eta c_2$, так что $c_1 + \lambda_+ = (2f' - g)^{-1} 2\eta f' c_2$. Допуская, что $2f' > g$, как указано в п. 3, и выбрав $c_2 = \operatorname{sgn} f' = \operatorname{sgn} g$ получим набор положительных собственных чисел c_1, c_1, $c + \lambda_+$ матрицы $\mathcal{D}$. □

Замечание 2. Тот факт, что при выполнении условия $f'g > 0$ функции c_j, $j = 1, \ldots, 4$, можно выбрать зависящими только от инварианта η, положив в (12) $c_3 = c_4 = 0$ и $c_2 \neq 0$ при $g \neq 0$, а если $g = 0$ (и $g' = 0$), то $c_3 = 0$ и $c_4 \neq 0$, означает, что собственные числа матрицы $\mathcal{DT}$ линейно зависят от $\boldsymbol{q}$.

5. Заключение. В работе установлено описание класса всех гиперболических уравнений квазилинейных уравнений первого порядка для векторного поля на $\mathbb{R}^3$, генераторами сдвига по времени у которых являются нелинейные дифференциальные операторы $\mathsf{L}[\cdot]$, принадлежащие классу $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Решение этой задачи основано на доказанной в работе эквивалентности понятий гиперболичности и t-гиперболичности. При этом существенно использование описания класса всех тензор-функций $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ на основе базиса δ_{jk}, $u_j u_k$ форм-инвариантных тензоров второго ранга, порождаемых вектором $\boldsymbol{u}$. Это позволило существенно сократить число произвольных функций f и g, параметризующих класс $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$, и сократить до четырех число произвольных функций от инварианта $\boldsymbol{u}^2$, параметризующих класс возможных матриц $\mathcal{T}$, на основе которых устанавливается принадлежность уравнения к гиперболическому типу.

Установление условий гиперболичности квазилинейных систем уравнений, предназначенных для моделирования физических процессов, направлено на то, чтобы выделить среди них такие, которые могли бы описывать физические эволюционные процессы, например, в сплошных средах при отсутствии механизмов диссипации. Это положение основано на следующем рассуждении. Выбор локального решения уравнения (6) поля $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ в виде «плоской волны» $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \sim \boldsymbol{v}_0 \exp[i\omega t + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})]$, на основании требования существования такого решения, приводит к уравнению (8) — т. н. «дисперсионному уравнению» с физической точки зрения, связывающего частоту волны ω с волновым вектором $\boldsymbol{q}$. При этом все ветви $\omega_j(\boldsymbol{q})$, $j = 1, 2, 3$, решения алгебраического уравнения (8) обязаны быть вещественными при вещественности $\boldsymbol{q}$, так как наличие мнимой части у какой-либо из них, при некоторых значениях вектора $\boldsymbol{q}$, обязательно приводит, ввиду вещественности уравнения, к наличию комплексно сопряженного ему решения $\omega_j^*(\boldsymbol{q})$. В этом случае наличие мнимой части у $\omega_j(\boldsymbol{q})$ приводит не только к наличию решений $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ уравнения (6), стремящихся асимптотически к какому-то стационарному эволюционному режиму, но также и к обязательному наличию решений $\boldsymbol{v}(\mathbf{x}, t)$, обладающих ничем физически необусловленным, неограниченным возрастанием в некоторых областях изменения пространственной переменной $\boldsymbol{x}$, что физически не разумно.

Таким образом, при отборе физически разумных уравнений необходимо потребовать вещественность решений уравнения (8). Далее, возрастание решений $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ линеаризованного уравнения степенным образом относительно t, возникает также в условиях вещественности всех решений $\omega_j(\boldsymbol{q})$, $j = 1, 2, 3$, в том случае, когда матрица $\mathcal{T}$ не является диагонализируемой. Поэтому при отборе физически разумных эволюционных уравнений необходимо потребовать ее диагонализируемости. В результате приходим к выводу, что условие гиперболичности (см. Определение 1) систем квазилинейных уравнений первого порядка является естественным требованием, предъявляемым к ним с точки зрения физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Математические задачи конструирования эволюционных уравнений динамики конденсированных сред// Мат. Междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 25—29 июня 2018 г.). — Уфа, 2018. — С. 262—264.
2. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Уравнения динамики конденсированных сред с локальным законом сохранения// Мат. V Междунар. науч. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 4–7 декабря 2018 г.). — Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018. — С. 59.
3. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля// Мат. IV Всеросс. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Современные проблемы физико-математических наук» (Орёл, 22–25 ноября 2018 г.). — Орёл, 2018. — С. 83—86.
4. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений ферродинамики// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *170.* — С. 15—30.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 2004.
6. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
7. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
8. *Исаев А. А., Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* О гамильтоновом подходе к динамике сплошных сред// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 2. — С. 283—296.
9. *Исаев А. А., Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией// Физ. элем. част. атом. ядра. — 1996. — *27*, № 2. — С. 431–492.
10. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
11. *Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.* Равновесие произвольных стационарных течений в трансзвуковых точках// Прикл. мат. мех. — 1968. — *31.* — С. 593—602.
12. *Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.* Об устойчивости одномерных стационарных решений гиперболических систем дифференциальных уравнений при наличии точек обращения в нуль одной из характеристических скоростей// Прикл. мат. мех. — 1984. — *48*, № 3. — С. 414—419.
13. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее приложения в физике. — М.: ГИФМЛ, 1958.
14. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
15. *Mac-Connell A. J.* Application of Tensor Analysis. — New York: Dover, 1957.
16. *Majda A.* The existence of multi-dimensional shock fronts// Mem. Am. Math. Soc. — 1983. — *43*, № 281. — P. 1—94.
17. *Spencer A. G. M.* Theory of Invariants// in: Continuum Physics. — New York: Academic Press, 1971. — P. 239–353.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `virch@bsu.edu.ru`

Новосельцева Алина Эдуардовна
Белгородский государственный технологический университет
E-mail: `novoseltseva@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 27–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-27-36

УДК 517.984.3

О НАПОЛНЕННОСТИ ПОДАЛГЕБРЫ ЛОКАЛЬНЫХ АБСОЛЮТНО СУММИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

© 2022 г. **Е. Ю. ГУСЕВА**

Аннотация. Под локальным абсолютно суммирующим оператором понимается оператор T, действующий в $l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, вида

$$(Tx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} b_{km}x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где X — банахово пространство, $b_{km}\colon X \to X$ — абсолютно суммирующие операторы и

$$\|b_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \beta_m$$

для некоторого $\beta \in l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$, $\|\cdot\|_{\mathbf{AS}(X)}$ — норма идеала абсолютно суммирующих операторов. Установлено, что если оператор $\mathbf{1}+T$ обратим, то обратный оператор имеет вид $\mathbf{1}+T_1$, где T_1 — также локальный абсолютно суммирующий оператор. Аналогичное утверждение также доказано для случая, когда оператор T действует в $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Ключевые слова: абсолютно суммирующий оператор, наполненная подалгебра, разностный оператор, сверточный оператор.

ON THE INVERSE CLOSEDNESS OF THE SUBALGEBRA OF LOCAL ABSOLUTELY SUMMING OPERATORS

© 2022 **E. Yu. GUSEVA**

Abstract. A local absolutely summing operator is an operator T acting in $l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, of the form

$$(Tx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} b_{km}x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

where X is a Banach space, $b_{km}\colon X \to X$ is an absolutely summation operator, and

$$\|b_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \beta_m$$

for some $\beta \in l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$, $\|\cdot\|_{\mathbf{AS}(X)}$ is the the norm of the ideal of absolutely summing operators. We prove that if the operator $\mathbf{1}+T$ is invertible, then the inverse operator has the form $\mathbf{1}+T_1$, where T_1 is also a local absolutely summing operator. A similar assertion is proved for the case where the operator T acts in $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Keywords and phrases: absolutely summing operator, inversely closed subalgebra, difference operator, convolution operator.

AMS Subject Classification: 47L80, 47B10, 35P05

1. Введение. Оператор $A \in \mathbf{B}(X)$ называют абсолютно суммирующим, если существует такое $\sigma \geqslant 0$, что

$$\sum_{i=1}^{m}\|Ax_i\| \leqslant \sigma \sup\left\{\sum_{i=1}^{m} |\langle x_i, a\rangle| : \|a\| \leqslant 1,\ a \in X^*\right\} \tag{1}$$

для любого конечного семейства элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$. Здесь X — банахово пространство, а X^* — пространство, сопряженное к X. Множество всех абсолютно суммирующих операторов $A \in \mathbf{B}(X)$ обозначим символом $\mathbf{AS}(X)$. Множество $\mathbf{AS}(X)$ образует (теорема 6) идеал в алгебре $\mathbf{B}(X)$. Положим

$$\|A\|_{\mathbf{AS}(X)} = \inf \sigma,$$

где инфимум берется по всем σ, удовлетворяющим (1). Класс абсолютно суммирующих операторов был впервые рассмотрен Гротендиком [32]. Он играет важную роль в теории операторов, изучении геометрии банаховых пространств, теории функциональных рядов и других приложениях, см. например, [10, 13–15, 38]. В настоящей работе описывается одно обобщение класса абсолютно суммирующих операторов — операторы, обладающие свойством абсолютной суммируемости лишь локально. Основным результатом является доказательство наполненности этого класса (замкнутости относительно операции обращения).

Пусть оператор T действует в $l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Будем говорить, что оператор T принадлежит классу $\mathbf{s}_{1,g}$, если он может быть представлен в виде

$$(Tx)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} b_{km} x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где $b_{km}\colon X \to X$ — абсолютно суммирующие операторы и

$$\|b_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \beta_m$$

для некоторого $\beta \in l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$ или, более общим образом, $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$, где g — вес на группе $\mathbb{Z}^c$.

Далее, пусть линейный оператор A действует в пространстве $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Представим множество $\mathbb{R}^c$ как объединение попарно непересекающихся полуинтервалов:

$$\mathbb{R}^c = \bigcup_{m=(m_1,m_2,\ldots,m_c) \in \mathbb{Z}^c} [m_1, m_1+1) \times [m_2, m_2+1) \times \ldots \times [m_c, m_c+1)$$

и отождествим пространство $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$ с $l_p(\mathbb{Z}^c, L_p([0,1)^c, \mathbb{C}))$. Пусть оператор T, действующий в $l_p(\mathbb{Z}^c, L_p([0,1)^c, \mathbb{C}))$, соответствует оператору A в силу принятого отождествления. Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathbf{S}_{1,g}$, если оператор T принадлежит классу $\mathbf{s}_{1,g}$. Операторы, принадлежащие классам $\mathbf{s}_{1,g}$, $\mathbf{S}_{1,g}$, называем локально абсолютно суммирующими.

Установлено (теоремы 9 и 12), что оператор T_1 из представления $(\mathbf{1} + T)^{-1} = \mathbf{1} + T_1$ наследует свойство быть локальным абсолютно суммирующим оператором, и его матричные элементы убывают на бесконечности с той же скоростью, что и матричные элементы исходного оператора T. Сохранение скорости убывания матричных элементов при переходе к обратному оператору (для других классов операторов) изучалось многими авторами, см., например, [1–6, 11, 12, 22–24, 26, 28–31, 34, 35, 39].

Отметим также работы [20,21,25,33,35–37], в которых изучалась наполненность других классов некомпактных интегральных операторов.

Разделы 2–4 посвящены изложению вспомогательных определений, конструкций и фактов. В разделах 5 и 6 излагаются основные результаты: в теореме 9 рассматривается случай, когда оператор T действует в пространстве l_p, а в теореме 12 — в пространстве L_p.

2. Банаховы алгебры. *Линейной алгеброй* или просто *алгеброй* называют линейное пространство $\mathbf{B}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, в котором дополнительно задана операция умножения, обладающая свойствами

$$A(BC) = (AB)C,$$
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$
$$(A+B)C = AC + BC, A(B+C) = AB + AC$$

(см. [7, гл. 1, § 1], [16, гл. 10, § 10.1], [19, гл. 4, § 1.13]). Если алгебра $\mathbf{B}$ является нормированным пространством и при этом выполнена аксиома

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|,$$

то говорят, что $\mathbf{B}$ — *нормированная алгебра.* Если нормированная алгебра является полным, т.е. банаховым пространством, то ее называют *банаховой алгеброй.*

Если в $\mathbf{B}$ выделен элемент $\mathbf{1} = \mathbf{1_B}$, обладающий свойством

$$A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A,$$

то говорят, что алгебра $\mathbf{B}$ *имеет единицу*, при этом элемент $\mathbf{1}$ называют *единицей* алгебры, а саму алгебру называют *унитальной.* Если алгебра нормирована и при этом выполнена аксиома

$$\|\mathbf{1}\| = 1,$$

то говорят, что $\mathbf{B}$ — *нормированная унитальная алгебра.* Наиболее важный пример унитальной банаховой алгебры — алгебра $\mathbf{B}(X)$, состоящая из всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X.

Пусть $\mathbf{B}$ — унитальная алгебра и $A \in \mathbf{B}$. Элемент $B \in \mathbf{B}$ называют *обратным* к A, если

$$AB = BA = \mathbf{1}.$$

Обратный к A обозначают символом A^{-1}. Если элемент A имеет обратный, его называют *обратимым* (в алгебре $\mathbf{B}$).

Подмножество $\mathbf{R}$ алгебры $\mathbf{A}$ называют *подалгеброй*, если все три алгебраические операции (сложение, умножение на скаляры и умножение элементов) из $\mathbf{R}$ не выводят. Если $\mathbf{A}$ содержит единицу и $\mathbf{1_A} \in \mathbf{R}$, то говорят, что $\mathbf{R}$ — *унитальная подалгебра.* Очевидно, подалгебра сама является алгеброй. Очевидно также, что замыкание подалгебры (нормированной алгебры) является подалгеброй.

Унитальную подалгебру $\mathbf{B}$ унитальной алгебры $\mathbf{A}$ называют [7, гл. 1, § 4] *наполненной*, если всякий $A \in \mathbf{B}$, обратимый в $\mathbf{A}$, также обратим и в $\mathbf{B}$. В силу единственности обратного это определение эквивалентно следующему: если существует такой $A^{-1} \in \mathbf{A}$, что $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$, то $A^{-1} \in \mathbf{B}$.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — алгебры. Говорят, что отображение $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ является *морфизмом алгебр* (см. [7, гл. 1, § 1], если

$$\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B), \quad \varphi(\alpha A) = \alpha\varphi(A), \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$$

для всех $A, B \in \mathbf{A}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ унитальные и дополнительно

$$\varphi(\mathbf{1_A}) = \mathbf{1_B},$$

то говорят, что φ — *морфизм унитальных алгебр.* Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — банаховы (нормированные) алгебры и морфизм φ непрерывен, то говорят, что φ — *морфизм банаховых (нормированных) алгебр.*

Предложение 1 (см. [18, гл. 5, § 2, предложение 3])**.** *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *— унитальные алгебры и* $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *— морфизм унитальных алгебр. Если* $A \in \mathbf{A}$ *обратим, то* $\varphi(A)$ *также обратим.*

(*Двусторонним*) *идеалом* в алгебре $\mathbf{B}$ называют [17, гл. 1, § 3] подпространство $\mathbf{J}$, обладающее свойством: $AJ, JA \in \mathbf{J}$ для всех $A \in \mathbf{B}$ и $J \in \mathbf{J}$. Если $\mathbf{J}$ — идеал, то факторпространство $\mathbf{B}/\mathbf{J}$ является алгеброй.

Предложение 2 (см. [35, 1.2.7])**.** *Пусть* $\mathbf{B}$ *— алгебра, а* $\mathbf{J}$ *— идеал в ней. Тогда правило*

$$(x + \mathbf{J})(y + \mathbf{J}) = xy + \mathbf{J}$$

корректно определяет умножение в факторпространстве $\mathbf{B}/\mathbf{J}$*, превращающее* $\mathbf{B}/\mathbf{J}$ *в алгебру, называемую факторалгеброй. При этом, если* $\mathbf{B}$ *нормирована* (*банахова*)*, а* $\mathbf{J}$ *замкнут, то алгебра* $\mathbf{B}/\mathbf{J}$ *также нормирована* (*банахова*)*.*

3. Алгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z}^c)$. Пусть $c \in \mathbb{N}$. *Весом* на группе $\mathbb{Z}^c$ называют функцию $g\colon \mathbb{Z}^c \to (0, +\infty)$. Всегда будем предполагать, что вес на $\mathbb{Z}^c$ обладает следующими свойствами:

(a) $g(0) = 1$,
(b) $g(m+n) \leqslant g(m)g(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}^c$,
(c) $g(-n) = g(n)$,
(d) $g(n) \geqslant 1$,

(e) для всех $t \in \mathbb{Z}^c$ имеет место соотношение

$$\lim_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\to\infty}} \frac{\ln g(nt)}{n} = 0;$$

(f) для всех $t \in \mathbb{Z}^c$ имеет место соотношение

$$\lim_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\to\infty}} \sqrt[n]{g(nt)} = 1.$$

Очевидно, что условие (d) вытекает из условий (a), (b) и (c). Также нетрудно показать, что условия (e) и (f) эквивалентны.

Пример 1. Приведем примеры весов на группе $\mathbb{Z}^c$ (см. [29, пример 5.21], [31]. Пусть $0 \leqslant b < 1$, $a \geqslant 0$ и $s, t \geqslant 0$; тогда функции

$$\begin{aligned} &g(n) = 1, && g(n) = e^{a|n|^b}(1+|n|)^s,\\ &g(n) = (1+|n|)^s, && g(n) = e^{a|n|^b}(1+|n|)^s \ln^t(e+|n|) \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям (a)–(f) из определения веса. Понятно, что в этом списке каждый предыдущий пример является частным случаем следующего.

Пусть g — вес на $\mathbb{Z}^c$, а $\mathbf{B}$ — банахова алгебра. *Пространством $l_{1,g}$ на $\mathbb{Z}^c$ со значениями в $\mathbf{B}$ с весом g* называют множество $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$, состоящее из всевозможных семейств $a = \{a_m \in \mathbf{B} : m \in \mathbb{Z}^c\}$, для которых

$$\|a\| = \|a\|_{l_{1,g}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} g(m)\|a_m\| < \infty.$$

Теорема 3 (см. [29, с. 196, лемма 5.22]). *Пусть выполняются условия* (a), (b) *из определения веса. Тогда пространство $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$ является банаховой алгеброй относительно операции свертки*

$$(a * b)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_m b_{k-m},$$

взятой в качестве умножения. Если $\mathbf{B}$ унитальна, то $l_{1,g}$ также унитальна; при этом единицей алгебры $l_{1,g}$ является семейство $\delta = \{\delta_k\}$, определяемое по формуле

$$\delta_k = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{при } k = 0,\\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

Если $\mathbf{B} = \mathbb{C}$, то алгебра $l_{1,g}$ коммутативна.

Теорема 4 (ср. [29, следствие 5.27]). *Подалгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$ наполнена в алгебре $l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$.*

4. Абсолютно суммирующие операторы. Оператор $A \in \mathbf{B}(X)$ называют *абсолютно суммирующим* (см. [32], [15, 6.5.1], [10, 13], если существует такая константа $\sigma \geqslant 0$, что

$$\sum_{i=1}^{m} \|Ax_i\| \leqslant \sigma \sup\left\{ \sum_{i=1}^{m} |\langle x_i, a\rangle| : \|a\| \leqslant 1,\ a \in X^* \right\} \tag{2}$$

для любого конечного семейства элементов $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$. Здесь X^* — сопряженное к X пространство. Множество всех абсолютно суммирующих операторов $A \in \mathbf{B}(X)$ обозначим символом $\mathbf{AS}(X)$. Положим

$$\|A\|_{\mathbf{AS}(X)} = \inf \sigma, \tag{3}$$

где инфимум берется по всем σ, удовлетворяющим (2).

Пусть $X = L_p(E, \mathbb{C})$, где $E \subseteq \mathbb{R}^c$ — измеримое подмножество, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Оператор $A \in \mathbf{B}(L_p(E, \mathbb{C}))$ называют *мажорируемым* (см. [13, с. 10]), если существует такая функция $\varphi \in L_p(E, \mathbb{C})$, что для всех $x \in L_p(E, \mathbb{C})$

$$|(Ax)(t)| \leqslant \varphi(t)\|x\|.$$

Предложение 5 (см. [13, с. 10]). *Всякий мажорируемый оператор $A \in \mathbf{B}(L_p(E, \mathbb{C}))$ является абсолютно суммирующим.*

Пример 2. Приведем пример абсолютно суммирующего оператороа. Пусть $X = L_1[0,1]$. Пусть $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ — ограниченная измеримая функция, а именно, для некоторого M выполняется оценка

$$|k(t,s)| \leqslant M \quad \text{при всех} \quad t, s \in [0,1].$$

Покажем, что интегральный оператор Фредгольма

$$(Kx)(t) = \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)ds$$

является абсолютно суммирующим (то, что K непрерывно действует в $X = L_1[0,1]$, известно: см. [9, гл. XI, § 3, теорема 1]). Пусть $x \in L_1[0,1]$ — произвольная функция. Имеем

$$|Kx(t)| = \left|\int\limits_0^1 k(t,s)x(s)ds\right| \leqslant \int\limits_0^1 |k(t,s)||x(s)|ds \leqslant \int\limits_0^1 M|x(s)|ds = M\|x\|_{L_1}.$$

Таким образом, оператор K мажорируется функцией $\varphi(t) = M$. По предложению 5 он является абсолютно суммирующим.

Необходимое и достаточное условие принадлежности оператора классу $\mathbf{AS}(X)$ можно найти в [10, с. 8].

Теорема 6 (см. [15, 6.5.2]). *Множество $\mathbf{AS}(X)$ является идеалом в $\mathbf{B}(X)$. При этом*

$$\|JA\|_{\mathbf{AS}(X)}, \|AJ\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \|J\|_{\mathbf{AS}(X)}\|A\|_{\mathbf{B}(X)}, \quad J \in \mathbf{AS}(X), \quad A \in \mathbf{B}(X).$$

Пространство $\mathbf{AS}(X)$ является полным относительно нормы (3).

5. Локально абсолютно суммирующие операторы. Обозначим через $l_p = l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, пространства последовательностей $x_n \in X$, $n \in \mathbb{Z}^c$, ограниченных по обычным нормам.

Пусть X — банахово пространство и g — вес на группе $\mathbb{Z}^c$. Обозначим через $\mathbf{s}_{1,g} = \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))$ множество всех операторов $T \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, вида

$$(Tx)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} b_{km}x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где $b_{km} \in \mathbf{B}(X)$ удовлетворяют оценке

$$\|b_{km}\|_{\mathbf{B}(X)} \leqslant \beta_m \tag{4}$$

для некоторого $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$.

Теорема 7 (см. [1–3], [33, теорема 29]). *Подалгебра $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))$ является наполненной в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$ для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Обозначим через $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ множество всех операторов $T \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$ вида

$$(Tx)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} b_{km}x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где $b_{km} \in \mathbf{AS}(X)$, причем

$$\|b_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \beta_m$$

для некоторого $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$. Операторы класса $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ будем называть *локально абсолютно суммирующими.*

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ подалгебру $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$, к которой присоединена единица алгебры $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$.

Предложение 8. *Подалгебра $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ является идеалом в алгебре $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ — подпространство алгебры $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))$. Покажем, что $KT, TK \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ для всех $K \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$, $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))$.

Пусть $K \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ и $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))$. По определению множества $\mathbf{s}_{1,g}$ операторы K и T допускают представления

$$(Kx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}x_{k-m}, \quad (Tx)_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}^c} b_{kl}x_{k-l}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где коэффициенты a_{km}, b_{kl} удовлетворяют оценкам

$$\|a_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \alpha_m, \quad \|b_{kl}\|_{\mathbf{B}(X)} \leqslant \beta_l,$$

для некоторых $\alpha, \beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$. В силу определения произведения операторов для любого $x \in l_p(\mathbb{Z}^c, X)$ имеем

$$(KTx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}(Tx)_{k-m} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km} \sum_{l\in\mathbb{Z}^c} b_{k-m,l}x_{k-m-l}, \quad k \in \mathbb{Z}^c.$$

Поскольку $l_p(\mathbb{Z}^c, X) \subseteq l_\infty(\mathbb{Z}^c, X)$, семейство $\{x_i : i \in \mathbb{Z}^c\}$ ограничено. Поэтому последний двойной ряд при фиксированном k абсолютно сходится. Следовательно, его можно суммировать в любом порядке.

Сделаем замену $l = r - m$:

$$(KTx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km} \sum_{r\in\mathbb{Z}^c} b_{k-m,r-m}x_{k-r}, \quad k \in \mathbb{Z}^c.$$

Поменяем порядок суммирования:

$$(KTx)_k = \sum_{r\in\mathbb{Z}^c} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}b_{k-m,r-m} \right) x_{k-r}, \quad k \in \mathbb{Z}^c. \tag{5}$$

В силу оценки (см. предложение 6) имеем

$$\|a_{km}b_{k-m,r-m}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \|a_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \cdot \|b_{k-m,r-m}\|_{\mathbf{B}(X)} \leqslant \alpha_m\beta_{r-m}.$$

Отсюда

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^c} \|a_{km}b_{k-m,r-m}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} \alpha_m\beta_{r-m} = (\alpha * \beta)_r.$$

Последняя оценка показывает, что ряд $\sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}b_{k-m,r-m}$ абсолютно сходится по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{AS}(X)}$. В силу полноты идеала $\mathbf{AS}(X)$ (предложение 6) отсюда следует, что сумма $\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}b_{k-m,r-m}$ принадлежит $\mathbf{AS}(X)$ и

$$\left\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}b_{k-m,r-m} \right\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant (\alpha * \beta)_r.$$

В силу предложения 3 имеем $\alpha * \beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$. Вз формулы (5) следует, что $KT \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$. Аналогично проверяется, что $TK \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$. $\square$

Теорема 9. *Подалгебра* $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ *является наполненной в алгебре* $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$ *для всех* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Доказательство. Покажем вначале, что подалгебра $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ является наполненной в алгебре $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))$. Пусть оператор $\lambda\mathbf{1} + T$, где $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$, обратим в $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))$. В силу предложений 8 и 2 существует фактор-морфизм алгебр

$$\varphi : \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X)) \to \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))/\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X)).$$

По определению морфизма φ имеем

$$\varphi(\lambda\mathbf{1}_{\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))} + T) = \lambda\mathbf{1}_{\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))/\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))}.$$

Поскольку элемент $\lambda\mathbf{1}+T$ обратим, в силу предложения 1 элемент $\lambda\mathbf{1}$ также обратим. Поэтому $\lambda\neq 0$. При этом

$$\varphi((\lambda\mathbf{1}+T)^{-1})=(\varphi(\lambda\mathbf{1}+T))^{-1}=(\lambda\mathbf{1})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\mathbf{1}.$$

Отсюда $(\lambda\mathbf{1}+T)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\mathbf{1}+T_1$, где $T_1\in\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$. Это означает, что $(\lambda\mathbf{1}+T)^{-1}\in\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$.

Для завершения доказательства остается напомнить, что подалгебра $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))$ наполнена в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c,X))$ в силу теоремы 7. $\square$

6. Локально абсолютно суммирующие операторы в L_p. Обозначим через λ меру Лебега на $\mathbb{R}^c$. Пусть $E\subseteq\mathbb{R}^c$ — измеримое подмножество. Будем обозначать интеграл от суммируемой функции $x\colon\mathbb{R}^c\to\mathbb{C}$ относительно меры Лебега λ через

$$\int\limits_{\mathbb{R}^c}x(t)d\lambda(t)\quad\text{или}\quad\int\limits_{\mathbb{R}^c}x(t)dt.$$

Обозначим через $\mathbf{L}_p=\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$, $1\leqslant p<\infty$, пространство всех измеримых функций $u\colon\mathbb{R}^c\to\mathbb{C}$, ограниченных по полунорме

$$\|u\|=\|u\|_{L_p}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^c}|u(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

а через $\mathbf{L}_\infty=\mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$ — пространство всех измеримых существенно ограниченных функций $u\colon\mathbb{R}^c\to\mathbb{C}$ с полунормой

$$\|u\|=\|u\|_{L_\infty}=\operatorname{ess\,sup}|u(t)|.$$

Иногда удобно допускать, что функции $u\in\mathbf{L}_p$ могут быть не определены на пренебрежимом (т.е. имеющем меру нуль) множестве. Наконец, обозначим через $L_p=L_p(\mathbb{R}^c)=L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, банахово пространство всех классов функций $u\in\mathbf{L}_p$, с отождествлением почти всюду. Подробнее см., например, [8]. Обычно пространства $\mathbf{L}_p$ и L_p не различают.

Представим множество $\mathbb{R}^c$ как объединение попарно непересекающихся полуинтервалов

$$\mathbb{R}^c=\bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}^c}[0,1)^c+m,$$

где

$$[0,1)^c+m=\bigsqcup_{m=(m_1,m_2,\dots,m_c)\in\mathbb{Z}^c}[m_1,m_1+1)\times[m_2,m_2+1)\times\ldots\times[m_c,m_c+1)$$

и $m=(m_1,m_2,\dots,m_c)$.

Предложение 10. *Имеют место следующие утверждения.*

(a) *Множество $E\subseteq\mathbb{R}^c$ измеримо тогда и только тогда, когда его пересечение с любым множеством $[0,1)^c+m$, $m\in\mathbb{Z}^c$, суммируемо.*
(b) *Множество $N\subseteq\mathbb{R}^c$ пренебрежимо тогда и только тогда, когда его пересечение с любым множеством $[0,1)^c+m$, $m\in\mathbb{Z}^c$, пренебрежимо.*
(c) *Функция $x\colon\mathbb{R}^c\to\mathbb{C}$ измерима тогда и только тогда, когда ее сужение на каждое из множеств $[0,1)^c+m$, $m\in\mathbb{Z}^c$, измеримо.*
(d) *Функция $x\colon\mathbb{R}^c\to\mathbb{C}$ пренебрежима тогда и только тогда, когда ее сужение на каждое из множеств $[0,1)^c+m$, $m\in\mathbb{Z}^c$, пренебрежимо.*

Предложение 11 (см. [27], [35, 1.6.3])**.** *Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$. Тогда отображение*

$$\varphi\colon\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})\to l_p(\mathbb{Z}^c,\mathbf{L}_p([0,1)^c,\mathbb{C})),\quad\varphi(x)=\{x_m\},$$

где

$$x_m(t)=x(t+m),\quad t\in[0,1)^c,$$

порождает (после отождествления эквивалентных функций) изометрический изоморфизм $\varphi\colon L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})\to l_p(\mathbb{Z}^c,L_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$ (который обозначен тем же символом φ).

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C}) \to l_p(\mathbb{Z}^c,\mathbf{L}_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$, определенное правилом $\varphi(x)=\{x_m\}$, где

$$x_m(t)=x(t+m),\quad t\in[0,1)^c.$$

Очевидно, что для любой функции $x\in\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$ последовательность $\{x_m\}$ состоит из измеримых функций и

$$\|x\|_{L_p}=\|\{\|x_m\|_{L_p}\}\|_{l_p}$$

или, более подробно,

$$\|x\|_{L_p}=\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^c}|x(t)|^p dt}=\sqrt[p]{\sum_{m\in\mathbb{Z}^c}\int\limits_{[0,1)^c}|x_m(t)|^p dt},\quad p<\infty,$$

$$\|x\|_{L_\infty}=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}^c}|x(t)|=\sup_{m\in\mathbb{Z}^c}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1)^c}|x_m(t)|,\qquad p=\infty.$$

Таким образом, φ действует из $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$ в $l_p(\mathbb{Z}^c,\mathbf{L}_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$ и сохраняет норму.

Линейность φ очевидна. Из сохранения нормы следует, что φ инъективно.

Пусть $\{x_m\}\in l_p(\mathbb{Z}^c,\mathbf{L}_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$. Очевидно, что последовательность $\{x_m\}$ является прообразом функции

$$x(t)=x_m(t-m),\quad\text{когда}\quad t\in[0,1)^c+m.$$

Таким образом, φ сюръективно.

По предложению 10(d), измеримая функция x пренебрежима тогда и только тогда, когда все члены последовательности $\varphi(x)=\{x_m\}$ являются пренебрежимыми функциями. Поэтому φ порождает изометрический изоморфизм $\varphi\colon L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})\to l_p(\mathbb{Z}^c,L_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$. $\square$

Так как пространства $L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$ и $l_p(\mathbb{Z}^c,L_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$ изометрически изоморфны, алгебры операторов $\mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C}))$ и $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c,L_p([0,1)^c,\mathbb{C})))$ также изоморфны.

Обозначим через $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})=\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS}(L_p([0,1)^c,\mathbb{C})))$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, пространство всех операторов $A\in\mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C}))$, отвечающих операторам класса $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(L_p([0,1)^c,\mathbb{C})))$ в соответствии с изоморфизмом φ, определенном в предложении 11. Другими словами, оператор A принадлежит классу $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})$ тогда и только тогда, когда оператор $T=\varphi A\varphi^{-1}$ принадлежит классу $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(L_p([0,1)^c,\mathbb{C})))$. Операторы класса $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})$ будем также называть *локально абсолютно суммирующими.*

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{S}_{1,g}}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})$ подалгебру алгебры $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})$ с присоединенной единицей алгебры $\mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c,X))$. Следующая теорема является частным случаем теоремы 9.

Теорема 12. *Подалгебра $\widetilde{\mathbf{S}_{1,g}}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})$ наполнена в алгебре $\mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c,X))$ для всех $1\leqslant p\leqslant\infty$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г.* Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц// Функц. анал. прилож. — 1990. — *24*, № 3. — С. 64–65.
2. *Баскаков А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ// Сиб. мат. ж. — 1997. — *38*, № 1. — С. 14–28.
3. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов// Совр. мат. Фундам. направл. — 2004. — *9*. — С. 3–151.
4. *Блатов И. А.* Алгебра обобщенной дискретной свертки операторов с осциллирующими коэффициентами// Деп. в ВИНИТИ РАН. — 1990. — 5852-В90.
5. *Блатов И. А.* О методах неполной факторизации для систем с разреженными матрицами// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1993. — *33*, № 6. — С. 819–836.
6. *Блатов И. А., Тертерян А. А.* Об оценках элементов обратных матриц и модернизации метода матричной прогонки// Сиб. мат. ж. — 1992. — *32*, № 11. — С. 1683–1696.
7. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. — М.: Мир, 1972.
8. *Бурбаки Н.* Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.

9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
10. *Кисляков С. В.* Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре// Алгебра и анализ. — 1991. — *3*, № 4. — С. 1–77.
11. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990.
12. *Курбатов В. Г.* Об алгебрах разностных и интегральных операторов// Функц. анал. прилож. — 1990. — *24*, № 2. — С. 87–88.
13. *Макаров Б. М.* p-абсолютно суммирующие операторы и некоторые их приложения// Алгебра и анализ. — 1991. — *3*, № 2. — С. 1–76.
14. *Митягин Б. С.* Об абсолютной сходимости ряда коэффициентов Фурье// Докл. АН СССР. — 1964. — *157*, № 5. — С. 1047–1050.
15. *Пич А.* Операторные идеалы. — М.: Мир, 1982.
16. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
17. *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. — М.: Наука, 1989.
18. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦНМО, 2004.
19. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
20. *Beltiţă I., Beltiţă D.* Erratum to: Inverse-closed algebras of integral operators on locally compact groups// Ann. H. Poincaré. — 2015. — *16*, № 5. — P. 1307–1309.
21. *Beltiţă I., Beltiţă D.* Inverse-closed algebras of integral operators on locally compact groups// Ann. H. Poincaré. — 2015. — *16*, № 5. — P. 1283–1306.
22. *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections// SIAM J. Numer. Anal. — 1977. — *14*, № 4. — P. 616–619.
23. *Demko S.* Spectral bounds for $\|A^{-1}\|_\infty$// J. Approx. Theory. — 1986. — *48*, № 2. — P. 207–212.
24. *Demko S., Moss W. F., Smith P. W.* Decay rates for inverses of band matrices// Math. Comp. — 1984. — *43*, № 168. — P. 491–499.
25. *Farrell B., Strohmer T.* Inverse-closedness of a Banach algebra of integral operators on the Heisenberg group// J. Operator Theory. — 2010. — *64*, № 1. — P. 189–205.
26. *Fendler G., Gröchenig K., Leinert M.* Convolution-dominated operators on discrete groups// Integral Equations Oper. Theory. — 2008. — *61*, № 4. — P. 493–509.
27. *Fournier J. J. F., Stewart J.* Amalgams of L^p and l^q// Bull. Am. Math. Soc. — 1985. — *13*, № 1. — P. 1–21.
28. *Gohberg I., Kaashoek M. A., Woerdeman H. J.* The band method for positive and strictly contractive extension problems: an alternative version and new applications// Integral Equations Oper. Theory. — 1989. — *12*, № 3. — P. 343–382.
29. *Gröchenig K.* Wiener's lemma: theme and variations. An introduction to spectral invariance// in: Four Short Courses on Harmonic Analysis: Wavelets, Frames, Time-Frequency Methods, and Applications to Signal and Image Analysis. — Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2010. — P. 175–244.
30. *Gröchenig K., Klotz A.* Noncommutative approximation: inverse-closed subalgebras and off-diagonal decay of matrices// Constr. Approx. — 2010. — *32*, № 3. — P. 429–466.
31. *Gröchenig K., Leinert M.* Symmetry and inverse-closedness of matrix algebras and functional calculus for infinite matrices// Trans. Am. Math. Soc. — 2006. — *358*, № 6. — P. 2695–2711.
32. *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1966.
33. *Guseva E. Yu., Kurbatov V. G.* Inverse-closedness of the subalgebra of locally nuclear operators/ `arXiv: 2010.02883 [math.FA]`.
34. *Jaffard S.* Propriétés des matrices "bien localisées" près de leur diagonale et quelques applications// Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire. — 1990. — *7*, № 5. — P. 461–476.
35. *Kurbatov V. G.* Functional Differential Operators and Equations. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
36. *Kurbatov V. G.* Some algebras of operators majorized by a convolution// Funct. Differ. Equations. — 2001. — *8*, № 1. — P. 323–333.
37. *Kurbatov V. G., Kuznetsova V. I.* Inverse-closedness of the set of integral operators with L_1-continuously varying kernels// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *436*, № 1. — P. 322–338.
38. *Schwartz L.* Ordre et type; problèmes d'approximation; applications radonifiantes// in: Sémin. L. Schwartz. 1969–1970. — Exp. No. 5..

39. *Sjöstrand J.* Wiener type algebras of pseudodifferential operators// в кн.: Sémin. Équations aux Dérivées Partielles. 1994–1995. — Exp. No. IV, 21.. — Palaiseau: École Polytech., 1995.

Гусева Елена Юрьевна
Воронежский государственный университет
E-mail: elena.guseva.01.06@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 37–47
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-37-47

УДК 517.928.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2022 г. Д. П. ЕМЕЛЬЯНОВ, И. С. ЛОМОВ

Аннотация. Метод разделения переменных в задачах для линейно вырождающегося уравнения $u''_{xx}+yu''_{yy}+c(y)u'_y-a(x)u=f(x,y)$ в прямоугольнике приводит к задачам для обыкновенного сингулярно возмущённого дифференциального уравнения с вырождением $yY''+c(y)Y'-(\pi^2k^2+a(y))Y=f_k(y)$, $k\in\mathbb{N}$. В данной работе исследуется асимптотическое поведение решения данного уравнения с заданными начальными данными в точке 0 и нулевой правой частью при $k\to+\infty$. Главный член асимптотики выписывается в квадратурах.

Ключевые слова: вырождающееся дифференциальное уравнение, сингулярно возмущённое дифференциальное уравнение.

ASYMPTOTIC ESTIMATES FOR THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION WITH LINEAR DEGENERATION

© 2022 D. P. EMEL'YANOV, I. S. LOMOV

Abstract. Application of the method of separation of variables to problems for the linearly degenerate equation $u''_{xx}+yu''_{yy}+c(y)u'_y-a(x)u=f(x,y)$ in a rectangle leads to problems for the singularly perturbed ordinary differential equation with degeneration $yY''+c(y)Y'-(\pi^2k^2+a(y))Y=f_k(y)$, $k\in\mathbb{N}$. In this paper, we examine the asymptotic behavior of solutions of this equation with given initial data at 0 and zero right-hand side as $k\to+\infty$ and obtain the leading term of the asymptotics in the explicit form.

Keywords and phrases: degenerate differential equation, singularly perturbed differential equation.

AMS Subject Classification: 34E15

1. Введение. Рассмотрим следующую задачу для дифференциального уравнения с линейным вырождением:

$$\begin{cases} xy''_k+c(x)y'_k-(a(x)+\pi^2k^2)y_k=0, & x\in(0,b),\\ y_k(0)=1, \end{cases}\qquad k\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Коэффициенты уравнения $a(x)$, $c(x)$ — непрерывно дифференцируемые на $[0,b]$ функции, при этом производная функции $\bar c(x)=(c(x)-c(0))/x$ непрерывна на $(0,b]$ и может иметь интегрируемую особенность в точке 0. $a(x)\geqslant 0$, $c(0)\equiv c_0\geqslant 1$. Цель данной работы состоит в отыскании равномерной асимптотики последовательности решений $y_k(x)$ данной задачи при $k\to+\infty$.

Подобные вырождающиеся уравнения возникают в том числе при разделении переменных в задачах, рассмотренных М. В. Келдышем в [4] и [5, с. 299–301]. В работах [7, 8], [9, глава X] и [3] с помощью метода спектрального выделения особенностей строится решение упомянутых задач с квадратичным вырождением в виде ряда. При доказательстве сходимости данного ряда важную роль играют асимптотические свойства решения краевых задач для уравнения вида (1).

Некоторые аналоги результатов этой работы для задачи, аналогичной (1) в случае без вырождения следуют из [6, с. 17, лемма 2.2], или же могут быть получены с использованием теоремы Тихонова [1, § 7]. Наличие вырождения существенно затрудняет доказательство.

В данной работе априорно полагается, что решение данной задачи (1) существует и единственно при каждом $k > 0$.

2. Вспомогательные утверждения. В соответствии с методом спектрального выделения особенностей [7, 8], [9, глава X], [3], рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} x\bar{y}_k'' + c(0)\bar{y}_k' - \pi^2k^2\bar{y}_k = 0, \quad x \in (0,b), \\ \bar{y}_k(0) = 1. \end{cases}$$

Разложив $\bar{y}_k(x)$ в ряд по степеням x и приравняв коэффициенты при равных степенях, легко показать [2, с. 51], что

$$\bar{y}_k(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha} J_\alpha(2\pi k i\sqrt{x}),$$

где J_α — функция Бесселя первого рода, i — мнимая единица, $\alpha = c_0 - 1$.

Перейдём в задаче (1) к малому параметру $\mu = 1/\pi k$ и будем искать её решение в следующем виде

$$y(x,\mu) = \bar{y}(x,\mu)\cdot z(x,\mu),$$

где $z(x,\mu)$ — новая неизвестная функция. Подставим данное соотношение в уравнение (1) и поделим полученное выражение на $\bar{y}(x)$. Введём вспомогательные обозначения $\bar{c}(x) = (c(x) - c_0)/x$, $R_\mu(x) = -iJ_{\alpha+1}(2i\sqrt{x}/\mu)/J_\alpha(2i\sqrt{x}/\mu)$, $\tilde{R}_\mu(x) = \bar{y}'(x,\mu)/\bar{y}(x,\mu)$. В силу формул дифференцирования функций Бесселя [2, с. 56] имеет место соотношение $\tilde{R}_\mu(x) = R_\mu(x)/(\mu\sqrt{x})$ и полученную для $z(x,\mu)$ задачу можно записать в виде

$$\begin{cases} \mu x\dfrac{d^2z}{dx^2} + 2\sqrt{x}R_\mu(x)\dfrac{dz}{dx} + \mu c(x)\dfrac{dz}{dx} + \bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)z - \mu a(x)z = 0, \quad x \in (0,b), \\ z(0,\mu) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Принимая во внимание тот факт, что $R_\mu(x) \to 1$ при $\mu \to 0+0$, $x > 0$ (см. асимптотики $J_\alpha(ix)$ в [2, с. 222] при $x \to +\infty$), выпишем предельную задачу (2) при $\mu = 0$:

$$\begin{cases} 2\dfrac{d\bar{z}}{dx} + \bar{c}(x)\bar{z} = 0, \quad x \in (0,b), \\ \bar{z}(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Далее докажем, что $z(x,\mu) \to \bar{z}(x)$ при $\mu \to 0+0$, $x \in (0,b]$. Введём функцию

$$\varphi(x,\mu) = \frac{\mu a(x) - \bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)}{\mu c(x) + 2\sqrt{x}R_\mu(x)}.$$

Функция $\varphi(x,\mu)$ определяет начальное значение $z'(x,\mu)$ при $x = 0$: $z'(0,\mu) = \varphi(0,\mu)$, $\varphi(x,\mu)$ непрерывна при $(x,\mu) \in [0,b]\times[0,\mu_0]\setminus\{(0,0)\}$, и, вообще говоря, имеет разрыв в точке $(0,0)$. Исследуем её свойства при $(x,\mu) \to (0,0)$. Для начала отметим, что $R_\mu(x) \sim \mathrm{const}\cdot\sqrt{x}/\mu$ при $(x,\mu) \to (0,0)$, $R_\mu(x) \leqslant 1$, $x \in [0,b]$, $\mu > 0$, а $a(x)$ и $\bar{c}(x)$ — непрерывно дифференцируемые на $(0,b]$, непрерывные и интегрируемые на $[0,b]$ функции, $c(0) \geqslant 1$, следовательно, в достаточно малой окрестности точки $(0,0)$ справедливы неравенства

$$|\varphi(x,\mu)| \leqslant \left|\frac{\mu a(x)}{\mu c(x) + 2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right| + \left|\frac{\bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)}{\mu c(x) + 2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\mu a(x)}{\mu c(x)}\right| + \left|\frac{\bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)}{2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right| \leqslant \left|\frac{a(x)}{c(x)}\right| + \left|\frac{\bar{c}(x)}{2}\right| \leqslant \mathrm{const},$$

т.е. $\varphi(x,\mu)$ ограничена в некоторой окрестности точки $(0,0)$, а значит, и в $[0,b]\times[0,\mu_0]$. Далее,

$$R'_\mu(x) = \frac{1}{\mu\sqrt{x}}\left(1-\mu\frac{2\alpha+1}{2\sqrt{x}}R_\mu(x)-R_\mu^2(x)\right), \quad |R'_\mu(x)| \leqslant \frac{\text{const}}{\mu\sqrt{x}},$$

следовательно, $\varphi'_x(x,\mu)$ можно оценить следующим образом:

$$|\varphi'_x(x,\mu)| \leqslant \left|\frac{\mu a'(x)-\bar{c}'(x)\sqrt{x}R_\mu(x)-\bar{c}(x)R_\mu(x)/2\sqrt{x}-\bar{c}(x)\sqrt{x}R'_\mu(x)}{\mu c(x)+2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right| + \\ + \left|\frac{(\mu a(x)-\bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x))\cdot(\mu c'(x)+R_\mu(x)/\sqrt{x}+2\sqrt{x}R'_\mu(x))}{(\mu c(x)+2\sqrt{x}R_\mu(x))^2}\right|.$$

Оценивая данные дроби аналогично $\varphi(x,\mu)$ в достаточно малой окрестности точки $(0,0)$, получим

$$|\varphi'_x(x,\mu)| \leqslant \frac{\text{const}}{x}.$$

Таким образом, функция $x\varphi'_x(x,\mu)$ является ограниченной в прямоугольнике $[0,b]\times[0,\mu_0]$.

Сведём уравнение второго порядка (2) к системе дифференциальных уравнений, положив $w(x,\mu)=z'_x(x,\mu)$.

$$\begin{cases} \mu x\dfrac{dw}{dx}+2\sqrt{x}R_\mu(x)w+\mu c(x)w+\bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)z-\mu a(x)z=0, \\ \dfrac{dz}{dx}=w, \\ z(0,\mu)=1, \end{cases} \quad x\in(0,b) \tag{4}$$

При этом $w(0,\mu)=\varphi(0,\mu)$. Сделаем в задаче (4) замену неизвестных функций таким образом, чтобы начальные условия стали нулевыми. Пусть

$$z=\hat{z}+1, \quad w=\varphi(x,\mu)+\varphi(x,0)\hat{z}+\hat{w}.$$

Тогда задача (4) будет преобразована к виду

$$\begin{cases} \mu x\dfrac{d\hat{w}}{dx}+\mu x\varphi'_x(x,\mu)+\mu x\varphi'_x(x,0)\hat{z}+\mu x\varphi(x,0)\dfrac{d\hat{z}}{dx}+2\sqrt{x}R_\mu(x)\hat{w}+\mu c(x)\hat{w}+ \\ \qquad +\bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)\hat{z}-\mu a(x)\hat{z}+\hat{z}\varphi(x,0)(2\sqrt{x}R_\mu(x)+\mu c(x))=0, \qquad x\in(0,b) \\ \dfrac{d\hat{z}}{dx}=\varphi(x,\mu)+\varphi(x,0)\hat{z}+\hat{w}, \\ \hat{z}(0,\mu)=\hat{w}(0,\mu)=0. \end{cases}$$

Подставим $d\hat{z}/dx$ из второго уравнения в первое. Введём для удобства следующие обозначения

$$A(x)=-x\frac{\bar{c}(x)}{2}+c(x), \quad B(x)=-x\frac{\bar{c}'(x)}{2}+x\frac{\bar{c}^2(x)}{4}-a(x)-\frac{\bar{c}(x)c(x)}{2},$$
$$D(x)=-\frac{\bar{c}(x)}{2}, \quad \Phi(x,\mu)=-x\varphi'_x(x,\mu)+x\frac{\bar{c}(x)}{2}\varphi(x,\mu).$$

После подстановки получим окончательный вид задачи (4) в новых неизвестных

$$\begin{cases} \mu x\dfrac{d\hat{w}}{dx}+2\sqrt{x}R_\mu(x)\hat{w}+\mu A(x)\hat{w}+\mu B(x)\hat{z}=\mu\Phi(x,\mu), \\ \dfrac{d\hat{z}}{dx}=D(x)\hat{z}+\hat{w}+\varphi(x,\mu), \\ \hat{z}(0,\mu)=\hat{w}(0,\mu)=0. \end{cases} \quad x\in(0,b) \tag{5}$$

Коэффициенты $A(x)$, $B(x)$ и $D(x)$ являются непрерывными на $[0,b]$, при этом $A(x)$ — непрерывно дифференцируемая и $A(0)=c(0)$, функции $\Phi(x,\mu)$, $\varphi(x,\mu)$ — ограниченными в $[0,b]\times[0,\mu_0]$ и интегрируемыми по x при любом $\mu\geqslant 0$.

Сформулируем и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть семейство функций $v_\mu(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$0 \leqslant v_\mu(x) \leqslant A + \varkappa \int\limits_0^x \ln\frac{x}{\xi} v_\mu(\xi)d\xi, \quad x \in [0,b], \tag{6}$$

равномерно по μ; постоянные A, $\varkappa > 0$. Тогда существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от μ и x, что

$$0 \leqslant v_\mu(x) \leqslant C, \quad \forall x \in [0,b],\ \forall \mu.$$

Доказательство. Заменим (6) на более слабое неравенство

$$0 \leqslant v_\mu(x) \leqslant A + \varkappa \int\limits_0^x \ln\frac{b}{\xi} v_\mu(\xi)d\xi, \quad x \in [0,b].$$

Положим

$$V_\mu(x) = \int\limits_0^x \ln\frac{b}{\xi} v_\mu(\xi)d\xi \geqslant 0, \quad V'_\mu(x) = \ln\frac{b}{x} v_\mu(x), \quad V_\mu(0) = 0.$$

$$0 \leqslant \frac{V'_\mu(x)}{\ln(b/x)} \leqslant A + \varkappa V_\mu(x), \tag{7}$$

$$0 \leqslant V'_\mu(x) \leqslant A\ln\frac{b}{x} + \varkappa V_\mu(x)\ln\frac{b}{x}.$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \bar V'(x) = A\ln\dfrac{b}{x} + \varkappa \bar V(x)\ln\dfrac{b}{x}, \\ \bar V(0) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Её решение имеет вид

$$\bar V(x) = \bar V_0(x) \int\limits_0^x \frac{A\ln(b/\xi)}{\bar V_0(\xi)} d\xi, \quad \bar V_0(x) = e^{b\varkappa x}\left(\frac{x}{b}\right)^{-\varkappa x},$$

так как $0 < C_0 \leqslant \bar V_0(x) \leqslant C_1$, то очевидно, что $\bar V(x)$ — ограниченная и положительная функция. Покажем, что $0 \leqslant V_\mu(x) \leqslant \bar V(x)$. Действительно, существует такая функция $\rho_\mu(x)$, что

$$V'_\mu(x) = \rho_\mu(x)\left(A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\ln\frac{b}{x}V_\mu(x)\right), \quad 0 \leqslant \rho_\mu(x) \leqslant 1.$$

Обозначив разность $\bar V(x) - V_\mu(x) = d_\mu(x)$, получим, совмещая последнее уравнение и (8), следующую задачу:

$$\begin{cases} d'_\mu(x) = \bar\rho_\mu(x)\left(A\ln\dfrac{b}{x} + \varkappa\ln\dfrac{b}{x}d_\mu(x)\right), \\ d_\mu(0) = 0. \end{cases}$$

где $0 \leqslant \bar\rho_\mu(x) = 1 - \rho_\mu(x) \leqslant 1$. Последняя задача решается в квадратурах. С учётом свойств коэффициентов уравнения, анализируя полученный интеграл, имеем $d_\mu(x) \geqslant 0$, что равносильно $V_\mu(x) \leqslant \bar V(x) \leqslant \bar C = \mathrm{const}$.

Выразим $V'_\mu(x)$ через $v_\mu(x)$ и подставим данное соотношение и полученную оценку в (7):

$$0 \leqslant \ln\frac{b}{x} v_\mu(x) \leqslant A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\ln\frac{b}{x}\bar C,$$

$$0 \leqslant v_\mu(x) \leqslant A + \varkappa\bar C = C.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \mu x \dfrac{d\hat{w}}{dx} + 2\sqrt{x} R_\mu(x)\hat{w} + \mu A(x)\hat{w} + \mu B(x)\hat{z}(x) = \mu \Phi(x,\mu), \\ \hat{w}(0,\mu) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\hat{z}(x)$ — некоторая ограниченная и интегрируемая на $[0,b]$ функция. Тогда решение (классическое) $\hat{w}(x)$ задачи (9) существует, единственно и для любого $x \in [0,b]$ справедливы оценки:

$$|\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2 \max_{\xi\in[0,x]} |\hat{z}(\xi)|, \quad |\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2 \frac{1}{x}\int\limits_0^x |\hat{z}(\xi)| d\xi, \tag{10}$$

где константы W_1 и W_2 не зависят от x, μ и $\hat{z}(x)$.

Доказательство. **I.** Найдём решение однородного уравнения (9):

$$\mu x \frac{d\overset{\circ}{w}}{dx} + 2\sqrt{x} R_\mu(x) \overset{\circ}{w} + \mu A(x) \overset{\circ}{w} = 0, \quad \frac{d\overset{\circ}{w}}{\overset{\circ}{w}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{x}} R_\mu(x) - \frac{A(x)}{x}\right) dx,$$

$$\overset{\circ}{w}(x) = \exp\left(-\int\limits_b^x \frac{2R_\mu(\xi)}{\mu\sqrt{\xi}} d\xi\right) \exp\left(-\int\limits_b^x \frac{A(\xi)}{\xi} d\xi\right).$$

Введём обозначение

$$P(x,\mu) = -\int\limits_b^x \frac{2R_\mu(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi.$$

Функция $P(x,\mu)$ при каждом фиксированном $\mu > 0$ является непрерывной, монотонно убывающей на $[0,b]$ функцией переменного x.

Разложим $A(x) = c_0 + \bar{A}(x)$. Заметим, что $\bar{A}(x)/x$ является непрерывной функцией на $[0,b]$. Тогда

$$\exp\left(-\int\limits_b^x \frac{A(\xi)}{\xi} d\xi\right) = \exp\left(-\int\limits_b^x \frac{c_0}{\xi} d\xi\right) \exp\left(-\int\limits_b^x \frac{\bar{A}(\xi)}{\xi} d\xi\right) =$$

$$= \exp(c_0 \ln b - c_0 \ln x) \exp\left(-\int\limits_b^x \frac{\bar{A}(\xi)}{\xi} d\xi\right) = x^{-c_0} \hat{A}(x),$$

где

$$0 < C_1 \leqslant \hat{A}(x) = b^{c_0} \exp\left(-\int\limits_b^x \frac{\bar{A}(\xi)}{\xi} d\xi\right) \leqslant C_2.$$

Объединяя оценки воедино, получим

$$C_1 e^{P(x,\mu)/\mu} x^{-c_0} \leqslant \overset{\circ}{w}(x) \leqslant C_2 e^{P(x,\mu)/\mu} x^{-c_0}.$$

II. Методом вариации произвольной постоянной получим решение задачи (9):

$$\hat{w}(x) = \overset{\circ}{w}(x) \int\limits_0^x \frac{\Phi(\xi,\mu) - B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi\, \overset{\circ}{w}(\xi)} d\xi.$$

Для получения равномерной оценки (10) вынесем максимум модуля $\hat{z}(x)$ из интеграла. Положим $M = \max\limits_{\xi\in[0,x],\mu\in[0,\mu_0]}(|\Phi(\xi,\mu)|, |B(\xi)|)$.

$$|\hat{w}(x)| \leqslant \int\limits_0^x \frac{|\Phi(\xi,\mu)| \overset{\circ}{w}(x)}{\xi \overset{\circ}{w}(\xi)} d\xi + \max_{\xi\in[0,x]} |\hat{z}(\xi)| \int\limits_0^x \frac{|B(\xi)| \overset{\circ}{w}(x)}{\xi \overset{\circ}{w}(\xi)} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant M\left(1 + \max_{\xi\in[0,x]} |\hat{z}(\xi)|\right) \int\limits_0^x \frac{C_2 e^{P(x,\mu)/\mu} x^{-c_0}}{\xi C_1 e^{P(\xi,\mu)/\mu} \xi^{-c_0}} d\xi =$$

$$= \frac{MC_2}{C_1}\left(1 + \max_{\xi\in[0,x]} |\hat{z}(\xi)|\right) x^{-c_0} \int\limits_0^x e^{(P(x,\mu)-P(\xi,\mu))/\mu} \xi^{c_0-1} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{MC_2}{C_1}\left(1 + \max_{\xi\in[0,x]} |\hat{z}(\xi)|\right) x^{-c_0} \int\limits_0^x \xi^{c_0-1} d\xi = \frac{MC_2}{C_1 c_0}\left(1 + \max_{\xi\in[0,x]} |\hat{z}(\xi)|\right).$$

Теперь получим интегральную оценку (10). Отметим, что $x \overset{\circ}{w}(x)/\xi \overset{\circ}{w}(\xi) \leqslant C_2/C_1$ при $0 \leqslant \xi \leqslant x$. Обозначим как $\bar{M}$ следующую величину

$$\bar{M} = \max\left(\frac{x \overset{\circ}{w}(x)|B(\xi)|}{\xi \overset{\circ}{w}(\xi)}\right),$$

где максимум берётся по всем $\mu \in [0,\mu_0]$, $x \in [0,b]$, $\xi \in [0,x]$.

Оценим $\hat{w}(x)$ иначе:

$$|\hat{w}(x)| \leqslant \int\limits_0^x \frac{|\Phi(\xi,\mu)| \overset{\circ}{w}(x)}{\xi \overset{\circ}{w}(\xi)} d\xi + \frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{x \overset{\circ}{w}(x)|B(\xi)||\hat{z}(\xi)|}{\xi \overset{\circ}{w}(\xi)} d\xi \leqslant \frac{MC_2}{C_1 c_0} + \bar{M}\frac{1}{x}\int\limits_0^x |\hat{z}(\xi)| d\xi.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{z}}{dx} = D(x)\hat{z} + \hat{w}(x) + \varphi(x,\mu), \\ \hat{z}(0,\mu) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $\hat{w}(x)$ — некоторая ограниченная и интегрируемая на $[0,b]$ функция. Тогда (классическое) решение $\hat{z}(x)$ задачи (11) существует, единственно и для любого $x \in [0,b]$ справедлива оценка

$$|\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2 \int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)| d\xi, \tag{12}$$

где константы Z_1 и Z_2 не зависят от x, μ и выбора $\hat{w}(x)$.

Доказательство. **I.** Аналогично доказательству леммы 2 найдём решение однородного уравнения

$$\frac{d\overset{\circ}{z}}{dx} = D(x)\overset{\circ}{z}, \quad 0 < \bar{Z}_1 \leqslant \overset{\circ}{z}(x) = \exp\left(\int\limits_0^x D(\xi)d\xi\right) \leqslant \bar{Z}_2.$$

II. Решение задачи (11) имеет вид

$$\hat{z}(x) = \overset{\circ}{z}(x) \int\limits_0^x \frac{\hat{w}(\xi) + \varphi(\xi,\mu)}{\overset{\circ}{z}(\xi)} d\xi,$$

применяя полученные оценки $\overset{\circ}{z}(x)$, придём к неравенству

$$|\hat{z}(x)| \leqslant \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1}\left(\max_{\xi\in[0,x],\mu\in[0,\mu_0]}|\varphi(\xi,\mu)| + \int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)|d\xi\right),$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4. *Решение $\{\hat{z}(x),\hat{w}(x)\}$ системы* (5) *равномерно ограничено по $x \in [0,b]$, $\mu \in [0,\mu_0]$, если существует.*

Доказательство. Система (5) является объединением задач (9) и (11). Её решение существует, следовательно, является непрерывным на $[0,b]$ при каждом фиксированном $\mu > 0$. Применяя лемму 2 и второе соотношение (10), а также лемму 3 и соотношение (12), получим

$$|\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2\frac{1}{x}\int\limits_0^x |\hat{z}(\xi)|d\xi. \quad |\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2\int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)|d\xi.$$

Совместим данные неравенства:

$$|\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2\int\limits_0^x \left(W_1 + W_2\frac{1}{\xi}\int\limits_0^\xi |\hat{z}(\zeta)|d\zeta\right)d\xi \leqslant$$

$$\leqslant Z_1 + bZ_2W_1 + Z_2W_2\int\limits_0^x |\hat{z}(\zeta)|\int\limits_\zeta^x \frac{1}{\xi}d\xi d\zeta = Z_1 + bZ_2W_1 + Z_2W_2\int\limits_0^x |\hat{z}(\zeta)|\ln\frac{x}{\zeta}d\zeta.$$

Таким образом, для $|\hat{z}(x)|$ выполнены все условия леммы 1, следовательно, существует такая постоянная $C_1 > 0$, что $|\hat{z}(x)| \leqslant C_1$ равномерно по всем $x \in [0,b]$, $\mu \in [0,\mu_0]$.

Используя первое неравенство (10) леммы 2, оценим $\hat{w}(x)$.

$$|\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2\max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)| \leqslant W_1 + W_2C_1 = C_2.$$

Лемма доказана. □

3. Основная теорема. Сформулируем и докажем теорему о предельном переходе в задаче (2) при $\mu \to 0+0$.

Теорема 1. *Пусть решение задачи* (2) *существует. Тогда найдётся такая постоянная $M > 0$, не зависящая от μ, что $|z(x,\mu)|, |z'_x(x,\mu)| \leqslant M$, $|z''_{xx}(x,\mu)| \leqslant M/\mu x$, $x \in [0,b]$, $\mu \in (0,\mu_0]$. Кроме того, решение $z(x,\mu)$ задачи* (2) *сходится к решению $\bar{z}(x)$ предельной задачи* (3) *при $\mu \to 0+0$ равномерно по $x \in [0,b]$. Для любого $\varepsilon \in (0,b)$ $z'_x(x,\mu)$ сходится к $\bar{z}'(x)$ при $\mu \to 0+0$ равномерно по $x \in [\varepsilon,b]$.*

Доказательство. Из леммы 4 следует равномерная ограниченность $|\hat{z}(x,\mu)|$ и $|\hat{w}(x,\mu)|$.

$$z(x) = \hat{z}(x) + 1, \quad z'(x) = w(x) = \varphi(x,\mu) + \varphi(x,0)\hat{z}(x) + \hat{w}(x),$$

$$z''(x) = w'(x) = -\frac{2\sqrt{x}R_\mu(x)w(x) + \mu c(x)w(x) + \bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)z(x) - \mu a(x)z(x)}{\mu x},$$

из чего, очевидно, следуют оценки теоремы. Кроме того, из этого факта следует предкомпактность множества решений $\{z(x,\mu)\}_{\mu>0}$ в $C[0,b]$, а значит, и $\{\hat{z}(x,\mu)\}_{\mu>0}$.

В доказательстве леммы 2 было получено интегральное выражение для $\hat{w}(x)$:

$$\hat{w}(x) = \overset{\circ}{w}(x)\int\limits_0^x \frac{\Phi(\xi,\mu) - B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi\,\overset{\circ}{w}(\xi)}d\xi = \int\limits_0^x \frac{\overset{\circ}{w}(x)}{\xi\,\overset{\circ}{w}(\xi)}L(\xi,\mu)d\xi,$$

где $|L(x,\mu)| < C_3$ в силу доказанной ограниченности $\hat{z}(x)$.

Применим в данном неравенстве оценки $\overset{\circ}{w}(x)$ сверху и снизу из доказательства леммы 2.

$$|\hat{w}(x)| \leqslant C_3 \int\limits_0^x \frac{C_2 x^{-c_0} \exp(P(x,\mu)/\mu)}{\xi C_1 \xi^{-c_0} \exp(P(\xi,\mu)/\mu)} d\xi \leqslant \frac{C_3 C_2}{C_1} \cdot \frac{1}{x} \int\limits_0^x \frac{x \exp(P(x,\mu)/\mu)}{\xi \exp(P(\xi,\mu)/\mu)} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(\frac{1}{\mu}(P(x,\mu) - P(\xi,\mu))\right) d\xi = \frac{C_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int\limits_\xi^x \frac{2R_\mu(\zeta)}{\sqrt{\zeta}} d\zeta\right) d\xi.$$

При достаточно малых μ имеет место оценка снизу $2R_\mu(x) \geqslant x/b$. Таким образом,

$$|\hat{w}(x)| \leqslant \frac{C_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int\limits_\xi^x \frac{2p\zeta}{b\sqrt{\zeta}} d\zeta\right) d\xi = \frac{2pC_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{2}{3b\mu} \frac{x^3 - \xi^3}{x^{3/2} + \xi^{3/2}}\right) d\xi \leqslant$$

$$= \frac{2pC_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{3b^{5/2}\mu}(x-\xi)(x^2 + x\xi + \xi^2)\right) d\xi \leqslant \frac{2pC_3 C_2}{C_1 \varepsilon} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu} \frac{\varepsilon^2}{3b^{5/2}}(x-\xi)\right) d\xi.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0,b)$ и введём величины $C_4 = \varepsilon^2/3b^{5/2} \geqslant 0$, $C_5 = 2pC_3C_2/C_1\varepsilon \geqslant 0$. Тогда

$$|\hat{w}(x)| \leqslant C_5 \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{C_4}{\mu}(x-\xi)\right) d\xi \leqslant \mu \frac{C_5}{C_4} \exp\left(-\frac{C_4}{\mu} x\right) \exp\left(\frac{C_4}{\mu} x\right) = C\mu \longrightarrow 0,$$

т.е. $\hat{w}(x) \to 0$ равномерно на любом $[\varepsilon, b]$ при $\mu \to 0+0$. Так как $\hat{w}(x)$ равномерно ограничена на $[0,b]$, то она сходится на нём к 0 в среднем.

Выделим из $\{z(x,\mu)\}_{\mu>0}$ произвольную последовательность, имеющую равномерный предел. Пусть $\hat{z}(x,\mu_l) \to \tilde{z}(x)$ при $\mu_l \to 0+0$. Перейдём от задачи (5) к эквивалентной ей системе интегральных уравнений и подставим в неё $\hat{z}(x,\mu_l)$ и $\hat{w}(x,\mu_l)$.

$$\begin{cases} \int\limits_0^x \mu\xi \frac{d\hat{w}}{dx}(\xi) d\xi \equiv \mu x \hat{w}(x) - \int\limits_0^x \mu \hat{w}(\xi) d\xi = \\ \qquad = \int\limits_0^x [\mu\Phi(\xi,\mu) - 2\sqrt{\xi} R_\mu(\xi)\hat{w}(\xi) - \mu A(\xi)\hat{w}(\xi) - \mu B(\xi)\hat{z}(\xi)] d\xi, \\ \hat{z}(x) = \int\limits_0^x [D(\xi)\hat{z}(\xi) + \hat{w}(\xi) + \varphi(\xi,\mu)] d\xi. \end{cases}$$

Данная система допускает предельный переход при $\mu_l \to 0+0$. Первое уравнение обратится в тождество $0 = 0$, из второго будет получено

$$\tilde{z}(x) = \int\limits_0^x [D(\xi)\tilde{z}(\xi) + \varphi(\xi,0)] d\xi. \tag{13}$$

Решение $\tilde{z}(x)$ этого уравнения существует и единственно. Таким образом, множество $\{\hat{z}(x,\mu)\}_{\mu>0}$ имеет единственную в $C[0,b]$ предельную точку $\tilde{z}(x)$, являющуюся решением интегрального уравнения (13). Мы доказали, что при $\mu \to 0+0$ $\hat{z}(x,\mu) \to \tilde{z}(x)$ равномерно на $[0,b]$, для любого $\varepsilon \in (0,b]$ $\hat{w}(x,\mu) \to 0$ равномерно на $[\varepsilon,b]$. Так как $\varphi(x,0) = -\bar{c}(x)/2 = D(x)$, то уравнение (13) примет вид

$$\tilde{z}(x) = -\int\limits_0^x \frac{\bar{c}(x)}{2}(\tilde{z}(\xi) + 1) d\xi.$$

Отметим, что при $\mu \to 0+0$, $z(x,\mu)$ сходится равномерно к $\bar{\bar{z}}(x) = \tilde{z}(x) - 1$. Тогда

$$\bar{\bar{z}}(x) = 1 - \int\limits_0^x \frac{\bar{c}(x)}{2} \bar{\bar{z}}(\xi) d\xi.$$

Дифференцируя это уравнение, получаем для $\bar{\bar{z}}(x)$ задачу (3), т.е. именно решение (3) $\bar{z}(x)$ является равномерным пределом $z(x,\mu)$.

$$z'(x,\mu) = w(x,\mu) = \varphi(x,\mu) + \varphi(x,0)\hat{z}(x,\mu) + \hat{w}(x,\mu) \to \varphi(x,0) \cdot (1 + \tilde{z}(x)) = -\frac{\bar{c}(x)}{2}\bar{z}(x) = \bar{z}'(x),$$

указанная сходимость — равномерная на $[\varepsilon, b]$ для любого $b \geqslant \varepsilon > 0$. Теорема доказана. □

Приведём следствия теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть решение задачи* (1) $y_k(x)$ *существует. Тогда*

$$y_k(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i \sqrt{x})^\alpha} J_\alpha(2\pi k i \sqrt{x}) \left(\exp\left(-\int\limits_0^x \frac{\bar{c}(\xi)}{2} d\xi \right) + \bar{o}(1) \right)$$

при $k \to +\infty$ *равномерно на* $[0,b]$.

Для доказательства достаточно найти решение задачи (3) $\bar{z}(x)$, применить теорему 1 о равномерной сходимости $z(x,\mu)$ к $\bar{z}(x)$ и вернуться к изначальным обозначениям задачи (1).

Теорема 3. *Пусть решение задачи* (1) $y_k(x)$ *существует. Тогда найдутся такие не зависящие от* $x \in [0,b]$ *и* $k > 0$ *постоянные* $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$, *что при достаточно больших* k *имеют место неравенства*

$$0 < C_1 \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k \sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant y_k(x) \leqslant C_2 \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k \sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \tag{14}$$

$$0 < C_1 \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k \sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant y_k'(x) \leqslant C_2 \cdot \frac{k}{\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k \sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \tag{15}$$

$$|y_k''(x)| \leqslant C_2 \cdot \frac{k^2}{x} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k \sqrt{x})^{\alpha+1/2}}. \tag{16}$$

Доказательство. **I.** Воспользуемся разложением $y_k(x) = \bar{y}_k(x) z_k(x)$, где $z_k(x) = z(x, \mu = 1/\pi k)$. При $t \to +\infty$ имеет место следующая асимптотическая формула (см. [2, с. 222]):

$$J_\alpha(it) = \frac{\text{const}}{\sqrt{t}} e^t \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right).$$

Применим её к $\bar{y}_k(x)$. Существуют такие постоянные $A > 0$, $B_1 > 0$ и $B_2 > 0$, что выполнены неравенства

$$0 < B_1 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{(\pi k \sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_2 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{(\pi k \sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad k\sqrt{x} \geqslant A.$$

При $0 \leqslant k\sqrt{x} \leqslant A$ можно выбрать постоянные $B_3 > 0$ и $B_4 > 0$ так, что

$$0 < B_3 \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_4, \quad 0 \leqslant k\sqrt{x} \leqslant A.$$

Совмещая их воедино, имеем

$$0 < B_5 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k \sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_6 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k \sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad B_5, B_6 > 0. \tag{17}$$

Аналогично могут быть оценены производные:

$$\begin{gathered}\bar{y}_k'(x) = -\frac{\pi k i}{\sqrt{x}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha}J_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{x}),\\ 0 < B_5 k\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}_k'(x) \leqslant B_6\frac{k}{\sqrt{x}}\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}},\quad B_5, B_6>0.\end{gathered}\tag{18}$$

$$\begin{gathered}\bar{y}_k''(x) = -\frac{\pi^2 k^2}{x}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha}J_{\alpha+2}(2\pi k i\sqrt{x}),\\ \bar{y}_k''(x) \leqslant B_6\frac{k^2}{x}\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}.\end{gathered}\tag{19}$$

II. В силу теоремы 1

$$z_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \bar{z}(x),$$

где $\bar{z}(x)$ — решение задачи (3). Тогда найдётся достаточно большой номер k_0 и такие постоянные $D_1>0$ и $D_2>0$, что

$$0 < D_1 \leqslant z_k(x) \leqslant D_2,\quad |z_k'(x)| \leqslant D_2,\quad |z_k''(x)| \leqslant D_2\cdot\frac{k}{x}$$

при $k \geqslant k_0$. В совокупности с неравенствами (17) эти оценки дают (14). Далее,

$$y_k'(x) = \bar{y}_k'(x)z_k(x) + \bar{y}_k(x)z_k'(x),$$

В силу неравенств (17) и (18)

$$|y_k'(x)| \leqslant D_2B_6\frac{k}{\sqrt{x}}\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} + D_2B_6\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant C_2\frac{k}{\sqrt{x}}\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}.$$

$$\begin{aligned}|y_k'(x)| &\geqslant D_1B_5k\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} - D_2B_6\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} =\\ &= k\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\left(D_1B_5 - \frac{D_2B_6}{k}\right) \geqslant C_1k\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\end{aligned}$$

при $(D_1B_5 - D_2B_6/k) \geqslant C_1 > 0$, что выполнено при $k \geqslant k_0$. Оценки (15) доказаны. Аналогично, применяя в оценке $y_k''(x)$ неравенства (17), (18) и (19), получим неравенство (16).

$$|y_k''(x)| \leqslant D_2B_6\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\left(\frac{k^2}{x} + \frac{2k}{\sqrt{x}} + \frac{k}{x}\right) \leqslant C_2\frac{k^2}{x}\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}.$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущённых уравнений. — М.: Наука, 1973.
2. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949.
3. *Емельянов Д. П., Ломов И. С.* Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами// Диффер. уравн. — 2019. — *55*, № 1. — С. 45–58.
4. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*, № 2. — С. 181–183.
5. *Келдыш М. В.* Избранные труды. Математика. — М.: Наука, 1985.
6. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию (самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1970.
7. *Ломов И. С.* Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений// Диффер. уравн. — 1993. — *29*, № 12. — С. 1090–1090.

8. *Ломов И. С.* Метод спектрального разделения переменных для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов// Докл. РАН. — 2001. — *376*, № 5. — С. 593–596.
9. *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011.

Емельянов Дмитрий Павлович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: emelianov@cs.msu.ru

Ломов Игорь Сергеевич
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: lomov@cs.msu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 48–60
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-48-60

УДК 517.958

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

© 2022 г. **А. В. КАЛИНИН, А. А. ТЮХТИНА**

Аннотация. Обсуждаются различные постановки математических задач, возникающие при описании глобальной электрической цепи в атмосфере Земли. Рассматриваются начально-краевые задачи для нестационарной системы уравнений Максвелла, системы уравнений Максвелла в нерелятивистском электрическом приближении и для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении, обобщающем нерелятивистские электрическое и магнитное приближения.

Ключевые слова: атмосферное электричество, глобальная электрическая цепь, система уравнений Максвелла, квазистационарное приближение.

SOME MATHEMATICAL PROBLEMS OF ATMOSPHERIC ELECTRICITY

© 2022 **A. V. KALININ, A. A. TYUKHTINA**

Abstract. In this paper, we discuss various formulations of mathematical problems arising in the description of the global electric circuit in the Earth's atmosphere. We consider initial-boundary-value problems for the nonstationary system of Maxwell equations, the system of Maxwell equations in the nonrelativistic electric approximation, and for the system of Maxwell equations in the quasistationary approximation generalizing the nonrelativistic electric and magnetic approximations.

Keywords and phrases: atmospheric electricity, global electric circuit, system of Maxwell equations, quasi-stationary approximation.

AMS Subject Classification: 35Q61

1. Введение. Физические процессы в атмосфере Земли связаны с многочисленными электромагнитными явлениями, которые обусловлены источниками различной природы. Одним из таких явлений, активно обсуждаемым в последнее время, является наличие в атмосфере Земли глобальной электрической цепи, представляющей собой распределенный токовый контур, ограниченный с одной стороны поверхностью Земли, с другой — условной границей атмосферы и ионосферы. В [43, 44] было высказано предположение, что генератором глобальной электрической цепи являются грозовые облака, что впоследствии подтвердилось теоретическими и экспериментальными исследованиями.

Вопросам математического, физического и численного моделирования глобальной электрической цепи в последние несколько десятилетий уделялось большое внимание, что отражено в современной литературе (см. [3, 4, 11, 17–19, 21, 23, 25, 29–33, 37–39, 41, 45, 46]). Впервые адекватная

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

математическая постановка задачи для электрического потенциала, описывающего ГЭЦ, была приведена и исследована в работах [4, 25].

Одна из основных моделей, применяемых при исследовании квазистационарных переходных процессов, использует нерелятивистское электрическое приближение, в котором электрическое поле предполагается потенциальным. Однако это описание не даёт достаточно полной и точной картины изучаемых явлений, что связано с существенной неоднородностью атмосферы. В этом случае требуется уточнение модели, что может быть осуществлено путём учета вихревой составляющей электрического поля в поле проводимости [8]. В настоящей работе устанавливается связь между нерелятивистским электрическим приближением и квазистационарным приближением, предложенным в [8, 9].

Для описания нестационарных электромагнитных процессов используется система уравнений Максвелла [10]

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}(x,t)=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}(x,t)+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}(x,t)}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}(x,t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}(x,t)}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}(x,t)=0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}(x,t)=4\pi\rho(x,t), \tag{4}$$

$(x,t)\in\Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, $T>0$. В линейных средах справедливы материальные соотношения

$$\boldsymbol{D}(x,t)=\varepsilon(x)\boldsymbol{E}(x,t),\quad \boldsymbol{B}(x,t)=\mu(x)\boldsymbol{H}(x,t), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{J}(x,t)=\sigma(x)\boldsymbol{E}(x,t)+\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}(x,t), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}$ — объемная плотность сторонних токов, σ — удельная проводимость. При строгой постановке система уравнений (1)–(6) должна дополняться начальными и граничными условиями, например, задача будет корректна при условиях

$$\boldsymbol{E}(x,t)\times\boldsymbol{\nu}(x)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),$$

где $\boldsymbol{\nu}(x)$ — единичный вектор внешней нормали в точке $x\in\partial\Omega$,

$$\boldsymbol{H}(x,0)=\boldsymbol{h}(x),\quad \boldsymbol{E}(x,0)=\boldsymbol{e}(x),\quad x\in\Omega.$$

Для описания глобальной электрической цепи принципиальное значение имеют квазистационарные приближения [10, 13, 14], в которых предполагается относительная медленность электромагнитных процессов ($\beta=\Delta x/(c\Delta t)\ll 1$, где Δx — характерный пространственный масштаб, Δt — характерный временной масштаб, c — скорость света).

Нерелятивистское магнитное приближение заключается в пренебрежении слагаемым $\partial\boldsymbol{D}/c\partial t$ в уравнении (1) и характерно для медленно протекающих процессов в средах с достаточно высокой проводимостью [10,13,14,24]. Это приближение может рассматриваться в достаточно высоких слоях атмосферы и использоваться для описания целого ряда квазистационарных процессов [38]. В этом случае вместо уравнения (1) рассматривается уравнение

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}(x,t)=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}-\frac{1}{c}\varepsilon(x)\frac{\partial\operatorname{grad}\varphi(x,t)}{\partial t}. \tag{7}$$

Система (7), (2)–(6) может изучаться при граничных и начальных условиях

$$\boldsymbol{E}(x,t)\times\boldsymbol{\nu}(x)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\quad \boldsymbol{H}(x,0)=\boldsymbol{h}(x),\quad x\in\Omega.$$

Различные постановки задач для этого приближения достаточно хорошо исследованы теоретически, аналитически и численно [5–7, 15, 16, 26, 27].

Для описания достаточно медленных процессов в средах с малой проводимостью, в частности, при моделировании электромагнитных процессов в нижних слоях атмосферы [11], используется нерелятивистское электрическое приближение [13]. Формально это приближение заключается в пренебрежении слагаемым $\partial\boldsymbol{B}/c\partial t$ в уравнении (2), что приводит к потенциальности электрического поля в пространственно-односвязных областях:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0.$$

В рамках этого приближения были получены теоретические, аналитические, численные результаты [3, 4, 25].

Характерной особенностью задач атмосферного электричества является существенная неоднородность удельной проводимости σ [11] (удельная проводимость возрастает с высотой по экспоненциальному закону, при этом вблизи поверхности Земли проводимость можно считать изотропной, а на удалении выше 70 км σ становится тензорной величиной). Кроме этого, удельная проводимость существенно зависит от различных физических факторов, таких как температура, химический состав, и может иметь достаточно резкие локальные изменения в окрестности разрядных процессов (молнии, спрайты и др.). В этом случае удельная проводимость резко меняется в горизонтальной плоскости и зависит от времени [21, 33, 45]. Использование нерелятивистских магнитного или электрического приближений не даёт возможности описать атмосферу в целом. Сопоставление моделей, используемых для описания квазистационарных атмосферных явлений, с одной стороны, подчеркивает важность разделения электрического поля на вихревую составляющую (в рамках нерелятивистского магнитного приближения) и потенциальную составляющую (в рамках нерелятивистского электрического приближения). С другой стороны, это сопоставление выявляет необходимость создания обобщенной модели, которая включала бы в себя как частный случай и нерелятивистское магнитное, и нерелятивистское электрическое приближения.

В работах [8, 9] было предложено новое квазистационарное приближение, в котором выделяются потенциальная и вихревая компоненты электрического поля,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \operatorname{div}\varepsilon\boldsymbol{E} = 0, \tag{8}$$

и слагаемое $\partial\boldsymbol{D}/c\partial t$ в (1) заменяется на $-\partial\varepsilon\operatorname{grad}\varphi/c\partial t$. Первое уравнение системы Максвелла в этом приближении принимает вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}(x,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\operatorname{grad}\varphi(x,t)}{\partial t}. \tag{9}$$

Система (9), (2)–(6) в этом случае может дополняться граничными и начальными условиями

$$\boldsymbol{E}(x,t)\times\boldsymbol{\nu}(x) = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \quad \boldsymbol{H}(x,0) = \boldsymbol{h}(x), \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad x\in\Omega.$$

Работы [20, 28, 34, 35] посвящены исследованию задач для данного приближения в предположении, что в системе (1)–(4) объемная плотность тока $\boldsymbol{J}$ и объемная плотность заряда ρ — заданные функции, что формально соответствует случаю непроводящей среды (в (6) $\sigma\equiv 0$). Задача определения электрического и магнитного полей разбивается на независимые друг от друга эллиптические задачи поиска потенциальной составляющей электрического поля $\boldsymbol{E}_L = -\operatorname{grad}\varphi$, магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ и вихревой составляющей электрического поля $\boldsymbol{E}_T = \boldsymbol{E}$. При указанных предположениях получены строгие результаты о корректности задач для линейной системы уравнений Максвелла в рамках данного приближения, называемого приближением Дарвина, и установлена асимптотическая связь между решениями задач, полученных в рамках дарвиновского приближения, и решениями соответствующих задач для исходной нестационарной системы Максвелла при малом значении параметра β. Вопросы иерархии различных квазистационарных приближений обсуждаются в работах [13, 28, 35]. В частности, в [28] отмечается, что рассматриваемое квазистационарное приближение охватывает традиционные нерелятивистское магнитное приближение и нерелятивистское электрическое приближение.

В работе [8] исследовалась корректность начально-краевой задачи для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении (9), (2)–(6) в однородных и неоднородных проводящих средах. Условие неоднородности сред приводит, в отличие от работ [20,28,34,35], к связанной системе дифференциальных уравнений для неизвестных функций $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\operatorname{grad}\varphi$, не сводящейся к классическим задачам математической физики.

Основным результатом настоящей работы являются оценки, характеризующие точность определения магнитных полей и потенциальных составляющих электрических полей в нерелятивистском электрическом приближении и в квазистационарном приближении (9), (2)–(6) в зависимости от двух безразмерных параметров — $\beta = \Delta x/c\Delta t$ и $\gamma = 4\pi\Delta t\sigma^*$, где σ^* — характерное значение удельной проводимости среды. В частности, установлена связь между решениями начально-краевых задач для нестационарной системы уравнений Максвелла, системы уравнений Максвелла в предложенном квазистационарном приближении и системы уравнений Максвелла в нерелятивистском электрическом приближении.

2. Краевые задачи для системы уравнений Максвелла. Пусть область $\Omega \in \mathbb{R}^3$, занимаемая атмосферой, гомеоморфна шаровому слою с липшиц-непрерывной границей Γ, состоящей из двух компонент связности, гомеоморфных сфере в $\mathbb{R}^3$ — Γ_1, соответствующей земной поверхности, и Γ_2. В почти каждой точке $x \in \Gamma$ определен единичный вектор внешней нормали $\boldsymbol{\nu}(x)$.

При моделировании электромагнитных процессов в атмосфере Земли предполагается, что диэлектрическая проницаемость ε и магнитная проницаемость μ атмосферы постоянны и равны 1. С учетом материальных соотношений (5), (6), где $\mu = \varepsilon \equiv 1$ система уравнений Максвелла принимает вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\sigma(x)\boldsymbol{E}(x,t) + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(x,t), \tag{10}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(x,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}(x,t), \tag{11}$$

$(x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$.

Поскольку проводимость Земли значительно выше проводимости нижних слоев атмосферы и проводимость растет по экспоненциальному закону с ростом высоты, можно полагать, что границы области Ω являются идеальными проводниками. Это соответствует заданию однородных граничных условий

$$\boldsymbol{E}(x,t) \times \boldsymbol{\nu}(x) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma \times (0,T). \tag{12}$$

Система (10), (11) рассматривается при начальных условиях

$$\boldsymbol{H}(x,0) = \boldsymbol{h}(x), \quad \boldsymbol{E}(x,0) = \boldsymbol{e}(x). \tag{13}$$

В работе предполагается, что $\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}\colon Q \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{h}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{e}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ — суммируемые с квадратом функции, σ — функция из $L_\infty(\Omega)$, удовлетворяющая условиям

$$\sigma_1 \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma_2, \quad x \in \Omega,$$

σ_1, σ_2 — заданные положительные числа.

Определяются следующие гильбертовы пространства вектор-функций с соответствующими скалярными произведениями [12, 22]:

$$H(\mathrm{div};\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div}\boldsymbol{u} \in L_2(\Omega)\}, \quad K(\mathrm{div};\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0\},$$
$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\mathrm{div}} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{2,\Omega} + (\operatorname{div}\boldsymbol{u}, \operatorname{div}\boldsymbol{v})_{2,\Omega},$$
$$H(\mathrm{rot};\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot}\boldsymbol{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\}, \quad K(\mathrm{rot};\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0\},$$
$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\mathrm{rot}} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{2,\Omega} + (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}, \operatorname{rot}\boldsymbol{v})_{2,\Omega},$$

где через $(\cdot,\cdot)_{2,\Omega}$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ и в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Через $H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $H_0(\mathrm{div};\Omega)$ обозначается замыкание множества пробных вектор-функций соответственно в $H(\mathrm{rot};\Omega)$ и $H(\mathrm{div};\Omega)$, $K_0(\mathrm{rot};\Omega) = K(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$.

Определены операторы следов $\gamma_\nu\colon H(\mathrm{div};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$, $\gamma_\tau\colon H(\mathrm{rot};\Omega) \to \{H^{-1/2}(\Gamma)\}^3$, для функций $\boldsymbol{u} \in \{C^1(\bar{\Omega})\}^3$ $\gamma_\nu\boldsymbol{u}(x) = u_\nu(x) = \boldsymbol{u}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}(x)$ и $\gamma_\tau\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u} - u_\nu\boldsymbol{u}(x)$, $x \in \Gamma$ (см. [12, 22]). Обозначим

$$K(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in K(\mathrm{div};\Omega) : \langle\gamma_\nu\boldsymbol{u}, 1\rangle_{\Gamma_i} = 0,\ i = 1,2\},$$
$$H(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi(x) = \mathrm{const},\ x \in \Gamma_1,\ \psi(x) = 0,\ x \in \Gamma_2\}.$$
$$U_1(\Omega) = H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\Omega), U_2(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega) : \mu\boldsymbol{u} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)\}.$$

Справедливы следующие утверждения (см. [12,22]).

Лемма 1. *Найдётся такая постоянная* $A(\Omega) > 0$*, зависящая только от области* Ω*, что для всех* $\psi \in H(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\|\psi\|_{2,\Omega} \leqslant A(\Omega)\|\operatorname{grad}\psi\|_{2,\Omega}. \tag{14}$$

Из неравенства следует, что $H(\Omega)$ — пространство Гильберта относительно скалярного произведения $(\psi,\varphi)_H = (\operatorname{grad}\psi, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}$.

Лемма 2. *Пространство* $K(\Omega)$ *совпадает с пространством*

$$\operatorname{rot} H(\operatorname{rot};\Omega) = \{\boldsymbol{u} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v} \in H(\operatorname{rot};\Omega)\}.$$

Лемма 3. *Для любой функции* $\boldsymbol{u} \in K(\operatorname{rot};\Omega)$ *найдется такая функция* $p \in H^1(\Omega)$*, что* $\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} p$*. Если* $\boldsymbol{u} \in K_0(\operatorname{rot};\Omega)$*, можно выбрать* $p \in H(\Omega)$*.*

Лемма 4. *Ортогональное дополнение к* $K(\Omega)$ *в* $\{L_2(\Omega)\}^3$ *совпадает с подпространством* $K_0(\operatorname{rot};\Omega)$*.*

Лемма 5. *Найдётся такая постоянная* $C(\Omega) > 0$*, что для всех* $\boldsymbol{u} \in U_i(\Omega)$*,* $i = 1, 2$*, справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}|^2 dx \leqslant C(\Omega) \int\limits_{\Omega} (\operatorname{rot}\boldsymbol{u})^2 dx. \tag{15}$$

Пусть $V(\Omega) = H(\operatorname{rot};\Omega) \times H_0(\operatorname{rot};\Omega)$, $L(\Omega) = \{L_2(\Omega)\}^3 \times \{L_2(\Omega)\}^3$, $A\colon V(\Omega) \to L(\Omega)$ — линейный оператор, определенный соотношением

$$A\Phi = \{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}, -\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\}, \quad \Phi = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \in V(\Omega).$$

Тогда задача (10)–(13) допускает следующую обобщенную постановку: найти такую функцию $\Psi = \{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}\} \in L_2(0,T,L(\Omega))$, что для всех $\Phi = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \in V(\Omega)$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\Psi,\Phi)_L - (\Psi, A\Phi)_L + \frac{4\pi}{c}(\sigma\boldsymbol{E}, \boldsymbol{v})_{2,\Omega} = -\frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{J}^{\text{ext}}, \boldsymbol{v})_{2,\Omega}, \tag{16}$$

$$\Psi(0) = \Psi_0 = \{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{e}\}. \tag{17}$$

Теорема 1. *Для любых* $\Psi_0 \in L(\Omega)$*,* $\boldsymbol{J}^{\text{ext}} \in L_2(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$ *существует единственное решение* $\Psi \in L_2(0,T,L(\Omega))$ *задачи* (16), (17)*. Если* $\Psi_0 \in V(\Omega)$*,* $\boldsymbol{J}^{\text{ext}} \in H^1(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$*, то* $\Psi \in L_2(0,T,V(\Omega))$*,* $\partial/\partial t\Psi \in L_\infty(0,T,L(\Omega))$ *и справедливы соотношения* (10), (11).

Теорема доказывается так же, как [2, гл. VII, теоремы 4.1, 5.1].

Система уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении с учётом материальных соотношений имеет вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}^{\text{ext}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}, \tag{18}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, \tag{19}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0. \tag{20}$$

Система (18)–(20) рассматривается при граничных условиях

$$\boldsymbol{E}(x,t) \times \boldsymbol{\nu}(x) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma \times (0,T), \tag{21}$$

и начальных условиях

$$\boldsymbol{E}(x,0) = \boldsymbol{e}(x), \quad x \in \Omega. \tag{22}$$

Задача (18)–(22) допускает следующую обобщенную постановку: найти такую функцию $\boldsymbol{E} \in L_2(0,T,K_0(\operatorname{rot};\Omega))$, удовлетворяющую условию (22), что для всех $\boldsymbol{v} \in K_0(\operatorname{rot};\Omega)$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})dx + 4\pi\int\limits_{\Omega}(\sigma\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})dx = -4\pi\int\limits_{\Omega}(\boldsymbol{J}^{\text{ext}}\cdot\boldsymbol{v})dx. \tag{23}$$

Теорема 2. *При любых* $\boldsymbol{e} \in K_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} \in L_2(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$ *существует единственное решение задачи* (23), (22). *Существует единственная функция* $\boldsymbol{F} \equiv \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} \in L_2(0,T,K(\Omega))$, *для которой справедливо равенство* (18). *Если* $\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} \in H^1(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$, *то* $\boldsymbol{E} \in C^1(0,T,K_0(\mathrm{rot};\Omega))$, $\boldsymbol{F} \in C(0,T,K(\Omega))$.

Согласно лемме 3 можно определить скалярный электрический потенциал φ соотношением

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Задача (18)–(22) сводится к задаче определения функции φ, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi + 4\pi\,\mathrm{div}(\sigma\,\mathrm{grad}\,\varphi) = 4\pi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}, \tag{24}$$

граничным условиям

$$\int\limits_{\Gamma_1}\left(\left(\mathrm{grad}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 4\pi\sigma\,\mathrm{grad}\,\varphi\right)\cdot\boldsymbol{\nu}\right)d\gamma = 4\pi\int\limits_{\Gamma_1}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}\cdot\boldsymbol{\nu})d\gamma, \tag{25}$$

$$\varphi(x,t) = -U(t), \quad (x,t)\in\Gamma_1\times(0,T), \quad \varphi(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\Gamma_2\times(0,T) \tag{26}$$

и начальному условию

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad x\in\Omega. \tag{27}$$

Уравнение (24) называется уравнением глобальной электрической цепи. В исследованиях глобальной электрической цепи разность потенциалов $U(t)$ между поверхностью Земли и нижней ионосферой называется ионосферным потенциалом.

Задача (24)–(27) допускает следующую обобщенную постановку: найти функцию $\varphi \in H^1(0,T,H(\Omega))$, удовлетворяющую равенству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi)dx + 4\pi\int\limits_{\Omega}\sigma(\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi)dx = 4\pi\int\limits_{\Omega}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}\cdot\mathrm{grad}\,\psi)dx \tag{28}$$

для всех $\psi\in H(\Omega)$ и начальному условию (27).

Теорема 3. *Существует единственное решение задачи* (28), (27). *Если*

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} \in H^1(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3),$$

то $\varphi \in C^1(0,T,H(\Omega))$.

Уравнение (24) не разрешено относительно производной по времени и не относится к классическим задачам математической физики. Уравнения такого вида называются уравнениями Соболева (уравнениями соболевского типа) или псевдопараболическими уравнениями. В работе [25] рассмотрены различные задачи для уравнения (29) с различными типами граничных условий, естественно возникающих при моделировании взаимодействия атмосферы и ионосферы.

В работах [8, 9] было предложено новое квазистационарное приближение для системы уравнений Максвелла, обобщающее классические нерелятивистские магнитное и электрическое приближения.

Согласно леммам 4, 3 можно положить

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}(t) - \mathrm{grad}\,\varphi(t), \quad \boldsymbol{E}(t)\in K(\Omega), \quad \mathrm{grad}\,\varphi(t)\in K_0(\mathrm{rot};\Omega), \quad t\in 0,T.$$

Система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении принимает с учетом материальных соотношений вид

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{grad}\,\varphi, \tag{29}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}. \tag{30}$$

Система (29), (30) рассматривается при граничных условиях

$$\boldsymbol{E}(x,t)\times\boldsymbol{\nu}(x) = 0, \quad (x,t)\in\Gamma\times(0,T) \tag{31}$$

и начальных условиях

$$\boldsymbol{H}(x,0)=\boldsymbol{h}(x),\quad \operatorname{grad}\varphi(x,0)=\operatorname{grad}\varphi_0(x). \tag{32}$$

Обозначим $V_0(\Omega)=H(\mathrm{rot};\Omega)\times K_0(\mathrm{rot};\Omega)$. Задача (29)–(32) допускает следующую обобщенную постановку: найти такие $\Psi=\{\boldsymbol{H},\operatorname{grad}\varphi\}\in L_2(0,T,V_0(\Omega))$ и $\boldsymbol{E}\in L_2(0,T,U_1(\Omega))$, что для всех $\Phi=\{\boldsymbol{u},\operatorname{grad}\psi\}\in V_0(\Omega)$, $\boldsymbol{v}\in U_1(\Omega)$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\Psi,\Phi)_L+(\boldsymbol{\mathcal{E}},\operatorname{rot}\boldsymbol{u})_{2,\Omega}-\frac{4\pi}{c}(\sigma\boldsymbol{\mathcal{E}},\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}+\frac{4\pi}{c}(\sigma\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}=$$
$$=\frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}},\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}, \tag{33}$$

$$(\sigma\boldsymbol{E},\boldsymbol{v})_{2,\Omega}-(\sigma\operatorname{grad}\varphi,\boldsymbol{v})_{2,\Omega}-\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{H},\operatorname{rot}\boldsymbol{v})_{2,\Omega}=-(\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}},\boldsymbol{v})_{2,\Omega}, \tag{34}$$

$$\Psi(0)=\Psi_0=\{\boldsymbol{h},\operatorname{grad}\varphi_0\}. \tag{35}$$

Справедлива следующая теорема, доказанная в [8].

Теорема 4. *Для любых* $\Psi_0\in V_0(\Omega)$, $\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}\in H^1(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$ *существует единственное решение задачи* (33), (34), (35). *При этом* $\Psi\in L_\infty(0,T,L(\Omega))$, $\partial/\partial t\Psi\in L_2(0,T,L(\Omega))$ *и справедливы соотношения* (29), (30). *Если*

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=-\frac{4\pi}{c}\sigma\operatorname{grad}\varphi_0+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}(0), \tag{36}$$

то $\partial/\partial t\Psi\in L_\infty(0,T,L(\Omega))$, $\boldsymbol{E}\in C(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$.

3. Сравнение решений начально-краевых задач. Пусть выполняются условия $\boldsymbol{h}\in U_2(\Omega)$, $\boldsymbol{e}\in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\in H^1(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$, а также условие согласования начальных данных

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=\frac{4\pi}{c}\sigma\boldsymbol{e}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}(0),\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{e}=0. \tag{37}$$

Для сравнения близости решения задачи для квазистационарного приближения к решениям соответствующих задач для нестационарной системы уравнений Максвелла и системы уравнений Максвелла в нерелятивистском электрическом приближении осуществим переход к безразмерным величинам. Пусть Δx — характерный пространственный масштаб, Δt — характерный временной масштаб, σ^* — характерное значение удельной проводимости, ρ^* — характерное значение объёмной плотности зарядов. Заменим переменную x на $\Delta x\cdot x'$, t на $\Delta t\cdot t'$. Положим $\sigma=\sigma^*\sigma_0$, $\sigma_{01}\leqslant\sigma_0(x')\leqslant\sigma_{02}$, и обозначим

$$\gamma=4\pi\Delta t\sigma^*,\quad \beta=\frac{\Delta x}{c\Delta t},\quad \kappa=4\pi\Delta x\rho^*,\quad \boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}=\sigma^*\sigma_0\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}.$$

Система уравнений Максвелла (10), (11) принимает вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\gamma\beta\sigma_0\boldsymbol{E}+\gamma\beta\sigma_0\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}+\beta\frac{\partial}{\partial t'}\varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{38}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\beta\frac{\partial}{\partial t'}\boldsymbol{H}, \tag{39}$$

где $(x',t')\in Q'=\Omega'\times(0,T')$. Далее будем опускать штрихи при безразмерных переменных и областях их определения.

Система (38), (39) рассматривается при граничных условиях

$$\boldsymbol{E}(x,t)\times\boldsymbol{\nu}(x)=0,\quad (x,t)\in\Gamma\times(0,T), \tag{40}$$

соответствующих (12), и начальных условиях

$$\boldsymbol{H}(x,0)=\boldsymbol{h}(x),\quad \boldsymbol{E}(x,0)=\boldsymbol{e}(x). \tag{41}$$

Задача (18)–(20) в безразмерных единицах может быть записана с использованием электрического потенциала в виде

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=-\beta\gamma\sigma_0\operatorname{grad}\varphi+\beta\gamma\sigma_0\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}-\beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi, \tag{42}$$

$$\operatorname{grad}\varphi(x,t)\times\boldsymbol{\nu}(x)=0,\quad (x,t)\in\Gamma\times(0,T), \tag{43}$$

$$\operatorname{grad}\varphi(x,0)=\operatorname{grad}\varphi_0(x),\quad x\in\Omega. \tag{44}$$

Задача (29)–(32) для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении имеет вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\beta\gamma\sigma_0\boldsymbol{E}+\beta\gamma\sigma_0\boldsymbol{E}^{\text{ext}}-\beta\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\operatorname{grad}\varphi, \tag{45}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\beta\frac{\partial}{\partial t}\mu\boldsymbol{H}. \tag{46}$$

$$\boldsymbol{E}(x,t)\times\boldsymbol{\nu}(x)=0,\quad (x,t)\in\Gamma\times(0,T), \tag{47}$$

$$\boldsymbol{H}(x,0)=\boldsymbol{h}(x),\quad \operatorname{grad}\varphi(x,0)=\operatorname{grad}\varphi_0(x). \tag{48}$$

Условие (37) в безразмерных величинах — это условие

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=\beta\gamma\sigma_0(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{E}^{\text{ext}}(0)),\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{e}=0. \tag{49}$$

Пусть $\{\boldsymbol{H}^n,\boldsymbol{E}^n\}\in L_2(0,T,V(\Omega))$ — решение задачи (38)–(41),

$$\boldsymbol{E}^n=\boldsymbol{E}^n-\operatorname{grad}\varphi^n,$$

где $\boldsymbol{E}^n\in L_2(0,T,U_1(\Omega))$, $\operatorname{grad}\varphi^n\in L_2(0,T,H_0(\mathrm{rot};\Omega))$. Обозначим через $\{\boldsymbol{H}^q,\operatorname{grad}\varphi^q\}\in L_2(0,T,V_0(\Omega))$, $\boldsymbol{E}^q\in L_2(0,T,U_1(\Omega))$ решение задачи (45)–(48), где $-\operatorname{grad}\varphi_0=\boldsymbol{e}$, через $\operatorname{grad}\varphi^e$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^e$ — решение задачи (42)–(22). Пусть

$$\kappa\rho^n=-\Delta\varphi^n\in L_2(0,T,H^{-1}(\Omega)),$$
$$\kappa\rho^q=-\Delta\varphi^q\in L_2(0,T,H^{-1}(\Omega)),$$
$$\kappa\rho^e=-\Delta\varphi^e\in L_2(0,T,H^{-1}(\Omega)).$$

Лемма 6. *Имеют место оценки*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^n\right\|_{2,Q}\leqslant\frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}T))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{50}$$

$$\|\boldsymbol{E}^n\|_{2,Q}\leqslant T\frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}T))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{51}$$

$$\|\boldsymbol{E}^q\|_{2,Q}\leqslant\sqrt{2}\gamma\beta^2\sigma_{02}C(\Omega)\left(\frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}+1\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{52}$$

где $C(\Omega)$ — постоянная из неравенства (15).

Неравенства (50), (52) получены в [8], оценка (51) следует из (50), поскольку $\boldsymbol{E}^n(0)=0$ при выполнении (49).

Теорема 5. *Справедливы неравенства*

$$\|\operatorname{grad}\varphi^n-\operatorname{grad}\varphi^q\|_{2,Q}\leqslant C_1\frac{(1-\exp(-a\gamma))^2}{\gamma}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{53}$$

$$\kappa\|\rho^n-\rho^q\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant C_1\frac{(1-\exp(-a\gamma))^2}{\gamma}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{54}$$

$$\|\boldsymbol{E}^n-\boldsymbol{E}^q\|_{2,Q}\leqslant C_2\frac{1}{\gamma}(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{55}$$

$$\|\boldsymbol{H}^n-\boldsymbol{H}^q\|_{L_\infty(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)}\leqslant C_3\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{56}$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi^q-\operatorname{grad}\varphi^e\|_{2,Q}\leqslant C_4\gamma\beta^2(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{57}$$

$$\kappa\|\rho^q-\rho^e\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant C_4\gamma\beta^2(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q},\tag{58}$$

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^q-\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^e\|_{2,Q}\leqslant C_5\beta^3\gamma^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q},\tag{59}$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi^n-\operatorname{grad}\varphi^e\|_{2,Q}\leqslant C_6(1-\exp(-a\gamma))^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q},\tag{60}$$

$$\kappa\|\rho^q-\rho^e\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant C_6(1-\exp(-a\gamma))^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q},\tag{61}$$

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^n-\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^e\|_{2,Q}\leqslant C_7\beta(1+C_8\gamma^2)^{1/2}(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q},\tag{62}$$

где $a=T\sigma_{01}$, постоянные C_1–C_8 не зависят от β, γ.

Доказательство. Неравенства (53)–(56) установлены в [8]. Докажем (57). Положим

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^q-\boldsymbol{H}^e,\quad \operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}\varphi^q-\operatorname{grad}\varphi^e.$$

Тогда $\operatorname{grad}\varphi(0)=0$,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\beta\gamma\sigma_0(\boldsymbol{E}^q-\operatorname{grad}\varphi)-\beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi.\tag{63}$$

Умножая (63) скалярно на $\operatorname{grad}\varphi$, получаем

$$0=2\gamma(\sigma_0\boldsymbol{E}^q,\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}-2\gamma(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}-\frac{d}{dt}\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega},$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega}+2\gamma\sigma_{01}\int\limits_0^t\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega}dt\leqslant 2\gamma\sigma_{02}\|\boldsymbol{E}^q\|_{2,Q}\left\{\int\limits_0^t\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega}dt\right\}^{1/2},$$

$$\int\limits_0^t\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega}dt\leqslant\frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}t))^2\|\boldsymbol{E}^q\|^2_{2,Q},$$

откуда с учетом (52) следует (57). Пусть $\rho=\rho^q-\rho^e$. Для всех $\psi\in H^1_0(\Omega)$ и почти всех $t\in(0,T)$

$$\kappa\langle\rho,\psi\rangle=\int\limits_\Omega(\operatorname{grad}\varphi(t)\cdot\operatorname{grad}\psi)dx.$$

Таким образом,

$$\kappa\|\rho\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,Q}.$$

Из (63) далее получаем

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\|^2_{2,\Omega}=\beta\gamma(\sigma_0(\boldsymbol{E}^q-\operatorname{grad}\varphi),\operatorname{rot}\boldsymbol{H})_{2,\Omega},$$

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\|^2_{2,Q}\leqslant\beta^2\gamma^2\sigma_{02}^2\|\boldsymbol{E}^q-\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,Q}\leqslant\beta^2\gamma^2\sigma_{02}^2\left(\|\boldsymbol{E}^q\|^2_{2,Q}+\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,Q}\right),$$

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\|^2_{2,Q}\leqslant\beta^2\gamma^2\sigma_{02}^2\left(1+\min\{1,\gamma^2\sigma_{01}^2T^2\}\frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2}\right)\|\boldsymbol{E}^q\|^2_{2,Q}.$$

Следовательно, справедлива оценка (59).

Теперь положим

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^n-\boldsymbol{H}^e,\quad \operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}\varphi^n-\operatorname{grad}\varphi^e.$$

Тогда $\operatorname{grad}\varphi(0)=0$,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\beta\gamma\sigma_0(\boldsymbol{E}^n-\operatorname{grad}\varphi)-\beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi+\beta\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^n.\tag{64}$$

Умножим (64) скалярно на $\operatorname{grad}\varphi$, получим

$$0 = \gamma(\sigma_0 \boldsymbol{E}^n, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega} - \gamma(\sigma_0 \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega},$$

откуда вытекает неравенство

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,Q} \leqslant \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}T))\|\boldsymbol{E}^n\|_{2,Q}$$

и, следовательно, справедливы оценки (60), (61).

Умножая скалярно (64) на $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$, получаем

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\|^2_{2,Q} \leqslant 2\beta^2\gamma^2\sigma_{02}^2\|\boldsymbol{E}^q - \operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,Q} + 2\beta^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^n\right\|^2_{2,Q} \leqslant$$
$$\leqslant \beta^2\left(\gamma^2\sigma_{02}^2\left(1+\frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2}\right)T^2+1\right)\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^n\right\|^2_{2,Q},$$

т.е. справедливо неравенство (62). □

В случае однородной среды, т.е. если $\sigma = \mathrm{const}$ и, соответственно, $\sigma_0 \equiv 1$, из уравнения (42) методом ортогонального проектирования получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi + \gamma\operatorname{grad}\varphi = \gamma\operatorname{grad}\psi^{\mathrm{ext}}, \tag{65}$$

где $\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}} + \operatorname{grad}\psi^{\mathrm{ext}}$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}} \in L_2(0,T,K(\Omega))$, $\operatorname{grad}\psi^{\mathrm{ext}} \in L_2(0,T,K_0(\mathrm{rot};\Omega))$.

Начально-краевая задача (38)–(41) для нестационарной системы уравнений Максвелла разбивается на задачу (65), (43), (22) определения функции $\operatorname{grad}\varphi$ и задачу определения таких функций $\boldsymbol{H} \in L_2(0,T,H(\mathrm{rot};\Omega))$, $\boldsymbol{E} \in L_2(0,T,H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap K(\Omega))$, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \beta\gamma\boldsymbol{E} + \beta\gamma\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}} + \beta\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E},$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H},$$
$$\boldsymbol{H}(0) = \boldsymbol{h}, \boldsymbol{E}(0) = 0.$$

Начально-краевая задача (45)–(48) для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении разбивается на задачу (65), (22) определения функции $\operatorname{grad}\varphi \in L_2(0,T,K_0(\mathrm{rot};\Omega))$ и задачу определения таких функций $\boldsymbol{H} \in L_2(0,T,H(\mathrm{rot};\Omega))$, $\boldsymbol{E} \in L_2(0,T,H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap K(\Omega))$, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \beta\gamma\boldsymbol{E} + \beta\gamma\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}},$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H},$$
$$\boldsymbol{H}(0) = \boldsymbol{h}.$$

Таким образом, если среда однородная,

$$\operatorname{grad}\varphi^n = \operatorname{grad}\varphi^q = \operatorname{grad}\varphi^e, \quad \rho^n = \rho^q = \rho^e.$$

Предположим, что в случае неоднородной среды $\operatorname{grad}\sigma_0 \in \{L_\infty(\Omega)\}^3$. Получим оценки близости потенциальных компонент электрического поля в различных приближениях в зависимости от степени неоднородности среды, характеризуемой величиной $\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}$.

Теорема 6. *Справедливы неравенства*

$$\|\operatorname{grad}\varphi^n - \operatorname{grad}\varphi^q\|_{2,Q} \leqslant C_9\frac{(1-\exp(-a\gamma))^2}{\gamma}\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{66}$$

$$\kappa\|\rho^n - \rho^q\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \leqslant C_9\frac{(1-\exp(-a\gamma))^2}{\gamma}\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{67}$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi^n - \operatorname{grad}\varphi^e\|_{2,Q} \leqslant C_{10}(1-\exp(-a\gamma)^2\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{68}$$

$$\kappa\|\rho^n-\rho^e\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant C_{10}(1-\exp(-a\gamma))^2\|\operatorname{grad}(\sigma_0)\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{69}$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi^q-\operatorname{grad}\varphi^e\|_{2,Q}\leqslant C_{11}\beta^2\gamma(1-\exp(-a\gamma))\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{70}$$

$$\kappa\|\rho^q-\rho^e\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant C_{11}\beta^2\gamma(1-\exp(-a\gamma))^2\|\operatorname{grad}(\sigma_0)\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{71}$$

где $a=T\sigma_{01}$, положительные постоянные C_6–C_{11} не зависят от β, γ.

Доказательство. Обозначим $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^n-\boldsymbol{H}^q$, $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^n-\boldsymbol{E}^q=\boldsymbol{E}-\operatorname{grad}\varphi$, $\rho=\rho^n-\rho^q$. Тогда $\operatorname{grad}\varphi(0)=0$,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\beta\gamma\sigma_0\boldsymbol{E}+\beta\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}^n-\operatorname{grad}\varphi). \tag{72}$$

Умножая (72) скалярно на $\operatorname{grad}\varphi$, получаем

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2+2\gamma\int\limits_0^t(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}dt=2\gamma\int\limits_0^t(\sigma_0\boldsymbol{E},\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}dt.$$

Так как

$$(\sigma_0\boldsymbol{E},\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}=-(\varphi\operatorname{grad}\sigma_0,\boldsymbol{E})_{2,\Omega},$$

применяя неравенство (14), имеем

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2+2\gamma\sigma_{01}\int\limits_0^t\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant 2\gamma A(\Omega)\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}\int\limits_0^t\|\boldsymbol{E}\|_{2,\Omega}\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}dt,$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,Q}\leqslant\frac{A(\Omega)}{\sigma_{01}}\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}T))\|\boldsymbol{E}\|_{2,Q}.$$

Из (55) получаем (66). Так как $\kappa\langle\rho,\psi\rangle=(\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}$ для всех $\psi\in H_0^1(\Omega)$, (67) следует из (66).

Положим $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^n-\boldsymbol{H}^e$, $\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}\varphi^n-\operatorname{grad}\varphi^e$. Действуя, как при доказательстве теоремы 5, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2+\gamma\sigma_{01}\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2\leqslant\gamma|(\sigma_0\boldsymbol{E}^n,\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}|,$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2+2\gamma\sigma_{01}\int\limits_0^t\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant 2\gamma A(\Omega)\|\operatorname{grad}(\sigma_0)\|_{\infty,\Omega}\int\limits_0^t\|\boldsymbol{E}^n\|_{2,\Omega}\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}dt,$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,Q}\leqslant\frac{A(\Omega)}{\sigma_{01}}\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}T))\|\boldsymbol{E}^n\|_{2,Q}.$$

Применяя (51), получаем оценки (68), (67).

Неравенства (70), (71) устанавливаются аналогично. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галанин М. П., Попов Ю. П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. — М.: Физматлит, 1995.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.
3. *Жидков А. А., Калинин А. В. Корректность одной математической задачи атмосферного электричества* Вестн. ННГУ им. Н. И. Лобачевского. — 2009. — № 4. — С. 123–129.

4. *Калинин А. В., Слюняев Н. Н., Мареев Е. А., Жидков А. А.* Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация// Изв. РАН. Физ. атмосф. океана. — 2014. — *50*, № 3. — С. 355–364.
5. *Калинин А. В., Сумин М. И., Тюхтина А. А.* Устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 5. — С. 608–624.
6. *Калинин А. В., Сумин М. И., Тюхтина А. А.* Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 2. — С. 18–40.
7. *Калинин А. В., Тюхтина А. А.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2016. — *18*, № 4. — С. 119–133.
8. *Калинин А. В., Тюхтина А. А.* Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — *60*, № 8. — С. 1408–1421.
9. *Калинин А. В., Тюхтина А. А., Лаврова С. Р.* Неклассические задачи в моделях глобальной электрической цепи// Тр. Междунар. конф. «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики». Марчуковские научные чтения–2019 (Новосибирск, 1-5 июля 2019 г.). — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2019. — С. 203–209.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
11. *Мареев Е. А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи// Усп. физ. наук. — 2010. — *180*, № 5. — С. 527–534.
12. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.
13. *Толмачев В. В., Головин А. М., Потапов В. С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1988.
14. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989.
15. *Alonso Rodriguez A., Valli A.* Eddy Current Approximation of Maxwell Equations. Theory, Algorithms, and Applications. — Milan: Spriner-Verlag, 2010.
16. *Ammari H., Buffa A., Nedelec J.-C.* A justification of eddy currents model for the Maxwell equations// SIAM J. Appl. Math. — 2000. — *60*, № 5. — P. 1805–1823.
17. *Анисимов С. В., Мареев Е. А.* Геофизические исследования глобальной электрической цепи// Физика Земли. — 2008. — № 10. — С. 8–18.
18. *Bayona V., Flyer N., Lucas G. M., Baumgaertner A. J. G.* A 3-D RBF-FD solver for modeling the atmospheric global electric circuit with topography (GEC-RBFFD v1.0)// Geosci. Model Dev. — 2015. — *8*, № 10. — P. 3007–3020.
19. *Boström R., Fahleson U.* Vertical propagation of time-dependent electric fields in the atmosphere and ionosphere// in: Electrical Processes in Atmospheres (*Dolezalek H., Reiter R.*, eds.). — Steinkopff, 1977. — P. 529-535..
20. *Degond P., Raviart P.-A.* An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations// Forum Math. — 1992. — *4*. — P. 13–44.
21. *Evtushenko A., Kuterin F., Svechnikova E.* A plasmachemical axially symmetric self-consistent model of daytime sprite// Atmos. Chem. Phys. — 2020..
22. *Girault V., Raviart P.* Finite element methods for Navier–Stokes equations. — N.Y.: Springler-Verlag, 1986.
23. *Jansky J., Pasko V. P.* Charge balance and ionospheric potential dynamics in timedependent global electric circuit model// J. Geophys. Res. Space Phys. — 2014. — *229*, № 12. — P. 10184–10203.
24. *Kawashima S., Shizuta Y.* Magnetohydrodynamic approximation of the complete equations for an electromagnetic fluid, II// Proc. Jpn. Acad. Ser. A. — 1986. — *62*, № 5. — P. 181–184.
25. *Kalinin A. V., Slyunyaev N. N.* Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit// J. Math. Anal. Appl. — 2017. — *450*, № 1. — P. 112–136.
26. *Kalinin A. V., Tyukhtina A. A.* L_p-estimates for scalar products of vector fields and their application to electromagnetic theory problems// Math. Meth. Appl. Sci. — 2018. — *41*, № 18. — P. 9283–9292.
27. *Kolmbauer M.* Existence and Uniqueness of Eddy Current Problems in Bounded and Unbounded Domains. — Linz, Austria: Inst. Comput. Math. J. Kepler Univ., 2011.

28. *Larsson J.* Electromagnetics from a quasistatic perspective// Am. J. Phys. — 2007. — *75*, № 3. — P. 230–239.
29. *Liu C., Williams E. R., Zipser E. J., Burns G. Diurnal variation of global thunderstorms and electrified shower clouds and their contribution to the global electrical circuit* J. Atmos. Sci. — 2010. — *67*, № 2. — P. 309–323.
30. *Mach D. M., Blakeslee R. J., Bateman M. G.* Global electric circuit implications of combined aircraft storm electric current measurements and satellite-based diurnal lightning statistics// J. Geophys. Res. — 2011. — *116*, № D5. — D05201.
31. *Mareev E. A., Yashunin S. A., Davydenko S. S., et al.* On the role of transient currents in the global electric circuit// Geophys. Res. Lett. — 2008. — *35*, № 15. — L15810.
32. *Markson R. The global circuit intensity: its measurement and variation over the last 50 years* Bull. Am. Meteor. Soc. — 2007. — *88*, № 2. — P. 223–241.
33. *Pasko V. P., Inan U. S., Bell T. F., Taranenko Y. N.* Sprites produced by quasi-electrostatic heating and ionization in the lower ionosphere// J. Geophys. Res. — 1997. — *102*, № A3. — P. 4529–4561.
34. *Raviart P.-A., Sonnendrücker E.* Approximate models for the Maxwell equations// J. Comput. Appl. Math. — 1994. — *63.* — P. 69–81.
35. *Raviart P.-A., Sonnendrücker E.* A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations// Numer. Math. — 1996. — *73.* — P. 329–372.
36. *Rycroft M. J., Harrison R. G., Nicoll K. A., Mareev E. A.* An overview of Earth's global electric circuit and atmospheric conductivity// Space Sci. Rev. — 2008. — *137*, № 1-4. — P. 83–105.
37. *Rycroft M. J., Harrison R. G.* Electromagnetic atmosphere plasma coupling: the global atmospheric electric circuit// Space Sci. Rev. — 2011. — *168*, № 1-4. — P. 363–384.
38. *Shalimov S. L., Bösinger T.* An alternative explanation for the ultra-slow tail of sprite-associated lightning discharges// J. Atm. Solar-Terrestr. Phys. — 2006. — *68.* — P. 814–820.
39. *Tinsley B. A.* The global atmospheric electric circuit and its effects on cloud microphysics// Rep. Progr. Phys. — 2008. — *71*, № 6. — 066801.
40. *Weitzner H., Lawson W. S.* Boundary conditions for the Darwin model// Phys. Fluids B. — 1989. — *l.* — P. 1953–1957.
41. *Williams E. R.* The global electrical circuit: a review// Atmos. Res. — 2009. — *91*, № 2-4. — P. 140–152.
42. *Williams E., Mareev E.* Recent progress on the global electrical circuit// Atmos. Res. — 2014. — *135–136.* — P. 208–227.
43. *Wilson T. R.* Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms// Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1921. — *221.* — P. 73–115.
44. *Wilson T. R.* The electric field of a thundercloud and some of its effects// Proc. Phys. Soc. London. — 1924. — *37.* — P. 32D–37D.
45. *Yashunin S. A., Mareev E. A., Rakov V. A.* Are lightning M components capable of initiating sprites and sprite halos?// J. Geophys. Res. — 2007. — *112.* — D10109.
46. *Zhou L., Tinsley B. A.* Global circuit model with clouds// J. Atmos. Sci. — 2010. — *67*, № 4. — P. 1143–1156.

Калинин Алексей Вячеславович
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского;
Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород
E-mail: `avk@mm.unn.ru`

Тюхтина Алла Александровна
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
E-mail: `kalinmm@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 61–67
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-61-67

УДК 517.521.5, 517.521.8

РАВНОСХОДИМОСТЬ И РАВНОСУММИРУЕМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ КРАТНОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО РЯДА ПРИ РАЗНЫХ ВИДАХ СХОДИМОСТИ

© 2022 г. **Б. В. КОНОПЛЕВ**

Аннотация. Работа посвящена получению коэффициентных условий, обеспечивающих равносходимость и чезаровскую равносуммируемость почти всюду кратного ортогонального ряда при его суммировании по двум различным системам вложенных множеств, покрывающих целочисленную решётку арифметического пространства.

***Ключевые слова*:** кратный ортогональный ряд, частичная сумма, среднее Чезаро, сходимость почти всюду, суммируемость почти всюду, звёздное тело, гомотетия, кратный тригонометрический ряд.

EQUICONVERGENCE AND EQUISUMMABILITY ALMOST EVERYWHERE OF A MULTIPLE ORTHOGONAL SERIES FOR VARIOUS TYPES OF CONVERGENCE

© 2022 **B. V. KONOPLEV**

Abstract. In this paper, we obtain coefficient conditions that guarantee the equiconvergence and Cesaro equisummability almost everywhere of a multiple orthogonal series summed over two different systems of nested sets covering an integer lattice of the arithmetic space.

***Keywords and phrases*:** multiple orthogonal series, partial sum, Cesaro mean, convergence almost everywhere, summability almost everywhere, star body, homothety, multiple trigonomrtric series.

***AMS Subject Classification*:** 35L20, 35P10

1. Основные понятия. Пусть $\varphi_n(x)$, где $n = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$, — система комплекснозначных функций, ортонормированная в пространстве Лебега $L^2_\mu(\Omega)$ над измеримым пространством (Ω, Σ, μ) со счётно-аддитивной мерой μ:

$$\int\limits_\Omega \varphi_n(x)\overline{\varphi_{n'}(x)}d\mu = \prod_{j=1}^m \delta_{n_j n'_j},$$

где $\delta_{n_j n'_j}$ — символы Кронекера соответствующих координат мультииндексов n и n'. Рассмотрим m-кратный ортогональный ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} a_n \varphi_n(x), \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами. Частным случаем ряда (1) является кратный тригонометрический ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} c_n e^{inx}, \quad nx = \sum_{j=1}^{m} n_j x_j, \tag{2}$$

на m-мерном торе $T_m = [0, 2\pi)^m$ с мерой Лебега.

Существует много различных способов определения частичных сумм ряда (1). Остановимся на следующем.

Определение 1. Назовём систему ограниченных и связных в $\mathbb{R}^m$ множеств $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ суммирующей, если

$$D_0 \neq \varnothing, \quad D_N \subset D_{N+1}, \quad \mathbb{Z}^m \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} D_N.$$

Из соображений «правильности» суммирования потребуем, чтобы начало координат $O \in D_0$, и D_1 содержало точки ± 1 на координатных осях.

Под частичными суммами ряда (1) по системе $\{D_N^{\infty}\}_{N=0}^{\infty}$ будем понимать

$$S(D_N, x) = \sum_{n\in D_N} a_n \varphi_n(x), \tag{3}$$

а под сходимостью этого ряда при $x_0 \in \Omega$ — существование предела

$$\lim_{N\to\infty} S(D_N, x_0).$$

Подобные способы суммирования кратного ряда удобны тем, что суммы (3) совпадают с частичными суммами однократно ортогонального ряда. В самом деле, поскольку

$$D_N = D_0 \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{N} (D_j \backslash D_{j-1}) \right),$$

обозначим

$$\alpha_0^2 = \sum_{N\in D_0} |a_n|^2, \quad \alpha_j^2 = \sum_{n\in D_j\backslash D_{j-1}} |a_n|^2,$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{n\in D_0} a_n \varphi_n(x), \quad \Phi_j(x) = \frac{1}{\alpha_j} \sum_{n\in D_j\backslash D_{j-1}} a_n \varphi_n(x).$$

Тогда

$$S(D_N, x) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \Phi_j(x)$$

— частичная сумма однократного ортогонального в $L^2_\mu(\Omega)$ ряда по ортонормированный системе $\{\Phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$. Данное наблюдение позволяет применять к частичным суммам (3) результаты, известные для однократных рядов.

Наряду с частичными суммами (3) ряда (1) будем рассматривать также их средние Чезаро

$$\sigma^\alpha(D_N, X) = \frac{1}{A_N^\alpha} \sum_{j=0}^{N} A_{N-j}^{\alpha-1} S(D_j, x),$$

где

$$A_j^\alpha = \binom{j+\alpha}{j}, \quad \alpha \neq -1, -2, \ldots$$

При $\alpha = 1$

$$\sigma^1(D_N, x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} S(D_j, x),$$

совпадают со средними арифметическими сумм (3).

Под (C,α)-суммируемостью ряда (1) при $x_0 \in \Omega$ будем понимать существование предела

$$\lim_{N\to\infty} \sigma^\alpha(D_N, x_0).$$

Рассмотрим важный случай построения суммирующей системы множеств.

Определение 2. Назовём область (замкнутую область) D евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, внутренней точкой которой является начало O, звёздным телом (с центром O), если выполнено свойство лучистости относительно O: при $x \in \overline{D}$ весь отрезок $[O,x) \subset D$ (здесь $O \in [O,x)$, $x \notin [O,x)$). Частным случаем звёздного тела является выпуклое тело.

Звёздные тела играют важную роль в геометрической теории чисел (см. [7,10]). В монографии Дж. В. С. Кассела (см. [7, с. 111]) в определении звёздного тела не предполагается открытость, лишь требуется, что O — его внутренняя точка. Далее в статье А. В. Малышева [10] звёздное тело предполагается открытым (или его замыканием. Считаем открытое звёздное тело областью, так как его связность (см. [6, с. 448–449]) является следствием свойства лучистости: две точки $x', x'' \in D$ можно соединить непрерывной линией, проходящей через объединение отрезков $[O,x'] \cup [O,x'']$. Параметрические уравнения этой линии легко выписываются.

Пусть теперь D — такое ограниченное звёздное тело, что точки ± 1 на осях принадлежат D. Рассмотрим систему гомотетий D с центром O: $\{ND\}_{N=0}^{\infty}$. Здесь $0D = \{O\}$, $1D = D$. Тогда это суммирующая система множеств, так как эти множества непустые, связные, в совокупности покрывающие все пространство; в нашем случае гомотетия D с большим коэффициентом содержит в себе его гомотетию с меньшим коэффициентом.

Частным случаем сходимости ряда (1) при суммировании по системе гомотетий является его сходимость по нормированным шарам $B_N = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant N\}$, $N = 0, 1, \ldots$, где $\|\cdot\|$ — любая норма в $\mathbb{R}^m$. В частности, обозначив

$$\|x\|_p = (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_m^p)^{1/p}, \quad 0 < p \leqslant +\infty; \quad \|x\|_\infty = \max_{j=\overline{1,m}} |x_j|,$$

получаем суммирующую систему гомотетий $\{B_N^p\}_{N=0}^{\infty}$, где $B_N^p = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|_p \leqslant N\}$, звёздного тела B_1^p (для $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ — выпуклого тела). При $p = 2$ это суммирование по (евклидовым) шарам, $p = \infty$ — по кубам; при $m = 2$ для $p = 1$ частичные суммы по $\{B_N^1\}_{N=0}^{\infty}$ называют треугольными.

Определение 3. Традиционно назовем возрастающую последовательность $\{\nu_j\}$ натуральных чисел лакунарной, если найдется такое число q, что

$$1 < q \leqslant \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

2. Равносходимость почти всюду при суммировании по двум различным суммирующим системам. Пусть $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ и $\{F_N\}_{N=0}^{\infty}$ — две различные суммирующие системы множеств. Обозначим при $N = 0, 1, 2, \ldots$

$$D_N \Delta F_N = (D_N \cup F_N) \setminus (D_N \cap F_N) = (D_N \setminus F_N) \cup (F_N \setminus D_N)$$

симметрическую разность множеств D_N и F_N. Имеем для частичных сумм (3) ряда (1) по этим системам

$$S(D_N, x) = \left(\sum_{n \in D_N \setminus F_N} + \sum_{n \in D_N \cap F_N} \right) a_n \varphi_n(x), \quad S(F_N, x) = \left(\sum_{n \in F_N \setminus D_N} + \sum_{n \in D_N \cap F_N} \right) a_n \varphi_n(x)$$

(сумму по пустому множеству, если оно получается, считаем равной нулю). Разность этих сумм равна

$$\left(\sum_{n \in D_N \setminus F_N} - \sum_{n \in F_N \setminus D_N} \right) a_n \varphi_n(x)$$

Теорема 1. *Если выполняется условие*

$$\sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{n\in D_N\Delta F_N}|a_n|^2\right)<+\infty, \tag{4}$$

то почти всюду на Ω

$$\lim_{N\to\infty}(S(D_N,x)-S(F_N,x))=0, \tag{5}$$

т.е. последовательности частичных сумм кратного ортогонального ряда (1) *по системам множеств* $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ *и* $\{F_N\}_{N=0}^{\infty}$ *либо одновременно сходится почти всюду на* Ω*, либо одновременно не обладают этим свойством.*

Доказательство. Рассмотрим

$$I_N=\int\limits_{\Omega}|S(D_N,x)-S(F_N,x)|^2d\mu=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{n\in D_N\setminus F_n}\alpha_n\varphi_n(x)-\sum_{n\in F_n\setminus D_N}\alpha_n\varphi_n(x)\right)\overline{\left(\sum_{n\in D_N\setminus F_n}\alpha_n\varphi_n(x)-\sum_{n\in F_n\setminus D_N}\alpha_n\varphi_n(x)\right)}d\mu.$$

Используя свойство комплексного сопряжения и ортонормированность функций $\varphi_n(x)$, получаем

$$I_N=\sum_{n\in D_N\Delta F_N}|a_n|^2,\quad N=0,1,2,\ldots$$

По условию теоремы ряд $\sum\limits_{N=0}^{\infty}I_N$ сходится, а следовательно, по теореме Б. Леви (см. [8, с. 348–350]) ряд из подынтегральных выражений

$$\sum_{N=0}^{\infty}|S(D_N,x)-S(F_N,x)|^2$$

сходится почти всюду на Ω, откуда его общий член стремится к нулю почти всюду но Ω, что и доказывает утверждение (5). □

Замечание 1. Условие (4), вообще говоря, не вытекает из условия суммируемости коэффициентов ряда (1) в квадрате: $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^m}|a_n|^2<+\infty$, однако при определенном взаиморасположении множеств D_N и F_N, это возможно.

Следствие 1. *Пусть две суммирующие системы множеств* $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ *и* $\{F_N\}_N^{\infty}=0$ *обладают свойством*

$$F_N\subset D_N\subset F_{N+1},\quad N=1,2,\ldots$$

Тогда для любого кратного ортогонального ряда (1) *с коэффициентами, суммируемыми в квадрате, почти всюду на* Ω *имеет место* (5).

Доказательство. Ряд (4) приобретает в условиях следствия вид

$$\sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{n\in D_N\setminus F_N}|a_n|^2\right), \tag{6}$$

где множества $D_N\setminus F_N$ при разных N попарно не пересекаются. Тогда выполнение условия

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m}|a_n|^2<+\infty$$

влечёт сходимость ряда (6). □

Замечание 2. Следствие 1, в частности, доказывает равносходимость почти всюду подпоследовательностей частичных сумм кратного ортогонального ряда (1) с коэффициентами, суммируемыми в квадрате, по любой суммирующей системе множеств B с чётными и нечётными номерами:

$$\lim_{N\to\infty}(S(D_{2N},x)-S(D_{2N+1},x))=0$$

почти всюду на Ω.

Приведённые результаты позволяют установить равносходимость почти всюду одинаковых лакунарных подпоследовательностей частичных сумм кратного ортогонального ряда с квадратично суммируемыми коэффициентами по гомотетиям двух вложенных ограниченных звёздных тел.

Теорема 2. *Пусть два ограниченных звёздных тела D и F связаны соотношением $F\subset D$. Тогда почти всюду на Ω*

$$\lim_{j\to\infty}(S(\nu_jD,x)-S(\nu_jF,x))=0 \tag{7}$$

для любой лакунарной последовательности индексов $\{\nu_j\}$ и последовательностей соответствующих частичных сумм кратного ортогонального ряда (1) *с коэффициентами, суммируемыми в квадрате.*

Доказательство. Найдется такое число $q>1$, что $F\subset D\subset qF$. Преобразование гомотетии обладает свойством инцидентности (сохраняет принадлежность объектов), поэтому отношение включения сохраняется при гомотетии. Значит, для любой последовательности $\{\nu_j\}$, где $q\nu_j\leqslant\nu_{j+1}$, $j=1,2,\ldots$, имеем

$$\nu_jF\subset\nu_jD\subset\nu_{j+1}F$$

и, согласно следствию 1, почти всюду на Ω выполняется (7). Как известно (см. [3, с. 681]), всякую лакунарную последовательность $\{\nu_j\}$ можно разбить на конечное число попарно непересекающихся подпоследовательностей $\{\mu_i\}$, для которых $q\mu_i\leqslant\mu_{i+1}$, $i=1,2,\ldots$ □

В случае частичных сумм кратного ортогонального ряда по шарам и кубам соответствующий результат получен А. И. Буадзе (см. [4]).

3. Чезаровская равносуммируемость почти всюду по системам гомотетий двух различных звёздных тел. Рассмотрим суммирующие системы гомотетий $\{ND\}_{N=0}^{\infty}$, $\{NF\}_{N=0}^{\infty}$ двух различных ограниченных звёздных тел D и F и средние Чезаро частичных сумм ряда (1) по этим системам множеств $\sigma^{\alpha}(ND,x)$ и $\sigma^{\alpha}(NF,x)$, $N=0,1,\ldots$

Теорема 3. *Для любого кратного ортогонального ряда* (1) *с коэффициентами, суммируемыми в квадрате, и любых двух ограниченных звёздных тел $D,F\subset\mathbb{R}^m$, ряд почти всюду на Ω либо одновременно $(C,\alpha>0)$-суммируется по гомотетиям D и F, либо одновременно не обладает этим свойством.*

Доказательство. Найдутся такие коэффициенты гомотетии $k,l>1$, что $F\subset kD\subset klF$. Тогда можно записать $\mu_jF\subset\nu_jD\subset\mu_{j+1}F$, $j=1,2,\ldots$, где $\mu_j=k^{j-1}l^{j-1}$, $\nu_j=k^jl^{j-1}$ — геометрические прогрессии с одинаковым знаменателем $q=kl>1$.

Учитывая однократную природу частичных сумм кратного ряда по суммирующим системам множеств и используя критерий $(C,\alpha>0)$-суммируемости почти всюду ортогонального ряда, принадлежащий С. Качмажу и А. Зигмунду (см. [1, с. 127]), получаем, что сходимость каждой подпоследовательности частичных сумм $\{S(\mu_jF,X)\}$ и $\{S(\nu_jD,X)\}$ почти всюду на Ω обеспечивает $(C,\alpha>0)$-суммируемость ряда (1) почти всюду на Ω по соответствующей системе гомотетий, а её расходимость на множестве меры большей нуля, как лакунарной подпоследовательности частичных сумм ортогонального ряда, в силу соответствующей теоремы, принадлежащей А. Н. Колмогорову (см. [1, с. 125]) — отсутствие $(C,\alpha>0)$-суммируемости почти всюду на Ω по данной системе гомотетий.

Согласно следствию 1, подпоследовательности $S(\mu_jF,X)$ и $S(\nu_jD,X)$ сходятся или расходятся почти всюду на Ω одновременно, что и доказывает утверждение теоремы. □

Применим теорему 3 к кратным тригонометрическим рядам (2). Известно, что кратный тригонометрический ряд сходится почти всюду на T_m при суммировании по кубам $\{B_N^\infty\}_{N=0}^\infty$, если его коэффициенты суммируемы в квадрате. При $m = 1$ этот результат принадлежит Л. Карлесону [13], для $m = 2$ — Н. Р. Тевзадзе [12], причем обобщение результата Н. Р. Тевзадзе на случай рядов произвольной кратности не представляет труда (см. [2, с. 34]). Отметим также, что П. Шёлин [16] получим для данного вида сходимости более общий результат, обобщив на случай произвольной кратности результат Р. А. Ханта [14].

Здесь для нас важно, что в случае суммируемости коэффициентов ряда (2) в квадрате, этот ряд $(C, \alpha > 0)$-суммируется почти всюду на T_m по мере Лебега по системе кубов $\{B_N\}_{N=0}^\infty$. Это позволяет сформулировать следующее следствие теоремы 3.

Следствие 2. *Кратный тригонометрический ряд* (2) *с коэффициентами, суммируемыми в квадрате почти всюду на* T_m *по мере Лебега,* $(C, \alpha > 0)$*-суммируется по гомотетиям любого ограниченного звёздного тела.*

Для случая шаров $\{B_N^2\}_{N=0}^\infty$ это результат В. А. Ильина [5]. При $m = 2$ $(C, 1)$-суммируемость почти всюду тригонометрического ряда по треугольникам установлена А. Д. Нахманом [11].

Следствие 3. *Пусть коэффициенты кратного тригонометрического ряда* (2) *суммируемыми в квадрате. Тогда для любой лакунарной последовательности* $\{\nu_j\}$ *для любого ограниченного звёздного тела* D *соответствующая подпоследовательность частичных сумм ряда* (2) $\{S(\nu_j D, x)\}$ *по гомотетиям* D *сходится почти всюду на* T_m *по мере Лебега.*

Данное утверждение непосредственно вытекает из следствия 2, учитывая однократную структуру данных частичных сумм результат А. Н. Колмогорова (см. [1, с. 125]).

В случае частичных сумм ряда (2) по шарам $\{B_N^2\}_{N=0}^\infty$ подобный результат получил М. Кодзима [15] (см. также [11]).

Следующая теорема даёт достаточные коэффициентные условия $(C, \alpha > 0)$-суммируемости почти всюду ряда (1) по гомотетиям ограниченных звёздных тел.

Теорема 4. *Если коэффициенты ряда* (1) *удовлетворяют условию*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} |a_n|^2 \left(\ln \ln \left(\max_{j=\overline{1,m}} |n_j| + 3 \right) \right)^2 < \infty, \tag{8}$$

то ряд $(C, \alpha > 0)$*-суммируется почти всегда на* Ω *по гомотетиям любого ограниченного звёздного тела.*

Доказательство. Учитывая теорему 3, достаточно получить результат для случая суммирования ряда по кубам $\{B_N^\infty\}_{N=0}^\infty$. Он будет верен для гомотетий любых ограниченных звёздных тел. Применяя результат Д. Е. Меньшова и С. Качмажа (см. [1, с. 132]), с учетом однократной структуры кубических частичных сумм ряда (1), можно записать условие $(C, \alpha > 0)$-суммируемости почти всюду как

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{\max\limits_{j=\overline{1,m}} |n_j| = N} |a_n|^2 \right) (\ln \ln (N+3))^2 < +\infty.$$

Частичные суммы последнего ряда

$$\sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{\max\limits_{j=\overline{1,m}} |n_j| = i} |a_n|^2 \right) (\ln \ln (i+3))^2 = \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{\max\limits_{j=\overline{1,m}} |n_j| = i} |a_n|^2 \right) (\ln \ln (i+3))^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{\max\limits_{j=\overline{1,m}} |n_j| = i} |a_n| \right) \left(\ln \ln (\max_{j=\overline{1,m}} |n_j| + 3) \right)^2 = \sum_{\max\limits_{j=\overline{1,m}} |n_j| \leqslant N} |a_n|^2 \left(\ln \ln (\max_{j=\overline{1,m}} |n_j| + 3) \right)^2$$

совпадают с соответствующими по номеру частичными суммами сходящегося кратного числового ряда (8). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. — М.: ИЛ, 1963.
2. *Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М.* Вопросы сходимости кратных ортогональных рядов и спектральных разложений, I// Усп. мат. наук. — 1976. — *31*, № 6. — С. 28–83.
3. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М., 1964.
4. *Буадзе А. И.* О расходимости сферических частных сумм кратных рядов Фурье// Сообщ. АН Груз. ССР. — 1976. — *84*, № 3. — С. 561–563.
5. *Ильин В. А.* О суммируемости рядов Фурье по собственным функциям средними Рисса, Чезаро и Пуассона—Абеля// Диффер. уравн. — 1966. — *2*, № 6. — С. 816–827.
6. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
7. *Касселс Дж. В. С.* Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
9. *Коноплев Б. В.* О равносуммируемости почти всюду кратных ортогональных рядов// Мат. междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 28 января — 2 февраля 2021 г.). — Воронеж, 2021. — С. 146–148.
10. *Малышев А. В.* Основные понятия и теоремы геометрии чисел// Чебышев. сб. — 2019. — *20*, № 3. — С. 44–73.
11. *Нахман А. Д.* О средних треугольного типа двойных рядов Фурье. — Деп. в ВИНИТИ, №1907-79 Деп.
12. *Тевзадзе Н. Р.* О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом// Сообщ. АН Груз. ССР. — 1970. — *58*, № 2. — С. 277–279.
13. *Carleson L.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series// Acta Math. — 1966. — *116*, № 1-2. — P. 135–157.
14. *Hunt R. A.* On the convergence of Fourier series// in: Proc. Conf. “Ortogonal Expansions and Their Continuous Analogues”. — Carbndale, Illinois: South Illinois Univ. Press, 1968. — P. 235–255.
15. *Kojima M.* On the almost everywhere convergence of lacunary spherical partial sums of multiple Fourier series// Sci. Rep. Kanazawa Univ. — 1979. — *24*, № 1. — P. 9–12.
16. *Sjölin P.* Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series// Arkiv Mat. — 1971. — *9*, № 1. — P. 65–90.

Коноплев Борис Владимирович
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: borikon@bk.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 68–76
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-68-76

УДК 519.626

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ПОИСКА ТОЧЕК СОВПАДЕНИЯ В МОДЕЛИ «СПРОС-ПРЕДЛОЖЕНИЕ»

© 2022 г. **А. М. КОТЮКОВ**

Аннотация. Построен алгоритм поиска положения равновесия в модели «спрос-предложение», основанный на теории накрывающих отображений и задаче о точках совпадения двух отображений. Алгоритм поиска основан на методе Хука—Дживса. Осуществлена программная реализация алгоритма, для верификации проведены численные эксперименты для размерностей модели 1–4.

Ключевые слова: точка совпадения, спрос, предложение, накрывающее отображение, итерационный процесс, экономическое равновесие.

ITERATIVE PROCESS OF THE SEARCH FOR COINCIDENCE POINTS IN THE MODEL "SUPPLY-DEMAND"

© 2022 **A. M. KOTYUKOV**

Abstract. In this paper, we construct an algorithm for finding equilibrium positions in the "supply-demand" model based on the theory of covering mappings and the problem of coincidence points for two mappings. The search algorithm is based on the Hooke–Jeeves method. A software implementation of the algorithm is verified by numerical experiments for model dimensions 1–4.

Keywords and phrases: coincidence point, demand, supply, covering mapping, iterative process, economic equilibrium.

AMS Subject Classification: 65J15

1. Введение. В статье изучается вопрос о нахождении положения равновесия в экономической модели «спрос-предложение».

Рассмотрим экономическую модель, в которой присутствуют две группы участников: производители и потребители. Производители производят некоторый набор товаров, который затем приобретается потребителями. Предположим, что экспорт отсутствует, т.е. весь произведенный товар уходит на потребительский рынок. Производители, выбирая тот или иной процесс производства, стремятся произвести такое количество товаров, которое максимизирует их прибыль. Потребители в рамках собственного бюджета стремятся максимально удовлетворить собственные потребности, приобретая тот или иной набор товаров.

Для обеспечения социальной и политической стабильности в регионе, в которой моделируется рынок, суммарное производство (т.е. предложение) должно быть не меньше, чем суммарное потребление (т.е. спрос). В противном случае на рынке возникает дефицит товаров, что негативно сказывается на жизни и благосостоянии общества. С другой стороны, переизбыток товара на рынке влечет за собой потери для производителя, поскольку при сохранении расходов он получает меньшую прибыль. Это, в свою очередь, ведет к уменьшению дохода потребителей, из-за чего

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131).

падает спрос и профицит увеличивается. Таким образом, для жизнеспособности экономической системы необходимо, чтобы спрос на каждый товар был равен его предложению. Такое состояние рынка называется экономическим равновесием, а цены на товары называются равновесными.

Идея положения равновесия берет свое начало еще в XVIII веке, в труде Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства народов» [9]. В математической форме данная идея была представлена Леоном Вальрасом, в работе которого [10] впервые появляется понятие вектора равновесных цен. Первые полноценные результаты о существовании положения равновесия были получены лишь в 50-е годы прошлого столетия, например, в работе К. Эрроу и Г. Дебре [4]. Современное развитие математической теории, а именно теории накрывающих отображений, позволяет получить достаточные условия существования равновесия в случае, когда функции спроса и предложения являются нелинейными (см. [3, 6–8]). Этот результат основан на теореме о точке совпадения α-накрывающего и β-липшицевого отображений, действующих из одного метрического пространства в другое [2].

В настоящей работе проведена верификация достаточных условий существования положения равновесия в модели «спрос-предложение», полученных в [3]. Вектор равновесных цен рассматривается как точка совпадения функций спроса и предложения. Для нахождения положения равновесия построен алгоритм поиска, основанный на итерационном процессе, описанном в [2]. Полученные результаты свидетельствуют о состоятельности построенной модели и создают основу для дальнейшей модернизации используемого алгоритма.

2. Постановка задачи нахождения равновесия в модели «спрос-предложение». Перейдем к формализации поставленной выше задачи. Сначала рассмотрим модель поведения производителей, затем — модель поведения потребителей. Далее определим понятие положения равновесия в модели и определим условия, при котором данное положение существует.

2.1. Модель поведения производителей. Функция предложения. Пусть имеются n различных товаров, первые $m \leqslant n$ из которых производятся при потреблении всех n товаров. Оставшиеся $n-m$ товаров импортируются в систему извне. Цены каждого товара обозначим через p_j, $j=\overline{1,n}$. Для производства i-го товара производитель на приобретение необходимых ресурсов может потратить имеющийся у него объем финансовых средств, который обозначим через b_i $i=\overline{1,m}$. Объем j-го товара, используемый для производства i-го товара, обозначим через x_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Естественно предположить, что все $p_j>0$, $b_i>0$, $x_{ij}>0$. Пусть известная функция прибыли $\pi\colon \mathbb{R}_+^{m\times n}\to\mathbb{R}_+$, значениями $\pi(x)$ которой являются различные величины прибыли при определенном наборе ресурсов $x=(x_{11},x_{12},\ldots,x_{1n},\ldots,x_{m1},x_{m2},\ldots,x_{mn})$ и фиксированной цене $p=(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{R}_+^n$. Производитель из всех наборов ресурсов $x\in\mathbb{R}_+^{m\times n}$, при которых стоимость производства i-го товара не превышает b_i для любого $i=\overline{1,m}$, выбирает тот, на котором его прибыль будет максимальной. Таким образом, приходим к следующей задаче условной минимизации:

$$\pi(x)\to\max,\quad \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij}=b_i,\quad x_{ij}>0,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$$

Решение этой задачи было получено в [3]. А именно, обозначив через C_i коэффициенты нейтрального технического процесса, а через $\beta_{ij}>0$ — коэффициенты эластичности по ресурсам, получим, что решение этой задачи определяется формулами:

$$x_{ij}=\frac{b_i\beta_{ij}}{p_j\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_{ik}},\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$$

В [3] было также показано, что функция спроса i-го товара S_i в данной экономической системе определяется формулой:

$$S_i(p)=K_i\prod_{j=1}^{n}p_j^{-\beta_{ij}}-L_ip_i^{-1}, i=\overline{1,m}, \tag{1}$$

где

$$K_i = \frac{C_i b_i^{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{ij}} \prod\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij}^{\beta_{ij}}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_{ki}\right)^{-\sum\limits_{l=1}^{n}\beta_{kl}}}, \quad L_i = \sum_{s=1}^{m} \frac{b_s\beta_{si}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{sj}}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

2.2. Модель поведения потребителя. Функция спроса. Пусть имеется потребитель с заданным бюджетом $I > 0$. Через x_j обозначим количество j-го товара, который приобретает потребитель, а через $p_j > 0$ — стоимость j-го товара, $j = \overline{1,n}$. Приобретаемый набор товаров таким образом обозначим через $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Задано открытое множество $G \subset \mathbb{R}_+^n$, $G = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_j > 0,\ j = \overline{1,n}\}$ наборов товаров, доступные для приобретения потребителям. Пусть задана некоторая функция полезности $u\colon G \to \mathbb{R}$, значения $u(x)$ которой являются численным выражением предпочтительности набора товаров $x \in G$, т.е. один набор товаров $u(x')$ считаем более предпочтительным для потребителя, чем другой набор товаров $u(x'')$, если $u(x') > u(x'')$. Из всех наборов $x \in G$, стоимость которых укладывается в бюджет потребителя, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leqslant I,$$

потребитель выберет тот набор товаров, который максимизирует его функцию полезности. Поскольку накопления денежных средств у потребителя в данной модели не происходит, будем предполагать, что функция полезности u и множество доступных наборов товаров G выбраны так, что искомый максимум достигается лишь на тех наборах, на которых

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = I.$$

Таким образом, получим следующую задачу условной оптимизации:

$$u(x) \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = I, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in G.$$

Эта задача также была решена в [3]. А именно, если обозначить через a_j минимально необходимое потребителю количество j-го товара, которое приобретается независимо от выбора того или иного набора товаров, а через α_j — относительную предпочтительность j-го товара, то решение поставленной задачи будет выглядеть следующим образом:

$$x_i = a_i + \frac{\alpha_i\left(I - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j a_j\right)}{p_i \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}, \quad i = \overline{1,n}.$$

В [3] также было получено, что функция спроса в данной модели определяется следующей формулой:

$$D_i(p_1, \ldots, p_n) = a_i + \frac{\alpha_i\left(I - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j a_j\right)}{p_i \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}, \quad p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n. \tag{3}$$

2.3. Постановка задачи нахождения равновесия. Во введении было отмечено, что положению равновесия соответствует равенство суммарного спроса и предложения, или равенство значений функций спроса D и предложения S при определенных ценах на товары p. Другими словами, нам требуется найти такие цены $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$, что выполняется следующее равенство:

$$S(p) = D(p).$$

Таким образом, задача нахождения положения равновесия в модели сводится к задаче отыскания точки совпадения отображений спроса и предложения.

2.4. Существование равновесия в модели «спрос-предложение». Перейдем к формулировке теоремы о существовании равновесия в модели, доказанной в [3]. Пусть заданы $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$; $I \in \mathbb{R}$, $I > 0$, векторы $a = (a_1, \ldots, a_n), \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $C = (C_1, \ldots, C_m) \in \mathbb{R}^m_+$ и такая матрица $\mathfrak{B}$ размерности $n \times m$ с компонентами $\beta_{ij} > 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, что

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} < 1 \quad \forall i = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Пусть также даны такие векторы $c_1 = (c_{11}, \ldots, c_{n1}), c_2 = (c_{12}, \ldots, c_{n2}) \in \mathbb{R}^n_+$, что $c_{j1} < c_{j2}$, $j = \overline{1,n}$. Для произвольных векторов $x = (x_1, \ldots, x_m), \bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\langle x, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{x}_j.$$

Предположим, что

$$\langle c_2, a \rangle < I. \tag{5}$$

Математической моделью рынка назовем набор

$$\sigma = (I, a, \alpha, C, \mathfrak{B}, c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{n\times m}_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+,$$

удовлетворяющий (4), (5), $c_{j1} < c_{j2}$, $j = \overline{1,n}$. Множество всех таких наборов обозначим через Σ.

В этом наборе c_1 и c_2 определяют ограничения на цены p_j, $j = \overline{1,n}$, т.е. $c_{j1} \leqslant p_j \leqslant c_{j2}$ для всех $j = \overline{1,n}$, а оставшиеся компоненты набора однозначно определяют функции спроса $D\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^m$ и предложения $S\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^m$ по формулам (1) и (3) соответственно.

Определение 1. Вектор $p \in P$ называется *вектором равновесных цен* в модели σ, если $S(p) = D(p)$.

Положим

$$\bar{\alpha}(\sigma) = \min_{i=\overline{1,m}} \left| \frac{L_i(c_{i2} - c_{i1})}{2c_{12}^2} \right| - \max_{i=\overline{1,m}} \left(K_i \left(\prod_{j=1}^{n} c_{j1}^{-\beta_{ij}} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \frac{c_{j2} - c_{j1}}{2c_{ij}} \right) \right),$$

$$\bar{\beta}(\sigma) = \frac{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \left[\frac{\alpha_i}{c_{i1}^2}(I - \langle c_1, a \rangle + c_{i1}a_i)(c_{i2} - c_{i1}) + \frac{\alpha_i}{c_{i1}}(\langle a, c_2 - c_1 \rangle - a_i(c_{i2} - c_{i1})) \right]}{2\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k},$$

$$\bar{\gamma}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,m}} \left| a_i + \frac{\alpha_i(2I - \langle a, c_2 + c_1 \rangle)}{(c_{i2} + c_{i1}) \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j} + \frac{2L_i}{c_{i2} + c_{i1}} - K_i \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{c_{j2} + c_{j1}}{2} \right)^{-\beta_{ij}} \right|.$$

В [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 1 (достаточные условия существования равновесия). *Пусть модель $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяет условиям* (4), (5) *и, кроме того,*

(i) $\bar{\alpha}(\sigma) > \bar{\beta}(\sigma)$;

(ii) $\bar{\gamma}(\sigma) < \bar{\alpha}(\sigma) - \bar{\beta}(\sigma)$.

Тогда в исследуемой модели существует такой вектор равновесных цен $p = (p_1, \ldots, p_n)$, что $c_{j1} < p_j < c_{j2}$, $j = \overline{1,n}$.

3. Итерационный процесс поиска точек совпадения двух отображений.

3.1. Постановка задачи поиска точек совпадения двух отображений. Даны два метрических пространства X и Y с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Пусть также даны два отображения S и D, действующие из X в Y. Рассмотрим уравнение

$$S(p) = D(p), \quad p \in \mathbb{R}^n_+. \tag{6}$$

Решение этого уравнения называется точкой совпадения отображений S и D. Задача состоит в отыскании точек совпадения.

Прежде непосредственного поиска необходимо указать условия, при которых существует хотя бы одна точка совпадения в уравнении (6). Для этого нам потребуется ввести понятие α-накрывающего отображения.

Обозначим через $B_X(r, x)$ замкнутый шар радиуса r с центром в точке x в пространстве X. Аналогичным образом определим $B_Y(r, y)$. Определим r-окрестность произвольного множества $M \subset Y$ через $B_Y(r, M) = \bigcup\limits_{y \in M} B_Y(r, y)$.

Определение 2. Пусть задано число $\alpha > 0$. Отображение $S\colon X \to Y$ называется *α-накрывающим*, если

$$S(B_X(r, x)) \supseteq B_Y(\alpha r, S(x)) \quad \forall r \geqslant 0, \quad \forall x \in X. \tag{7}$$

3.2. Итерационный процесс. Перейдем теперь к описанию итерационного процесса, описанного в [2], которым мы воспользуемся для нахождения положения равновесия.

Итак, пусть даны отображения $S, D\colon X \to Y$, где S — α-накрывающее, а D — β-липшицево. Зафиксируем произвольную точку $p_0 \in X$ и последовательность неотрицательных чисел $\{\delta_i\}$. Имеем

$$\rho_Y(S(p_{i+1}), D(p_i)) \leqslant \delta_i \rho_Y(S(p_i), D(p_i)), \tag{8}$$

$$\rho_X(p_{i+1}, p_i) \leqslant \alpha^{-1} \rho_Y(S(p_i), D(p_i)). \tag{9}$$

Теорема 2 (теорема о точках совпадения, см. [2])**.** *Пусть пространство X полно, отображение $S\colon X \to Y$ является α-накрывающим и его график* $\operatorname{gph} S = \{(x, y) \in X \times Y : y = S(x)\}$ *замкнут, а отображение $D\colon X \to Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta < \alpha$ и*

$$\beta + \alpha \varlimsup_{i \to \infty} \delta_i < \alpha. \tag{10}$$

Тогда для любого $p_0 \in X$ существует последовательность $\{p_i\}$, которая удовлетворяет условиям (8), (9) *при всех i, и любая такая последовательность сходится к некоторой точке совпадения $\xi = \xi(x_0)$, для которой справедливо неравенство*

$$\rho_X(\xi, x_0) \leqslant \alpha^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \left(\delta_i + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right) \rho_Y(S(x_0), D(x_0)).$$

На начальном этапе была рассмотрена экономическая модель без импорта товаров, т.е. при $m = n$.

В качестве пространств X, Y здесь выступают евклидовы пространства $\mathbb{R}^n_+$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. На этих пространствах в качестве ρ_X и ρ_Y возьмем естественную метрику

$$\rho_X(x, y) = \rho_Y(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)^2}; \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Для создания алгоритма поиска точек совпадения необходимо указать явный способ нахождения точки x_{i+1}. Построим процесс поиска точки на базе метода прямого поиска Хука—Дживса.

Из условия (9) можно определить шаги по координатам. Это условие задает радиус поиска точки x_{i+1}. Поскольку в обеих частях неравенства стоят неотрицательные величины, величина, стоящая в левой части этого неравенства и определяющая радиус поиска новой точки, будет максимальной тогда и только тогда, когда в этом неравенстве будет достигаться равенство. Используя (11), получим, что для точки $x_{i+1} = x_i + h_i$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(p_{ij} + h_j - p_{ij})^2\right)^{1/2} = \alpha^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(S_j(p_i) - D_j(p_i))^2\right)^{1/2}.$$

Здесь $S(p_i) = (S_1(p_i), \ldots, S_n(p_i))$, $D(p_i) = (D_1(p_i), \ldots, D_n(p_i))$. Возводя это равенство в квадрат, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} h_j^2 = \alpha^{-2}\sum_{j=1}^{n}(S_j(p_i) - D_j(p_i))^2.$$

Внесем α^{-2} внутрь суммы и приравняем слагаемые при соответствующих индексах j:

$$h_j^2 = \alpha^{-2}(S_j(p_i) - D_j(p_i))^2.$$

Извлечем корень из этого уравнения, учитывая, что левая и правая части уравнения всегда неотрицательны:

$$h_j = \alpha^{-1}|S_j(p_i) - D_j(p_i)|.$$

Таким образом, искомые шаги найдены.

Далее необходимо определить последовательность $\{\delta_i\}$. Элементы этой последовательности можно определить из (10):

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\,\delta_i < 1 - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Будем выбирать δ_i так, чтобы $\delta_i < 1-\beta/\alpha$, и при необходимости (в случае, если не сможем найти x_{i+1}, удовлетворяющее условию (8)) будем изменять его в интервале $(1 - \beta/\alpha; 1)$. Выбранные таким образом δ_i могут быть частью последовательности, для которой выполняется условие (10), поэтому условия теоремы остаются выполненными.

Согласно алгоритму прямого поиска, будем действовать следующим образом. Фиксируя все координаты точки x кроме первой, вычисляем значение величин

$$\rho_Y(S(p_{i1} + h_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}), D(p_i)), \quad \rho_Y(S(p_{i1} - h_1, p_{i2}, \ldots, p_{in}), D(p_i)).$$

Далее, согласно (8), сравниваем полученное значение с величиной $\delta_i\rho_Y(S(x_i), D(x_i))$. Если полученная величина удовлетворяет этому неравенству, то искомая точка найдена. В этом случае алгоритм можно завершить, но для избежания проблем зацикливания, медленной сходимости и эффективности поиск следует продолжить, пока не будет найдена точка с минимальным расстоянием среди всех. Так или иначе, шаг по этой координате уменьшается. Поиск проводится до тех пор, пока шаг не станет меньше заданного ε. Затем переходим к следующей координате и проводим аналогичный поиск, на этот раз фиксируя координаты $(x_{i1}, x_{i3}, x_{i4}, \ldots, x_{in})$.

Если в результате поиска не было найдено ни одной точки, то пробуем увеличить δ_i. Численные эксперименты показали, что подобная ситуация возникает на первых шагах итерационного процесса.

Пример. В экономической модели «спрос-предложение» при $m = n = 1$ возьмем следующий набор параметров:

$$I = 700, \quad a = 14, \quad \alpha = 0{,}5, \quad C = 943, \quad \mathfrak{B} = \beta = 0{,}01, \quad c_1 = 10, \quad c_2 = 50.$$

Тогда

$$\bar{\alpha} = 205{,}54642, \quad \bar{\beta} = 140, \quad \bar{\gamma} = 29{,}460690.$$

На первой итерации

$$x_0 = 49{,}902382, \quad h = 1{,}65747476, \quad \delta = 0{,}31887865,$$

$$\rho_Y(S(x_0), D(x_0)) = 340{,}68799, \quad \delta\rho_Y(S(x_0), D(x_0)) = 108{,}63812256,$$

$$\min_{[x_0-h;x_0+h]}\rho_Y(S(x), D(x_0)) = 321{,}70642.$$

Условие итерационного процесса выполняется при $\delta = 0,9442845930671052$.

Таблица 1. Результаты эксперимента при $n = 1$, $\varepsilon = 0{,}001$.

I	a	α	C	$\mathfrak{B}$	c_1	c_2	Прибл. реш.	Точн. реш.	Ошибка
296,63	1,09	0,50	170,36	0,25	248,06	270,13	255,695	255,694	0,00087248
3468,36	56,08	0,90	928,24	0,14	50,99	61,83	56,607	56,607	0,00072565
5671,82	23,75	0,04	150,53	0,14	166,23	238,80	213,438	213,437	0,00099848
2,47	0,02	0,78	7,76	0,07	45,38	68,57	61,299	61,291	0,00080693
1064,58	21,06	0,76	75,23	0,35	42,96	50,51	47,192	47,192	0,00035695

Из примера видно, что в качестве нового δ_i целесообразно воспользоваться условием:

$$\min_{x\in B_X(h,x_i)} \rho_Y(S(x), D(x_i)) \leqslant \delta\rho_Y(S(x_i), D(x_i)),$$

так как на каждой итерации мы стараемся минимизировать $\rho_Y(S(x), D(x))$. Из указанного неравенства получаем, что:

$$\delta_i \geqslant (\rho_Y(S(x_i), D(x_i)))^{-1} \min_{x\in B_X(h,x_i)} \rho_Y(S(x), D(x_i)) \tag{12}$$

Отсюда следует, что для точки x_{i+1} достаточно, чтобы в неравенстве (12) выполнялось равенство. Естественно, что можно с самого начала взять δ_i по формуле (12). Однако использование минимально возможного параметра δ_i обеспечивает более высокую скорость сходимости процесса, поскольку условие (10) более жесткое.

После замены δ_i поиск повторяется. Если нужная точка была найдена, то переходим к следующему этапу. Если же подходящих точек в окрестности x_i нет, то здесь возможны два варианта. Если

$$\rho_Y(S(x_i), D(x_i)) < \varepsilon, \tag{13}$$

то искомая точка совпадения найдена. Если же это не так, то это означает, что итерационный процесс пришел в точку, в которой достигается минимум расстояния между функциями спроса и предложения, однако эти функции не пересекаются и, следовательно, равновесие не достижимо. Однако, если выполняются условия теоремы 1, то такая ситуация невозможна.

4. Результаты численного эксперимента. Для демонстрации результатов работы итерационного процесса была написана программа на языке программирования Fortran 90. Параметры в модели подбирались исходя из условий теоремы 1. Точное решение было найдено методом равномерного перебора в окрестности полученного решения. За точное решение принималась точка $\tilde{x}$, в которой расстояние между функциями $\rho_Y(S(\tilde{x}), D(\tilde{x})) \approx 0{,}00000001$.

Результаты численного эксперимента представлены ниже. В таблицах 1–4 описаны результаты работы итерационного процесса в случаях $n = \overline{1,4}$ соответственно. Во избежание громоздкости представления в таблицах представлены лишь значимые результаты, демонстрирующие независимость алгоритма от параметров модели. Для численного эксперимента величина погрешности полагалась $\varepsilon = 0{,}001$, исходя из предположения, что цена товара на рынке не может быть меньше 0,01 у.е.

5. Заключение. Результаты численного эксперимента подтверждают состоятельность полученных достаточных условий существования положения равновесия в модели «спрос-предложение», а также работоспособность построенного алгоритма. Из них видно, что построенный итерационный процесс реализует поиск положения равновесия с заданной погрешностью ε. В экономической модели «спрос-предложение» это означает, что, используя данный алгоритм, возможно найти равновесные цены в модели с абсолютной точностью.

Остаются открытыми некоторые вопросы технического характера, такие как скорость сходимости алгоритма, случай неединственного положения равновесия, оптимизация процесса поиска новой точки в итерационном процессе и другие. Этим проблемам планируется уделить особое внимание в дальнейшем исследовании.

Таблица 2. Результаты эксперимента при $n = 2$, $\varepsilon = 0{,}001$.

I	a	α	C	$\mathfrak{B}$		c_1	c_2	Прибл. реш.	Точн. реш.	Ошибка
72353,13	464,02	0,50	8931,32	0,01	0,01	28,79	69,21	49,078	49,078	0,00000296
	975,44	0,50	11791,16	0,01	0,01	31,52	41,24	37,472	37,472	0,00000146
222,56	6,02	0,50	977,57	0,05	0,10	10,00	30,00	19,933	19,933	0,00000102
	1,02	0,50	899,76	0,10	0,05	25,00	40,00	32,022	32,022	0,00000454
1907,52	34,94	0,50	762,69	0,07	0,10	20,00	40,00	30,329	30,329	0,00001068
	7,27	0,50	934,44	0,10	0,07	50,00	70,00	60,021	60,021	0,00006694
266,68	2,56	0,50	622,09	0,07	0,15	20,00	40,00	29,674	29,674	0,00000296
	2,33	0,50	698,86	0,15	0,07	50,00	70,00	59,549	59,549	0,00000230
5319,73	62,60	0,50	672,95	0,08	0,08	30,00	40,00	34,503	34,503	0,00000686
	56,29	0,50	861,30	0,08	0,08	40,00	50,00	45,794	45,795	0,00001962

Таблица 3. Результаты эксперимента при $n = 3$, $\varepsilon = 0{,}001$.

I	a	α	C	$\mathfrak{B}$			c_1	c_2	Прибл. реш.	Точн. реш.	Ошибка
6135,09	35,13	0,33	971,32	0,01	0,01	0,01	30,00	40,00	35,081	35,081	0,00000051
	47,29	0,33	708,37	0,01	0,01	0,01	40,00	50,00	47,819	47,819	0,00003300
	47,29	0,00	744,42	0,01	0,01	0,01	40,00	50,00	44,954	44,954	0,00002927
1386,64	8,52	0,33	1791,87	0,01	0,01	0,01	10,00	40,00	25,252	25,252	0,00000026
	11,37	0,33	1293,55	0,01	0,01	0,01	20,00	50,00	33,923	33,923	0,00000078
	7,94	0,33	920,13	0,01	0,01	0,01	30,00	60,00	46,720	46,720	0,00004320
13531,23	74,46	0,27	623,52	0,01	0,01	0,01	99,06	123,83	114,671	114,671	0,00012171
	18,25	0,10	826,96	0,01	0,01	0,01	46,27	109,94	75,757	75,757	0,00004962
	24,31	0,25	724,00	0,01	0,01	0,01	76,49	94,75	87,985	87,985	0,00004817
18820,43	24,56	0,33	245,01	0,09	0,03	0,00	100,00	140,00	125,680	125,680	0,00019585
	46,99	0,33	891,79	0,08	0,05	0,03	120,00	160,00	140,024	140,024	0,00007714
	43,68	0,33	675,92	0,02	0,02	0,02	140,00	180,00	157,017	157,017	0,00014564
10401,40	54,17	0,33	781,14	0,08	0,09	0,09	78,36	100,21	94,482	94,482	0,00002283
	8,46	0,33	783,64	0,09	0,08	0,09	75,12	97,67	90,666	90,666	0,00001955
	44,44	0,33	751,21	0,08	0,09	0,09	73,74	93,30	80,779	80,779	0,00001502
9692,37	8,05	0,33	953,74	0,06	0,06	0,02	68,12	111,05	85,730	85,730	0,00000270
	5,43	0,33	681,20	0,04	0,05	0,07	62,68	99,25	85,099	85,099	0,00001324
	70,09	0,33	626,84	0,02	0,05	0,05	57,16	117,85	84,759	84,759	0,00010185

С точки зрения математического моделирования в экономике предполагается исследовать модернизированную версию модели, учитывающую транзакционные издержки [5]. Данная модель представляет большой интерес с точки зрения экономики, поскольку она более точно описывает реальную ситуацию на рынке, в частности, рынке РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки// Докл. РАН. — 2007. — *416*, № 2. — С. 151–155.
2. *Арутюнов А. В.* Точки совпадения двух отображений// Функц. анал. прилож. — 2014. — *48*, № 1. — С. 89–93.
3. *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е., Павлова Н. Г.* Равновесные цены как точка совпадения двух отображений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2013. — *53*, № 2. — С. 225–237.

Таблица 4. Результаты эксперимента при $n = 4$, $\varepsilon = 0{,}001$.

I	a	α	C	$\mathfrak{B}$				c_1	c_2	Прибл. реш.	Точн. реш.	Ошибка
2756,34	5,13	0,24	892,95	0,01	0,01	0,01	0,01	10,00	30,00	67,052	85,282	0,00000083
	7,10	0,21	867,79	0,01	0,01	0,01	0,01	10,00	30,00	86,398	54,386	0,00001131
	9,63	0,10	998,34	0,01	0,01	0,01	0,01	10,00	30,00	105,280	136,126	0,00001228
	7,89	0,19	857,22	0,01	0,01	0,01	0,01	10,00	30,00	75,631	71,226	0,00001861
3236,04	5,45	0,04	578,62	0,01	0,02	0,01	0,00	55,09	92,15	76,341	76,341	0,00000356
	3,83	0,20	840,43	0,01	0,02	0,02	0,02	84,52	108,60	98,142	98,142	0,00000074
	7,25	0,10	363,95	0,02	0,00	0,01	0,02	97,89	191,83	161,264	161,263	0,00035677
	9,29	0,10	290,53	0,00	0,01	0,01	0,00	45,50	99,62	77,142	77,141	0,00016120
1753,90	4,20	0,05	698,36	0,03	0,01	0,02	0,03	55,34	76,22	68,407	68,407	0,00000701
	3,11	0,20	865,80	0,01	0,01	0,03	0,02	46,29	53,84	50,019	50,019	0,00000532
	2,96	0,01	304,33	0,01	0,01	0,02	0,03	83,04	146,83	114,244	114,243	0,00027044
	6,16	0,23	328,85	0,01	0,03	0,01	0,02	93,16	134,70	108,471	108,471	0,00024663

4. *Arrow K. J., Debreu G.* Existence of an equilibrium for a competitive economy// Econometrica. — 1954. — *22*, № 3. — P. 265–290.
5. *Arutyunov A. V., Pavlova N. G., Shananin A. A.* New conditions for the existence of equilibrium prices// Yugoslav. J. Oper. Res. — 2018. — *28*, № 1. — P. 59–77.
6. *Pavlova N. G.* Applications of the theory of covering maps to the study of dynamic models of economic processes with continuous time// in: Mathematical Analysis With Applications (*Pinelas S., Kim A., Vlasov V.*, eds.). — Cham: Springer, 2020. — P. 123–129.
7. *Pavlova N. G.* Necessary conditions for closedness of the technology set in dynamical Leontief model// Proc. 11 Int. Conf. “Management of Large-Scale System Development”, 2018. — P. 1–4.
8. *Pavlova N., Zhukovskaya Z., Zhukovskiy S.* Equilibrium in continuous dynamic market models// Proc. 15 Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems — 2020. — P. 1–3.
9. *Smith A.* An Inquiry into the Nature and Cause of the Wealth of Nations. — London: William Strahan and Thomas Cadell, 1776.
10. *Walras L.* Elements d’Economie Politique Pure. — Lausanne: Corbaz, 1874.

Котюков Александр Михайлович
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: amkotyukov@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 77–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-77-90

УДК 517.929

МОДЕЛЬ КЕЙНСА ДЕЛОВОГО ЦИКЛА И ЗАДАЧА О ДИФФУЗИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

© 2022 г. **А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ, Д. Г. ФРОЛОВ**

Аннотация. Рассматривается вариант системы типа «реакция-диффузия», который допускает интерпретацию в качестве математической модели бизнес-цикла Кейнса с учетом пространственных факторов. Система рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана. Для такой нелинейной краевой задачи изучены бифуркации в окрестности пространственно однородного состояния равновесия в случае, близком к критическому, нулевого и пары чисто мнимых собственных значений спектра устойчивости. Анализ бифуркаций позволил получить достаточные условия существования и устойчивости пространственно однородного и пространственно неоднородного циклов, а также пространственно неоднородного состояния равновесия. Анализ поставленной задачи опирался на использовании и развитие таких методов теории бесконечномерных динамических систем как метод интегральных (инвариантных) многообразий и нормальных форм. Их использование в сочетании с асимптотическими методами анализа позволило получить асимптотические формулы для периодических решений и неоднородных состояний равновесия. Для таких решений дан ответ об их устойчивости.

Ключевые слова: обобщенная модель Кейнса, пространственный фактор, краевая задача, устойчивость, бифуркация, асимптотика.

THE KEYNES MODEL OF THE BUSINESS CYCLE AND THE PROBLEM OF DIFFUSION INSTABILITY

© 2022 **A. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV, D. G. FROLOV**

Abstract. In this paper, we consider a version of the “reaction-diffusion” system, which can be interpreted as a mathematical model of the Keynes business cycle, taking into account spatial factors. The system is considered together with homogeneous Neumann boundary conditions. For such a nonlinear boundary-value problem, bifurcations in a neighborhood of a spatially homogeneous equilibrium state are studied in the near-critical case of zero and a pair of purely imaginary eigenvalues of the stability spectrum. An analysis of bifurcations allows one to obtain sufficient conditions for the existence and stability of spatially homogeneous and spatially inhomogeneous cycles and a spatially inhomogeneous equilibrium state. The analysis of the problem stated is based on the methods of the theory of infinite-dimensional dynamical systems, namely, the method of integral (invariant) manifolds and the method of normal forms. These methods and asymptotic methods of analysis lead to asymptotic formulas for periodic solutions and inhomogeneous equilibria. For such solutions, we also examine their stability.

Keywords and phrases: generalized Keynes model, spatial factor, boundary-value problem, stability, bifurcation, asymptotics.

AMS Subject Classification: 35L10, 35L30, 37N40

1. Введение. Идеи монографии [14] привели к созданию одной из самых известных математических моделей макроэкономики. Эта модель делового цикла, которая известна под названием «модель Кейнса». В монографии [23] она приведена в достаточно общей форме

$$Y' = I(Y,R) - S(Y,R), \quad R' = L(Y,R) - L_s, \tag{1}$$

где через $Y(\tau)$ обозначен доход. Например, национальный доход, доход региона. Через $R(\tau)$ обозначена процентная ставка. Например, центрального банка, Федеральной резервной системы, если речь идет о США. Возможна интерпретация $R(\tau)$ как средней ставки кредитов коммерческих банков. Через τ обозначено время, $I(Y,R)$ — функция спроса на инвестиции, $S(Y,R)$ — функция сбережений, $L(Y,R)$ — суммарный спрос на деньги. Наконец, L_s — положительная постоянная, которую называют «предложением денег» [23].

Такой вариант модели Кейнса, а также естественные конкретизации выбора правых частей системы дифференциальных уравнений (1), конечно, не учитывают многие факторы динамики рынка, но отражают принципиальные стороны экономических процессов. Для систем дифференциальных уравнений вида (1) используют обычно название упрощенная модель экономических циклов Кейнса. При этом считают, что функции $I(Y,R)$, $S(Y,R)$, $L(Y,R)$ обладают следующими свойствами [23]:

(i) они достаточно гладко зависят от своих аргументов, если эти аргументы положительны;
(ii) при всех таких Y, R справедливы неравенства

$$\frac{\partial I}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial I}{\partial R} < 0, \quad \frac{\partial S}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial R} > 0, \quad \frac{\partial L}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial L}{\partial R} < 0.$$

Эти свойства отражают ряд экономических закономерностей функционирования экономики. Более подробное обсуждение системы дифференциальных уравнений (1) в связи с экономическими интерпретациями можно найти, например, в монографии [23, раздел 5.3]. Вместе с тем, как отмечается в этой монографии, следует добавить еще некоторые свойства для функций из правых частей системы (1). Например, следует добавить условие о существовании у системы (1) состояния равновесия с положительными координатами. Такое состояние равновесия обычно называют «состоянием экономического равновесия». Его наличие характерно для математических моделей макроэкономики [23].

При выполнении всех трех условий можно ожидать появления устойчивых решений, описывающих экономические циклы (см., например, [21, 23]). Согласно сценарию работы [21] они могут появиться в результате бифуркации Андронова—Хопфа. Вместе с тем реализация этого сценария требует либо дополнительных условий, либо конкретизацию выбора функций $I(Y,R)$, $S(Y,R)$, $L(Y,R)$ при сохранении, разумеется, общих свойств, анонсированных ранее.

В данной работе анализу подлежит более конкретный вариант системы дифференциальных уравнений (1) (см., например, [20]), в котором

$$I(Y,R) = a_1\frac{Y^2}{R}, \quad S(Y,R) = a_2 YR, \quad L(Y,R) = a_3\frac{Y}{R},$$

где a_1, a_2, a_3 — некоторые положительные постоянные, характеризующие скорости экономических процессов. При предложенном выборе функций реализуются все их свойства, описанные выше.

Наконец, замены

$$\tau = \gamma_0 t, \quad R = \gamma_1 u, \quad Y = \gamma_2 y,$$

где положительные постоянные выбраны следующим образом:

$$\gamma_0 = \frac{a_1}{a_2 a_3}, \quad \gamma_1 = \frac{a_3}{a_1}, \quad \gamma_2 = \frac{a_2 a_3^2}{a_1^3}, \quad \gamma = \frac{L_s a_1^2}{a_2 a_3^2}.$$

(величина γ будет играть роль основного параметра, влияющего на характер динамики решений) приводят систему (1) к следующему виду

$$\dot u = F_1(u,y,\gamma), \quad \dot y = F_2(u,y,\gamma), \tag{2}$$

где

$$F_1 = \frac{y}{u} - \gamma, \quad F_2 = \frac{y^2}{u} - uy.$$

Система дифференциальных уравнений (2) имеет состояние равновесия $S_0 : u = \gamma, y = \gamma^2$ с положительными координатами. Вопрос об его устойчивости определяется в первом (линейном) приближении после анализа аналогичного вопроса для линеаризованной в S_0 системы (2), т.е. в нашем случае системы дифференциальных уравнений

$$\dot{h} = Ah, \quad h = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$A = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{S_0} = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{\gamma} \\ -2\gamma^2 & \gamma \end{pmatrix}.$$

В свою очередь, анализ устойчивости решений системы (3) сводится к определению расположения собственных чисел матрицы A. Они в нашем случае находятся как корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + (1-\gamma)\lambda + \gamma = 0.$$

Следовательно, состояние равновесия S_0 системы (2) асимптотически устойчиво, если $\gamma \in (0,1)$ и неустойчиво при $\gamma \in (1,\infty)$.

При $\gamma = 1$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости S_0, когда спектр устойчивости S_0 содержит пару чисто мнимых собственных значений $\pm i$. При отклонении γ от 1 реализуются все условия бифуркационной теоремы Андронова—Хопфа. Более детально это будет обсуждено в основном тексте работы. Но тем не менее, подчеркнем, что при $\gamma = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ у системы дифференциальных уравнений (2) в окрестности состояния равновесия S_0 существует орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл.

Система (2) не учитывает такой фактор экономики как пространственные эффекты. Экономические процессы происходят в регионах (областях) и переменные u, y должны зависеть не только от t, но и пространственных координат. Следуя идеям, изложенным в монографии [19], рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$u_t = F_1(u,y,\gamma) + d_1 u_{xx}, \quad y_t = F_2(u,y,\gamma) + d_2 y_{xx}, \tag{4}$$

где теперь $u = u(t,x)$, $y = y(t,x)$, $F_1(u,y,\gamma)$, $F_2(u,y,\gamma)$ были определены ранее, а d_1, d_2 — положительные постоянные. Будем считать, что $x \in [0,\pi]$ (этого можно добиться перенормировкой переменной) и дополним систему уравнений с частными производными (4) краевыми условиями непроницаемости (однородными краевыми условиями Неймана)

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \quad y_x(t,0) = y_x(t,\pi) = 0. \tag{5}$$

Такой вариант учета пространственных эффектов носит феноменологический характер и в реальной ситуации экономический регион двумерен, т.е. функции должны зависеть от t и x_1, x_2 — двух пространственных переменных, но подход, связанный с введением только $x = x_1$ позволяет понять возникающие проблемы и ответить на некоторые принципиальные вопросы. Отметим, что такой вариант учета пространственных эффектов используют при моделировании в химической кинетике, математической биологии [1,10,18,22]. Сразу отметим, что учет «диффузии», как известно, меняет иногда динамику решений достаточно радикально.

Отметим, что любое решение системы (2) удовлетворяет краевой задаче (4), (5), которая также имеет решения, существенным образом, зависящие от x. Обратимся теперь к вопросу об устойчивости однородного состояния равновесия $S_0(u(t,x) = \gamma, y(t,x) = \gamma^2)$ и пусть оно асимптотически устойчиво в рамках системы (2), т.е. $\gamma \in (0,1)$. Тем не менее, можно указать такие d_1, d_2, что это состояние равновесия уже будет неустойчивым в рамках краевой задачи (4), (5). Такое явление было открыто А. Тьюрингом [22] (см. также [1,10,18]) и было названо диффузионной неустойчивостью. Более детально для краевой задачи (4), (5) это будет обсуждено далее. В приложении к экономике это означает, что пространственные факторы могут привести к дестабилизации экономики или, по-крайней мере, усложнению ее динамики.

В данной работе будут изучены вопросы о поведении решений краевой задачи (4), (5) из достаточно малой окрестности однородного состояния равновесия $S_0 : u = \gamma, y = \gamma^2$. При этом речь идет об окрестности в смысле нормы фазового пространства (пространства начальных условий).

2. Предварительные построения. Постановка задачи. Сведем систему дифференциальных уравнений (4) к скалярному дифференциальному уравнению. Для этого выразим из первого уравнения системы дифференциальных уравнений (4) функцию $y(t, x)$:

$$y = u(u_t + \gamma - d_1 u_{xx}) \tag{6}$$

и подставим во второе уравнение этой системы. В результате получим уравнение

$$[u(u_t + \gamma - d_1 u_{xx})]_t = u(u_t + \gamma - d_1 u_{xx})^2 - u^2(u_t + \gamma - d_1 u_{xx}) + d_2[u(u_t + \gamma - d_1 u_{xx})]_{xx}. \tag{7}$$

Прежде чем преобразовать последнее уравнение отметим, что оно имеет положительное однородное (не зависящее от x) состояние равновесия $u = \gamma$. Поэтому удобно и целесообразно для изучения его окрестности положить

$$u(t, x) = \gamma(1 + w(t, x)). \tag{8}$$

Подстановка замены (8) в уравнение (7) с последующими преобразованиями, включающими в себя деление на $1 + w$, приводит к следующему дифференциальному уравнению с частными производными

$$\begin{aligned} w_{tt} + d_1 d_2 w_{xxxx} + \frac{1}{1+w}[w_t^2 + w_t - d_1 w_t w_{xx}] - d_1 w_{txx} = \\ = \gamma(w_t - d_1 w_{xx} - w)(w_t + 1 - d_1 w_{xx}) + d_2 w_{txx} + \\ + \frac{d_2}{1+w}[2w_x w_{xt} + w_{xx} w_t - w_{xx} - d_1 w_{xx}^2 - 2d_1 w_x w_{xxx}]. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение (9) следует дополнить краевыми условиями

$$w_x(t, 0) = w_x(t, \pi) = w_{xxx}(t, 0) = w_{xxx}(t, \pi) = 0, \tag{10}$$

что вытекает из первоначального варианта краевых условий (5) и замены (6). Для дальнейших построений удобно и полезно еще раз переписать дифференциальное уравнение (9), выделив при этом линейные, квадратичные и кубические слагаемые. При этих преобразованиях используется разложение

$$\frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - w^3 + \ldots,$$

которое корректно, если $|w| < 1$. Последнее предположение вполне естественно в нашем случае, так как далее будут рассматриваться лишь малые отклонения от состояния равновесия.

Итак, далее вместо краевой задачи (9), (10) будем изучать краевую задачу

$$w_{tt} + Bw_t + Aw = F_2(w) + F_3(w) + F_0(w), \tag{11}$$

$$w_x(t, 0) = w_x(t, \pi) = w_{xxx}(t, 0) = w_{xxx}(t, \pi) = 0. \tag{12}$$

Здесь B, A — линейные дифференциальные операторы следующего вида:

$$Bw_t = (1 - \gamma)w_t - (d_1 + d_2)w_{txx}, \quad Aw = d_1 d_2 w_{xxxx} + (d_1\gamma - d_2)w_{xx} + \gamma w.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} F_2(w) = (1 - \gamma)[ww_t - w_t^2] + (\gamma d_1 - d_2)ww_{xx} + d_1(\gamma d_1 - d_2)w_{xx}^2 - \\ - 2d_1 d_2 w_x w_{xxx} + 2d_2 w_x w_{xt} + (d_1 + d_2 - 2\gamma d_1)w_t w_{xx}, \end{aligned}$$

$$F_3(w) = d_2 w_{xx} w^2 + d_1 d_2 w_{xx}^2 w + 2d_1 d_2 w_x w_{xxx} w - (d_1 + d_2)w_t w_{xx} w - 2d_2 w_x w_{xt} w + (w_t^2 - w_t w)w,$$

т.е. $F_2(w)$, $F_3(w)$ однородные квадратичные и кубические формы относительно w и соответствующих производных w. Подчеркнем, что через $F_0(w)$ обозначены слагаемые, имеющие в нуле более высокий порядок малости по сравнению с выписанными в явном виде и обозначенными $F_2(w)$, $F_3(w)$, Aw, Bw_t.

В данной работе далее будут рассмотрены некоторые локальные бифуркации, которые могут возникнуть при смене устойчивости нулевым состоянием равновесия краевой задачи (11), (12). Подчеркнем, что устойчивость будем понимать в смысле определения А. М. Ляпунова и нормы пространства начальных условий. Если краевую задачу (11), (12) дополнить начальными условиями

$$u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x), \tag{13}$$

то для локальной разрешимости смешанной задачи (11), (12), (13) достаточно предположить наличие включения (см., например, [3,12])

$$f(x) \in W^4_{2,0}[0,\pi], \quad g(x) \in W^2_{2,0}[0,\pi].$$

Здесь через $W^4_{2,0}[0,\pi]$, $W^2_{2,0}[0,\pi]$ обозначены подпространства пространств $W^4_2[0,\pi]$, $W^2_2[0,\pi]$, т.е. функциональных пространств Соболева [11,16]. Подпространство $W^2_{2,0}[0,\pi]$ содержит те функции $g(x) \in W^2_2[0,\pi]$, для которых дополнительно выполнены условия $g'(0) = g'(\pi) = 0$. Наконец, $f(x) \in W^4_{2,0}[0,\pi]$, если $f(x) \in W^4_2[0,\pi]$, а также

$$f'(0) = f'(\pi) = f'''(0) = f'''(\pi) = 0.$$

Корректность такого определения подпространств $W^2_2[0,\pi]$, $W^4_2[0,\pi]$ вытекает из теорем вложения Соболева (см. [11, 16]): если $f(x) \in W^4_2[0,\pi]$, то $f(x) \in C^3[0,\pi]$, если $g(x) \in W^2_2[0,\pi]$, то $g(x) \in C^1[0,\pi]$.

3. Об устойчивости однородного состояния равновесия вспомогательной краевой задачи. Краевая задача (11), (12) имеет нулевое состояние равновесия. Для изучения вопроса о достаточных условиях его устойчивости следует, как известно, рассмотреть линейную краевую задачу

$$w_{tt} + Bw_t + Aw = 0, \tag{14}$$

$$w_x(t,0) = w_x(t,\pi) = w_{xxx}(t,0) = w_{xxx}(t,\pi) = 0. \tag{15}$$

Анализ устойчивости, как обычно, может быть сведен к анализу спектра операторного пучка, если положить $w(t,x) = \exp(\lambda t)v(x)$. В нашем случае получаем

$$\lambda^2 v + \lambda Bv + Av = 0, \tag{16}$$

где достаточно гладкая функция $v(x)$ удовлетворяет краевым условиям (15):

$$v'(0) = v'(\pi) = v'''(0) = v'''(\pi) = 0.$$

С другой стороны, можно изучить вопрос о спектре линейных дифференциальных операторов

$$Av = d_1 d_2 v^{(IV)} + (d_1\gamma - d_2)v'' + \gamma v, \quad Bv = (1-\gamma)v - (d_1+d_2)v''.$$

Стандартным образом проверяется, что они имеют собственные значения g_n, p_n $(n = 0,1,2,\ldots)$, соответственно, и в обоих случаях собственные значения g_n и p_n соответствуют собственным функциям $1, \cos nx$ $(n = 1,2,\ldots)$. Подчеркнем, что в силу полноты семейства функций $\{1, \cos nx\}$ линейные дифференциальные операторы A, B не могут иметь иных собственных значений. Итак, точки спектра операторного пучка (16) определяются как корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + p_n\lambda + g_n = 0, \tag{17}$$

где $n = 0,1,2,\ldots$, а $p_n = 1 - \gamma + (d_1+d_2)n^2$, $g_n = d_1 d_2 n^4 + (d_2 - \gamma d_1)n^2 + \gamma$.

Для более детального анализа расположения корней характеристического уравнения (17) используем иной вариант записи коэффициентов. Положим

$$d_1 = d, \quad d_2 = dq\gamma, \quad q = d_2/(d\gamma)$$

и, следовательно,

$$Av = \gamma[qd^2v^{(IV)} + d(1-q)v'' + v], \quad Bv = (1-\gamma)v - d(1+q\gamma)v'',$$

$$g_n = \gamma[q(dn^2)^2 + (q-1)dn^2 + 1], \quad p_n = (1-\gamma) + (1+q\gamma)dn^2.$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной краевой задачи (11), (12) состоят из условий $p_n > 0$, $g_n > 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ В частности, неравенство $p_n > 0$ выполнено при всех n, если $1-\gamma > 0$ ($\gamma \in (0,1)$). Если оказалось, что при некоторых k, m выполнено хотя бы одно из неравенств $p_k < 0$, $q_m < 0$, то нулевое решение краевой задачи (11), (12) будет неустойчивым. Наконец, пусть выполнены неравенства $p_n, q_n \geqslant 0$ при всех $n \geqslant 0$, а при некоторых k, m реализуются равенства $p_k = 0$ или $g_m = 0$, то эти условия выделяют один из критических случаев в задаче об устойчивости нулевого решения краевой задачи (11), (12). Отметим, что справедливость неравенств $p_n > 0$, $g_n > 0$ приводит к выполнению неравенства $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\delta_0 < 0$, где δ_0 — некоторое положительное число. Последнее замечание, в частности, вытекает из справедливости утверждения:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\lambda_n = -\infty.$$

Временно обозначим $dn^2 = \beta$ ($\beta \geqslant 0$) и рассмотрим вспомогательные функции

$$p(\beta) = 1 - \gamma + (1+q\gamma)\beta, \quad g(\beta) = \gamma(q\beta^2 + (q-1)\beta + 1),$$

т.е. $p_n = p(dn^2)$, $g_n = g(dn^2)$. Достаточно стандартный анализ этих функций, а также учет того обстоятельства, что интерес представляют их значения при $\beta = dn^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) приводят к выводу о реализации следующих критических случаев.

3.1. Первый критический случай. Пусть $\gamma = 1$. Тогда при $n = 0$ получаем $\lambda_{1,2} = \pm i$. Если же при этом $g_n > 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то реализуется критический случай пары простых чисто мнимых собственных значений. Подчеркнем, что $p_n = (1+q\gamma)dn^2 > 0$ при всех натуральных n, если $\gamma = 1$.

3.2. Второй критический случай. Пусть $\gamma \in (0,1)$. Тогда, конечно, $p_n > 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ Выберем k, q, d таким образом, чтобы $q_k = 0$, а $q_n > 0$, если $n \neq k$. Тогда $\lambda_{k,1} = 0$. Остальные λ_n, включая $\lambda_{k,2}$, лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda_n \leqslant -\delta_0 < 0$. В свою очередь, выбор параметров k, q, d может быть осуществлен следующим образом.

Отметим, что квадратный трехчлен $g(\beta)$ при $q \in (0, 3-2\sqrt{2})$ имеет два положительных корня $\beta_1 < \beta_2$. При $q = 3-2\sqrt{2}$ многочлен $g(\beta)$ имеет двукратный корень $\beta_1 = \sqrt{2}+1(\beta_1 \approx 2.,414)$.

Можно указать три варианта выбора параметров, при которых второй критический случай будет реализован.

(i) Пусть $q = 3-2\sqrt{2}$. Тогда $dk^2 = \beta_1$, т.е. критическое значение $a = d_*(k) = \beta_1/k^2$. Здесь $k = 1, 2, \dots$ и может быть любым. Тогда при $\beta = \beta_n = dn^2$ справедливо неравенство $g_n > 0$ при всех $n \neq k$, а при $n = k$ имеем $g_k = 0$, но нет таких m, что $g_m < 0$.

(ii) Пусть $q \in (0, 3-2\sqrt{2})$. Тогда положим $a = d_* = \beta_2$.

(iii) Пусть $q \in (0, 3-2\sqrt{2})$ и, кроме того, параметр q выбран таким образом, что справедливы неравенства $\beta_2/\beta_1 < (k+1)^2/k^2$, $k = 1, 2, \dots$. В таком случае в качестве критического значения $a = d_*$ можно выбрать либо $a = \beta_1/k^2$, либо $a = \beta_2/(k+1)^2$, $k = 1, 2, \dots$ В первом случае соответствующей собственной функцией можно выбрать $\cos kx$, а во втором — $\cos(k+1)x$.

Такой выбор возможен, если

$$k^2(1 - q + \sqrt{q^2 - 6q + 1}) < (k+1)^2(1 - q - \sqrt{q^2 - 6q + 1}).$$

Соответствующие $q \in (q_{k,1}, 3-2\sqrt{2})$, где $q_{k,1}$ — меньший корень квадратного уравнения

$$q^2 - \left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 + \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 + 4\right)q + 1 = 0.$$

Например, $q_{1,1} \approx 0{,}12305$. Нетрудно проверить, что последовательность $\{q_{k,1}\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) возрастает и $\lim\limits_{k\to\infty} q_{k,1} = 3-2\sqrt{2}$.

3.3. Третий критический случай. Он возникает при $\gamma = 1$ и реализации выбора $a = d_*$ — критического значения для d, при котором линейный оператор A имеет простое нулевое собственное значение. В свою очередь, здесь возможны варианты (i), (ii), (iii), выделяющих второй критический случай. В результате спектр устойчивости (т.е. спектр операторного пучка (16)) содержит пару чисто мнимых простых собственных значений и простое нулевое собственное число.

3.4. Четвертый критический случай. Он возникает, если линейный оператор A имеет двукратное нулевое собственное число, а остальные собственные числа операторного пучка (16) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости и многочлен $g(\beta)$ имеет два положительных корня $\beta_1 < \beta_2$, для которых $\beta_2/\beta_1 = (k+1)^2/k^2$ при некотором натуральном k.

3.5. Пятый критический случай. Этот случай реализуется, если оператор A имеет двукратное нулевое собственное число и при этом $\gamma = 1$. Тогда спектр устойчивости однородного состояния равновесия содержит собственные значения $\pm i$ и двукратное нулевое собственное значение.

Далее в данной работе будет изучен случай, близкий к третьему критическому случаю, когда спектр устойчивости содержит собственные значения, близкие к нулевому и паре чисто мнимых собственных значений. Нелинейную краевую задачу (11), (12) будем изучать, если

$$\gamma = 1 + \alpha_1\varepsilon, \quad d = a(1 - \alpha_0\varepsilon),$$

где малый неотрицательный параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Постоянные α_0, α_1 будут выбраны далее, но заранее будем считать, что $\alpha_1^2 + \alpha_0^2 < R^2$, где R — некоторая положительная постоянная.

В следующих разделах работы будут получены достаточные условия, при реализации которых система Кейнса с учетом пространственных эффектов может иметь циклы и в том числе устойчивые. Эти циклы могут быть пространственно однородными, когда соответствующие решения не зависят от пространственной переменной x. При другом выборе параметров возможна ситуация, когда изучаемая краевая задача (11), (12) имеет пространственно неоднородный цикл (t периодическое решение зависит и от x).

Отметим, что при $\alpha_1 < 0$ ($\gamma < 1$) и $\alpha_0 > 0$ нулевое решение краевой задачи (11), (12) в линейном приближении неустойчиво. В тоже время состояние равновесия $u = \gamma$, $y = \gamma^2$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) асимптотически устойчиво. Такое явление в настоящее время принято называть диффузионной неустойчивостью или «волновой неустойчивостью» (второй вариант употребляется реже). Этот феномен был открыт, как уже отмечалось, А. Тьюрингом [22] (см., также [1, 10, 18]) и изучался, как правило, в связи с задачами химической кинетики и математической биологии (экологии). В монографии [19] было предложено рассмотреть аналогичные вопросы в связи с задачами макроэкономики. В следующем разделе будет рассмотрена соответствующая бифуркационная задача. При этом ограничимся вариантом, когда третий критический случай реализуется на первой моде (при $k = 1$).

4. Локальные бифуркации. Итак, в этом разделе рассмотрим краевую задачу (11), (12) при $d = a(1 - \alpha_0\varepsilon)$, $\gamma = 1 + \alpha_1\varepsilon$, где $a = d_*$ — критическое значение параметра d, при котором реализуется третий критический случай. В результате краевая задача (11), (12) запишется в следующем виде, который учитывает введение малого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$w_{tt} + B(\varepsilon)w_t + A(\varepsilon)w = F_2(w) + F_3(w) + F_0(w, \varepsilon), \tag{18}$$

$$w_x|_{x=0,x=\pi} = w_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0, \tag{19}$$

где теперь

$$B(\varepsilon)w_t = -\alpha_1\varepsilon w_t - [1 + q(1 + \alpha_1\varepsilon)]a(1 - \alpha_0\varepsilon)w_{txx},$$

$$A(\varepsilon)w = (1 + \alpha_1\varepsilon)[a(1 - \alpha_0\varepsilon)]^2 q w_{xxxx} + (1 - q)a(1 - \alpha_0\varepsilon)w_{xx} + w],$$

$$F_2(w) = a(1 - q)ww_{xx} + a^2(1 - q)w_{xx}^2 - 2a^2 q w_x w_{xxx} + 2aqw_x w_{xt} + (q - 1)aw_t w_{xx},$$

$$F_3(w) = aqw_{xx}w^2 + a^2 q w_{xx}^2 w + 2a^2 q w_x w_{xxx} w - (1 + q)aw_t w_{xx} w - 2aw_x w_{xt} w + (w_t^2 - w_t w)w.$$

В явном виде не выписана нелинейная достаточно гладкая по совокупности переменных функция $F_0 = F_0(w, w_t, w_{tx}, w_{txx}, w_{xxx}, \varepsilon)$. Она при $\varepsilon = 0$ имеет в нуле порядок малости выше третьего и, кроме того, $F_0(0, \varepsilon) = 0$ при всех рассматриваемых ε.

Подчеркнем, что

$$A(\varepsilon)w = A_0w + \varepsilon A_1w + \varepsilon^2 A_2w + \varepsilon^3 A_3w, \quad B(\varepsilon)w_t = B_0w_t + \varepsilon B_1w_t + \varepsilon^2 B_2w_t,$$

где линейные дифференциальные операторы A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2 определены равенством

$$A_0w = a^2qw_{xxxx} + (1-q)aw_{xx} + w, \quad A_1w = \alpha_1 A_0w - \alpha_0\big[2a^2qw_{xxxx} + (1-q)aw_{xx}\big],$$
$$A_2w = \alpha_1\big[-2a^2qw_{xxxx} + (1-q)aw_{xx}\big], \quad A_3w = \alpha_1\alpha_0^2a^2qw_{xxxx},$$
$$B_0w_t = -(1+q)aw_{txx}, \quad B_1w_t = -\alpha_1w_t + a\big[\alpha_1q - (1+q)\alpha_0\big]w_{txx}, \quad B_2w_t = -\alpha_0\alpha_1aqw_{txx}.$$

Нелинейная краевая задача (18), (19) порождает гладкий локальный полупоток, по крайней мере, в окрестности нулевого состояния равновесия. При $\varepsilon = 0$ ее спектр устойчивости содержит собственные значения $\pm i$ и 0, а остальные лежат, как уже отмечалось, в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\delta_0 < 0$. Положительная постоянная δ_0 не зависит от ε.

Из результатов работ [5,6,17] вытекает, что в окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (18), (19) существует гладкое трёхмерное локальное инвариантное многообразие $V_3(\varepsilon)$ (центральное многообразие [17]). Все решения краевой задачи (18), (19) с начальными условиями из достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия с течением времени приближаются к $V_3(\varepsilon)$ со скоростью экспоненты, показатель которой не зависит от ε.

В изучаемом случае, как в настоящее время хорошо известно, анализ поведения решений краевой задачи (18), (19), т.е. динамической системы с бесконечномерным фазовым пространством, можно свести к анализу конечномерной динамической системы (см., например, [17]). Следуя методике работ [7,8,15], это сведение можно произвести следующим образом.

Будем искать решения краевой задачи (18), (19), принадлежащие инвариантному многообразию $V_3(\varepsilon)$, в следующем виде:

$$w(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}w_1(t,x,y,z,\overline{z}) + \varepsilon w_2(t,x,y,z,\overline{z}) + \varepsilon^{3/2}w_3(t,x,y,z,\overline{z}). \tag{20}$$

Здесь

$$w_1(t,x,y,z,\overline{z}) = y\cos x + (zQ + \overline{z}\overline{Q}), \quad Q = \exp(it),$$

а $w_2(t,x,y,z,\overline{z})$, $w_3(t,x,y,z,\overline{z})$ достаточно гладкие по совокупности переменных функции, для которых выполнены следующие свойства:

(a) они удовлетворяют краевым условиям (19);
(b) по переменной t имеют период, равный 2π;
(c) для функций w_2, w_3 справедливы тождества

$$w_j(t,x,y,z,\overline{z})|_{y=z=0} \equiv 0;$$

(d) для функций w_j $(j = 2,3)$ справедливы равенства

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} w_j\exp(\pm it)\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} w_j\cos x\,dx\,dy = 0.$$

Класс таких функций обозначим W_0. Наконец, $y = y(s)$, $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ — «медленное» время. Эти функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'_s = \varphi_0(y,z,\overline{z},\varepsilon), \quad z'_s = \varphi_1(y,z,\overline{z},\varepsilon), \tag{21}$$

которую в большинстве аналогичных ситуациях принято называть нормальной формой или нормальной формой Пуанкаре. Подчеркнём, что $y(s)$ — действительная функция, а $z(s)$ — комплекснозначная. В дальнейшем основную роль будет играть система

$$y'_s = \psi_0(y,z,\overline{z}), \quad z'_s = \psi_1(y,z,\overline{z}), \tag{22}$$

где $\psi_0(y,z,\overline{z}) = \varphi_0(y,z,\overline{z},0)$, $\psi_1(y,z,\overline{z}) = \varphi_1(y,z,\overline{z},0)$. Эту систему часто называют укороченной нормальной формой [13]. Она является «главной» частью системы (21).

Определим вид правых частей системы дифференциальных уравнений (22). Для этого сумму (20) подставим в краевую задачу (18), (19) и соберем слагаемые при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. При этом подчеркнём, что справедливы равенства

$$y'_t = \varepsilon y'_s, \quad y''_{tt} = \varepsilon^2 y''_{ss}, \quad z'_t = \varepsilon z'_s, \quad z''_{tt} = \varepsilon^2 z''_{ss}.$$

Далее в полученных равенствах используем сокращенные обозначения $y'_s = y'$, $z'_s = z'$.

Итак, в результате для w_2, w_3 получили две линейные неоднородные краевые задачи

$$w_{2tt} + B_0 w_{2t} + A_0 w_2 = \Phi_2(w_1), \tag{23}$$

$$w_{2x}|_{x=0,x=\pi} = w_{2xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0, \tag{24}$$

$$w_{3tt} + B_0 w_{3t} + A_0 w_3 = \Phi_3(w_1, w_2), \tag{25}$$

$$w_{3x}|_{x=0,x=\pi} = w_{3xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0. \tag{26}$$

Правые части неоднородных дифференциальных уравнений (23), (25) это известные функции переменных t, x, y, z, $\overline{z}$ и зависят от w_1, w_2. В данном случае $\Phi_2(w_1) = F(w_1)$, а

$$\Phi_3 = \Phi_3(w_1, w_2) = F_3(w_1) + \Phi_4(w_1, w_2) - A_1 w_1 - B_1 w_{1t} - 2w_{1ts} - B_0 w_{1s},$$
$$w_{1s} = y'\cos x + z'Q(t) + \overline{z'Q}(t),$$

а слагаемое $\Phi_4(w_1, w_2)$ определяется равенством

$$\Phi_4(w_1, w_2) = a(1-q)\{w_1 w_{2xx} + w_2 w_{1xx}\} + 2a^2(1-q)w_{1x}w_{2xx} - 2a^2 q\{w_{1x}w_{2xxx} + w_{1xxx}w_{2x}\} + \\ + 2aq\{w_{1x}w_{2xt} + w_{2x}w_{1xt}\} + a(q-1)\{w_{1t}w_{2xx} + w_{1xx}w_{2t}\}.$$

Отметим, что функция $w_2 = w_2(t,x,y,z,\overline{z})$ однозначно определяется как решение краевой задачи (23), (24), принадлежащее классу функции W_0. При этом y, z, $\overline{z}$ временно интерпретируются как параметры

$$w_2(t,x,y,z,\overline{z}) = (\eta_0 + \eta_2\cos 2x)y^2 + (\eta_3 z Q(t) + \overline{\eta_3 z}\overline{Q}(t))y\cos x,$$

где

$$\eta_0 = \frac{a}{2}\{q - 1 + a(q+1)\}, \quad \eta_2 = \frac{a}{2\eta_1}(q - 1 + a(1-3q)),$$
$$\eta_1 = 16a^2 q + 4(q-1)a + 1 = 3a(5aq + q - 1), \quad \eta_3 = \eta_{31} + i\eta_{32},$$
$$\eta_{31} = \frac{1}{\eta_4}(1-q)(2+q)a, \quad \eta_{32} = \frac{1}{\eta_4}(1-q)qa, \quad \eta_4 = 1 + (1+q)^2.$$

Подчеркнем, что $\eta_1 \neq 0$, так как по условию $g(4a) \neq 0$ (см. пп. 3.2 и 3.3 описания критических случаев).

Краевая задача (25), (26) также предполагает определение w_3 из класса функций W_0, но, в отличие от краевой задачи (23), (24), для нее условия разрешимости в этом классе функций не выполнены автоматически. Краевая задача (25), (26) имеет подходящее решение, если выполнены равенства (см., например, [4, 9])

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \Phi_3 \cos x dt dx = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \Phi_3 \exp(\pm it) dt dx = 0,$$

т.е. Φ_3 ортогональна в смысле скалярного произведения в $L_2(D)$ ($D \in \mathbb{R}^2$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$) решениям $\cos x$, $\exp(\pm it)$ порождающей линейной краевой задачи

$$w_{tt} + B_0 w_t + A_0 w = 0, \quad w_x|_{x=0,x=\pi} = w_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0.$$

При этом уместно подчеркнуть, что B_0, A_0 в нашем случае симметричные линейные дифференциальные операторы [9]. Проверка последнего факта достаточно стандартна (см., например, [9, глава 5]).

В данном случае условия разрешимости приводят к выводу о необходимости выполнения следующих равенств

$$y'(1+q)a - \alpha_0 a\sqrt{D}y = l_{11}y^3 + l_{12}y|z|^2, \quad 2_i z' - \alpha_1 iz + \alpha_1 z = l_{21}zy^2 + l_{22}z|z|^2.$$

Третье равенство не выписано, так как является комплексно сопряженным ко второму. После преобразований последних двух равенств получим условия разрешимости в более привычной записи — нормальную форму (22), где уже вид функций ψ_0, ψ_1 выявлен в явном виде. Укороченная нормальная форма (22) в данном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y' &= \nu_0 y + b_{11}y^3 + b_{12}y|z|^2, \\ z' &= (\nu_1+\nu_2)z + (b_{21}+ic_{21})y^2 z + (b_{22}+ic_{22})z|z|^2, \end{aligned} \tag{27}$$

При этом оказалось, что

$$\nu_0 = \alpha_0\frac{\sqrt{D}}{1+q}, \quad \nu_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \quad \nu_2 = \frac{\alpha_1}{2}, \quad D = q^2 - 6q + 1,$$

$$b_{11} = \frac{1}{1+q}\left[\frac{a-3}{4}q - (1-q)\left(\eta_0 + \frac{5}{2}\eta_2\right) + 2a(2+3q)\eta_2\right],$$

$$b_{12} = \frac{2}{1+q}\left[\frac{1-qa}{a} - 2\frac{a(1-q)^2}{1+(1+q)^2}\right],$$

$$b_{21} = \frac{1}{4}[(1+q)a-1] + a(1-q)(a-1)\frac{1}{2}\eta_{32} + a^2 q\eta_{32} + \frac{a}{4}(1+q)\eta_{31},$$

$$c_{21} = \frac{1}{4}a^2 q + \frac{1}{2}aq - \frac{a}{2}(1-q)(a-1)\eta_{31} - a^2 q\eta_{31} + \frac{a}{4}\eta_{32}(1+q), \quad b_{22} = c_{22} = -\frac{1}{2}.$$

Напомним, что $a = d_*$, где d_* — критическое значение параметра d. Возможные варианты выбора a изложены в предыдущем разделе. Например,

$$a = \frac{1-q+\sqrt{D}}{2q},$$

если $q \in (0, 3-2\sqrt{2})$. Критический случай реализуется на первой моде. Нулевому собственному значению операторного пучка (16) соответствует собственная функция $\cos x$.

Комплексная форма записи нормальной формы (27) может быть заменена на действительную, если перейти к тригонометрической форме комплексных чисел. Положим

$$z(s) = \rho(s)\exp(i\varphi(s)).$$

Вместо системы дифференциальных уравнений (27) получим уже следующую:

$$\begin{aligned} y' &= \nu_0 y + b_{11}y^3 + b_{12}y\rho^2, \\ \rho' &= \nu_1\rho + b_{21}\rho y^2 + b_{22}\rho^3, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\varphi' = \nu_2 + c_{21}y^2 + c_{22}\rho^2. \tag{29}$$

Основную роль для анализа нормальной формы (28), (29) играют первые два уравнения для «амплитудных» переменных, формирующие замкнутую подсистему.

Прежде чем перейти к анализу нормальной формы (28), следует подчеркнуть, что коэффициенты $b_{jk} = b_{jk}(q)$ $c_{jk} = c_{jk}(q)$ функции параметра q (величина a также в конечном счете зависит от q). Соответствующие формулы для коэффициентов приведены ранее и достаточно громоздки для их аналитического анализа. Сочетание аналитических вычислений с компьютерным анализом показало, что в случае варианта (ii) при реализации третьего критического случая оказалось, что при всех $q \in (0, 3-2\sqrt{2})$ справедливы неравенства

$$b_{11} < 0, \quad b_{12} < 0, \quad b_{21} > 0, \quad b_{22} < 0. \tag{30}$$

Если избрать вариант (iii) при реализации третьего критического случая и ограничиться только первой модой, то численные эксперименты показали следующее: начиная с $q = 0{,}126$ знаки для b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} остаются прежними, как и в случае варианта (ii) в третьем критическом случае (см. неравенства (30)).

5. Основной результат. Рассмотрим сначала вопрос о существовании и устойчивости нетривиальных состояний равновесия у системы дифференциальных уравнений (28) в том случае, когда выбран вариант (ii) при реализации изучаемого критического случая.

Лемма 1. *Система дифференциальных уравнений* (28) *может иметь нетривиальные состояния равновесия трех типов.*

$S_{1\pm}$: $y = \pm y_1, \rho = 0$, *где*

$$y_1 = \sqrt{-\frac{\nu_0}{b_{11}}}.$$

Эти два состояния равновесия существуют, если $\nu_0 > 0$ (*напомним, что* $b_{11} < 0$).

S_2: $y = 0$, $\rho = \rho_0$, *где* $\rho_0 = \sqrt{2\nu_1}$. *Это состояние равновесия существует, если* $\nu_1 > 0$.

$S_{3\pm}$: $y = \pm\sqrt{\Delta_1/\Delta}, \rho = \sqrt{\Delta_2/\Delta}$, *где*

$$\Delta = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} > 0, \quad \Delta_1 = \nu_1 b_{12} - \nu_0 b_{22}, \quad \Delta_2 = \nu_0 b_{21} - \nu_1 b_{11}.$$

Эти два состояния равновесия существуют, если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$.

Подчеркнем, что $\rho = \rho(t) \geqslant 0$.

Лемма 2. *Состояния равновесия* $S_{3\pm}$ *системы дифференциальных уравнений* (28) *асимптотически устойчивы при всех значениях параметров, когда существуют.* $S_{1\pm}$ — *асимптотически устойчивы, если* $\Delta_2 < 0$ *и неустойчивы, если* $\Delta_2 > 0$. S_2 — *асимптотически устойчиво, если* $\Delta_1 < 0$ *и неустойчиво, если* $\Delta_1 > 0$.

Доказательства лемм 1, 2 достаточно стандартны. Вопрос о существовании сводится к нахождению решений системы алгебраических уравнений

$$y(\nu_0 + b_{11}y^2 + b_{12}\rho^2) = 0, \quad \rho(\nu_1 + b_{21}y^2 + b_{22}\rho^2) = 0.$$

Выводы об устойчивости были получены на основе применения теоремы об устойчивости по первому (линейному) приближению.

Если теперь возвратиться к нормальной форме (27) — системе дифференциальных уравнений в комплексной форме записи, то решениям $S_{1\pm}$ соответствуют ее состояния равновесия, а S_2, $S_{3\pm}$ — уже циклы, так как $z(s) = \rho(s)\exp(i\varphi(s))$ и, если $\rho(s) = \mathrm{const}$, то $\varphi(s) = \chi_1 s + \chi_0$, где χ_0 — произвольная действительная постоянная, и, главное, χ_1 в ситуации общего положения является отличной от нуля постоянной. Так, например, при выборе решения S_2, у системы (28) постоянная $\chi_1 = \nu_2 + 2\nu_1 c_{22}$, а при выборе $S_{3\pm}$ эта постоянная $\chi_1 = \nu_2 + (c_{21}\Delta_1 + c_{22}\Delta_2)/\Delta$. Отметим, что $\varphi(s)$ определяется интегрированием дифференциального уравнения (29).

Уместно дополнительно отметить, что нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (28) асимптотически устойчиво, если $\nu_0, \nu_1 < 0$ и заведомо неустойчиво, если хотя бы одна из этих величин положительна. При $\nu_0 = \nu_1 = 0$ реализуется уже критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (28), который рассматривать в рамках этой работы не будем.

Лемма 3. *Состояниям равновесия системы дифференциальных уравнений* (28) $S_{1\pm}$ *соответствуют два состояния равновесия нормальной формы* (27) $E_{1\pm}$. *В тоже время состоянию равновесия* S_2 *соответствует цикл* C_2, *а* $S_{3\pm}$ — *циклы* $C_{3\pm}$. *Локальные аттракторы нормальной формы* (27) *наследуют устойчивость порождающих их состояний равновесия системы* (28).

Подчеркнем, что асимптотически устойчивым состояниям равновесия S_2, $S_{3\pm}$ соответствуют орбитально асимптотически устойчивые циклы.

Из уже полученных результатов в предыдущем и этом разделах вытекает (см., например, [2, теорема 3]) справедливость трех утверждений.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ асимптотически устойчивым (неустойчивым) состояниям равновесия $S_{1\pm}$ системы* (28) *соответствуют асимптотически устойчивые (неустойчивые) состояния равновесия $E_{1\pm}(\varepsilon)$ краевой задачи* (18), (19)

$$w_{1\pm}(x,\varepsilon) = \pm\varepsilon^{1/2} y_1 \cos x + \varepsilon y_1^2(\eta_0 + \eta_2 \cos 2x) + o(\varepsilon),$$

где постоянные y_1, η_0, η_2 были определены ранее.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ асимптотически устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия S_2 соответствует пространственно однородный орбитально асимптотически устойчивый (неустойчивый) цикл $C_2(\varepsilon)$ краевой задачи* (18), (19)

$$w_2(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\rho_0 \cos(\sigma_2(\varepsilon)t + h_2) + o(\varepsilon),$$

где $\rho_0 = \sqrt{2\nu_1}$, $\sigma_2(\varepsilon) = 1 + \varepsilon(\nu_2 + 2\nu_1 c_{22}) + o(\varepsilon)$, $h_2 \in \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Существует такое $\varepsilon_3 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ асимптотически устойчивым (неустойчивым) состояниям равновесия $S_{3\pm}$ соответствуют пространственно неоднородные орбитально асимптотически устойчивые (неустойчивые) циклы $C_{3\pm}(\varepsilon)$ краевой задачи* (18), (19). *Для решений, формирующих эти два цикла, справедливы асимптотические формулы*:

$$\begin{aligned} w_{3\pm}(t,x,\varepsilon) &= \varepsilon^{1/2}\Big[\pm y_3 \cos x + 2\rho_3 \cos(\sigma_3(\varepsilon)t + h_3)\Big] + \\ &+ \varepsilon\Big[y_3^2(\eta_0 + \eta_2\cos 2x) \pm 2y_3\rho_3\big[\eta_{31}\cos(\sigma_3(\varepsilon)t + h_3) - \eta_{32}\sin(\sigma_3(\varepsilon)t + h_3)\big]\Big]\cos x + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь

$$\sigma_3(\varepsilon) = 1 + \varepsilon(\nu_2 + c_{21}y_3^2 + c_{22}\rho_3^2), \quad y_3 = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}, \quad \rho_3 = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}$$

(*см. леммы* 1, 2). *Наконец, h_3 — произвольная действительная постоянная.*

На систему Кейнса (4), (5) с учетом диффузии результаты переносятся автоматически, если отметить, что в данном случае

$$u(t,x,\varepsilon) = (1 + \alpha_1\varepsilon)(1 + w_*(t,x,\varepsilon)),$$

где $w_*(t,x,\varepsilon)$ одно из решений, существованию и устойчивости которых посвящены теоремы 1–3. Первая компонента $y = y(t,x,\varepsilon)$ восстанавливается по формуле (6).

Замечание. Если ограничиться анализом задачи, когда диффузионная устойчивость реализуется на первой моде и дополнительно $q \in (q_1, q_*)$, где $q_* = 3 - 2\sqrt{2}$, а q_1 меньший корень уравнения $4q^2 - 33q + 4 = 0$ ($q_1 \approx 0{,}123$), то в качестве $a(d_*)$ можно выбрать не β_2, а β_1 — меньший корень многочлена $g(\beta)$. При этом, естественно, меняют свое значение коэффициенты нормальной формы. Тем не менее, b_{12}, b_{21}, b_{22} сохраняют прежние знаки при всех рассматриваемых q и $b_{11} < 0$, если $q > q_0$ ($q_0 \approx 0{,}126$). В этом случае основные качественные результаты сохраняются. При $q \in (q_1, q_0)$ оказалось, что $b_{11} > 0$. В таком случае состояния равновесия $S_{1\pm}$ существуют при $\nu_0 < 0$ и неустойчивы. Выводы относительно иных аттракторов аналогичны тем, что были сделаны ранее.

Это замечание основано на том факте, что $|b_{11}| \ll \min\{|b_{12}|, |b_{21}|, |b_{22}|\}$.

Ситуация, когда диффузионная неустойчивость может быть реализована на модах, отличных от первой, предполагает дополнительный анализ.

6. Заключение. В работе был рассмотрен наиболее типичный с точки зрения реализуемости вариант задачи о диффузионной неустойчивости пространственно однородного состояния равновесия в случае, когда возможно появление пространственно неоднородного цикла. Подчеркнем, что такой цикл устойчив всегда, когда существует, и, следовательно, в достаточной мере реализуем с «экономической» точки зрения. Еще одной особенностью полученных результатов является то, что иные локальные аттракторы не могут существовать одновременно с таким циклом. Если при выбранных значениях однородный цикл и существует, то он тогда неустойчив. Аналогичное замечание справедливо по отношению к пространственно неоднородным состояниям равновесия. Впрочем, такие стационарные решения как $E_{1\pm}(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ в случае их неустойчивости не представляют интереса с прикладной точки зрения, так как они не могут быть реализованы на практике.

Отметим, что безусловно, есть диапазон параметров задачи, когда $E_{1\pm}(\varepsilon)$ существуют и устойчивы. Наличие пространственно неоднородного состояния равновесия означает, что в данном экономическом регионе отдельные его части развиты неравномерно, хотя состояние экономического равновесия существует и асимптотически устойчиво (реализуемо).

Возвратимся к двум циклам $C_{3\pm}(\varepsilon)$. Пусть они существуют и устойчивы, т.е. выполнены условия теоремы 3. Наличие таких циклов означает, что цикличность реализуема, но в своеобразной форме. Параметры таких циклов существенно зависят от местоположения в регионе изучаемого экономического субъекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ванаг В. К.* Диссипативные структуры в реакционно-диффузионных системах. — М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008.
2. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 6. — С. 738–753.
3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
4. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972.
5. *Куликов А. Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. — М., 1976. — С. 114–129.
6. *Куликов А. Н.* Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *185*. — С. 122–131.
7. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 5. — С. 930–945.
8. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Локальные бифуркации в уравнениях Кана—Хилларда, Курамото—Сивашинского и их обобщениях// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 4. — С. 670–683.
9. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. — М.: Наука, 1968.
10. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984.
11. *Соболев С. Л.* Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. — Л., 1950.
12. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — *10*. — С. 297–370.
13. *Guckenheimer J., Holmes P. J.* Nonlinear Oscillations, Dynamical systems, and Bifurcations of Vector Fields. — New York: Springer-Verlag, 1983.
14. *Keynes J. M.* The General Theory of Employment, Interest and Money. — New York: Harcourt, 1936.
15. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Local bifurcations in the periodic boundary-value problem for the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation// Automat. Remote Control. — 2017. — *78*, № 11. — P. 1955–1966.
16. *Lions J. L.* Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. — Dunod, 1969.
17. *Marsden J. E., McCraken M.* The Hopf Bifurcation and Its applications. — New York: Springer-Verlag, 1976.
18. *Murray J. D.* Mathematical Biology. II. Spatial Models and Biomedical Applications. — Berlin: Springer-Verlag, 2003.
19. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
20. *Radin M. A., Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Synchronization of fluctuations in the interaction of economies within the framework of the Keynes business cycle model// Nonlin. Dynam. Psychol. Life Sci. — 2021. — *5*, № 1. — P. 93–111.
21. *Torre V. Existence of limit cycles and control in complete Keynesian systems by theory of bifurcations* Econometrica. — 1977. — *45*, № 6. — P. 1457–1466.

22. *Turing A. M.* The chemical basis of morphogensis// Phil. Trans. Roy. Soc. B. — 1952. — *237*. — P. 37–72.
23. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

Куликов Анатолий Николаевич
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: `anat_kulikov@mail.ru`

Куликов Дмитрий Анатольевич
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: `kulikov_d_a@mail.ru`

Фролов Дмитрий Геннадьевич
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 91–100
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-91-100

УДК 519.626

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2022 г. **С. О. НИКАНОРОВ**

Аннотация. Статья представляет результаты исследования динамической непрерывной модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона для рынка двух товаров. Исследование проводится с использованием результатов теории накрывающих отображений. Получены достаточные условия существования положения равновесия в данной модели. Равновесие в данной модели рассматривается как точка совпадения двух отображений: отображения спроса и отображения предложения, зависящих от цен на представленные виды товаров и от скоростей изменения этих цен.

Ключевые слова: экономическое равновесие, функция спроса, функция предложения, накрывающее отображение, точка совпадения.

STUDY OF MATHEMATICAL MODELS OF ECONOMIC PROCESSES BY METHODS OF THE THEORY OF COVERING MAPPINGS

© 2022 **S. O. NIKANOROV**

Abstract. In this paper, we study the Walras–Evans–Samuelson dynamic continuous model for a two-commodity market using the theory of covering mappings. We obtain sufficient conditions for the existence of an equilibrium position in this model. The equilibrium in this model is considered as a point of coincidence of two mappings: the demand mapping and the supply mapping, which depend on the prices for the presented types of goods and on the rates of change of these prices.

Keywords and phrases: economic equilibrium, demand function, supply function, covering mapping, coincidence point.

AMS Subject Classification: 65J15

1. Введение. Рассмотрим экономическую модель, в которой существуют две группы участников: потребители и производители. Производители создают некоторый объем товаров, который затем приобретают потребители. Производители стремятся максимизировать прибыль, производя необходимое для этого количество товаров. Потребители стремятся удовлетворить свои потребности, приобретая необходимые для этого блага (товары), исходя из доступного им бюджета. Если предложение (т.е. объемы производства) становится меньше, чем потребление (т.е. спрос) — возникает дефицит. Дефицит неблагоприятно влияет на жизнь и благосостояние общества. С другой стороны, избыток товара (т.е. предложение больше, чем спрос) негативно отражается на производителе. При прежних затратах на производство производитель получает меньшую прибыль. Таким образом, можем понять, что для экономической системы необходимо, чтобы спрос на каждый товар был равен предложению. Такое состояние системы называется экономическим равновесием. Идея положения равновесия берет свое начало в XIII веке, в труде Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства народов» [15]. Мари Эспри Леон Вальрас —

французский экономист, в начале XX века первым занялся построением модели общего равновесия. Отличительной чертой данной модели является то, что она рассматривается автономно, т.е. без воздействия на нее внешних процессов [16]. После Вальраса непрерывную динамическую модель предложил в 1930 г. Г. С. Эванс. Затем в 40-е годы XX века схожую идею предложил П. Э. Самуэльсон. Современное развитие теории накрывающих отображений позволяет получить достаточные условия существования равновесия в случае, когда функции спроса и предложения являются нелинейными (см. [1–13]). Эти результаты основываются на теореме о точках совпадения α-накрывающего и β-липшицева отображений. В настоящей работе были получены достаточные условия существования равновесия в модели «спрос-предложение». Для получения этих достаточных условий были применены результаты теории накрывающих отображений, а также теорема о существовании локальных решений дифференциальных уравнений. Данный подход может быть применен для исследования равновесия других динамических моделей с непрерывным временем типа «спрос-предложение».

2. Постановка задачи нахождения равновесия в модели «спрос-предложение».

2.1. Модель поведения потребителя. Функция спроса. Способность экономического блага удовлетворить ту или иную потребность называется полезностью. Функция полезности лишь представляет, или обобщает, передаваемую отношением предпочтения информацию. Предпочтения потребителя формально представляются бинарным отношением $\succsim$, определенным на потребительском множестве X. Существуют следующие предположения (аксиомы предпочтений):

1. Сравнимость (полнота): человек способен из двух наборов отдать предпочтение одному из них, или признать, что они для него равноценны ($A > B, A < B, A = B$).
2. Транзитивность: если $A > B$, а $B > C$, то $A > C$ (для трех элементов $x^1, x^2, x^3 \in X$ из отношения $x^1 \succsim x^2$ и $x^2 \succsim x^3$, следует $x^1 \succsim x^3$).
3. Ненасыщенность: это предположение предусматривает, что потребности потребителя в товаре не удовлетворены полностью, поскольку после достижения полной насыщенности нужд они превращаются в антиблаго.
4. Субституциональность: потребитель согласен отказаться от некоторого количества товара A, если вместо него ему предложат большее количество блага-субститута (взаимозаменяемого блага).

Между полезностью и количеством потребляемых продуктов существует определенная функциональная связь. Ее отображает функция полезности. Вещественная функция $u\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ называется функцией полезности, представляющей отношение предпочтения, если для любых $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n_+ : u(x^0) \geqslant u(x^1) \;\Leftrightarrow\; x^0 \succsim x^1$.

Функция полезности имеет вид:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max, \\ \langle p, I \rangle \leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

где p — цена товара, I — бюджет потребителя.

Свойства функции полезности:

1. Пусть отношение предпочтения $\succsim$ представимо функцией $u\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$. Тогда: $u(x)$ строго возрастает тогда и только тогда, когда $\succsim$ монотонно, $u(x)$ квазивогнута тогда и только тогда, когда $\succsim$ выпукло, $u(x)$ строго квазивогнута тогда и только тогда, когда $\succsim$ строго выпукло.
2. Инвариантность функции полезности относительно положительных монотонных образований. Пусть $\succsim$ является отношением предпочтения в $\mathbb{R}^n_+$. Предположим, что оно представимо функцией полезности $u(x)$. Другая функция $v(x)$ может представлять это отношение предпочтения тогда и только тогда, когда $v(x) = f(u(x))$ для любого x, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго возрастает на множестве значений функции u.
3. Дифференцируемость. Дифференцируемость исключает возможность резкого изменения в предпочтениях на противоположности. Также обеспечивает непрерывность и гладкость кривых безразличия. Таким образом, первая частная производная $u(x)$ по x_i называется предельной полезностью i-го товара.

Пусть $I > 0$ — определенный бюджет. Имеется n товаров, причем j-й товар имеет цену $p_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Существует набор товаров, которые может приобрести потребитель $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. G — заданное открытое можество $G \subset \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\colon x_j > 0,\ j = \overline{1,n}\}$. Таким образом, выбор потребителя сводится к нахождению условного экстремума функции полезности:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j = I, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G. \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что функция полезности такова, что задача имеет единственное решение. Это решение принято называть спросом, а зависимость спроса от цены p функцией спроса.

Функция (отображение) $D\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ описывает спрос и $D = D(p(t), t)$ является решением задачи (2).

2.2. Модель поведения производителя. Функция предложения. Далее рассмотрим модель поведения производителя. В этой модели ключевыми являются понятия функции предложения и функции прибыли. Каждый производитель имеет некоторые ресурсы и ограниченные производственные возможности, при этом он стремится максимизировать прибыль. Максимизация прибыли формализуется с помощью функции прибыли, которую можно задать разными способами.

Одним из способов является использование производственной функции, описывающей соотношение между вкладываемыми в производственный процесс ресурсами и конечным объемом выпуска.

Имеются n различных товаров, причем первые $m \leqslant n$ товаров создает производитель, потребляя при производстве все n товаров. Оставшиеся $n - m$ товаров импортируются в рассматриваемую систему извне. Заданы: цена j-го товара $p_j > 0$ и используемый при производстве i-й продукции объем имеющихся финансовых средств для приобретения ресурсов $b_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Обозначим через $x_{ij} > 0$ объем j-й продукции, расходуемый для производства i-й продукции, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Известна функция прибыли $\pi\colon \mathbb{R}^{m\times n}_+ \to \mathbb{R}_+$, значением которой $\pi(x)$ является прибыль производителя при заданном расходе ресурсов $x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$ и фиксированной цене $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Из всех возможных наборов ресурсов $x \in \mathbb{R}^{m\times n}_+$, для которых стоимость производства i-го товара не превышает b_i при любом $i = \overline{1,m}$, производитель выбирает тот, при котором прибыль максимальна.

Таким образом, выбор производителя сводится к задаче отыскания условного экстремума функции прибыли [6]:

$$\begin{cases} \pi(x) \to \max, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_{ij} = b_i, \quad x_{ij} > 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{3}$$

Решением экстремальной задачи является величина, называемая функцией предложения $S_i(P)\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, которая является общим объемом продажи i-го ($i = \overline{1,m}$) товара при заданном векторе цен $P \in \mathbb{R}^n_+$.

2.3. Постановка задачи нахождения положения равновесия. Рыночное равновесие — состояние, при котором ни у кого из экономических субъектов не возникает побуждений к его изменению. Применительно к спросу и предложению, точка равновесия будет находиться в точке пересечения кривых спроса и предложения.

В динамических моделях все переменные являются функциями времени, например: скорость изменения цены или скорость изменения объемов.

Таким образом, можем видеть, что задача нахождения точки рыночного равновесия сводится к решению уравнения

$$D(t, p, \dot{p}) = S(t, p, \dot{p}),$$

где p — это цена, D — отображение спроса и S — отображение предложения. Все функции являются непрерывными времени t,

$$\begin{aligned} p &= p(t); & p&\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+;\\ S &= S(p(t),t); & S&\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+;\\ D &= D(p(t),t); & D&\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

3. Получение достаточных условий существования равновесия.

3.1. Модель Вальраса—Эванса—Самуэльсона. Рассмотрим модель Вальраса—Эванса—Самуэльсона для рынка двух товаров (см. [2]).

Пусть заданы векторы $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $f(I) = (f_1(I), f_2(I)) \in \mathbb{R}^2_+$, $p_0 = (p_{01}, p_{02}) \in \mathbb{R}^2_+$, $d_1 = (d_{11}, d_{12}) \in \mathbb{R}^2_+$, $d_2 = (d_{21}, d_{22}) \in \mathbb{R}^2_+$, причем $d_{i1} < d_{i2}$, $\forall i = 1,2$, и векторы $v_1 = (v_{11}, v_{12}) \in \mathbb{R}^2$, $v_2 = (v_{21}, v_{22}) \in \mathbb{R}^2$.

Под математической моделью рынка будем понимать набор, который описывает обобщенную модель Вальраса—Эванса—Самуэльсона:

$$\sigma = (\mu, \lambda, I, p_0, d_1, d_2, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ — товары, приобретаемые потребителем вне зависимости от бюджета, I — бюджет потребителя. В рассматриваемой модели σ функция спроса имеет вид

$$D_i(p, \dot{p}) = f_i(I)\dot{p}_i p_i^{-1} + \mu_i, \quad i = 1,2,$$

а функция предложения определяется соотношением

$$S_i(t, p, \dot{p}) = \frac{t^{\lambda_i} p_i \dot{p}_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j \dot{p}_j} \quad i = 1,2.$$

Также известно значение функции цены в начальной точке:

$$p(a) = p_0, \quad p_0 = (p_{01}, p_{02}).$$

Имеются естественные ограничения на время, цены:

$$t \in [a,b], \quad p_i \in [d_{i1}, d_{i2}],$$

причем $d_{i1} = \min p$, $d_{i2} = \max p$ — соответственно минимальная и максимальная возможная цена единицы i-го товара для $i = 1,2$, $d_{i1} < d_{i2}$; и скорость изменения цен товаров соответственно:

$$\dot{p}_i \in [v_{i1}, v_{i2}], \quad i = 1,2.$$

Пусть

$$\hat{v}_i = \max_{i=1,2}(|v_{i1}|, |v_{i2}|), \quad \check{v}_i = \min_{i=1,2}(|v_{i1}|, |v_{i2}|), \quad i = 1,2.$$

Множество всех таких наборов σ обозначим через Σ.

3.2. Результаты теории накрывающих отображений. Введем следующие обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$; $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = |x|$; Ω — выпуклая оболочка множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; $L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

для заданного отрезка $[a,b]$; $AC_\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство таких абсолютно непрерывных функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что $\dot{x} \in L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$, с нормой $\|x\|_{AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)} = \|\dot{x}\|_{L_\infty} + |x(a)|$; $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_C = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Введем следующие определения.

Определение 1 (см. [5]). Отображение $\psi\colon X \to Y$ называется α-накрывающим, если

$$B_Y(\psi(x), \alpha r) \subset \psi(B_X(x, r)) \text{ для } \forall x \in X, r \geqslant 0,$$

где X и Y — метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y и $\alpha > 0$, $B_X(x, r)$ — замкнутый шар в полном пространстве X с центром в точке $x \in X$ и радиусом $r \geqslant 0$, а $B_Y(y, r)$ — замкнутый шар в пространстве Y с центром в точке $y \in Y$ радиуса $r \geqslant 0$.

Определение 2 (см. [1]). Пусть задано $\alpha > 0$ и множества $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$. Отображение $\psi\colon X \to Y$ называется α-накрывающим относительно множеств U, V, если для любых $u \in U$, $r > 0$, удовлетворяющих условию $B_X(x, r) \subseteq U$, имеет место включение

$$\psi(B_X(u, r)) \supseteq B_Y \psi(u), \alpha r) \cap V.$$

Определение 3 (см. [1]). Отображение $\psi\colon X \to Y$ называется условно α-накрывающим относительно множеств $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$, если оно является α-накрывающим относительно множеств U и $\tilde{V} = V \cap \psi(U)$. Если $U = X$, $V = Y$, то отображение называется условно α-накрывающим.

Определение 4 (см. [5]). Отображение $\psi\colon (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется липщицевым, если

$$\rho_Y(\psi(x), \psi(x')) \leqslant \beta \rho_X(x, x') \text{ для всех } x, x' \in X,$$

где $\beta \geqslant 0$ — константа Липшица.

Теорема 1 (теорема о точках совпадения (см. [6])). *Пусть пространство X полно, а*

$$D, S\colon X \to Y$$

— произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является α-накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что

$$D(\xi) = S(\xi), \tag{4}$$

$$\rho_X(x_0, \xi) \leqslant \frac{\rho_Y(D(x_0), S(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

Отметим, что решение ξ уравнения (4) может быть не единственным. Это решение ξ называется точкой совпадения отображений D и S.

Из теоремы 1 вытекает теорема Милютина о возмущении накрывающего отображения.

Теорема 2 (теорема о возмущении (см. [6])). *Пусть X — полное метрическое пространство, Y — нормированное пространство, отображение $D\colon X \to Y$ является непрерывным α-накрывающим. Тогда для любого отображения $S\colon X \to Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$, отображение $D + S$ является $(\alpha - \beta)$-накрывающим.*

Описание класса накрывающих отображений в функциональных пространствах требуется для приложения накрывающих отображений к исследованию функциональных и дифференциальных уравнений. Опишем условия накрываемости оператора Немыцкого в пространствах измеримых функций.

Пусть даны $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество и $\Psi\colon [a, b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ — функция, которая удовлетворяет условиям Каратеодори:

(i) функция $\Psi(t, \cdot)$ непрерывна при п.в. $t \in [a, b]$,
(ii) функция $\Psi(\cdot, x)$ измерима при любом $x \in \Omega$,
(iii) для любого $\nu > 0$ найдется такое число M, что при любых $x \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $y|x| \leqslant \nu$, и п.в. $t \in [a, b]$ имеет место неравенство $|\Psi(t, x)| \leqslant M$.

Рассмотрим полное метрическое пространство $L_\infty([a, b], \Omega)$ измеримых существенно ограниченных функций $x\colon [a, b] \to \Omega$ с метрикой $\rho_{L_\infty([a,b],\Omega)}(x, \hat{x}) = \|x, \hat{x}\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}$. Условия (i)–(iii) обеспечивают действие и ограниченность оператора Немыцкого $N_\Psi\colon L_\infty([a, b], \Omega) \to L_\infty([a, b], \mathbb{R}^m)$, $(N_\Psi x)(t) = \Psi(t, x(t))$.

Покажем, что при выполнении этих условий оператор $N_\Psi\colon L_\infty([a,b],\Omega)\to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ замкнут. Пусть для произвольных

$$\{x_i\}\subset L_\infty([a,b],\Omega),\quad x\in L_\infty([a,b],\Omega),\quad y\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$$

имеет место сходимость $\rho_{L_\infty([a,b],\Omega)}(x_i,x)\to 0$ и $\|N_\Psi x_i - y\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}\to 0$. Тогда $x_i(t)\to x(t)$ при п.в. $t\in[a,b]$. Поэтому вследствие непрерывности функции $\Psi(t,\cdot)$ выполнено соотношение $\Psi(t,x_i(t))\to\Psi(t,x(t))$ при п.в. $t\in[a,b]$. Но в то же время $\Psi(t,x_i(t))\to y(t)$. В силу единственности предела имеем $\Psi(t,x_i(t))=y(t)$ при п.в. $t\in[a,b]$. Таким образом, $N_\Psi x=y$, и оператор Немыцкого является замкнутым.

Рассмотрим уравнение

$$\Psi(t,x(t),x(t))=y(t),\quad t\in[a,b],\quad x(t)\in\Omega,$$

где функция $\Psi : [a,b]\times\Omega^2\to\mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям (i)–(iii). Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть заданы $\alpha>\beta\geqslant 0$, $R_1,R_2>0$, $u_0\in L_\infty([a,b],\Omega)$. Положим*

$$w_0(t)=\Psi(t,u_0(t),u_0(t)),\quad R_{\min}=\min\{R_1,R_2\},$$
$$U(t)=B_\Omega(u_0(t),R_1),\quad V(t,x_2)=B_{\mathbb{R}^m}(\Psi(t,u_0(t),x_2(t)),\alpha R_2),$$
$$r(y)=(\alpha-\beta)^{-1}\|y-w_0\|_{y\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)},\quad U_0(t,y)=B_\Omega(u_0(t),r(y))$$

для $y\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$. Предположим, что при п.в. $t\in[a,b]$ и любом $x_2\in U(t)$ отображение $\Psi(t,\cdot,x_2)\colon\Omega\to\mathbb{R}^m$ является условно α-накрывающим относительно шаров $U(t)$, $V(t,x_2)$; при п.в. $t\in[a,b]$ и любом $x_1\in U(t)$ функция $\Psi(t,\cdot,x_2)$ удовлетворяет на множестве $U(t)$ условию Липшица с константой β. Тогда для любого $y\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$, для которого имеет место неравенство

$$\|y-w_0\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}\leqslant(\alpha-\beta)R_{\min}$$

и при п.в. $t\in[a,b]$ выполнено включение

$$y\in\bigcup_{x_2\in U_0(t,y)}\Psi(t,U(t),x_2),$$

существует решение $x\in L_\infty([a,b],\Omega)$ уравнения, удовлетворяющее оценке

$$\rho_{L_\infty([a,b],\Omega)}(x,u_0)\leqslant(\alpha-\beta)^{-1}\|y-w_0\|_{y\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}.$$

3.3. Существование локальных решений дифференциального уравнения. Пусть $A_0\in\mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу Коши для не разрешенного относительно производной дифференциального уравнения, содержащего дополнительные ограничения на производную искомой функции:

$$f(t,x,\dot{x})=0,\quad \dot{x}\in\Omega,\quad t\in[a,b],$$

с начальным условием

$$x(a)=A_0.$$

Отметим, что рассматриваемая задача наряду с уравнением содержит также дополнительное ограничение на производную искомой функции: $\dot{x}\in\Omega$ для п.в. $t\in[a,b]$, которое может встречаться в приложениях, например, при исследовании задач для теории управления.

Будем предполагать, что функция $f\colon[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\Omega\to\mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т.е. условиям (i)–(iii), если функцию f рассматривать относительно двух аргументов $t\in[a,b]$ и $(x,z)\in\mathbb{R}^n\times\Omega$. Заметим, что здесь не предполагаются ни непрерывность функции f (по совокупности аргументов), ни ее дифференцируемость по третьему аргументу. Поэтому, даже если $\Omega=\mathbb{R}^n$, применение классических методов исследования, использующих теорему о неявной функции, невозможно.

В модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона рассматривается модель рыночного равновесия. В этом случае задача заключается в решении уравнения $D(\dot{p},p,t)=S(\dot{p},p,t)$.

Определение 5 (см. [1]). Пусть $\delta \in (0, b-a]$. Решением задачи Коши на отрезке $[a, a+\delta]$ будем называть абсолютно непрерывную функцию $x^\delta \colon [a, a+\delta] \to \mathbb{R}^n$, производная которой существенно ограничена, для которой справедливы условия (i)–(iii), а уравнение выполняется при п.в. $t \in [a, a+\delta]$.

Определим полное метрическое пространство $AC_\infty(A_0, [a,b], \Omega)$ таких абсолютно непрерывных функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что $\dot{x} \in L_\infty([a,b], \Omega)$ и $x(a) = a_0$, с метрикой.

$$\rho_{AC_\infty(A_0,[a,b],\Omega)} = \|x_1 - x_2\|_{AC_\infty(A_0,[a,b],\mathbb{R}^n)} = \|\dot{x}_1 - \dot{x}_2\|_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)} = \rho_{L_\infty([a,b],\Omega)}(\dot{x}_1, \dot{x}_2).$$

Согласно введенному определению, решение принадлежит пространству $AC_\infty(A_0, [a, a+\delta], \Omega)$.

Теорема 3 (см. [1]). *Пусть существуют такие положительные числа ν, R_1, R_2, $\sigma \in (0; b-a]$ и функция $\dot{x} \in L_\infty([a,b], \Omega)$, что выполнены следующие условия:*

(i) *для некоторого $\alpha > 0$ при п.в. $t \in [a, a+\sigma]$ и любом $p \in B_{\mathbb{R}^n}(A_0, \nu)$ отображение $f(t,p,\cdot)\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ является условно α-накрывающим относительно шаров*

$$U(t) = B_\Omega(\dot{x}, R_1), \quad V(t,p) = B_{\mathbb{R}^m}(\psi(t,p,\dot{x}), \alpha R_2),$$

причем

$$f(t,p,\dot{p}) = D(t,p,\dot{p}) - S(t,p,\dot{p}),$$

где $f(t,p,\dot{p})$ — α-накрывающее отображение, $D(t,p,\dot{p})$ — β-накрывающее отображение, $S(t,p,\dot{p})$ — γ-липшицево отображение и $\beta - \gamma = \alpha$.

(ii) *при п.в. $t \in [a, a+\sigma]$ и любом $x \in B_{\mathbb{R}^n}(A_0, \nu)$ выполнено включение*

$$0 \in f(t,p,U(t));$$

(iii) *существует такое $K \geqslant 0$, что при п.в. $t \in [a, a+\sigma]$ для всех $p, \hat{p} \in B_{\mathbb{R}^n}(A_0, \nu)$ и любого $u \in U(t)$ выполнено неравенство*

$$|f(t,p,u) - f(t,\hat{p},u)| \leqslant K|p - \hat{p}|;$$

(iv) *имеет место оценка*

$$r_0 \coloneqq \alpha^{-1} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,a+\sigma]} |f(t, A_0, \dot{x})| < R_{\min} = \min(R_1, R_2).$$

Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta \in (0, \sigma]$ и соответствующее решение

$$p^\delta \in AC_\infty(A_0, [a, a+\delta], \Omega)$$

задачи Коши, для которой выполнено неравенство

$$\rho_{L_\infty([a,a+\delta],\Omega)}(\dot{p}^\delta, \dot{x}^\delta) < r_0 + \epsilon,$$

где $\dot{x}^\delta$ — сужение функции $\dot{x}$ на $[a, a+\delta]$.

3.4. Достаточные условия существования равновесия в модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона. В модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона рассматривается рынок для двух товаров, которые имеют цену $p(t) > 0$ в момент времени $t \in [t_1, t_2]$, $t_1 \geqslant 0$. Пусть задано замкнутое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что $\dot{p}(t) \in \Omega$ для почти всех t.

Определим нормы в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^4$:

$$\|x\|_1 = \max_{i=\overline{1,2}} |x_i| \text{ для всех } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\|y\|_2 = \max_{i=\overline{1,4}} |y_i| \text{ для всех } y = (y_1, \ldots, y_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y), где $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2_+$, метрика ρ_X определяется нормой $\|\cdot\|_1$, а метрика ρ_Y — нормой $\|\cdot\|_2$.

Функция спроса совокупного потребителя описывается отображением

$$D\colon \Omega \times \mathbb{R}^2_+ \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2_+,$$

где $D = D(t, p(t), \dot{p}(t))$ — объем приобретаемого товара в момент времени t.

Функция предложения совокупного производителя описывается отображением

$$S\colon \Omega \times \mathbb{R}^2_+ \times [a,b] \to \mathbb{R}^2_+,$$

где $S(t,p(t),\dot p(t))$ — объем произведенного и предлагаемого на рынке товара в момент времени t. Будем предполагать, что отображения D и S удовлетворяют условиям Каратеодори:

(i) отображения $D(t,\cdot,\cdot)$, $S(t,\cdot,\cdot)$ непрерывны при почти всех $t \in [a,b]$;

(ii) отображения $D(\cdot,p(t),\dot p(t))$, $S(\cdot,p(t),\dot p(t))$ измеримы при любых $(\dot p(t),p(t)) \in \Omega \times \mathbb{R}^2_+$;

(iii) $\forall \rho > 0$ существует такое число M, что при $\forall(\dot p(t),p(t)) \in \Omega \times \mathbb{R}^2_+$, удовлетворяющих неравенству $\|(p(t),\dot p(t))\|_2 \leqslant \rho$, и при почти всех $t \in [a,b]$ имеют место неравенства

$$\|D(t,p(t),\dot p(t))\|_1 \leqslant M, \quad \|S(t,p(t),\dot p(t))\|_1 \leqslant M.$$

Для описанной модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона нужно определить достаточные условия существования равновесного положения. Следовательно, для доказательства существования равновесной цены нужно найти условия существования решения для поставленной задачи Коши. Для определения достаточных условий существования равновесного положения нам необходимы следующие понятия.

Утверждение 1 (см. [6]). *Пусть X, Y — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ соответственно, $A\colon X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Обозначим через* $\operatorname{cov}(A)$ *точную верхнюю грань всех таких чисел α, что отображение A является α-накрывающей. Тогда* $(\operatorname{cov}(A))^{-1}$ *совпадает с константой Банаха оператора A.*

Утверждение 2 (см. [6]). *Пусть отображение $D\colon X \to Y$ строго дифференцируемо в точке $x_0 \in X$. Тогда имеет место равенство:*

$$\operatorname{cov}(D|x_0) = \operatorname{cov}\left(\frac{\partial D}{\partial x}(x_0)\right).$$

Пусть множество $M \subset X$ является замкнутым шаром ненулевого радиуса. Тогда имеет место равенство:

$$\operatorname{cov}(D|M) = \inf_{x\in \operatorname{int} M} \operatorname{cov}(D|x).$$

Утверждение 3 (см. [6]). *Пусть некоторое отображение $S\colon M \to Y$ непрерывно на M и непрерывно дифференцируемо на* $\operatorname{int} M$. *Обозначим через* $\operatorname{lip}(S|M)$ *точную нижнюю грань всех таких чисел $\beta \geqslant 0$, что отображение S удовлетворяет на M условию Липшица с константой β. Тогда*

$$\operatorname{lip}(S|M) = \sup_{p\in \operatorname{int} M} \left\|\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right\|.$$

Здесь и далее норма производного линейного оператора $A\colon X \to Y$ определяется по формуле

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y.$$

Проведем оценку константы накрывания функции спроса $D(t,p,\cdot)$. Для этого найдем производную

$$\frac{\partial D}{\partial \dot p}(t,p,\dot p) = \begin{pmatrix} f_1(I)p_1^{-1} & 0 \\ 0 & f_2(I)p_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Аналогично оценим норму

$$\left\|\frac{\partial D}{\partial \dot p}(t,p,\dot p)\right\| = \max_{\|x\|_{\mathbb{R}^2}=1} \left\|\frac{\partial D}{\partial \dot p}(t,p,\dot p)x\right\|_{\mathbb{R}^2} = \max_{\|x\|_{\mathbb{R}^2}=1} \max_{i=1,2} |f_i(I)p_i^{-1}x_i| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=1,2} |f_i(I)p_i^{-1}| \leqslant \max_{i=1,2} |f_i(I)d_{i2}^{-1}| = \frac{1}{\bar\alpha(\sigma)}.$$

Получаем оценку сверху константы накрывания функции спроса:

$$\operatorname{cov}(D|M) \geqslant \bar\alpha(\sigma).$$

Оценим константу Липшица функции предложения $S(t,p,\cdot)$. Для этого вычислим частную производную:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot p}(t,p,\dot p)=\begin{pmatrix} \dfrac{t^{\lambda_1}p_1}{p_2\dot p_2} & -\dfrac{t^{\lambda_1}\dot p_1 p_1}{p_2(\dot p_2)^2} \\ -\dfrac{t^{\lambda_2}\dot p_2 p_2}{p_1(\dot p_1)^2} & \dfrac{t^{\lambda_2}p_2}{p_1\dot p_1}\end{pmatrix}.$$

Далее оценим норму:

$$\left\|\frac{\partial S}{\partial \dot p}(t,p,\dot p)\right\| = \max_{\|x\|_{\mathbb{R}^2}=1}\left\|\frac{\partial S}{\partial \dot p}(t,p,\dot p)x\right\|_{\mathbb{R}^2} =$$

$$= \max_{\|x\|_{\mathbb{R}^2}=1}\max_{i=1,2}\left|\frac{t^{\lambda_i}p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j\dot p_j}x_i - \frac{t^{\lambda_i}\dot p_i p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j(\dot p_j)^2}x_i\right| \leqslant \max_{i=1,2}\left|\frac{t^{\lambda_i}p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j\dot p_j} - \frac{t^{\lambda_i}\dot p_i p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j(\dot p_j)^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=1,2}\left(\left|\frac{t^{\lambda_i}p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j\dot p_j}\right| + \left|\frac{t^{\lambda_i}\dot p_i p_i}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} p_j(\dot p_j)^2}\right|\right) \leqslant \max_{i=1,2}\left(\left|\frac{b^{\lambda_i}d_{i2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} d_{j1}\check v_{j1}}\right| + \left|\frac{b^{\lambda_i}\hat v_{i2}d_{i2}}{\prod\limits_{\substack{j=1,2,\\ j\neq i}} d_{j1}(\check v_{j1})^2}\right|\right) = \bar\beta(\sigma).$$

Таким образом, получаем оценку снизу для константы Липшица функции предложения:

$$\mathrm{lip}(S|M) \leqslant \bar\beta(\sigma).$$

Тогда к модели применима теорема 3 и возможно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть модель $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяет условию $\bar\alpha(\sigma) > \bar\beta(\sigma)$. Тогда в исследуемой модели существует такое положение равновесия $p(t) = (p_1, p_2)$, что $d_{i1} < p_i(t) < d_{i2}$ и $v_{i1} < \dot p_i(t) < v_{i2}$, $i = 1, 2$.*

В утверждении 4 сформулированы достаточные условия существования положения равновесия в модели Вальраса—Эванса—Самуэльсона. Данный подход может быть применен для исследования равновесия в других динамических моделях с непрерывным временем типа «спрос-предложение».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аваков Е. Р., Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной// Диффер. уравн. — 2009. — *45*, № 5. — С. 613–634.
2. *Арутюнов А. В.* Точки совпадения двух отображений// Функц, анал. прилож. — 2014. — *48*, № 1. — С. 89—93.
3. *Арутюнов А. В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 2. — С. 163–169.
4. *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* Существование обратных отображений и их свойства// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2010. — *271*. — С. 12–22.
5. *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е.* О непрерывности обратных отображений для липшицевых возмущений накрывающих отображений// Фундам. прикл. мат. — 2014. — *19*, № 4. — С. 93–99.
6. *Арутюнов А. В., Жуковский С. Е., Павлова Н. Г.* Равновесная цена как точка совпадения двух отображений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2013. — *53*, № 2.
7. *Жуковский С. Е., Павлова Н. Г.* О приложении теории накрывающих отображений к нелинейной модели рынка// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2013. — *18*, № 1. — С. 47—49.
8. *Павлова Н. Г.* О применении результатов теории накрывающих отображений к исследованию динамических моделей экономических процессов// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2017. — *22*, № 6. — С. 1304—1308.

9. *Павлова Н. Г.* Исследование экономических моделей методами теории накрывающих отображений// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2013. — *18*, № 5. — С. 2621–2623.
10. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points// J. Fixed Points Theory Appl. — 2009. — *5*, № 1. — С. 5—16.
11. *Arutyunov A. V., Pavlova N. G., Shananin A. A.* New conditions for the existence of equilibrium prices// Yugoslav. J. Oper. Res. — 2018. — *28*, № 1. — С. 59–77.
12. *Pavlova N. G.* Necessary conditions for closedness of the technology set in dynamical Leontief model// Proc. 11 Int. Conf. "Management of Large-Scale System Development", 2018. — P. 1–4.
13. *Pavlova N. G.* Applications of the theory of covering maps to the study of dynamic models of economic processes with continuous time// in: Mathematical Analysis With Applications (*Pinelas S., Kim A., Vlasov V.*, eds.). — Cham: Springer, 2020. — P. 123–129.
14. *Pavlova N., Zhukovskaya Z., Zhukovskiy S.* Equilibrium in continuous dynamic market models// Proc. 15 Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems — 2020. — P. 1–3.
15. *Smith A.* An Inquiry into the Nature and Cause of the Wealth of Nations. — London: William Strahan and Thomas Cadell, 1776.
16. *Walras L.* Elements d'Economie Politique Pure. — Lausanne: Corbaz, 1874.

Никаноров Станислав Олегович
Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: nikanorovso@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 101–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-101-106

УДК 519.765, 51-7, 517.9

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДИФФУЗИОННО-ЛОГИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

© 2022 г. М. В. ПОЛОВИНКИНА

Аннотация. Отмечено, что добавление диффузионных членов к обыкновенным дифференциальным уравнениям (например, к логистическим) может в некоторых случаях улучшить (ослабить) достаточные условия устойчивости стационарного решения. Приведены примеры.

Ключевые слова: диффузионная модель, стационарное состояние, устойчивость.

ON SOME FEATURES OF DIFFUSION LOGISTICS MODELS

© 2022 M. V. POLOVINKINA

Abstract. We note that in some cases diffusion terms in an ordinary differential equations (for example, the logistic equation) can improve (weaken) sufficient conditions for the stability of a stationary solution. Examples are given.

Keywords and phrases: diffusion model, stationary state, stability.

AMS Subject Classification: 35B35, 35Q99

1. Актуальность проблемы. В работе затронута проблема устойчивости стационарных решений дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих прежде всего в математической биологии. Чаще всего такие системы возникают при описании роста и распространения популяций. Первая модель роста популяции, записанная в виде дифференциального уравнения, появилась вскоре после открытия дифференциального и интегрального исчисления (Maltus, 1798). В этой модели рассматривается однородная популяция в условиях неограниченных ресурсов питания и пространства обитания. При этом считается, что скорость роста популяции пропорциональна ее численности. Динамика численности (биомассы) такой популяции описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (см., например, [10, 11, 14])

$$\frac{du}{dt} = Au,$$

где A — врожденная (собственная, специфическая) скорость естественного увеличения популяции. Решением является функция

$$u(t) = u(t_0)\exp(At), \tag{1}$$

т.е. со временем численность популяции растет неограниченно по экспоненциальному закону. В соответствии с этим законом изолированная популяция развивалась бы в условиях неограниченных ресурсов. В природе такие условия встречаются крайне редко. Примером может служить размножение видов, завезенных в места, где имеется много пищи и отсутствуют конкурирующие виды и хищники (кролики в Австралии). Уравнение Мальтуса достаточно точно описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой в условиях избытка пищи и места популяции простейших организмов, например, пенициллиновых грибков, выращиваемых в культиваторе, до истощения культуральной среды.

Уравнение (1) справедливо лишь для ограниченного периода времени, в конечном счете растущая популяция исчерпает наличные ресурсы. Численность популяции может стабилизироваться на некотором устойчивом уровне; она может испытывать регулярные или нерегулярные флуктуации или может сокращаться. Поведение популяции, численность которой стабилизируется на некотором устойчивом уровне, часто описывают с помощью логистического уравнения, предложенного Ферхюльстом в 1838 г.:

$$\frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right),$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u(t) = \frac{u(t_0)K\exp(rt)}{K - u(t_0) + \exp(At)}.$$

Непосредственное исследование этой функции показывает, что при малых значениях u уравнение Ферхюльста может быть заменено уравнением Мальтуса, а рост носит взрывной экспоненциальный характер, с возрастанием же значения t величина $u(t)$ приближается к постоянному значению K. Функции, удовлетворяющие таким свойствам, дифференциальные уравнения, дающие в качестве решений такие функции, а также модели, в которые входят такие уравнения, часто называют *логистическими*.

Хорошо известно, что частное стационарное решение $u(t) \equiv 0$ уравнения Ферхюльста является неустойчивым. Это легко проверить с помощью первого линейного приближения. В общем случае для проверки устойчивости стационарного решения $w \equiv \mathrm{const}$ уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(u),$$

т.е. решения уравнения

$$f(w) = 0,$$

необходимо проверить знак производной $f'(u)$ в точке $u = w$. Для уравнения Ферхюльста функция $f(u)$ имеет вид

$$f(u) = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right),$$

ее производная имеет вид

$$\frac{df(u)}{du} = r - \frac{2ru}{K},$$

а в точке $u = 0$ она принимает значение

$$\left.\frac{df(u)}{du}\right|_{u=0} = r > 0.$$

Поскольку значение производной $f'(u)$ в точке $u(t) \equiv 0$ положительно, стационарное решение $u(t) \equiv 0$ неустойчиво.

Хотеллинг в 1921 г. предложил для описания популяций животных и людей учитывать кроме логистического закона еще и миграционные закономерности [19]. Для этого он предложил уравнение вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(\xi - p)p + B\Delta p, \tag{2}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа, A, B, ξ суть заданные положительные постоянные. Это уравнение описывает рост и распространение популяции. При этом входящие в уравнение величины имеют следующий смысл: A — темп роста популяции, B — темп распространения, ξ — порог насыщения численности (или коэффициент насыщенной плотности), p — размер (в другом варианте — плотность) популяции, t — время. x, y — координаты на плоскости. Это же уравнение используется и для моделирования развития злокачественной опухоли [22]. Первое слагаемое в правой части уравнения Хотеллинга называют опять логистическим. Второе же слагаемое принято называть *диффузионным* членом. Оно отражает влияние миграционных (диффузионных) процессов на изменение численности популяции. Уравнения и модели, отражающие изменения размера биомассы под влиянием логистических и диффузионных составляющих, стали называть *диффузионно-логистическими.* Такие модели могут включать в себя не только одно уравнение, но и системы уравнений в частных производных. Заметим также, что чисто логистические модели, включающие в себя лишь обыкновенные дифференциальные уравнения, относят к так называемым моделям с сосредоточенными параметрами, а диффузионно-логистические модели, включающие в себя дифференциальные уравнения в частных производных, относят к так называемым моделям с распределенными параметрами.

Исследования устойчивости стационарных состояний систем дифференциальных уравнений, которые моделируют рост определенных явлений, имеют давнюю историю. Во многих случаях такие модели основаны на обыкновенных дифференциальных уравнениях. Несмотря на то, что теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений давно уже является классической, интерес к ним не угасает. В последние несколько десятилетий это связано еще и с тем, что такие системы нашли приложения к моделированию биологических и социальных систем. Из относительно недавних работ по математической биологии можно в связи с этим указать [1, 4, 5, 12, 13, 15, 21]. В работе рассмотрена модель зарождения и развития течений в живописи, основанная на уравнениях такого же типа.

В настоящей работе рассматривается некоторый класс математических моделей с уравнениями в частных производных (модели с распределенными параметрами), которые получаются из моделей с обыкновенными дифференциальными уравнениями (модели с сосредоточенными параметрами) с помощью добавления так называемых диффузионных членов. Тенденцию подобных усложнений математических моделей можно отследить в некоторых работах, связанных с моделированием роста и распространения популяций, роста и распространения инфекций, роста опухолей. В связи с этим см. прежде всего монографию [11]. В работе [3] приведена диффузионная модель злокачественной опухоли. Математическая модель роста глиомы основана на классическом определении рака как неконтролируемой пролиферации клеток с потенциалом инвазии и метастазирования, упрощенном для глиом, которые практически не метастазируют. Эта модель приведена в [22].

Нас интересует вопрос об устойчивости стационарных решений диффузионных моделей. Этот вопрос обсуждается в монографии [11]. В этой книге отмечается, что добавление диффузионных членов может изменить характер устойчивости стационарного решения как в худшую, так и в лучшую сторону. Для моделей определенного типа попытаемся конкретизировать достаточные условия устойчивости тривиального решения.

2. Исследование устойчивости тривиального решения диффузионно-логистической модели. Рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений в частных производных (см. также [9]:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta u_s + F_s(u), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\left(\mu_s u_s + \eta_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right)\bigg|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad \mu_s^2 + \eta_s^2 > 0, \quad \mu_s \geqslant 0, \quad \eta_s \geqslant 0, \quad \mu_s = \text{const}, \quad \eta_s = \text{const}, \tag{4}$$

$$u_s(x, 0) = 0, \quad s = 1, \dots, m, \tag{5}$$

где Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, ν — единичный вектор нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω, $u = (u_1(x,t), \dots, u_m(x,t))$, $\vartheta_s \geqslant 0$, $s = 1, \dots, m$, Δ — оператор Лапласа, определенный формулой

$$\Delta v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

При выполнении условий

$$\vartheta_s = 0, \quad s = 1, \dots, m, \tag{6}$$

(в модели с сосредоточенными параметрами без диффузионных членов) переменные $x_1, \ldots, x_n$ входят в уравнения (3) как параметры, производные по которым не содержатся в этих уравнениях. Если же

$$\sum_{s=1}^{m} \vartheta_s^2 > 0, \tag{7}$$

то мы имеем дело с системой с распределенными параметрами.

Предположим, что функции $F_s(u) = F_s(u_1, \ldots, u_m)$, определены в некоторой окрестности точки $u = 0 \in \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в точке $u = 0$ и удовлетворяют условиям $F_s(0) = 0$, $s = 1, \ldots, m$. Тогда в некоторой окрестности G точки $u = 0 \in \mathbb{R}^m$ имеют место представления

$$F_s(u) = \sum_{k=1}^{m} b_{sk} u_k + \sum_{k=1}^{m} \epsilon_{sk}(u) u_k, \tag{8}$$

где

$$b_{sk} = \frac{\partial F_s(0)}{\partial u_k}, \quad \lim_{u \to 0} \epsilon_{sk}(u) = 0, \quad s, k = 1, \ldots, m.$$

Тривиальное решение $u = 0$ задачи (3)–(5) будет и ее стационарным решением. Поставим вопрос об устойчивости тривиального решения задачи (3)–(5). Нетривиальное решение $u(x,t)$ рассматривается как достаточно малое отклонение от тривиального решения.

Умножим (для каждого фиксированного s) уравнение (3) в системе на u_s, полученное равенство проинтегрируем по области Ω. Получим с учетом (8):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} u_s^2 dx = \vartheta_s \int\limits_{\Omega} u_s \Delta u_s dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} b_{sk} u_s u_k dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \epsilon_{sk}(u) u_s u_k dx, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Последнее слагаемое в правой части равенства (9) при малых отклонениях u не влияет на знак всей суммы и может быть отброшено. К первому слагаемому в правой части применим формулу Грина (см. [2]). В результате получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} u_s^2 dx = -\vartheta_s \int\limits_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx + \vartheta_s \int\limits_{\partial\Omega} u_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu} d\Gamma + \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} b_{sk} u_s u_k dx, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

где $d\Gamma$ является элементом границы $\partial\Omega$, так что второе слагаемое в правой части равенства (10) представляет собой поверхностный (при $n \geqslant 3$) или криволинейный (при $n = 2$) интеграл первого рода по границе области Ω, а в случае $n = 1$ этот интеграл следует поменять на сумму значений на концах интервала Ω. В интеграле по границе при $\mu_s = 0$ или при $\eta_s = 0$ подынтегральная функция равна нулю в силу краевого условия (4). Из этого же краевого условия при $\mu_s \eta_s > 0$ получим:

$$\left.\frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = -\left.\frac{\mu_s}{\eta_s} u_s\right|_{\partial\Omega}.$$

Поэтому равенство (10) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} u_s^2 dx = -\vartheta_s \int\limits_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx - \sigma\vartheta_s \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\mu_s}{\eta_s} u_s^2 d\Gamma + \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} b_{sk} u_s u_k dx, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{11}$$

где $\sigma = 1$ в случае $\mu_s \eta_s > 0$ или $\sigma = 0$ в случае $\mu_s \eta_s = 0$. Сложим m равенств (11), после чего получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} |u|^2 dx = \sum_{s=1}^{m} \left(-\vartheta_s \int\limits_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx - \sigma\vartheta_s \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\mu_s}{\eta_s} u_s^2 d\Gamma \right) + \int\limits_{\Omega} \sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \Theta_{sk} u_s u_k dx, \tag{12}$$

где $\Theta_{sk} = (b_{sk} + b_{ks})/2$. Знак левой части равенства (12) рассматривается как индикатор устойчивости тривиального решения. Поэтому важно найти соотношение слагаемых в правой части, приводящее к тому, чтобы это выражение было отрицательным. В скобках в правой части как первое слагаемое, так и второе слагаемое не больше нуля. Далее нужно учесть знак последнего слагаемого в правой части. Очевидно, что отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Theta_{sk}u_k u_s dx \tag{13}$$

обеспечит отрицательность левой части равенства (12), а значит, устойчивость стационарного решения.

В случае модели с сосредоточенными параметрами (система обыкновенных дифференциальных уравнений), т.е. при выполнении (6), отрицательная определенность квадратичной формы (13) является и необходимым условием устойчивости тривиального решения.

Перейдем к рассмотрению диффузионной модели с распределенными параметрами. В этом случае можно ослабить достаточное условие устойчивости стационарного решения. Для этого воспользуемся неравенством Стеклова—Пуанкаре—Фридрихса (см. [6, с. 62], [8, с. 150], [16, 20])

$$\int\limits_{\Omega} |\bigtriangledown u_s|^2 dx \geqslant \frac{1}{d^2}\int\limits_{\Omega} u_s^2 dx,$$

где $d = \operatorname{diam}\Omega$ — диаметр области Ω. Отсюда

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} |\, u\,|^2\, dx \leqslant -\sum_{s=1}^{m}\frac{\vartheta_s}{d^2}\int\limits_{\Omega} u_s^2 dx - \sum_{s=1}^{m}\vartheta_s\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\mu_s}{\eta_s}u_s^2 d\Gamma + \int\limits_{\Omega}\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Theta_{sk}u_k u_s dx. \tag{14}$$

Теперь можно утверждать, что достаточным условием устойчивости стационарного решения является отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}A_{sk}u_k u_s, \quad \text{где} \quad A_{sk} = \Theta_{sk} - \delta_{ks}\vartheta_s/d^2.$$

3. Примеры. Рассмотрим в качестве примера систему, которая в бездиффузионном варианте давно является одним из основных инструментов в математической экологии, генетике и математической теории отбора и эволюции [18]:

$$\partial u_s/\partial t = \left(\phi_s - \sum_{j=1}^{m}\phi_j u_j\right)u_s + \vartheta_s\Delta u_s, \quad s = 1,\ldots,m.$$

Условие $\phi_s < \vartheta_s/d^2$, $s = 1,\ldots,m$, достаточно для устойчивости тривиального решения этой системы. При $\vartheta_s > 0$, $s = 1,\ldots,m$, т.е. в случае диффузионной модели с распределенными параметрами, это условие выполнено для областей с небольшим диаметром. В случае системы с сосредоточенными параметрами при $\vartheta_s = 0$, $\phi_s > 0$, $s = 1,\ldots,m$, тривиальное решение неустойчиво.

Другой интересный пример дает уравнение Хотеллинга (2). Пусть $w(x,y)$ — стационарное решение уравнения Хотеллинга, т.е. решение уравнения

$$A(\xi - w)w + B\Delta w = 0.$$

Изложенный выше метод приводит к заключению о том, что условие

$$w > \frac{\xi}{2} - \frac{B}{2Ad^2}$$

является достаточным для устойчивости стационарного решения $w(x,y)$ (см. [7, 17]). Это условие при $B \neq 0$ выполняется при небольшом диаметре области Ω.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воропаева О. Ф., Цгоев Ч. А.* Численная модель динамики факторов воспаления в ядре инфаркта миокарда// Сиб. ж. индустр. мат. — 2019. — *22*, № 2. — С. 13–26.
2. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
3. *5–18* Математические модели злокачественной опухоли// Вестн. СПб. ун-та. Сер. 10. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2014. — № 3.
4. *Кабанихин С. И., Криворотько О. И.* Оптимизационные методы решения обратных задач иммунологии и эпидемиологии// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — *60*, № 4. — С. 590–600.
5. *Колпак Е. П., Гаврилова А. В.* Математическая модель возникновения культурных центров и течений в живописи// Мол. ученый. — 2019. — *22 (260)*. — С. 1–17.
6. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
7. *Мешков В. З., Половинкин И. П., Семенов М. Е.* Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга// Обозр. прикл. пром. мат. — 2002. — *9*, № 1. — С. 226–227..
8. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
9. *Половинкина М. В., Половинкин И. П.* Об изменении характера устойчивости тривиального решения при переходе от модели со сосредоточенными параметрами к модели с распределенными параметрами// Прикл. мат. физ. — 2020. — *52*, № 4. — С. 255–261.
10. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2005.
11. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978.
12. *Afraimovich V., Young T., Muezzinoglu M. K., Rabinovich M. I.* Nonlinear dynamics of emotion-cognition interaction: When emotion does not destroy cognition?// Bull. Math. Biol. — 2011. — *73*. — P. 266–284.
13. *Aniji M., Kavitha N., Balamuralitharan S.* Approximate solutions for HBV infection with stability analysis using LHAM during antiviral therapy// Boundary-Value Probl. — 2020. — *2020*. — 80.
14. *Brauer F., Castillo-Chavez C.* Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. — New York: Springer, 2012.
15. *D'Onofrio A., Manfredi P.* The interplay between voluntary vaccination and reduction of risky behavior: A general behavior-implicit SIR model for vaccine preventable infections// in: Current Trends in Dynamical Systems in Biology and Natural Sciences. — Switzerland: Springer Nature, 2020. — P. 185–203.
16. *Friedrichs K. O.* Spectral Theory of Operators in Hilbert Space. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1973.
17. *Gogoleva T. N., Shchepina I. N., Polovinkina M. V., Rabeeakh S. A.* On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — *1203*. — 012041.
18. *Karev G. P.* Replicator equations and the principle of minimal production of information// Bull. Math. Biol. — 2010. — *72*. — P. 1124–1142.
19. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
20. *Rektorys K.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. — Springer Science & Business Media, 2012.
21. *Seno H.* An SIS model for the epidemic dynamics with two phases of the human day-to-day activity// J. Math. Biol. — 2020. — *80*. — P. 2109–2140.
22. *Swanson K. R., Rostomily R. C., Alvord E. C.* A mathematical modelling tool for predicting survival of individual patients following resection of glioblastoma: a proof of principle// Br. J. Cancer. — 2008. — *98*, № 1. — P. 113–119.

Половинкина Марина Васильевна
Воронежский государственный университет инженерных технологий
E-mail: `polovinkina-marina@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 107–119
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-107-119

УДК 517.98

О ПРОИЗВЕДЕНИИ $l_{s,r}$-ЯДЕРНЫХ И БЛИЗКИХ К НИМ ОПЕРАТОРОВ

© 2022 г. **О. И. РЕЙНОВ**

Аннотация. Цель статьи — исследовать возможности факторизации различного типа ядерных операторов через гильбертовы пространства и применить получаемые результаты к задачам о распределении собственных чисел операторов из соответствующих классов.

Ключевые слова: ядерный оператор, класс Шаттена, пространство Лоренца, факторизация, гильбертово пространство.

ON THE PRODUCT OF $l_{s,r}$-NUCLEAR OPERATORS AND OPERATORS CLOSE TO THEM

© 2022 **O. I. REINOV**

Abstract. In this paper, we analyze the possibilities of factorization of various types of nuclear operators through Hilbert spaces and apply the results obtained to problems on the distribution of eigenvalues of operators from the corresponding classes.

Keywords and phrases: nuclear operator, Schatten class, Lorentz space, factorization, Hilbert space.

AMS Subject Classification: 47B10, 46B28

1. Введение. Пожалуй, впервые задача о распределении собственных чисел ядерных операторов появилась (неявно) в 1909 г. статье И. Шура [15]. Доказанное там неравенство для собственных чисел интегральных операторов в $L_2(a,b)$ с квадратично суммируемым ядром теперь известно как неравенство Шура (из него следует, что собственные числа этих операторов лежат в l_2). Заметим, что в случае, когда ядра непрерывны, эти интегральные операторы являются ядерными в $C[a,b]$.

В 1915 г. Т. Лалеско [10], обобщая теорему Шура, рассмотрел интегральные операторы, представляющие собой суперпозиции двух операторов Гильберта—Шмидта (такие операторы являются ядерными в $L_2(a,b)$), установив, что эти операторы имеют абсолютно суммируемую последовательности собственных чисел. В работе [10] Е. Лалеско не указывал явно пространство, в котором действуют его операторы, но если считать, например, что ядра операторов непрерывны и сами операторы заданы в пространстве $C[a,b]$, то они представят собой первые примеры произведений двух ядерных операторов. Полученная же им теорема тогда является первой теоремой о том, что произведение двух ядерных операторов имеет абсолютно суммируемую последовательность собственных чисел (что потом, в 1955 г., в абстрактной форме докажет А. Гротендик; см. ниже).

В 1916 г. Т. Карлеман [4] привел первый пример интегрального оператора с непрерывным ядром в $C[0,2\pi]$ (это ядерный оператор), собственные числа которого лежат в $l_2 \setminus \bigcup\limits_{r<2} l_r$. Этим была установлена точность теоремы Шура (если рассматривать ее как теорему об интегральном операторе с непрерывным ядром).

Абстрактное понятие ядерного (более того, s-ядерного) оператора было введено в рассмотрение лишь в 1955 г. А. Гротендиком [5] (после известных работ Шаттена, фон Ноймана и др.). Им были получены основные на то время результаты о распределении собственных чисел s-ядерных операторов.

После этой фундаментальной работы А. Гротндика над проблемой распределения собственных чисел как ядерных, так и близких к ним операторов работало (и продолжает работать) огромное число математиков. Невозможно перечислить всех основных авторов. В сравнительно близкий к исследованиям А. Гротендика период этим серьезно занимались такие специалисты как В. Б. Лидский, A. Pietsch, А. С. Маркус и В. И. Мацаев, H. König, B. Maurey, W. B. Johnson и многие другие. Соответствующие ссылки можно найти, например, в монографиях [12] и [13].

Следует отметить фундаментальную работу [8], в которой, помимо получения большого числа важных результатов, впервые был рассмотрен вопрос о распределении собственных чисел произведений нескольких операторов в банаховых пространствах, принадлежащих различным операторным идеалам (таких как идеалы абсолютно суммирующих операторов).

Эта заметка, как и предыдущие две [2, 3] возникла благодаря следующему вопросу Б. С. Митягина, заданному в 2014 г. на конференции, посвященной памяти А. Пелчинского, в Бедлево (Польша): верно ли, что произведение двух ядерных операторов в банаховых пространствах факторизуется через ядерный оператор в гильбертовом пространстве?

В [2], используя пример Карлемана, мы показали, что ответ отрицателен. Там же были приведены точные результаты о факторизации произведений s-ядерных операторов в банаховых пространствах через операторы из классов Шаттена [14]. Затем, в работе [3], были получены их конечномерные аналоги и, в частности, приведены доказательства анонсированных ранее утверждений.

Здесь исследуются более общие вопросы. Именно, при каких (желательно, *точных*) значениях параметров p, q ($p, q \in (0, +\infty]$) произведения нескольких так называемых (s, r)-ядерных (и близких к ним) операторов в банаховых пространствах факторизуется через операторы в гильбертовом пространстве, принадлежащие классам Лоренца—Шаттена $S_{p,q}$. Результаты применяются к некоторым задачам о распределении собственных чисел.

2. Предварительные сведения. Будем придерживаться терминологии монографии [13].. Везде далее через $X, Y, \dots$ обозначаются банаховы пространства, $L(X, Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из X в Y. Для банахова сопряженного к пространству X используется обозначение X^*. Если $x \in X$ и $x' \in X^*$, то используем обозначение $\langle x', x\rangle$ для $x'(x)$. Элементы пространств X, X^*, Y и т. д. будут обозначаться через x, x', y и т. д. Обозначения c_0, l_p, L_p ($0 < p \leqslant \infty$) стандартны.

Пространство Лоренца $l_{p,q}$ ($0 < p < \infty$, $0 \leqslant \infty$) состоит из последовательностей $\alpha := (\alpha_n) \in c_0$, для которых

$$\|\alpha\|_{p,q} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^{*q} n^{q/p-1}\right)^{1/q} < +\infty \quad \text{при} \quad q < \infty \quad \text{и} \quad |\alpha\|_{p\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^* n^{1/p} < +\infty,$$

где (α_n^*) есть неубывающая перестановка последовательности α, n-й элемент α_n^* которой определяется формулой

$$\alpha_n^* := \inf_{|J|<n} \sup_{j\notin J} |\alpha_j|.$$

С указанными квазинормами пространства $l_{p,q}$ являются полными квазинормированными пространствами. При $p = q < \infty$ получаем пространства l_p (с квазинормой $\|\cdot\|_p$). Естественно считать, что $l_{\infty\infty} = l_\infty$ (с квазинормой $\|\cdot\|_\infty$). Отметим, что $l_{p,q_1} \underset{\neq}{\subset} l_{p,q_2}$ для $q_1 < q_2$ и $l_{p_1,q_1} \underset{\neq}{\subset} l_{p_2,q_2}$ для $p_1 < p_2$ и для всех q_1, q_2.

Оператор $T\colon X \to Y$ называется *s-ядерным* ($0 < s \leqslant 1$, см., например, [13]), если он представим в виде

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k', x\rangle y_k, \quad x \in X,$$

где

$$(x'_k) \subset X^*, \quad (y_k) \subset Y, \quad \sum_k \|x'_k\|^s \|y_k\|^s < \infty.$$

Используем обозначение $N_s(X,Y)$ для линейного пространства всех таких операторов и $\nu_s(T)$ для соответствующей квазинормы

$$\inf \biggl(\sum_k \|x'_k\|^s \|y_k\|^s\biggr)^{1/s}.$$

В случае, когда $s = 1$, эти операторы называют просто *ядерными*. Оператор $T\colon X \to Y$ называется (s,r)-*ядерным* ($0 < s < 1$, $0 < r \leqslant \infty$ или $s = 1$, $0 < r \leqslant 1$; см., например, [6]), если он может быть представлен в виде

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x'_n, x\rangle y_n$$

для $x \in X$, где $(x'_n) \subset X^*$, $(y_n) \subset Y$, $\|x'_n\|, \|y_n\| \leqslant 1$, $(a_n) \in l_{s,r}$. Будем предполагать, что $\|x'_n\| = \|y_n\| = 1$ для всех n и что последовательность (a_n) неотрицательная и убывающая. Для векторного пространства всех таких операторов используем обозначение $N_{s,r}(X,Y)$, а для соответствующей квазинормы $\inf \|(a_n)\|_{l_{s,r}}$ — обозначение $\nu_{s,r}(T)$. В случае, когда $s = r = 1$, эти операторы называются *ядерными*.

Ниже рассматриваются только (s,r)-ядерные операторы для показателей, удовлетворяющих неравенствам $0 < r \leqslant s \leqslant 1$. Каждый (s,r)-ядерный оператор $T\colon X \to Y$ допускает факторизацию следующего вида:

$$T\colon X \xrightarrow{W} l_\infty \xrightarrow{\Delta} l_1 \xrightarrow{V} Y, \tag{1}$$

где $\|V\| = \|W\| = 1$ и Δ — диагональный оператор с диагональю $(d_n) \in l_{s,r}$. Действительно, достаточно положить

$$Wx := (\langle x'_k, x\rangle), \quad V(\alpha_n) := \sum \alpha_n y_n$$

и $\Delta(\beta_n) := (d_n\beta_n)$ (где $d_n := a_n$). Для наших целей удобно переписать указанную факторизацию следующим образом:

$$T\colon X \xrightarrow{W} l_\infty \xrightarrow{\Delta_1} l_2 \xrightarrow{\Delta_0} l_2 \xrightarrow{\Delta_2} l_1 \xrightarrow{V} Y, \tag{2}$$

где

$$\Delta_1 := \Bigl(\sqrt{n^{r/s-1} d_n^r}\Bigr), \quad \Delta_2 := \Bigl(\sqrt{n^{r/s-1} d_n^r}\Bigr), \quad \Delta_0 := \Bigl(n^{1-r/s} d_n^{1-r}\Bigr).$$

Предположим, что $\varepsilon > 0$ и в факторизации (1)

$$\|V\| = \|W\| = 1, \quad \|(d_n)\|_{l_{s,r}} \leqslant (1+\varepsilon)\nu_{s,r}(T).$$

Тогда

$$\|\Delta_2\| = \|\Delta_1\| \leqslant \pi_2(\Delta_1) \leqslant \Bigl\|\sqrt{n^{r/s-1} d_n^r)}\Bigr\|_{l_2} = \|n^{r/s-1} d_n^r)\|_{l_1}^{1/2} \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s,r}(T)]^{r/2}. \tag{3}$$

Также $\Delta_0 \in S_{q,v}(l_2)$, где $1/q = 1/s - 1$ и $1/v = 1/r - 1$. Более того, так как

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{v} = \frac{1}{s} - \frac{1}{r}, \quad 1 - r = \frac{r}{v},$$

$$\frac{v}{q} - 1 + v - \frac{vr}{s} = v\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} + r\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)\right) = v(1-r)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right) = r\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right),$$

то

$$\sigma_{q,v}(\Delta_0) = \Bigl(\sum n^{v/q-1}[n^{1-r/s} d_n^{1-r}]^v\Bigr)^{1/v} = \Bigl(\sum [n^{1/s-1/r} d_n]^r\Bigr)^{1/v} \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s,r}(T)]^{r/v}. \tag{4}$$

Факторизацию (s,r)-ядерного оператора T, описанную в (2)–(4), будем называть ε-*допустимой факторизацией для* T.

Для нас очень важными будут классы $S_{p,q}$ (классы Лоренца—Шаттена) операторов в гильбертовых пространствах, представляющие собой обобщения хорошо известных классов Шаттена S_p.

Класс $S_{p,q}$, $0 < p, q < \infty$, рассмотренный впервые Трибелем [16], определяется следующим образом. Пусть U — компактный оператор в гильбертовом пространстве H и (μ_n) — последовательность его сингулярных чисел (см., например, [12, 2.1.13]). Оператор U принадлежит пространству $S_{p,q}(H)$, если $(\mu_n) \in l_{p,q}$ (см., например, [12, 2.11.15]). Пространство $S_{p,q}(H)$ имеет естественную квазинорму

$$\sigma_{p,q}(U) = \|(\mu_n)\|_{p,q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{(q/p)-1} \mu_n^q \right)^{1/q}.$$

При $p = q$ класс $S_{p,p}$ совпадает с классом S_p (с квазинормой σ_p). Отметим, что для $p, q \in (0, 1]$ выполняется равенство $N_{p,q}(H) = S_{p,q}(H)$ (см. например, [6]). Имеют место включения $S_{p,q} \subset S_{p',q'}$, если $0 < p < \infty$ и $0 < q \leqslant q' < \infty$ или $0 < p < p' < \infty$, $o < q, q' < \infty$ (см. [16, Lemma 2]) и

$$S_{p,q} \circ S_{p',q'} \subset S_{s,r}, \quad \frac{1}{/}p + \frac{1}{p'} = \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{r}.$$

При этом, если $V \in S_{p,q}$ и $U \in S_{p',q'}$, то

$$\sigma_{s,r}(UV) \leqslant 2^{1/s} \sigma_{p',q'}(U) \sigma_{p,q}(V)$$

(см. [11, p. 155]). В случае, когда $p = q$, $p' = q'$, множитель $2^{1/s}$ в последнем неравенстве можно заменить на 1 (см. [7], [12, p. 128], [1, p. 262]).

Примерами $S_{p,q}$-операторов могут служить диагональные операторы D в l_2 с диагоналями (d_n) из $l_{p,q}$; в этих случаях пишем $D = (d_n)$.

Ниже используется понятие 2-абсолютно суммирующей нормы π_2 для операторов в банаховых пространствах (см. [13]). Отметим, что $\pi_2 = \sigma_2$ для операторов в гильбертовых пространствах (см. [13]).

3. Основные результаты.

Определение 1. Будем говорить, что оператор $T\colon X \to Y$ *факторизуется через оператор из* $S_{p,q}(H)$ (*через* $S_{p,q}$-*оператор*), если существуют такие операторы $A \in L(X, H)$, $U \in S_{p,q}(H)$ и $B \in L(H, Y)$, что $T = BUA$. Если T факторизуется через оператор из $S_{p,q}(H)$, то полагаем $\gamma_{S_{p,q}}(T) = \inf \|A\| \sigma_{p,q}(U) \|B\|$, где инфимум берется по всем возможным факторизациям оператора T через оператор из $S_{p,q}(H)$.

Ниже нам понадобится следующий факт.

Предложение 1. *Если оператор $T\colon X \to Y$ факторизуется через $S_{p,q}$-оператор, то для любого $\varepsilon > 0$ факторизацию $T = BUA$, где $A \in L(X, H)$, $U \in S_{p,q}(H)$ и $B \in L(H, Y)$, можно выбрать таким образом, что оператор B инъективен, $\overline{B(H)} = \overline{T(X)}$ и*

$$\|A\| \sigma_{p,q}(U) \|B\| \leqslant (1 + \varepsilon) \gamma_{S_{pq}}(T).$$

Доказательство. Это простое упражнение. В любом случае, доказательство соответствующего факта в [3] о факторизации через S_p оператор переносится и на этот случай. □

Следствие 1. *Пусть $0 < p \leqslant 1$, $0 < t \leqslant q \leqslant p$. В условиях предложения 1, если оператор T конечномерен, то*

$$\gamma_{S_{p,t}}(T) \leqslant (\dim T(X))^{1/t - 1/q} \gamma_{S_{p,q}}(T).$$

Доказательство. Если некоторый оператор $V\colon X \to Y$ факторизуется через $S_{s,r}$-оператор, то ассоциированный с ним оператор $V_0\colon X \to \overline{V(X)}$ факторизуется через $S_{s,r}$-оператор с той же $S_{s,r}$-факторизационной квазинормой (предложение 1). У нас пространство $T(X)$ конечномерно. Поэтому, применяя к оператору T теорему 1 и предложение 1, получаем соответствующую факторизацию $T = BUA$ нашего оператора через $S_{s,r}$-оператор в конечномерном гильбертовом пространстве (размерности $N := \dim T(X)$). Если $t \in (0, q]$, то наше утверждение следует из соответствующих неравенств для $S_{p,t}$-квазинорм в конечномерной ситуации: если $(\mu_k(U))_{k=1}^N$ — сингулярные числа оператора U, то согласно неравенству Гельдера

$$\left(\sum_{k=1}^{N} k^{t/p-1}\mu_k(U)^t\right)^{1/t} \leqslant N^{1/t-1/p}\left(\sum_{k=1}^{N} k^{q/p-1}\mu_k(U)^q\right)^{1/q}. \qquad \square$$

Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Если $X_1, X_2, \ldots, X_{m+1}$ — банаховы пространства, $0 < r_k \leqslant s_k \leqslant 1$ $T_k \in N_{s_k,r_k}(X_k, X_{k+1})$ для $k = 1, 2, \ldots, m$, то произведение $T := T_m T_{m-1} \ldots T_1$ может быть факторизовано через оператор из $S_{s,r}(H)$, где*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \ldots + \frac{1}{s_m} - \frac{m+1}{2}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_m} - \frac{m+1}{2}.$$

Более того,

$$\gamma_{S_{s,r}}(T) \leqslant 2^{1/s}\tilde{c}\prod_{k=1}^{m}\nu_{s_k,r_k}(T_k),$$

где $\tilde{c}$ — некоторая постоянная $\tilde{c} := c_{m;s_1,s_2,\ldots,s_{m-1}}$, зависящая только от значений указанных параметров. Если $s = r$, то постоянная перед произведением равна единице.

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. $m > 1$. Для каждого T_k пусть

$$T_k := V_k D_2^{(k)} D_0^{(k)} D_1^{(k)} W_k$$

— его ε-допустимая факторизация, так что $1/q_k = 1/s_k - 1$ и $1/v_k = 1/r_k - 1$. Отщепим часть произведения T, а именно, рассмотрим оператор

$$D_0^{(m)} D_1^{(m)} W_m V_{m-1} D_2^{(m-1)} D_0^{(m-1)} D_1^{(m-1)} W_{m-1} \ldots V_1 D_2^{(1)} D_0^{(1)} \colon l_2 \to l_2.$$

Каждый фрагмент вида $U_{k-1} := D_1^{(k)} W_k V_{k-1} D_2^{(k-1)} D_0^{(k-1)}$ этого произведения ($k > 1$),

$$U_{k-1}\colon l_2 \xrightarrow{D_0^{(k-1)}} l_2 \xrightarrow{D_2^{(k-1)}} l_1 \xrightarrow{V_{k-1}} X_k \xrightarrow{W_k} l_\infty \xrightarrow{D_1^{(k)}} l_2,$$

есть композиция операторов, для которых

$$\begin{aligned}\sigma_2\Big(D_1^{(k)} W_k V_{k-1} D_2^{(k-1)}\Big) &= \pi_2\Big(D_1^{(k)} W_k V_{k-1} D_2^{(k-1)}\Big) \leqslant \\ &\leqslant \Big\|n^{r_k/s_k-1}(d_n^{(k)})^{r_k}\Big\|_{l_1}^{1/2}\big\|D_2^{(k-1)}\big\| \leqslant \Big\|n^{r_k/s_k-1}(d_n^{(k)})^{r_k}\Big\|_{l_1}^{1/2}\Big\|n^{r_{k-1}/s_{k-1}-1}(d_n^{(k-1)})^{r_{k-1}}\Big\|_{l_1}^{1/2} \\ &\leqslant \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_k,r_k}(T_k)\Big]^{r_k/2}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_{k-1},r_{k-1}}(T_{k-1})\Big]^{r_{k-1}/2}\end{aligned}$$

и

$$\sigma_{q_{k-1},v_{k-1}}(D_0^{(k-1)}) = \Big(\sum[n^{1/s_{k-1}-1/r_{k-1}}d_n^{(k-1)}]^{r_{k-1}}\Big)^{1/v_{k-1}} \leqslant \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_{k-1},r_{k-1}}(T_{k-1})\Big]^{r_{k-1}/v_{k-1}}.$$

Следовательно, $U_{k-1} \in S_{u_{k-1},w_{k-1}}(l_2)$, где $1/u_{k-1} = 1/2 + 1/q_{k-1}$, $1/w_{k-1} = 1/2 + 1/v_{k-1}$, и

$$\sigma_{u_{k-1},w_{k-1}}(U_{k-1}) \leqslant 2^{1/u_{k-1}}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_k,r_k}(T_k)\Big]^{r_k/2}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_{k-1},r_{k-1}}(T_{k-1})\Big]^{1-r_{k-1}/2}.$$

Теперь

$$T = V_m D_2^{(m)} D_0^{(m)} U_{m-1} U_{m-2} \ldots U_1 D_1^{(1)} W_1.$$

Здесь

$$\|V_m\| = \|W_1\| = 1, \quad \|D_2^{(m)}\| \leqslant \Big\|n^{r_m/s_m-1}(d_n^{(m)})_m^r)\Big\|_{l_1}^{1/2} \leqslant \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_m,r_m}(T_m)\Big]^{r_m/2},$$

$$\sigma_{q_m,v_m}(D_0^{(m)}) = \Big(\sum[n^{1/s_m-1/r_m}d_n(m)]^{r_m}\Big)^{1/v_m} \leqslant \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_m,r_m}(T_m)\Big]^{r_m/v_m},$$

$$\big\|D_1^{(1)}\big\| \leqslant \Big\|n^{r_1/s_1-1}(d_n^{(1)})_1^r)\Big\|_{l_1}^{1/2} \leqslant \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_1,r_1}(T_1)\Big]^{r_1/2}.$$

Для произведения $U_{m-1}U_{m-2}\ldots U_1$, имеем $U_{m-1}U_{m-2}\ldots U_1 \in S_{u,w}(l_2)$, где

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{u_{m-1}} + \ldots + \frac{1}{u_1} = \frac{1}{s_{m-1}} + \ldots + \frac{1}{s_1} - \frac{m-1}{2},$$
$$\frac{1}{w} = \frac{1}{w_{m-1}} + \ldots + \frac{1}{w_1} = \frac{1}{r_{m-1}} + \ldots + \frac{1}{r_1} - \frac{m-1}{2}.$$

Более того, для некоторой постоянной $\tilde{c} \coloneqq c_{m;s_1,s_2,\ldots,s_{m-1}}$, зависящей только от значений указанных параметров,

$$\sigma_{u,w}(U_{m-1}U_{m-2}\ldots U_1) \leqslant \tilde{c}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_m,r_m}(T_m)\Big]^{r_m/2}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_{m-1},r_{m-1}}(T_{m-1})\Big]^{1-r_{m-1}/2}\times$$
$$\times\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_{m-1},r_{m-1}}(T_{m-1})\Big]^{r_{m-1}/2}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_{m-2},r_{m-2}}(T_{m-2})\Big]^{1-r_{m-2}/2}\times\ldots\times$$
$$\times\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_2,r_2}(T_2)\Big]^{1-r_2/2}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_2,r_2}(T_2)\Big]^{r_2/2}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_1,r_1}(T_1)\Big]^{1-r_1/2}.$$

Положим

$$A = D_1^{(1)}W_1, \quad B = V_mD_2^m, \quad U = D_0^mU_{m-1}U_{m-2}\ldots U_1.$$

Тогда $T = BUA$; согласно (3)–(4) имеем

$$\|A\| \leqslant \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_1,r_1}(T_1)\Big]^{r_1/2}, \quad \|B\| \leqslant \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_m,r_m}(T_m)\Big]^{r_m/2},$$

а также

$$\sigma_{s,r}(U) \leqslant 2^{1/s}\sigma_{q_m,v_m}(D_0^m)\sigma_{u,w}(U_{m-1}U_{m-2}\ldots U_1) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1/s}\tilde{c}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_m,r_m}(T_m)\Big]^{1-r_m}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_m,r_m}(T_m)\Big]^{r_m/2}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_{m-1},r_{m-1}}(T_{m-1})\Big]\times$$
$$\times\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_{m-2},r_{m-2}}(T_{m-2})\Big]\ldots\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_2,r_2}(T_2)\Big]\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_1,r_1}(T_1)\Big]^{1-r_1/2};$$

напомним, что

$$\frac{r_m}{v_m} = 1 - r_m, \quad \frac{1}{q_m} = \frac{1}{s_m} - 1, \quad \frac{1}{v_m} = \frac{1}{r_m} - 1.$$

Следовательно,

$$\gamma_{S_{s,r}(T)} \leqslant 2^{1/s}\tilde{c}\prod_{k=1}^{m}\nu_{s_k,r_k}(T_k).$$

Случай 2. $m = 1$. Пусть $0 < r \leqslant s < 1$ или $o < r < s = 1$ (ситуация, в которой $s = r = 1$, рассмотрена в [3]). В этом случае

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{s_1} - 1, \quad \frac{1}{v_1} = \frac{1}{r_1} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{v_1} = 1 - r_1.$$

Для ε-допустимой факторизации $T_1 \coloneqq V_1D_2^{(1)}D_0^{(1)}D_1^{(1)}W_1$ имеем:

$$\big\|V_1D_2^{(1)}\big\|\big\|D_1^{(1)}W_1\big\|\sigma_{q_1,v_1}(D_0^{(1)}) \leqslant \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_1,r_1}(T_1)\Big]^{r_1}\Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_1,r_1}(T_1)\Big]^{r_1/v_1} = (1+\varepsilon)\nu_{s_1,r_1}(T_1).$$

Следовательно, $\gamma_{S_{s_1,r_1}(T_1)} \leqslant \nu_{s_1,r_1}(T_1)$. $\square$

Из доказательства теоремы получаем даже более сильное утверждение.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 1 *для любого* $\delta > 0$ *произведение* $T := T_m T_{m-1} \dots T_1$ *может быть факторизовано следующим образом*:

$$T\colon X_1 \xrightarrow{\tilde{A}} l_2 \xrightarrow{\tilde{U}} l_2 \xrightarrow{\tilde{B}} X_m,$$

где $\pi_2(\tilde{A}) \leqslant 1$, $\pi_2(\tilde{B}^*) \leqslant 1$, *и*

$$\sigma_{s,r}(\tilde{U}) \leqslant (1+\delta) 2^{1/s} \tilde{c} \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k,r_k}(T_k).$$

Доказательство. Рассмотрим операторы A, U, B из доказательства теоремы 1 и положим

$$\tilde{A} := \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_1,r_1}(T_1)\Big]^{-r_1/2} A, \quad \tilde{B} := \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_m,r_m}(T_m)\Big]^{-r_1/2} B,$$
$$\tilde{U} := (1+\varepsilon)^{r_1/2 + r_m/2} \nu_{s_1,r_1}(T_1)^{r_1/2} \nu_{s_m,r_m}(T_m)^{r_m/2} U.$$

Выбрав достаточно малое $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, получим желаемую факторизацию. □

Замечание 1. Если $s = r$ (тогда все s_j и, соответственно, все r_j равны между собой), постоянная в неравенстве из теоремы 1 (соотв., в Следствии 2) равна единице (соотв., $1+\delta$) [3]. Действительно, в этом случае постоянные в неравенствах Гельдера для соотношений типа $S_r \subset S_p \circ S_q$ равны единице.

Следствие 3. *В условиях теоремы* 1, *пусть* $X_1 = X_m$ *и* $\delta > 0$. *Последовательность* $(\lambda_n(T))$ *собственных чисел оператора* T *лежит в пространстве* $S_{\tilde{s},\tilde{r}}$, *где*

$$\tilde{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s}, \quad \tilde{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r}.$$

При этом

$$\|(\lambda_n(T))\|_{\tilde{s},\tilde{r}} \leqslant 2^{1/s + 1/\tilde{s}} \tilde{c} \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k,r_k}(T_k).$$

Если $s = r$, *то постоянная справа в этом неравенстве равна* 1.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. В обозначениях следствия 2 и теоремы 1, рассмотрим следующую диаграмму:

$$\tilde{A}T : X_1 \xrightarrow{\tilde{A}} l_2 \xrightarrow{\tilde{U}} l_2 \xrightarrow{\tilde{B}} X_1 \xrightarrow{\tilde{A}} l_2.$$

Последовательность собственных чисел $(\lambda_n(T))$ оператора T совпадает (с учетом их алгебраических кратностей) с полной последовательностью собственных чисел оператора $\tilde{A}\tilde{U}\tilde{B}$ (см., например, [13]). Так как

$$\tilde{A}\tilde{U}\tilde{B} \in S_2 \circ S_{s,r} \subset S_{\tilde{s},\tilde{r}}$$

и $r \leqslant s$, то, по неравенству Вейля (см. [9, 1.c. 13]),

$$\|(\lambda_n(T))\|_{\tilde{s},\tilde{r}} \leqslant \sigma_{\tilde{s},\tilde{r}}(\tilde{A}\tilde{U}\tilde{B}) \leqslant 2^{1/\tilde{s}} \pi_2(\tilde{A}) \sigma_{s,r}(\tilde{U}) \leqslant (1+\delta) 2^{1/s + 1/\tilde{s}} \tilde{c} \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k,r_k}(T_k).$$

В силу произвольности δ, наше утверждение доказано. □

Замечание 2. Имеет место более сильный вариант последнего следствия. Пусть $\Sigma_{p,q}$ — пространство всех неупорядоченных комплексных последовательностей $\alpha = (\alpha_k)$, для которых конечна величина

$$\rho_{p,q}(\alpha, \beta) := \inf \operatorname{dist}_{p,q}(\alpha_k - \beta_k),$$

где $\operatorname{dist}_{p,q}$ — метрика на пространстве $l_{p,q}$, порождающая его естественную топологию (см., например, [12, 6.1–6.2], а также [5, Chap. 2, pp. 20–21]). Здесь inf берется по всевозможным последовательностям (α_k) (соответственно, (β_k)) из $l_{p,q}$, которые определяют неупорядоченную последовательность α (соответственно, (β_k)). Тогда, в условиях теоремы 1 (и следствия 3), *естественное отображение*

$$N_{s_m,r_m} \circ N_{s_{m-1},r_{m-1}} \dots \circ N_{s_1,r_1} \to \Sigma_{\tilde{s},\tilde{r}}$$

непрерывно. Доказательство сводится к случаю гильбертова пространства, в котором непрерывность естественного отображения $S_{\tilde{s},\tilde{r}} \to \Sigma_{\tilde{s},\tilde{r}}$ получается, например, с помощью рассуждений, аналогичных тем, что приведены в [1, Chap 11, § 7]. Впрочем, этот факт для s-ядерных операторов и операторов из класса S_p был известен еще А. Гротендику [5, Chap. 2, pp. 20–21].

Замечание 3. Следствие 3 точно для случая, когда $s = r$ (см. [3]). В общем случае точным оказывается такой результат.

Предложение 2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \ldots, X_{m+1}$ *— банаховы пространства,* $0 < r_k \leqslant s_k \leqslant 1$, $T_k \in N_{s_k,r_k}(X_k, X_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots, m$. *Тогда собственные числа произведения* $T := T_m T_{m-1} \ldots T_1$ *лежат в пространстве* $l_{p,q}$, *где*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \ldots + \frac{1}{s_m} - \frac{m}{2}, \quad \frac{1}{q} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{r_k}.$$

Доказательство. Воспользуемся теми фактами, что идеал операторов Вейля $\mathfrak{L}^{(x)}_{p,q}$ (см. [12]) типа $l_{p,q}$ имеет спектральный тип $l_{p,q}$ (т.е. последовательности собственные чисел операторов Вейля лежат в $l_{p,q}$; см. [12, 3.6.2]) и идеал (p_0, q)-ядерных операторов, где $1/p_0 = 1/2 + 1/p$, вложен в этот идеал операторов Вейля (см. [6, с. 243]). Из этих фактов следует, что оператор T лежит в соответствующем произведении идеалов операторов Вейля. По теореме о произведениях (см. [12, 2.4.18])

$$\mathfrak{L}^{(x)}_{p_1,q_1} \circ \mathfrak{L}^{(x)}_{p_2,q_2} \subset \mathfrak{L}^{(x)}_{p,q},$$

где

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

Поэтому $(\lambda_n(T)) \in \mathfrak{L}^{(x)}_{\tilde{s},q}$, где

$$\frac{1}{q} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{r_k}. \qquad \square$$

В [3], как видно из доказательства теоремы 3 указанной работы, мы на самом деле, кроме всего прочего, установили следующий результат, показывающий, что утверждение следствия 3 точно для случая, когда рассматриваются p-ядерные операторы и классы Шаттена S_p (т.е. в следствии 3 $s = r$). Сформулируем результат в полной общности (используя и заключение теоремы 1 при $s = r$).

Теорема 2. *В условиях теоремы 1, пусть* $\lambda := (\lambda_k(T))$ *есть последовательность всех собственных чисел оператора* T, *взятых с учетом кратностей. Если* $s_k = r_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, *то* $\lambda \in l_q$, *где*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_m} - \frac{m}{2},$$

причем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^q \right)^{1/q} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \nu_{r_k}(T_k).$$

Неравенство неулучшаемо с точностью до абсолютной постоянной (для любого количества операторов и для любого набора чисел $0 < r_k = s_k \leqslant 1$).

4. Факторизация операторов из $N_{s;2}$.

В этом разделе рассмотрим задачу о факторизации через операторы из классов Лоренца—Шаттена операторов типа $N_{s;2}$ (в индексе точка с запятой!). Здесь $0 < s \leqslant 2$. Для банаховых пространств X, Y пространство $N_{s;2}(X, Y)$ состоит из ядерных операторов $T\colon X \to Y$, которые представимы в виде

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x'_n, x \rangle y_n,$$

для $x \in X$, где

$$\|x'_n\| \leqslant 1, (a_n) \in l_s, \quad \|(y_n)\|_2^{weak} := \sup_{\|y'\|\leqslant 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y', y_n \rangle|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Такие операторы будем называть $(s;2)$-ядерными. Будем предполагать, что $\|x'_n\| = 1$, $\|(y_n)\|_2^{weak} = 1$ для всех n и что последовательность (a_n) неотрицательная и убывающая. Используем обозначение $\nu_{(s;2)}(T)$ для естественной квазинормы $\inf \|(a_n)\|_{l_s}$. Идеалы $(s;2)$-операторов являются частными случаями идеалов (s,r,q)-ядерных операторов из [13, 18.1].

Каждый $(s;2)$-ядерный оператор $T\colon X \to Y$ допускает факторизацию следующего вида:

$$T\colon X \xrightarrow{W} l_\infty \xrightarrow{\Delta} l_2 \xrightarrow{V} Y, \tag{5}$$

где $\|V\| = \|W\| = 1$ и Δ — диагональный оператор с диагональю $(d_n) \in l_s$. Действительно, достаточно положить

$$Wx := (\langle x'_k, x \rangle), \quad V(\alpha_n) := \sum \alpha_n y_n, \quad \Delta(\beta_n) := (d_n \beta_n)$$

(где $d_n := a_n$). Для наших целей удобно переписать указанную факторизацию следующим образом (следуем идеям из [12, 3.8.6]):

$$T\colon X \xrightarrow{W} l_\infty \xrightarrow{\Delta_1} l_2 \xrightarrow{\Delta_0} l_2 \xrightarrow{V}\to Y, \tag{6}$$

где $\Delta_1 := ({d_n}^{s/2})$ и $\Delta_0 := (d_n^{s/q})$, где $1/q = 1/s - 1/2$. Предположим, что $\varepsilon > 0$ и в факторизации (6) $\|V\| = \|W\| = 1$ и $\|(d_n)\|_{l_s} \leqslant (1+\varepsilon)\nu_{s;2}(T)$. Тогда

$$\pi_2(\Delta_1) \leqslant \|(d_n^{s/2})\|_{l_2} = \|(d_n)\|_{l_s}^{s/2} \leqslant \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s;2}(T)\Big]^{s/2}. \tag{7}$$

Также $\Delta_0 \in S_q(l_2)$ и

$$\sigma_q(\Delta_0) \leqslant \|(d_n)\|_{l_s}^{s/q} \leqslant \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s,2}(T)\Big]^{s/q}.$$

Поэтому $T = V\Delta_0\Delta_1 W \in S_q \circ \Pi_2$ и $\|T\|_{S_q \circ \Pi_2} \leqslant \nu_{s;2}(T)$.

Теперь нетрудно получить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \ldots, X_{m+1}$ — банаховы пространства, $0 < s_k \leqslant 2$ и $T_k \in N_{s_k;2}(X_k, X_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Тогда произведение $T := T_m T_{m-1} \ldots T_1$ может быть факторизовано через оператор из $S_s(H)$, где*

$$\frac{1}{s} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{s_k} - \frac{1}{2}.$$

Более того,

$$\gamma_{S_s}(T) \leqslant \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k;2}(T_k),$$

Доказательство. Следуя предыдущим рассуждениям, факторизуем каждый из операторов T_k как произведение $V^k \Delta_0^k \Delta_1^k W^k$ Тогда на «стыке» двух операторов появится оператор вида $\Delta_1^{k+1} W^{k+1} V^k$, у которого σ_2-норма не превосходит π_2-нормы оператора Δ_1^{k+1}, т.е. величины $\big[(1+\varepsilon)\nu_{s_{k+1};2}\big]^{s_{k+1}/2}$. За ним следует оператор Δ_0^{k+1}, для которого

$$\sigma_{q_{k+1}}(\Delta_0^{k+1}) \leqslant \Big[(1+\varepsilon)\nu_{s_{k+1};2}\Big]^{s_{k+1}/q_{k+1}}.$$

Поэтому

$$T \in L \circ S_{q_m} \circ S_2 \circ S_{q_{m-1}} \circ S_2 \circ \ldots \circ S_{q_2} \circ S_2 \circ S_{q_1} \circ \Pi_2 \circ L.$$

Здесь слева и справа в получаемой факторизации T появляются операторы V^m и $\Delta_1^1 W^1$ соответственно. Между ними находятся произведения вида $S_{q_k} \circ S_2$ ($m-1$ штука). Особняком входит в произведение оператор из S_{q_1}. Таким образом, используя неравенство Гельдера для произведений операторов из классов Шаттена, получаем:

$$T \in L \circ S_s \circ \Pi_2, \quad \gamma_{S_s} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k;2}(T_k). \qquad \square$$

Важно отметить, что в полученном неравенстве постоянная оценки справа (равная 1) не зависит от параметров.

Следствие 4. *В условиях теоремы* 3, *для любого* $\delta > 0$ *оператор* T *представим в виде произведения* $BUA \in L \circ S_s \circ \Pi_2$, *где*

$$\|B\| = 1, \quad \sigma_s(U) \leqslant (1+\delta) \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k;2}(T_k), \quad \pi_2(A) = 1.$$

Следствие 4 вытекает непосредственно из доказательства теоремы 3.

Следствие 5. *В условиях теоремы* 3, *пусть* $X_1 = X_m$ *и* $\delta > 0$. *Последовательность* $(\lambda_n(T))$ *собственных чисел оператора* T *лежит в пространстве* $S_{\tilde{s}}$, *где*

$$\tilde{s} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{s_k}.$$

При этом

$$\|(\lambda_n(T))\|_{\tilde{s}} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k;2}(T_k).$$

Доказательство. Применяем предыдущее следствие. Так как наборы собственных чисел операторов

$$T = BUA\colon X_1 \xrightarrow{A} l_2 \xrightarrow{U} l_2 \xrightarrow{B} X_1 \quad \text{и} \quad ABU\colon l_2 \xrightarrow{U} l_2 \xrightarrow{B} X_1 \xrightarrow{A} l_2$$

совпадают (вместе с кратностями) и $\Pi_2(l_2) = S_2(l_2)$ изометрично, то $(\lambda_n(T)) \in l_{\tilde{s}}$. Неравенство следует из неравенства Гельдера для произведений S_p-операторов и из неравенства Вейля между l_p-квазинормами последовательностей собственных и сингулярных чисел. $\square$

Приведем конечномерные варианты теоремы 3 и следствия 5.

Следствие 6. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \dots, X_{m+1}$ — *банаховы пространства,* $0 < s_k \leqslant 2$ *и* $T_k \in N_{s_k,2}(X_k, X_{k+1})$ *для* $k = 1, 2, \dots, m$. *Пусть, далее,*

$$\frac{1}{s} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{s_k} - \frac{1}{2}$$

и $0 < t \leqslant s$. *Если оператор* $T := T_m T_{m-1} \dots T_1$ *конечномерен, то*

$$\gamma_{S_s}(T) \leqslant (\dim T(X_1))^{1/t - 1/s} \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k;2}(T_k),$$

Для доказательства достаточно применить следствие 1.

Следствие 7. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \dots, X_{m+1}$ — *банаховы пространства,* $0 < s_k \leqslant 2$ *и* $T_k \in N_{s_k;2}(X_k, X_{k+1})$ *для* $k = 1, 2, \dots, m$. *Пусть, далее,*

$$\frac{1}{s} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{s_k} - \frac{1}{2}$$

и $0 < t \leqslant s$. *Если оператор* $T := T_m T_{m-1} \dots T_1$ *конечномерен, то*

$$\|(\lambda_n(T))\|_{\tilde{s}} \leqslant (\dim T(X_1))^{1/t - 1/\tilde{s}} \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k;2}(T_k), \quad \frac{1}{\tilde{s}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{s_k}.$$

Доказательство. Применяем предыдущее следствие и рассуждения из доказательства следствия 5. □

Результаты, полученные в последних двух следствиях, не улучшаемы (с точностью до абсолютной постоянной в неравенстве). По существу, соответствующий пример имеется в [3, теорема 2]. Удобно сформулировать в виде отдельного утверждения результат, установленный в доказательстве теоремы 2 в указанной работе (изменим здесь обозначения параметров из [3] для согласования с нашими обозначениями).

Предложение 3. *Существует такая постоянная $G > 0$, что для любого натурального числа n найдется оператор $A_n\colon l_1^n \to l_1^n$, обладающий следующим свойством. Если $m \in \mathbb{N}$, $p_k \in (0,1]$ для $k = 1, 2, \dots, m$,*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} - \frac{m+1}{2}, \quad u \in (0, p],$$

то

$$\gamma_{S_u}(A_n^m) \geqslant G n^{1/u-1/p} \prod_{k=1}^m \nu_{p_k}(A_n) = G n^{1/u-1/p} \left(\sum_{\lambda(A_n^m)} |\lambda(A_n^m)|^v \right)^{1/v},$$

где $(\lambda(A_n^m))$ — полный набор собственных чисел оператора A_n^m и $1/v = 1/2 + 1/p$.

Теперь о точности неравенств из следствий 6 и 7.

Теорема 4. *Существует такая постоянная $G > 0$, что для любого натурального числа n найдется оператор $A_n\colon l_1^n \to l_1^n$, обладающий следующим свойством. Если $m \in \mathbb{N}$, $s_k \in (0,1]$ для $k = 1, 2, \dots, m$,*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \dots + \frac{1}{s_m} - \frac{m+1}{2}, \quad t \in (0, r],$$

то

$$\gamma_{S_t}(A_n^m) \geqslant G n^{1/t-1/s} \prod_{k=1}^m \nu_{s_k}(A_n), \quad \prod_{k=1}^m \nu_{s_k;2}(A_n) = \left(\sum_{\lambda(A_n^m)} |\lambda(A_n^m)|^{\tilde{s}} \right)^{1/\tilde{s}}.$$

Доказательство. Оператор, о котором говорится в предложение 3, порождается унитарной матрицей

$$\left(n^{-1/2} \exp \frac{2\pi j l}{n} i \right), \quad j, l = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим несколько новых параметров. Пусть

$$\frac{1}{p_k} = \frac{1}{s_k} + \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u} = \frac{1}{t} + 1.$$

Для любого k имеют место соотношения

$$\nu_{s_k;2}(A_n) \leqslant \nu_{p_k}(A_n) \leqslant n^{1/s_k} = \left(\sum_{\lambda(A_n)} |\lambda(A_n)|^{s_k} \right)^{1/s_k} \leqslant \nu_{s_k;2}(A_n).$$

Поэтому

$$\prod_{k=1}^m \nu_{s_k;2}(A_n) = n^{\sum 1/s_k} = n^{1/\tilde{s}}.$$

Кроме того, $1/u - 1/p = 1/t - 1/s$ и $\gamma_{S_u}(A_n^m) \leqslant \gamma_{S_t}(A_n^m) \cdot n^{1/2}$ (неравенство Гельдера). Согласно предложению 3

$$\gamma_{S_t}(A_n^m) \geqslant n^{-1/2} G n^{1/t-1/s} \prod_{k=1}^m \nu_{s_k;2}(A_n) = n^{1/2} G n^{1/t-1/s} \left(\sum_{\lambda(A_n^m)} |\lambda(A_n^m)|^{\tilde{s}} \right)^{1/\tilde{s}}.$$ □

В работе [3] мы использовали предложение 3 для построения примера произведения N_s-операторов в l_1, для которого утверждения следствий 3 и 4 точны (при $s = r$; см. [3, теорема 3]. В наших последних утверждениях (следствия 6 и 7) получены оценки факторизационных γ_{S_p}-квазинорм, а также l_p-квазинорм последовательностей собственных чисел произведений $N_{s;2}$ операторов. Предыдущая теорема показывает, что эти оценки точны в конечномерных ситуациях.

С другой стороны, в доказательстве теоремы 4 существенно использовался тот факт, что для рассматриваемого там оператора A_n его ν_{p_k}- и $\nu_{s_k;2}$-квазинормы совпадают. Это приводит нас к результату, соответствующему [3, теорема 3]. Доказательство буквально то же, с заменой обозначений (одной квазинормы на другую). Основное совпадение рассматриваемых сейчас квазинорм (и это существенно в доказательстве той теоремы) — это то, что обе они, как ν_{p_k}, так и $\nu_{s_k;2}$ $(1/p_k = 1/2 + 1/s_k)$ являются полными p_k-нормами. Поэтому доказательство теоремы 3 из [3] почти дословно проходит в нашем случае для произведений операторов из $N_{s;2}$, приводя к следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $s_k \in (0, 2]$ для $k = 1, 2, \ldots, m$ и*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \ldots + \frac{1}{s_m} - \frac{1}{2}.$$

Существуют такие операторы $T_k \in N_{s_k;2}(X_k, X_{k+1})$ в банаховых пространствах, что композиция $T := T_m T_{m-1} \ldots T_1$ факторизуется через оператор из $S_s(H)$, но не факторизуется ни через какой оператор из $S_t(H)$, если $t \in (0, r)$. В качестве всех пространств X_k можно взять пространство l_1.

Итак, для произведений $(s; 2)$-ядерных и для произведений p-ядерных операторов, действующих из в L_1-пространств в L_1-пространства, получены точные ответы на вопросы о факторизации через операторы из классов Шаттена и о распределении их собственных чисел (но оставаясь в шкалах S_p и l_s).

Как выглядят ответы на соответствующие вопросы для произведений операторов, которые (произведения) действуют в L_p-пространствах?

Оставим ответы на этот и другие (более тонкие) вопросы до следующей статьи. Между прочим, для случая L_2-пространств ответы почти очевидны. Для того чтобы сформулировать некоторые результаты об операторах в L_p-пространствах, надо «интерполировать» полученные выше утверждения между L_1- и L_2-случаями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
2. *Рейнов О. И.* О произведении ядерных операторов// Функц. анал. прилож. — 2017. — *51*, № 4. — С. 90–91.
3. *Рейнов О. И.* О произведении s-ядерных операторов// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 2. — С. 311–316.
4. *Carleman T.* Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion// Acta Math. — 1916. — *41*. — P. 377–384.
5. *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires// Mem. Am. Math. Soc. — 1955. — *16*.
6. *Hinrichs A., Pietsch A.* p-Nuclear operators in the sense of Grothendieck// Math. Nachr. — 2010. — *283*, № 2. — С. 232–261.
7. *Horn A.* On the singular values of a product of completely continuous operators// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1950. — *36*. — P. 374–375.
8. *Johnson W. B., Konig H., Maurey B., Retherford J. R.* Eigenvalues of p-summing and l_p-type operators in Banach spaces// J. Funct. Anal. — 1979. — *32*. — P. 353–380.
9. *Konig H.* Eigenvalue Distribution of Compact Operators. — Springer: Basel, 1986.
10. *Lalesco T.* Un theoréorème sur les noyaux composés// Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. — 1915. — *3*. — P. 271–272.
11. *Pietsch A.* Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces// Math. Ann. — 1980. — *247*. — P. 149–168.

12. *Pietsch A.* Eigenvalues and s-Numbers. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
13. *Pietsch A.* History of Banach Spaces and Linear Operators. — Boston: Birkhäuser, 2007.
14. *Schatten R.* A Theory of Cross-Spaces. — Princeton Univ. Press, 1950.
15. *Schur I.* Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen// Math. Ann. — 1909. — *66*. — P. 488–510.
16. *Triebel H.* Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev–Besov-Räumen// Invent. Math. — 1967. — *4*. — P. 275–293.

Рейнов Олег Иванович
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: `orein51@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 120–143
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-120-143

УДК 517.9

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ВЫПУКЛОМ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

© 2022 г. **М. И. СУМИН**

Аннотация. Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности — принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) — в выпуклой задаче оптимального управления для параболического уравнения с операторным ограничением-равенством, а также с распределенным, начальным и граничным управлениями. Получение регуляризованных ПЛ и ПМП основано на использовании двух параметров регуляризации. Регуляризованные ПЛ и ПМП формулируются как теоремы существования в исходной задаче минимизирующих приближенных решений, состоящих из минималей ее регулярной функции Лагранжа.

***Ключевые слова*:** выпуклое оптимальное управление, параболическое уравнение, операторное ограничение, граничное управление, минимизирующая последовательность, регуляризирующий алгоритм, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, двойственная регуляризация.

ON REGULARIZATION OF CLASSICAL OPTIMALITY CONDITIONS IN CONVEX OPTIMAL CONTROL

© 2022 **M. I. SUMIN**

Abstract. We discuss regularization of two classical optimality conditions—the Lagrange principle (PL) and the Pontryagin maximum principle (PMP)—in a convex optimal control problem for a parabolic equation with an operator equality constraint and distributed initial and boundary controls. The regularized Lagrange principle and the Pontryagin maximum principle are based on two regularization parameters. These regularized principles are formulated as existence theorems for the original problem of minimizing approximate solutions.

***Keywords and phrases*:** convex optimal control, parabolic equation, operator constraint, boundary control, minimizing sequence, regularizing algorithm, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle, dual regularization.

***AMS Subject Classification*:** 49K20, 49N15, 47A52

1. Введение. Принцип Лагранжа (ПЛ) и принцип максимума Понтрягина (ПМП), в их различных вариантах, представляют собою классические условия оптимальности (КУО), вопросам формулировки и обоснования которых в теории оптимального управления посвящено большое число публикаций. Хорошо известно, что как ПЛ, так и ПМП были открыты благодаря, прежде всего, необходимости решения различных практических оптимизационных (экстремальных) задач (см., например, [1, глава 1], [5]). Однако возможности непосредственного применения ПЛ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00199_а).

и ПМП для практического решения многих важных оптимизационных задач сильно ограничивают присущие этим КУО «от природы» свойства некорректности. Это, прежде всего, связано с тем, что различные проявления некорректности свойственны самим задачам оптимизации в целом [4]. Здесь, говоря о некорректности КУО, мы имеем в виду такие ее проявления, как неустойчивость и невыполнимость [11–13]. Напомним, что мы говорим о неустойчивости КУО, если выделяемые ими в задачах, «близких» к исходной (невозмущенной) задаче элементы, формально удовлетворяющие КУО в этих возмущенных задачах, фактически не являются реальными приближениями к точному решению исходной задачи, то есть, при сколь угодно малых возмущениях оптимизационных задач эти удовлетворяющие «возмущенным» КУО элементы могут сколь угодно сильно отличаться, как по аргументу, так и по функции, от оптимальных элементов невозмущенных задач. В свою очередь, невыполнимость КУО в той или иной конкретной задаче условной оптимизации мы понимаем как принципиальную невозможность записать их для этой задачи в той привычной (классической) форме, в которой принято записывать условия оптимальности в других задачах данного класса. Простейший пример невыполнимости принципа Лагранжа в задаче выпуклого, а точнее говоря, линейного программирования с ограничением-равенством в бесконечномерном пространстве, можно найти в [1, с. 260]. Приведем другой характерный пример невыполнимости принципа Лагранжа [9–11, 13], показывающий, что существуют важные с точки зрения многих приложений задачи условной оптимизации, в которых формальное применение фундаментального результата совершенно «бессмысленно» по той причине, что его в этих задачах просто «невозможно записать».

Пример 1. Рассмотрим «простейшую» задачу условной оптимизации

$$\|z\|^2 \to \min, \quad Az = h \tag{1}$$

с таким инъективным и самосопряженным оператором $A\colon Z \to Z$ (Z — гильбертово пространство), что $R(A) \neq Z$ (например, A может быть интегральным оператором Фредгольма с замкнутым симметрическим ядром). Покажем, что в задаче 1 при выбранных определенным образом h принцип Лагранжа [1] не выполняется. Пусть $z^0 \in Z$, но $z^0 \notin R(A)$. Тогда рассматриваем задачу 1 с $h = Az^0$. В ней классический принцип Лагранжа в дифференциальной форме [1, п. 3.2.2] (см. также параметрические принципы Лагранжа в [9–11]), а, как следствие, и в недифференциальной форме, не выполняется. Действительно, если бы это было не так, то существовала бы такая невырожденная пара множителей $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R}^1 \times Z$, что $2\lambda_0 z^0 + A\lambda = 0$. В этом случае при $\lambda_0 = 0$ получаем $\lambda = 0$ в силу инъективности A, а при $\lambda_0 = 1$, соответственно, противоречивое равенство $z^0 = -1/2A\lambda$, что и доказывает невыполнимость классического принципа Лагранжа в задаче 1 с выбранным h[1]. Наконец, можно также утверждать, что хорошо известным классическим фактом является то, что задача 1 для всех h, для которых она разрешима, а вместе с этим и классические принцип Лагранжа, теорема Куна—Таккера для нее, в случае их применимости, неустойчивы по отношению к ошибкам исходных данных [15].

Подробное описание указанных понятий некорректности, применительно к задачам условной оптимизации и оптимального управления, связанную с ними историю вопроса, соответствующие комментарии можно найти в [9–13], иллюстративные примеры неустойчивости и невыполнимости КУО — в [9–11].

Анализ различных примеров задач условной оптимизации, оптимального управления приводит к естественному выводу о том, что свойства их некорректности, а также некорректности соответствующих КУО заложены в самой природе этих задач. Одновременно, проверка на корректность конкретных задач условной оптимизации и оптимального управления, их систем оптимальности представляет собою, как правило, сложную самостоятельную математическую задачу. Поэтому, если мы хотим «привлекать» КУО непосредственно к решению сложных оптимизационных задач, то и «относиться» к ним необходимо как к математическим объектам с выраженными свойствами некорректности [4, 15]. В этом случае естественно вести речь о регуляризации КУО [9–13].

[1]Можно заметить, что указанное обстоятельство имеет место на плотном подмножестве множества всех тех h, для которых задача 1 разрешима. При этом в каждой точке из этого плотного множества неразрешимой является соответствующая двойственная задача.

В пользу такого подхода к задачам условной оптимизации и оптимального управления говорит обширный класс подобных задач, возникающих в современном естествознании, приближенное задание исходных данных в которых неразрывно связано с физической сутью постановок таких задач.

Конечно, можно не принимать во внимание свойства некорректности и заниматься развитием теории КУО на основе традиционного подхода, опирающегося на предположение точного задания исходных данных оптимизационных задач, являющееся одним из основных предположений при получении любых КУО. Можно, наоборот, пытаться создать «некие аналоги» КУО в задачах на условный экстремум без предположения точного задания их исходных данных, «преодолевающие» указанные свойства некорректности. В данной работе мы придерживаемся второго подхода в теории условной оптимизации и оптимального управления, предполагающего регуляризацию КУО и естественным образом объединяющего два направления математической теории: КУО в задачах на условный экстремум (математическое программирование, оптимальное управление) и теорию некорректных задач. По нашему мнению, регуляризованные КУО должны:

(1) «преодолевать» возможные неустойчивость и невыполнимость классических аналогов, являясь регуляризирующими алгоритмами для решения оптимизационных задач;
(2) формулироваться как утверждения о существовании в исходной (невозмущенной) задаче минимизирующих последовательностей в некотором обобщенном (не классическом) смысле и быть «структурно устроенными» так же, как и КУО;
(3) приводить к КУО «в пределе»;
(4) служить теоретической базой для конструирования новых алгоритмов решения различных актуальных задач оптимального управления и сводящихся к ним обратных задач современного естествознания.

Настоящая работа посвящена регуляризации КУО в задаче оптимального управления для параболического уравнения с выпуклым функционалом цели, распределенным, начальным и граничным управлениями (тройка управлений), а также с операторным ограничением-равенством. В ней продолжается линия работы [12], в которой также рассматривалась регуляризации КУО в задаче оптимального управления с операторным ограничением-равенством, но в случае сосредоточенной управляемой системы. Получение регуляризованных КУО для задач оптимального управления распределенными системами, по сравнению с аналогичными задачами для систем сосредоточенных, сопряжено с рядом существенных трудностей технического характера. Эти трудности вызваны «более сложным устройством» уравнений в частных производных, необходимостью применения «подходящих» априорных оценок для их решений, свойств регулярности этих решений, влекущих их «нужные компактностные» свойства. Все эти отмеченные обстоятельства являются существенными при получении регуляризованных КУО в рассматриваемой в данной работе задаче, при этом особое внимание мы уделяем здесь описанию процесса получения регуляризованных ПМП. Мы доказываем в работе два варианта регуляризованных ПМП (теоремы 3, 4). Они разнятся «своим устройством» относительно граничного управления: в первом случае регуляризованный ПМП носит интегральный характер по граничной компоненте тройки управлений; во втором же — поточечный. Главную роль при их доказательстве играет вывод обычного ПМП в «простейшей» задаче минимизации регулярной функции Лагранжа исходной задачи (см. леммы 4, 7 и их доказательства).

Подчеркнем, наконец, что, как и в [11–13], центральными понятиями здесь являются понятие обобщенной минимизирующей последовательности — минимизирующего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги [3] (в теории математического программирования подобные обобщенные (минимизирующие) последовательности, удовлетворяющие ограничениям задачи «в пределе», известны также под названием обобщенных (оптимальных) планов [6]) и жестко с ним связанное понятие МПР-образующего (регуляризирующего) алгоритма [12, 13]. Последнее, так же, как и в [12,13], «встраивается» в получаемые регуляризованные ПЛ и ПМП, превращая их в соответствующие регуляризирующие алгоритмы. Такая трансформация КУО основана, по аналогии с [12,13], на использовании двух параметров регуляризации, один из которых «отвечает» за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к целевому функционалу исходной задачи, который не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Естественно, в случае сильной выпуклости целевого функционала второй регуляризирующий параметр является излишним и его следует считать равным нулю. Отметим также, что применяемое здесь понятие МПР-образующего алгоритма [12, 13] можно квалифицировать как занимающее промежуточное положение между понятиями регуляризирующих алгоритмов первого (сходимость нижних граней, см. [4, гл. 9, § 2, с. 802, определение 1]) и второго типа (сходимость по аргументу, см. [4, гл. 9, § 6, с. 837, 838, определение 1]), применяемых в [4, гл. 9] (подробности см. в [12, 13]).

Отметим, наконец, что интерес к проблемам, связанным с вопросами регуляризации КУО, наблюдается на протяжении нескольких последних десятилетий. В частности, укажем здесь на работы самого последнего времени [16, 17] (см. также библиографию этих работ) по обоснованию так называемого SQH метода (Sequential Quadratic Hamiltonian Method) для решения задач оптимального управления, представляющего собою основанную на ПМП итерационную схему, предполагающую использование числовых регуляризирующих добавков к гамильтониану задачи. Подчеркнем, в то же время, что указанный SQH метод [16, 17] предназначен для решения лишь задач оптимального управления с геометрическими ограничениями.

2. Постановка задачи оптимального управления. Пусть $U \subset \mathbb{R}^1$, $V \subset \mathbb{R}^1$, $W \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклые компакты, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x,t) : x \in S, t \in (0,T)\}$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$,

$$\mathcal{D}_1 \equiv \Big\{u \in L_2(Q_T) : u(x,t) \in U \text{ п.в. на } Q_T\Big\},$$
$$\mathcal{D}_2 \equiv \Big\{v \in L_2(\Omega) : v(x) \in V \text{ п.в. на } \Omega\Big\},$$
$$\mathcal{D}_3 \equiv \Big\{w \in L_2(S_T) : w(x,t) \in W \text{ п.в. на } S_T\Big\},$$

$\mathcal{D} \subset L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$, u, v, w — управляющие функции. Норму в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с элементами $\pi \equiv (u,v,w)$ обозначим через $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Рассмотрим выпуклую задачу условной минимизации не сильно выпуклого (вообще говоря) функционала с фазовым в финальный момент времени (полуфазовым) ограничением-равенством

$$f(\pi) \to \min, \quad g(\pi)(x) \equiv G_1(x)z[\pi](x,T) + G_2(x) = 0 \text{ при п.в. } x \in \Omega, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}, \tag{OC}$$

где выпуклый функционал $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ задается равенством[1]

$$f(\pi) \equiv \Big\langle A_1(\cdot,\cdot)z[\pi](\cdot,\cdot), z[\pi](\cdot,\cdot)\Big\rangle_{L_2(Q_T)} +$$
$$+ \Big\langle A_2(\cdot)z[\pi](\cdot,T), z[\pi](\cdot,T)\Big\rangle_{L_2(\Omega)} + \Big\langle A_3(\cdot,\cdot)z[\pi](\cdot,\cdot), z[\pi](\cdot,\cdot)\Big\rangle_{L_2(S_T)} +$$
$$+ \int_{Q_T} B_1(x,t,u(x,t))dxdt + \int_{\Omega} B_2(x,v(x))dx + \int_{S_T} B_3(s,t,w(s,t))dsdt.$$

Здесь и ниже $z[\pi]$ — решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ (см. [7, гл. III]) третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения дивергентного вида:

$$\begin{aligned} & z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t)z + u(x,t) = 0, \\ & z(x,0) = v(x), \qquad\qquad x \in \Omega, \\ & \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)z = w(x,t), \qquad (x,t) \in S_T. \end{aligned} \tag{2}$$

В (2), как и в [7],

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial \mathcal{N}} \equiv a_{i,j}(x,t)z_{x_j}(x,t)\cos\alpha_i(x,t),$$

[1]Здесь и ниже $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве.

$\alpha_i(x,t)$ — угол, образованный внешней нормалью к S с осью x_i. Решения задачи (ОС^0) в случае их существования будем обозначать через π^0, а всю совокупность таких решений — через Π^0.

Замечание 1. Первые три слагаемых целевого функционала задачи (ОС) имеют «квадратичный вид» по фазовой переменной. Это позволяет заметно сократить выкладки при доказательстве ПМП в задаче минимизации регулярной функции Лагранжа (см. леммы 4, 7). Излагаемый ниже подход может быть применен и к задачам с целевыми функционалами более «общего выпуклого» вида.

Ниже нам потребуются следующие условия на исходные данные оптимизационной задачи (ОС):

(a) функции $A_1\colon Q_T\to\mathbb{R}^1$, $A_2\colon\Omega\to\mathbb{R}^1$, $A_3\colon S_T\to\mathbb{R}^1$, $B_1\colon Q_T\times W\to\mathbb{R}^1$, $B_2\colon\Omega\times V\to\mathbb{R}^1$, $B_3\colon S_T\times W\to\mathbb{R}^1$ $G_1\colon\Omega\to\mathbb{R}^1$, $G_2:\Omega\to\mathbb{R}^1$ измеримы по Лебегу; кроме того, функция $B_1(x,t,\cdot)\colon U\to\mathbb{R}^1$ выпукла и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L>0$ при п.в. $(x,t)\in Q_T$, функция $B_2(x,\cdot)\colon V\to\mathbb{R}^1$ выпукла и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L>0$ при п.в. $x\in\Omega$, функция $B_3(s,t,\cdot)\colon W\to\mathbb{R}^1$ выпукла и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L>0$ при п.в. $(s,t)\in S_T$;

(a$'$) функция $B_3(s,t,\cdot)$ определена и непрерывно дифференцируема в окрестности сегмента W при п.в. $(s,t)\in S_T$[1];

(b) выполняются условия

$$\begin{aligned}
&0\leqslant A_1(x,t)\leqslant L && \text{при п.в. } (x,t)\in Q_T,\\
&0\leqslant A_2(x)\leqslant L && \text{при п.в. } x\in\Omega,\\
&0\leqslant A_3(x,t)\leqslant L && \text{при п.в. } (x,t)\in S_T,\\
&|B_1(x,t,u)|\leqslant L && \text{при п.в. } (x,t)\in Q_T \text{ и при всех } u\in U,\\
&|B_2(x,v)|\leqslant L && \text{при п.в. } x\in\Omega \text{ и при всех } v\in V,\\
&|B_3(s,t,w)|\leqslant L && \text{при п.в. } (s,t)\in Q_T \text{ и при всех } w\in W, G_i\in L_\infty(\Omega),\quad i=1,2,
\end{aligned}$$

где L — некоторая положительная постоянная;

(c) функции $a_{i,j},a\colon\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}^1$, $i,j=1,\dots,n$, $\sigma\colon S\times[0,T]$ измеримы по Лебегу;

(d) справедливы оценки

$$\nu|\xi|^2\leqslant a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j\leqslant\mu|\xi|^2\quad\forall(x,t)\in Q_T,\quad\nu,\mu>0;$$

(e) справедливы оценки

$$|a(x,t)|\leqslant K \text{ при п.в. } (x,t)\in Q_T,\quad|\sigma(x,t)|\leqslant K \text{ при п.в. } (x,t)\in S_T,$$

где $K>0$ — некоторая постоянная;

(f) граница S является кусочно гладкой.

Замечание 2. Задача оптимального управления (ОС) формально записывается в компактной форме задачи ВП

$$f(\pi)\to\min,\quad g(\pi)=0,\quad\pi\in\mathcal{D}\subset\mathcal{H}.$$

Если мы определим, в какое пространство вкладываются элементы $g(\pi)$, то получим «полноценную» задачу ВП. В качестве пространства образов оператора $g(\cdot)$ здесь можно формально рассматривать разные конкретные пространства: $C(\Omega)$, $L_\infty(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$ и еще некоторые другие. То, какое из них «более нужное», зависит от свойств регулярности решений $z[\pi]$ задачи (2) и «целей регуляризации» КУО. Фазовое ограничение-равенство $g(\pi)\equiv g(\pi)(\cdot)\equiv G_1(\cdot)z[\pi](\cdot,T)+G_2(\cdot)=0$ понимается как равенство почти всюду в Ω: $G_1(x)z[\pi](x,T)+G_2(x)$ при п.в. $x\in\Omega$. В силу включений $z[\pi]\in V_2^{1,0}(Q_T)$ и $G_1,G_2\in L_\infty(\Omega)$ оно, очевидно, эквивалентно равенству в $L_2(\Omega)$. Поэтому в качестве пространства образов ниже выбрано пространство $L_2(\Omega)$. Рассмотренный выше пример 1 характеризуют те сложности, которые возникают при анализе задачи (ОС) в случае такого выбора пространства образов.

[1]Условие (a$'$) потребуется лишь при доказательстве леммы 4 для вычисления первой вариации функционала Лагранжа при классическом варьировании по компоненте w минимизирующей его тройки управлений.

Пусть F — множество всевозможных наборов исходных данных

$$\mathsf{f} \equiv \Big\{A_i, B_i,\ i = 1,2,3,\ G_i,\ i = 1,2,\ a_{i,j},\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n,\ a, \sigma\Big\},$$

для каждого из которых выполняются либо условия (a), (a′), (b), (c), (d), (e), (f), либо (a), (b), (c), (d), (e), (f) (то, какая группа условий выполняется, будет каждый раз оговариваться) с независящими от набора постоянными L, K. Определим наборы невозмущенных f^0 и возмущенных f^δ исходных данных, соответственно:

$$\mathsf{f}^0 \equiv \Big\{A_i^0, B_i^0,\ i = 1,2,3,\ G_i^0,\ i = 1,2,\ a_{i,j}^0,\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n,\ a^0, \sigma^0\Big\},$$
$$\mathsf{f}^\delta \equiv \Big\{A_i^\delta, B_i^\delta,\ i = 1,2,3,\ G_i^\delta,\ i = 1,2,\ a_{i,j}^\delta,\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n,\ a^\delta, \sigma^\delta\Big\},$$

$\delta \in (0, \delta_0]$, где $\delta_0 > 0$ — некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки:

$$\begin{gathered}
\|A_1^\delta - A_1^0\|_{\infty,Q_T} \leqslant \delta, \quad \|A_2^\delta - A_2^0\|_{\infty,\Omega} \leqslant \delta, \quad \|A_3^\delta - A_3^0\|_{\infty,S_T} \leqslant \delta, \\
\sup_{u\in U} \Big\| B_1^\delta(\cdot,\cdot,u) - B_1^0(\cdot,\cdot,u) \Big\|_{\infty,Q_T} \leqslant \delta, \\
\sup_{v\in V} \Big\| B_2^\delta(\cdot,v) - B_2^0(\cdot,v) \Big\|_{\infty,\Omega} \leqslant \delta, \\
\sup_{w\in W} \Big\| B_3^\delta(\cdot,\cdot,w) - B_3^0(\cdot,\cdot,w) \Big\|_{\infty,S_T} \leqslant \delta, \\
\|G_i^\delta - G_i^0\|_{\infty,\Omega} \leqslant \delta, \quad i = 1,2, \\
\|a_{i,j}^\delta - a_{i,j}^0\|_{\infty,Q_T} \leqslant \delta, \quad i,j = 1,\dots,n, \quad \|a^\delta - a^0\|_{\infty,Q_T} \leqslant \delta, \quad \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T} \leqslant \delta.
\end{gathered} \tag{3}$$

Обозначим задачу (ОС), решение $z[\pi]$, функционал f, оператор g и т. п., соответствующие набору исходных данных f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, через (ОС$^\delta$), $z^\delta[\pi]$, f^δ, g^δ, соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\|g^\delta(\pi)\| \equiv \|g^\delta(\pi)\|_{2,\Omega}, \quad \mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \Big\{\pi \in \mathcal{D} : \|g^\delta(\pi)\| \leqslant \epsilon\Big\}, \quad \epsilon \geqslant 0, \quad \mathcal{D}^{0,0} \equiv \mathcal{D}^0.$$

Определим обобщенное значение $\beta\colon L_2(\Omega) \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ задачи (ОС^0):

$$\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon\to+0} \beta_\epsilon, \quad \beta_\epsilon \equiv \inf_{\pi\in\mathcal{D}^{0,\epsilon}} f^0(\pi), \quad \beta_\epsilon \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^{0,\epsilon} = \varnothing.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta \leqslant \beta_0$, где

$$\beta_0 \equiv \inf_{\pi\in\mathcal{D}^0} f^0(\pi)$$

— классическое значение задачи. Однако в условиях данной работы, ввиду ограниченности $\mathcal{D}$, имеет место равенство $\beta = \beta_0$.

Центральным для нас будет понятие минимизирующего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги [3, гл. III] в задаче (ОС^0), т.е. такой последовательности элементов $\pi^i \in \mathcal{D}$, $i = 1,2,\dots$, что

$$f^0(\pi^i) \leqslant \beta + \delta^i, \quad \pi^i \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^i}$$

для некоторых последовательностей, сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1,2,\dots$.

Введем важное для всех последующих построений понятие.

Определение 1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1,2,\dots,$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1,2,\dots$, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (3) при $\delta = \delta^k$, элемент $\pi^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется МПР-образующим в задаче (ОС^0), если последовательность π^{δ^k}, $k = 1,2,\dots$, есть МПР в этой задаче.

3. Регуляризация классических условий оптимальности в задаче оптимального управления. Перепишем задачу (OC^0) и возмущенные задачи (OC^δ) в форме задачи выпуклого программирования с операторным ограничением-равенством. С этой целью сформулируем, прежде всего, необходимые утверждения, связанные с существованием обобщенных решений класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи 2 и сопряженной с ней задачи, а также с оценками их устойчивости по возмущению коэффициентов задачи и управлений.

3.1. Необходимые вспомогательные результаты. В силу условий (c), (d), (e), (f) теорема существования обобщенного решения третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения с дивергентной главной частью [8, с. 34] (см. также [7, гл. III, § 5]) обеспечивает разрешимость прямой задачи (2) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любой тройки $(u,v,w) \in \mathcal{H}$ и любого $T > 0$, а также необходимые априорные оценки.

Лемма 1. *Если выполняются условия* (a), (d), (e), (f), *то для любой тройки* $\pi \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$ *существует единственное решение* $z[\pi]$ *класса* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *задачи* 2 *и имеет место априорная оценка*[1]

$$\left|z[\pi]\right|_{Q_T} + \left\|z[\pi]\right\|_{2,S_T} \leqslant C_T\big(\|u\|_{2,Q_T} + \|v\|_{2,\Omega} + \|w\|_{2,S_T}\big), \tag{4}$$

где постоянная C_T не зависит от $\pi \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$ и набора исходных данных $\mathsf{f} \in \mathsf{F}$. Более того, если U, V, W — компакты и выполняются условия (a), (d), (e), (f), *то справедлива оценка*

$$\left|z[\pi]\right|_{Q_T} + \left\|z[\pi]\right\|_{\infty,Q_T} + \|z[\pi]\|_{\infty,S_T} \leqslant C_T \quad \forall \pi \in \mathcal{D}, \tag{5}$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f и тройки управляющих параметров $\pi \equiv (u,v,w) \in \mathcal{D}$.

Кроме того, пусть $\mathsf{f}, \mathsf{f}^* \in \mathsf{F}$ — два произвольных набора исходных данных, $z[\cdot]$, $z^*[\cdot]$ — соответствующие им решения задачи 2. *Если выполняются условия* (c), (d), (e), (f), *то для любых двух троек $\pi^1, \pi \in \mathcal{H}$*

$$\begin{aligned} &\left|z^*[\pi^1] - z[\pi]\right|_{Q_T} + \left\|z^*[\pi^1] - z[\pi]\right\|_{2,S_T} \leqslant \\ &\leqslant C_T\Bigg(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \|z_{x_j}[\pi]\|_{2,Q_T}\left\|a^*_{i,j}(\cdot,\cdot) - a_{i,j}(\cdot,\cdot)\right\|_{\infty,Q_T} + \left\|z[\pi]\right\|_{2,Q_T}\left\|a^*(\cdot,\cdot) - a(\cdot,\cdot)\right\|_{\infty,Q_T} + \\ &\qquad + \left\|u^1 - u\right\|_{2,Q_T} + \left\|v^1 - v\right\|_{2,\Omega} + \left\|w^1 - w\right\|_{2,S_T} + \left\|z[\pi]\right\|_{2,S_T}\left\|\sigma^* - \sigma\right\|_{\infty,S_T}\Bigg), \end{aligned} \tag{6}$$

в которой постоянная C_T не зависит от наборов исходных данных $\mathsf{f}, \mathsf{f}^* \in \mathsf{F}$ и троек управляющих параметров $\pi \equiv (u,v,w), \pi^1 \equiv (u^1,v^1,w^1) \in \mathcal{H}$. Если же выполняются условия (c), (d), (e), (f), *а U, V, W — компакты, то для любых двух троек $\pi^1, \pi \in \mathcal{D}$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\left|z^*[\pi^1] - z[\pi]\right|_{Q_T} + \left\|z^*[\pi^1] - z[\pi]\right\|_{2,S_T} \leqslant C_T\Bigg(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \|z_{x_j}[\pi]\|_{2,Q_T}\left\|a^*_{i,j}(\cdot,\cdot) - a_{i,j}(\cdot,\cdot)\right\|_{\infty,Q_T} + \\ &\qquad + \left\|a^*(\cdot,\cdot) - a(\cdot,\cdot)\right\|_{\infty,Q_T} + \left\|u^1 - u\right\|_{2,Q_T} + \left\|v^1 - v\right\|_{2,\Omega} + \left\|w^1 - w\right\|_{2,S_T} + \left\|\sigma^* - \sigma\right\|_{\infty,S_T}\Bigg), \end{aligned} \tag{7}$$

в которой постоянная C_T не зависит от наборов исходных данных $\mathsf{f}, \mathsf{f}^* \in \mathsf{F}$ и троек управляющих параметров $\pi \equiv (u,v,w), \pi^1 \equiv (u^1,v^1,w^1) \in \mathcal{D}$.

---

[1] Напомним, что, как и в [7],

$$\left|z[\pi]\right|_{Q_T} \equiv \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|z(\cdot,t)\|_{2,\Omega} + \|z_x\|_{2,Q_T}$$

— норма в банаховом пространстве $V_2^{1,0}(Q_T)$.

Помимо прямой задачи 2 ниже при получении регуляризованного принципа максимума существенную роль будет играть и сопряженная с ней задача

$$\begin{aligned} &-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i} + a(x,t)\eta + \chi(x,t) = 0, \\ &\eta(x,T) = \psi(x), \qquad\qquad x \in \Omega, \\ &\frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)\eta = \omega(x,t), \qquad (x,t) \in S_T, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$; решение этой задачи обозначим через $\eta[\chi, \psi, \omega]$.

Так как сопряженная краевая задача (8) стандартной заменой времени приводится к более привычному виду начально-краевой задачи 2 (с начальным условием при $T = 0$), то можно считать, что следствием леммы 1 является следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (c), (d), (e), (f). *Тогда имеет место однозначная разрешимость в $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любых функций $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$ при любом $T > 0$ сопряженной (к* (2)*) задачи* (8).

Для ее решений так же, как в случае прямой задачи, справедлива априорная оценка

$$|\eta[\chi, \psi, \omega]|_{Q_T} + \|\eta[\chi, \psi, \omega]\|_{2,S_T} \leqslant C_T^1(\|\chi\|_{2,Q_T} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \|\omega\|_{2,S_T}), \tag{9}$$

в которой постоянная C_T^1 также не зависит от набора исходных данных f и тройки $(\chi, \psi, \omega) \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$.

Доказательство. С учетом сделанного выше замечания, в соответствии с которым сопряженная краевая задача (8) стандартной заменой времени приводится к более привычному виду начально-краевой задачи 2, можно заключить, что утверждение леммы с оценкой (9) является следствием первого утверждения леммы 1. □

Далее сформулируем лемму о так называемом интегральном представлении линейного непрерывного функционала на пространстве решений третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения. Эта лемма имеет важнейшее значение при вычислении первых вариаций функционалов в задачах оптимального управления, связанных с указанной начально-краевой задачей. Доказательство леммы см. в [14, лемма 3].

Лемма 3. *Пусть задана третья краевая задача*

$$\begin{aligned} &z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t)z + f(x,t) = 0, \\ &z(0,x) = \psi(x), \qquad\qquad x \in \Omega, \\ &\frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)z = \chi(x,t), \qquad (x,t) \in S_T, \end{aligned} \tag{10}$$

с коэффициентами $a_{i,j}$, a, σ, удовлетворяющими условиям (c), (d), (e), (f), *в которой*

$$f \in L_2(Q_T), \quad \psi \in L_2(\Omega), \quad \chi \in L_2(S_T).$$

Если функция $z \in V_2^{1,0}(Q_T)$ является решением задачи (10), *то для любых $d \in L_2(\Omega)$, $c \in L_2(Q_T)$, $g \in L_2(S_T)$ имеет место равенство*

$$\int\limits_{Q_T} c(x,t)z(x,t)dxdt - \int\limits_{\Omega} d(x)z(x,T)dx - \int\limits_{S_T} g(s,t)z(s,t)dsdt =$$
$$= \int\limits_{Q_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt - \int\limits_{\Omega} \psi(x)\eta(x,0)dx - \int\limits_{S_T} \chi(s,t)\eta(s,t)dsdt,$$

где функция $\eta \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — единственное обобщенное решение сопряженной задачи

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i} + a(x,t)\eta + c(x,t) = 0,$$
$$\eta(x,T) = d(x), \qquad x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)\eta = g(x,t), \qquad (x,t) \in S_T.$$

3.2. Задача оптимального управления как задача выпуклого программирования с операторным ограничением-равенством. Пусть выполняются либо условия (a), (a′), (b), (c), (d), (e), (f), либо (a), (b), (c), (d), (e), (f). При любом наборе исходных данных f значение оператора $g\colon \mathcal{H} \to L_2(\Omega)$ на каждом элементе π является суммой элементов $A[\pi] \equiv G_1(\cdot)z[\pi](\cdot,T)$ и $G_2(\cdot)$, где оператор $A\colon \mathcal{H} \to L_2(\Omega)$, задаваемый равенством $A[\pi] \equiv A\pi \equiv G_1(\cdot)z[\pi](\cdot,T)$, в силу линейности начально-краевой задачи (2) и априорной оценки (4) является линейным и ограниченным. Так как одновременно функционал $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ является непрерывным и выпуклым, то мы с формальной точки зрения можем переписать задачу (OC^0) в форме невозмущенной задачи выпуклого программирования

$$f^0(\pi) \to \min, \quad A^0\pi = -G_2^0(\cdot) \equiv h^0, \quad \pi \in \mathcal{D} \in \mathcal{H}. \qquad (\widetilde{P}^0)$$

С учетом приближенного задания исходных данных имеем формально вместо задачи ($\widetilde{P}^0$) семейство задач, зависящих от характеризующей ошибку их задания величины δ

$$f^\delta(\pi) \to \inf, \quad A^\delta\pi = -G_2^\delta(\cdot) \equiv h^\delta, \quad \pi \in \mathcal{D}. \qquad (\widetilde{P}^\delta)$$

Получим в силу оценок (3) оценки отклонения возмущенных исходных данных $\{f^\delta, A^\delta, h^\delta\}$ от невозмущенных исходных данных $\{f^0, A^0, h^0\}$ задачи ($\widetilde{P}^0$). С этой целью нам потребуются оценки леммы 1 отклонения решений начально-краевой задачи (2) при возмущении ее коэффициентов и управлений.

В силу оценок (3) и оценок (4), (6) леммы 1 можем записать

$$\left\| z^\delta[\pi](\cdot,T) - z^0[\pi](\cdot,T) \right\|_{2,\Omega} \leqslant \widetilde{C}_T \delta \|\pi\|_{\mathcal{H}}, \qquad (11)$$

где, как и выше, постоянная $\widetilde{C}_T$ не зависит от набора исходных данных f^δ и тройки управляющих параметров $\pi \equiv (u,v,w) \in \mathcal{H}$.

Из оценок (4), (6), (11), в свою очередь, следуют оценки для отклонения функционалов (как в случае условий (a), (a′), (b), (c), (d), (e), (f), так и (a), (b), (c), (d), (e), (f))

$$\left| f^\delta(\pi) - f^0(\pi) \right| \leqslant C\delta(1 + \|\pi\|^2) \quad \forall \pi \in \mathcal{D}$$

и линейных ограниченных операторов, действующих из пространства $\mathcal{H}$ в пространство $L_2(\Omega)$, а также элементов h^δ, h^0

$$\|A^\delta\pi - A^0\pi\| \leqslant C\delta(1 + \|\pi\|) \quad \forall \pi \in \mathcal{H}, \qquad \|h^\delta - h^0\| \leqslant C\delta,$$

в которых постоянную $C > 0$ следует считать не зависящей от δ и тройки управляющих параметров $\pi \equiv (u,v,w)$. Заметим одновременно, что особый интерес представляет важный частный случай задачи ($\widetilde{P}^0$) с функционалом $f^0(\cdot)$ в виде $f^0(\pi) \equiv \|\pi\|^2$, так как такие функционалы возникают прежде всего при рассмотрении обратных задач.

Одновременно выполняется и неравенство

$$\left| f^\delta(\pi_1) - f^\delta(\pi_2) \right| \leqslant \widetilde{L} \|\pi_1 - \pi_2\|_{\mathcal{H}} \ \forall \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{D},$$

где $\widetilde{L} > 0$ — некоторая не зависящая от $\delta \in [0,\delta_0]$ и $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{D}$ постоянная.

Поставленная в предыдущем разделе задача (OC^0) (задача (OC^δ), $\delta \in [0,\delta_0]$) была переписана нами как задача выпуклого программирования ($\widetilde{P}^0$) (задача ($\widetilde{P}^\delta$)), $\delta \in [0,\delta_0]$), для которой были выписаны также оценки отклонения возмущенных исходных данных от точных.

3.3. Регуляризованные классические условия оптимальности в задаче оптимального управления. Вернемся к задаче оптимального управления (OC^0), которая выше была сведена к задаче выпуклого программирования ($\widetilde{P}^0$).

Задача ($\widetilde{P}^\delta$) представляет собою частный случай задачи выпуклого программирования (P^δ) работы [12] (см. с. 256 раздела 2 указанной работы). Здесь в качестве гильбертова пространства Z выступает пространство $\mathcal{H}$ и отсутствуют ограничения-неравенства. По этой причине для получения анонсированных регуляризованных условий оптимальности в задаче (OC^0) необходимо далее «расшифровать» утверждения теорем 2, 3 из [12] в терминах исходной задачи (OC^0). С этой целью определим функцию Лагранжа в задаче оптимального управления. Определим функционал Лагранжа задачи (OC^δ)

$$
\begin{aligned}
L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda) &\equiv f^\delta(\pi)+\varepsilon\|\pi\|^2+\langle\lambda, A^\delta\pi-h^\delta-p\rangle = \\
&= \int\limits_{Q_T} A_1^\delta(x,t)\big(z^\delta[\pi](x,t)\big)^2dxdt+\int\limits_{\Omega} A_2^\delta(x)\big(z^\delta[\pi](x,T)\big)^2dx+\int\limits_{S_T} A_3^\delta(s,t)\big(z^\delta[\pi](s,t)\big)^2dsdt+ \\
&\quad+\int\limits_{Q_T} B_1^\delta(x,t,u(x,t))dxdt+\int\limits_{\Omega} B_2^\delta(x,v(x))dx+\int\limits_{S_T} B_3^\delta(s,t,w(s,t))dsdt+\varepsilon\|\pi\|^2+ \\
&\quad+\int\limits_{\Omega}\lambda(x)\Big(G_1^\delta(x)z^\delta[\pi](x,T)+G_2^\delta(x)\Big)dx, \quad \pi\in\mathcal{D}, \quad \lambda\in L_2(\Omega), \quad L^0(\pi,\lambda)\equiv L^{0,0}(\pi,\lambda).
\end{aligned}
$$

Введем также обозначение $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]=\operatorname{argmin}\{L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda):\pi\in\mathcal{D}\}$. Определим далее двойственную задачу

$$
\begin{aligned}
V^{\delta,\varepsilon}(\lambda) &\equiv \min_{\pi\in\mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda)\to\sup, && \lambda\in L_2(\Omega),\\
V^{\delta}(\lambda)\equiv V^{\delta,0}(\lambda) &\equiv \min_{\pi\in\mathcal{D}} L^{\delta,0}(\pi,\lambda)\to\sup, && \lambda\in L_2(\Omega).
\end{aligned}
$$

Пусть $\alpha(\delta)>0$ при $\delta\in(0,\delta_0]$ и выполняется условие согласования

$$
\frac{\delta}{\alpha(\delta)}\to 0, \quad \alpha(\delta)\to 0, \quad \delta\to 0. \tag{12}
$$

Обозначим через $\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}\in L_2(\Omega)$ решение регуляризованной двойственной задачи

$$
V^{\delta,\varepsilon}(\lambda)-\alpha(\delta)\|\lambda\|^2\to\max, \quad \lambda\in L_2(\Omega)
$$

с условием согласования (12). «Расшифровка» теорем 2, 3 из [12] в терминах исходной задачи приводит соответственно к регуляризирующему двойственному алгоритму и регуляризованному ПЛ в задаче оптимального управления (OC^0) в случае ограниченного множества $\mathcal{D}$. Следующие два утверждения выполняются как в случае условий (a), (a′), (b), (c), (d), (e), (f), так и (a), (b), (c), (d), (e), (f).

Теорема 1 (регуляризирующий двойственный алгоритм в задаче оптимального управления). *Пусть выполняется условие согласования* (12), $\delta^k\in(0,\delta_0)$, $\delta^k\to 0$, $k\to\infty$, *— произвольная фиксированная последовательность*, ε^k, $k=1,2,\ldots$, *— произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел. Тогда оператор* $R(\cdot,\delta^k)$, *ставящий в соответствие набору исходных данных* f^{δ^k}, *удовлетворяющих оценкам* (3) *при* $\delta=\delta^k$, *тройку* $R(\mathsf{f}^{\delta^k},\delta^k)\equiv\pi^{\delta^k,\varepsilon^k}\big[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}\big]$, *является МПР-образующим в задаче* (OC^0) (*см. определение* 1).

Теорема 2 (регуляризованный ПЛ в задаче оптимального управления для ограниченного $\mathcal{D}$). *Пусть* $\delta^k\in(0,\delta_0)$, $\delta^k\to 0$, $k\to\infty$, *— произвольная фиксированная последовательность. Пусть также выполняется условие согласования* (12), ε^k, $k=1,2,\ldots$, *— произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел. Для того чтобы в задаче* (OC^0) *существовало МПР* (*и, следовательно, каждая его слабая предельная точка принадлежала множеству* Π^0), *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность двойственной переменной* $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, *что* $\delta^k\|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполняются включения*

$$\pi^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k,\gamma^k}, \quad \gamma^k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{13}$$

для некоторой последовательности положительных чисел $\widetilde{\gamma}^k$, $k = 1, 2, \ldots$ (*она играет роль последовательности* ϵ^k, $k = 1, 2, \ldots$ *из определения МПР*)[1] *и предельное соотношение*

$$\left\langle \lambda^k, G_1^{\delta^k}(\cdot) z^{\delta^k}\left[\pi^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]\right](\cdot, T) + G_2^{\delta^k}(\cdot) \right\rangle \to 0, \quad k \to \infty. \tag{14}$$

Более того, последовательность $\pi^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является искомым МПР. Другими словами, оператор* $R(\cdot, \delta^k)$, *ставящий в соответствие набору исходных данных* f^{δ^k}, *удовлетворяющих оценкам* (3) *при* $\delta = \delta^k$, *управление* $R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) = \pi^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$ *является МПР-образующим* (*см. определение* 1), *причем каждая слабая предельная точка последовательности* $\pi^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *есть решение задачи* (OC^0). *Одновременно с предельным соотношением* $\delta^k\|(\lambda^k)\| \to 0$, $k \to \infty$, *и соотношениями* (13), (14), *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k) \to \sup_{\lambda \in L_2(\Omega)} V^0(\lambda) = f^0(\pi^0).$$

В качестве конкретной последовательности $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$ *может быть взята, например, последовательность* $\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, *о которой идет речь в теореме* 1.

Замечание 3. Следует отметить, что в случае сильной выпуклости целевого функционала второй регуляризирующий параметр ε естественно становится излишним. В этом случае в теоремах 1, 2 следует положить $\varepsilon^k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и вести речь о сильной сходимости конструируемых в них МПР к единственному в такой ситуации решению w^0 задачи (ОС^0) (см., например, [12, теорема 1]).

Переходим к формулировке и обоснованию регуляризованного принципа максимума Понтрягина. Центральную роль здесь играет задача минимизации функции Лагранжа

$$L^{\delta,\varepsilon}(\pi, \lambda) \to \min, \quad \pi \in \mathcal{D}, \tag{15}$$

единственным решением которой является тройка $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \in \mathcal{D}$. Запишем ПМП для тройки $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ в этой простейшей задаче оптимального управления в предположении компактности выпуклых множеств управляющих параметров U, V, W и выполнимости либо условий (a), (a′), (b), (c), (d), (e), (f), либо (a), (b), (c), (d), (e), (f). Условие компактности U, V, W играет существенную роль при вычислении первой вариации функционала Лагранжа в задаче минимизации (15) в процессе получения в ней принципа максимума. При этом вычислении возникает потребность иметь дело с ограниченными решениями как прямой начально-краевой задачи (2), так и сопряженной с ней.

Введем стандартные обозначения:

$$\begin{gathered}
H_u^{\delta,\varepsilon}(x, t, u, \eta) \equiv -u\eta - B_1^{\delta}(x, t, u) - \varepsilon u^2, \\
H_v^{\delta,\varepsilon}(x, u, \eta) \equiv v\eta - B_2^{\delta}(x, v) - \varepsilon v^2, \\
H_w^{\delta,\varepsilon}(s, t, w, \eta) \equiv w\eta - B_3^{\delta}(s, t, w) - \varepsilon w^2.
\end{gathered}$$

Рассмотрим сначала случай, когда выполняются условия (a), (a′), (b), (c), (d), (e), (f).

Лемма 4. *Пусть выполняются условия* (a), (a′), (b), (c), (d), (e), (f), *а множества* U, V, W — *выпуклые компакты. Тогда тройка* $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ *при* $\lambda \in H = L_2(\Omega)$, *доставляющая минимальное*

---

[1] В силу ограниченности $\mathcal{D}$ условие (13) со стремящимися к нулю последовательностями положительных чисел δ^k, γ^k, $k = 1, 2, \ldots$, имеет место тогда и только тогда, когда $\pi^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{0,\widetilde{\gamma}^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел $\widetilde{\gamma}^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

значение в задаче (15)*, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, т.е. удовлетворяет при* $\pi \equiv (u, v, w) = \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \equiv (u^{\delta,\varepsilon}[\lambda], v^{\delta,\varepsilon}[\lambda], w^{\delta,\varepsilon}[\lambda])$ *соотношениям максимума*

$$\max_{r\in U} H_u^{\delta,\varepsilon}\big(x,t,r,\eta^\delta[\pi](x,t)\big) = H_u^{\delta,\varepsilon}\big(x,t,u(x,t),\eta^\delta[\pi](x,t)\big) \quad \text{при п.в. } (x,t)\in Q_T,$$
$$\max_{r\in V} H_v^{\delta,\varepsilon}\big(x,r,\eta^\delta[\pi](x,0)\big) = H_v^{\delta,\varepsilon}\big(x,v(x),\eta^\delta[\pi](x,0)\big) \quad \text{при п.в. } x\in \Omega,$$
$$\max_{r\in \mathcal{D}_3} \int_{S_T} \nabla_w H_w^{\delta,\varepsilon}\big(s,t,w(s,t),\eta^\delta[\pi](s,t)\big) r(s,t)dsdt = \qquad (16)$$
$$= \int_{S_T} \nabla_w H_w^{\delta,\varepsilon}\big(s,t,w(s,t),\eta^\delta[\pi](s,t)\big) w(s,t)dsdt,$$

где $\eta^\delta[\pi] \equiv \eta^\delta[\pi,\lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ *— решение сопряженной задачи* (*см. лемму 2*)

$$\begin{aligned} &-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}^\delta(x,t)\eta_{x_i} + a^\delta(x,t)\eta = 2A_1^\delta(x,t)z^\delta[\pi](x,t), \\ &\eta(x,T) = -2A_2^\delta(x)z^\delta[\pi](x,T) - \lambda(x)G_1^\delta(x), \qquad x\in\Omega, \\ &\frac{\partial\eta}{\partial\mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)\eta = -2A_3^\delta(x,t)z^\delta[\pi](x,t), \qquad (x,t)\in S_T \end{aligned} \qquad (17)$$

при $\pi = \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$. *Обратно, в силу выпуклости задачи любой элемент* $\pi\in\mathcal{D}$, *удовлетворяющий вместе с некоторой* $\lambda \in H = L_2(\Omega)$ *соотношениям* (16), (17) *доставляет минимум в задаче* (15).

Замечание 4. В силу выпуклости и дифференцируемости по w функции $w\eta - B_3(s,t,w) - \varepsilon w^2$ последнее неравенство в (16) можно переписать как обычное поточечное соотношение максимума.

Доказательство. Доказываем сначала необходимость. Пусть $\lambda^i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots,$ — такая последовательность ограниченных функций, $\lambda^i \in L_\infty(Q_T)$, что $\|\lambda^i - \lambda\|_{2,\Omega} \to 0$, $i\to\infty$. Рассмотрим семейство зависящих от $i = 1, 2, \ldots$ вспомогательных задач минимизации

$$L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda^i) \to \min, \quad \pi\in\mathcal{D}. \qquad (18)$$

Можем записать оценку

$$\Big|L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda^i) - L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda)\Big| = \Big|\Big\langle \lambda^i-\lambda,\ A^\delta\pi - h^\delta\Big\rangle\Big| \leqslant \|\lambda^i-\lambda\|_{2,\Omega}\big(\|A^\delta\pi\|_{2,\Omega} + \|h^\delta\|_{2,\Omega}\big),$$

из которой в силу оценки (4) леммы 1 следует, что

$$L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda^i) - L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda) \to 0, \quad i\to\infty,$$

равномерно по $\pi\in\mathcal{D}$. Так как каждый функционал $L^{\delta,\varepsilon}(\cdot,\lambda^i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ является непрерывным (в силу оценок леммы 1) и сильно выпуклым на $\mathcal{D}$, то задача (15) при каждом i является разрешимой единственным образом, и решение ее может быть записано, в соответствии с используемыми обозначениями, в виде $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$. Так как в силу указанной выше равномерной сходимости имеет место сходимость минимумов

$$L^{\delta,\varepsilon}\big(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda],\lambda\big) - L^{\delta,\varepsilon}\big(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\big) \to 0, \quad i\to\infty,$$

то с учетом сходимости

$$L^{\delta,\varepsilon}\big(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\big) - L^{\delta,\varepsilon}\big(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda\big) \to 0, \quad i\to\infty \quad (\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\in\mathcal{D}),$$

получаем, что

$$L^{\delta,\varepsilon}\big(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda\big) \to L^{\delta,\varepsilon}\big(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda],\lambda\big), \quad i\to\infty,$$

откуда, благодаря сильной выпуклости $L^{\delta,\varepsilon}(\cdot,\lambda)$, получаем сходимость (см. [4, гл. 8,§ 2, теорема 10])

$$\Big\|\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] - \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\Big\|_{\mathcal{H}} \to 0, \quad i\to\infty. \qquad (19)$$

Получим ПМП в задаче (15) при $\lambda = \lambda^i$. С этой целью применим формулу леммы 3 для интегрального представления приращения функционала $L^{\delta,\varepsilon}(\cdot,\lambda^i)$ для пары управляющих троек $\pi = (u,v,w)$ и $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] = \big(u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\big)$. Можем записать

$$\Big(z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\Big)_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^\delta_{i,j}(x,t)(z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]])_{x_j}\Big) +$$
$$+a^\delta(x,t)\Big(z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\Big) + u(x,t) - u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t) = 0,$$
$$\Big(z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\Big)(x,0) = v(x) - v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x), \quad x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial(z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]])}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)\Big(z^\delta[\pi] - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big) = w(s,t) - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t), \quad (s,t) \in S_T.$$

Кроме того, можем записать также

$$L^{\delta,\varepsilon}\big(\pi,\lambda^i\big) - L^{\delta,\varepsilon}\Big(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\Big) = \int\limits_{Q_T} A^\delta_1(x,t)\Big[\Big(z^\delta[\pi](x,t)\Big)^2 - \Big(z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x,t)\Big)^2\Big]dxdt +$$
$$+\int\limits_\Omega A^\delta_2(x)\Big[\Big(z^\delta[\pi](x,T)\Big)^2 - \Big(z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x,T)\Big)^2\Big]dx +$$
$$+\int\limits_{S_T} A^\delta_3(s,t)\Big[\Big(z^\delta[\pi](s,t)\Big)^2 - \Big(z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t)\Big)^2\Big]dsdt +$$
$$+\int\limits_{Q_T}\Big[B^\delta_1(x,t,u(x,t)) - B^\delta_1\Big(x,t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t)\Big)\Big]dxdt +$$
$$+\int\limits_\Omega\Big[B^\delta_2(x,v(x)) - B^\delta_2\Big(x,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)\Big)\Big]dx +$$
$$+\int\limits_{S_T}\Big[B^\delta_3(s,t,w(s,t)) - B^\delta_3\Big(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\Big]dsdt +$$
$$+\int\limits_\Omega \lambda^i(x)G^\delta_1(x)\Big(z^\delta[\pi](x,T) - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,T)\Big)dx =$$
$$= \int\limits_{Q_T} A^\delta_1(x,t)\Big[z^\delta[\pi](x,t) + z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,t)\Big][z^\delta[\pi](x,t) - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,t)]dxdt +$$
$$+\int\limits_\Omega A^\delta_2(x)\Big[z^\delta[\pi](x,T) + z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,T)\Big]\Big[z^\delta[\pi](x,T) - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,T)\Big]dx +$$
$$+\int\limits_{S_T} A^\delta_3(s,t)\Big[z^\delta[\pi](s,t) + z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t)\Big]\Big[z^\delta[\pi](s,t) - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s,t)\Big]dsdt +$$
$$+\int\limits_{Q_T}\Big[B^\delta_1(x,t,u(x,t)) - B^\delta_1\Big(x,t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t)\Big)\Big]dxdt + \int\limits_\Omega\Big[B^\delta_2(x,v(x)) - B^\delta_2\Big(x,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)\Big)\Big]dx +$$
$$+\int\limits_{S_T}\Big[B^\delta_3(s,t,w(s,t)) - B^\delta_3\Big(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\Big]dsdt +$$
$$+\int\limits_\Omega \lambda^i(x)G^\delta_1(x)\Big(z^\delta[\pi](x,T) - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,T)\Big)dx.$$

Тогда, применяя лемму 3, получаем

$$L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda^i) - L^{\delta,\varepsilon}\Big(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\Big) = \int\limits_{Q_T}\Big(u(x,t) - u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi,\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,t)dxdt-$$
$$-\int\limits_{\Omega}\Big(v(x) - v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)\Big)\eta^\delta\Big[\pi,\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,0)dx - \int\limits_{S_T}\Big(w(s,t) - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi,\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t)dsdt+$$
$$+\int\limits_{Q_T}\Big[B_1^\delta(x,t,u(x,t)) - B_1^\delta\Big(x,t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t)\Big)\Big]dxdt + \int\limits_{\Omega}\Big[B_2^\delta(x,v(x)) - B_2^\delta\Big(x,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)\Big)\Big]dx+$$
$$+\int\limits_{S_T}\Big[B_3^\delta(s,t,w(s,t)) - B_3^\delta\Big(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\Big]dsdt, \quad (20)$$

где

$$\eta^\delta\Big[\pi,\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big] \equiv \eta^\delta\Big[\pi,\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\Big] \in V_2^{1,0}(Q_T)$$

— обобщенное решение вспомогательной (промежуточной) сопряженной задачи

$$\begin{gathered} -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{i,j}^\delta(x,t)\eta_{x_i}\Big) + a^\delta(x,t)\eta - A_1^\delta(x,t)\Big[z^\delta[\pi](x,t) + z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x,t)\Big] = 0, \\ \eta(x,T) = -\Big[A_2^\delta(x)\Big[z^\delta[\pi](x,T) + z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,T)\Big] + \lambda^i(x)G_1^\delta(x)\Big], \quad x\in\Omega, \\ \frac{\partial\eta}{\partial\mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)\eta = -A_3^\delta(s,t)\Big[z^\delta[\pi](s,t) + z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t)\Big], (s,t)\in S_T. \end{gathered} \quad (21)$$

Далее определим вариацию

$$\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \equiv \Big(u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big)$$

оптимального управления $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ и подсчитаем соответствующую первую вариацию для функционала Лагранжа. Пусть $U^*\subset\mathbb{R}^1$, $V^*\subset\mathbb{R}^1$ — счетные всюду плотные подмножества множеств U,V. Определим вариацию $\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\in\mathcal{D}$, $0\leqslant\epsilon\leqslant\epsilon_0\leqslant 1$, тройки $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$

$$\begin{gathered} u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t) \equiv \begin{cases} u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t), & (x,t)\in Q_T\setminus Q^\epsilon, \\ \bar u\in U^*, & (x,t)\in Q^\epsilon, \end{cases} \quad v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x) \equiv \begin{cases} v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x), & x\in\Omega\setminus\Omega^\epsilon, \\ \bar v\in V^*, & x\in\Omega^\epsilon, \end{cases} \\ w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t) \equiv w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t) + \epsilon^{n+1}(w(s,t) - w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)), \end{gathered} \quad (22)$$

где

$$\begin{gathered} Q_{\bar x,\bar t}^\epsilon \equiv \Big\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} : \bar x_i - \epsilon < x_i \leqslant \bar x_i,\ i = 1,\dots,n,\ \bar t - \epsilon < t \leqslant \bar t\Big\}, \\ \Omega_{\bar y}^\epsilon \equiv \Big\{x\in\mathbb{R}^n : \bar y_i - \epsilon^{(n+1)/n} < x_i \leqslant \bar y_i - \epsilon^{(n+1)/n},\ i = 1,\dots,n\Big\}, \end{gathered}$$

$w(\cdot,\cdot)$ — произвольное управление из $\mathcal{D}_3$, $\bar x \equiv (\bar x_1,\dots,\bar x_n)$, $\bar y \equiv (\bar y_1,\dots,\bar y_n)$. Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия на точки $(\bar x,\bar t),\bar y$, участвующие в определении вариации $\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$:

(i) точка $(\bar x,\bar t)$ является точкой Лебега[1] функций

$$\Big(u' - u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t)\Big)\eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x,t), \quad \Big[B_1^\delta(x,t,u') - B_1^\delta(x,t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t))\Big], \quad (x,t)\in Q_T, \quad u'\in U^*;$$

(ii) точка $\bar y$ является точкой Лебега функций

$$\Big(v' - v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)\Big)\eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x,0) + \Big[B_2^\delta(x,v') - B_2^\delta(x,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x))\Big], \quad x\in\Omega, \quad v'\in V^*,$$

[1]Здесь и ниже используется классическое понятие точки Лебега или правильной точки суммируемой функции, см., например, [2, гл. I,§ 1, п. 1.7].

где $\eta^\delta\big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\big] \equiv \eta^\delta\big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\big] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — обобщенное решение предельной краевой сопряженной задачи

$$\begin{gathered}-\eta_t-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{i,j}^\delta(x,t)\eta_{x_i}\Big)+a^\delta(x,t)\eta-2A_1^\delta(x,t)z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,t)=0,\\ \eta(x,T)=-\Big[2A_2^\delta(x)z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,T)+\lambda^i(x)G_1^\delta(x)\Big],\quad x\in\Omega,\\ \frac{\partial\eta}{\partial\mathcal{N}}+\sigma^\delta(s,t)\eta=-2A_3^\delta(s,t)z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t),\quad (s,t)\in S_T.\end{gathered}\tag{23}$$

Очевидно, в силу классической теоремы о точках Лебега, такой выбор точек $(\bar x,\bar t),\bar y$ возможен, причем лебегова мера множества всех таких точек $(\bar x,\bar t),\bar y$ совпадает соответственно с лебеговой мерой цилиндра Q_T и лебеговой мерой области Ω. Подсчитаем первую вариацию функционала Лагранжа:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\Big(L^{\delta,\varepsilon}\Big(\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ \lambda^i\Big)-L^{\delta,\varepsilon}\Big(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\Big)\Big).$$

Так как

$$\Big\|\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]-\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big\|_{\mathcal H}\to 0,\quad \epsilon\to 0,$$

то благодаря оценке (7) леммы 1 можем записать

$$\Big|z^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]-z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big|_{Q_T}+\Big\|z^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]-z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big\|_{2,S_T}\to 0,\quad \epsilon\to 0,\tag{24}$$

причем, так как выполняются условия (a), (b), (c), (d), (e), (f), в силу оценки (5) той же леммы 1, функции

$$z^\delta\big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\big](\cdot,\cdot),\quad z^\delta\big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\big](\cdot,\cdot)\colon Q_T\to\mathbb R^1$$

равномерно по $0\leqslant\epsilon\leqslant\epsilon_0\leqslant 1$ ограничены в $L_\infty(Q_T)$, функции

$$z^\delta\big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\big](\cdot,T),\quad z^\delta\big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\big](\cdot,T)\colon \Omega\to\mathbb R^1$$

равномерно по $0\leqslant\epsilon\leqslant\epsilon_0\leqslant 1$ ограничены в $L_\infty(\Omega)$ (напомним, что функции класса $V_2^{1,0}(Q_T)$, как функции x, непрерывны по t в норме $L_2(\Omega)$), функции

$$z^\delta\big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\big](\cdot,\cdot),\quad z^\delta\big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\big](\cdot,\cdot)\colon S_T\to\mathbb R^1$$

равномерно по $0\leqslant\epsilon\leqslant\epsilon_0\leqslant 1$ ограничены в $L_\infty(S_T)$. При этом, одновременно, является существенно ограниченной и функция $\lambda^i(x)G_1^\delta(x)$, $x\in\Omega$. В свою очередь, последние обстоятельства, а также предельное соотношение (24) в силу оценки (9) леммы 2 приводят к предельному соотношению

$$\Big|\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]-\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big|_{Q_T}+\Big\|\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]-\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big\|_{2,S_T}\to 0,\quad \epsilon\to 0,\tag{25}$$

причем важно то, что все функции

$$\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\equiv\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\Big],\quad \eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\equiv\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\Big]$$

равномерно по $0\leqslant\epsilon\leqslant\epsilon_0\leqslant 1$ ограничены в $L_\infty(Q_T)$. По этой причине, в силу [7, теорема 10.1], имеет место следующее свойство «равномерной» гельдеровости сопряженных функций $\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]$: существует такое число $\alpha>0$, что

$$\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\in H^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$$

для всех $\epsilon\in[0,\epsilon_0]$ и норма $\Big|\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big|_{Q'}^{(\alpha)}$ для любой подобласти $Q'\subset Q_T$, отстоящей от верхнего основания $\{(x,t):x\in\Omega,t=T\}$ и боковой поверхности S_T цилиндра Q_T на положительное расстояние ρ, равномерно по $\epsilon\in[0,\epsilon_0]$ ограничена некоторой постоянной, зависящей лишь от этого расстояния ρ. Последнее свойство можно переписать как свойство компактности в $C(Q')$.

Лемма 5. *Множество решений сопряженной задачи*

$$\Big\{\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]:\ \epsilon\in[0,\epsilon_0]\Big\}\subset V_2^{1,0}(Q_T)$$

является множеством равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций в $C(Q')$ для любой подобласти $Q'\subset Q_T$, отстоящей от верхнего основания $\{(x,t): x\in\Omega,\ t=T\}$ и боковой поверхности S_T цилиндра Q_T на положительное расстояние ρ.

На основании сформулированного в лемме 5 свойства компактности и сходимости (25) мы, в свою очередь, можем утверждать без ограничения общности, что имеет место следующая равномерная сходимость для любой подобласти Q' цилиндра Q_T, о которой идет речь в этой лемме:

$$\Big|\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]-\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big|_{Q'}^{(0)}\to 0,\quad \epsilon\to 0.$$

Последняя равномерная сходимость позволяет вычислить первую вариацию функционала Лагранжа. Можем записать в силу равенства (20) и организации вариации $\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\Big(L^{\delta,\varepsilon}\Big(\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\Big)-L^{\delta,\varepsilon}\Big(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\Big)\Big)=$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{Q_T}\Big(u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t)-u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,t)dxdt-$$
$$-\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{\Omega}\Big(v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)-v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)\Big)\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,0)dx-$$
$$-\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{S_T}\Big(w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t)dsdt+$$
$$+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{Q_T}\Big[B_1^\delta\Big(x,t,u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t)\Big)-B_1^\delta\Big(x,t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t)\Big)\Big]dxdt+$$
$$+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{\Omega}\Big[B_2^\delta\Big(x,v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)\Big)-B_2^\delta\Big(x,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)\Big)\Big]dx+$$
$$+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{S_T}\Big[B_3^\delta\Big(s,t,w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)-B_3^\delta\Big(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\Big]dsdt=$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{Q^\epsilon_{\bar x,\bar t}}\Big(\bar u-u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,t)dxdt-$$
$$-\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{\Omega^\epsilon_{\bar y}}\Big(\bar v-v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)\Big)\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,0)dx-$$
$$-\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{S_T}\epsilon^{n+1}\Big(w(s,t)-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t)dsdt+$$
$$+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{Q^\epsilon_{\bar x,\bar t}}\Big[B_1^\delta(x,t,\bar u)-B_1^\delta\Big(x,t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t)\Big)\Big]dxdt+$$
$$+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{\Omega^\epsilon_{\bar y}}\Big[B_2^\delta(x,\bar v)-B_2^\delta\Big(x,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)\Big)\Big]dx+$$

$$+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int\limits_{S_T}\int\limits_0^1\nabla_w B_3^\delta\Big(s,t,\Theta^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t,\gamma)\Big)d\gamma\Big[\Big(\epsilon^{n+1}\Big(w(s,t)-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\Big)\Big]dsdt=$$
$$=\Big(\bar u-u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar x,\bar t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](\bar x,\bar t)-\Big(\bar v-v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar y)\Big)\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](\bar y,0)-$$
$$-\int\limits_{S_T}\Big(w(s,t)-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t)dsdt+$$
$$+B_1^\delta(\bar x,\bar t,\bar u)-B_1^\delta\Big(\bar x,\bar t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar x,\bar t)\Big)+B_2^\delta(\bar y,\bar v)-B_2^\delta\Big(\bar y,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar y)\Big)+$$
$$+\int\limits_{S_T}\nabla_w B_3^\delta\Big(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\Big(w(s,t)-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)dsdt\geqslant 0$$

для всех $\bar u\in U^*$ при п.в. $(\bar x,\bar t)\in Q_T$, всех $\bar v\in V^*$ при п.в. $\bar y\in\Omega$ и всех $w\in\mathcal{D}_3$, где

$$\Theta^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t,\gamma)\equiv w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)+\gamma\Big(w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big).$$

Последнее неравенство, а также непрерывность по $\bar u$ функций

$$\Big(\bar u-u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar x,\bar t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](\bar x,\bar t),\quad B_1^\delta(\bar x,\bar t,\bar u)-B_1^\delta\Big(\bar x,\bar t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar x,\bar t)\Big)$$

и по $\bar v$ функций

$$-\Big(\bar v-v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar y)\Big)\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](\bar y,0),\quad B_2^\delta(\bar y,\bar v)-B_2^\delta\Big(\bar y,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar y)\Big)$$

и, кроме того, классические свойства точек Лебега измеримых функций приводят нас к трем неравенствам:

$$\Big(\bar u-u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar x,\bar t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](\bar x,\bar t)+B_1^\delta(\bar x,\bar t,\bar u)-B_1^\delta\Big(\bar x,\bar t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar x,\bar t)\Big)\geqslant 0$$
$$\text{при п.в. }(\bar x,\bar t)\in Q_T\quad\forall\bar u\in U,$$
$$-\Big(\bar v-v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar y)\Big)\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](\bar y,0)+B_2^\delta(\bar y,\bar v)-B_2^\delta\Big(\bar y,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar y)\Big)\geqslant 0\quad\text{при п.в. }\bar y\in\Omega\quad\forall\bar v\in V,$$
$$-\int\limits_{S_T}\Big(w(s,t)-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t)dsdt+$$
$$+\int\limits_{S_T}\nabla_w B_3^\delta\Big(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\Big(w(s,t)-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)dsdt\geqslant 0\quad\forall w\in\mathcal{D}_3.$$

Таким образом, используя введенные выше обозначения, приходим к состоящему из трех соотношений (два из них носят поточечный характер, по компонентам u и v, одно — интегральный, по компоненте w) принципу максимума Понтрягина для тройки управлений $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$:

$$\begin{gathered}H_u^{\delta,\varepsilon}\Big(x,t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t),\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,t)\Big)=\\=\max_{u\in U}H_u^{\delta,\varepsilon}\Big(x,t,u,\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,t)\Big)\text{ при п.в. }(x,t)\in Q_T,\\H_v^{\delta,\varepsilon}\Big(x,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x),\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](x,0)\Big)=\max_{v\in V}H_v^{\delta,\varepsilon}\Big(x,v,\eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x,0)\Big)\text{ при п.в. }x\in\Omega,\\\int\limits_{S_T}\Big(H_w^{\delta,\varepsilon}\Big)'_w\Big(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t),\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t)\Big)w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)dsdt=\\=\max_{w\in\mathcal{D}_3}\int\limits_{S_T}\Big(H_w^{\delta,\varepsilon}\Big)'_w\Big(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t),\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t)\Big)w(s,t)dsdt.\end{gathered}\tag{26}$$

Наконец, предельный переход при $i \to \infty$ в трех соотношениях (26) приводят к принципу максимума Понтрягина для управления $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$. Для обоснования этого предельного перехода надо выписать предельное соотношение

$$\left|z^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right] - z^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\right]\right|_{Q_T} + \left\|z^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right] - z^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\right]\right\|_{2,S_T} \to 0, \quad i \to \infty,$$

являющееся следствием предельного соотношения (19) и априорной оценки (4) леммы 1, а затем заметить, что его следствием являются, в свою очередь, предельные соотношения при $i \to \infty$

$$\left\|A_1^\delta(\cdot,\cdot)z^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right](\cdot,\cdot) - A_1^\delta(\cdot,\cdot)z^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\right](\cdot,\cdot)\right\|_{2,Q_T} \to 0,$$

$$\left\|A_2^\delta(\cdot)z^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right](\cdot,T) + \lambda^i(\cdot)G_1^\delta(\cdot) - A_2^\delta(\cdot)z^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right](\cdot,T) - \lambda(\cdot)G_1^\delta(\cdot)\right\|_{2,\Omega} \to 0,$$

$$\left\|A_3^\delta(\cdot,\cdot)z^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right](\cdot,\cdot) - A_3^\delta(\cdot,\cdot)z^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\right](\cdot,\cdot)\right\|_{2,S_T} \to 0,$$

которые в силу априорной оценки (9) леммы 2 позволяют записать

$$\left|\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right] - \eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\right]\right|_{Q_T} + \left\|\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right] - \eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\right]\right\|_{2,S_T} \to 0, \quad i \to \infty. \tag{27}$$

Предельные соотношения (19) и (27) обеспечивают предельный переход при $i \to \infty$ в трех соотношениях (26). Как результат этого предельного перехода, получаем сформулированный в лемме ПМП для управления $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$. Необходимость доказана.

Доказываем достаточность. Предположим, что соотношения (16) выполняются для некоторой тройки $\pi \equiv (u,v,w) \in \mathcal{D}$ и некоторого $\lambda \in H = L_2(\Omega)$. Тогда можем записать для произвольного $\pi' \equiv (u',v',w') \in \mathcal{D}$ с учетом выпуклости функций $A^1(x,t)z^2$, $A^2(x)z^2$, $A^3(s,t)z^2$ по $z \in \mathbb{R}^1$

$$\begin{aligned}
&L^{\delta,\varepsilon}(\pi',\lambda) - L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda) = \\
&= \int\limits_{Q_T} A_1^\delta(x,t)\left[\left(z^\delta[\pi'](x,t)\right)^2 - \left(z^\delta[\pi](x,t)\right)^2\right]dxdt + \int\limits_\Omega A_2^\delta(x)\left[\left(z^\delta[\pi'](x,T)\right)^2 - \left(z^\delta[\pi](x,T)\right)^2\right]dx + \\
&\quad + \int\limits_{S_T} A_3^\delta(s,t)\left[\left(z^\delta[\pi'](s,t)\right)^2 - z^\delta[\pi]\right](s,t))^2]dsdt + \\
&\quad + \int\limits_{Q_T}\left[B_1^\delta(x,t,u'(x,t)) - B_1^\delta(x,t,u(x,t))\right]dxdt + \int\limits_\Omega\left[B_2^\delta(x,v'(x)) - B_2^\delta(x,v(x))\right]dx + \\
&\quad + \int\limits_{S_T}\left[B_3^\delta(s,t,w'(s,t)) - B_3^\delta(s,t,w(s,t))\right]dsdt + \int\limits_\Omega \lambda(x)G_1^\delta(x)\left(z^\delta[\pi'](x,T) - z^\delta[\pi](x,T)\right)dx \geqslant \\
&\geqslant \int\limits_{Q_T} A_1^\delta(x,t)\left[2z^\delta[\pi](x,t)\right]\left[z^\delta[\pi'](x,t) - z^\delta[\pi](x,t)\right]dxdt + \\
&\quad + \int\limits_\Omega A_2^\delta(x)\left[2z^\delta[\pi](x,T)\right]\left[z^\delta[\pi'](x,T) - z^\delta[\pi](x,T)\right]dx + \\
&\quad + \int\limits_{S_T} A_3^\delta(s,t)\left[2z^\delta[\pi](s,t)\right]\left[z^\delta[\pi'](s,t) - z^\delta[\pi](s,t)\right]dsdt + \\
&\quad + \int\limits_{Q_T}\left[B_1^\delta(x,t,u'(x,t)) - B_1^\delta(x,t,u(x,t))\right]dxdt + \int\limits_\Omega\left[B_2^\delta(x,v'(x)) - B_2^\delta(x,v(x))\right]dx + \\
&\quad + \int\limits_{S_T}\left[B_3^\delta(s,t,w'(s,t)) - B_3^\delta(s,t,w(s,t))\right]dsdt + \int\limits_\Omega \lambda(x)G_1^\delta(x)\left(z^\delta[\pi'](x,T) - z^\delta[\pi](x,T)\right)dx.
\end{aligned}$$

Можем также записать

$$\Big(z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi]\Big)_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^\delta_{i,j}(x,t)(z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi])_{x_j}\Big) + a^\delta(x,t)\Big(z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi]\Big) + u'(x,t) - u(x,t) = 0,$$

$$\Big(z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi]\Big)(x,0) = v'(x) - v(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial\big(z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi]\big)}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)\Big(z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi]\Big) = w'(s,t) - w(s,t), \quad (s,t) \in S_T.$$

Тогда, применяя, как и выше при доказательстве необходимости, лемму 3, получаем

$$L^{\delta,\varepsilon}(\pi',\lambda) - L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda) \geqslant \int\limits_{Q_T}\big(u'(x,t) - u(x,t)\big)\eta^\delta[\pi](x,t)dxdt - \int\limits_{\Omega}\big(v'(x) - v(x)\big)\eta^\delta[\pi](x,0)dx -$$

$$- \int\limits_{S_T}\big(w'(s,t) - w(s,t)\big)\eta^\delta[\pi](s,t)dsdt + \int\limits_{Q_T}\Big[B^\delta_1(x,t,u'(x,t)) - B^\delta_1(x,t,u(x,t))\Big]dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega}\Big[B^\delta_2(x,v'(x)) - B^\delta_2(x,v(x))\Big]dx + \int\limits_{S_T}\Big[B^\delta_3(s,t,w'(s,t)) - B^\delta_3(s,t,w(s,t))\Big]dsdt, \quad (28)$$

где $\eta^\delta[\pi] \equiv \eta^\delta[\pi,\lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — обобщенное решение сопряженной задачи

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}a^\delta_{i,j}(x,t)\eta_{x_i}\eta + a^\delta(x,t)\eta - 2A^\delta_1(x,t)z^\delta[\pi](x,t) = 0,$$

$$\eta(x,T) = -2A^\delta_2(x)z^\delta[\pi](x,T) - \lambda(x)G^\delta_1(x), x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)\eta = -2A^\delta_3(s,t)z^\delta[\pi](s,t), \quad (s,t) \in S_T.$$

Замечая теперь, что в силу соотношений принципа максимума (16) выражение в правой части неравенства (28) неотрицательно при всех $\pi' \in \mathcal{D}$, получаем неравенство $L^{\delta,\varepsilon}(\pi',\lambda) - L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda) \geqslant 0$ для всех $\pi' \in \mathcal{D}$, т.е. управление $\pi \in \mathcal{D}$ есть решение задачи (15) и, стало быть, $\pi = \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$. Лемма 4 доказана. $\square$

Итак, полученный принцип максимума носит поточечный характер по компонентам u, v и интегральный — по компоненте w. Это связано с тем, что на границе S_T мы не применяли «нужных» свойств решений z, η как прямой задачи, так и сопряженной. Также мы не применяли здесь и C, L_∞ оценок для решений прямой и сопряженной задач. Эти оценки можно получить при некоторых дополнительных предположениях об исходных данных задачи. Получим далее поточечный принцип максимума по всем трем компонентам u, v, w в задаче минимизации функции Лагранжа (15) с использованием «нужных» дополнительных свойств решений z, η как прямой задачи, так и сопряженной, и соответствующих C, L_∞ оценок для этих решений. В случае применения таких оценок поточечный принцип максимума может быть получен для функционала качества общего вида, однако при условиях несколько более жестких по сравнению с условиями (a), (b), (c), (d), (e), (f). В этом случае условие (a$'$) становится излишним. Получению различных вариантов C, L_∞ оценок для решений начально-краевых задач через нормы управлений в лебеговых пространствах с конечными показателями суммируемости и их применению в теории оптимального управления посвящено за последние десятилетия большое число публикаций. В случае оценок для параболических уравнений укажем, например, на важные, хотя и относительно давние работы [18, 19] (см. также обширную библиографию этих работ). Воспользуемся здесь их результатами и, в первую очередь, C и L_∞ оценками работы [19]. С целью получения поточечного принципа максимума по всем трем компонентам u, v, w напомним предварительно, что понимается под точкой Лебега суммируемой функции, заданной на поверхности S_T. Так как в соответствии с условием (f) граница S области Ω является липшицевой (она является кусочно-гладкой), то можно утверждать, что существует конечный набор измеримых в смысле $(n-1)$-мерной меры, индуцированной на S, множеств S_r, $r = 1, 2, \ldots, e$, и таких функций ω_r, $r = 1, 2, \ldots, e$, что, во-первых,

$$\bigcup_{r=1}^{e} S_r = S, \quad \int S_k \cap \int S_l = \varnothing,$$

если $k \neq l$, и, во-вторых, функции

$$\omega_r\colon \overbrace{(-P,P)\times\ldots\times(-P,P)}^{n-1} \to \mathbb{R}^1$$

являются липшицевыми и для некоторой координатной системы $(x'_r, x_{r,n}) \equiv (x_{r,1},\ldots,x_{r,n-1},x_{r,n})$ имеет место равенство

$$\int S_r = \Big\{(x'_r, \omega(x'_r)) : x'_r \in \overbrace{(-P,P)\times\ldots\times(-P,P)}^{n-1}\Big\}.$$

Зафиксируем точку $x_0 \in \int S_r$ для некоторого $1 \leqslant r \leqslant e$ и организуем для данного достаточно малого $\epsilon > 0$ множество

$$S_\epsilon(x_0) \equiv \Big\{x = (x'_r, \omega(x'_r)) : x'_r \in B_\epsilon(x'_{0r}) \subset \overbrace{(0,1)\times\ldots\times(0,1)}^{n-1}\Big\}, \tag{29}$$

где $B_\epsilon(x'_{0r})$ — шар радиуса ϵ с центром в точке x'_{0r} пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Определим также множество $S^\epsilon_T(x_0,t_0) \equiv \{S_\epsilon(x_0)\times(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)\}$. Справедлива следующая лемма, доказательство которой можно найти, например, в [18].

Лемма 6. *Пусть задана функция $f \in L_1(S_T)$. Тогда существует такое измеримое (в смысле n-мерной меры μ_T, индуцированной на S_T) множество L, $\mu_T(L) = \mu_T(S_T)$, что для каждой точки $(x_0,t_0) \in L$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\mu_T(S^\epsilon_T(x_0,t_0))} \int\limits_{S^\epsilon_T(x_0,t_0)} \big|f(x,t) - f(x_0,t_0)\big|\mu_T(dsdt) = 0.$$

Указанные в сформулированной лемме точки (x_0,t_0) из множества L мы и называем точками Лебега функций из $L_1(S_T)$. Итак, пусть в дополнение к условиям (a), (b), (c), (d), (e), (f) исходные данные задачи (OC^0) таковы, что

$$\begin{gathered} a^\delta_{i,j} \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad \gamma > 0, \quad a^\delta_{i,j}(x) = a^\delta_{j,i}(x), \quad i,j = 1,\ldots,n, \\ \Omega \text{ — область класса } C^{2,\gamma}, \end{gathered} \tag{30}$$

т.е. граница S области Ω является границей класса $C^{2,\gamma}$, $\gamma \in (0,1]$. Последнее означает, что S — такая $(n-1)$-мерная поверхность класса $C^{2,\gamma}$, что область Ω лежит локально по одну сторону от S. При этом функция принадлежит классу $C^{2,\gamma}$, если она дважды гладкая и ее вторые производные принадлежат гельдеровскому классу H^γ. Считаем также, что вместо оценки $\|a^\delta_{i,j} - a^0_{i,j}\|_{\infty,Q_T} \leqslant \delta$, входящей в определение отклонения возмущенных исходных данных f^δ от невозмущенных f^0 выполняется оценка

$$\Big\|a^\delta_{i,j} - a^0_{i,j}\Big\|_{C^{1,\gamma}(\Omega)} \leqslant \delta. \tag{31}$$

В этом случае, так как выполняются условия (a), (b), (c), (d), (e), (f), то в силу леммы 1 решение $z^\delta[\pi]$ класса $V^{1,0}_2(Q_T)$ (этот класс традиционно еще обозначается как $C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \equiv C([0,T];L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_1(\Omega)))$ существует для любого $\pi \in \mathcal{D}$ (точнее, для любого $\pi \in \mathcal{H}$) при любом $\delta \in [0,\delta_0]$. В предположении, что U, V, W — компакты, аппроксимируем задачу минимизации функционала Лагранжа (15), как и выше, последовательностью аналогичных задач (18) с $\lambda^i \in L_\infty(\Omega)$. Как следствие, получаем опять интегральное представление (20) для приращения функционала Лагранжа, в записи которого используется вспомогательная сопряженная функция

$$\eta^\delta\Big[\pi, \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big] \equiv \eta^\delta\Big[\pi, \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i\Big] \in V^{1,0}_2(Q_T)$$

— решение вспомогательного сопряженного уравнения (21). Применяем далее игольчатое варьирование всех трех управлений $\big(u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\big)$: варьирование управлений $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ задается формулой (22), а $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ варьируется по формуле

$$w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i](s,t) \equiv \begin{cases} w \in W, & \text{если } (s,t) \in S^\epsilon_T(\bar s,\bar t); \\ w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t), & \text{если } (s,t) \in S_T \setminus S^\epsilon_T(\bar s,\bar t). \end{cases} \tag{32}$$

где $(\bar s,\bar t)$ — точка Лебега функций (множество $S^\epsilon_T(\bar s,\bar t)$ определяется равенством (29)),

$$\Big(w' - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big)\eta^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](s,t), \quad B^\delta_3(s,t,w') - B^\delta_3\Big(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)\Big), \quad (s,t) \in S_T, \quad w' \in W^*,$$

а W^* — счетное всюду плотное множество в W. Благодаря лемме 6 такой выбор точек $(\bar s,\bar t)$ возможен, причем лебегова мера множества всех таких точек $(\bar s,\bar t)$ совпадает соответственно с лебеговой мерой боковой поверхности S_T. Далее замечаем, что, так как U, V, W — компакты, а значит все управления $u^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]$, $v^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]$, $w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]$ равномерно ограничены, то, благодаря сформулированным выше условиям (см. дополнительные условия (30), (31)), можно, в силу [19, предложения 3.3, 3.4], записать оценки с произвольными $q > (n+2)/2$, $r > n+1$

$$\Big\|z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big]\Big\|_{\infty,Q_T} + \Big\|z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big]\Big\|_{\infty,S_T} \leqslant C_1\bigg(\Big\|u^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big\|_{q,Q_T} + \Big\|v^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big\|_{\infty,\Omega} + \Big\|w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big\|_{q_1,S_T}\bigg),$$

где постоянная $C_1 > 0$ зависит лишь от ϵ, n, q, r, Ω, T, K, и

$$\Big\|z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big]\Big\|^{(0)}_{\overline{Q}_{\iota,T}} \leqslant C_2\bigg(\Big\|u^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big\|_{q,Q_T} + \Big\|v^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big\|_{2,\Omega} + \Big\|w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big\|_{r,S_T}\bigg), \tag{33}$$

где постоянная $C_2 > 0$ зависит лишь от ϵ, ι, n, q, r, Ω, T, K ($K > 0$ — постоянная из условия (e)). Одновременно с (33) можем записать

$$\begin{aligned} &\Big\|z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big] - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big\|^{(0)}_{\overline{Q}_{\iota,T}} \leqslant \\ &\leqslant C_2\bigg(\Big\|u^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i] - u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big\|_{q,Q_T} + \Big\|v^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i] - v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big\|_{2,\Omega} + \Big\|w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i] - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big\|_{r,S_T}\bigg) \to 0, \quad \epsilon \to 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Естественно, одновременно мы можем записать и более «грубую» оценку (4) леммы 1

$$\begin{aligned} &\Big\|z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big] - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big\|_{2,Q_T} + \Big\|z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big] - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big\|_{2,S_T} \leqslant \\ &\qquad \leqslant C\bigg(\Big\|u^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i] - u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big\|_{2,Q_T} + \Big\|v^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i] - v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big\|_{2,\Omega} + \Big\|w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i] - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big\|_{2,S_T}\bigg), \end{aligned}$$

из которой получаем сходимость

$$\Big\|z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big] - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big\|_{2,Q_T} + \Big\|z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big] - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big\|_{2,S_T} \to 0, \quad \epsilon \to 0. \tag{35}$$

Таким образом, в силу предельных соотношений (34), (35) и равномерной ограниченности управлений $u^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]$, $v^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]$, $w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]$ можно утверждать, что выполняется и предельное соотношение

$$\begin{aligned} &\Big\|z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big] - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big\|_{q,Q_T} + \Big\|z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big](\cdot,T) - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big](\cdot,T)\Big\|_{\infty,\Omega} + \\ &\qquad + \Big\|z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\Big] - z^\delta\Big[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\Big]\Big\|_{r,S_T} \to 0, \quad \epsilon \to 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Полученное предельное соотношение (36) дает возможность применить оценки предложений 3.3, 3.4 в [19] еще раз, но теперь уже применительно к разности решений вспомогательной (21) (при

$\pi = \pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$) и предельной (23) сопряженных задач. По этой причине можем записать предельное соотношение

$$\left\|\eta^\delta\left[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}\left[\lambda^i,\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right]\right] - \eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right]\right\|_{\infty,Q_T} + \left\|\eta^\delta\left[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right](\cdot,0) - \eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right](\cdot,0)\right\|_{\infty,\Omega} + \\ + \left\|\eta^\delta\left[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right] - \eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right]\right\|_{\infty,S_T} \to 0, \quad \epsilon \to 0. \quad (37)$$

Последнее предельное соотношение позволяет вычислить первую вариацию в случае $\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] = \left(u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right)$ и получить первые два соотношения максимума леммы 4 (варьирование управлений $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ задается формулой (22)), а затем вычислить также первую вариацию, но уже в случае $\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] = \left(u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\ w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right)$ ($w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ варьируется по формуле (32)). В последнем случае имеем предельное соотношение

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\mu_T(S_T^\epsilon(\bar{x},\bar{t}))}\left(L^{\delta,\varepsilon}\left(\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\right) - L^{\delta,\varepsilon}\left(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i\right)\right) = \\ = \left(w - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda](\bar{s},\bar{t})\right)\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right](\bar{s},\bar{t})dsdt + B_3^\delta(\bar{s},\bar{t},w) - B_3^\delta\left(\bar{s},\bar{t},w^{\delta,\varepsilon}[\lambda](\bar{s},\bar{t})\right),$$

основанное на полученном выше представлении (20) для приращения функционала Лагранжа и равномерной сходимости (см. (37))

$$\left\|\eta^\delta\left[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right] - \eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\right\|_{\infty,S_T} \to 0, \quad \epsilon \to 0.$$

Как результат, получаем поточечный по всем трем компонентам u, v, w ПМП для управления $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$:

$$H_u^{\delta,\varepsilon}\left(x,t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x,t),\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right](x,t)\right) = \max_{u\in U} H_u^{\delta,\varepsilon}\left(x,t,u,\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right](x,t)\right) \text{ при п.в. } (x,t)\in Q_T,$$
$$H_v^{\delta,\varepsilon}\left(x,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x),\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right](x,0)\right) = \max_{v\in V} H_v^{\delta,\varepsilon}\left(x,v,\eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x,0)\right) \text{ при п.в. } x\in\Omega,$$
$$H_w^{\delta,\varepsilon}\left(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t),\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\right](s,t)\right) = \max_{w\in W} H_w^{\delta,\varepsilon}\left(s,t,w,\eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s,t)\right) \text{ при п.в. } (s,t)\in S_T. \quad (38)$$

Предельные соотношения (19) и (27), как и выше, обеспечивают предельный переход при $i\to\infty$ в трех соотношениях (38). Как результат этого предельного перехода, получаем следующий (второй) ПМП для управления $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$.

Лемма 7. *Управление $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$, являющееся решением задачи* (15) *при условиях* (a), (b), (c), (d), (e), (f) *с компактными множествами U, V, W и при дополнительных условиях* (30), (31) *удовлетворяет соотношениям*

$$H_u^{\delta,\varepsilon}\left(x,t,u^{\delta,\varepsilon}[\lambda](x,t),\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\right](x,t)\right) = \max_{u\in U} H_u^{\delta,\varepsilon}\left(x,t,u,\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\right](x,t)\right) \text{ при п.в. } (x,t)\in Q_T,$$
$$H_v^{\delta,\varepsilon}\left(x,v^{\delta,\varepsilon}[\lambda](x),\eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]](x,0)\right) = \max_{v\in V} H_v^{\delta,\varepsilon}\left(x,v,\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\right](x,0)\right) \text{ при п.в. } x\in\Omega,$$
$$H_w^{\delta,\varepsilon}\left(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda](s,t),\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\right](s,t)\right) = \max_{w\in W} H_w^{\delta,\varepsilon}\left(s,t,w,\eta^\delta\left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\right](s,t)\right) \text{ при п.в. } (s,t)\in S_T, \quad (39)$$

где $\eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]] \equiv \eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda],\lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — решение сопряженной задачи (17) *при $\pi = \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ И, обратно, в силу выпуклости задачи любой элемент $\pi\in\mathcal{D}$, удовлетворяющий вместе с некоторой $\lambda\in H = L_2(\Omega)$ соотношению максимума* (39) *и уравнению* (17), *в которых $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ надо заменить на π, доставляет минимум в задаче* (15).

После доказательства двух вариантов принципа максимума Понтрягина (см. леммы 4, 7) для простейшей задачи оптимального управления (15) можем переформулировать полученный выше регуляризованный принцип Лагранжа теоремы 2 для задачи (OC^0) в форме регуляризованнх принципов максимума. Для этой цели можно использовать оба варианта принципа максимума лемм 4, 7.

С целью указанных переформулировок, прежде всего, обозначим через $\Pi_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих принципу максимума леммы 4 в задаче (15), а через $\widetilde{\Pi}_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ — множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих принципу максимума леммы 7. Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости $f^\delta(\cdot)+\varepsilon\|\cdot\|^2$, каждое из этих множеств состоит из одного элемента: $\Pi_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\equiv\pi_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$, $\widetilde{\Pi}_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\equiv\widetilde{\pi}_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ и справедливы равенства (каждое при соответствующих оговоренных выше условиях) $\pi_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda]=\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$, $\widetilde{\pi}_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda]=\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$. Тогда непосредственными следствиями теоремы 2 и лемм 4, 7 являются следующие регуляризованные ПМП в задаче оптимального управления $(\widetilde{P}^0)$, для которой в этом случае справедливо равенство $\beta=\beta_0$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (a), (a′), (b), (c), (d), (e), (f), *а множества* U, V, W *— выпуклые компакты. Тогда все утверждения теоремы* 2 *остаются справедливыми и в том случае, если в них* $\pi^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$ *заменяется везде на* $\pi_m^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (a), (b), (c), (d), (e), (f) *и дополнительные условия* (30), (31), *а множества* U, V, W *— выпуклые компакты. Тогда все утверждения теоремы* 2 *остаются справедливыми и в том случае, если в них* $\pi^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$ *заменяется везде на* $\widetilde{\pi}_m^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
3. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — Наука, 1977.
4. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: МЦНМО, 2011.
5. *Гамкрелидзе Р. В.* Математические работы Л. С. Понтрягина// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 1998. — *60.* — С. 5–23.
6. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. — М.: Наука, 1971.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
8. *Плотников В. И.* Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений// Докл. АН СССР. — 1965. — *165*, № 1. — С. 33–35.
9. *Сумин М. И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна—Таккера в гильбертовом пространстве// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 9. — С. 1594–1615.
10. *Сумин М. И.* Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — *54*, № 1. — С. 25–49.
11. *Сумин М. И.* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2019. — *25*, № 1. — С. 279–296.
12. *Сумин М. И.* О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2020. — *26*, № 2. — С. 252–269.
13. *Сумин М. И.* О регуляризации принципа Лагранжа и построении обобщенных минимизирующих последовательностей в выпуклых задачах условной оптимизации.// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2020. — *30*, № 3. — С. 410–428.
14. *Сумин М. И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2004. — *44*, № 11. — С. 2001–2019.
15. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
16. *Breitenbach T., Borzi A.* A sequential quadratic hamiltonian method for solving parabolic optimal control problems with discontinuous cost functionals// J. Dynam. Control Syst. — 2019. — *25*, № 3. — P. 403–435.
17. *Breitenbach T., Borzi A.* On the SQH scheme to solve nonsmooth PDE optimal control problems// Num. Funct. Anal. Optim. — 2019. — *40*, № 13. — С. 1489–1531.
18. *Casas E.* Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations// SIAM J. Control Optim. — 1997. — *35.* — P. 1297–1327.

19. *Raymond J.-P., Zidani H.* Hamiltonian Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations// Appl. Math. Optim. — 1999. — *39*, № 2. — P. 143–177.

Сумин Михаил Иосифович
Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина;
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
E-mail: m.sumin@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 144–156
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-144-156

УДК 519.24

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

© 2022 г. **В. Л. ХАЦКЕВИЧ**

Аннотация. В работе рассмотрены экстремальные свойства средних значений нечетких чисел, а также их систем относительно некоторых метрик на множестве нечетких чисел. Введено и изучено квазискалярное произведение нечетких чисел.

***Ключевые слова*:** нечетко-случайная величина, среднее значение, экстремальное свойство.

SOME EXTREMAL PROPERTIES OF MEAN CHARACTERISTICS OF FUZZY NUMBERS

© 2022 **V. L. KHATSKEVICH**

Abstract. In this paper, we consider extremal properties of mean values of fuzzy numbers and their systems with respect to some metrics on the set of fuzzy numbers. The quasi-scalar product of fuzzy numbers is introduced and examined.

***Keywords and phrases*:** fuzzy random variable, mean value, extremal property.

***AMS Subject Classification*:** 60K10

1. Введение. В последние годы в различных задачах математического моделирования широко применяются методики, связанные с нечеткими множествами (см., например, [4, 18]). Одним из разделов бурно развивающейся теории нечетких множеств является теория нечетких чисел. В данной работе рассмотрены некоторые экстремальные свойства средних характеристик нечетких чисел.

Ниже под нечетким множеством A, заданным на универсальном пространстве X, будем понимать совокупность упорядоченных пар $(\mu_A(x), x)$, где функция принадлежности $\mu_A(x)\colon X \to [0,1]$ определяет степень принадлежности $\forall x \in X$ множеству A.

Будем использовать следующее определение нечеткого числа (ср. [4, гл. 2-4], [16, гл. 5]). Нечетким числом A называется нечеткое множество, универсальным множеством которого является множество действительных чисел, и которое дополнительно удовлетворяет следующим условиям:

(i) носитель нечеткого числа — замкнутое и ограниченное (компактное) множество действительных чисел: $\mathrm{Supp}(A) \subset \mathbb{R}$;

(ii) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ выпукла;

(iii) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ нормальна, т.е.

$$\sup_x \mu_A(x) = 1;$$

(iv) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ полунепрерывна сверху.

Множество таких нечетких чисел ниже будем обозначать через J.

В настоящей работе ориентируемся на следующие экстремальные свойства числовых средних.

Рассмотрим совокупность n вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Как известно (см. [2, гл. I, § 5]), их среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} x_k$$

является решением следующей экстремальной задачи

$$\sum_{i=0}^{n}(x_i - x)^2 \to \min, \quad x \in \mathbb{R},$$

а медиана Me обладает следующим экстремальным свойством:

$$\sum_{i=0}^{n}|x_i - \mathrm{Me}\,| \leqslant \sum_{i=0}^{n}|x_i - x_j|, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Такого рода экстремальные свойства и различные их обобщения иногда используются для самого определения средних значений объектов различного рода (см., например, [2, гл. II, III], [3, гл. 5, § 5]).

В настоящей статье экстремальные свойства (в смысле минимизации некоторых расстояний) устанавливаются для средних характеристик нечетких чисел и их систем. При этом для нечетких чисел средние — это вещественные числа, а для систем нечетких чисел в качестве средних рассматриваются как вещественные, так и нечеткие числа. Приведены примеры.

2. Экстремальные свойства средних характеристик нечетких чисел. Среднее значение нечеткого числа A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$, задается с помощью метода центроидной дефаззификации следующим образом:

$$M(A) = \int_{-\infty}^{\infty} x\tilde{\mu}_A(x)dx, \tag{1}$$

где $\tilde{\mu}_A$ — нормированная функция принадлежности, определяемая формулой

$$\tilde{\mu}_A = \mu_A(x) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(x)dx. \tag{2}$$

Отметим, что интегрирование в (1) и (2) фактически осуществляется по $x \in \mathrm{supp}(A)$. Однако для нас удобнее записи вида (1) и (2).

Экстремальное свойство среднего $M(A)$ аналогично стандартному свойству математического ожидания случайной величины с плотностью вероятности $\tilde{\mu}_A(x)$ (см., например, [1, гл. 5, § 30]).

Предложение 1. *Среднее $M(A)$, определяемое формулой* (1), *является решением, причем единственным, следующей экстремальной задачи*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x - y|^2\tilde{\mu}_A(x)dx \to \min, \quad y \in \mathbb{R},$$

т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x - M(A)|^2\tilde{\mu}_A(x)dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (x - y)^2\tilde{\mu}_A(x)dx \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Замечание 1. Пусть $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — заданная непрерывная строго монотонная числовая функция. Аналогично случайным величинам, для нечетких чисел можно определить и изучить класс нелинейных средних вида

$$M_\phi(A) = \phi^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\tilde{\mu}(x)dx\right).$$

Функцию ϕ в этом случае назовем определяющей. Если $\phi(x) = x^p$ ($p > 1$ или $0 < p < 1$), получим аналог средней степенной. В случае $\phi(x) = \log_a(x)$ при $a > 1$ — аналог средней геометрической.

Согласно предложению 1 (ср. работу автора [15]) величина $\phi(M_\phi(A))$ является решением экстремальной задачи

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\phi(x) - y)^2 \tilde{\mu}(x)dx \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Пример 1. Пусть нечеткое треугольное число A характеризуется тройкой чисел (a, b, c), $a < b < c$, определяющей функцию принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно установить, что нормированная функция принадлежности (2) имеет в этом случае вид

$$\tilde{\mu}(x) = \frac{2}{c-a}\mu(x).$$

Тогда среднее значение треугольного числа, определяемое формулой (1), равно

$$M(A) = \frac{1}{3}(a + b + c).$$

Медиану $\mathrm{Me}\,A$ нечеткого числа A по аналогии с медианой случайной величины можно определить как число, удовлетворяющее соотношению

$$\int_{-\infty}^{\mathrm{Me}\,A} \tilde{\mu}_A(x)dx = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Предложение 2. *Медиана* $\mathrm{Me}\,A$ *нечеткого числа* A*, определяемая формулой* (3)*, является решением экстремальной задачи*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x - y|\tilde{\mu}_A(x)dx \to \min, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Доказательство аналогично приводимому для случайных величин с плотностью распределения вероятностей $\tilde{\mu}_A(x)$ (см., например, [1, гл. 5, § 30]).

Замечание 2. По аналогии с (3) можно ввести понятие квантиля q_β нечеткого числа порядка β, определяемого для заданного $\beta \in (0, 1)$ равенством

$$\int_{-\infty}^{q_\beta} \tilde{\mu}_\beta(x)dx = \beta.$$

Можно показать (ср. [14]), что квантиль минимизирует по $c \in (-\infty, +\infty)$ выражение

$$\int_{-\infty}^{c} (c - x)\tilde{\mu}(x)dx + \frac{\beta}{1-\beta}\int_{c}^{+\infty} (x - c)\tilde{\mu}(x)dx.$$

Пример 2. Рассмотрим нечеткое треугольное число A с функцией принадлежности $\mu(x)$, представленной в примере 1. В случае выполнения условия $a + c > 2b$ медиана $\mathrm{Me}\,A$ имеет вид

$$\mathrm{Me}\,A = c - \sqrt{\frac{1}{2}(c-a)(c-b)}.$$

В противоположном случае, т.е., когда $a + c \leqslant 2b$, медиана равна

$$\mathrm{Me}\, A = a + \sqrt{\frac{1}{2}(c-a)(b-a)}.$$

С другой стороны, средние характеристики нечетких чисел можно определить посредством α-уровневых множеств нечетких чисел.

Как известно, интервал α-уровня нечеткого числа A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ определяется соотношениями

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geqslant \alpha\} \quad (\alpha \in (0,1]), \quad A_0 = \mathrm{Supp}(A).$$

Обратно, нечеткое число по своим α-уровням однозначно восстанавливается посредством декомпозиции.

Согласно предположениям (i)–(iv) введения все α-уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую (нижнюю) границу α-интервала $a^-(\alpha)$, а правую (верхнюю) — $a^+(\alpha)$, т. о. $A_\alpha = [a^-(\alpha), a^+(\alpha)]$. Иногда $a^-(\alpha)$ и $a^+(\alpha)$ называют, соответственно, левым и правым индексами нечеткого числа.

Отметим, что в силу предположения о выпуклости функции принадлежности нечеткого числа, функции $a^-(\alpha)$ и $a^+(\alpha)$ являются, соответственно, монотонно неубывающей и монотонно невозрастающей по α.

Как известно, среднее значение нечеткого числа A, используя интервальное представление, можно определить следующим образом:

$$m(A) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(a^-(\alpha) + a^+(\alpha)\big)\,d\alpha. \tag{4}$$

Пример 3. Рассмотрим нечеткое треугольное число A, характеризуемое тройкой (a, b, c). Как известно, в этом случае нижняя и, соответственно, верхняя граница α-интервала имеет вид

$$a^-(\alpha) = (b-a)\alpha + a, \quad a^+(\alpha) = -(c-b)\alpha + c.$$

Тогда среднее (4) для нечеткого треугольного числа равно

$$m(A) = \frac{1}{4}(a + 2b + c).$$

Заметим, что согласно примерам 1 и 3 различным образом определяемые средние для заданного треугольного числа не совпадают.

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. Например, определяемые посредством функций принадлежности (расстояние Евклида, расстояние Хэмминга). При интервальном подходе часто используют расстояния Хаусдорфа между множествами α-уровня нечетких чисел (см., например, [13]). Однако хотелось бы рассмотреть такое определение расстояния, чтобы среднее (4) минимизировало относительно него некоторую ошибку (ср. [12, §§ 4.37, 4.38]). В качестве такого расстояния удобно рассмотреть следующее.

Пусть A и B два нечетких числа. Зададим расстояние $d(A, B)$ между ними формулой

$$d(A,B) = \left(\int_0^1 (a^-(\alpha) - b^-(\alpha))^2 + (a^+(\alpha) - b^+(\alpha))^2 d\alpha\right)^{1/2}, \tag{5}$$

где $[a^-(\alpha), a^+(\alpha)]$ и $[b^-(\alpha), b^+(\alpha)]$ — интервалы α-уровней нечетких чисел A и B, соответственно.

Такое определение расстояния между нечеткими числами ранее использовалось, например, в [7] при изучении задачи о регрессии нечетких чисел.

Расстояние (5) обладает обычными свойствами метрики:

(a) $d(A, B) = d(B, A)$;

(b) $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$ — неравенство треугольника;

(c) $d(A,B) \geqslant 0$; при этом $d(A,B)=0$ точно тогда, когда $A=B$. Здесь равенство между нечеткими числами A и B понимается как равенство всех соответствующих интервалов α-уровня.

Отметим специальные свойства расстояния (5).

(d) $d(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| d(A,B)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$;

(e) $d(A+C, B+C) = d(A,B)$ для всех $A, B, C \in J$.

Обозначим через $\hat{y}$ синглтон, отвечающий числу $y \in \mathbb{R}$, т.е. нечеткое число, функция принадлежности $\mu_{\hat{y}}(x)$ которого равна 1 при $x=y$ и 0 в противном случае. Отметим, что левый и правый индексы $\hat{y}$ при всех $\alpha \in [0,1]$ совпадают с y.

Предложение 3. *Среднее значение* (4) *нечеткого числа* A *минимизирует величину*

$$d^2(A,\hat{y}) = \delta(y) = \int\limits_0^1 \big((a^-(\alpha)-y)^2 + (a^+(\alpha)-y)^2\big)d\alpha \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

причем оно является единственным решением этой экстремальной задачи. Обратно, решение данной экстремальной задачи единственно, и оно совпадает со средним вида (4).

Доказательство следует из необходимого и достаточного условия минимума для дифференцируемой функции $\delta(y)$, т. к. $\delta'(y) = 4(y - m(A))$, а вторая производная $\delta''(y) = 4$ ($\forall y \in \mathbb{R}$). Единственность влечет сильная выпуклость функции $\delta(y)$. $\square$

Напомним, что нечеткое число A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ называют унимодальным, если условие $\mu_A(x) = 1$ выполнено только для одного значения $x \in \mathbb{R}$. Такое значение x называют модой. Оказывается, что мода обладает определенным экстремальным свойством.

Предложение 4. *Пусть* A *— унимодальное нечеткое число со строго выпуклой функцией принадлежности. Тогда его мода есть решение следующей экстремальной задачи*:

$$\Delta(y) = \int\limits_0^1 \Big(\big|a^-(\alpha)-y\big| + \big|a^+(\alpha)-y\big|\Big)d\alpha \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Обратно, для унимодального числа решение экстремальной задачи (6) *единственно и совпадает с модой.*

Доказательство. Пусть $\mu_A(x)$ — функция принадлежности нечеткого числа A, отрезок $[a,c]$ — носитель нечеткого числа A и $b \in [a,c]$ — мода этого нечеткого числа, т.е. $\mu_A(b) = 1$. Обозначим $\mu_A(x)$ при $x \in [a,b]$ через $\mu_{b^-}(x)$ и при $x \in [b,c]$ через $\mu_{b^+}(x)$. Согласно предположению функция $\mu_{b^-}(x)$ строго монотонно возрастает, а функция $\mu_{b^+}(x)$ — строго монотонно убывает (каждая на своей области определения). Поэтому границы α-интервала нечеткого числа A задаются с помощью обратных функций $a^-(\alpha) = \mu_{b^-}^{-1}(\alpha)$ и $a^+(\alpha) = \mu_{b^+}^{-1}(\alpha)$.

Фиксируем число y. Тогда левую часть равенства (6) можем записать в виде

$$\Delta(y) = \int\limits_0^{\mu_{b^-}(y)} (y - a^-(\alpha))d\alpha + \int\limits_{\mu_{b^-}(y)}^1 (a^-(\alpha)-y)d\alpha + \int\limits_0^{\mu_{b^+}(y)} (a^+(\alpha)-y)d\alpha + \int\limits_{\mu_{b^+}(y)}^1 (y - a^+(\alpha))d\alpha.$$

Дифференцируя это выражение по y, получим $\Delta'_y = 2(\mu_{b^-}(y) - \mu_{b^+}(y))$.

Отметим, что по определению функция $\mu_{b^-}(y)$ монотонно убывает, а $\mu_{b^+}(y)$ монотонно возрастает. Поэтому функция $\Delta'_y(y)$ — монотонно убывает. Тогда, если y_* решение уравнения $\Delta'_y(y_*) = 0$, то в силу монотонности $\Delta'_y(y) < \Delta'_y(y_*) = 0$ при $y < y_*$ и $\Delta'_y(y) > 0$ при $y > y_*$. Таким образом, выполнено условие минимума в точке y_*. $\square$

Пример 4. Для нечеткого треугольного числа A, характеризуемого тройкой (a,b,c) (см. пример 1) в соответствии с предложением 4 мода, равная b, является решением экстремальной задачи (6).

Несмотря на значительное число работ, посвященных средним характеристикам нечетких чисел (см., например, [8, 10, 11]), приведенные выше экстремальные свойства ранее не отмечались.

3. Смежные вопросы. В ряде работ, в том числе в [9], применялось следующее определение расстояния между нечеткими числами.

Для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с α-уровнями $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ положим

$$\rho(\tilde{z},\tilde{u}) = \left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (\lambda(z^+(\alpha)-u^+(\alpha)) + (1-\lambda)(z^-(\alpha)-u^-(\alpha)))^2 d\lambda d\alpha\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Интересный факт состоит в том, что среднее (4) обладает экстремальным свойством и относительно расстояния, введенного по формуле (7).

Предложение 5. *Среднее* (4) *является решением оптимальной задачи*

$$\rho(\tilde{z},\hat{y}) \to \min \quad y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Действительно, при $y \in \mathbb{R}$ рассмотрим

$$\delta_1(y) = \rho^2(\tilde{z},\hat{y}) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \Big(\lambda\big(z^+(\alpha)-y\big) + (1-\lambda)\big(z^-(\alpha)-y\big)\Big)^2 d\lambda d\alpha.$$

Производная этого выражения равна

$$\delta_1'(y) = -2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \Big(\lambda\big(z^+(\alpha)-y\big) + (1-\lambda)\big(z^-(\alpha)-y\big)\Big) d\lambda d\alpha.$$

Отсюда

$$\delta_1'(y) = -2\int\limits_0^1 \lambda d\lambda \int\limits_0^1 \big(z^+(\alpha)-y\big)d\alpha - 2\int\limits_0^1 (1-\lambda)d\lambda \int\limits_0^1 \big(z^-(\alpha)-y\big)d\alpha = 2y - \int\limits_0^1 \big(z^+(\alpha)+z^-(\alpha)\big)d\alpha.$$

Таким образом, решение уравнения $\delta_1'(y) = 0$ совпадает со средним (4). При этом вторая производная $\delta_1''(y) = 2$. Так что среднее (4) — решение задачи (8).

Пусть нечеткому числу $\tilde{z}$ отвечают α-уровни $z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Положим, как это принято в интервальном анализе,

$$\operatorname{mid} z_\alpha = \frac{1}{2}(z^+(\alpha)+z^-(\alpha)), \quad \operatorname{rad} z_\alpha = \frac{1}{2}(z^+(\alpha)-z^-(\alpha)).$$

Для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ определим квазискалярное произведение

$$\langle\tilde{z},\tilde{u}\rangle = \int\limits_0^1 (\operatorname{mid} z_\alpha \operatorname{mid} u_\alpha + \operatorname{rad} z_\alpha \operatorname{rad} u_\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (z^+(\alpha)u^+(\alpha) + z^-(\alpha)u^-(\alpha))d\alpha. \tag{9}$$

При этом квазинорма $\tilde{z}$ есть $\langle\tilde{z},\tilde{z}\rangle^{1/2}$. Другие определения скалярного произведения между нечеткими числами содержатся, например, в [6, 17]. Наше определение (9) характеризуется приводимой ниже связью с расстоянием (5).

Пример 5. Рассмотрим два треугольных числа $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$, характеризуемые тройками a_i, b_i, c_i при $a_i < b_i < c_i$ $(i = 1, 2)$. По определению их верхних и нижних индексов (см. пример 1) и согласно (9)

$$\langle\tilde{z}_1,\tilde{z}_2\rangle = \frac{2}{3}b_1b_2 + \frac{1}{3}(a_1a_2 + c_1c_2) + \frac{1}{6}(a_1b_2 + b_1a_2 + b_1c_2 + c_1b_2).$$

Нетрудно проверить следующие свойства введенного квазискалярного произведения (9):

(i) $\langle\tilde{z},\tilde{u}\rangle = \langle\tilde{u},\tilde{z}\rangle$ для всех $\tilde{u},\tilde{z} \in J$;

(ii) $\langle c_1\tilde{z}, c_2\tilde{u}\rangle = c_1c_2\langle\tilde{z},\tilde{u}\rangle$ при условии, что произведение чисел $c_1c_2 > 0$;

(iii) $\langle \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, \tilde{u}\rangle = \langle \tilde{z}_1, \tilde{u}\rangle + \langle \tilde{z}_2, \tilde{u}\rangle$ для всех $\tilde{u}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J$;

(iv) $\langle \tilde{z}, \tilde{z}\rangle \geqslant 0$, причем условие $\langle \tilde{z}, \tilde{z}\rangle = 0$ эквивалентно равенству нулю левого и правого индексов $\tilde{z}$.

Здесь сложение нечетких чисел и умножение на вещественное число понимается в интервальном смысле. т.е. для нечетких чисел $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ с α-интервалами $[z_i^-(\alpha), z_i^+(\alpha)]$ суммой является нечеткое число $\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2$ с α-интервалами $[z_1^-(\alpha) + z_2^-(\alpha), z_1^+(\alpha) + z_2^+(\alpha)]$. Умножение на положительное число означает умножение индексов на это число, а умножение на отрицательное число означает умножение индексов на это число и перемену их местами.

(v) Неравенство Коши—Буняковского $|\langle \tilde{z}, \tilde{u}\rangle| \leqslant \langle \tilde{z}, \tilde{z}\rangle^{1/2} \langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle^{1/2}$ для всех $\tilde{u}, \tilde{z} \in J$.

Проверим его. Пусть нечеткие числа $\tilde{z}, \tilde{u}$ характеризуются интервалами α-уровня $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ соответственно. Тогда

$$|\langle \tilde{z}, \tilde{u}\rangle| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \Big|z^+(\alpha)u^+(\alpha) + z^-(\alpha)u^-(\alpha)\Big| d\alpha \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \Big((z^+)^2 + (z^-)^2\Big)^{1/2} \Big((u^+)^2 + (u^-)^2\Big)^{1/2} d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \big((z^+)^2 + (z^-)^2\big) d\alpha\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \big((u^+)^2 + (u^-)^2\big) d\alpha\right)^{1/2} = \|\tilde{z}\| \|\tilde{u}\|.$$

Нечеткому числу $\tilde{z}$ с интервалом α-уровня $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ поставим в соответствие векторную функцию $\bar{z}(\alpha) = (z^+(\alpha), z^-(\alpha))^T$. Для векторных функций $\bar{z}$, $\bar{u}$ формула

$$\langle \bar{z}, \bar{u}\rangle = \frac{1}{2}\int_0^1 (z^+(\alpha)u^+(\alpha) + z^-(\alpha)u^-(\alpha)) d\alpha$$

определяет обычное скалярное произведение, а $\|\bar{z}\| = \langle \tilde{z}, \tilde{z}\rangle^{1/2}$ — норму.

Предложение 6. *Расстояние $d(\tilde{z}, \tilde{u})$, определяемое формулой* (5)*, и норма $\|\bar{z} - \bar{u}\|$ связаны соотношением $d^2(\tilde{z}, \tilde{u}) = 2\|\bar{z} - \bar{u}\|^2$ для всех $\tilde{z}, \tilde{u} \in J$.*

Этим, в частности, объясняется наличие специальных свойств (d), (e) расстояния (5).

Понятие квазискалярного произведения может быть использовано для определения линейной независимости системы нечетких чисел $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$. А именно, назовем систему нечетких чисел $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$ линейно независимой, если соответствующие векторные функции $\bar{z}_1(\alpha), \ldots, \bar{z}_n(\alpha)$ — линейно независимы. Так как по определению $\langle \tilde{z}, \tilde{u}\rangle = \langle \bar{z}, \bar{u}\rangle$, то в силу известного результата линейная независимость системы нечетких чисел $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$ эквивалентна обратимости их матрицы Грама с элементами $\langle \tilde{z}_i, \tilde{z}_j\rangle$.

Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — неотрицательная квадратично суммируемая весовая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 f(\alpha) d\alpha = 1.$$

Взвешенное среднее значение нечеткого числа $\tilde{z}$, используя интервальное представление, можно определить следующим образом (см., например, [11]):

$$m_f(\tilde{z}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(z^-(\alpha) + z^+(\alpha)\big) f(\alpha) d\alpha. \tag{10}$$

Пусть $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ — два нечетких числа. Зададим взвешенное расстояние $\rho_f(\tilde{z}, \tilde{u})$ между ними формулой

$$\rho_f(\tilde{z}, \tilde{u}) = \left(\int_0^1 \Big(\big(z^-(\alpha) - u^-(\alpha)\big)^2 + \big(z^+(\alpha) - u^+(\alpha)\big)^2\Big) f(\alpha) d\alpha\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Здесь $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ — интервалы α-уровней нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$, соответственно.

Предложение 7. *Взвешенное среднее значение* (10) *нечеткого числа* $\tilde{z}$ *минимизирует величину*

$$\delta(y) = \rho_f^2(\tilde{z}, \hat{y}) = \int\limits_0^1 \Big(\big(z^-(\alpha) - y\big)^2 + \big(z^+(\alpha) - y\big)^2\Big) f(\alpha) d\alpha \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Оно является единственным решением этой экстремальной задачи.

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.

Замечание 3. Аналогично (9) можно ввести взвешенное квазискалярное произведение

$$\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle_f = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \Big(z^+(\alpha) u^+(\alpha) + z^-(\alpha) u^-(\alpha)\Big) f(\alpha) d\alpha,$$

которое обладает свойствами аналогичными (i)–(v) квазискалярного произведения.

Иногда в качестве среднего нечеткого числа $\tilde{z}$ с индексами $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ рассматривают интервал (см., например, [10]) $[z^-_{\text{ср}}, z^-_{\text{ср}}]$, где

$$z^-_{\text{ср}} = \int\limits_0^1 z^-(\alpha) d\alpha, \quad z^+_{\text{ср}} = \int\limits_0^1 z^+(\alpha) d\alpha. \tag{12}$$

Предложение 8. *Числа* $z^{\pm}_{\text{ср}}$, *определяемые формулой* (12), *являются решениями следующих экстремальных задач*:

$$\int\limits_0^1 \big(z^{\pm}(\alpha) - y\big)^2 d\alpha \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что функционалы, определяемые формулами (4) и (10) и характеризующие средние значения, являются линейными относительно интервальных операций сложения и умножения на число для нечетких чисел.

Введем теперь нелинейное среднее нечеткого числа $\tilde{z}$ посредством заданной непрерывной строго монотонной (определяющей) функции $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$m_\phi(\tilde{z}) = \phi^{-1}\left(\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \Big(\phi(z^-(\alpha)) + \phi(z^+(\alpha))\Big) d\alpha\right). \tag{13}$$

Подчеркнем, что выражение, являющееся аргументом функции ϕ^{-1} в определении $m_\phi(\tilde{z})$ фактически является средним нечеткого числа $\phi(\tilde{z})$.

Из предложения 3 вытекает следующее утверждение (ср. [15]).

Предложение 9. *Величина* $\phi(m_\phi(\tilde{z}))$, *где* $m_\phi(\tilde{z})$ *определяется формулой* (13), *является решением экстремальной задачи*

$$d(\phi(\tilde{z}), \hat{y}) \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

4. Средние и нечеткие средние систем нечетких чисел. Возможны различные подходы к определению нечеткого среднего совокупности нечетких чисел (см., например, [18, гл. 7]).

Будем связывать нечеткие средние с решениями некоторых экстремальных задач, по аналогии со средним арифметическим и медианой совокупности действительных чисел.

Пусть имеются такие вещественные числа $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, что

$$\beta_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = 1.$$

Рассмотрим взвешенное нечеткое среднее нечетких чисел $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$

$$\tilde{z}_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{z}_i. \tag{14}$$

Такого рода суммы встречаются, например, при нечетком портфельном инвестировании, когда $\tilde{z}_i$ — нечеткие доходности отдельных финансовых активов, β_i — их доли в портфеле ценных бумаг.

Отметим, что функция принадлежности нечеткого числа (14) может быть построена по функциям принадлежности нечетких чисел $\tilde{z}_i$ на основе принципа нечеткого обобщения Л. Заде. Поэтому среднее значение и медиана нечеткого числа $\tilde{z}_{\text{ср}}$ могут быть найдены по формулам (1), (3).

Остановимся более подробно на интервальном подходе. Рассмотрим среднее значение $m(\tilde{z}_{\text{ср}})$ (см. (4)) нечеткого числа $\tilde{z}_{\text{ср}}$, определяемого формулой (14). Согласно предложению 3 среднее $m(\tilde{z}_{\text{ср}})$ является решением следующей экстремальной задачи

$$d(\tilde{z}_{\text{ср}}, y) \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Здесь расстояние d определяется формулой (5). Кроме того, по определению интервального сложения левый и правый индексы нечеткого числа $\tilde{z}_{\text{ср}}$ при любом $\alpha \in (0, 1]$ равны соответственно

$$z_{\text{ср}}^-(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^-(\alpha), \quad z_{\text{ср}}^+(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^+(\alpha).$$

Тогда согласно определению

$$m(\tilde{z}_{\text{ср}}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i m(\tilde{z}_i). \tag{15}$$

В связи с этим имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Среднее значение $m(\tilde{z}_{ср})$ нечеткого числа $\tilde{z}_{ср}$, определяемого формулой* (14), *является решением задачи*

$$\delta_n(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 \Big(\big(z_i^-(\alpha) - y\big)^2 + \big(z_i^+(\alpha) - y\big)^2 \Big) d\alpha \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

причем единственным. Здесь z_i^- и z_i^+ — левый и правый индексы нечеткого числа $\tilde{z}_i$.

Доказательство. Рассмотрим производную $\delta_n'(y)$:

$$\delta_n'(y) = -2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 \Big(z_i^-(\alpha) + z_i^+(\alpha) - 2y \Big) d\alpha = -2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 \Big(z_i^-(\alpha) + z_i^+(\alpha) \Big) d\alpha + 4y.$$

Поэтому условие $\delta_n'(y_*) = 0$ влечет равенство

$$y_* = \sum_{i=1}^{n} \beta_i m(z_i).$$

Тогда $\delta_n'(m(\tilde{z}_{\text{ср}})) = 0$ согласно (15). При этом $\delta_n''(y) = 4$ для всех $y \in \mathbb{R}$. Таким образом, утверждение теоремы является следствием достаточного признака минимума для функции $\delta_n(y)$. При этом единственность вытекает из сильной выпуклости функции $\delta_n(y)$. □

Отметим, что использование предложения 3 для нечеткого среднего (14) приводит к экстремальной задаче

$$\int_0^1 \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^-(\alpha) - y \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^+(\alpha) - y \right)^2 \right) d\alpha \to \min \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

решением которой также является $m(\tilde{z}_{\text{ср}})$.

Оказывается, что и само взвешенное нечеткое среднее (14) есть решение некоторой экстремальной задачи.

Теорема 2. *Нечеткое среднее* (14) *является единственным решением следующей задачи*:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 \Big(\big(z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha)\big)^2 + \big(z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha)\big)^2 \Big) d\alpha \to \min \quad \forall \tilde{w} \in J. \tag{16}$$

Здесь J — совокупность всех нечетких чисел, обладающих свойствами (i)–(iv) *из Введения* (*см. с.* 144).

Доказательство. Фиксируем i и $\alpha \in (0,1]$. Аргумент α в нижеследующих формулах писать не будем, имея его в виду по умолчанию. Рассмотрим выражение

$$(z_i^- - w^-)^2 - (z_i^+ - w^+)^2 = (z_i^- - z_{\text{cp}}^- + z_{\text{cp}}^- - w^-)^2 + (z_i^+ - z_{\text{cp}}^+ + z_{\text{cp}}^+ - w^+)^2 =$$
$$= (z_i^- - z_{\text{cp}}^-)^2 + (z_{\text{cp}}^- - w^-)^2 + 2(z_i^- - z_{\text{cp}}^-)(z_{\text{cp}}^- - w^-) + (z_i^+ - z_{\text{cp}}^+)^2 + (z_{\text{cp}}^+ - w^+)^2 + 2(z_i^+ - z_{\text{cp}}^+)(z_{\text{cp}}^+ - w^+).$$

Умножим обе части на β_i и просуммируем по i обе части полученного равенства. Тогда с учетом равенств

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^- - z_{\text{cp}}^-) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^- - z_{\text{cp}}^- = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^+ - z_{\text{cp}}^+) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^+ - z_{\text{cp}}^+) = 0$$

получим

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i ((z_i^- - w^-)^2 + (z_i^+ - w^+)^2) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i ((z_i^- - z_{\text{cp}})^2 + (z_i^+ - z_{\text{cp}})^2) + (z_{\text{cp}}^- - w^-)^2 + (z_{\text{cp}}^+ - w^+)^2).$$

Здесь мы учли, что

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1.$$

Интегрируя по α, получим требуемое утверждение. □

Следствие 1. *Нечеткое среднее*

$$\hat{z}_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{z}_i$$

является единственным решением экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 ((z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha))^2 + (z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha))^2) d\alpha \to \min \quad \forall \tilde{w} \in J.$$

Этот результат является обобщением классического характеристического экстремального свойства среднего арифметического (см., например, [2, гл. I, § 5]).

Пример 6. Рассмотрим дискретную нечетко-случайную величину $\tilde{Z}$, значениями которой являются нечеткие числа $\tilde{z}_i$ $(i = 1, .., n)$, принимаемые с вероятностями p_i $(i = 1, \dots, n)$. Определим нечеткое математическое ожидание $\tilde{Z}$ формулой

$$M(\tilde{Z}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{z}_i.$$

Согласно теореме 2 величина $M(\tilde{Z})$ является решением экстремальной задачи (16) при $\beta_i = p_i$.

Если дискретная нечетко-случайная величина $\tilde{Z}$ принимает счетное число значений $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$, то в качестве ее нечеткого математического ожидания следует брать ряд

$$M(\tilde{Z}) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \tilde{z}_i,$$

понимаемый (например) в смысле сходимости по метрике (5). В этом случае, как и выше, справедлив соответствующий экстремальный результат.

Пример 6 показывает, какой вид в случае нечетко-случайных величин принимает известный в теории вероятностей результат об экстремальном свойстве математического ожидания «обычных» случайных величин.

Нечетко-случайные величины и их средние активно исследуются в последние годы (см., например, [6, 9]), однако экстремальные свойства такого года ранее не отмечались.

Обсудим понятие медианы совокупности нечетких чисел. Одним из возможных подходов к определению нечеткой медианы является следующий. Ранжируем совокупность нечетких чисел $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$, исходя из какого-либо признака сравнения (например, по средним значениям). Срединное значение в полученном ряду назовем нечеткой квазимедианой.

Приведем пример реализации этого подхода. Определим соотношение неравенства (доминирования) $\tilde{z} \prec \tilde{w}$ между нечеткими числами $\tilde{z}$ и $\tilde{w}$ с α-интервалами $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[w^-(\alpha), w^+(\alpha)]$ формулами

$$z^-(\alpha) < w^-(\alpha), \quad z^+(\alpha) < w^+(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

Такое определение используется, например, в [5, гл. 4, 5].

Пусть задана система возрастающих нечетких чисел $\tilde{z}_1 \prec \ldots \prec \tilde{z}_N$. Срединное значение в этом ряду назовем квазимедианой. В случае нечетного $N = 2n - 1$ это будет $\tilde{z}_n$. В четном случае $N = 2n$ в качестве срединного значения возьмем полусумму центральных членов $1/2(\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n+1})$. Так определенная квазимедиана обладает характерным экстремальным свойством.

Предложение 10. *Для заданной системы возрастающих нечетких чисел $\tilde{z}_1 \prec \ldots \prec \tilde{z}_N$ срединное значение $\tilde{z}_{cp}$ обладает следующим экстремальным свойством*:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \Big(\big| z_i^-(\alpha) - z_{cp}^-(\alpha) \big| + \big| z_i^+(\alpha) - z_{cp}^+(\alpha) \big| \Big) d\alpha \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \Big(\big| z_i^-(\alpha) - z_j^-(\alpha) \big| + \big| z_i^+(\alpha) - z_j^+(\alpha) \big| \Big) d\alpha$$

для $j = 1, \ldots, N$.

Действительно, по условию при каждом $\alpha \in (0, 1]$ для системы левых индексов выполнены соотношения $z_1^-(\alpha) < \ldots < z_N^-(\alpha)$. Срединное значение этой системы чисел совпадает с $z_{\text{ср}}^-(\alpha)$ и является медианой. Поэтому согласно известному экстремальному свойству числовых медиан (см., например, [2, гл. I, § 5]) справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} \big| z_i^-(\alpha) - z_{\text{ср}}^-(\alpha) \big| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \big| z_i^-(\alpha) - z_j^-(\alpha) \big|, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Аналогично для правых индексов $z_1^+(\alpha) < \ldots < z_N^+(\alpha)$ срединным значением будет $z_{\text{ср}}^+(\alpha)$; поэтому

$$\sum_{i=1}^{N} \big| z_i^+(\alpha) - z_{\text{ср}}^+(\alpha) \big| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \big| z_i^+(\alpha) - z_j^+(\alpha) \big|, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Складывая эти неравенства и интегрируя обе части полученного соотношения по α от 0 до 1, получим требуемый результат.

Предложение 10 переносит известное экстремальное свойство числовых медиан на нечеткие числа.

Другие определения нечетких медиан, не опирающиеся на экстремальные свойства, рассмотрены, например, в [18, гл. 7], [8].

Приведем теперь результат относительно экстремального свойства специального среднего в метрике Евклида.

Как известно, расстояние Евклида между нечеткими числами A и B с функциями принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ определяется равенством

$$d_E(A,B) = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2 dx \right)^{1/2}. \tag{17}$$

Уточним, что интегрирование в этой формуле фактически производится по ограниченному множеству $\operatorname{supp}(A \cup B)$.

Выпуклой комбинацией нечетких чисел $\tilde{z}_i$, $i = 1, \dots, n$, с функциями принадлежности $\mu_i(x)$ называют нечеткое число $\tilde{z}$ с функцией принадлежности

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu_i(x), \quad \beta_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, n, \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1.$$

Подчеркнем, что выпуклая комбинация $\mu(x)$, по существу, является взвешенным средним $\mu_i(x)$.

Обозначим через $\Phi_{\text{пр}}$ совокупность функций принадлежности, удовлетворяющих условиям (i)–(iv) из определения нечеткого числа во введении.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i d_E^2(\tilde{z}_i, \tilde{z}_\eta) \to \min, \quad \eta \in \Phi_{\text{пр}}, \tag{18}$$

где $\tilde{z}_\eta$ — нечеткое число с функцией принадлежности $\eta(x)$.

Теорема 3. *Пусть заданы нечеткие числа* $\tilde{z}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ *с функциями принадлежности* $\mu_i(x)$. *Тогда их выпуклая комбинация*

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu_i(x)$$

является единственным решением экстремальной задачи (18).

Доказательство. В соответствии с определением (17) экстремальная задача (18) может быть записана в виде

$$\delta_\eta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu_i(x) - \eta(x))^2 dx \to \min, \quad \eta \in \Phi_{\text{пр}}.$$

Пусть $\eta(x)$ — произвольная функция принадлежности из $\Phi_{\text{пр}}$, а

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu_i(x)$$

— выпуклая комбинация функций принадлежности $\mu_i(x)$. Фиксируем i и рассмотрим выражение

$$(\mu_i(x) - \eta(x))^2 = (\mu_i(x) - \mu(x) + \mu(x) - \eta(x))^2 = \\ = (\mu_i(x) - \mu(x))^2 + (\mu(x) - \eta(x))^2 + 2(\mu_i(x) - \mu(x))(\mu(x) - \eta(x)).$$

Умножим обе части полученного равенства на β_i и просуммируем их по i от 1 до n. Тогда при каждом $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i (\mu_i(x) - \eta(x))^2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (\mu_i(x) - \mu(x))^2 + (\mu(x) - \eta(x))^2 + 2(\mu(x) - \eta(x)) \sum_{i=1}^{n} \beta_i (\mu_i(x) - \mu(x)).$$

При этом последнее слагаемое обращается в 0 по определению функции $\mu(x)$ и в силу равенства $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Тогда

$$\delta_\eta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_i(x) - \mu(x))^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu(x) - \eta(x))^2 dx,$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

Следствие 2. *Функция*

$$\hat{\mu}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)$$

минимизирует по η *сумму квадратов евклидовых расстояний*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_i(x) - \eta(x))^2 dx.$$

5. Заключение. В работе рассмотрены средние характеристики нечетких чисел — аналитические средние, медианы, моды. Выделены расстояния на множестве нечетких чисел, относительно которых соответствующее средние обладают экстремальными свойствами, и проверены эти свойства. Введено квазискалярное произведение между нечеткими числами, и установлена его взаимосвязь с выделенной метрикой на множестве нечетких чисел. Рассмотрены средние и нечеткие средние характеристики систем нечетких чисел, и установлены их экстремальные свойства. Приведенные в работе примеры для треугольных чисел допускают обобщения на так называемые $L - R$ числа, в частности, трапецеидальные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Либроком, 2011.
2. *Джини К.* Средние величины. — М.: Статистика, 1970.
3. *Орлов А. И.* Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006.
4. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. — М.: Бином, 2015.
5. *Смоляк С. А.* Оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. — М.: Наука, 2012.
6. *Шведов А. С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин// Прикл. эконометрика. — 2016. — *42*. — С. 121–138.
7. *Bargiela A., Pedrycz W., Nakashima T.* Multiple regression with fuzzy data// Fuzzy Sets Syst. — 2007. — P. 2169–2188.
8. *Calvo T., Mesiar R.* Generalized median// Fuzzy Sets Syst. — 2001. — *124*. — P. 59–61.
9. *Colubi A., Coppi R., D'Urso P., Gil M. A.* Statistics with fuzzy random variables// Metron–Int. J. Stat. — 2007. — *65*. — P. 277–303.
10. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — *24*. — P. 279–300.
11. *Fuller R., Majlender P.* On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers// Fuzzy Sets Syst. — 2003. — *136*. — P. 363–374.
12. *Hoffmann-Jorgensen J.* Probability with a View Toward Statistics. — New York: Chapman & Hall, 1998.
13. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces// Fuzzy Sets Syst. — 1984. — *12*. — P. 215–229.
14. *Khatskevich V. L.* On random properties of mean values of continuous random variables and relations between them// J. Math. Sci. — 2017. — *1*, № 2. — P. 304–312.
15. *Khatskevich V. L.* On some class of nonlinear mean random values// J. Phys. Conf. Ser. — 1479. — 012087.
16. *Lee K. H.* First Course on Fuzzy Theory and Applications. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2004.
17. *Nather W.* Regression with fuzzy data// Comput. Stat. Data Anal. — 2006. — *51*, № 1. — P. 235–252.
18. *Nguyen H. T., Wu B.* Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data. — Berlin: Springer, 2006.

Хацкевич Владимир Львович
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж
E-mail: `vlkhats@mail.ru`

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.