

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 206 (2022)



Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 206 (2022)

Дата публикации 7 марта 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 15 раз в год

Редактор-составитель выпуска
Научный редактор выпуска
Компьютерная вёрстка

М. Ш. Бурлуцкая
Е. Е. Букжалёв
А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНИТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>
<http://www.mathnet.ru/intro>
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-3-14>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-15-22>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-23-34>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-35-41>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-42-62>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-63-67>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-68-81>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-82-97>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-98-106>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-107-124>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-125-132>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-133-137>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-206-138-145>

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 206

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
ЗИМНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ»

ВОРОНЕЖ, 28 ЯНВАРЯ – 2 ФЕВРАЛЯ 2021 г.

Часть 1



Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

О сглаживании операторного коэффициента дифференциального оператора первого порядка в банаховом пространстве (<i>А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова</i>)	3
Об одном дискретном уравнении в четверти плоскости и связанной с ним краевой задаче (<i>Б. Б. Васильев, А. А. Ходырева</i>)	15
Математическое моделирование некоторых аэроупругих систем (<i>П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов</i>)	23
Закон сохранения электрического заряда и физическая интерпретация обобщенной системы Коши–Римана (<i>Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева</i>)	35
О задаче типа Неймана для уравнения Бюргерса в вырождающейся угловой области (<i>М. Т. Джесналиев, М. Г. Ергалиев, А. А. Асетов, А. М. Аязбаева</i>)	42
Об одной нелинейной краевой задаче для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка (<i>Н. Ж. Кајскенова, Н. Т. Орумбаева</i>)	63
Об обратной задаче определения зависящего от пространственной переменной младшего коэффициента в параболическом уравнении со слабым вырождением (<i>В. Л. Камынин</i>)	68
О разрешимости дробно-нагруженной задачи теплопроводности (<i>М. Т. Космакова, Л. Ж. Касымова</i>)	82
О некоторых моделях в языкоизнании (<i>А. А. Кретов, М. В. Половинкина, И. П. Половинкин</i>)	98
О постановке и разрешимости l -проблемы моментов для систем дробного порядка (<i>С. С. Постнов</i>)	107
Интегрируемость $lcAC_S$ -структур (<i>А. Р. Рустанов, С. В. Харитонова</i>)	125
О корректности одной модельной задачи тепломассопереноса в однородных полупроводниковых мишениях (<i>Д. В. Туртин, В. В. Калманович, М. А. Степович</i>)	133
Об одной задаче Дубинина для весовой емкости конденсатора Хессе с A_1 -весом Макенхаупта (<i>Б. А. Шлык</i>)	138



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 3–14
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-3-14

УДК 517.9

О СГЛАЖИВАНИИ ОПЕРАТОРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2022 г. А. Г. БАСКАКОВ, И. А. КРИШТАЛ, Н. Б. УСКОВА

Аннотация. В работе рассмотрен дифференциальный оператор первого порядка, действующий в лебеговых пространствах. Использование метода подобных операторов позволяет привести рассматриваемый оператор к оператору с более удобным потенциалом.

Ключевые слова: метод подобных операторов, дифференциальный оператор первого порядка, коэффициенты Фурье, лебегово пространство.

ON SMOOTHING THE OPERATOR COEFFICIENT OF A FIRST-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR IN A BANACH SPACE

© 2022 А. Г. БАСКАКОВ, И. А. КРИШТАЛ, Н. Б. УСКОВА

ABSTRACT. In this paper, we consider a first-order differential operator acting in Lebesgue spaces. The method of similar operators allows one to reduce the operator considered to an operator with a more convenient potential.

Keywords and phrases: method of similar operators, first-order differential operator, Fourier coefficients, Lebesgue space.

AMS Subject Classification: 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. В работе рассматривается преобразование подобия, позволяющее переводить возмущенный оператор $A - B$, где A — оператор с известными спектральными свойствами в более просто устроенный оператор $A - B_0$, спектральные свойства которого легче изучать, потому что они близки к спектральным свойствам оператора A .

Пусть \mathcal{X} — комплексное банахово пространство. Символом $\text{End } \mathcal{X}$ обозначена банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующий в \mathcal{X} , с нормой $\|X\|_\infty = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|$, $X \in \text{End } \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$. Гильбертово пространство будет обозначаться через \mathcal{H} , а символом $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \text{End } \mathcal{H}$ — двусторонний идеал операторов Гильberta—Шmidta из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$.

Введем в рассмотрение пространства $L_p = L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty)$, измеримых по Бохнеру и суммируемых на \mathbb{R} со степенью p , $p \in [1, \infty)$, классов эквивалентности функций со значениями в комплексном банаховом пространстве \mathcal{X} . Ограничимся в рассмотрении только $p \in [1, \infty)$ ($p \neq \infty$); поэтому в дальнейшем условие $p \in [1, \infty)$ может иногда быть опущено. Нормы в пространствах

Работа первого и третьего авторов выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

L_p задаются формулами

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathcal{X}}^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty).$$

Если $\mathcal{X} = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство, то пространство $L_2 = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ является также гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \langle x(t), y(t) \rangle_{\mathcal{H}} dt.$$

Через $W_p^1 = W_p^1(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty)$, обозначим пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из L_p с производными из L_p со значениями в комплексном банаховом пространстве \mathcal{X} . А символом $C_{\omega}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ обозначено пространство (сильно) непрерывных ограниченных функций периодических периода ω со значениями в банаховом пространстве \mathcal{X} и нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Также будут использоваться банаховы пространства $L_{p,\omega}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $1 \leq p < \infty$, локально интегрируемых (по Бохнеру) со степенью p классов эквивалентности ω -периодических функций и пространства $l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $1 \leq p < \infty$, суммируемых со степенью p последовательностей со значениями в банаховом пространстве \mathcal{X} .

Работа состоит из двух частей. Первая часть — обзорная, в ней представлено современное состояние метода подобных операторов, с помощью которого проводится исследование во второй части. Разобрана абстрактная схема метода и приведены наиболее значимые примеры его применения. При этом, в основном, метод применяется в гильбертовом пространстве для диагонализации (или блочной диагонализации) исследуемого оператора и все построения удобно вести на языке операторных (или числовых) матриц рассматриваемых операторов.

Во второй части рассматривается применение метода подобных операторов к приведению дифференциального оператора первого порядка на оси с потенциалом из C_{ω} к более простому оператору. Тут принципиально другая схема применения схемы метода подобных операторов, которая и излагается в этой части. Иллюстрируются общие теоремы метода подобных операторов (теоремы 1—4).

2. Метод подобных операторов. Абстрактная схема и история. Начнем этот раздел с определения подобных операторов.

Определение 1. Два линейных оператора $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует такой непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } \mathcal{X}$, что имеют место равенства $UD(A_2) = D(A_1)$, $A_1 Ux = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется оператором преобразования A_1 в A_2 или сплетающим оператором.

Преобразование подобия широко используется в различных исследованиях, начиная с приведения матриц к диагональному виду (см. [30]). Хороший обзор по истории и нынешнему состоянию общей теории преобразования подобия можно найти в работах С. М. Ситника с соавторами (см. [35, 48, 67, 68, 71]). Отметим также, что альтернативное название для теории операторов преобразования — transmutation operator method, и оно восходит к Ж. Дельсаарту (см. [64, 65]). Широкое использование преобразования подобия обусловлено тем, что, зная спектральные свойства одного из операторов, легко можно получить спектральные свойства ему подобного. В частности, спектры подобных операторов совпадают.

Ключевым понятием метода подобных операторов является понятие допустимой для невозмущенного замкнутого линейного оператора $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ тройки. Через $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ будем обозначать спектр и резольвентное множество оператора A соответственно.

Определение 2 (см. [8]). Пусть \mathcal{M} — линейное пространство операторов из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ и

$$J: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \Gamma: \mathcal{M} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$$

— линейные операторы (трансформаторы). Тройку (\mathcal{M}, J, Γ) назовем допустимой тройкой для (невозмущенного) оператора A , а \mathcal{M} — допустимым пространством возмущений, если выполнены следующие условия:

- (i) \mathcal{M} — банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, т.е. $\|X\|_{\mathcal{M}} \leq \text{const} \|X\|_A, X \in \mathcal{M}$;
- (ii) J и Γ — непрерывные операторы;
- (iii) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и $A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX, X \in \mathcal{M}$;
- (iv) $XGY, (\Gamma X)Y \in \mathcal{M}$ для любых $X, Y \in \mathcal{M}$, и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| \leq \gamma$, $\max\{\|XGY\|_{\mathcal{M}}, \|(\Gamma X)Y\|_{\mathcal{M}}\} \leq \gamma \|X\|_{\mathcal{M}} \|Y\|_{\mathcal{M}}, X, Y \in \mathcal{M}$;
- (v) для любых $X \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$ существует такое число $\lambda_{\varepsilon} \in \rho(A)$, что $\|X(A - \lambda_{\varepsilon}I)^{-1}\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

Замечание 1. Вместо свойства (v) в определении 2 можно требовать выполнение любого условия, влекущего равенство $(\Gamma X)D(A) = D(A)$. Например, можно потребовать $\text{Ran } \Gamma X \subset D(A)$ и $A\Gamma X \in \text{End } \mathcal{X}$ для любого $X \in \mathcal{M}$.

Отметим, что обычно в методе подобных операторов предполагается, что J — проектор, и тогда добавляется еще условие

$$J((\Gamma X)JY) = 0 \quad \text{для всех } X, Y \in \mathcal{M}. \quad (1)$$

Теорема 1 (см. [3]). *Пусть (\mathcal{M}, J, Γ) — допустимая для оператора $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ тройка и выполняется условие*

$$6j\gamma\|B\|_{\mathcal{M}} < 1,$$

где $j = \max\{1, \|J\|\}$ и константа γ взята из условия (iv) определения 2. Тогда отображение $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ вида

$$\Phi(X) = B\Gamma X - (\Gamma X)(JX) + B, \quad X \in \mathcal{M},$$

является сжимающим и имеет единственную неподвижную точку X_* в шаре

$$\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{M} : \|X - B\|_{\mathcal{M}} \leq \sqrt{2}\|B\|_{\mathcal{M}}\},$$

т.е. $X_* = \Phi(X_*)$. Оператор X_* может быть найден методом простых итераций как предел последовательности $\{X_n, n \geq 1\}$, где $X_1 = B$ и $X_n = \Phi(X_{n-1}), n \geq 2$. При этом оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, причем оператором преобразования служит оператор $U = I + \Gamma X_* \in \text{End } \mathcal{X}$, т.е.

$$(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - JX_*).$$

Метод подобных операторов, изложенный кратко выше, опирается на метод К. О. Фридрихса подобных операторов (см. [53, 66]), метод Р. Тернера подобных операторов (см. [32]), а также на работы Пуанкаре, Крылова, Боголюбова и окончательно оформляется в работах А. Г. Баскакова (см., например, [3, 8]). Впервые метод подобных операторов (А. Г. Баскакова) был предложен в [2], затем был развит в [3–9, 13, 15]. Связь метода подобных операторов с заменой Крылова–Боголюбова (методом усреднения) описана в [2, 3, 5, 6, 10], а с методом Тернера подобных операторов в [49]. В настоящее время метод подобных операторов активно разрабатывается профессором А. Г. Баскаковым и его учениками. Наиболее интересными за последнее десятилетие, помимо [13, 15], являются работы [17–19, 24–29, 33, 34, 36, 38–47, 50–52, 54–60, 63, 69]. Возникают различные модификации метода подобных операторов, позволяющие лучше учитывать спектральные свойства невозмущенного оператора или (и) характеристики оператора-возмущения. Например, принадлежность его специальным весовым операторным пространствам (см. [52, 54]). Отметим, что во всех цитированных выше работах оператор J является проектором и, соответственно, используется вместо теоремы 1 другая теорема, учитывающая именно этот факт и вытекающая из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть (\mathcal{M}, J, Γ) — допустимая тройка для оператора $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, J — проектор ($J^2 = J$), выполнено условие (1) и $B \in \mathcal{M}$. Пусть также*

$$4\gamma\|J\|\|B\|_{\mathcal{M}} < 1. \quad (2)$$

Тогда отображение $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, определенное формулой

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B =: \Phi(X), \quad X \in \mathcal{M}.$$

является сжимающим и имеет единственную неподвижную точку X_* в шаре

$$\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{M} : \|X_* - B\|_{\mathcal{M}} \leq 3\|B\|_{\mathcal{M}}\},$$

которая может быть найдена методом простых итераций как предел последовательности $\{X_n, n \geq 1\}$, где $X_1 = B$ и $X_n = \Phi(X_{n-1})$, $n \geq 2$. Оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$ и оператором преобразования является оператор $I + \Gamma X_*$, $\Gamma X_* \in \mathcal{M}$.

Условие (2) теоремы 2 можно улучшить в случае специального вида оператора $B \in \mathcal{M}$, а именно, если $JB = 0$. Такой результат получен в [60, Remark 3.1]; приведем его для полноты изложения.

Теорема 3. Пусть (\mathcal{M}, J, Γ) – допустимая тройка для оператора $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{M}$ и $JB = 0$. Тогда при выполнении условия

$$3\gamma\|J\|\|B\|_{\mathcal{M}} < 1$$

оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathcal{M}$ – решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B.$$

При этом имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - JX_*).$$

Наконец, в случае $J = 0$, условие (2) теоремы 2 можно ослабить до приведенного в следующей теореме результата.

Теорема 4. Пусть (\mathcal{M}, J, Γ) – допустимая для оператора A тройка с $J = 0$. При выполнении условия

$$\gamma\|B\| < 1$$

оператор $A - B$ подобен невозмущенному оператору A и $(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)A$, где X_* – решение операторного уравнения $X = B\Gamma X + B$.

Еще раз отметим, что теорема 1 является более общей, чем теоремы 2 и 3, и именно при ее использовании получены результаты данной работы, в отличие от работ с использованием техники метода подобных операторов последнего десятилетия. Заметим также, что во всех цитируемых работах, кроме [47], операторы действуют в комплексном гильбертовом пространстве \mathcal{H} .

Сделаем далее краткий обзор источников [13, 15, 17–19, 24–29, 33, 34, 36, 38–47, 50–52, 54–60, 63, 69]. Вначале отметим, что в 2009 году вышла работа [13], в которой доказательства теорем о подобии велись с использованием операторных матриц, и этот же принцип использовался далее в остальных работах. Также в работе [13], являющейся очень важной с точки зрения развития метода подобных операторов, было досконально разработано и проведено предварительное преобразование подобия, впервые предложенное в [8]. Суть его заключается в следующем. Пусть есть некоторое возмущение $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и есть некоторое удобное для дальнейшего использования пространство допустимых возмущений \mathcal{M} для невозмущенного оператора $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, но $B \notin \mathcal{M}$. Тогда, если это возможно, то, прежде чем применить метод подобных операторов к оператору $A - B$, строится предварительное преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$, где оператор B_0 уже принадлежит \mathcal{M} . И далее применяется стандартная схема метода подобных операторов в «удобном» пространстве допустимых возмущений. Обычно в качестве \mathcal{M} берется двусторонний идеал операторов Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. При этом необходимые свойства этого идеала, используемые в методе подобных операторов, можно найти, например, в [31]. Отметим также, что предварительное преобразование подобия без дальнейшего применения метода подобных операторов использовалась в статьях [20, 62] для доказательства существования такой непрерывной действительной положительной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, что $\sigma(A - B)$ лежит в полосе

от $-f$ до f , где A — самосопряженный оператор и $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, причем оператор $A - B$ подобен оператору $A - B_0$, где $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Для осуществления предварительного преобразования подобия необходимо выполнение ряда условий. Приведем их.

Предположение 1 (см. [13]). Операторы ΓB , JB , B удовлетворяют следующим условиям:

- (a) $\Gamma B \in \text{End } \mathcal{X}$ и $\|\Gamma B\| < 1$;
- (b) $(\Gamma B)D(A) \subset D(A)$;
- (c) $B\Gamma B$, $(\Gamma B)JB \in \mathcal{M}$;
- (d) $A(\Gamma B)x - (\Gamma B)Ax = Bx - (JB)x$, $x \in D(A)$;
- (e) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что выполнено неравенство

$$\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty < \varepsilon.$$

Теорема 5 (см. [13]). При выполнении предположения 1 оператор $A - B$ подобен оператору $A - JB - B_0$, где $B_0 = (I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)JB)$, причем имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma B) = (I + \Gamma B)(A - JB - B_0).$$

Заметим также, что оператор Дирака из [13] характерен тем, что собственные значения невозмущенного оператора «не разбегаются», но отделены друг от друга. Это вносит определенную трудность в применение метода подобных операторов, поэтому в этом случае также приходится учитывать специфику оператора-возмущения B . Работа [13] породила целый ряд статей [16, 17, 36, 46, 47, 56, 58, 59], в которых метод подобных операторов адаптировался под исследование возмущенных дифференциальных операторов первого порядка, при условии, что невозмущенный оператор является нормальным (самосопряженным) оператором с дискретным спектром и отделенными собственными значениями, при этом использовались операторные матрицы. Наконец, в 2020 году вышли работы [18, 19], в которых закрепилась модификация метода под такой класс операторов и собраны конкретные примеры под модификацию.

Отметим, что в последнее время интерес к дифференциальным операторам первого порядка с инволюцией (см. работы А. П. Хромова и М. Ш. Бурлуцкой [14, 21–23]). Операторы, исследуемые в этих работах, также вкладываются в схему из [19]. С помощью метода подобных операторов эти операторы с инволюцией подобно исследовались в [16, 36, 58, 59, 61].

Следующей рубежной работой, в которой разрабатывается другая модификация метода подобных операторов, является работа [15]. В ней, с использованием предварительного преобразования подобия (см. предположение 1 и теорему 5), обосновывается схема исследования возмущенного самосопряженного дифференциального оператора с дискретным спектром, собственные значения которого «разбегаются» с возмущением-потенциалом из $L_2[0, \omega]$. Эта модификация широко развивалась Поляковым Д. М. для получения результатов в работах [24–26, 41, 42, 44], а также другими авторами, например, [52].

Более общая модификация метода подобных операторов, объединившая себе и [13] и [15], представлена в [60].

Отметим также серию работ [27–29, 57] (а также ссылки в них), в которых метод подобных операторов применяется для исследования разностных операторов. При этом у невозмущенного оператора предполагается дискретный спектр с разбегающимися собственными значениями (что соответствует растущему потенциальному), а возмущением является оператор с суммируемыми диагоналями. Поэтому, как правило, в качестве пространства допустимых возмущений используется пространство $\text{End } \mathcal{H}$ или пространство $\text{End}_1 \mathcal{H}$ операторов с суммируемыми диагоналями и предварительное преобразование не требуется. Все разностные операторы обычно рассматриваются в пространстве $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z})$.

Важно подчеркнуть, что в следующем разделе будем опираться на приведенные выше теоремы 1–4.

3. Преобразование подобия дифференциального оператора первого порядка. При изучении задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка иногда бывает полезно исходный оператор преобразованием подобия перевести в оператор с более удобным

для дальнейшего исследования операторным коэффициентом. В некоторых классах задач при выполнении определенных условий удается неавтономную задачу свести к автономной.

Пусть $(Ax)(t) = dx/dt: D(A) = W_p^1 \rightarrow L_p$, $p \in [1, \infty)$. Оператор A будет далее играть роль невозмущенного оператора. Пусть $(Bx)(t) = \mathcal{B}(t)x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $B \in \text{End } L_p$, $\mathcal{B} \in C_\omega(\mathbb{R}, \text{End } L_p)$. Таким образом, оператор B есть оператор умножения на периодическую функцию, он будет играть роль оператора-возмущения.

С помощью метода подобных операторов далее приведем оператор $A - B$ в оператор $A - B_0$, где B_0 — оператор умножения на тригонометрический полином. В случае малости нормы оператора-возмущения оператор B_0 может быть оператором умножения на постоянную функцию. При этом в специальном случае, когда ряд Фурье функции \mathcal{B} содержит только положительные (только отрицательные) коэффициенты, оператор $A - B$ может быть подобен невозмущенному оператору A . В этом случае получаем метод Фридрихса подобных операторов [53, 66].

Перейдем к построению допустимой тройки для невозмущенного оператора A . Так как функция \mathcal{B} является периодической, то ее можно разложить в ряд Фурье

$$\mathcal{B}(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{B}}(n) e^{i2\pi nt/\omega}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где коэффициенты $\widehat{\mathcal{B}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, считаются по формулам

$$\widehat{\mathcal{B}}(n) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \mathcal{B}(t) e^{-i2\pi nt/\omega} dt.$$

Так как $\mathcal{B} \in C_\omega \subset L_{2,\omega}(\mathbb{R}, \text{End } L_p)$, то последовательность коэффициентов $\{\widehat{\mathcal{B}}(n), n \in \mathbb{Z}\}$, принадлежит $l_2(\mathbb{Z}, \text{End } L_p)$.

Пусть \mathcal{M} — пространство операторов умножения на функцию из C_ω . Таким образом, $X \in \mathcal{M}$, если $(Xx)(t) = \mathfrak{X}(t)x(t)$, $x \in L_p$, $\mathfrak{X} \in C_\omega$ и $\mathcal{M} \subset \text{End } L_p$.

Введем в рассмотрение трансформаторы J_n , $\Gamma_n \in \text{End } \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, следующим образом. Для оператора $X \in \text{End } L_p$, $(Xx)(t) = \mathfrak{X}(t)x(t)$, $\mathfrak{X} \in C_\omega$, $x \in L_p$,

$$\mathfrak{X}(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{X}}(n) e^{i2\pi nt/\omega} dt,$$

оператор $J_n X$ является оператором умножения на тригонометрический полином, т.е. $(J_n Xx)(t) = \mathfrak{X}_n(t)x(t)$, $\mathfrak{X}_n \in C_\omega$, $x \in L_p$,

$$\mathfrak{X}_n(t) = \sum_{|k| \leq n} \widehat{\mathfrak{X}}(k) e^{i2\pi kt/\omega}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отметим, что трансформатор $J_n \in \text{End } \mathcal{M}$ определен корректно. Подчеркнем еще раз, что функция $\mathfrak{X}_n \in C_\omega$ — периодическая того же периода ω и она является тригонометрическим операторо-различным полиномом.

Рассмотрим трансформатор $\text{ad}_A: D(\text{ad}_A) \subset \text{End } \mathcal{M} \rightarrow \text{End } \mathcal{M}$, который обычно используется в методе подобных операторов и определяется стандартным для этого метода образом:

$$\text{ad}_A X = AX - XA, \quad X \in D(\text{ad}_A).$$

Область определения $D(\text{ad}_A)$, состоящая из таких операторов $X \in \text{End } \mathcal{M}$, обладает следующими свойствами:

- (i) $XD(A) \subset D(A)$;
- (ii) оператор $AX - XA: D(A) \subset L_p$ допускает расширение Y на L_p и полагается $\text{ad}_A X = Y$.

В рассматриваемом случае, если X — оператор умножения на функцию $\mathfrak{X} \in C_\omega$, производная которой \mathfrak{X}' принадлежит C_ω , и $x \in D(A)$, имеем

$$\text{ad}_A Xx = Xx + Xx' - Xx' = \dot{X}x,$$

где \dot{X} — оператор умножения на функцию $\mathfrak{X}' \in C_\omega$.

Из пункта (iii) определения 2 имеем, что если

$$\mathfrak{X}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{X}}(k) e^{i2\pi kt/\omega}, \quad \mathfrak{X}'(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{X}}(k) \frac{i2\pi k}{\omega} e^{i2\pi kt/\omega},$$

$X - J_n X$ — оператор умножения на функцию

$$\tilde{\mathfrak{X}}(t) = \sum_{|k| > n} \widehat{\mathfrak{X}}(k) e^{i2\pi kt/\omega},$$

то $\Gamma_n X$ — оператор умножения на функцию

$$\mathfrak{Y}_n(t) = \sum_{|k| > n} \frac{\omega}{i2\pi k} \widehat{\mathfrak{X}}(k) e^{i2\pi kt/\omega}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \mathfrak{Y}_n \in C_\omega.$$

Для функции \mathfrak{Y}_n имеет место неравенство Бора—Фавара $\|\mathfrak{Y}_n\| \leq \pi \|\mathfrak{X}_n\| / (2(n+1))$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\|\Gamma_n\| \leq \pi / (2(n+1))$ (см., например, [12]).

Для оценки нормы оператора J_n рассмотрим трапециевидную функцию $\tau_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $n > 0$, заданную формулой

$$\tau_n(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| \leq n, \\ 0, & |\lambda| > n+1, \\ n+1-\lambda, & n < \lambda \leq n+1, \\ n+1+\lambda, & -n-1 \leq \lambda < -n. \end{cases} \quad (3)$$

При этом $\tau_n = \widehat{\varphi}_n$ и известна оценка нормы функции φ_n из L_1 (см. [37, Лемма 1.10.1]):

$$\|\varphi_n\|_1 \leq \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln(2n+1). \quad (4)$$

Можно показать, что

$$(J_n X x)(s) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t) \mathcal{B}(s-t) x(s) dt = (\varphi_n * \mathcal{B})(s) x(s).$$

Поэтому $\|J_n\| \leq \|\varphi_n\|_1 \leq 4/\pi + 2 \ln(2n+1)/\pi$.

Отметим один специальный случай функции $\tau_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Пусть $n = 1$. Тогда функция τ_1 , заданная формулой (3), является преобразованием Фурье функции

$$\varphi(t) = \frac{2 \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2}}{\pi t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

и кроме оценки $\|\varphi\|_1 \leq 4/\pi + (2 \ln 3)/\pi$, вытекающей из (4) (см. [37]), известны и другие оценки нормы функции φ , например, $\|\varphi\|_1 \leq 2^{3/2} 3^{-1/4}$ (см. [62] или [70])

$$\|\varphi\|_1 \leq \sqrt{3}. \quad (5)$$

В приводимой ниже теореме 8 будем использовать оценку (5) из [70], так как она является наиболее точной из приведенных.

Теорема 6. *Тройка $(\mathcal{M}, J_n, \Gamma_n)$ является допустимой тройкой для невозмущенного оператора A при любом $n \geq 1$.*

Доказательство. Для доказательства необходимо проверить выполнение условий определения 2.

Условие (i) выполняется ввиду ограниченности возмущения. Условие (ii) следует из построения трансформаторов J_n и Γ_n , $n \in \mathbb{N}$. Условие (iii) опять же следует из построения трансформатора Γ_n , $n \in \mathbb{N}$. Условие (iv) выполняется с константой $\gamma = \pi / (2(n+1))$, $n \in \mathbb{N}$. И, наконец, выполнение условия (v) следует из ограниченности возмущения $X \in \mathcal{M}$, если в качестве λ_ε брать довольно большое натуральное число. Теорема доказана. \square

Отметим, что в рассматриваемом случае трансформаторы J_n , $n \in \mathbb{Z}_+$, являются проекторами. Но при этом условие (1), необходимое для теоремы 2, выполняется только в случае $n = 0$. Поэтому, несмотря на то, что J_n , $n \in \mathbb{N}$, — проектор, можно применить только самую общую теорему 1. При этом условие (2) теоремы 1 переписывается в виде

$$\frac{3}{n+1}(4 + 2\ln(2n+1))\|\mathcal{B}\| < 1$$

и выполняется при достаточно большом n . Таким образом, имеет место

Теорема 7. *Оператор $d/dt - B$, где B — оператор умножения на функцию $\mathcal{B} \in C_\omega$, действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $1 \leq p < \infty$, с $\mathcal{B} \in C_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ подобен оператору $d/dt - B_0$, где B_0 — оператор умножения на тригонометрический полином $\mathcal{B}_0 \in C_\omega$.*

Из теорем 1, 6 и оценки (5) немедленно вытекает

Теорема 8. *Пусть для функции $\mathcal{B} \in C_\omega$ выполнено условие*

$$\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\|\mathcal{B}\| < 1.$$

Тогда оператор $d/dt - B$, где B — оператор умножения на функцию \mathcal{B} , подобен оператору $d/dt - B_0$, где B_0 — оператор умножения на функцию $\mathfrak{X}_ \in C_\omega$ вида*

$$\mathfrak{X}_*(t) = e^{-i2\pi t/\omega}C_1 + C_2 + e^{i2\pi t/\omega}C_3,$$

где $C_k \in \text{End } \mathcal{X}$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

Рассмотрим теперь случай $n = 0$. Тогда $J = J_0$ и JX — оператор умножения на постоянную функцию (имеющую только коэффициент Фурье $\widehat{\mathfrak{X}}(0)$). Тогда операторы J_0X , $X - J_0X$ и Γ_0X — это операторы умножения на функции из C_ω , имеющие ряды Фурье соответственно:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_0(t) &= \widehat{\mathfrak{X}}(0), \quad \mathfrak{X}^0(t) = \mathfrak{X}(t) - \mathfrak{X}_0(t) = \sum_{k \neq 0} \widehat{\mathfrak{X}}(k)e^{i2\pi kt/\omega}, \\ \mathfrak{Y}_0(t) &= \sum_{k \neq 0} \frac{\omega}{i2\pi k} \widehat{\mathfrak{X}}(k)e^{i2\pi kt/\omega}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Причем $\|\mathfrak{Y}_0\| \leq \pi\|\mathfrak{X}\|/2$, т.е. $\gamma \leq \pi/2$.

Для оценки нормы $\|J_0\|$ в рассматриваемом случае удобно использовать треугольную функцию

$$\tilde{\tau}(\lambda) = \begin{cases} 0, & |\lambda| \geq 1, \\ 1 - |\lambda|, & |\lambda| \leq 1. \end{cases}$$

При этом $\tilde{\tau} = \widehat{\varphi}$ и известно, что $\|\varphi\|_1 = \tilde{\tau}(0) = 1$ (см. [1, 37]).

Осталось применить теорему 2. Так как в этом случае оператор J является проектором и выполнено условие (2), имеет место

Теорема 9. *Пусть выполнено условие*

$$2\pi\|\mathcal{B}\| < 1. \tag{6}$$

Тогда оператор $d/dt - B$, действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $1 \leq p < \infty$, подобен оператору $d/dt - B_0$, где B_0 — оператор умножения на постоянную функцию.

Условие (6), позволяющее приводить дифференциальный оператор с переменным операторным коэффициентом к дифференциальному оператору с постоянным коэффициентом, можно ослабить в случае, если среднее

$$\int_0^\omega \mathcal{B}(t)dt$$

функции \mathcal{B} есть нуль. При этом используется теорема 3.

Теорема 10. Пусть выполнено условие

$$\frac{3\pi}{2}\|\mathcal{B}\| < 1$$

и функция \mathcal{B} имеет нулевое среднее. Тогда оператор $d/dt - B$, действующий в $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $1 \leq p < \infty$, подобен оператору $d/dt - B_0$, где B_0 — оператор умножения на постоянную функцию.

Рассмотрим еще один специальный случай потенциала \mathcal{B} . Пусть функция \mathcal{B} имеет ряд Фурье вида

$$\mathcal{B}(t) = \sum_{n>0} \widehat{\mathcal{B}}(n) e^{i2\pi nt/\omega} \quad \left(\mathcal{B}(t) \sim \sum_{n>0} \widehat{\mathcal{B}}(n) e^{i2\pi nt/\omega} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

В этом случае оператор умножения на функцию \mathcal{B} будет строго каузальным (строго антикаузальным), и такие операторы образуют в C_ω замкнутое подпространство [11]. Тогда в качестве пространства допустимых возмущений \mathcal{M} берется пространство операторов умножения на функции, имеющие в разложении ряд Фурье только положительные (только отрицательные) коэффициенты. При этом очевидно, что трансформатор $J = J_0$ в рассматриваемом случае будет нулевым, $\|J\| = 0$. Более того, из работы [12] следует, что в этом случае $\gamma = 1$. Все остальные рассуждения остаются в силе, и из теоремы 4 следует

Теорема 11. Пусть функция $\mathcal{B} \in C_\omega$ имеет только положительные (отрицательные) ненулевые коэффициенты Фурье и выполнено условие

$$\|\mathcal{B}\| < 1.$$

Тогда оператор $d/dt - B$, действующий в пространстве L_p , $1 \leq p < \infty$, подобен оператору d/dt .

Отметим также, что используя более детальный подход, теорему 11 можно значительно усилить, отбросив условие на $\|\mathcal{B}\|$. Следующий результат является частным случаем теоремы 1.7 из [3].

Теорема 12. Пусть функция $\mathcal{B} \in C_\omega$ имеет только положительные (отрицательные) ненулевые коэффициенты Фурье. Тогда оператор $d/dt - B$, действующий в пространстве L_p , $1 \leq p < \infty$, подобен оператору d/dt .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965..
2. Баскаков А. Г. Замена Крылова—Боголюбова в теории нелинейных возмущений линейных операторов. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1980.
3. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов// Сиб. мат. ж. — 1983. — 24, № 1. — С. 21–39.
4. Баскаков А. Г. Теорема о приводимости линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами// Укр. мат. ж. — 1983. — 35, № 4. — С. 416–421.
5. Баскаков А. Г. Замена Крылова—Боголюбова в теории возмущений линейных операторов// Укр. мат. ж. — 1984. — 36, № 5. — С. 606–611.
6. Баскаков А. Г. Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов// Диффер. уравн. — 1985. — 21, № 4. — С. 555–562.
7. Баскаков А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — 50, № 3. — С. 435–457.
8. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987.
9. Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — 58, № 4. — С. 3–32.
10. Баскаков А. Г. Об абстрактном аналоге преобразования Крылова—Боголюбова в теории возмущенных линейных операторов// Функц. анал. прилож. — 1999. — 33, № 2. — С. 76–80.
11. Баскаков А. Г., Криштал И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — 69, № 3. — С. 3–54.

12. Баскаков А. Г., Синтяева К. А. О неравенствах Бора—Фавара для операторов// Изв. вузов. Мат. — 2009 № 12. — С. 14–21.
13. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом// Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 3. — С. 3–28.
14. Бурлуцкая М. Ш. О смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — 54, № 1. — С. 3–12.
15. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом// Мат. сб. — 2017. — 208, № 1. — С. 3–47.
16. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов// Уфим. мат. ж. — 2018. — 10, № 3. — С. 11–34.
17. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств возмущенных дифференциальных операторов первого порядка// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 171. — С. 3–18..
18. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры. I// Прикл. мат. физ. — 2020. — 52, № 3. — С. 185–194.
19. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц// Прикл. мат. физ. — 2020. — 52, № 2. — С. 71–85.
20. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. О спектральных свойствах оператора Дирака на прямой// Диффер. уравн. — 2021. — 57, № 2. — С. 153–161.
21. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией// Докл. РАН. — 2010. — 435, № 2. — С. 151–154.
22. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка Докл. РАН. — 2011. — 441, № 2. — С. 156–159.
23. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — 51, № 12. — С. 2233–2246.
24. Брайтигам И. Н., Поляков Д. М. Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с матричными коэффициентами// Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 4. — С. 458–474.
25. Брайтигам И. Н., Поляков Д. М. Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора третьего порядка// Алгебра и анализ. — 2019. — 31, № 4. — С. 16–47.
26. Брайтигам И. Н., Поляков Д. М. Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц Уфим. мат. ж. — 2019. — 11, № 3. — С. 10–29.
27. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Спектральный анализ разностных операторов второго порядка с растущим потенциалом// Таврич. вестн. информ. мат. — 2015. — № 3(28). — С. 40–48.
28. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств одного класса разностных операторов// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2016. — № 3. — С. 101–111.
29. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом// Сиб. электрон. мат. изв. — 2017. — 14. — С. 673–689.
30. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Физматлит, 2010.
31. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
32. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. 3. — М.: Мир, 1974.
33. Карпикова А. В. Асимптотика собственных значений оператора Штурма—Лиувилля с периодическими краевыми условиями// Уфим. мат. ж. — 2014. — 6, № 3. — С. 28–34.
34. Карпикова А. В. Асимптотика собственных значений интегро-дифференциального оператора с периодическими краевыми условиями// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 1. — С. 153–156.
35. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
36. Криштал И. А., Ускова Н. Б. Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — 16. — С. 1091–1132.
37. Левитан Б. М. Почти периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953.

38. Поляков Д. М. Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями// Алгебра и анализ. — 2015. — 27, № 5. — С. 117–152.
39. Поляков Д. М. Спектральный анализ несамосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами// Сиб. мат. ж. — 2015. — 56, № 1. — С. 165–184.
40. Поляков Д. М. Спектральные свойства одномерного оператора Шрёдингера// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2016. — № 2. — С. 146–152.
41. Поляков Д. М. Одномерный оператор Шрёдингера с квадратично суммируемым потенциалом// Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 3. — С. 596–615.
42. Поляков Д. М. О спектральных характеристиках несамосопряженного оператора четвертого порядка с матричными коэффициентами// Мат. заметки. — 2019. — 105, № 4. — С. 637–642.
43. Поляков Д. М. Оценки длин спектральных лакун операторов Шрёдингера и Дирака// Диффер. уравн. — 2020. — 56, № 5. — С. 595–604.
44. Поляков Д. М. Спектральные оценки для оператора четвертого порядка с матричными коэффициентами// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — 60, № 7. — С. 1201–1223.
45. Поляков Д. М. О нелокальном возмущении периодической задачи для дифференциального оператора второго порядка// Диффер. уравн. — 2021. — 57, № 1. — С. 14–21.
46. Романова Е. Ю. Спектральный анализ дифференциального оператора с инволюцией// Вестн. НГУ. Сер. мат. мех. информ. — 2014. — 14, № 4. — С. 64–78.
47. Романова Е. Ю. Спектральный анализ оператора Дирака в лебеговых пространствах// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 2. — С. 142–149.
48. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
49. Ускова Н. Б. К одному результату Р. Тернера// Мат. заметки. — 2004. — 76, № 6. — С. 905–917.
50. Ускова Н. Б. О спектральных свойствах оператора Штурма–Лиувилля с матричным потенциалом// Уфим. мат. ж. — 2015. — 7, № 3. — С. 88–99.
51. Ускова Н. Б. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора второго порядка с матричным потенциалом// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 5. — С. 579–588.
52. Ускова Н. Б. Матричный анализ спектральных проекторов возмущенных самосопряженных операторов// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — 16. — С. 369–405.
53. Фридрихс К. О. Возмущение спектра в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1969.
54. Шелковой А. Н. Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка, определяемого нелокальными краевыми условиями// Мат. физ. компьют. модел. — 2018. — 21, № 4. — С. 18–33.
55. Щербаков А. О. Спектральный анализ несамосопряженного оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом// Науч. вед. Белгород. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2013. — 12 (155), № 31. — С. 102–108.
56. Щербаков А. О. Регуляризованный след оператора Дирака// Мат. заметки. — 2015. — 98, № 1. — С. 134–146.
57. Baskakov A. G., Garkavenko G. V., Glazkova M. Yu., Uskova N. B. On spectral properties of one class difference operators// J. Phys. Conf. Ser. — 2002. — 1479. — 01.
58. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu. Spectral analysis of a differential operator with an involution// J. Evolution Equations. — 2017. — 17. — P. 669–684.
59. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group// Oper. Matrices. — 2018. — 12, № 3. — P. 723–756.
60. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — 477, № 2. — P. 930–960.
61. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions// Eurasian Math. J. — 2020. — 11, № 2. — P. 30–39.
62. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Closed operator functional calculus in Banach modules and applications// J. Math. Anal. Appl. — 2020. — 492, № 2. — 124473.
63. Garkavenko G. V., Zgolich A. R., Uskova N. B. Spectral analysis of one class of the integro-differential operators J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1203. — 012102.
64. Delsarte J. Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation// Colloque C.N.R.S. Nancy. — 1956. — P. 29–45.

65. *Delsarte J., Lions J. L. Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe* Commun. Math. Helv. — 1957. — 32. — P. 113–128.
66. *Friedrichs K. O. Lectures on Advanced Ordinary Differential Equations.* — New York: Gordon and Breach, 1965.
67. *Kravchenko V. V. Forward and inverse Sturm–Liouville problems: A Method of Solution.* — Basel: Springer-Verlag, 2020.
68. *Kravchenko V. V., Sitnik S. M. Transmutation Operators and Applications.* — Basel: Birkhäuser, 2020.
69. *Polyakov D. M. Formula for regularized trace of a second-order differential operator with involution// J. Math. Sci.* — 2020. — 251, № 5. — P. 748–759.
70. *Reiter H., Stegeman J. D. Classical harmonic analysis and locally compact groups.* — Oxford: Oxford Univ. Press, 2000.
71. *Shishkina E., Sitnik S. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics.* — Academic Press, 2020.

Баскаков Анатолий Григорьевич

Воронежский государственный университет;

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Криштал Илья Аркадьевич

Университет Северного Иллинойса, Декалб, Иллинойс, США

E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна

Воронежский государственный технический университет

E-mail: nat-uskova@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 15–22
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-15-22

УДК 517.954, 517.983

ОБ ОДНОМ ДИСКРЕТНОМ УРАВНЕНИИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ И СВЯЗАННОЙ С НИМ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

© 2022 г. В. Б. ВАСИЛЬЕВ, А. А. ХОДЫРЕВА

Аннотация. Рассматриваются дискретные уравнения типа свертки в четверти плоскости. Показано, что каждое такое уравнение эквивалентно одному аналогу двумерной периодической задачи Римана на торе. Описаны достаточные условия однозначной разрешимости такой периодической задачи Римана и, как следствие, условия однозначной разрешимости дискретного уравнения в терминах символа оператора свертки.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, двумерная периодическая задача Римана, парное уравнение, периодическая волновая факторизация, аналитичность, разрешимость.

ON A DISCRETE EQUATION IN A QUARTER-PLANE AND A RELATED BOUNDARY-VALUE PROBLEM

© 2022 V. B. VASILYEV, A. A. KHODYREVA

ABSTRACT. Discrete equations of the convolution type in a quarter-plane are considered. We prove that each such equation is equivalent to an analog of the two-dimensional periodic Riemann problem on the torus. We describe sufficient conditions for the unique solvability of such a periodic Riemann problem and, as a consequence, conditions for the unique solvability of a discrete equation in terms of the symbol of the convolution operator.

Keywords and phrases: discrete pseudodifferential operator, two-dimensional periodic Riemann problem, pair equation, periodic wave factorization, analyticity, solvability.

AMS Subject Classification: 35S15, 47B38

1. Введение. Теория дискретных уравнений и связанных с ними разностных уравнений представляет собой важный раздел математики, поскольку такие уравнения встречаются во многих практических задачах, см., например, [9–13]. однако исследование таких уравнений в областях многомерного пространства, равно как и уравнений с переменными коэффициентами, наталкивается на многие препятствия.

В работе [2] рассматривался многомерный аналог классической краевой задачи Римана для верхней и нижней комплексной полуплоскости. Решение этой задачи предлагалось в терминах волновой факторизации [2, 3], которая связана с выходом в радиальные трубчатые области над конусами. Недавно было обнаружено [1], что существует периодический аналог классической краевой задачи Римана. Целью этой работы является описание многомерного периодического аналога упомянутой многомерной задачи Римана и некоторых ее применений в теории дискретных краевых задач..

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FZWG-2020-0029).

2. Дискретное уравнение и краевая задача.

2.1. Дискретные операторы и уравнения. Нас интересует разрешимость некоторых дискретных уравнений, которые мы будем называть дискретными псевдодифференциальными уравнениями. Определим дискретный псевдодифференциальный оператор формулой

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in \mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{T}^m} e^{i(\tilde{y}-\tilde{x}) \cdot \xi} \tilde{A}_d(\xi) \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in \mathbb{Z}^m,$$

где $u_d(\tilde{x})$ — функция дискретной переменной $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\tilde{u}_d(\xi)$ будет обозначать ее дискретное преобразование Фурье

$$\tilde{u}_d(\xi) \equiv (F_d u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{y} \in \mathbb{Z}^m} e^{i\tilde{y} \cdot \xi} \tilde{u}_d(y), \quad \xi \in \mathbb{T}^m, \quad (1)$$

\mathbb{Z}^m — целочисленная решетка в \mathbb{R}^m , \mathbb{T}^m — m -мерный куб $[-\pi, \pi]^m$; заданная функция $\tilde{A}_d(\xi), \xi \in \mathbb{T}^m$ называется символом дискретного псевдодифференциального оператора A_d .

Зачастую бывает удобней использовать другое представление псевдодифференциального оператора через дискретное ядро $A_d(\tilde{x})$, т.е. в виде

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in \mathbb{Z}^m} A_d(\tilde{x} - \tilde{y}) u_d(y), \quad \tilde{x} \in \mathbb{Z}^m,$$

где ядро $A_d(\tilde{x})$ определено на решетке \mathbb{Z}^m посредством обратного дискретного преобразования Фурье

$$u(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \tilde{u}(\xi) e^{-i\tilde{x} \cdot \xi} d\xi.$$

Наша основная цель — исследование разрешимости уравнения

$$\sum_{\tilde{y} \in D_d} A_d(\tilde{x} - \tilde{y}) u_d(y) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \quad (2)$$

где D_d — дискретная область вида $D_d = D \cap \mathbb{Z}^m$, D — выпуклый конус в \mathbb{R}^m .

В непрерывном случае такие уравнения в конусах изучались в работах автора [4, 17, 18]. Главную роль в этих исследованиях играла концепция волновой факторизации эллиптического символа, при наличии которой можно было описать полную картину разрешимости модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения в конусе. Это позволило дать достаточные условия фредгольмовости для общих эллиптических псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с коническими точками на границе. В этой работе мы хотим продолжить эти исследования в «дискретном» направлении, рассмотрев простейший случай дискретного уравнения в плоском квадранте.

В случае дискретного полупространства результаты о разрешимости дискретных уравнений были получены в [15, 16], однако этот случай очень специфичен и связан с классической краевой задачей Римана [7, 8]. В нашей ситуации требуется выход в многомерное комплексное пространство. Некоторые оценки аппроксимации непрерывных решений дискретными в полупространстве получены в [5].

Если мы рассматриваем уравнение во всем дискретном пространстве ($D = \mathbb{R}^m$)

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{Z}^m,$$

разыскивая решение в $L_2(\mathbb{Z}^m)$, мы применяем дискретное преобразование Фурье (1), в результате получая простое уравнение

$$A_d(\xi) \tilde{u}_d(\xi) = \tilde{v}_d(\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}^m,$$

в дуальном пространстве $L_2(\mathbb{T}^m)$.

Трудности появляются, когда мы исследуем уравнение не во всем пространстве, а ищем решение в $L_2(D_d)$, $D \neq \mathbb{R}^m$. Непосредственно преобразование Фурье неприменимо, и приходится привлекать другие соображения.

2.2. Парные уравнения. Обозначим P_{\pm} операторы сужения на $D_d(+)$ и $\mathbb{Z}^m \setminus D_d(-)$ соответственно. Хорошо известно (в этом нетрудно убедиться самостоятельно), что уравнение (2) в пространстве $L_2(D_d)$ разрешимо одновременно с уравнением

$$(A_d P_+ + I_d P_-) U_d = V_d \quad (3)$$

в пространстве $L_2(\mathbb{Z}^m)$; здесь I_d обозначает единичный оператор. Другими словами, целесообразно изучать более общее парное уравнение

$$(A_d P_+ + B_d P_-) U_d = V_d$$

в пространстве $L_2(\mathbb{Z}^m)$, где A_d, B_d — два разных псевдодифференциальных оператора с символами $\tilde{A}_d(\xi), \tilde{B}_d(\xi)$. Мы будем называть это уравнение эллиптическим, если символы $\tilde{A}_d(\xi), \tilde{B}_d(\xi)$ нигде не обращаются в нуль на \mathbb{T}^m .

Ниже будет показано для случая $m = 2$, что применение преобразования Фурье к уравнению (3) сводит его к специальной краевой задаче для функций двух комплексных переменных.

2.3. Периодические интегралы типа Коши. Здесь мы приведем некоторые вычисления для двумерного случая, когда $D = C^2$ — первый квадрант на плоскости. Отметим, что одномерный случай был рассмотрен в работе [14].

Чтобы описать образ Фурье оператора P_+ , мы применяем процедуру регуляризации: вычислим двумерное преобразование Фурье функций u_d и $e^{-\tau_1 \tilde{x}_1} e^{-\tau_2 \tilde{x}_2} \chi_+(D_d)$ (характеристическая функция дискретного первого квадранта), затем применяем обратную теорему о свертке и переходим к пределу при $\tau = (\tau_1, \tau_2) \rightarrow 0, \tau \in C^2$. Напомним, что мы рассматриваем случай, когда D — первый квадрант на плоскости, так что в нашем случае $D_d = \mathbb{Z}_{++}^2$.

Так как функция $\chi_+(D_d)$ несуммируема, берем ее регуляризованный вариант

$$e^{-\tau_1 \tilde{x}_1} e^{-\tau_2 \tilde{x}_2} \chi_+(D_d).$$

Дискретное преобразование Фурье такой суммируемой функции легко вычисляется. Действительно,

$$\sum_{\tilde{x} \in \mathbb{Z}_{++}^2} e^{-\tau_1 \tilde{x}_1} e^{-\tau_2 \tilde{x}_2} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} = \sum_{\tilde{x} \in \mathbb{Z}_{++}^2} e^{i\tilde{x} \cdot z},$$

где введены обозначения $z_k = \xi_k + i\tau_k, k = 1, 2, z = (z_1, z_2), \tilde{x} \cdot z = \tilde{x}_1 z_1 + \tilde{x}_2 z_2$.

Последняя двойная сумма распадается в произведение двух сумм, каждая из которых выглядит одинаково. Приведем вычисления для одной из них, например, по дискретной переменной \tilde{x}_1 .

$$\sum_{\tilde{x}_1 \in \mathbb{Z}_+} e^{i\tilde{x}_1 z_1} = \frac{e^{iz_1}}{1 - e^{iz_1}} = -1 + \frac{1}{1 - e^{iz_1}} = -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{iz_1} - 1} \right).$$

Простые вычисления дают следующий результат:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{iz_1} - 1} = \frac{e^{iz_1} + 1}{2(e^{-iz_1} - 1)} = \frac{e^{\frac{iz_1}{2}} + e^{-\frac{iz_1}{2}}}{2 \left(e^{\frac{iz_1}{2}} - e^{-\frac{iz_1}{2}} \right)}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\tilde{x}_1 \in \mathbb{Z}_+} e^{i\tilde{x}_1 z_1} - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{z_1}{2}.$$

Аналогичная формула получается при суммировании по \tilde{x}_2 . Таким образом,

$$\sum_{\tilde{x} \in \mathbb{Z}_{++}^2} e^{i\tilde{x} \cdot z} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{z_1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{z_2}{2} \right).$$

Если свертку двух периодических функций $\tilde{u}_d(\xi), \tilde{v}_d(\xi) \in C(\mathbb{T}^2)$ определить формулой

$$(\tilde{u}_d * \tilde{v}_d)(\xi) = \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{u}_d(\xi - \eta) \tilde{v}_d(\eta) d\eta,$$

то по теореме о дискретном преобразовании Фурье произведения (см. приложение)

$$F_d(u_d \cdot v_d)(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} (\tilde{u}_d * \tilde{v}_d)(\xi)$$

мы получим ($\eta = (\eta_1, \eta_2), \xi = (\xi_1, \xi_2)$)

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{x} \in \mathbb{Z}^2} e^{i\tilde{x} \cdot z} \chi_+(D_d) u_d(\tilde{x}) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta + \frac{i}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{\xi_1 - \eta_1 + i\tau_1}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta + \\ &+ \frac{i}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{\xi_2 - \eta_2 + i\tau_2}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta - \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{\xi_1 - \eta_1 + i\tau_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi_2 - \eta_2 + i\tau_2}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (4)$$

Замечание 1. Чтобы исключить первые три интеграла, заметим, что первый представляет собой значение функции в начале координат, второй третий связаны определяются значениями на осях координат. Поэтому мы будем рассматривать пространство $L_2(\mathbb{Z}^m)$ как пространство функций дискретного аргумента с нулевыми значениями на осях координат.

Следствие 1. Для функций дискретного аргумента, обращающихся в нуль на осях координат, формула (4) принимает вид

$$\sum_{\tilde{x} \in \mathbb{Z}^2} e^{i\tilde{x} \cdot z} \chi_+(D_d) u_d(\tilde{x}) = \frac{1}{2(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{\xi_1 - \eta_1 + i\tau_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi_2 - \eta_2 + i\tau_2}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta. \quad (5)$$

Из формулы (5) немедленно вытекает «предельный» вариант

$$(F_d P_+ u_d)(\xi) = \lim_{\tau \rightarrow 0, \tau \in C^2} \frac{1}{2(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{\xi_1 - \eta_1 + i\tau_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi_2 - \eta_2 + i\tau_2}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{1}{2(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{z_1 - \eta_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{z_2 - \eta_2}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta.$$

В предположении, что $\tilde{u}_d \in L_2(\mathbb{T}^2)$, нетрудно заключить, что справедливы следующие два факта:

- (i) функция $\Phi(z_1, z_2)$ аналитична в области $\mathbb{T}^2 + iC^2 \subset \mathbb{C}^2$;
- (ii) существуют граничные значения этой функции из C^2 , причем эти граничные значения принадлежат $L_2(\mathbb{T}^2)$.

Эти два факта приводят к специальной периодической задаче линейного сопряжения или периодической краевой задаче Римана.

Замечание 2. Нетрудно сообразить, что аналогичные формулы могут быть получены и для m -мерного октанта в \mathbb{Z}^m .

3. Многомерная периодическая задача Римана. Пусть C^m — выпуклый конус в \mathbb{R}^m . Обозначим $T_{per}(C^m) \subset \mathbb{C}^m$ множество точек вида $z = x + iy$, $x \in \mathbb{T}^m$, $y \in C^m$. Введем пространство $A_+(\mathbb{T}^m)$ как подпространство $L^2(\mathbb{T}^m)$, состоящее из граничных значений аналитических в $T_{per}(C^m)$ функций, и определим пространство $A_-(\mathbb{T}^m)$ как прямое дополнение $A_+(\mathbb{T}^m)$ в $L^2(\mathbb{T}^m)$, так что $A_+(\mathbb{T}^m) \oplus A_-(\mathbb{T}^m) = L^2(\mathbb{T}^m)$. Формулировка многомерной периодической задачи Римана будет следующей: найти пару функций $\Phi^\pm \in A_\pm(\mathbb{T}^m)$, связанных почти всюду линейным соотношением

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}^m, \quad (6)$$

где $G(t)$, $g(t)$ — заданные на \mathbb{T}^m функции.

Отметим, что когда \mathbb{T}^m совпадает с \mathbb{R}^m , такие области носят название радиальных трубчатых областей над конусами (см. [6]).

В этой работе мы рассматриваем двумерный случай, когда конус C^2 представляет собой первый квадрант на плоскости $C^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$. К задаче (6) сводятся

важные классы дискретных уравнений в четверти плоскости, и поэтому важно получить условия разрешимости этой задачи в определенных классах функций.

3.1. Задача скачка. Пусть $G(t) \equiv 1$ (задача скачка).

Теорема 1. *Задача скачка имеет единственное решение для любой правой части $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi^+(\xi_1, \xi_2) = \lim_{\tau \rightarrow 0, \tau \in C^2} \frac{1}{2(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{z_1 - \eta_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{z_2 - \eta_2}{2} g(\eta) d\eta.$$

Очевидно, что $\Phi^+ \in A_+(\mathbb{T}^2)$, так как аналитична в $\mathbb{T}^2 + iC^2$ и имеет граничные значения из $L_2(\mathbb{T}^2)$. Теперь положим

$$\Phi^-(\xi_1, \xi_2) = \Phi^+(\xi_1, \xi_2) - g(\xi_1, \xi_2 t),$$

и нужное представление получено, поскольку Φ^- необходимо будет принадлежать $A_-(\mathbb{T}^2)$. Единственность представления легко доказывается от противного. Если предположить, что другая пара Φ_1^\pm является решением задачи (6), мы приDEM к равенству

$$(\Phi_1 - \Phi)^+ = (\Phi_1 - \Phi)^-,$$

что возможно только для нулевых левой и правой частей. \square

3.2. Периодическая волновая факторизация.

Определение 1. Обозначим $\pm C^m \equiv C_\pm^m$ и назовем периодической волновой факторизацией функции $G(t)$ относительно конуса C^m ее представление в виде

$$G(t) = G_{\neq}(t)G_{=}(t),$$

где функции G_{\neq} , $G_{=}$ допускают ограниченное аналитическое продолжение в $T_{per}(C_+^m)$, $T_{per}(C_-^m)$ соответственно.

Замечание 3. Нетрудно убедиться, что если периодическая волновая факторизация существует, то она единственна с точностью до мультипликативной постоянной.

Пример 1. Пусть $m = 2$ и C^2 — первый квадрант на плоскости. Если f — произвольная функция дискретного аргумента, определенная на решетке \mathbb{Z}^2 , $f \in L^2(\mathbb{Z}^2)$, $\operatorname{supp} f \subset C_+^m \cup C_-^m$, то, очевидно,

$$f = \chi_+ f + \chi_- f,$$

где χ_{\pm} — характеристическая функция C_{\pm}^m . Применяя дискретное преобразование Фурье

$$f(\tilde{x}) \mapsto \tilde{f}(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in \mathbb{Z}^m} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} f(\tilde{x}), \quad \xi \in \mathbb{T}^m,$$

мы получим представление $\tilde{f} = \tilde{f}_+ + \tilde{f}_-$, причем \tilde{f}_{\pm} допускают аналитическое продолжение в $T_{per}(C_{\pm}^m)$. Далее можно записать $\exp \tilde{f} = \exp \tilde{f}_+ \cdot \exp \tilde{f}_-$, и для функции $\exp \tilde{f}$ получена периодическая волновая факторизация.

3.3. Общий случай. Здесь мы приведем основной результат о разрешимости задачи (6).

Теорема 2. *Пусть $G \in C(\mathbb{T}^2)$, $G(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{T}^2$. Если существует периодическая волновая факторизация функции $G(t)$, то задача (6) имеет единственное решение для произвольной функции $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$.*

Доказательство. Учтем периодическую волновую факторизацию в формулировке и перепишем задачу в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{G_{\neq}(t)} = G_{=}(t)\Phi^-(t) + \frac{g(t)}{G_{\neq}(t)}.$$

Очевидно, что $\Phi^+(t)G_{\neq}^{-1}(t) \in A_+(\mathbb{T}^2)$ в силу аналитической продолжаемости и $g(t)G_{\neq}^{-1}(t) \in L_2(\mathbb{T}^2)$. Остается доказать, что $G_{=}(t)\Phi^-(t) \in A_-(\mathbb{T}^2)$, и мы приDEM к задаче скачка.

Поскольку аналог теоремы Винера—Пэли утверждает, что обратный фурье-образ функции из $A_+(\mathbb{T}^m)$ состоит из функций с носителем в C^2 , мы заключаем, что обратный фурье-образ функции G_- имеет носитель в $-C^2$. Применение обратного дискретного преобразования Фурье к функции $G_-(t)\Phi^-(t)$ приводит к дискретной свертке

$$(F_d^{-1}(G_-\Phi^-))(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in \mathbb{Z}^m} (F_d^{-1}\Phi^-)(\tilde{x} - \tilde{y}(F_d^{-1}G)(\tilde{y})) = \sum_{\tilde{y} \in C_-^m} (F_d^{-1}\Phi^-)(\tilde{x} - \tilde{y}(F_d^{-1}G)(\tilde{y})).$$

Отсюда видно, что $-y \in C_+^2$, если $\tilde{x} \in C_+^2$, то $\tilde{x} - \tilde{y} \in C_+^2$, и тогда при $\tilde{x} \in C_+^2$ свертка обращается в нуль. Таким образом, доказано, что $G_-(t)\Phi^-(t) \in A_-(\mathbb{T}^2)$. Теперь применяем предыдущую теорему о задаче скачка и получаем утверждение теоремы. \square

4. Разрешимость дискретных уравнений. В этом разделе мы покажем, что $D = C^2$ разрешимость дискретного уравнения (2) эквивалентна разрешимости двумерной периодической задачи Римана (6) с коэффициентом и свободным членом, определяемыми по символу оператора A_d и правой части уравнения v_d .

Теорема 3. *Если эллиптический символ $\tilde{A}_d(\xi) \in C(\mathbb{T}^2)$ допускает периодическую волновую факторизацию относительно C^2 , то уравнение (2) однозначно разрешимо при любой правой части $v_d \in L_2(D_d)$.*

Доказательство. Учитывая эквивалентность уравнений (2) и (3), мы будем работать с уравнением (3). Применяя дискретное преобразование Фурье к обеим частям уравнения (3), мы получим

$$\tilde{A}_d(\xi)(\widetilde{P_+U_d})(\xi) + (\widetilde{P_-U_d})(\xi) = \tilde{V}_d(\xi).$$

По доказанному выше мы имеем $(\widetilde{P_+U_d})(\xi) \in A_+(\mathbb{T}^m)$, $(\widetilde{P_-U_d})(\xi) \in A_-(\mathbb{T}^m)$; последнее означает, что мы пришли к многомерной периодической задаче Римана (6) с коэффициентом $G(\xi) = \tilde{A}_d^{-1}(\xi)$ и правой частью $\tilde{V}_d(\xi)\tilde{A}_d^{-1}(\xi)$. Далее применяется Теорема 2. \square

Решение уравнения (2) можно выписать явно, это играет важную роль при построении дискретных аппроксимаций. С учетом периодической волновой факторизации

$$\tilde{A}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,\neq}(\xi) \cdot \tilde{A}_{d,=}(\xi)$$

запишем

$$\tilde{A}_{d,\neq}(\xi)(\widetilde{P_+U_d})(\xi) + \tilde{A}_{d,=}^{-1}(\xi)(\widetilde{P_-U_d})(\xi) = \tilde{A}_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{V}_d(\xi).$$

Тогда

$$(\widetilde{P_+U_d})(\xi) = \tilde{A}_{d,=}(\xi) \lim_{\tau \rightarrow 0, \tau \in C^2} \frac{1}{2(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{z_1 - \eta_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{z_2 - \eta_2}{2} \tilde{A}_{d,=}^{-1}(\eta) \tilde{V}_d(\eta) d\eta.$$

Левая часть последней формулы — это \tilde{u}_d — фурье образ решения уравнения (2), где под V_d понимается любое продолжение $v_d \in L_2(D_d)$ на все $L_2(\mathbb{Z}^2)$; окончательный результат не зависит от продолжения в силу аналитических свойств элементов периодической волновой факторизации.

Замечание 4. Следует отметить, что все результаты разделов 3 и 4 справедливы для m -мерного октанта вида

$$C^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \dots, x_m), x_k > 0, k = 1, \dots, m\}$$

с периодическим интегралом типа Коши вида

$$\Phi(z_1, \dots, z_m) = \frac{1}{2(2\pi i)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \prod_{k=1}^m \operatorname{ctg} \frac{z_k - \eta_k}{2} g(\eta) d\eta,$$

где $z_k = \xi_k + i\tau_k$, $k = 1, \dots, m$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in C^m$, $\eta = (\eta_1, \dots, m)$.

5. Приложение.

5.1. *Произведение и свертка.* В этом разделе будет приведено доказательство важного свойства о дискретном преобразовании Фурье произведения двух функций, которое было использовано выше, для одномерного случая (многомерный случай рассматривается аналогично). Пусть $u_d, v_d \in L_1(\mathbb{R})$ — функции дискретного аргумента, \tilde{u}_d, \tilde{v}_d — их дискретные преобразования Фурье.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$F_d(u_d \cdot v_d) = \frac{1}{2\pi} \tilde{u}_d * \tilde{v}_d,$$

где операция свертки $*$ определена формулой

$$(\tilde{u}_d * \tilde{v}_d)(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}_d(\xi - \eta) \tilde{v}_d(\eta) d\eta. \quad (7)$$

Доказательство. Мы воспользуемся теоремой об изоморфизме между пространством $L_2(\mathbb{Z})$ и пространством периодических функций $L_2(\mathbb{T})$, которое устанавливается дискретным преобразованием Фурье и его обратным

$$(F^{-1} \tilde{u}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tilde{x}\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in \mathbb{Z}.$$

Подействуем на обе части равенства (7) оператором F_d^{-1} .

$$F_d^{-1}(\tilde{u}_d * \tilde{v}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tilde{x}\xi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}_d(\xi - \eta) \tilde{v}_d(\eta) d\eta \right) d\xi.$$

Меняя порядки интегрирования, делая замену переменных $\xi - \eta = t$ и учитывая периодичность функций \tilde{u}_d, \tilde{v}_d , сразу получаем

$$\begin{aligned} F_d^{-1}(\tilde{u}_d * \tilde{v}_d)(\tilde{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tilde{x}\xi} \tilde{u}_d(\xi - \eta) d\xi \right) \tilde{v}_d(\eta) d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tilde{x}\xi} \tilde{u}_d(\xi - \eta) d\xi \right) \tilde{v}_d(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-\eta}^{\pi-\eta} e^{-i\tilde{x}(\eta+t)} \tilde{u}_d(t) dt \right) \tilde{v}_d(\eta) d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tilde{x}t} \tilde{u}_d(t) dt \right) e^{-i\tilde{x}\eta} \tilde{v}_d(\eta) d\eta = u_d(\tilde{x}) \cdot v_d(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Остается применить к последнему равенству дискретное преобразование Фурье, и лемма доказана. \square

Замечание 5. В объяснении нуждалось только появление множителя $1/(2\pi)$ в формуле (7).

5.2. *Случай h -решетки.* С точки зрения последующих приложений к приближенному решению уравнений важно рассмотреть решетку $h\mathbb{Z}^2$, $h > 0$ с тем, чтобы можно было сравнивать дискретные непрерывные решения при малых значениях h . Мы приведем здесь некоторые видоизменения формул, полученных выше с учетом шага решетки h . Так, в частности, дискретное преобразование Фурье выглядит как

$$(F_d u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} e^{i\tilde{y} \cdot \xi} u_d(\tilde{x}) h^2.$$

Дуальным пространство для $L_2(h\mathbb{Z}^2)$ относительно F_d будем пространство $L_2(\hbar\mathbb{T}^2)$, $\hbar = 1/h$, и периодический интеграл типа Коши примет вид

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{h^2}{2(2\pi i)^2} \int_{\hbar\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{h(z_1 - \eta_1)}{2} \operatorname{ctg} \frac{h(z_2 - \eta_2)}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta$$

с аналитическими свойствами в области $\hbar\mathbb{T}^2 + iC^2$.

Авторы надеются дать подробное изложение этих результатов в последующих публикациях и показать их применимость к оценкам аппроксимации непрерывных решений дискретными.

6. Заключение. Авторы отдают отчет в том, что рассматриваемый в работе класс дискретных уравнений охватывает довольно узкий класс, однако методы, развиваемые в этой работе, будут полезны для обширного класса дискретных псевдодифференциальных уравнений. Теория разрешимости таких дискретных псевдодифференциальных уравнений должна играть ключевую роль при дискретизации уравнений и обосновании приближенных методов их решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев А. В., Васильев В. Б. Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках// Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 5. — С. 642–649.
2. Васильев В. Б. Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1998. — 59. — С. 73–105.
3. Васильев В. Б. Волновая факторизация эллиптических символов// Мат. заметки. — 2000. — 68, № 5. — С. 653–667.
4. Васильев В. Б. Мультиплекторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: КомКнига, 2010.
5. Васильев В. Б., Тарасова О. А. О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 174. — С. 12–19.
6. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
9. Рябенький В. С. Метод разностных потенциалов и его приложения. — М.: Физматлит, 2002.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
11. Elaydi S. Introduction to Difference Equations. — New York: Springer-Verlag, 2005.
12. Mickens R. E. Difference Equations: Theory, Applications and Advanced Topics. — London: Chapman and Hall, 2015.
13. Milne-Thomson L. M. Calculus of Finite Differences. — New York: Chelsea, 1981.
14. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. Discrete singular operators and equations in a half-space// Azerb. J. Math. — 2013. — 3, № 1. — P. 81–93.
15. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space// Math. Model. Anal. — 2018. — 23, № 3. — P. 492–506.
16. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. On some discrete potential like operators// Tatra Mt. Math. Publ. — 2018. — 71. — P. 195–212.
17. Vasilyev V. B. Elliptic equations and boundary value problems in non-smooth domains// in: Pseudo-Differential Operators: Analysis, Applications and Computations. — Basel: Springer-Verlag, 2011. — P. 105–121.
18. Vasilyev V. B. Pseudo-differential equations on manifolds with non-smooth boundaries// in: Differential and Difference Equations and Applications. — New York: Springer-Verlag, 2013. — P. 625–637.

Васильев Владимир Борисович

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: vbv57@inbox.ru

Ходырева Анастасия Александровна

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: 711012@bsu.edu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 23–34
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-23-34

УДК 539.3, 532.542

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ

© 2022 г. П. А. ВЕЛЬМИСОВ, А. В. АНКИЛОВ

Аннотация. Разработаны математические модели одного класса аэрогидроупругих систем — вибрационных устройств, предназначенных для интенсификации технологических процессов. Исследуется динамическая устойчивость составных частей этих устройств — упругих элементов, представляющих собой деформируемые пластины. Принятые в работе определения устойчивости деформируемого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Модели описываются связанными нелинейными системами дифференциальных уравнений в частных производных. Воздействие газа или жидкости (в модели идеальной среды) определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики. Для описания динамики упругих элементов используется нелинейная теория твердого деформируемого тела, учитывающая их попечевые и продольные деформации. Исследование устойчивости проводится на основе построения положительно определенных функционалов типа Ляпунова, соответствующих этим системам. Получены достаточные условия устойчивости решений предложенных систем уравнений.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, математическое моделирование, динамическая устойчивость, упругая пластина, дозвуковой поток жидкости, дифференциальные уравнения в частных производных, функционал.

MATHEMATICAL MODELING OF SOME AEROELASTIC SYSTEMS

© 2022 P. A. VELMISOV, A. V. ANKILOV

ABSTRACT. In this paper, we develop mathematical models of a class of aerohydroelastic systems, namely, vibrating devices intended for intensification of technological processes. The dynamic stability of elastic components of these devices is examined. The notion of stability of a deformable body accepted in this paper coincides with the concept of the Lyapunov stability of dynamical systems. The models considered are governed by coupled nonlinear partial differential systems. The impact of a gas or fluid (in the model of an ideal medium) is determined from the asymptotic equations of aerohydromechanics. For describing the dynamics of elastic elements, we use the nonlinear theory of solid deformable bodies, which takes into account transverse and longitudinal deformations. The study of stability is based on the construction of positive-definite Lyapunov-type functionals. Sufficient conditions for the stability of solutions of the systems proposed are obtained.

Keywords and phrases: aerohydroelasticity, mathematical modeling, dynamic stability, elastic plate, subsonic fluid flow, partial differential equations, functional.

AMS Subject Classification: 74F10

1. Введение. При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств, установок различного назначения, взаимодействующих с потоком газа или жидкости, важной проблемой является обеспечение надежности их функционирования и увеличение сроков службы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-730015).

Подобные проблемы присущи многим отраслям техники. В частности, такого рода задачи возникают в авиаракетостроении, приборостроении, при проектировании антенных установок, высоких наземных сооружений и т. д.

В настоящее время аэрогидроупругость представляет собой хорошо развитый раздел механики сплошной среды. Много исследований посвящено динамике, устойчивости и флаттеру пластин и оболочек, находящихся в потоке жидкости или газа (среди последних в качестве примера отметим как российские [3, 6, 13, 14], так и зарубежные [7, 9–12, 15] исследования). В отличие от перечисленных работ в данной статье для исследования устойчивости используется аналитический метод, основанный на построении функционала для предложенной нелинейной математической модели.

В работе исследуется устойчивость решений начально-краевых задач для связанных систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих динамику деформируемых элементов различных конструкций, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа). Исследование устойчивости проводится на основе построения положительно определенных функционалов (прямой метод Ляпунова) для этих систем.

В работе представлены математические модели одного класса аэрогидроупругих систем — вибрационных устройств, предназначенных для интенсификации некоторых технологических процессов, в частности, выбросмесителей, которые предназначены для размешивания неоднородной суспензии с целью подготовки однородной среды. Исследуется динамическая устойчивость составных частей этих устройств — упругих элементов, представляющих собой деформируемые пластины. Работа является продолжением исследований, представленных в [4], в частности, произведено обобщение на случай произвольного числа упругих элементов.

Выбросмеситель представляет собой проточный канал с деформируемыми элементами, которые располагаются внутри него. Внутри канала протекает дозвуковой поток идеальной сжимаемой среды. Аэрогидродинамическая нагрузка на элементы определяется на основе линейной теории движения жидкости и газа. Для исследования динамики упругих элементов используются нелинейные уравнения, описывающие продольно-поперечные колебания этих пластин-элементов. Сформулирована нелинейная начально-краевая задача для систем уравнений в частных производных. На основе построенного функционала типа Ляпунова для указанной системы, соответствующего начально-краевой задаче, получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на параметры механической конструкции. Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Проблема может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость — тело» (основными параметрами являются скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, сжимающие или растягивающие усилия, силы трения), малым деформациям тел в начальный момент времени $t = 0$ (т.е. малым начальными отклонениям от положения равновесия) будут соответствовать малые деформации и в любой момент времени $t > 0$. Среди работ авторов данной статьи по исследованию динамики и устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, отметим монографии и статьи [1, 2, 4, 8, 16–18].

2. Математическая модель. Рассматривается плоское течение в вибрационном устройстве, моделируемом прямолинейным каналом $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, y_0 < y < y_{n+1}\}$ с горизонтальными недеформируемыми стенками. Внутри канала имеются n деформируемых упругих элементов (рис. 1).

Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Рассматривается дозвуковой режим протекания $a > V$, где a — скорость звука в невозмущенном потоке жидкости. Деформируемыми являются пластины, занимающие в недеформированном состоянии положение $y = y_i$, $i = \overline{1, n}$, $x \in [b, c]$ (рис. 1). Введем обозначение

$$J_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_i \in (y_0, y_{n+1}), x \in [b, c]\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad J = \bigcup_{i=1}^n J_i.$$

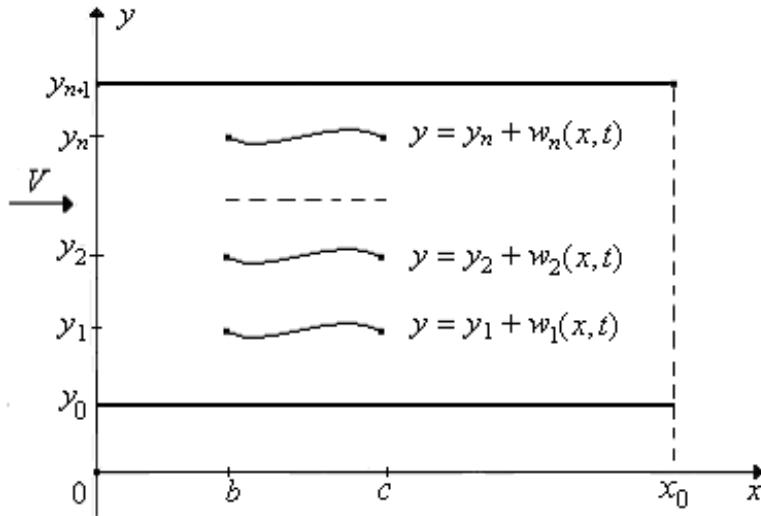


Рис. 1. Модель вибрационного устройства.

Введем обозначения: $u_i(x, t)$, $w_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$ — функции, определяющие деформации элементов в направлении осей Ox и Oy соответственно (продольные и поперечные составляющие деформации элементов); $\varphi(x, y, t)$ — функция, определяющая потенциал скорости возмущенного потока газа; $P_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$ — аэрогидродинамические воздействия на элементы.

Рассмотрим модель сжимаемой среды, тогда потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x, y) \in G \setminus J, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

линеаризованным граничным условиям

$$\varphi_y(x, y_i, t) = \dot{w}_i(x, t) + Vw'_i(x, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, y_{n+1}, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0 \quad (4)$$

и условию отсутствия возмущений на входе и выходе из канала

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Аэrodинамические воздействия на элементы выражаются через потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ по формулам

$$P_i(x, t) = \rho(\varphi_t^+(x, y_i, t) - \varphi_t^-(x, y_i, t)) + \rho V(\varphi_x^+(x, y_i, t) - \varphi_x^-(x, y_i, t)), \quad x \in (b, c), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где

$$\varphi_t^\pm(x, y_i, t) = \lim_{y \rightarrow y_i \pm 0} \varphi_t(x, y, t), \quad \varphi_x^\pm(x, y_i, t) = \lim_{y \rightarrow y_i \pm 0} \varphi_x(x, y, t).$$

Рассмотрим нелинейную модель упругого тела. Тогда уравнения малых колебаний упругих элементов, моделируемых упругими пластинами, с учетом силового воздействия потока $P_i(x, t)$ на них имеют вид

$$\begin{cases} -E_i F_i \left(u'_i(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right)' + M_i \ddot{u}_i(x, t) - \beta_{2i} F_i \dot{u}_i''(x, t) = 0, \\ -E_i F_i \left[w'_i(x, t) \left(u'_i(x, t) + \frac{1}{2} w_i'^2(x, t) \right) \right]' + D_i w_i'''(x, t) + M_i \ddot{w}_i(x, t) + \\ + N_i(t) w_i''(x, t) + \beta_{2i} I_i \dot{w}_i'''(x, t) + \beta_{1i} \dot{w}_i(x, t) + \beta_{0i} w_i(x, t) = P_i(x, t), \\ x \in (b, c), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Индексы x, y, t снизу обозначают производные по x, y, t ; штрих обозначает производную по x , а точка — производную по t ; ρ — плотность жидкости; $I_i = h_i^3/(12(1 - \nu_i^2))$; $F_i = h_i/(1 - \nu_i)$; $D_i = E_i I_i$ — изгибные жесткости элементов; h_i — толщина элементов; $M_i = h_i \rho_i$ — погонные массы элементов; E_i, ρ_i — модули упругости и линейные плотности элементов; $N_i(t)$ — сжимающие (растягивающие) силы; β_{2i}, β_{1i} — коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; β_{0i} — коэффициенты жесткости обжимных слоев; ν_i — коэффициенты Пуассона.

Предположим, что концы упругих элементов закреплены либо жестко, либо шарнирно, тогда при $x = b$ и $x = c$ выполняется одно из условий:

$$w_i(x, t) = w'_i(x, t) = u_i(x, t) = 0, \quad w_i(x, t) = w''_i(x, t) = u_i(x, t) = 0, \quad x \in (b, c), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

3. Исследование устойчивости. Исследуем устойчивость нулевого решения $\varphi(x, y, t) \equiv 0$, $u_i(x, t) \equiv 0, w_i(x, t) \equiv 0, i = \overline{1, n}$ задачи (1)–(8) по отношению к возмущениям начальных данных. Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_{G \setminus J} (\varphi_t^2 + (a^2 - V^2)\varphi_x^2 + a^2\varphi_y^2) dx dy + 2a^2V \sum_{i=1}^n \int_b^c (\varphi^+(x, y_i, t) - \varphi^-(x, y_i, t)) w'_i(x, t) dx + \\ & + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^n \int_b^c \left(E_i F_i \left(u'_i(x, t) + \frac{1}{2} w'^2_i(x, t) \right)^2 + M_i (\dot{u}_i^2(x, t) + \dot{w}_i^2(x, t)) + \right. \\ & \left. + D_i w''^2(x, t) + \beta_{0i} w_i^2(x, t) - N_i(t) w'^2_i(x, t) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Найдем производную от Φ по t :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \iint_{G \setminus J} (\varphi_t \varphi_{tt} + (a^2 - V^2) \varphi_x \varphi_{xt} + a^2 \varphi_y \varphi_{yt}) dx dy + 2a^2V \sum_{i=1}^n \int_b^c ((\varphi_t^+(x, y_i, t) - \varphi_t^-(x, y_i, t)) \times \\ & \times w'_i(x, t) + (\varphi^+(x, y_i, t) - \varphi^-(x, y_i, t)) \dot{w}'_i(x, t)) dx + \frac{2a^2}{\rho} \sum_{i=1}^n \int_b^c \left(E_i F_i \left(u'_i + \frac{1}{2} w'^2_i \right) \times \right. \\ & \times (\dot{u}'_i + w'_i \dot{w}'_i) + M_i \dot{u}_i \ddot{u}_i + M_i \dot{w}_i \ddot{w}_i + D_i w''_i \dot{w}'_i - \frac{\dot{N}_i(t)}{2} w'^2_i - N_i(t) w'_i \dot{w}'_i + \beta_{0i} w_i \dot{w}_i \right) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Для функций $\varphi(x, y, t)$ и $u_i(x, t), w_i(x, t), i = \overline{1, n}$, удовлетворяющих уравнениям (1) и (6), (7), равенство (10) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \iint_{G \setminus J} (\varphi_t (-2V \varphi_{xt} - V^2 \varphi_{xx} + a^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy})) + (a^2 - V^2) \varphi_x \varphi_{xt} + a^2 \varphi_y \varphi_{yt}) dx dy + \\ & + 2a^2V \sum_{i=1}^n \int_b^c ((\varphi_t^+(x, y_i, t) - \varphi_t^-(x, y_i, t)) w'_i(x, t) + (\varphi^+(x, y_i, t) - \varphi^-(x, y_i, t)) \dot{w}'_i(x, t)) dx + \\ & + \frac{2a^2}{\rho} \sum_{i=1}^n \int_b^c \left(E_i F_i \left(u'_i + \frac{1}{2} w'^2_i \right) (\dot{u}'_i + w'_i \dot{w}'_i) + \dot{u}_i \left\{ E_i F_i \left(u'_i(x, t) + \frac{1}{2} w'^2_i(x, t) \right)' \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta_{2i} F_i \dot{u}''_i(x, t) \right\} + \dot{w}_i \left\{ \rho(\varphi_t^+(x, y_i, t) - \varphi_t^-(x, y_i, t)) + \rho V (\varphi_x^+(x, y_i, t) - \varphi_x^-(x, y_i, t)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta_{0i} w_i \dot{w}_i \right\} \right) dx. \end{aligned}$$

$$+ E_i F_i \left[w'_i(x, t) \left(u'_i(x, t) + \frac{1}{2} w'^2_i(x, t) \right) \right]' - D_i w''''_i - \beta_{2i} I_i \dot{w}'''_i - N_i(t) w''_i - \beta_{1i} \dot{w}_i - \beta_{0i} w_i \Big\} + \\ + D_i w''_i \dot{w}''_i - \frac{\dot{N}_i(t)}{2} w'^2_i - N_i(t) w'_i \dot{w}'_i + \beta_{0i} w_i \dot{w}_i \Big) dx. \quad (11)$$

Произведем интегрирование с учетом условий (2)–(5). Применяя формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} \iint_{G \setminus J} \varphi_t \varphi_{xt} dx dy &= 0, & \iint_{G \setminus J} \varphi_t \varphi_{xx} dx dy &= - \iint_{G \setminus J} \varphi_{xt} \varphi_x dx dy, \\ \iint_{G \setminus J} \varphi_t \varphi_{yy} dx dy &= - \sum_{i=1}^n \int_b^c (\varphi_t^+(x, y_i, t) - \varphi_t^-(x, y_i, t)) (\dot{w}_i(x, t) + V w'_i(x, t)) dx - \iint_{G \setminus J} \varphi_{yt} \varphi_y dx dy. \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом уравнения (1) получим

$$\begin{aligned} \iint_{G \setminus J} (\varphi_t (-2V \varphi_{xt} - V^2 \varphi_{xx} + a^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy})) + (a^2 - V^2) \varphi_x \varphi_{xt} + a^2 \varphi_y \varphi_{yt}) dx dy &= \\ = -a^2 \sum_{i=1}^n \int_b^c (\varphi_t^+(x, y_i, t) - \varphi_t^-(x, y_i, t)) (\dot{w}_i(x, t) + V w'_i(x, t)) dx. \quad (12) \end{aligned}$$

Произведем интегрирование с учетом условий (8):

$$\begin{aligned} \int_b^c \dot{w}_i w'''_i dx &= \int_b^c \dot{w}'_i w''_i dx, & \int_b^c \dot{w}_i \dot{w}'''_i dx &= \int_b^c \dot{w}'''^2_i dx, & \int_b^c \dot{w}_i w''_i dx &= - \int_b^c \dot{w}'_i w'_i dx, \\ \int_b^c (\varphi^+(x, y_i, t) - \varphi^-(x, y_i, t)) \dot{w}'_i(x, t) dx &= - \int_b^c (\varphi_x^+(x, y_i, t) - \varphi_x^-(x, y_i, t)) \dot{w}_i(x, t) dx, \\ \int_b^c \dot{u}_i \dot{u}''_i dx &= - \int_b^c \dot{u}'^2_i dx, & \int_b^c \dot{u}_i \left(u'_i + \frac{1}{2} w'^2_i \right)' dx &= - \int_b^c \dot{u}'_i \left(u'_i + \frac{1}{2} w'^2_i \right) dx, \\ \int_b^c \dot{w}_i \left[w'_i \left(u'_i + \frac{1}{2} w'^2_i \right) \right]' dx &= - \int_b^c \dot{w}'_i w'_i \left(u'_i + \frac{1}{2} w'^2_i \right) dx, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (12), (13) в (11), получим

$$\dot{\Phi}(t) = -\frac{2a^2}{\rho} \sum_{i=1}^n \int_b^c \left(\frac{\dot{N}_i(t)}{2} w'^2_i + \beta_{2i} F_i \dot{u}'^2_i + \beta_{2i} I_i \dot{w}''^2_i + \beta_{1i} \dot{w}_i^2 \right) dx.$$

Пусть выполняются условия

$$\dot{N}_i(t) \geq 0, \quad \beta_{2i} \geq 0, \quad \beta_{1i} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

тогда справедливо неравенство

$$\dot{\Phi}(t) \leq 0 \Rightarrow \Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (15)$$

Проведем оценки для функционала с учетом граничных условий (8). Воспользуемся неравенствами Рэлея [5] и Коши–Буняковского:

$$\int_b^c w'^2_i(x, t) dx \geq \lambda_{1i} \int_b^c w_i'^2(x, t) dx, \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

$$\int_b^c w_i''^2(x, t) dx \geq \mu_{1i} \int_b^c w_i^2(x, t) dx, \quad i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

$$w_i^2(x, t) \leq (c - b) \int_b^c w_i'^2(x, t) dx, \quad i = \overline{1, n}, \quad (18)$$

где λ_{1i} , μ_{1i} — наименьшие собственные значения краевых задач для уравнений $\psi''' = -\lambda\psi''$, $\psi''' = \mu\psi$, $x \in (b, c)$, $i = \overline{1, n}$ с краевыми условиями (8).

Оценим $\Phi(0)$ сверху, используя неравенства (16), (17) и очевидное неравенство $-2ab \leq a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &\leq \Omega_0 = \iint_{G \setminus J} (\varphi_{t0}^2 + (a^2 - V^2)\varphi_{x0}^2 + a^2\varphi_{y0}^2) dx dy + a^2 \sum_{i=1}^n \int_b^c (\varphi^+(x, y_i, 0) - \varphi^-(x, y_i, 0))^2 dx + \\ &+ \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^n \int_b^c \left(E_i F_i \left(u'_{i0}(x, t) + \frac{1}{2} w'_{i0}^2(x, t) \right)^2 + \right. \\ &\left. + M_i (\dot{u}_{i0}^2(x, t) + \dot{w}_{i0}^2(x, t)) + \left(D_i + \frac{|N_i(0)| + \rho V^2}{\lambda_{1i}} + \frac{\beta_{0i}}{\mu_{1i}} \right) w'_{i0}^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь введены обозначения $\varphi_{t0} = \varphi_t(x, y, 0)$, $\varphi_{x0} = \varphi_x(x, y, 0)$, $\varphi_{y0} = \varphi_y(x, y, 0)$, $\dot{u}_{i0} = \dot{u}_i(x, 0)$, $u'_{i0} = u'_i(x, 0)$, $\dot{w}_{i0} = \dot{w}_i(x, 0)$, $w_{i0} = w_i(x, 0)$, $w'_{i0} = w'_i(x, 0)$, $w''_{i0} = w''_i(x, 0)$.

Оценим $\Phi(t)$ снизу:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \iint_{G \setminus J} (\varphi_t^2 + (a^2 - V^2)\varphi_x^2 + a^2\varphi_y^2) dx dy + 2a^2 V \sum_{i=1}^n \int_b^c (\varphi^+(x, y_i, t) - \\ &- \varphi^-(x, y_i, t)) w'_i(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^n \int_b^c (\lambda_{1i} D_i - N_i(t)) w'_i^2 dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Для оценки двойного интеграла разобьем область $G \setminus J$ на $n + 1$ область $G_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, y_{i-1} < y < y_i\}$, $i = \overline{1, n+1}$. Согласно неравенству Коши—Буняковского

$$\iint_{G_i} \varphi_x^2 dx dy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \iint_{G_i} \varphi^2 dx dy, \quad i = \overline{1, n+1}. \quad (21)$$

Согласно неравенству Коши—Буняковского также имеем

$$\left(\int_{y_i}^y \varphi_y dy \right)^2 \leq \int_{y_i}^y 1^2 dy \int_{y_i}^y \varphi_y^2 dy,$$

где $y_i < y < y_{i+1}$, $i = \overline{1, n}$. Следовательно,

$$(\varphi(x, y, t) - \varphi^+(x, y_i, t))^2 \leq (y - y_i) \int_{y_i}^y \varphi_y^2 dy \leq (y - y_i) \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_y^2 dy.$$

Интегрируя от y_i до y_{i+1} по переменной y , получим

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} (\varphi(x, y, t) - \varphi^+(x, y_i, t))^2 dy \leq \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{2} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_y^2 dy.$$

Интегрируя от 0 до x_0 по переменной x , окончательно находим

$$\iint_{G_i} \varphi_y^2 dx dy \geq \frac{2}{(y_i - y_{i-1})^2} \iint_{G_i} (\varphi(x, y, t) - \varphi^+(x, y_{i-1}, t))^2 dx dy. \quad (22)$$

Согласно неравенству Коши—Буняковского имеем

$$\left(\int_y^{y_i} \varphi_y dy \right)^2 \leq \int_y^{y_i} 1^2 dy \int_y^{y_i} \varphi_y^2 dy,$$

где $y_{i-1} < y < y_i$, $i = \overline{1, n}$. Следовательно,

$$(\varphi^-(x, y_i, t) - \varphi(x, y, t))^2 \leq (y_i - y) \int_y^{y_i} \varphi_y^2 dy \leq (y_i - y) \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_y^2 dy.$$

Интегрируя от y_{i-1} до y_i по переменной y , получим

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} (\varphi^-(x, y_i, t) - \varphi(x, y, t))^2 dy \leq \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{2} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_y^2 dy.$$

Интегрируя от 0 до x_0 по переменной x , окончательно находим

$$\iint_{G_i} \varphi_y^2 dx dy \geq \frac{2}{(y_i - y_{i-1})^2} \iint_{G_i} (\varphi^-(x, y_i, t) - \varphi(x, y, t))^2 dx dy. \quad (23)$$

Согласно (22), (23) получим

$$\iint_{G_1} \varphi_y^2 dx dy \geq \frac{2}{(y_1 - y_0)^2} \iint_{G_1} (\varphi^-(x, y_1, t) - \varphi(x, y, t))^2 dx dy, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \iint_{G_i} \varphi_y^2 dx dy &\geq \frac{2\chi_{i-1}(t)}{(y_i - y_{i-1})^2} \iint_{G_i} (\varphi(x, y, t) - \varphi^+(x, y_{i-1}, t))^2 dx dy + \\ &\quad + \frac{2(1 - \chi_{i-1}(t))}{(y_i - y_{i-1})^2} \iint_{G_i} (\varphi^-(x, y_i, t) - \varphi(x, y, t))^2 dx dy, \quad i = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\iint_{G_{n+1}} \varphi_y^2 dx dy \geq \frac{2}{(y_{n+1} - y_n)^2} \iint_{G_{n+1}} (\varphi(x, y, t) - \varphi^+(x, y_n, t))^2 dx dy, \quad (26)$$

где $\chi_i(t) \in (0, 1)$, $i = \overline{1, n-1}$ некоторые положительные функции.

Применяя (21), (24), (25), (26) для (20), получим неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \iint_{G_1} \left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2 + \frac{2a^2}{(y_1 - y_0)^2} (\varphi^-(x, y_1, t) - \varphi(x, y, t))^2 \right) dx dy + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \iint_{G_{i+1}} \chi_i(t) \left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2 + \frac{2a^2}{(y_{i+1} - y_i)^2} (\varphi(x, y, t) - \varphi^+(x, y_i, t))^2 \right) dx dy + \\ &\quad + \sum_{i=2}^n \iint_{G_i} (1 - \chi_{i-1}(t)) \left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2 + \frac{2a^2}{(y_i - y_{i-1})^2} (\varphi^-(x, y_i, t) - \varphi(x, y, t))^2 \right) dx dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{G_{n+1}} \left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2 + \frac{2a^2}{(y_{n+1} - y_n)^2} (\varphi(x, y, t) - \varphi^+(x, y_n, t))^2 \right) dx dy + \\
& + 2a^2 V \sum_{i=1}^n \int_b^c (\varphi^+(x, y_i, t) - \varphi^-(x, y_i, t)) w'_i(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^n \int_b^c (\lambda_{1i} D_i - N_i(t)) w_i'^2 dx. \quad (27)
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$K_i(t) = \lambda_{1i} D_i - N_i(t), \quad f_i(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in (0, b] \cup [c, x_0), \\ w'_i(x, t), & x \in (b, c), \end{cases}$$

тогда

$$\begin{aligned}
& 2a^2 V \sum_{i=1}^n \int_b^c (\varphi^+(x, y_i, t) - \varphi^-(x, y_i, t)) w'_i(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{i=1}^n \int_b^c (\lambda_{1i} D_i - N_i(t)) w_i'^2 dx = \\
& = - \sum_{i=1}^n \frac{2a^2 V}{y_i - y_{i-1}} \iint_{G_i} \varphi^-(x, y_i, t) f_i(x, t) dx dy + \sum_{i=1}^n \frac{2a^2 V}{y_{i+1} - y_i} \iint_{G_{i+1}} \varphi^+(x, y_i, t) f_i(x, t) dx dy + \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i(t) a^2}{\rho(y_i - y_{i-1})} \iint_{G_i} K_i(t) f_i^2(x, t) dx dy + \sum_{i=1}^n \frac{(1 - \gamma_i(t)) a^2}{\rho(y_{i+1} - y_i)} \iint_{G_{i+1}} K_i(t) f_i^2(x, t) dx dy, \quad (28)
\end{aligned}$$

где $\gamma_i(t) \in (0, 1)$, $i = \overline{1, n}$ — некоторые положительные функции. Согласно (28) из (27) получим неравенство

$$\begin{aligned}
\Phi(t) \geqslant & \iint_{G_1} \left(\varphi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2(x, y, t) + \frac{2a^2}{(y_1 - y_0)^2} (\varphi^-(x, y_1, t) - \varphi(x, y, t))^2 - \right. \\
& \left. - \frac{2a^2 V}{y_1 - y_0} \varphi^-(x, y_1, t) f_1(x, t) + \frac{\gamma_1(t) a^2}{\rho(y_1 - y_0)} K_1(t) f_1^2(x, t) \right) dx dy + \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \iint_{G_{i+1}} \chi_i(t) \left(\varphi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2(x, y, t) + \frac{2a^2}{(y_{i+1} - y_i)^2} (\varphi(x, y, t) - \varphi^+(x, y_i, t))^2 + \right. \\
& \left. + \frac{2a^2 V}{(y_{i+1} - y_i) \chi_i(t)} \varphi^+(x, y_i, t) f_i(x, t) + \frac{(1 - \gamma_i(t)) a^2}{\rho(y_{i+1} - y_i) \chi_i(t)} K_i(t) f_i^2(x, t) \right) dx dy + \\
& + \sum_{i=2}^n \iint_{G_i} (1 - \chi_{i-1}(t)) \left(\varphi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2(x, y, t) + \frac{2a^2}{(y_i - y_{i-1})^2} (\varphi^-(x, y_i, t) - \varphi(x, y, t))^2 - \right. \\
& \left. - \frac{2a^2 V}{(y_i - y_{i-1})(1 - \chi_{i-1}(t))} \varphi^-(x, y_i, t) f_i(x, t) + \frac{\gamma_i(t) a^2}{\rho(y_i - y_{i-1})(1 - \chi_{i-1}(t))} K_i(t) f_i^2(x, t) \right) dx dy + \\
& + \iint_{G_{n+1}} \left(\varphi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2(x, y, t) + \frac{2a^2}{(y_{n+1} - y_n)^2} (\varphi(x, y, t) - \varphi^+(x, y_n, t))^2 + \right. \\
& \left. + \frac{2a^2 V}{y_{n+1} - y_n} \varphi^+(x, y_n, t) f_n(x, t) + \frac{(1 - \gamma_n(t)) a^2}{\rho(y_{n+1} - y_n)} K_n(t) f_n^2(x, t) \right) dx dy. \quad (29)
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
d_{11}^{(1)} &= \frac{(a^2 - V^2) \pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_1 - y_0)^2}, \quad d_{22}^{(1)} = d_{12}^{(1)} = \frac{2a^2}{(y_1 - y_0)^2}, \quad d_{23}^{(1)} = \frac{a^2 V}{y_1 - y_0}, \\
d_{33}^{(1)}(t) &= \frac{a^2 K_1(t) \gamma_1(t)}{\rho(y_1 - y_0)}, \quad \Delta_2^{(1)} = d_{11}^{(1)} d_{22}^{(1)} - d_{12}^{(1)2}, \quad \Delta_3^{(1)}(t) = d_{33}^{(1)}(t) \Delta_2^{(1)} - d_{23}^{(1)2} d_{11}^{(1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{11}^{(2i)} &= \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_{i+1} - y_i)^2}, \quad d_{22}^{(2i)} = d_{12}^{(2i)} = \frac{2a^2}{(y_{i+1} - y_i)^2}, \quad d_{23}^{(2i)} = \frac{a^2V}{\chi_i(t)(y_{i+1} - y_i)}, \\
d_{33}^{(2i)}(t) &= \frac{a^2K_i(t)(1 - \gamma_i(t))}{\rho(y_{i+1} - y_i)\chi_i(t)}, \quad \Delta_2^{(2i)} = d_{11}^{(2i)}d_{22}^{(2i)} - d_{12}^{(2i)2}, \quad \Delta_3^{(2i)}(t) = d_{33}^{(2i)}(t)\Delta_2^{(2i)} - d_{23}^{(2i)2}d_{11}^{(2i)}, \\
&\quad i = \overline{1, n-1}, \\
d_{11}^{(3i)} &= \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_i - y_{i-1})^2}, \quad d_{22}^{(3i)} = d_{12}^{(3i)} = \frac{2a^2}{(y_i - y_{i-1})^2}, \quad d_{23}^{(3i)} = \frac{a^2V}{(1 - \chi_{i-1}(t))(y_i - y_{i-1})}, \\
\Delta_2^{(3i)} &= d_{11}^{(3i)}d_{22}^{(3i)} - d_{12}^{(3i)2}, \quad d_{33}^{(3i)}(t) = \frac{a^2K_i(t)\gamma_i(t)}{\rho(y_i - y_{i-1})(1 - \chi_{i-1}(t))}, \quad \Delta_3^{(3i)}(t) = d_{33}^{(3i)}(t)\Delta_2^{(3i)} - d_{23}^{(3i)2}d_{11}^{(3i)}, \\
&\quad i = \overline{2, n}, \\
d_{11}^{(4)} &= \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_{n+1} - y_n)^2}, \quad d_{22}^{(4)} = d_{12}^{(4)} = \frac{2a^2}{(y_{n+1} - y_n)^2}, \quad d_{23}^{(4)} = \frac{a^2V}{y_{n+1} - y_n}, \\
d_{33}^{(4)}(t) &= \frac{a^2K_n(t)(1 - \gamma_n(t))}{\rho(y_{n+1} - y_n)}, \quad \Delta_2^{(4)} = d_{11}^{(4)}d_{22}^{(4)} - d_{12}^{(4)2}, \quad \Delta_3^{(4)}(t) = d_{33}^{(4)}(t)\Delta_2^{(4)} - d_{23}^{(4)2}d_{11}^{(4)}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим квадратичные формы относительно $\varphi(x, y, t)$, $\varphi^-(x, y_1, t)$, $f_1(x, t)$; $\varphi(x, y, t)$, $\varphi^+(x, y_i, t)$, $f_i(x, t)$; $\varphi(x, y, t)$, $\varphi^-(x, y_i, t)$, $f_i(x, t)$; $\varphi(x, y, t)$, $\varphi^+(x, y_n, t)$, $f_n(x, t)$ в (29). Соответствующие матрицы форм имеют вид:

$$\begin{pmatrix} d_{11}^{(1)} & -d_{12}^{(1)} & 0 \\ -d_{12}^{(1)} & d_{22}^{(1)} & -d_{23}^{(1)} \\ 0 & -d_{23}^{(1)} & d_{33}^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_{11}^{(ki)} & -d_{12}^{(ki)} & 0 \\ -d_{12}^{(ki)} & d_{22}^{(ki)} & d_{23}^{(ki)} \\ 0 & d_{23}^{(ki)} & d_{33}^{(ki)}(t) \end{pmatrix}, \quad k = 2, 3, \quad \begin{pmatrix} d_{11}^{(4)} & -d_{12}^{(4)} & 0 \\ -d_{12}^{(4)} & d_{22}^{(4)} & d_{23}^{(4)} \\ 0 & d_{23}^{(4)} & d_{33}^{(4)}(t) \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра для положительной определенности квадратичных форм необходимо, чтобы угловые миноры были положительны. Первые два угловых минора матриц положительны при любых значениях параметров. Запишем условия положительности третьих угловых миноров:

$$\Delta_3^{(1)}(t) > 0, \quad \Delta_3^{(2i)}(t) > 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \Delta_3^{(3i)}(t) > 0, \quad i = \overline{2, n}, \quad \Delta_3^{(4)}(t) > 0. \quad (30)$$

Неравенства (30) примут вид:

$$K_1(t) > \frac{V^2x_0^2\rho(y_1 - y_0)}{2(a^2 - V^2)\pi^2\gamma_1(t)} \left(\frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_1 - y_0)^2} \right), \quad (31)$$

$$K_i(t) > \frac{V^2x_0^2\rho(y_{i+1} - y_i)}{2(a^2 - V^2)\pi^2(1 - \gamma_i(t))\chi_i(t)} \left(\frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_{i+1} - y_i)^2} \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (32)$$

$$K_i(t) > \frac{V^2x_0^2\rho(y_i - y_{i-1})}{2(a^2 - V^2)\pi^2(1 - \chi_{i-1}(t))\gamma_i(t)} \left(\frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_i - y_{i-1})^2} \right), \quad i = \overline{2, n}, \quad (33)$$

$$K_n(t) > \frac{V^2x_0^2\rho(y_{n+1} - y_n)}{2(a^2 - V^2)\pi^2(1 - \gamma_n(t))} \left(\frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_{n+1} - y_n)^2} \right). \quad (34)$$

Приравнивая правые части неравенств (31) и (32) при $i = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{V^2x_0^2\rho(y_1 - y_0)}{2(a^2 - V^2)\pi^2\gamma_1(t)} \left(\frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_1 - y_0)^2} \right) &= \\
&= \frac{V^2x_0^2\rho(y_2 - y_1)}{2(a^2 - V^2)\pi^2(1 - \gamma_1(t))\chi_1(t)} \left(\frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_2 - y_1)^2} \right),
\end{aligned}$$

найдем функцию $\gamma_1(t)$, обеспечивающую наиболее широкую область значений параметров, представляя которую в (31), получим:

$$K_1(t) > \frac{V^2\rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_2 - y_1)^2 + 2a^2x_0^2)}{2\chi_1(t)(a^2 - V^2)\pi^2(y_2 - y_1)} + \frac{V^2\rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_1 - y_0)^2 + 2a^2x_0^2)}{2(a^2 - V^2)\pi^2(y_1 - y_0)}. \quad (35)$$

Аналогично, приравнивая правые части неравенств (32), (33) при $i = \overline{2, n-1}$ и (33) при $i = n$, (34), получим

$$K_i(t) > \frac{V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_{i+1} - y_i)^2 + 2a^2x_0^2)}{2(a^2 - V^2)\pi^2\chi_i(t)(y_{i+1} - y_i)} + \frac{V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_i - y_{i-1})^2 + 2a^2x_0^2)}{2(a^2 - V^2)\pi^2(1 - \chi_{i-1}(t))(y_i - y_{i-1})}, \quad i = \overline{2, n-1}, \quad (36)$$

$$K_n(t) > \frac{V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_0 - y_n)^2 + 2a^2x_0^2)}{2(a^2 - V^2)\pi^2(y_0 - y_n)} + \frac{V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_n - y_{n-1})^2 + 2a^2x_0^2)}{2(a^2 - V^2)\pi^2(1 - \chi_{n-1}(t))(y_n - y_{n-1})}. \quad (37)$$

Так как при условиях (35)–(37) все квадратичные формы в (29) положительно определены, то из (29) окончательно получим оценку $\Phi(t) \geq 0$.

Используя метод Лагранжа, с учетом неравенства (35) оценим квадратичную форму относительно $\varphi(x, y, t)$, $\varphi^-(x, y_1, t)$, $f_1(x, t)$ в (29)

$$F(\varphi(x, y, t), \varphi^-(x, y_1, t), f_1(x, t)) \geq \frac{\Delta_3^{(1)}}{\Delta_2^{(1)}} f_1^2(x, t).$$

Из (29) с учетом (18) получим

$$\Phi(t) \geq \iint_{G_1} \frac{\Delta_3^{(1)}}{\Delta_2^{(1)}} f_1^2(x, t) dx dy = \int_b^c \frac{\Delta_3^{(1)} y_1}{\Delta_2^{(1)}} w_1'^2(x, t) dx \geq \frac{\Delta_3^{(1)} y_1}{\Delta_2^{(1)}(c-b)} w_1^2(x, t). \quad (38)$$

Учитывая (15), (19), (38), окончательно приходим к неравенству

$$\frac{\Delta_3^{(1)} y_1}{\Delta_2^{(1)}(c-b)} w_1^2(x, t) \leq \Omega_0. \quad (39)$$

Аналогично, оценивая остальные квадратичные формы в (29), получим

$$\frac{\Delta_3^{(2i)}(y_{i+1} - y_i)}{\Delta_2^{(2i)}(c-b)} w_i^2(x, t) \leq \Omega_0, \quad \frac{\Delta_3^{(4)}(y_0 - y_n)}{\Delta_2^{(4)}(c-b)} w_n^2(x, t) \leq \Omega_0. \quad (40)$$

Таким образом, если выполняются условия (14), (35)–(37), то $\Phi(t) \geq 0$, $\dot{\Phi}(t) \leq 0$. На основании неравенства (29) можно сделать вывод: функции $\varphi(x, y, t)$, $\varphi_t(x, y, t)$, $w'_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных. Из неравенства $\Phi(t) \leq \Phi(0)$, согласно (9), следует, что функции $\varphi_x(x, y, t)$, $\varphi_y(x, y, t)$, $\dot{u}_i(x, t)$, $w_i(x, t)$, $w''_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных. Из оценок (39), (40) следует, что решение $w_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных. Следовательно, на основании проведенного исследования функционала доказана теорема.

Теорема 1. Предположим, что найдутся такие функции $\chi_i(t) \in (0, 1)$, $i = \overline{1, n-1}$, что выполняются условия (14), (35)–(37). Тогда решение $w_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, $\varphi(x, y, t)$ задачи (1)–(8) и производные $\varphi_t(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$, $\varphi_y(x, y, t)$, $\dot{u}_i(x, t)$, $w'_i(x, t)$, $w_i(x, t)$, $w''_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0} , φ_{x0} , φ_{y0} , $\varphi^+(x, y_i, 0)$, $\varphi^-(x, y_i, 0)$, \dot{u}_{i0} , w'_{i0} , $w_i(x, t)$, w''_{i0} .

Для применения теоремы 1 подставляем все параметры механической системы в условия (14), (35)–(37). Если условия (14) выполняются, то из системы неравенств (35)–(37) находим $\chi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$. Если все $\chi_i(t) \in (0, 1)$, то делаем вывод об устойчивости перечисленных в теореме функций.

Рассмотрим частный случай вибрационного устройства при равномерном расположении упругих элементов

$$y_1 - y_0 = y_{n+1} - y_n = h/2, \quad y_i - y_{i-1} = h, \quad i = \overline{2, n}, \quad (41)$$

тогда неравенства (35)–(37) примут более простой для решения вид:

$$2\chi_1(t)(a^2 - V^2)\pi^2 h K_1(t) > V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2 h^2 + 2a^2x_0^2)(1 + \chi_1(t)), \quad (42)$$

$$2(a^2 - V^2)\pi^2 h \chi_i(t)(1 - \chi_{i-1}(t))K_i(t) > V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2 h^2 + 2a^2 x_0^2)(1 - \chi_{i-1}(t) + \chi_i(t)), \quad i = \overline{2, n-1}, \quad (43)$$

$$2(a^2 - V^2)\pi^2 h(1 - \chi_{n-1}(t))K_n(t) > V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2 h^2 + 2a^2 x_0^2)(2 - \chi_{n-1}(t)). \quad (44)$$

Теорема 2. Предположим, что найдутся такие функции $\chi_i(t) \in (0, 1)$, $i = \overline{1, n-1}$, что выполняются условия (14), (41)–(44). Тогда решение $w_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, $\varphi(x, y, t)$ задачи (1)–(8) и производные $\varphi_t(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$, $\varphi_y(x, y, t)$, $\dot{u}_i(x, t)$, $w'_i(x, t)$, $\dot{w}_i(x, t)$, $w''_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0} , φ_{x0} , φ_{y0} , $\varphi^+(x, y_i, 0)$, $\varphi^-(x, y_i, 0)$, \dot{u}_{i0} , w'_{i0} , \dot{w}_{i0} , w''_{i0} .

Для определения критических значений скорости течения положим $\chi_i(t) = 1/2$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда из (35)–(37) получим условия

$$K_1(t) > \frac{V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_2 - y_1)^2 + 2a^2 x_0^2)}{(a^2 - V^2)\pi^2(y_2 - y_1)} + \frac{V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_1 - y_0)^2 + 2a^2 x_0^2)}{2(a^2 - V^2)\pi^2(y_1 - y_0)}, \quad (45)$$

$$K_i(t) > \frac{V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_{i+1} - y_i)^2 + 2a^2 x_0^2)}{(a^2 - V^2)\pi^2(y_{i+1} - y_i)} + \frac{V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_i - y_{i-1})^2 + 2a^2 x_0^2)}{(a^2 - V^2)\pi^2(y_i - y_{i-1})}, \quad i = \overline{2, n-1}, \quad (46)$$

$$K_n(t) > \frac{V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_{n+1} - y_n)^2 + 2a^2 x_0^2)}{2(a^2 - V^2)\pi^2(y_{n+1} - y_n)} + \frac{V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2(y_n - y_{n-1})^2 + 2a^2 x_0^2)}{(a^2 - V^2)\pi^2(y_n - y_{n-1})}. \quad (47)$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия (14), (45)–(47). Тогда решение $w_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, $\varphi(x, y, t)$ задачи (1)–(8) и производные $\varphi_t(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$, $\varphi_y(x, y, t)$, $\dot{u}_i(x, t)$, $w'_i(x, t)$, $\dot{w}_i(x, t)$, $w''_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0} , φ_{x0} , φ_{y0} , $\varphi^+(x, y_i, 0)$, $\varphi^-(x, y_i, 0)$, \dot{u}_{i0} , w'_{i0} , \dot{w}_{i0} , w''_{i0} .

Для применения теоремы 3 подставляем все параметры механической системы, кроме скорости, в условия (14), (45)–(47). Если условия (14) выполняются, то из системы неравенств (45)–(47) находим ограничения на скорость V и делаем вывод об устойчивости перечисленных в теореме функций.

При равномерном расположении упругих элементов (41) неравенства (45)–(47) примут вид:

$$K_i(t) > \frac{2V^2 \rho((a^2 - V^2)\pi^2 h^2 + 2a^2 x_0^2)}{(a^2 - V^2)\pi^2 h}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (48)$$

Теорема 4. Пусть выполняются условия (14), (41), (48). Тогда решение $w_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, $\varphi(x, y, t)$ задачи (1)–(8) и производные $\varphi_t(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$, $\varphi_y(x, y, t)$, $\dot{u}_i(x, t)$, $w'_i(x, t)$, $\dot{w}_i(x, t)$, $w''_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0} , φ_{x0} , φ_{y0} , $\varphi^+(x, y_i, 0)$, $\varphi^-(x, y_i, 0)$, \dot{u}_{i0} , w'_{i0} , \dot{w}_{i0} , w''_{i0} .

4. Заключение. На основе предложенных математических моделей продольно-поперечных колебаний упругих элементов конструкций в виде пластины-полосы при обтекании их дозвуковым потоком идеального газа проведены исследования динамической устойчивости деформируемых элементов вибрационных устройств. Модели описываются нелинейными системами дифференциальных уравнений с частными производными. С помощью построенных функционалов получены достаточные условия устойчивости решений этих систем уравнений. Полученные условия устойчивости накладывают ограничения на погонные массы и изгибные жесткости элементов, сжимающие (растягивающие) элементы усилия, скорость невозмущенного однородного потока, а также на коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования, коэффициенты жесткости слоя обжатия. Эти условия явно содержат основные параметры механических систем, и в таком виде они наиболее приспособлены для решения задач оптимизации, автоматического управления, автоматизированного проектирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. — Ульяновск: УлГТУ, 2019.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. — Ульяновск: УлГТУ, 2015.
3. Быкова Т. В., Могилевич Л. И., Попов В. С., Попова А. А., Черненко А. В. Радиальные и изгибные колебания круглой трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости// Тр. МАИ. — 2020. — 110. — 6.
4. Вельмисов П. А., Анкилов А. В., Покладова Ю. В. Об устойчивости решений некоторых классов начально-краевых задач в аэрогидроупругости// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 165. — С. 34–46.
5. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. — М.: Наука, 1968.
6. Могилевич Л. И., Блинков Ю. А., Иванов С. В. Волны деформации в двух соосных кубически нелинейных цилиндрических оболочках с вязкой жидкостью между ними// Изв. вузов. Прикл. нелин. динам. — 2020. — 28, № 4. — С. 435–454.
7. Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K. A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow// Int. J. Nonlin. Mech. — 2020. — 118. — 103290.
8. Ankilov A. V., Vel'misov P. A. Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem// J. Math. Sci. — 2016. — 219, № 1. — P. 14–26.
9. Askari E., Jeong K.-H., Ahn K.-H., Amabili M. A mathematical approach to study fluid-coupled vibration of eccentric annular plates// J. Fluids Struct. — 2020. — 98. — 103129.
10. Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density// J. Sound Vibration. — 2020. — 473. — 115202.
11. Kontzialis K., Moditis K., Paidoussis M. P. Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions// J. Press. Vessel Techn. — 2017. — 139, № 3. — P. 1–8.
12. Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow// J. Fluids Struct. — 2016. — 63. — P. 120–139.
13. Mogilevich L., Ivanov S. Waves in two coaxial elastic cubically nonlinear shells with structural damping and viscous fluid between them// Symmetry. — 2020. — 12, № 3. — P. 335.
14. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V. Hydroelastic response of a circular sandwich plate interacting with a liquid layer// J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — 1546, № 1. — 012137.
15. Rinaldi S., Paidoussis M. P. An improved theoretical model for the dynamics of a free-clamped cylinder in axial flow// J. Fluids Struct. — 2020. — 94. — 102903..
16. Vel'misov P. A., Ankilov A. V. Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid// Cybern. Phys. — 2017. — 6, № 4. — P. 262–270.
17. Vel'misov P. A., Ankilov A. V. Stability of solutions of initial boundary-value problems of aerohydroelasticity// J. Math. Sci. — 2018. — 233, № 6. — P. 958–974.
18. Vel'misov P. A., Ankilov A. V. About dynamic stability of deformable elements of vibration systems// Cybern. Phys. — 2019. — 8, № 3. — P. 175–184.

Вельмисов Петр Александрович

Ульяновский государственный технический университет

E-mail: velmisov@ulstu.ru

Анкилов Андрей Владимирович

Ульяновский государственный технический университет

E-mail: ankil@ulstu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 35–41
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-35-41

УДК 511.84

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА И ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ—РИМАНА

© 2022 г. Ю. А. ГЛАДЫШЕВ, Е. А. ЛОШКАРЕВА

Аннотация. В работе продолжается изучение полученных ранее обобщений условий Коши—Римана (УКР), которые при определенных предположениях могут быть интерпретированы как уравнения электромагнитного поля Максвелла. Основным математическим аппаратом, использованным в работе, является аппарат двух кватернионных переменных. Работа не содержит каких-либо физических утверждений, а является теоретическим анализом, который можно провести для систем обобщенных УКР.

Ключевые слова: кватернион, спинор, система Коши—Римана, уравнение Лапласа, система Максвелла, закон сохранения электрического заряда.

THE LAW OF CONSERVATION OF ELECTRIC CHARGE AND THE PHYSICAL INTERPRETATION OF THE GENERALIZED CAUCHY–RIEMANN SYSTEM

© 2022 Yu. A. GLADYSHEV, E. A. LOSHKAREVA

ABSTRACT. In this paper, we continue the study of generalizations of the Cauchy–Riemann (CR) conditions obtained earlier, which, under certain assumptions, can be interpreted as Maxwell's equations of electromagnetic field. The main mathematical tools used in the work is the technique of two quaternion variables. This work does not contain any physical statements, but is a theoretical analysis that can be carried out for systems of generalized CR conditions.

Keywords and phrases: quaternion, spinor, Cauchy–Riemann system, Laplace equation, Maxwell system, law of conservation of electric charge.

AMS Subject Classification: 46S05, 47S05

1. Введение. Кватернионный аппарат. В целом ряде работ сделаны попытки использовать аппарат кватернионных функций [3] для формулировки законов, решений конкретных задач классической электродинамики и получения новых результатов. Можно указать направление, которое использует симметрию законов электродинамики относительно взаимной замены электрических и магнитных полей, а следовательно, относительно электрических и гипотетических магнитных зарядов [5, 9].

Другое направление изучает сходство уравнений Максвелла и Дирака [11] и устанавливает ряд интересных возможных явлений [5, 6, 9–11, 13]. Следует обратить внимание на использование кватернионных методов для решений конкретных задач, например, задачи о вибраторе [5, 9, 11]. Чисто математическая постановка задачи связана не только с кватернионами и с их различными обобщениями [7, 12]. В настоящем сообщении рассматриваются только тело кватернионов.

В восьмимерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{(8)}$ выделим два подпространства X и Y размерности $k = 4$, определив их точки наборами координат x_i, y_i , где $i = \overline{0, 3}$. Следовательно, пространство $\mathbb{R}^{(8)}$ следует рассматривать как декартово произведение пространств X, Y .

Введем два координатных кватерниона x, y

$$x = \sum_{i=0}^3 e_i x_i, \quad y = \sum_{i=0}^3 e_i y_i. \quad (1)$$

Здесь e_i единицы системы кватернионов с обычными для них свойствами [2].

Предположим, что заданы две кватернионные функции χ, ψ с компонентами χ_i, ψ_i вида

$$\chi = \sum_{i=0}^3 e_i \chi_i, \quad \psi = \sum_{i=0}^3 e_i \psi_i. \quad (2)$$

Для дальнейшего предположим, что функции χ_i, ψ_i от всех восьми переменных имеют вторые непрерывные производные.

Будем использовать хорошо известные [8] кватернионные операторы

$$D_1 = \sum_{i=0}^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D_2 = \sum_{i=0}^3 e_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad (3)$$

а также их кватернионные сопряженные.

В работе [1] обобщенные условия Коши—Римана (УКР) были введены как система линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$D_1 \chi - \psi D_2 = 0, \quad \chi \bar{D}_2 + \bar{D}_1 \psi = 0. \quad (4)$$

Действительно, если предположить, что функции χ, ψ зависят только от x_0, y_0 , то имеем

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_0} - \frac{\partial \psi}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y_0} + \frac{\partial \psi}{\partial x_0} = 0; \quad (5)$$

таким образом, набор четырех систем для пар $(\chi_0, \psi_0), (\chi_1, \psi_1), (\chi_2, \psi_2), (\chi_3, \psi_3)$, совпадающих по конструкции с системой Коши—Римана.

В случае, когда операторы D_1, D_2 включают только переменные x_0, y_0, y_1 , имеем систему

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial}{\partial y_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \psi = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_0} - e_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \chi + \frac{\partial \psi}{\partial x_0} = 0 \quad (6)$$

для так называемого гармонического вектора [2].

Если χ, ψ зависят от x_0, x_1, y_0, y_1 , то получаем систему Мойсила—Теодореску [8] и в другом смысле систему для спинорного поля. Авторами было показано, что при определенном отождествлении компонент функций χ, ψ с физическими параметрами электромагнитного поля приходим к системе уравнений Максвелла [4].

2. Основные операторы A, \tilde{A} системы уравнений электромагнитного поля. Введем преобразование пары кватернионных функций χ, ψ с указанными выше свойствами в пару кватернионных функций μ, ν вида

$$\mu = D_1 \chi - \psi D_2, \quad \nu = \chi \bar{D}_2 + \bar{D}_1 \psi. \quad (7)$$

По данным χ, ψ кватернионные функции μ, ν определены однозначно. Однако обратная задача нахождения χ, ψ по заданным μ, ν определена неоднозначно, а именно с точностью до пары χ_u, ψ_u кватернионных функций, удовлетворяющих системе

$$D_1 \chi_u - \psi_u D_2 = 0, \quad \chi_u \bar{D}_2 + \bar{D}_1 \psi_u = 0. \quad (8)$$

Введем наряду с преобразованием (7) так называемое присоединенное преобразование

$$\varepsilon = \bar{D}_1 \alpha + \beta D_2, \quad \delta = -\alpha \bar{D}_2 + D_1 \beta \quad (9)$$

упорядоченных пар кватернионов α, β и ε, δ . Относительно этого преобразования можно вы сказать те же замечания, что и ранее о (7). При однозначности преобразования (9) обратное преобразование определено с точностью до набора (α_u, β_u) , где α_u, β_u удовлетворяют системе

$$\bar{D}_1\alpha_u + \beta_u D_2 = 0, \quad -\alpha_u \bar{D}_2 + D_1\beta_u = 0, \quad (10)$$

которую назовем присоединенной к (8). В дальнейшем, чтобы подчеркнуть двойственный характер этой операции, применим обозначение

$$\alpha_u = \tilde{\chi}_u, \quad \beta_u = \tilde{\psi}_u. \quad (11)$$

Рассмотрим применение преобразования (9) к случаю, когда $\varepsilon = \chi, \delta = \psi$. Получим

$$\begin{aligned} \mu &= D_1(\bar{D}_1\alpha + \beta D_2) - (-\alpha \bar{D}_2 + D_1\beta)D_2 = D_1\bar{D}_1\alpha + \bar{D}_2 D_2\beta = \Delta(8)\alpha, \\ \nu &= +(\bar{D}_1\alpha + \beta D_2)\bar{D}_2 + \bar{D}_1(-\alpha \bar{D}_2 + D_1\beta) = D_2\bar{D}_2\alpha + \bar{D}_1 D_1\beta = \Delta(8)\beta. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь через $\Delta(8)$ обозначен оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{(8)}$.

Введем более общую запись, определив оператор A , который упорядоченной паре кватернионов (χ, ψ) ставит в соответствие пару (μ, ν) :

$$(\mu, \nu) = A(\chi, \psi). \quad (13)$$

Аналогично, имеем присоединенный оператор \tilde{A} со свойством

$$(\varepsilon, \delta) = \tilde{A}(\alpha, \beta). \quad (14)$$

Тогда полученный выше результат запишем в виде

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \Delta(8). \quad (15)$$

Формула (15) показывает, что оператор $\Delta(8)$ Лапласа можно представить как произведение двух операторов A, \tilde{A} .

Обратим внимание, что обобщенные УКР, т.е. формулы (8), (10) определяют линейное пространство функций, составляющих ядро операторов A, \tilde{A} :

$$A(\chi_u, \psi_u) = 0, \quad \tilde{A}(\tilde{\chi}_u, \tilde{\psi}_u) = 0. \quad (16)$$

Отметим, что процесс представления операторов Лапласа как произведения $A\tilde{A}$ напоминает метод Дирака «извлечения корня» из оператора

$$\Delta(3) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2$$

для получения системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Приведем важное для дальнейшего соотношение

$$\tilde{A}(\mu, \nu) = \Delta(8)(\chi, \psi), \quad (17)$$

полученное действием оператора \tilde{A} на основное преобразование (7); или в развернутом виде

$$\bar{D}_1\mu + \nu D_2 = \Delta(8)\chi, \quad -\mu \bar{D}_2 + D_1\nu = \Delta(8)\psi, \quad (18)$$

3. Физическая интерпретация основных преобразований A, \tilde{A} . Сделаем следующее предположение о зависимости χ, ψ от координат. Положим, что χ, ψ, μ, ν зависят только от переменных x_1, x_2, x_3, y_0 . Тогда имеем для $D_1, \bar{D}_1, D_2, \bar{D}_2$ операторы, выраженные в понятиях векторного анализа следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} D_1 \\ \bar{D}_1 \end{array} \right\} q = \mp \operatorname{div}(x)\mathbf{q} \pm \operatorname{rot}(x)\mathbf{q} \pm \operatorname{grad}(x)q_0, \quad (19)$$

$$\left. \begin{array}{l} D_2 \\ \bar{D}_2 \end{array} \right\} q = \frac{\partial q_0}{\partial y_0} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y_0}. \quad (20)$$

В данном случае $q(x_1, x_2, x_3, y_0)$ — произвольная кватернионная функция от набора x_1, x_2, x_3, y_0 , а q_0 и \mathbf{q} — соответственно скалярная и векторная часть кватерниона.

Предложенный выбор набора координат, который назовем физическим, отражает тот экспериментальный факт, что для непротиворечивого и полного описания явлений макроскопического мира достаточно четырех исходных параметров.

По (19) построим систему (7) в кватернионной форме:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \chi + \operatorname{rot} \chi + \operatorname{grad} \chi_0 - \frac{\partial \psi_0}{\partial y_0} - \frac{\partial \psi}{\partial y_0} &= \mu_0 + \boldsymbol{\mu}, \\ \frac{\partial \chi_0}{\partial y_0} + \frac{\partial \chi}{\partial y_0} + \operatorname{div} \psi - \operatorname{rot} \psi - \operatorname{grad} \psi_0 &= \nu_0 + \boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \quad (21)$$

Напомним, что y_0 — так называемое «время Вика», т.е. $y_0 = ict$. Отделяя скалярную и векторную часть кватернионов в (21) приходим к системе восьми уравнений для восьми неизвестных функций

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \chi - \frac{\partial \psi_0}{\partial y_0} &= \mu_0, \\ \operatorname{rot} \chi + \operatorname{grad} \chi_0 - \frac{\partial \psi}{\partial y_0} &= \boldsymbol{\mu}, \\ \operatorname{div} \psi + \frac{\partial \chi_0}{\partial y_0} &= \nu_0, \\ -\operatorname{rot} \psi - \operatorname{grad} \psi_0 + \frac{\partial \chi}{\partial y_0} &= \boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \quad (22)$$

4. Получение основной системы уравнений электромагнитного поля. Вид системы (22) указывает на то, что при соответствующем отождествлении величин $\chi_0, \chi, \psi_0, \psi, \mu, \nu$ имеем систему Максвелла. Для общности и большей симметрии и чтобы полностью использовать все величины μ, ν введем гипотетические магнитные заряды с плотностями m, \mathbf{j}_m , разумеется сохранив электрические заряды ρ и токи \mathbf{j}_e .

В (22) положим

$$\begin{aligned} \chi &= H_0 + \mathbf{H}, & \psi &= i(E_0 + \mathbf{E}), \\ \mu &= -4\pi m + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e, & \nu &= \left(4\pi\rho + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m\right) i. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь \mathbf{H}, \mathbf{E} — напряженности магнитного и электрического поля, а H_0, E_0 — скалярные поля.

При этом принято, что ρ, m — объемные плотности электрических и магнитных зарядов, а $\mathbf{j}_e, \mathbf{j}_m$ — соответственно поверхностные плотности токов. Выбор знаков электрических величин совпадает с общепринятым. Гипотетические магнитные заряды и токи выбраны исходя из двух требований: во-первых, единство знаков при переходе к уравнениям для потенциалов и во-вторых, выполнение закона сохранения магнитного заряда.

Системе (23) в реальном времени следует придать вид

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} &= -4\pi m, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} + \operatorname{grad} H_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial H_0}{\partial t} &= 4\pi\rho, \\ -\operatorname{rot} \mathbf{E} - \operatorname{grad} E_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m. \end{aligned} \quad (24)$$

Если в данной области зарядов и токов нет, то имеем однородную систему при наличии двух скалярных полей H_0, E_0 . Это соответствует обобщенной УКР (23). Если дополнительно потребовать, что $H_0 = E_0 = 0$, то возвращаемся к общеизвестной системе Максвелла в области без зарядов и токов.

Перенесем в (24) производные по времени t от скалярных полей H_0, E_0 направо:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 4\pi m - \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t}. \quad (25)$$

Следовательно, временное изменение E_0 равносильно некоторому магнитному заряду, так что можно положить, что условный магнитный заряд m' равен

$$m' = m - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial E_0}{\partial t}. \quad (26)$$

Таким образом, за плотности внутренних магнитных зарядов следует взять

$$m_i = -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial E_0}{\partial t}. \quad (27)$$

Проведя аналогичную операцию с третьим уравнением (24), имеем для полной плотности электрических зарядов

$$\rho' = \rho + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial H_0}{\partial t}. \quad (28)$$

Поэтому для плотности внутренних электрических зарядов примем

$$\rho_i = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial H_0}{\partial t}. \quad (29)$$

Эти заряды определены самой системой (24) и не являются внешне заданными. Они могут определяться подстановкой конкретной краевой задачи.

Обратимся к градиентным слагаемым и запишем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e - \operatorname{grad} H_0. \quad (30)$$

Введем полный ток \mathbf{j}'_e

$$\mathbf{j}'_e = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{c}{4\pi} \operatorname{grad} H_0 + \mathbf{j}_e. \quad (31)$$

Первое слагаемое уже давно известно как «ток смещения», третье — это «обычный» электрический ток; наконец, второе слагаемое назовем градиентным (внутренним) током. Внутренний (фиктивный) ток $\mathbf{j}_{ie} \partial t$ равен

$$\mathbf{j}_{ie} \partial t = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{grad} H_0. \quad (32)$$

Наконец, обращаясь к закону Фарадея, введем токи \mathbf{j}'_m вида

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{grad} E_0 - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m. \quad (33)$$

Уравнение (33) позволяет ввести полный магнитный ток \mathbf{j}'_m по формуле

$$\mathbf{j}'_m = \mathbf{j}_m + \frac{c}{4\pi} \operatorname{grad} E_0. \quad (34)$$

Внутренний (градиентный) ток магнитных зарядов равен

$$\mathbf{j}_{im} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{grad} E_0. \quad (35)$$

5. Введение потенциалов электромагнитного поля. Легко видеть, что соотношения (9), описывающие присоединенное преобразование, определяют введение электромагнитных потенциалов: достаточно принять

$$\alpha = \alpha_0 + \boldsymbol{\alpha} = +b - \mathbf{A}, \quad \beta = \beta_0 + \boldsymbol{\beta} = -i\varphi - i\mathbf{B}. \quad (36)$$

В развернутом виде имеем

$$\begin{aligned} H_0 &= -\operatorname{div} \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, & \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} b - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ E_0 &= \operatorname{div} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial b}{\partial t}, & \mathbf{E} &= -\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку нет определенности в выборе знаков скалярного и векторного потенциалов, определенных магнитными зарядами, то за основу принято единство операторных видов уравнений для потенциалов после подстановки (37) в систему Максвелла (24).

$$\begin{aligned}\Delta_b(4)b &= -4\pi m, \quad \Delta_b(4)\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e, \\ \Delta_b(4)\varphi &= -4\pi\rho, \quad \Delta_b(4)\mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_m.\end{aligned}$$

Здесь $\Delta_b(4)$ — волновой оператор Даламбера.

Если гипотетических магнитных зарядов и токов нет ($m = 0, \mathbf{j}_m = 0$), то остается возможность, что b, \mathbf{B} удовлетворяют волновому уравнению и функции b, \mathbf{B} входят в определение (37) полей.

6. Система уравнений Максвелла и закон сохранения электрического заряда. Приступим к изучению физического смысла соотношения (34)

$$\tilde{A}(\mu, \nu) = \Delta_b(8)(\chi, \psi), \quad (38)$$

полученного ранее в развернутом виде:

$$\bar{D}_1\mu + \nu D_2 = \Delta_b(4)\chi, \quad -\mu \bar{D}_2 + D_1\nu = \Delta_b(4)\psi. \quad (39)$$

Переходя к записи в операциях векторного анализа согласно (19), (20) запишем

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{\mu} - \operatorname{rot} \boldsymbol{\mu} - \operatorname{grad} \mu_0 + \frac{\partial \nu_0}{\partial y_0} + \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial y_0} &= \Delta_b(4)\chi, \\ -\frac{\partial \mu_0}{\partial y_0} - \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial y_0} - \operatorname{div} \boldsymbol{\nu} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\nu} + \operatorname{grad} \nu_0 &= \Delta_b(4)\psi.\end{aligned} \quad (40)$$

Подставим все величины μ, ν согласно (23):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e - \operatorname{rot} \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e + \operatorname{grad} 4\pi m + \frac{1}{c} \frac{\partial 4\pi\rho}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{j}_m}{\partial t} &= \Delta_b(4)(H_0 + \mathbf{H}), \\ \frac{1}{c} \frac{\partial 4\pi m}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\mathbf{j}_e \frac{4\pi}{c})}{\partial t} - \operatorname{div} \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_m + \operatorname{rot} \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_m + 4\pi i \operatorname{grad} \rho &= \Delta_b(4)[E_0 + \mathbf{E}].\end{aligned} \quad (41)$$

Отделим скалярные части в уравнениях

$$\frac{4\pi}{c} \left[\operatorname{div} \mathbf{j}_e + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] = \Delta_b(4)H_0, \quad \frac{4\pi}{c} \left[-\frac{\partial m}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{j}_m \right] = \Delta_b(4)E_0. \quad (42)$$

Левая часть первого уравнения (42) представляет известное уравнение непрерывности, а следовательно, закон сохранения электрического заряда. Если считать закон сохранения строго доказанным экспериментально, то H_0 — решение волнового уравнения

$$\Delta_b(4)H_0 = 0.$$

Рассмотрим смысл этого уравнения, исходя из понятия «внутреннего» заряда и тока, рассмотренного ранее. Действительно, согласно (31), (29) имеем

$$\Delta_b(4)H_0 = -\frac{4\pi}{c} \left[\frac{\partial \rho_{ie}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{ie} \right].$$

Интерпретация второго соотношения (42) неоднозначна. Выбор, сделанный в работе, приводит к закону сохранения магнитного заряда. Считаем, что возможен и другой результат.

7. Заключение. В работе показано, что существуют операторы A, \tilde{A} , которые позволяют записать уравнение электромагнитного поля как действие оператора A на упорядоченную пару кватернионов (χ, ψ)

$$(\mu, \nu) = A(\chi, \psi).$$

Здесь χ включает вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} и некоторое скалярное поле H_0 . Аналогично ψ включает вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} и соответствующее скалярное поле E_0 . Кватернионы μ, ν определены как плотности зарядов и токов электрических и магнитных. Введение электромагнитных потенциалов соответствует оператору \tilde{A} и $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \Delta_b(4)$, где $\Delta_b(4)$ — оператор Даламбера. Применение оператора \tilde{A} позволяет получить закон сохранения электрического заряда при определенных предположениях о скалярном поле H_0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гладышев Ю. А. Кватернионные методы в электродинамике// Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2019. — 57. — С. 111–115.
2. Гладышев Ю. А. Формализм Бельтрами–Берса и его приложения в математической физике. — Калуга: Изд-во КГПУ, 1997.
3. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1980.
4. Ландау Л. Д. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
5. Arbab I. A. Maxwellian quantum mechanics// Int. J. Light Electron Optics. — 2017. — 136. — P. 382–389.
6. Dovlatova A., Yerchuck D. Concept of fully dually symmetric electrodynamics// J. Phys. Conf. Ser. — 2012. — 343. — 012133.
7. Mingjie Li, Peng Shi, Luping Du, Xiaocong Yuan Electronic Maxwell's equations// New J. Phys. — 2020. — 22, № 11. — 113019.
8. Moisil M. G. Sur los quaternions monogènes// Bull. Sci. Math. — 1931. — 55. — P. 168–174.
9. Praveen S. B., Negi O. P. S. Revisiting quaternion dual electrodynamics// Int. J. Theor. Phys. — 2008. — 47, № 12. — P. 3108–3120.
10. Red'kov V., Tolkachev E. Quaternions and small Lorentz groups in moncommutative electrodynamics// Adv. Appl. Clifford Algebras. — 2010. — 20, № 2. — P. 393–400.
11. Virchenko V. L., Derkach V. N. To the theory of electromagnetic field in potentials// Int. J. Infrared Millimeter Waves. — 1999. — 20, № 7. — P. 1327–1337.
12. Wang H., Ren G. Octonion analysis of several variables// Commun. Math. Stat. — 2014. — 2, № 2. — P. 163–185.
13. Yerchuck D., Dovlatova A., Alexandrov A. Symmetry of differential equations and quantum theory// J. Phys. Conf. Ser. — 2013. — 490, № 1. — 012233.

Гладышев Юрий Александрович

Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского

E-mail: losh-elena@yandex.ru

Лошкарева Елена Анатольевна

Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского

E-mail: losh-elena@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 42–62
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-42-62

УДК 517.956; 517.958

О ЗАДАЧЕ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА В ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

© 2022 г. М. Т. ДЖЕНАЛИЕВ, М. Г. ЕРГАЛИЕВ,
А. А. АСЕТОВ, А. М. АЯЗБАЕВА

Аннотация. При помощи априорных оценок, метода Фаэдо—Галеркина и других методов функционального анализа доказана корректность граничной задачи для уравнения Бюргерса с нелинейными граничными условиями типа Неймана в вырождающихся угловых областях в пространствах Соболева.

Ключевые слова: уравнение Бюргерса, граничное условие типа Неймана, вырождающаяся угловая область, априорная оценка, разрешимость, единственность.

ON A NEUMANN-TYPE PROBLEM FOR THE BURGERS EQUATION IN A DEGENERATE CORNER DOMAIN

© 2022 М. Т. JENALIYEV, М. Г. YERGALIYEV,
А. А. ASSETOV, А. М. AYAZBAYEVA

ABSTRACT. Using a priori estimates, the Faedo—Galerkin method, and other methods of functional analysis, we prove the well-posedness of the boundary-value problem for the Burgers equation with nonlinear Neumann-type boundary conditions in degenerate corner domains in Sobolev spaces.

Keywords and phrases: Burgers equation, Neumann-type boundary condition, degenerate corner domain, a priori estimate, solvability, uniqueness.

AMS Subject Classification: 35K05, 35K55, 35R37

1. Введение. Изучение уравнения Бюргерса имеет длинную историю, часть из которой дана в работах [11] и [12], а также в монографиях [13] и [3].

В работах [11] и [12] в пространствах Соболева была установлена корректность однородной задачи Дирихле для уравнения Бюргерса. При этом область независимых переменных вырождалась по нелинейному закону.

В угловых областях задачи линейной теплопроводности с производными по времени в граничных условиях изучались в работе [7]. Была доказана корректность рассматриваемой задачи в весовых классах Гельдера. В дальнейшем эти результаты были развиты в [15–17].

Проникновение фронта смачивания в пористую среду является классической задачей со свободной границей. Исторически первым и наиболее известным примером является модель Грина—Ампта (Green—Ampt) для потока воды в почвах [14]. Существует огромное разнообразие ситуаций (химически реагирующие среды, деформируемые среды, эффекты капиллярности, массообмен, потоки смесей, среды со сложной структурой, загрязнение, рекультивация, заморозка грунта, производство композитных материалов, пивоварение и др.).

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № АР08855372, 2020–2022).

Как известно, подходящими моделями движения жидкости в пористых средах являются также нелинейные уравнения Бюргерса и их модификации [19, 20, 22–25].

Спектр применения краевых задач для уравнений параболического типа в области с границей, изменяющейся во времени, достаточно широк. Подобного рода задачи возникают: при изучении тепловых процессов в электрических контактах [5], процессов экологии и медицины [6], при решении некоторых задач гидромеханики [2], термомеханики при тепловом ударе [4] и так далее.

Обширная литература посвящена исследованию разрешимости линейных и нелинейных параболических уравнений в цилиндрических областях. Однако, что касается нелинейных граничных задач в вырождающихся нецилиндрических областях, то они изучены сравнительно мало.

Для угловых областей в лебеговых классах изучались линейные граничные задачи теплопроводности с однородными граничными условиями Дирихле и установлены теоремы об их разрешимости, сведением к сингулярным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода [1, 9].

В [10] были изучены различные случаи неоднородности типа Дирихле по границе. В этих случаях показано, что имеет место как единственная разрешимость, так и неединственная разрешимость для соответствующих граничных задач.

В данной работе в соболевских классах изучаются вопросы разрешимости граничной задачи для уравнения Бюргерса в угловой области с нелинейными граничными условиями типа Неймана. Рассматривается случай, когда одна часть границы является неподвижной, а вторая часть — подвижна.

В п. 2 дается постановка изучаемой граничной задачи, и сформулирован основной результат работы. Мы изучаем вопросы однозначной разрешимости двух вспомогательных граничных задач для уравнения Бюргерса в прямоугольной и непрямоугольной областях, которые используются при доказательстве основного результата работы. Первой вспомогательной задаче посвящены разделы 3–7, в которых методами априорных оценок и Фаэдо–Галеркина устанавливается ее корректность в классах Соболева. Корректность второй вспомогательной граничной задачи показана в разделе 8. В разделах 9–11 доказана теорема 1 — основной результат работы. Работу завершает краткое заключение.

2. Постановка задачи и основной результат. Пусть

$$Q_{xt} = \{x, t \mid 0 < x < kt, 0 < t < T < \infty, k > 0\}$$

— область, которая вырождается при $t = 0$, и $\Omega_t = (0, kt)$ является сечением области Q_{xt} для фиксированного значения переменной $t \in (0, T)$. В области Q_{xt} мы рассматриваем следующую граничную задачу для уравнения Бюргерса:

$$\partial_t u + u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = f, \quad (1)$$

$$\left[\frac{1}{3}(u)^2 - \nu \partial_x u \right] \Big|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{1}{3}(u)^2 - \nu \partial_x u \right] \Big|_{x=kt} = 0, \quad (2)$$

$$f \in L_2(Q_{xt}), \quad \nu = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Замечание 1. Считаем, что присутствие нелинейного слагаемого $u^2/3$ в граничных условиях (2) продиктовано только наличием конвективного составляющего в уравнении Бюргерса, которое обеспечивает нелинейный «массовый» перенос и обмен на границе. Мы исходили из того факта, что в уравнении (1) конвективный и диффузационный слагаемые можно записать в форме $\partial_x(u^2/2 - \nu \partial_x u)$. Исходя из этих соображений, условия (2) названы условиями типа Неймана.

Задача 1. При условиях (3) установить разрешимость граничной задачи (1)–(2).

Имеет место следующий основной результат.

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(Q_{xt})$ (3). Тогда граничная задача (1)–(2) имеет единственное решение

$$u \in H^{2,1}(Q_{xt}) \equiv L_2(0, T; H^2(\Omega_t)) \cap H^1(0, T; L_2(\Omega_t)).$$

Обозначения пространств в работе приняты как в [18]. Дальнейшее содержание работы посвящено доказательству теоремы 1.

3. Первая вспомогательная начально-гранична задача. В области

$$Q_{yt} = \{y, t \mid y \in (0, 1), t \in (0, T)\}$$

рассмотрим вспомогательную начально-граничную задачу:

$$\partial_t w + \alpha(t)w\partial_y w - \beta(t)\partial_y^2 w + \gamma(y, t)\partial_y w = g, \quad (4)$$

$$\left[\frac{\alpha(t)}{3}w^2 - \beta(t)\partial_y w \right] \Big|_{y=0} = 0, \quad \left[\frac{\alpha(t)}{3}w^2 - \beta(t)\partial_y w \right] \Big|_{y=1} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5)$$

$$w(y, 0) = 0, \quad 0 < y < 1. \quad (6)$$

где заданные непрерывные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(y, t)$ для всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют условиям

$$\alpha'(t) \leq 0, \quad \beta'(t) \leq 0, \quad \alpha_1 \leq \alpha(t) \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq \beta(t) \leq \beta_2, \quad |\gamma(y, t)| \leq \gamma_1, \quad |\partial_y \gamma(y, t)| \leq \gamma_1 \quad (7)$$

с заданными положительными постоянными α_i , β_i , $i = 1, 2$, γ_1 ,

$$\alpha(t), \quad \beta(t) \in C^1([0, T]), \quad \partial_y \gamma(y, t) \in C(\bar{Q}_{yt}). \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть $g \in L_2(Q_{yt})$ и выполнены условия (7)–(8). Тогда начально-гранична задача (4)–(6) имеет единственное решение

$$w \in H^{2,1}(Q_{yt}) \equiv L_2(0, T; H^2(0, 1)) \cap H^1(0, T; L_2(0, 1)).$$

4. Спектральная задача. Для применения метода Фаэдо—Галеркина необходимо решить спектральную задачу

$$-Y''(y) = \lambda^2 Y(y), \quad y \in (0, 1), \quad (9)$$

$$Y'(0) + \lambda^2 Y(0) = 0, \quad (10)$$

$$Y'(1) - \lambda^2 Y(1) = 0, \quad (11)$$

получаемую применением метода разделения переменных ($u(y, t) = F(t)Y(y)$) из следующей задачи:

$$\partial_t u - \partial_y^2 u = 0, \quad y \in (0, 1), \quad t \in (0, T),$$

$$\partial_t u - \partial_x u \Big|_{y=0} = 0, \quad \partial_t u + \partial_x u \Big|_{y=1} = 0,$$

$$u(y, 0) = u_0(y).$$

Общее решение уравнения (9) ищем в виде

$$Y(y) = C_1 \exp\{i\lambda y\} + C_2 \exp\{-i\lambda y\}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (12)$$

Удовлетворяя (12) граничным условиям (10)–(11), получаем

$$Y_{01}(y) = 1, \quad \lambda_{01} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\lambda_{01}}{2} = -\lambda_{01}, \quad (13)$$

$$Y_{2n-1}(y) = \cos \frac{\lambda_{2n-1}(1-2y)}{2}, \quad \lambda_{2n-1} = (2n-1)\pi + \varepsilon_{2n-1}, \quad \operatorname{tg} \frac{\lambda_{2n-1}}{2} = -\lambda_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

$$Y_{02}(y) = \sin \frac{\lambda_{02}(1-2y)}{2}, \quad \lambda_{02} \approx \frac{2\pi}{5}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\lambda_{02}}{2} = \lambda_{02}, \quad (15)$$

$$Y_{2n}(y) = \sin \frac{\lambda_{2n}(1-2y)}{2}, \quad \lambda_{2n} = 2n\pi + \varepsilon_{2n}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\lambda_{2n}}{2} = \lambda_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Нетрудно заметить, что решения уравнений

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda_{2n-1}}{2} = -\lambda_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\lambda_{2n}}{2} = \lambda_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

соответственно близки к точкам $(2n-1)\pi$ и $2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, и с ростом n приближаются сколь угодно близко справа к соответствующим указанным точкам $(2n-1)\pi$ и $2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\varepsilon_n \rightarrow 0+$ при $n \rightarrow \infty$. Если обозначим через $2x = (1-2y)\pi$, то получим: $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

По теореме Пэли—Винера (см. [21, гл. V, 86, пример]) система функций (14) и (16) полна в $L_2(0, 1)$, так как для нее мало отличающейся будет система функций:

$$\frac{\sqrt{2} \cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2} \sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2} \cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2} \sin 4x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \quad (19)$$

которая является полной в $L_2(-\pi/2, \pi/2)$. Для последней системы достаточно сделать замену $x_1 = x + \pi/2$. Получим систему синусов:

$$\frac{\sqrt{2} \sin x_1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2} \sin 2x_1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2} \sin 3x_1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2} \sin 4x_1}{\sqrt{\pi}}, \dots,$$

которая полна в $L_2(0, \pi)$. Отметим, что система функций (14), (16) не является ортогональной в $L_2(0, 1)$.

Замечание 2. Применимость теоремы Пэли—Винера следует из соотношений (M и θ — обозначения из работы [21]):

$$\lambda_1 \approx 3,673, \quad \lambda_1 - \pi \approx 0,533, \quad M\pi = |\lambda_1 - \pi| < 0,54 < \ln 2 \approx 0,693, \quad \theta = \exp\{M\pi\} - 1 < 1.$$

5. Постановка и решение приближенной задачи. Умножим уравнение (4) скалярно в $L_2(0, 1)$ на функцию $v \in H^1(0, 1)$. В результате с учетом начального (6) и граничных условий (5) будем иметь слабую постановку задачи (4)–(6):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \partial_t w v dy + \alpha(t) \int_0^1 w \partial_y w v dy + \beta(t) \int_0^1 \partial_y w \partial_y v dy - \int_0^1 \gamma(y, t) \partial_y w v dy + \\ - \frac{\alpha(t)}{3} w^2(1, t) v(1, t) + \frac{\alpha(t)}{3} w^2(0, t) v(0, t) = \int_0^1 g v dy, \quad \forall v \in H^1(0, 1), \quad (20) \\ w(y, 0) = 0, \quad y \in (0, 1). \end{aligned} \quad (21)$$

Введем приближенное решение

$$w_n(y, t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) Y_j(y), \quad w_n(y, 0) = \sum_{j=1}^n c_j(0) Y_j(y), \quad (22)$$

которое удовлетворим приближенному варианту задачи (20)–(21):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \partial_t w_n Y_j dy + \alpha(t) \int_0^1 w_n \partial_y w_n Y_j dy + \beta(t) \int_0^1 \partial_y w_n \partial_y Y_j dy - \int_0^1 \gamma(y, t) \partial_y w_n Y_j dy - \\ - \frac{\alpha(t)}{3} w_n^2(1, t) Y_j(1) + \frac{\alpha(t)}{3} w_n^2(0, t) Y_j(0) = \int_0^1 g Y_j dy, \quad (23) \\ w_n(y, 0) = 0, \quad y \in (0, 1), \end{aligned} \quad (24)$$

для всех $j = 0, 1, \dots, n$, и $t \in [0, T]$.

Лемма 1. Задача (23)–(24) имеет единственное решение $w_n(y, t)$.

Доказательство. В силу того, что система функций $Y_1(y), Y_2(y), Y_3(y), \dots$ является базисом в $L_2(0, 1)$, имеем

$$\det\{W_n\} = \|(Y_k(y), Y_j(y))\|_{k,j=1}^n \neq 0 \text{ для любого конечного } n;$$

W_n — матрица Грама, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L_2(0, 1)$, $A_n = (\partial_y Y_k(y), \partial_y Y_j(y))_{k,j=1}^n$,

$$w_n^2(1, t) Y_j(1) - w_n^2(0, t) Y_j(0) = \left[\sum_{k=1}^n c_k(t) Y_k(1) \right]^2 Y_j(1) - \left[\sum_{k=1}^n c_k(t) Y_k(0) \right]^2 Y_j(0).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \{g_0(t), \dots, g_n(t)\}, & P_n(t) &= \{p_0(t), \dots, p_n(t)\}, \\ H_n(t) &= \{h_0(t), \dots, h_n(t)\}, & C_n(t) &= \{c_1(t), \dots, c_n(t)\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_j(t) &= \int_0^1 g Y_j(y) dy, & p_j(t) &= -\alpha(t) \int_0^1 w_n \partial_y w_n Y_j(y) dy - \int_0^1 \gamma(y, t) \partial_y w_n(y, t) Y_j(y) dy, \\ h_j(t) &= \frac{\alpha(t)}{3} \left[\sum_{k=1}^n c_k(t) Y_k(1) \right]^2 Y_j(1) - \left[\sum_{k=1}^n c_k(t) Y_k(0) \right]^2 Y_j(0), \end{aligned}$$

для всех $j = 0, 1, \dots, n$. Задача (23)–(24) эквивалентна следующей задаче Коши для конечной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$C'_n(t) = W_n^{-1}[-\beta(t) A_n C_n(t) + P_n(t) + H_n(t) + G_n(t)], \quad C_n(0) = 0. \quad (25)$$

Заметим, что функции $p_j(t)$, $h_j(t)$ хорошо определены, а функция $g_j(t)$ интегрируема в квадрате (в силу $g \in L_2(Q_{yt})$). Поэтому задача Коши (25) однозначно разрешима на некотором интервале $[0, T']$, где $T' \leq T$. Однако, согласно устанавливаемым далее априорным оценкам, получаем, что это решение $C_n(t)$ продолжается до конечного времени T .

Таким образом, находим функции $C_n(t) = \{c_j(t), j = 0, 1, \dots, n\}$ как решение задачи Коши (25) для каждого фиксированного конечного n , а вместе с ними и единственное приближенное решение $w_n(y, t)$ задачи (23)–(24). Лемма 1 доказана. \square

6. Априорные оценки.

Лемма 2. Существует такая положительная не зависящая от n постоянная K_1 , что для всех $t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\|w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \beta_1 \int_0^t \|\partial_y w_n(y, \tau)\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau \leq K_1. \quad (26)$$

Доказательство. Умножая (23) на $c_j(t)$, суммируя по j от 1 до n и используя равенство

$$\int_0^1 w_n(y, t) \partial_y w_n(y, t) w_n(y, t) dy = \frac{1}{3} w_n^3(1, t) - \frac{1}{3} w_n^3(0, t),$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |w_n(y, t)|^2 dy + \beta(t) \int_0^1 |\partial_y w_n(y, t)|^2 dy &= \\ &= - \int_0^1 \gamma(y, t) \partial_y w_n(y, t) w_n(y, t) dy + \int_0^1 g(y, t) w_n(y, t) dy. \quad (27) \end{aligned}$$

Интегрируя (27) по t от 0 до t и используя ε -неравенство Коши¹, получим

$$-\int_0^1 \gamma(y, t) \partial_y w_n(y, t) w_n(y, t) dy \leq \frac{\beta_1}{2} \|\partial_y w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \frac{\gamma_1^2}{2\beta_1} \|w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2,$$

¹Т.е. неравенство

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

$$\int_0^1 g(y, t) w_n(y, t) dy \leq \frac{1}{2} \|g(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \|w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2;$$

таким образом,

$$\begin{aligned} \|w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \beta_1 \int_0^t \|\partial_y w_n(y, \tau)\|_{L_1(0,1)}^2 d\tau &\leq \\ &\leq \left(\frac{\gamma_1^2}{\beta_1} + 1 \right) \int_0^t \|w_n(y, \tau)\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^T \|g(y, \tau)\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (28) следует

$$\|w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \left(\frac{\gamma_1^2}{\beta_1} + 1 \right) \int_0^t \|w_n(y, \tau)\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^T \|g(y, \tau)\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau.$$

Применяя неравенство Гронуолла, получим оценку для $\|w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2$. Используя эту оценку в (28), устанавливаем требуемую оценку леммы 2. \square

Пользуясь вложением $H^1(0, 1) \hookrightarrow C([0, 1])$, из леммы 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K'_1 , что для всех $t \in [0, T]$ имеет место неравенство

$$\int_0^t |w_n(0, \tau)|^2 d\tau + \int_0^t |w_n(1, \tau)|^2 d\tau \leq 2B \int_0^t \|w_n(y, t)\|_{H^1(0,1)}^2 d\tau \leq K'_1, \quad (29)$$

где B — постоянная вложения $H^1(0, 1) \hookrightarrow C([0, 1])$.

Лемма 3. Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K_2 , что для всех $t \in (0, T]$ имеет место неравенство

$$\|\partial_y w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \beta_1 \int_0^t \|\partial_y^2 w_n(y, \tau)\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau \leq K_2. \quad (30)$$

Доказательство. Учитывая равенство

$$\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^2 Y_j(y) = - \sum_{j=1}^n c_j \partial_y^2 Y_j(y) = - \partial_y^2 w_n(y, t),$$

которое следует из (9) и (22), умножая равенство (23) на $c_j \lambda_j^2$ и суммируя по j от 1 до n , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_y w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \beta(t) \|\partial_y^2 w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 &= \\ &= \alpha(t)(w_n(y, t) \partial_y w_n(y, t), \partial_y^2 w_n(y, t)) + (\gamma(y, t) \partial_y w_n(y, t), \partial_y^2 w_n(y, t)) - \\ &\quad - (g(y, t), \partial_y^2 w_n(y, t)) + \partial_t w_n(y, t) \partial_y w_n(y, t)|_{y=0}^{y=1} = \\ &= \alpha(t)(w_n(y, t) \partial_y w_n(y, t), \partial_y^2 w_n(y, t)) + (\gamma(y, t) \partial_y w_n(y, t), \partial_y^2 w_n(y, t)) - \\ &\quad - (g(y, t), \partial_y^2 w_n(y, t)) + \frac{\alpha(t)}{9\beta(t)} \partial_t [w_n(y, t)]^3|_{y=0}^{y=1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\alpha(t)}{9\beta(t)} \partial_t [w_n(1,t)]^3 dt &= \frac{\alpha(t)}{9\beta(t)} [w_n(1,t)]^3 - \int_0^t \frac{\alpha'(t)\beta(t) - \alpha(t)\beta'(t)}{9[\beta(t)]^2} [w_n(1,t)]^3 dt \leq \\ &\leq \frac{\alpha_2}{9\beta_1} |w_n(1,t)|^3 + C_1 \int_0^t |w_n(1,t)|^3 dt, \quad \text{где } 9C_1\beta_1^2 = \max_{0 \leq t \leq T} |\alpha'(t)\beta(t) - \alpha(t)\beta'(t)|. \end{aligned}$$

(аналогичные соотношения верны и для слагаемого с $w_n(0,t)$), установим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2}{9\beta_1} |w_n(1,t)|^3 &\leq \frac{\alpha_2}{9\beta_1} \|w_n(y,t)\|_{L_\infty(0,1)}^3 \leq \frac{\alpha_2}{9\beta_1} \|w_n(y,t)\|_{H^1(0,1)}^{3/2} \|w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^{3/2} = \\ &= \frac{\alpha_2}{9\beta_1} \|w_n(y,t)\|_{H^1(0,1)}^{3/2} \|w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^{1/2} \|w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}. \end{aligned}$$

В предыдущем соотношении мы использовали интерполяционное неравенство¹. Теперь, применяя неравенство Юнга, имеем

$$|AB| = \left| (a^{1/p} A) \left(a^{1/q} \frac{B}{a} \right) \right| \leq \frac{a}{p} |A|^p + \frac{a}{qa^q} |B|^q; \quad (32)$$

здесь $p^{-1} + q^{-1} = 1$ и

$$A = \|w_n(y,t)\|_{H^1(0,1)}^{3/2}, \quad B = \frac{\alpha_2}{9\beta_1} \|w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)} \|w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^{1/2}, \quad a = \frac{1}{6}, \quad p = \frac{4}{3}, \quad q = 4.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2}{9\beta_1} |w_n(1,t)|^3 &\leq \frac{1}{8} \|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \left[\frac{1}{8} + \frac{2\alpha_2^4}{3^5 \beta_1^4} \|w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^4 \right] \|w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{8} \|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^2 + D_1, \quad (33) \end{aligned}$$

где постоянная D_1 определяется согласно оценкам леммы 2 и следствия 1. Аналогично предыдущему получаем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2}{9\beta_1} |w_n(0,t)|^3 &\leq \frac{1}{8} \|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \left[\frac{1}{8} + \frac{2\alpha_2^4}{3^5 \beta_1^4} \|w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^4 \right] \|w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{8} \|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^2 + D_0, \quad (34) \end{aligned}$$

где постоянная D_0 определяется согласно оценкам леммы 2 и следствия 1.

Рассмотрим оценки нелинейных слагаемых из (31). Прежде всего, имеем

$$\begin{aligned} |(w_n(y,t) \partial_y w_n(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t))| &\leq \|w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)} \|\partial_y^2 w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)} \|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)} \leq \\ &\leq \|w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)} \|\partial_y w_n(y,t)\|_{H^1(0,1)} \|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)}. \quad (35) \end{aligned}$$

Далее, учитывая интерполяционное неравенство

$$\alpha_2 \|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)} \leq C \|\partial_y w_n(y,t)\|_{H^1(0,1)}^{1/2} \|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^{1/2} \quad \forall \partial_y w_n(y,t) \in H^1(0,1)$$

(см. [8, Theorems 5.8–5.9, p. 140–141]), из (35) получим

$$\begin{aligned} \alpha_2 |(w_n(y,t) \partial_y w_n(y,t), \partial_y^2 w_n(y,t))| &\leq \\ &\leq C \|w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)} \|\partial_y w_n(y,t)\|_{H^1(0,1)}^{3/2} \|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\beta_1}{8} \|\partial_y^2 w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \left[\frac{\beta_1}{8} + C_2 \|w_n(y,t)\|_{L_4(0,1)}^4 \right] \|\partial_y w_n(y,t)\|_{L_2(0,1)}^2. \quad (36) \end{aligned}$$

¹ См. [8, Theorems 5.8–5.9, p. 140–141]

Здесь мы воспользовались неравенством Юнга (32), где

$$A = \|\partial_y \tilde{w}_n(y, t)\|_{H^1(0,1)}^{3/2}, \quad B = C \|\tilde{w}_n(y, t)\|_{L_4(0,1)} \|\partial_y \tilde{w}_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^{1/2}, \quad a = \frac{\beta_1}{6}, \quad p = \frac{4}{3}, \quad q = 4.$$

Далее, для двух последних слагаемых из (31) будем иметь

$$\gamma_1 |(\partial_y w_n(y, t), \partial_y^2 w_n(y, t))| \leq \frac{\beta_1}{8} \|\partial_y^2 w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + C_3 \|\partial_y w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2, \quad (37)$$

$$|(g(y, t), \partial_y^2 w_n(y, t))| \leq \frac{\beta_1}{4} \|\partial_y^2 w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + C_4 \|g(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2. \quad (38)$$

С учетом неравенств (33)–(38), интегрируя (31) от 0 до t , получаем

$$\begin{aligned} & \|\partial_y w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \beta_1 \int_0^t \|\partial_y^2 w_n(y, \tau)\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau \leq A_4 \|g(y, t)\|_{L_2(Q)}^2 + \\ & + \int_0^t A_5(\tau) \|\partial_y w_n(y, \tau)\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau + 2C_0 \int_0^t |w_n(0, t)|^3 dt + 2C_1 \int_0^t |w_n(1, t)|^3 dt + 2(D_0 + D_1), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$A_4 = 2C_4, \quad A_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{\beta_1}{4} + 2C_2 \|w_n(y, t)\|_{L_4(0,1)}^4 + 2C_3.$$

Оценим два последних интегральных слагаемых из (39). Используя (33)–(34), имеем

$$\begin{aligned} 2C_0 \int_0^t |w_n(0, t)|^3 dt & \leq \frac{C_0}{4} \int_0^t \|\partial_y w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 dt + 2D_0 T, \\ 2C_1 \int_0^t |w_n(0, t)|^3 dt & \leq \frac{C_1}{4} \int_0^t \|\partial_y w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 dt + 2D_1 T, \end{aligned}$$

Таким образом, (39) принимает вид

$$\begin{aligned} & \|\partial_y w_n(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \beta_1 \int_0^t \|\partial_y^2 w_n(y, \tau)\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau \leq A_4 \|g(y, t)\|_{L_2(Q)}^2 + \\ & + \int_0^t \left[A_5(\tau) + \frac{C_0 + C_1}{4} \right] \|\partial_y w_n(y, \tau)\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau + 2(D_0 + D_1)(1 + T), \end{aligned} \quad (40)$$

Из неравенства (40) аналогично доказательству леммы 2, получаем искомую оценку (30). Лемма 3 доказана. \square

Лемма 4. Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K_3 , что для всех $t \in (0, T]$ имеет место неравенство

$$\|\partial_t w_n(y, t)\|_{L_2(Q_{yt})}^2 \leq K_3. \quad (41)$$

Доказательство. Запишем уравнение (4) для приближенного решения $w_n(y, t)$:

$$\partial_t w_n + \alpha(t) w_n \partial_y w_n - \beta(t) \partial_y^2 w_n + \gamma(y, t) \partial_y w_n = g. \quad (42)$$

Из уравнения (42) получаем

$$\|\partial_t w_n\|_{L_2(Q_{yt})} \leq \alpha_2 \|w_n \partial_y w_n\|_{L_2(Q_{yt})} + \beta_2 \|\partial_y^2 w_n\|_{L_2(Q_{yt})} + \gamma_1 \|\partial_y w_n\|_{L_2(Q_{yt})} + \|g\|_{L_2(Q_{yt})}. \quad (43)$$

Согласно вложению $H^1(0, 1) \hookrightarrow L_\infty(0, 1)$ имеет место неравенство

$$\|w_n\|_{L_\infty(0,1)} \leq B \|w_n\|_{H^1(0,1)}.$$

Учитывая леммы 2 и 3, получаем

$$\begin{aligned} \|w_n \partial_y w_n\|_{L_2(Q_{yt})}^2 &\leq \int_0^T \|w_n(y, t)\|_{L_\infty(0, 1)}^2 \|\partial_y w_n(y, t)\|_{L_2(0, 1)}^2 dt \leq \\ &\leq B \|\partial_y w_n(y, t)\|_{L_\infty(0, T; L_2(0, 1))}^2 \int_0^T \|w_n(y, t)\|_{H^1(0, 1)}^2 dt \leq BK_2 K_1 (1 + T), \end{aligned} \quad (44)$$

где B — постоянная вложения $H^1(0, 1) \hookrightarrow L_\infty(0, 1)$, K_1 и K_2 — постоянные из лемм 2 и 3 соответственно. Теперь оценка (41) следует из (43), (44) и лемм 2 и 3. Лемма 4 доказана. \square

7. Однозначная разрешимость первой вспомогательной задачи (4)–(6). Леммы 2–4 показывают, что последовательность галеркинских приближений $\{w_n(y, t), n = 1, 2, 3, \dots\}$ ограничена в пространстве $L_\infty(0, T; H^1(0, 1)) \cap L_2(0, T; H^2(0, 1))$, а последовательность $\{\partial_t w_n(y, t), n = 1, 2, 3, \dots\}$ — в $L_2(0, T; L_2(0, 1))$.

Таким образом, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность (для которой сохраним прежнее обозначение индексов n):

$$w_n(y, t) \rightarrow w(y, t) \text{ слабо в } L_2(0, T; H^2(0, 1)) \cap H^1(0, T; L_2(0, 1)), \quad (45)$$

$$w_n(y, t) \rightarrow w(y, t) \text{ сильно в } L_2(0, T; H^1(0, 1)) \text{ и п.в. в } Q_{yt}, \quad (46)$$

Лемма 5. Пусть выполнены условия (7)–(8) и $g \in L_2(Q_{yt})$. Тогда начально-граничая задача (4)–(6) имеет слабое решение в пространстве $H^{2,1}(Q_{yt})$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{D}((0, T))$ (здесь $\mathcal{D}((0, T))$ — класс бесконечно дифференцируемых финитных функций). Введем обозначение $v_j(y, t) = \varphi(t)Y_j(y)$, где $Y_j(y) \in H^1(0, 1)$. Умножая интегральное тождество (23) на функцию $\varphi(t) \in \mathcal{D}((0, T))$ и интегрируя полученный результат по t от 0 до T , получим

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^1 [\partial_t w_n + \alpha(t)w_n \partial_y w_n - \beta(t)\partial_y^2 w_n + \gamma(y, t)\partial_y w_n] v_j dy dt + \\ &+ \int_0^T \left[\beta(t)\partial_y w_n(1, t) - \frac{\alpha(t)}{3} w_n^2(1, t) \right] v_j(1, t) dt + \int_0^T \left[-\beta(t)\partial_y w_n(0, t) + \frac{\alpha(t)}{3} w_n^2(0, t) \right] v_j(0, t) dt = \\ &= \int_0^T \int_0^1 g v_j dy dt, \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{D}((0, T)), \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (47)$$

Так как $\mathcal{D}((0, T); H^1(0, 1))$ плотно в $L_2(0, T; H^1(0, 1))$, интегральное тождество (47) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^1 [\partial_t w_n + \alpha(t)w_n \partial_y w_n - \beta(t)\partial_y^2 w_n + \gamma(y, t)\partial_y w_n] v dy dt + \\ &+ \int_0^T \left[\beta(t)\partial_y w_n(1, t) - \frac{\alpha(t)}{3} w_n^2(1, t) \right] v(1, t) dt + \int_0^T \left[-\beta(t)\partial_y w_n(0, t) + \frac{\alpha(t)}{3} w_n^2(0, t) \right] v(0, t) dt = \\ &= \int_0^T \int_0^1 g v dy dt, \quad \forall v(y, t) \in L_2(0, T; H^1(0, 1)). \end{aligned} \quad (48)$$

В интегральном тождестве (48) перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. В выражениях, соответствующих линейным слагаемым уравнения (4) и граничных условий (5), переход к пределам осуществляется согласно соотношениям (45). Для нелинейных слагаемых имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \alpha(t) w_n(y, t) \partial_y w_n(y, t) v(y, t) dy dt &= \int_0^T \alpha(t) \int_0^1 [w_n(y, t) - w(y, t)] \partial_y w_n(y, t) v(y, t) dx dt + \\ &+ \int_0^T \alpha(t) \int_0^1 w(y, t) \partial_y w_n(y, t) v(y, t) dx dt \rightarrow \int_0^T \alpha(t) \int_0^1 w(y, t) \partial_y w(y, t) v(y, t) dx dt, \quad (49) \end{aligned}$$

так как согласно (46) и (45) имеет место предельное соотношение

$$\int_0^T \alpha(t) \int_0^1 [w_n(y, t) - w(y, t)] \partial_y w_n(y, t) v(y, t) dx dt \rightarrow 0.$$

Далее, согласно (48) и (46) аналогично предыдущему будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^T w_n(1, t) w_n(1, t) v(1, t) dt &= \int_0^T [w_n(1, t) - w(1, t)] w_n(1, t) v(1, t) dt + \\ &+ \int_0^T w(1, t) w_n(1, t) v(1, t) dt \rightarrow \int_0^T w^2(1, t) v(1, t) dt, \quad (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T w_n(0, t) w_n(0, t) v(0, t) dt &= \int_0^T [w_n(0, t) - w(0, t)] w_n(0, t) v(0, t) dt + \\ &+ \int_0^T w(0, t) w_n(0, t) v(0, t) dt \rightarrow \int_0^T w^2(0, t) v(0, t) dt. \quad (51) \end{aligned}$$

Итак, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в интегральном тождестве (48) с учетом предельных соотношений (49)–(51), а также в начальном условии (22), получим

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 [\partial_t w + \alpha(t) w \partial_y w - \beta(t) \partial_y^2 w + \gamma(y, t) \partial_y w] v dy dt + \\ + \int_0^T \left[\beta(t) \partial_y w(1, t) - \frac{\alpha(t)}{3} w^2(1, t) \right] v(1, t) dt + \int_0^T \left[-\beta(t) \partial_y w(0, t) + \frac{\alpha(t)}{3} w^2(0, t) \right] v(0, t) dt = \\ = \int_0^T \int_0^1 g v dy dt, \quad \forall v(y, t) \in L_2(0, T; H^1(0, 1)). \quad (52) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 w(y, 0) \psi(y) dy = 0, \quad \forall \psi \in L_2(0, 1). \quad (53)$$

Заметим, что интегральное тождество (52) справедливо и для любых тестовых функций $v(y, t) \in L_2(0, T; H_0^1(0, 1)) \subset L_2(0, T; H^1(0, 1))$, т.е. имеем

$$\int_0^T \int_0^1 [\partial_t w + \alpha(t)w\partial_y w - \beta(t)\partial_y^2 w + \gamma(y, t)\partial_y w - g]v dy dt = 0, \quad \forall v(y, t) \in L_2(0, T; H_0^1(0, 1)). \quad (54)$$

Далее, возвращаясь к (52) и учитывая, что следы $v(1, t)$ и $v(0, t)$ из $L_2(0, T)$ тестовых функций $v \in L_2(0, T; H^1(0, 1))$ независимы друг от друга и произвольны, в этом случае из (52) следуют тождества

$$\int_0^T \left[\beta(t)\partial_y w(1, t) - \frac{\alpha(t)}{3}w^2(1, t) \right] \psi_1(t) dt = 0, \quad \forall \psi_1(t) \in L_2(0, T), \quad (55)$$

$$\int_0^T \left[-\beta(t)\partial_y w(0, t) + \frac{\alpha(t)}{3}w^2(0, t) \right] \psi_0(t) dt = 0, \quad \forall \psi_0(t) \in L_2(0, T), \quad (56)$$

т.е. подынтегральные выражения в квадратных скобках из (54)–(56) определяют нулевые функционалы над пространствами $L_2(0, T; H_0^1(0, 1))$ и $L_2(0, T)$, и принадлежат пространствам $0 \in L_2(0, T; H^{-1}(0, 1)) \subset \mathcal{D}'(Q_{yt})$ и $0 \in L_2(0, T) \subset \mathcal{D}'((0, T))$. Таким образом, из (54)–(56) получаем, что слабая предельная функция $w(y, t)$ удовлетворяет уравнению (4) и граничным условиям (5), а из (53) следует, что она удовлетворяет начальному условию (6). Этим завершается доказательство леммы 5. \square

Лемма 6. При условиях леммы 5 решение $w \in H^{2,1}(Q_{yt})$ начально-граничной задачи (4)–(6) единственno.

Доказательство. Пусть начально-граничная задача (4)–(6) имеет два различных решения $w^{(1)}(y, t)$ и $w^{(2)}(y, t)$. Тогда их разность $w(y, t) = w^{(1)}(y, t) - w^{(2)}(y, t)$ будет удовлетворять следующей однородной задаче:

$$\partial_t w + \alpha(t)w\partial_y w^{(1)} + \alpha(t)w^{(2)}\partial_y w - \beta(t)\partial_y^2 w = 0, \quad (57)$$

$$\left[\frac{\alpha(t)}{3}w(w^{(1)} + w^{(2)}) - \beta(t)\partial_y w \right] \Big|_{y=0} = 0, \quad (58)$$

$$\left[\frac{\alpha(t)}{3}w(w^{(1)} + w^{(2)}) - \beta(t)\partial_y w \right] \Big|_{y=1} = 0. \quad (59)$$

Согласно леммам 2 и 3 имеем

$$w^{(i)}(y, t) \in L_\infty(0, T; H^1(0, 1)) \cap L_2(0, T; H^2(0, 1)), \quad i = 1, 2. \quad (60)$$

Умножая уравнение (57) на функцию $w(y, t)$ скалярно в $L_2(0, 1)$ и учитывая (58)–(60), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(y, t)\|_{L_2(0, 1)}^2 + \beta_1 \|\partial_y w(y, t)\|_{L_2(0, 1)}^2 &\leq \frac{\alpha(t)}{3} |w(1, t)|^2 |[w^{(1)}(1, t) + w^{(2)}(1, t)]| + \\ &+ \frac{\alpha(t)}{3} |w(0, t)|^2 |[w^{(1)}(0, t) + w^{(2)}(0, t)]| + \alpha(t) \left| \int_0^1 [w^2 \partial_y w^{(1)} + w^{(2)} w \partial_y w] dy \right|. \end{aligned} \quad (61)$$

Оценим правую часть (61). Согласно (60) лемме 2 имеем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(t)}{3} |w^{(1)}(1, t) + w^{(2)}(1, t)| |w(1, t)|^2 &\leq \\ &\leq \frac{\alpha_2}{3} [|w^{(1)}(1, t)|_{L_\infty(0, T)} + |w^{(2)}(1, t)|_{L_\infty(0, T)}] |w(1, t)|^2 \leq C_1 |w(1, t)|^2, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(t)}{3}[w^{(1)}(0, t) + w^{(2)}(0, t)]|w(0, t)|^2 &\leqslant \\ &\leqslant \frac{\alpha_2}{3}[\|w^{(1)}(0, t)\|_{L^\infty(0, T)} + \|w^{(2)}(0, t)\|_{L^\infty(0, T)}]|w(0, t)|^2 \leqslant C_2|w(0, t)|^2, \quad (63) \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \alpha(t) \int_0^1 [w^2 \partial_y w^{(1)} + w^{(2)} w \partial_y w] dy &= \alpha(t)[|w(1, t)|^2 w^{(1)}(1, t) - |w(0, t)|^2 w^{(1)}(0, t)] + \\ &+ \alpha(t) \int_0^1 [-2w^{(1)} w \partial_y w + w^{(2)} w \partial_y w] dy \leqslant C_3|w(1, t)|^2 + C_4|w(0, t)|^2 + \\ &+ \frac{\alpha_2^2}{\beta_1} [2\|w^{(1)}\|_{L^\infty(Q)} + \|w^{(2)}\|_{L^\infty(Q)}]^2 \|w\|_{L_2(0,1)}^2 + \frac{\beta_1}{4} \|\partial_y w\|_{L_2(0,1)}^2 \leqslant \\ &\leqslant C_3|w(1, t)|^2 + C_4|w(0, t)|^2 + C_5\|w(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \frac{\beta_1}{4} \|\partial_y w\|_{L_2(0,1)}^2. \quad (64) \end{aligned}$$

Справедливы оценки

$$\begin{aligned} (C_1 + C_3)|w(1, t)|^2 &\leqslant (C_1 + C_3)\|w(y, t)\|_{L_\infty(0,1)}^2 \leqslant \\ &\leqslant (C_1 + C_3)B\|w(y, t)\|_{H^1(0,1)}\|w(y, t)\|_{L_2(0,1)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\beta_1}{8}\|\partial_y w(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \left[\frac{\beta_1}{8} + \frac{2(C_1 + C_3)^2 B^2}{\beta_1} \right] \|w(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2, \quad (65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (C_2 + C_4)|w(0, t)|^2 &\leqslant (C_2 + C_4)\|w(y, t)\|_{L_\infty(0,1)}^2 \leqslant \\ &\leqslant (C_2 + C_4)B\|w(y, t)\|_{H^1(0,1)}\|w(y, t)\|_{L_2(0,1)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\beta_1}{8}\|\partial_y w(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \left[\frac{\beta_1}{8} + \frac{2(C_2 + C_4)^2 B^2}{\beta_1} \right] \|w(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2, \quad (66) \end{aligned}$$

где B — норма оператора вложения $H^1(0, 1) \hookrightarrow L_\infty(0, 1)$.

На основе соотношений (61)–(66) устанавливаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 + \beta_1 \|\partial_y w(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 &\leqslant \\ &\leqslant \left[\frac{\beta_1}{2} + \frac{4B^2}{\beta_1} ((C_1 + C_3)^2 + (C_2 + C_4)^2) + 2C_5 \right] \|w(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2, \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя неравенство Гронуолла, получаем

$$\|w(y, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \equiv 0, \quad \forall t \in (0, T].$$

Это означает, что $w^{(1)}(y, t) \equiv w^{(2)}(y, t)$ в $L_2(Q_{yt})$, т.е. решение начально-граничной задачи (4)–(6) единственno. Лемма 6 доказана. \square

Таким образом, из лемм 5 и 6 вытекает справедливость теоремы 2. Теорема 2 будет также использована в последующих разделах для решения задачи 1, т.е. при доказательстве теоремы 1.

8. Вторая вспомогательная начально-граничнаa задача. В области

$$Q_{xt} = \{x, t \mid 0 < x < t_0 + kt, 0 < t < T, t_0 > 0\}$$

рассмотрим начально-граничную задачу

$$\partial_t u + u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = f, \quad (67)$$

$$\left[\frac{1}{3}(u)^2 - \nu \partial_x u \right] \Big|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{1}{3}(u)^2 - \nu \partial_x u \right] \Big|_{x=t_0+kt} = 0 \quad (68)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, t_0), \quad (69)$$

где ν, k — заданные положительные постоянные, функция $f(x, t)$ удовлетворяет условию

$$f \in L_2(Q_{xt}). \quad (70)$$

Задача 2. Доказать однозначную разрешимость начально-граничной задачи (67)–(69) при условии (70).

С помощью обратимого преобразования независимых переменных

$$y = y(x, t) = \frac{x}{t_0 + kt}, \quad t = t; x = x(y, t) = y(t_0 + kt), \quad t = t$$

перейдем от $\{x, t\}$ к $\{y, t\}$. При этом область Q_{xt} преобразуется в прямоугольную область

$$Q_{yt} = \{y, t : 0 < y < 1, 0 < t < T\}.$$

Задача 2 принимает следующий вид:

$$\partial_t w + \frac{1}{t_0 + kt} w \partial_y w - \frac{\nu}{(t_0 + kt)^2} \partial_y^2 w - \frac{ky}{t_0 + kt} \partial_y w = g(y, t), \quad (71)$$

$$\left[\frac{1}{3}(w)^2 - \frac{\nu}{t_0 + kt} \partial_y w \right] \Big|_{y=0} = 0, \quad \left[\frac{1}{3}(w)^2 - \frac{\nu}{t_0 + kt} \partial_y w \right] \Big|_{y=1} = 0, \quad (72)$$

с начальным условием

$$w(y, 0) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (73)$$

где $w(y, t) = u(x(y, t), t)$, $g(y, t) = f(x(y, t), t)$,

Начально-граничая задача (71)–(73) является частным случаем первой вспомогательной задачи (4)–(6), где функции

$$\alpha(t) = \frac{1}{t_0 + kt}, \quad \beta(t) = \frac{\nu}{(t_0 + kt)^2}, \quad \gamma(y, t) = \frac{ky}{t_0 + kt},$$

удовлетворяют условиям (7)–(8). Поэтому, как следствие теоремы 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (70) и $g \in L_2(Q_{yt})$. Тогда начально-граничная задача (71)–(73) однозначно разрешима в пространстве $w(y, t) \in H^{2,1}(Q_{yt})$.

Далее, учитывая соответствие пространств в областях Q_{xt} и Q_{yt} , т.е.

$$\begin{aligned} g \in L_2(Q_{yt}) &\iff f \in L_2(Q_{xt}), \\ w \in H^{2,1}(Q_{yt}) &= L_2(0, T; H^2(0, 1)) \cap H^1(0, T; L_2(0, 1)) \iff u \in H^{2,1}(Q_{xt}) = \\ &= L_2(0, T; H^2(0, t_0 + kt)) \cap H^1(0, T; L_2(0, t_0 + kt)), \end{aligned}$$

устанавливаем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (70) и $f \in L_2(Q_{xt})$. Тогда начально-граничная задача (67)–(69) однозначно разрешима в пространстве $u(x, t) \in H^{2,1}(Q_{xt})$.

9. К решению задачи 1. Области

$$Q_{xt} = \{x, t \mid 0 < x < kt, 0 < t < T\}$$

из раздела 2 поставим в соответствие семейство областей

$$Q_{xt}^n = \{x, t \mid 0 < x < kt, 1/n < t < T\}, \quad n \in \mathbb{N}^* \equiv \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_1, 1/n_1 < T\},$$

представляющих собой трапеции, и $\Omega_t = (0, kt)$ является сечением Q_{xt}^n для заданного значения переменной $t \in (1/n, T)$. Заметим, что в точке $t = 1/n$ область Q_{xt}^n не вырождается, при этом, между исходной областью Q_{xt} и областями Q_{xt}^n имеют место строгие вложения

$$Q_{xt}^n \subset Q_{xt}^{n+1} \subset \dots \subset Q_{xt};$$

очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{xt}^n = Q_{xt}.$$

На трапеции Q_{xt}^n мы рассмотрим следующую начально-граничную задачу для уравнения Бюргерса относительно функции $u_n(x, t)$:

$$\partial_t u_n + u_n \partial_x u_n - \nu \partial_x^2 u_n = f_n, \quad (74)$$

$$\left[\frac{1}{3}(u_n)^2 - \nu \partial_x u_n \right] \Big|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{1}{3}(u_n)^2 - \nu \partial_x u_n \right] \Big|_{x=kt} = 0 \quad (75)$$

с начальным условием

$$u_n(x, 1/n) = 0, \quad x \in \Omega_{1/n} = (0, k/n). \quad (76)$$

Для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}^*$ начально-граничая задача (74)–(76) является задачей вида (67)–(69) при условиях (70), для которой справедлива теорема 4. Из теоремы 4 получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $f_n \in L_2(Q_{xt}^n)$. Тогда для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}^*$ начально-граничая задача (74)–(76) однозначно разрешима в пространстве $u_n(x, t) \in H^{2,1}(Q_{xt}^n)$.*

Для продолжения доказательства теоремы 1 понадобится следующее утверждение

Теорема 6. *При условиях теорем 1 и 5 справедлива оценка*

$$\|u_n(x, t)\|_{H^{2,1}(Q_{xt}^n)}^2 \leq C \|f_n(x, t)\|_{L_2(Q_{xt}^n)}^2. \quad (77)$$

Для доказательства теоремы 6 установим следующие три леммы.

Лемма 7. *Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K_1 , что для всех $t \in [1/n, T]$ имеет место оценка*

$$\|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \nu \int_{1/n}^t \|\partial_x u_n(x, \tau)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 d\tau \leq K_1 \|f_n(x, t)\|_{L_2(Q_{xt}^n)}^2. \quad (78)$$

Доказательство. Умножая (74) на $u_n(x, t)$ скалярно в $L_2(\Omega_t)$ и используя равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{kt} u_n(x, t) \partial_x u_n(x, t) u_n(x, t) dx &= \frac{1}{3} u_n^3(kt, t) - \frac{1}{3} u_n^3(0, t), \\ \frac{d}{dt} \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 &= 2 \int_0^{kt} \partial_t u_n(x, t) u_n(x, t) dx + k |u_n(kt, t)|^2, \end{aligned}$$

получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{kt} |u_n(x, t)|^2 dx + \nu \int_0^{kt} |\partial_x u_n(x, t)|^2 dx = \int_0^{kt} f_n(x, t) u_n(x, t) dx + \frac{k}{2} |u_n(kt, t)|^2. \quad (79)$$

Установим оценки для двух последних слагаемых из (79). Имеем

$$\int_0^{kt} f_n(x, t) u_n(x, t) dx \leq \frac{1}{2} \|f_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \frac{1}{2} \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2, \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} |u_n(kt, t)|^2 &\leq \frac{k}{2} \|u_n(x, t)\|_{L_\infty(\Omega_t)}^2 \leq \frac{kK^2}{2} \|u_n(x, t)\|_{H^1(\Omega_t)} \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)} \leq \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \left[\frac{\nu}{2} + \frac{k^2 K^4}{8\nu} \right] \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2, \end{aligned} \quad (81)$$

где K — величина из интерполяционного неравенства. Из (79)–(81) следует

$$\frac{d}{dt} \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \nu \|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq \|f_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + K_0 \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2,$$

где

$$K_0 = \nu + \frac{k^2 B^2}{4\nu} + 1.$$

Отсюда получаем два неравенства

$$\frac{d}{dt} \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq \|f_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + K_0 \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2, \quad \|u_n(x, 1/n)\|_{L_2(\Omega_{1/n})}^2 = 0, \quad (82)$$

$$2\nu \|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq \|f_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + K_0 \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2. \quad (83)$$

Наконец, применяя неравенство Громуолла, из (82)–(83) получаем оценку (78). Лемма 7 доказана. \square

Лемма 8. Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K_2 , что для всех $t \in [1/n, T]$ имеет место оценка

$$\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \int_{1/n}^t \|\partial_x^2 u_n(x, \tau)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 d\tau + k \|\partial_x u(kt, t)\|_{L_2(1/n, t)}^2 \leq K_2 \|f_n(x, t)\|_{L_2(Q_{xt}^n)}^2. \quad (84)$$

Доказательство. Умножая уравнение (74) на $-\partial_x^2 u_n(x, t)$ скалярно в $L_2(\Omega_t)$ и используя равенство

$$\frac{d}{dt} \|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 = 2 \int_{\Omega_t} \partial_t \partial_x u_n(x, t) \partial_x u_n(x, t) dx + k |\partial_x u_n(kt, t)|^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \nu \|\partial_x^2 u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 &= (u_n(x, t) \partial_x u_n(x, t), \partial_x^2 u_n(x, t)) - \\ &\quad - (f_n(x, t), \partial_x^2 u_n(x, t)) + \partial_t u_n(x, t) \partial_x u_n(x, t) \Big|_{x=0}^{x=kt} + \frac{k}{2} |\partial_x u_n(kt, t)|^2 = \\ &= (u_n(x, t) \partial_x u_n(x, t), \partial_x^2 u_n(x, t)) - \\ &\quad - (f_n(x, t), \partial_x^2 u_n(x, t)) + \frac{1}{9\nu} \partial_t [u_n(x, t)]^3 \Big|_{x=0}^{x=kt} + \frac{k}{2} |\partial_x u_n(kt, t)|^2. \end{aligned} \quad (85)$$

Далее, отметим справедливость следующего равенства:

$$\int_{1/n}^t \partial_t u_n(x, t) \partial_x u_n(x, t) \Big|_{x=0}^{x=kt} dt = \frac{1}{9\nu} [u_n(kt, t)]^3 - \frac{1}{9\nu} [u(0, t)]^3 - k \|\partial_x u(kt, t)\|_{L_2(1/n, t)}^2, \quad (86)$$

где использованы граничные условия (75) и равенство

$$\frac{d}{dt} u_n(kt, t) = \partial_t u_n(x, t) \Big|_{x=kt} + k \partial_x u_n(x, t) \Big|_{x=kt}.$$

Для первых двух слагаемых справа для (86) установим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{9\nu} |u_n(kt, t)|^3 &\leq \|u_n(x, t)\|_{L_\infty(\Omega_t)}^3 \leq \frac{1}{9\nu} \|u_n(x, t)\|_{H^1(\Omega_t)}^{3/2} \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^{3/2} = \\ &= \frac{1}{9\nu} \|u_n(x, t)\|_{H^1(\Omega_t)}^{3/2} \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^{1/2} \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}. \end{aligned}$$

В предыдущем соотношении мы использовали интерполяционное неравенство. Теперь, применяя неравенство Юнга (32), где в (32) приняты обозначения

$$A = \|u_n(x, t)\|_{H^1(\Omega_t)}^{3/2}, \quad B = \frac{1}{9\nu} \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)} \|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^{1/2}, \quad a = \frac{1}{6}, \quad p = \frac{4}{3}, \quad q = 4,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{9\nu}|u_n(kt, t)|^3 &\leqslant \frac{1}{8}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \left[\frac{1}{8} + \frac{2}{3^5\nu^4}\|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^4\right]\|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{8}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + D_1, \end{aligned} \quad (87)$$

где постоянная D_1 определяется согласно оценкам леммы 2 и следствия 1. Аналогично предыдущему получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{9\nu}|u_n(0, t)|^3 &\leqslant \frac{1}{8}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \left[\frac{1}{8} + \frac{2}{3^5\nu^4}\|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^4\right]\|u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{8}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + D_0, \end{aligned} \quad (88)$$

где постоянная D_0 определяется согласно оценкам леммы 2 и следствия 1.

Рассмотрим оценки нелинейных слагаемых из (85). Прежде всего, имеем

$$\begin{aligned} |(u_n(x, t)\partial_x u_n(x, t), \partial_x^2 u_n(x, t))| &\leqslant \\ &\leqslant \|u_n(x, t)\|_{L_4(\Omega_t)}\|\partial_x^2 u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_4(\Omega_t)} \leqslant \\ &\leqslant \|u_n(x, t)\|_{L_4(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{H^1(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_4(\Omega_t)}. \end{aligned} \quad (89)$$

Далее, учитывая интерполяционное неравенство

$$\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_4(\Omega_t)} \leqslant C\|\partial_x u_n(x, t)\|_{H^1(\Omega_t)}^{1/2}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^{1/2}, \quad \forall \partial_x u_n(x, t) \in H^1(\Omega_t)$$

(см. [8, Theorems 5.8–5.9, p. 140–141]), из (88) получим

$$\begin{aligned} |(u_n(x, t)\partial_x u_n(x, t), \partial_x^2 u_n(x, t))| &\leqslant \\ &\leqslant C\|u_n(x, t)\|_{L_4(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{H^1(\Omega_t)}^{3/2}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\nu}{8}\|\partial_x^2 u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \left[\frac{\nu}{8} + C_2\|u_n(x, t)\|_{L_4(\Omega_t)}^4\right]\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2. \end{aligned} \quad (90)$$

Здесь мы воспользовались неравенством Юнга (32), где $a = \nu/6$, $p = 4/3$, $q = 4$,

$$A = \|\partial_x u_n(x, t)\|_{H^1(\Omega_t)}^{3/2}, \quad B = C\|u_n(x, t)\|_{L_4(\Omega_t)}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^{1/2}.$$

В (85) оценим последнее слагаемое справа. Учитывая интерполяционное неравенство, имеем

$$\begin{aligned} \frac{k}{2}|\partial_x u_n(kt, t)|^2 &\leqslant \frac{k}{2}\|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_\infty(\Omega_t)}^2 \leqslant \frac{kK^2}{2}\|\partial_x u_n\|_{H^1(\Omega_t)}\|\partial_x u_n\|_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\nu}{8}\|\partial_x^2 u_n\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \left[\frac{\nu}{8} + \frac{k^2K^4}{2\nu}\right]\|\partial_x u_n\|_{L_2(\Omega_t)}^2, \end{aligned} \quad (91)$$

где K — постоянная из [8, Theorem 5.9, p. 140–141].

Наконец, для неоцененного слагаемого из (85) имеем

$$|(f_n(x, t), \partial_x^2 u_n(x, t))| \leqslant \frac{\nu}{4}\|\partial_x^2 u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + C_4\|f_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2. \quad (92)$$

Из (85), (87)–(92), интегрируя (85) по t от $1/n$ до t , получаем

$$\begin{aligned} \|\partial_x u_n(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \nu \int_{1/n}^t \|\partial_x^2 u_n(x, \tau)\|_{L_2(\Omega_\tau)}^2 d\tau + k\|\partial_x u(kt, t)\|_{L_2(1/n, t)}^2 &\leqslant \\ &\leqslant 2C_4 \int_{1/n}^t \|f_n(x, \tau)\|_{L_2(\Omega_\tau)}^2 d\tau + \int_{1/n}^t C_5(\tau)\|\partial_x u_n(x, \tau)\|_{L_2(\Omega_\tau)}^2 d\tau + D_0 + D_1, \end{aligned} \quad (93)$$

где

$$C_5(t) = \frac{\nu}{2} + \frac{k^2 K^4}{\nu} + 2C_2 \|u_n(x, t)\|_{L_4(\Omega_t)}^4.$$

Из неравенства (93) аналогично доказательству леммы 7 получаем искомую оценку (84). Лемма 8 доказана. \square

Лемма 9. *Существует такая положительная, не зависящая от n постоянная K_3 , что для всех $t \in (1/n, T]$ имеют место неравенство*

$$\|\partial_t u_n(x, t)\|_{L_2(Q_{xt}^n)}^2 \leq K_3 \|f_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)}^2. \quad (94)$$

Доказательство. Оценка (94) следует из уравнения (74). Действительно, имеем

$$\|\partial_t u_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)} \leq \|u_n \partial_x u_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)} + \nu \|\partial_x^2 u_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)} + \|f_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)} \leq K_3 \|f_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)},$$

где требуется получить оценку только для слагаемого $u_n \partial_x u_n$. Согласно оценкам (78) и (84) из лемм 7–8 находим

$$\begin{aligned} \|u_n \partial_x u_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)}^2 &\leq \int_{1/n}^T \|u_n\|_{L_\infty(\Omega_t)}^2 \|\partial_x u_n\|_{L_2(\Omega_t)}^2 dt \leq \\ &\leq \|\partial_x u_n\|_{L_\infty(1/n, T; L_2(\Omega_t))}^2 \int_{1/n}^T \|u_n\|_{H^1(\Omega_t)} \|u_n\|_{L_2(\Omega_t)} dt. \end{aligned}$$

Далее, получаем

$$\begin{aligned} \int_{1/n}^T \|u_n\|_{H^1(\Omega_t)} \|u_n\|_{L_2(\Omega_t)} dt &\leq \frac{1}{2} \int_{1/n}^T \left[\|u_n\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + \|u_n\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} \|\partial_x u_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)}^2 + \|u_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)}^2 \leq \left[\frac{K_1}{2\nu} + K_1 T \right] \|f_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)}^2 \leq \\ &\leq \left[\frac{K_1}{2\nu} + K_1 T \right] \|f\|_{L_2(Q_{xt})}^2 < \text{const}, \\ \|\partial_x u_n\|_{L_\infty(1/n, T; L_2(\Omega_t))}^2 &\leq K_2 \|f_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)}^2, \end{aligned}$$

где постоянные K_1, K_2 взяты из лемм 7–8. Лемма 9 доказана. \square

Учитывая очевидное неравенство

$$\|f_n\|_{L_2(Q_{xt}^n)} \leq \|f\|_{L_2(Q_{xt})} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

из лемм 7–9 получаем справедливость оценки (77) теоремы 6. Таким образом, теорема 6 доказана.

10. Доказательство теоремы 1. Существование. Доказательство теоремы 1 основано на теореме 6. В граничных задачах (74)–(76) каждый элемент из последовательности $\{u_n(x, t), f_n(x, t), \{x, t\} \in Q_{xt}^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ продолжаем нулями соответственно на всю область Q_{xt} . В результате получим последовательность функций, которую обозначим через

$$\widetilde{\{u_n(x, t), f_n(x, t), n \in \mathbb{N}^*\}}. \quad (95)$$

Очевидно, что каждая пара функций из последовательности (95) удовлетворяет граничной задаче (1)–(2) в области Q_{xt} согласно теоремам 5–6. Кроме того, заметим, что оценка (77) теоремы 6 будет усиlena, если заменить в ее правой части $\|\widetilde{f_n(x, t)}\|_{L_2(Q_{xt})}$ на выражение $\|f(x, t)\|_{L_2(Q_{xt})}$, так как

$$\|\widetilde{f_n(x, t)}\|_{L_2(Q_{xt})} \leq \|f(x, t)\|_{L_2(Q_{xt})} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Таким образом, получаем ограниченную последовательность функций (95), из которой можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность (для этой подпоследовательности сохраним обозначение n для индекса), т.е.

$$\widetilde{u_n(x,t)} \rightarrow u(x,t) \text{ слабо в } H^{2,1}(Q_{xt}), \quad (96)$$

$$\widetilde{u_n(x,t)} \rightarrow u(x,t) \text{ сильно в } L_2(0,T; H^1(\Omega_t)), \quad (97)$$

$$\widetilde{u_n(kt,t)} \rightarrow u(kt,t) \text{ сильно в } L_2(0,T), \quad (98)$$

$$\widetilde{u_n(0,t)} \rightarrow u(0,t) \text{ сильно в } L_2(0,T). \quad (99)$$

Согласно (96)–(99) можем перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ в интегральных тождествах

$$\begin{aligned} \int_{Q_{xt}} [\partial_t \widetilde{u_n(x,t)} + \widetilde{u_n(x,t)} \partial_x \widetilde{u_n(x,t)} - \nu \partial_x^2 \widetilde{u_n(x,t)} - \widetilde{f_n(x,t)}] \psi(x,t) dx dt &\rightarrow \\ \rightarrow \int_{Q_{xt}} [\partial_t u(x,t) + u(x,t) \partial_x u(x,t) - \nu \partial_x^2 u(x,t) - f(x,t)] \psi(x,t) dx dt &= 0 \end{aligned} \quad (100)$$

для всех $\psi \in L_2(Q_{xt})$,

$$\int_0^T \left[\frac{1}{3} (\widetilde{u_n(x,t)})^2 - \nu \partial_x \widetilde{u_n(x,t)} \right] \Big|_{x=0} \psi_0(t) dt \rightarrow \int_0^T \left[\frac{1}{3} (u(x,t))^2 - \nu \partial_x u(x,t) \right] \Big|_{x=0} \psi_0(t) dt = 0 \quad (101)$$

для всех $\psi_0 \in L_2(0,T)$ и

$$\int_0^T \left[-\frac{1}{3} (\widetilde{u_n(x,t)})^2 + \nu \widetilde{u_n(x,t)} \right] \Big|_{x=kt} \psi_1(t) dt \rightarrow \int_0^T \left[-\frac{1}{3} (u(x,t))^2 + \nu u(x,t) \right] \Big|_{x=kt} \psi_1(t) dt = 0 \quad (102)$$

для всех $\psi_1 \in L_2(0,T)$. Итак, мы установили, что граничная задача (1)–(2) имеет решение $u(x,t) \in H^{2,1}(Q_{xt})$ в смысле интегральных тождеств (100)–(102). Теорема 1 доказана в части существования решения.

11. Доказательство теоремы 1. Единственность. Предположим, что начально-гранична задача (1)–(2) имеет два различных решения $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$. Тогда их разность $u(x,t) = u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)$ будет удовлетворять следующей однородной задаче:

$$\partial_t u + u \partial_x u^{(1)} + u^{(2)} \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = 0, \quad (103)$$

$$\left[\frac{1}{3} u(u^{(1)} + u^{(2)}) - \nu \partial_x u \right] \Big|_{x=0} = 0, \quad (104)$$

$$\left[\frac{1}{3} u(u^{(1)} + u^{(2)}) - \nu \partial_x u \right] \Big|_{x=kt} = 0. \quad (105)$$

Согласно леммам 7 и 8 имеем

$$u^{(i)}(x,t) \in L_\infty(0,T; H^1(\Omega_t)) \cap L_2(0,T; H^2(\Omega_t)), \quad u^{(i)}(kt,t), \quad u^{(i)}(0,t) \in L_\infty(0,T), \quad i = 1, 2. \quad (106)$$

Умножая уравнение (103) на функцию $u(x,t)$ скалярно в $L_2(\Omega_t)$ и учитывая (104)–(105), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(x,t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \nu \|\partial_x u(x,t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 &= \frac{1}{3} |u(kt,t)|^2 [u^{(1)}(kt,t) + u^{(2)}(kt,t)] + \\ &+ \frac{1}{3} |u(0,t)|^2 [u^{(1)}(0,t) + u^{(2)}(0,t)] - \int_{\Omega_t} [u^2 \partial_x u^{(1)} + u^{(2)} u \partial_x u] dx + \frac{k}{2} |u(kt,t)|^2. \end{aligned} \quad (107)$$

Здесь использовано равенство

$$\frac{d}{dt} \|u(x, t)\|_{L_2(0, kt)}^2 = 2 \int_{\Omega_t} \partial_t u(x, t) u(x, t) dx + k |u(kt, t)|^2.$$

Оценим правую часть (107). Согласно (106) и леммам 7 и 8 имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} [u^{(1)}(kt, t) + u^{(2)}(kt, t)] |u(kt, t)|^2 &\leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{3} [\|u^{(1)}(x, t)\|_{H^1(\Omega_t)} + \|u^{(2)}(x, t)\|_{H^1(\Omega_t)}] |u(kt, t)|^2 \leqslant \frac{2\sqrt{K_2}}{3} |u(kt, t)|^2, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} [u^{(1)}(0, t) + u^{(2)}(0, t)] |u(0, t)|^2 &\leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{3} [\|u^{(1)}(0, t)\|_{H^1(\Omega_t)} + \|u^{(2)}(0, t)\|_{H^1(\Omega_t)}] |u(0, t)|^2 \leqslant \frac{2\sqrt{K_2}}{3} |u(0, t)|^2, \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} [u^2 \partial_x u^{(1)} + u^{(2)} u \partial_x u] dx &= [|u(kt, t)|^2 u^{(1)}(kt, t) - |u(0, t)|^2 u^{(1)}(0, t)] + \\ &+ \int_{\Omega_t} [-2u^{(1)} u \partial_x u + u^{(2)} u \partial_x u] dx \leqslant \sqrt{K_2} |u(kt, t)|^2 + \sqrt{K_2} |u(0, t)|^2 + \\ &+ \frac{1}{2\nu} [2\|u^{(1)}\|_{H^1(\Omega_t)} + \|u^{(2)}\|_{H^1(\Omega_t)}]^2 \|u\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_x u\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leqslant \\ &\leqslant \left[\frac{2\sqrt{K_2}}{3} + \sqrt{K_2} \right] [|u(kt, t)|^2 + |u(0, t)|^2] + \frac{9K_2}{2\nu} \|u(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_x u\|_{L_2(\Omega_t)}^2 = \\ &= C_3 |u(kt, t)|^2 + C_4 |u(0, t)|^2 + C_5 \|u(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_x u\|_{L_2(\Omega_t)}^2. \end{aligned} \quad (110)$$

На основе соотношений (107)–(110) устанавливаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \nu \|\partial_x u(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 &\leqslant \\ &\leqslant (2C_3 + k) |u(kt, t)|^2 + 2C_4 |u(0, t)|^2 + 2C_5 \|u(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (111)$$

Теперь оценим два предпоследних слагаемых из (111). Учитывая интерполяционное неравенство, будем иметь

$$\begin{aligned} 2C |u(kt, t)|^2 &\leqslant 2C \|u(x, t)\|_{L_\infty(\Omega_t)}^2 \leqslant 2CK^2 \|u\|_{H^1(\Omega_t)} \|u\|_{L_2(\Omega_t)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\nu}{4} [\|u\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \|\partial_x u\|_{L_2(\Omega_t)}^2] + \frac{4C^2 K^4}{\nu} \|u\|_{L_2(\Omega_t)}^2 = \\ &\leqslant \frac{\nu}{4} \|\partial_x u\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \left[\frac{\nu}{4} + \frac{4C^2 K^4}{\nu} \right] \|u\|_{L_2(\Omega_t)}^2, \end{aligned} \quad (112)$$

где $C = C_3 + k/2$ и K – постоянная из [8, Theorem 5.9, p. 140–141].

Аналогично (112) устанавливаем оценку

$$2\tilde{C} |u(0, t)|^2 \leqslant \frac{\nu}{4} \|\partial_x u\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \left[\frac{\nu}{4} + \frac{4\tilde{C}^2 K^4}{\nu} \right] \|u\|_{L_2(\Omega_t)}^2, \quad (113)$$

где $\tilde{C} = C_4$. Применяя неравенство Гронуолла, из (111)–(113) получаем

$$\|u(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \equiv 0, \quad \forall t \in (0, T].$$

Это означает, что $u^{(1)}(x, t) \equiv u^{(2)}(x, t)$ в $L_2(Q_{xt})$, т.е. решение начально-граничной задачи 1 (1)–(2) единственno. Теорема 1 полностью доказана.

12. Заключение. В работе установлены априорные оценки и теорема о разрешимости в солонниковских классах граничной задачи типа Неймана для уравнения Бюргерса в вырождающейся угловой области, точка вырождения которой находится в начале координат. Причем, подвижная часть границы подчиняется линейному закону. Установленные результаты могут оказаться полезными в задачах моделирования нелинейных тепловых полей в контактных устройствах высокого напряжения, нелинейных процессов диффузии и распространения инородных включений в потоках водных и атмосферных ареалов и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амангалиева М. М., Джесеналиев М. Т., Космакова М. Т., Рамазанов М. И. Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области// Сиб. мат. ж. — 2015. — 56, № 6. — С. 1234–1248.
2. Веригин Н. Н. Об одном классе гидромеханических задач для областей с подвижными границами// в кн.: Динамика жидкости со свободными границами. — Новосибирск, 1980. — Т. 46. — С. 23–32.
3. Вишик М. И., Фурсиков А. В. Математические задачи статистической гидродинамики. — М.: Наука, 1980.
4. Карташов Э. М. Проблема теплового удара в области с движущейся границей на основе новых интегральных соотношений// Изв. РАН. Энергетика. — 1997. — 4. — С. 122–137.
5. Ким Е. И., Омельченко В. Т., Харин С. Н. Математические модели тепловых процессов в электрических контактах. — Алма-Ата: АН КазССР, 1977.
6. Митропольский Ю. А., Березовский А. А., Плотницкий Т. А. Задачи со свободными границами для нелинейного эволюционного уравнения в проблемах металлургии, медицины, экологии// Укр. мат. ж. — 1992. — 44, № 1. — С. 67–75.
7. Солонников В. А., Фазано А. Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами// Зап. науч. семин. ПОМИ.. — 269 2000. — С. 322–338.
8. Adams R. A., Fournier J. J. F. Sobolev spaces. — Amsterdam: Elsevier, 2003.
9. Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I. About Dirichlet boundary-value problem for the heat equation in the infinite angular domain// Boundary-Value Problems. — 2014. — 213. — P. 1–21.
10. Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I. On the solvability of nonhomogeneous boundary-value problem for the Burgers equation in the angular domain and related integral equations// Springer Proc. Math. Stat. — 2017. — 216. — P. 123–141.
11. Benia Y., Sadallah B.-K. Existence of solutions to Burgers equations in domains that can be transformed into rectangles// Electron. J. Differ. Equations. — 2016. — 157. — P. 1–13.
12. Benia Y., Sadallah B.-K. Existence of solutions to Burgers equations in a non-parabolic domain// Electron. J. Differ. Equations. — 2018. — 20. — P. 1–13.
13. Burgers J. M. The Nonlinear Diffusion Equation. Asymptotic Solutions and Statistical Problems. — Boston, USA: Reidel Publishing Company, 1974.
14. Farina A., Preziosi L. Non-isothermal injection moulding with resin cure and perform deformability// Composites. A. Appl. Sci. Manufact. — 2000. — 31, № 12. — P. 1355–1372.
15. Fasano A. A One-dimensional flow problem in porous media with hydrophile grains// Math. Meth. Appl. Sci. — 1999. — 22. — P. 605–617.
16. Fasano A., Solonnikov V. Estimates of weighted Hölder norms of the solutions to a parabolic boundary-value problem in an initially degenerate domain// Rend. Mat. Acc. Lincei, Ser. 9. — 2002. — 13, № 1. — P. 23–41.
17. Fasano A., Solonnikov V. Unsaturated incompressible flows in adsorbing porous media// Math. Meth. Appl. Sci. — 2003. — 26. — P. 1391–1419.
18. Lions J.-L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. — Paris: Dunod, 1968.
19. Molinet L., Pilod D., Vento S. On well-posedness for some dispersive perturbations of Burgers equation// Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire. — 2018. — 35, № 7. — P. 1719–1756.
20. Nouri Z., Bendaas S., Kadem H. E. N wave and periodic wave solutions for Burgers equations// Int. J. Anal. Appl. — 2020. — 18, № 2. — P. 304–318.
21. Riesz F., Sz.-Nagy B. Leçons d'Analyse Fonctionnelle. — Budapest: Akadémiai Kiado, 1972.

22. Rottmann-Matthes J. Freezing similarity solutions in the multidimensional Burgers equation// Nonlinearity. — 2017. — 30, № 12. — P. 4558–4586.
23. Selmi R., Chaabani A. Well-posedness to 3D Burgers' equation in critical Gevrey Sobolev spaces// Arch. Math. — 2019. — 112, № 6. — P. 661–672.
24. Yang X.-J., Tenreiro Machado J. A. A new fractal nonlinear Burgers' equation arising in the acoustic signals propagation// Math. Meth. Appl. Sci. — 2019. — 42, № 18. — P. 7539–7544.
25. Zhu N., Liu Zh., Zhao K. On the Boussinesq–Burgers equations driven by dynamic boundary conditions// J. Differ. Equations. — 2018. — 264, № 3. — P. 2287–2309.

Дженалиев Мұвашархан Таңабаевич

Институт математики и математического моделирования

Министерства образования и науки Республики Казахстан, Алматы, Казахстан

E-mail: muvasharkhan@gmail.com

Ергалиев Мади Габиденович

Институт математики и математического моделирования

Министерства образования и науки Республики Казахстан, Алматы, Казахстан

E-mail: ergalieev.madi.g@gmail.com

Асетов Алибек Асенович

Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова

E-mail: bekaaskar@mail.ru

Аязбаева Асем Мухтаровна

Институт математики и математического моделирования

Министерства образования и науки Республики Казахстан, Алматы, Казахстан

E-mail: aayazbayeva@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 63–67
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-63-67

УДК 517.957

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2022 г. Н. Ж. КАЗЖЕНОВА, Н. Т. ОРУМБАЕВА

Аннотация. В работе исследуются вопросы существования решения нелинейной краевой задачи для уравнения третьего порядка и предлагается алгоритм нахождения приближенного решения.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, уравнение в частных производных, приближенное решение.

ON A NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2022 N. Zh. KAZHKENOVA, N. T. ORUMBAYEVA

ABSTRACT. In this paper, we examine the existence of a solution to a nonlinear boundary-value problem for a third-order partial differential equation and propose an algorithm for the search for an approximate solution.

Keywords and phrases: nonlinear boundary-value problem, partial differential equation, approximate solution.

AMS Subject Classification: 35G30

На множестве $\Omega = [X_0, X] \times [0, T]$, $X_0 > 0$, рассмотрим задачу вида

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w \frac{\partial w}{\partial t} + \varphi \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{1}{x^2} \psi(t), \quad (1)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad (2)$$

$$\alpha w''_{xt}(x, 0) = \beta w''_{xt}(x, T), \quad (3)$$

где $\varphi \neq 0$, α, β — константы, $\psi(t)$ — непрерывная на $[0, T]$ функция. При $\psi(t) = 0$ получим уравнение Бенджамина—Бона—Махони. Уравнение Бенджамина—Бона—Махони имеет многочисленные приложения, в том числе описывает длинные волны в дисперсных системах (см. [1, 4, 8]).

В настоящей работе исследуются вопросы существования решения нелинейной краевой задачи для уравнения третьего порядка и предлагается алгоритм нахождения приближенного решения. С помощью дополнительных функций рассматриваемая задача сводится к многоточечной задаче, состоящей из краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка и функционального соотношения. При установлении условий разрешимости краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения использован метод параметризации

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № АР09259780, 2021-2023).

(см. [9]). В [2–7, 11–14] метод параметризации был применен для решения нелокальных, периодических краевых задач системы гиперболических уравнений. Применение данного метода позволило предложить алгоритмы нахождения приближенного решения исследуемой задачи и доказать его сходимость.

Точное решение задачи будем искать в виде $w(x, t) = u(t)/x$; тогда

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{u}{x^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{u'}{x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = -\frac{u'}{x^2}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = -\frac{u''}{x^2}$$

и функция $u = u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi u'' - uu' - u = \psi(t) \quad (4)$$

с условиями

$$u(0) = 0, \quad \alpha u'(0) = \beta u'(T).$$

Итак, получили периодическую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Поставим в соответствие уравнению (4) эквивалентную систему первого порядка, обозначив $z(t) = u'(t)$, после чего будем иметь эквивалентную задачу:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F(t, z), \quad \alpha z(0) = \beta z(T), \quad (5)$$

где

$$F(t, z) = \frac{1}{\varphi} \left[(z + 1) \int_0^t z(\tau) d\tau + \psi(t) \right].$$

Для нахождения решения задачи (5) применим метод параметризации.

Возьмем шаг $h > 0$ ($Nh = X$) и по нему произведем разбиение

$$[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh), \quad N = 1, 2, \dots$$

Сужение функций $u(t)$, $z(t)$ на r -й интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначим через $u_r(t)$, $z_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, и сведем задачу (5) к многоточечной краевой задаче

$$\frac{\partial z_r}{\partial t} = F(t, z_r), \quad \alpha z(0) = \beta \lim_{t \rightarrow Nh-0} z_N(t), \quad \lim_{t \rightarrow sh-0} z_s(t) = z_{s+1}(sh), \quad s = \overline{1, N-1},$$

где последнее условие представляет собой условие непрерывности решения во внутренних точках разбиения интервала.

Обозначим через λ_r значение функции $z_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, и на каждом интервале $[(r-1)h, rh)$ произведем замену $v_r(t) = z_r(t) - \lambda_r$. Получим систему многоточечных краевых задач с параметром:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = F(t, v_r(t) + \lambda_r), \quad v_r|(r-1)h, rh) = 0, \quad r = \overline{1, N}, \quad (6)$$

$$\alpha \lambda_1 - \beta \lambda_N = \lim_{t \rightarrow Nh-0} v_N(t), \quad (7)$$

$$\lambda_s + \lim_{x \rightarrow sh-0} v_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (8)$$

При фиксированных значениях параметра λ_r задача Коши (6) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра

$$v_r(t) = \int_{(r-1)h}^t F(\tau, v_r(\tau) + \lambda_r) d\tau, \quad \tau \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Вместо $v_r(t)$ подставим соответствующую правую часть (9); повторив процесс ν раз ($\nu = 1, 2, \dots$), получим

$$v_r(t) = \int_{(r-1)h}^t F \left(\tau_1, \int_{(r-1)h}^{\tau_1} F \left(\tau_2, \dots, \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} F(\tau_\nu, v_r(\tau_\nu) + \lambda_r) d\tau_\nu + \dots + \lambda_r \right) d\tau_2 + \lambda_r \right) d\tau_1. \quad (10)$$

Отсюда, определив $\lim_{t \rightarrow rh-0} v_r(t)$, подставив в (7)–(8) на $h > 0$, получим систему уравнений относительно $\lambda_r \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 - \lambda_N - \\ & - \int_{(N-1)h}^{Nh} F \left(\tau_1, \int_{(N-1)h}^{\tau_1} F \left(\tau_2, \dots, \int_{\nu-1}^{\tau_{(N-1)h}} F(\tau_\nu, v_N(\tau_\nu) + \lambda_N) d\tau_\nu + \dots + \lambda_N \right) d\tau_2 + \lambda_N \right) d\tau_1 = 0, \\ & \lambda_s + \int_{(s-1)h}^{sh} F \left(\tau_1, \int_{(s-1)h}^{\tau_1} F \left(\tau_2, \dots, \int_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} F(\tau_\nu, v_s(\tau_\nu) + \lambda_s) d\tau_\nu + \dots + \lambda_s \right) d\tau_2 + \lambda_s \right) d\tau_1 = \lambda_{s+1}, \end{aligned}$$

$s = \overline{1, N-1}$, которую запишем в виде

$$Q_{\nu,h}(v, \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \quad (11)$$

Таким образом, для нахождения пары $(\lambda_r, v_r(t))$, $r = \overline{1, N}$, имеем замкнутую систему, состоящую из уравнений (11), (10).

Обозначим через $C([(r-1)h, rh], \mathbb{R}^n)$ множество непрерывных и ограниченных на $[(r-1)h, rh]$ функций $v_r : [(r-1)h, rh] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Взяв за начальное приближение $v_r(t) = 0$ параметр $\lambda^{(0)}$, определим из системы уравнений (11). Подставляя (10) в правую часть уравнения вместо $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, находим $v_r^{(0)}(t)$, $t \in [(r-1)h, rh]$, $r = \overline{1, N}$.

Взяв $\lambda^{(0)}$, $v^{(0)}[t]$ и числа $\rho > 0$, $\theta > 0$, построим следующие множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho) = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)' \in R^{nN} : \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho, r = \overline{1, N} \right\},$$

$$\begin{aligned} S(v^{(0)}[t], \theta) = \left\{ (v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t))' : v_r(t) \in C([(r-1)h, rh], \mathbb{R}^n), \right. \\ \left. \|v_r(t) - v_r^{(0)}(t)\| \leq \theta, t \in [(r-1)h, rh], r = \overline{1, N} \right\}, \end{aligned}$$

$$G(\rho, \theta) = \left\{ (t, z) : t \in [0, T], \|z - \lambda_r^{(0)} - v_r^{(0)}(t)\| < \rho + \theta, \right. \\ \left. t \in [(r-1)h, rh], r = \overline{1, N}, \left\| z - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t \rightarrow rh-0} v_r^{(0)}(t) \right\| < \rho + \theta, t = T \right\},$$

где $v[t] = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t))'$. Обозначим через $U(F, L, h)$ совокупность $(\lambda^{(0)}, v^{(0)}[t], \rho, \theta)$, при которых функция $F(t, z)$ в $G(\rho, \theta)$ имеет непрерывные частные производные $F'_z(t, z)$ и

$$\sup_{t \in [0, T]} \|F'_z(t, z)\| \leq L, \quad L = \text{const.}$$

Возьмем систему пар $(\lambda_r^{(0)}, v_r^{(0)}(t))$, $r = \overline{1, N}$, и последовательные приближения строим по следующему алгоритму:

Шаг 1. (a) Подставляя $v_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, N}$, в (11), определяем $\lambda_r^{(1)}$, $r = \overline{1, N}$, из системы функциональных уравнений $Q_{\nu,h}(v^{(0)}, \lambda) = 0$.

(b) Подставляя в правую часть уравнения (10) величины $\lambda_r^{(1)}$, $v_r^{(0)}(t)$ вместо λ_r , $v_r(t)$, соответственно, $r = \overline{1, N}$, определяем $v_r^{(1)}(x)$, $r = \overline{1, N}$.

Шаг 2. (a) Подставляя $v_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1, N}$, в (11), определяем $\lambda_r^{(2)}$, $r = \overline{1, N}$, из системы функциональных уравнений $Q_{\nu,h}(v^{(1)}, \lambda) = 0$.

(b) Подставляя в правую часть уравнения (10) величины $\lambda_r^{(2)}$, $v_r^{(1)}(t)$ вместо λ_r , $v_r(t)$, соответственно, $r = \overline{1, N}$, определяем $v_r^{(2)}(t)$, $r = \overline{1, N}$.

Продолжая процесс, на k -м шаге получаем систему пар $(\lambda_r^{(k)}, v_r^{(k)}(x))$, $r = \overline{1, N}$.

Достаточные условия осуществимости, сходимости алгоритма и существования решения многочечной краевой задачи с параметром (6)–(8) устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть существуют такие $h > 0$ ($Nh = T$, $N = 1, 2, \dots$), ν ($\nu = 1, 2, \dots$), $(\lambda^{(0)}, v^{(0)}[t], \rho, \theta) \in U(F, L, h)$, при которых матрица Якоби $\partial Q_{\nu,h}(v, \lambda)/\partial \lambda$ обратима для всех $(\lambda, v[t], u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(v^{(0)}[t], \theta) \times S(u^{(0)}[t], h(\rho + \theta))$, причем выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left\| \left[\frac{\partial Q_{\nu,h}(v, \lambda)}{\partial \lambda} \right] \right\|^{-1} &\leq \gamma_\nu(h), \\ q_\nu(h) = \frac{(Lh)^\nu}{\nu!} \left(1 + \gamma_\nu(h) \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(Lh)^j}{j!} \right) &\leq \mu < 1, \quad \mu = \text{const}, \\ \frac{(Lh)^\nu}{\nu!} \frac{\gamma_\nu(h)}{1 - q_\nu(h)} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|v_r^{(1)}(t) - v_r^{(0)}(t)\| + \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(v^{(0)}, \lambda^{(0)})\| &< \rho, \\ \frac{1}{1 - q_\nu(h)} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|v_r^{(1)}(t) - v_r^{(0)}(t)\| &< \theta. \end{aligned}$$

Тогда определяемая алгориттом последовательность пар $(\lambda^{(k)}, v^{(k)}[t])$, $k = 1, 2, \dots$, содержится в $S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(v^{(0)}[t], \theta)$ и сходится к решению $(\lambda^*, v^*[t])$ задачи (6)–(8), причем справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|v_r^*(t) - v_r^{(0)}(t)\| &\leq \frac{1}{1 - q_\nu(h)} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|v_r^{(1)}(t) - v_r^{(0)}(t)\|, \\ \|\lambda^* - \lambda^{(0)}\| &\leq \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(v^{(0)}, \lambda^{(0)})\| + \frac{(Lh)^\nu}{\nu!} \frac{\gamma_\nu(h)}{1 - q_\nu(h)} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|v_r^{(1)}(t) - v_r^{(0)}(t)\|. \end{aligned}$$

При этом любое решение $(\lambda, v[t])$ задачи (6)–(8) в $S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(v^{(0)}[t], \theta)$ изолировано.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 1 из [3].

Определим функции $z^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, равенством

$$z^{(k)}(t) = \begin{cases} \lambda_r^{(k)} + v_r^{(k)}(t), & r = \overline{1, N}, \\ \lambda_N^{(k)} + \lim_{t \rightarrow T-0} v_N^{(k)}(t), & t = Nh. \end{cases}$$

Тогда

$$w(x, t) = \frac{1}{x} \int_0^t z^{(k)}(\tau) d\tau.$$

Обозначим через $S_0(w^{(0)}(x, t), t(\rho + \theta)/x)$ множество кусочно непрерывно дифференцируемых по x, t функций $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left\| w(t) - \frac{1}{x} \int_0^t (\lambda^{(0)} - v^{(0)}(\tau)) d\tau \right\| < \frac{t(\rho + \theta)}{x}, \quad \left\| w(T) - \frac{1}{x} \int_0^T (\lambda^{(0)} - v^{(0)}(\tau)) d\tau \right\| < \frac{T(\rho + \theta)}{x}.$$

Ввиду эквивалентности задач (6)–(8) и (1)–(3) из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то последовательность $\{w^{(k)}(x, t)\}$, $k = 1, 2, \dots$, содержится в $S_0(w^{(0)}(x, t), t(\rho + \theta)/x)$, сходится к решению $w^*(x, t)$ задачи (1)–(3) в $S_0(w^{(0)}(x, t), t(\rho + \theta)/x)$ и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|w^*(x, t) - w^{(0)}(x, t)\| &\leq \frac{t}{x} \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu, h}(v^{(0)}, \lambda^{(0)})\| + \\ &+ \frac{t}{x} \left(\frac{(Lh)^\nu}{\nu!} \gamma_\nu(h) + 1 \right) \frac{1}{1 - q_\nu(h)} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|v_r^{(1)}(t) - v_r^{(0)}(t)\|, \end{aligned}$$

причем любое решение задачи (1)–(3) в $S_0(w^{(0)}(x, t), t(\rho + \theta)/x)$ изолировано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Джумабаев Д. С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1989. — 29, № 2. — С. 50–66.
- Джумабаев Д. С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1989. — 29, № 1. — С. 50–66.
- Орумбаева Н. Т. Об одном алгоритме нахождения решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений// Сиб. электрон. мат. изв. — 2013. — 10. — С. 464–474.
- Орумбаева Н. Т. О разрешимости нелинейной полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений// Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 9. — С. 26–41.
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. — М.: Физматлит, 2002.
- Assanova A. T., Iskakova N. B., Orumbayeva N. T. Well-posedness of a periodic boundary value problem for the system of hyperbolic equations with delayed argument// Вестн. Карагандинск. ун-та. Сер. Мат. — 2018. — № 1 (89). — С. 8–11.
- Assanova A. T., Iskakova N. B., Orumbayeva N. T. On the well-posedness of periodic problems for the system of hyperbolic equations with finite time delay// Math. Meth. Appl. Sci. — 2020. — 43, № 2. — P. 881–902.
- Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems// Phil. Trans. Roy. Soc. A. Math. Phys. Eng. Scis. — 1972. — 272, № 1220. — P. 47–78.
- Peregrine D. N. Calculations of the development of an undular bore// J. Fluid Mech. — 1966. — 25, № 2. — P. 321–330.
- Orumbayeva N. T., Keldibekova A. B. On the solvability of the duo-periodic problem for the hyperbolic equation system with a mixed derivative// Вестн. Карагандинск. ун-та. Сер. Мат. — 2019. — № 1 (93). — С. 59–71.
- Orumbayeva N. T., Keldibekova A. B. On one solution of a periodic boundary-value problem for a third-order pseudoparabolic equation// Lobachevskii J. Math. — 2020. — 41, № 9. — P. 1857–1865.
- Orumbayeva N. T., Sabitbekova G. A boundary-value problem for nonlinear differential equation with arbitrary functions// Вестн. Карагандинск. ун-та. Сер. Мат. — 2017. — № 1 (85). — С. 71–76.
- Orumbayeva N. T., Sabitbekova G. On a solution of a nonlinear semi-periodic boundary-value problem for a differential equation with arbitrary functions// in: Functional Analysis in Interdisciplinary Applications (Kalmenov T., Nursultanov E., Ruzhansky M., Sadybekov M., eds.). — Cham: Springer, 2017. — 216. — P. 158–163.
- Orumbayeva N. T., Shayakhmetova B. K. On a method of finding a solution of semi-periodic boundary-value problem for hyperbolic equations// AIP Conf. Proc. — 2016. — 1759, № 1. — 020121.

Кажкенова Назерке Жакеновна

Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова

E-mail: OrumbayevaN@mail.ru

Орумбаева Нургул Тумарбековна

Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова

E-mail: OrumbayevaN@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 68–81
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-68-81

УДК 517.95

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
МЛАДШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ
СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2022 г. В. Л. КАМЫНИН

Аннотация. Доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи определения зависящего от x коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении с двумя независимыми переменными. В качестве дополнительного условия задается условие интегрального наблюдения. Приведены примеры обратных задач, для которых выполняются условия доказанных в работе теорем.

Ключевые слова: обратная задача, интегральное наблюдение, вырождающееся параболическое уравнение.

ON THE INVERSE PROBLEM OF DETERMINING
THE LOWEST COEFFICIENT DEPENDING ON THE SPACE VARIABLE
IN A PARABOLIC EQUATION WITH WEAK DEGENERACY

© 2022 V. L. KAMYNIN

ABSTRACT. In this paper, we prove existence and uniqueness theorems for solutions of the inverse problem of determining the x -dependent absorption coefficient in a degenerate parabolic equation. As an additional condition, the integral observation condition is specified. Also, we give examples of inverse problems satisfying the conditions of the theorems proved in the paper.

Keywords and phrases: inverse problem, integral observation, degenerate parabolic equation.

AMS Subject Classification: 35K20, 35R30

1. Введение. В работе изучаются вопросы однозначной разрешимости обратной задачи определения коэффициента $\gamma(x)$ в параболическом уравнении

$$u_t - a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(t, x)u + \gamma(x)u = f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

границыми условиями

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad u(t, l) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ (проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013).

и дополнительным условием интегрального наблюдения

$$\int_0^T u(t, x)\chi(t)dt = \varphi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (4)$$

Здесь $Q = [0, T] \times [0, l]$, T, l — некоторые числа, $a(x), b(x), c(t, x), f(t, x), u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t), \chi(t), \varphi(x)$ — известные функции.

Особенностью постановки обратной задачи в данной работе является предположение о том, что уравнение (1) является вырождающимся, а именно, выполнены условия

$$0 \leq a(x) \leq a_1, \quad x \in [0, l], \quad 1/a(x) \in L_q(0, l), q > 1. \quad (5)$$

Для случая равномерно параболических уравнений обратные задачи восстановления коэффициента поглощения $\gamma(x)$ с интегральным наблюдением вида (4) при различных предположениях о входных данных рассматривались в работах ряда авторов (см. [2, 4, 6, 11–13] и др.). Что касается вырождающихся параболических уравнений с условием слабого вырождения вида (5), то укажем работы [16, 18], где при дополнительном условии (4) были доказаны теоремы существования и единственности решений обратных задач восстановления неизвестной правой части уравнения, а также работы [3, 17], где были исследованы обратные задачи нахождения младшего коэффициента, но зависящего от времени, и при дополнительном условии наблюдения, отличном от (4).

Отметим, что изучение как прямых, так и обратных задач для вырождающихся параболических уравнений имеет важные применения в различных прикладных задачах гидродинамики, климатологии, задачах изучения пористых сред, а также в финансовой математике (см., например, [14, 15] и дальнейшие ссылки в [15]).

Все равенства и неравенства предполагаются выполненными почти всюду, все рассматривающиеся в работе функции предполагаются, как минимум, измеримыми, производные понимаются в обобщенном смысле по Соболеву. Переходим к точным формулировкам.

Используемые в работе пространства Лебега и Соболева с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [7, 9]). При этом для удобства будем использовать обозначения норм: $\|\cdot\|_{L_\infty(0, l)} \equiv \|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_{L_2(0, l)} \equiv \|\cdot\|_2$.

Через $C^{0,\alpha}(Q)$, $\alpha = \text{const} \in (0, 1)$, будем обозначать пространство Гельдера непрерывных в Q функций, имеющих конечную норму

$$|u|_{C^{0,\alpha}(Q)} = \max_Q |u(t, x)| + \sup_{\substack{(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in Q \\ (t_1, x_1) \neq (t_2, x_2)}} \frac{|u(t_1, x_1) - u(t_2, x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha + |t_1 - t_2|^{\alpha/2}}.$$

Положим

$$Q_\tau = [0, \tau] \times [0, l], \quad \tau \in (0, T], \quad Q_T \equiv Q, \quad F(x) = \int_0^T f(t, x)\chi(t)dt,$$

$$L_\infty^+(0, l) = \{z(x) \in L_\infty(0, l) : z(x) \geq 0\}, \quad B_R^+ = \{z(x) \in L_\infty^+(0, l) : \|z\|_\infty \leq R\}.$$

Нам понадобятся хорошо известные неравенства: неравенство Коши

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \varepsilon > 0, \quad (6)$$

и неравенство Пуанкаре—Стеклова, которое при $n = 1$ может быть записано в виде

$$\|z\|_2 \leq \frac{l}{\pi}\|z_x\|_2, \quad z \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l). \quad (7)$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные задачи (1)–(4), измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \leq a(x) \leq a_1, \quad x \in (0, l); \quad \frac{1}{a(x)} \in L_q(0, l), \quad q > 1, \quad \left\| \frac{1}{a} \right\|_{L_q(0, l)} \leq a_2; \quad (\text{A})$$

$$\begin{cases} \frac{b(x)}{a(x)} \in L_\infty(0, l), \quad \frac{c^2(t, x)}{a(x)}, f(t, x) \in L_\infty(Q), \\ \left\| \frac{b}{a} \right\|_{L_\infty(0, l)} \leq K_{b,a}, \quad \left\| \frac{c^2}{a} \right\|_{L_\infty(Q)} \leq K_{c,a}, \quad \|f\|_{L_\infty(Q)} \leq K_f; \end{cases} \quad (\text{B})$$

$$\begin{cases} u_0(x) \in W_2^1(0, l), \quad \mu_1(t), \mu_2(t) \in W_\infty^1(0, T), \quad u_0(0) = \mu_1(0), \quad u_0(l) = \mu_2(0), \\ |u_0(x)| \leq M_0, \quad x \in [0, l], \quad |\mu_1(t)| \leq M_0, \quad |\mu_2(t)| \leq M_0, \quad t \in [0, T]; \end{cases} \quad (\text{C})$$

$$\begin{cases} \varphi(x) \in W_q^2(0, l) \quad (q > 1 — та же, что и в условии (A)), \quad a(x)\varphi''(x) \in L_\infty(0, l), \\ \varphi(x) \geq \varphi_0 > 0, \quad \varphi_1 \leq a(x)\varphi''(x) \leq \varphi_2, \quad |\varphi'(x)| \leq K_\varphi^*, \quad x \in (0, l); \end{cases} \quad (\text{D})$$

$$\begin{cases} \chi(t) \in W_1^1(0, T), \quad \|\chi\|_{L_1(0, T)} \leq K_\chi, \quad \|\chi'\|_{L_1(0, T)} \leq K_\chi^*, \\ F_1 \leq F(x) \leq F_2, \quad \varphi(0) = \int_0^T \mu_1(t)\chi(t)dt, \quad \varphi(l) = \int_0^T \mu_2(t)\chi(t)dt. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Здесь $a_1, a_2, M_0, K_\chi, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, K_\varphi^* = \text{const} > 0, K_{b,a}, K_{c,a}, K_f, K_\chi^* = \text{const} \geq 0, F_1, F_2 = \text{const} \in \mathbb{R}^1$.

Замечание 1. Из условий (8) следует, что $b(x) \in L_\infty(0, l)$, $c(t, x) \in L_\infty(Q)$, причем

$$\|b\|_\infty \leq K_b \equiv a_1 K_{b,a}, \quad \|c\|_{L_\infty(Q)} \leq K_c \equiv \sqrt{a_1 K_{c,a}}.$$

Определение 1. Обобщенным решением обратной задачи (1)–(4) будем называть пару функций $\{u(t, x), \gamma(x)\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\in L_\infty(0, T; W_2^1(0, l)) \cap W_s^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q), \quad s > 1, \quad \alpha \in (0, 1), \\ u_t &\in L_2(Q), \quad au_{xx}^2 \in L_1(Q), \quad \gamma(x) \in L_\infty^+(0, l), \end{aligned}$$

эти функции удовлетворяют уравнению (1) п.в. в Q , а функция $u(t, x)$ удовлетворяет условиям (2)–(4) в классическом смысле.

Структура работы следующая. В разделе 2 рассматривается прямая задача (1)–(3) (функция $\gamma(x) \in L_\infty^+(0, l)$ в уравнении (1) предполагается известной) и доказываются теоремы существования и единственности обобщенного решения этой задачи, а также устанавливаются некоторые оценки этого решения с явно выписанными константами.

Полученные в разделе 2 результаты применяются в разделе 3, где устанавливаются теоремы существования и единственности решения обратной задачи (1)–(4).

Наконец, в разделе 4 приводятся примеры обратных задач, для которых справедливы доказанные в разделе 3 теоремы.

2. Исследование прямой задачи. Рассмотрим прямую задачу (1)–(3). Будем предполагать, что коэффициент $\gamma(x) \in L_\infty^+(0, l)$ известен и

$$\|\gamma\|_\infty \leq K_\gamma, \quad K_\gamma = \text{const} > 0. \quad (8)$$

Решение $u(t, x)$ прямой задачи будем понимать в смысле определения 1.

Докажем теоремы существования и единственности решения задачи (1)–(3), при этом воспользуемся идеями доказательства аналогичных теорем из работ [16, 18].

Теорема 1. Пусть выполнены условия (A)–(C) и (8). Тогда существует не более одного обобщенного решения задачи (1)–(3).

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x)$ этой задачи. Положим $v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$. Тогда функция $v(t, x)$ является решением уравнения

$$\frac{1}{a(x)}v_t - v_{xx} + \frac{b(x)}{a(x)}v_x + \frac{c(t, x)}{a(x)}v + \frac{\gamma(x)}{a(x)}v = 0, \quad (9)$$

с однородными краевыми условиями

$$v(0, x) = 0, \quad x \in [0, l], \quad v(t, 0) = v(t, l) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

Умножим уравнение (9) на $e^{-\lambda t}v$ (где $\lambda = \text{const} > 0$ будет выбрана ниже) и проинтегрируем получившееся равенство по прямоугольнику Q . Учитывая условие (10) и предположение, что $\gamma(x) \geq 0$, после интегрирования по частям приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\lambda T}}{2} \int_0^l \frac{v^2(T, x)}{a(x)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_Q e^{-\lambda t} \frac{v^2}{a(x)} dxdt + \int_Q e^{-\lambda t} v_x^2 dxdt \leq \\ \leq \int_Q e^{-\lambda t} |c(t, x)| \frac{v^2}{a(x)} dxdt + \int_Q (e^{-\lambda t/2} |v_x|) \left(e^{-\lambda t/2} \left| \frac{b(x)}{a(x)} \right| |v| \right) dxdt. \end{aligned}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части данного неравенства применим неравенство (6), отнеся множитель $\varepsilon = 1/2$ к слагаемому

$$\int_Q e^{-\lambda t} v_x^2 dxdt.$$

Тогда приходим к соотношению

$$\frac{\lambda}{2} \int_Q e^{-\lambda t} \frac{v^2}{a(x)} dxdt \leq \int_Q e^{-\lambda t} |c(t, x)| \frac{v^2}{a(x)} dxdt + \int_Q e^{-\lambda t} \left| \frac{b^2(x)}{a(x)} \right| \frac{v^2}{a(x)} dxdt.$$

Учитывая условие (D), получаем неравенство

$$\frac{\lambda}{2} \int_Q e^{-\lambda t} \frac{v^2}{a(x)} dxdt \leq (K_c + K_{b,a}^2 a_1) \int_Q e^{-\lambda t} \frac{v^2}{a(x)} dxdt.$$

Выбирая теперь $\lambda > 2(K_c + K_{b,a}^2 a_1)$, из последнего неравенства получаем, что

$$\int_Q e^{-\lambda t} \frac{v^2}{a(x)} dxdt = 0.$$

Учитывая оценку $1/a(x) \geq 1/a_1 > 0$ (см. условие (A)), приходим к выводу, что $v(t, x) = 0$ в Q , т.е. $u^{(1)}(t, x) = u^{(2)}(t, x)$ в Q . Теорема доказана. \square

Теперь докажем теорему существования обобщенного решения задачи (1)–(3) и установим ряд оценок для такого решения, которые будут использованы в разделе 3 при исследовании обратной задачи (1)–(4). В этих оценках через C с индексом будем обозначать положительные константы, зависящие только от $l, T, a_1, a_2, K_{b,a}, K_{c,a}, K_\gamma, K_f, M_0, \|u'_0\|_2, \|\mu'_1\|_{L^\infty(0,T)}, \|\mu'_2\|_{L^\infty(0,T)}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (A)–(C) и (8). Положим*

$$q^* = \frac{2q}{q+1}. \quad (11)$$

Тогда существует обобщенное решение задачи (1)–(3) при $s = q^$ и имеют место оценки*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_x(t, \cdot)\|_2^2 + \|au_{xx}^2\|_{L_1(Q)} + \|u_{xx}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 + \|u_t\|_{L_2(Q)}^2 \leq C_1, \quad (12)$$

$$|u(t_1, x_1) - u(t_2, x_2)| \leq C_2 |x_1 - x_2|^{1/2} + C_3 |t_1 - t_2|^{1/6}, \quad (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in Q, \quad (13)$$

$$|u(t, x)| \leq (M_0 + K_f T) e^{K_c T} \equiv M, \quad (t, x) \in Q. \quad (14)$$

Доказательство. Будем использовать схему доказательства теоремы 2 из [16] с некоторыми модификациями. Положим $a_n = a(x) + 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, и рассмотрим в Q краевую задачу для уравнения

$$u_t^n - a_n(x) u_{xx}^n + \sqrt{a_n(x)} \frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}} u_x^n + c(t, x) u^n + \gamma(x) u^n = f(t, x) \quad (15)$$

с краевыми условиями (2), (3).

Уравнение (15) является равномерно параболическим с ограниченными коэффициентами, поэтому в силу результатов работы [7] данная краевая задача имеет единственное решение

$$u^n(t, x) \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, l)) \cap W_2^{1,2}(Q)$$

и для него справедлива равномерная по n оценка (см., например, [8]):

$$|u^n(t, x)| \leq (M_0 + K_f T) e^{K_c T}, \quad (t, x) \in Q. \quad (16)$$

Положим

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \frac{l-x}{l} \mu_1(t) + \frac{x}{l} \mu_2(t), \quad z^n(t, x) = u^n(t, x) - \psi(t, x), \quad z_0(x) = u_0(x) - \psi(0, x), \\ g_n(t, x) &= f(t, x) - \sqrt{a_n(x)} \frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}} \psi_x(t, x) - c(t, x) \psi(t, x) - \gamma(x) \psi(t, x) - \psi_t(t, x). \end{aligned}$$

Заметим, что в силу условий (B) и (C)

$$z_0(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l), \quad g_n(t, x) \in L_\infty(Q), \quad \|g_n\|_{L_\infty(Q)} \leq C_4,$$

где C_4 не зависит от n . Кроме того, для $z^n(t, x)$ в силу (16) справедлива равномерная по n оценка

$$|z^n(t, x)| \leq (M_0 + K_f T) e^{K_c T} + M_0, \quad (t, x) \in Q. \quad (17)$$

Функция $z^n(t, x)$ является решением краевой задачи

$$z_t^n - a_n(x) z_{xx}^n + \sqrt{a_n(x)} \frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}} z_x^n + c(t, x) z^n + \gamma(x) z^n = g_n(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (18)$$

$$z^n(0, x) = z_0(x), \quad x \in [0, l], \quad z^n(t, 0) = z^n(t, l) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (19)$$

Выведем для $z^n(t, x)$ ряд равномерных по n оценок. Для этого умножим уравнение (18) на $-e^{-\lambda t} z_{xx}^n$ (где $\lambda = \text{const} > 0$ будет выбрана ниже) и проинтегрируем получившееся равенство по прямоугольнику Q_τ , $0 \leq \tau \leq T$. После интегрирования по частям получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-\lambda \tau} \int_0^l |z_x^n(\tau, x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} |z_x^n|^2 dx dt + \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} a_n(x) |z_{xx}^n|^2 dx dt &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|z'_0\|_2^2 + \int_{Q_\tau} (e^{-\lambda t/2} \sqrt{a_n(x)} |z_{xx}^n|) \left(e^{-\lambda t/2} \left| \frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}} \right| |z_x^n| \right) dx dt + \\ &+ \int_{Q_\tau} (e^{-\lambda t/2} \sqrt{a_n(x)} |z_{xx}^n|) \left(e^{-\lambda t/2} |c(t, x)| \frac{|z^n|}{\sqrt{a_n(x)}} \right) dx dt + \\ &+ \int_{Q_\tau} (e^{-\lambda t/2} \sqrt{a_n(x)} |z_{xx}^n|) \left(e^{-\lambda t/2} \gamma(x) \frac{|z^n|}{\sqrt{a_n(x)}} \right) dx dt + \\ &+ \int_{Q_\tau} (e^{-\lambda t/2} \sqrt{a_n(x)} |z_{xx}^n|) \left(e^{-\lambda t/2} \frac{|g_n(t, x)|}{\sqrt{a_n(x)}} \right) dx dt. \end{aligned}$$

Для оценки второго, третьего, четвертого и пятого слагаемых в правой части этого неравенства применим неравенство (6), относя множитель $\varepsilon = 1/4$ к слагаемым

$$\int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} a_n(x) |z_{xx}^n|^2 dx dt.$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda\tau}\|z_x^n(\tau, \cdot)\|_2^2 + \lambda \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} |z_x^n|^2 dx dt + \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} a_n(x) |z_{xx}^n|^2 dx dt &\leqslant \\
&\leqslant C_5 + 4 \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} \frac{b^2(x)}{a(x)} |z_x^n|^2 dx dt + 4 \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} c^2(t, x) \frac{|z^n|^2}{a_n(x)} dx dt + \\
&\quad + 4 \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} \gamma^2(x) \frac{|z_x^n|^2}{a_n(x)} dx dt + 4 \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} \frac{g^2(t, x)}{a_n(x)} dx dt, \quad (20)
\end{aligned}$$

где константа C_5 не зависит от n . С учетом условий (A), (B), оценки (17) и определения функции $a_n(t, x)$ из (20) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda\tau}\|z_x^n(\tau, \cdot)\|_2^2 + \lambda \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} |z_x^n|^2 dx dt + \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} a_n(x) |z_{xx}^n|^2 dx dt &\leqslant \\
&\leqslant C_5 + C_6 \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} |z_x^n|^2 dx dt + C_7 \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} \frac{1}{a_n(x)} dx dt \leqslant \\
&\leqslant C_5 + C_6 \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} |z_x^n|^2 dx dt + C_7 \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} \frac{1}{a(x)} dx dt \leqslant C_6 \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} |z_x^n|^2 dx dt + C_8, \quad (21)
\end{aligned}$$

где константы C_6 , C_7 , C_8 не зависят от n . Положим в (21) $\lambda = 2C_6$. Тогда из (21) вытекает равномерная по n оценка

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|z_x^n(t, \cdot)\|_2^2 + \int_Q a_n(x) |z_{xx}^n|^2 dx dt \leqslant C_9. \quad (22)$$

Применяя неравенство Гельдера, с учетом определения q^* в (11), условия (A) и уже доказанной оценки (22) получаем (подробнее см. [5]) равномерную по n оценку

$$\begin{aligned}
\|z_{xx}^n\|_{L_{q^*}(Q)}^2 &= \left(\int_Q \left(\frac{1}{\sqrt{a_n(x)}} \right)^{q^*} |\sqrt{a_n(x)} z_{xx}^n|^{q^*} dx dt \right)^{2/q^*} \leqslant \\
&\leqslant \left\| \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right\|_{L_q(Q)} \int_Q \sqrt{a_n(x)} |z_{xx}^n|^2 dx dt \leqslant C_{10}. \quad (23)
\end{aligned}$$

В силу уравнения (18) с учетом оценок (17), (22) получаем также равномерную по n оценку

$$\|z_t^n\|_{L_2(Q)}^2 \leqslant C_{11}. \quad (24)$$

Наконец, на основании оценок (22), (24) и оценки (2.9) из [9, с. 79] получаем равномерную по n оценку (подробнее см. доказательство теоремы 2.3 в [18]):

$$|z^n(t_2, x_2) - z^n(t_1, x_1)| \leqslant C_{12}|x_2 - x_1|^{1/2} + C_{13}|t_2 - t_1|^{1/6}, \quad (t_2, x_2), (t_1, x_1) \in Q. \quad (25)$$

Но тогда для функции $u^n(t, x) \equiv v^n(t, x) + \psi(t, x)$ — решения задачи (15), (2), (3) — справедливы равномерные по n оценки

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u_x^n(t, \cdot)\|_2^2 + \|\sqrt{a_n} u_{xx}^n\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_{xx}^n\|_{L_{q^*}(Q)}^2 + \|u_t^n\|_{L_2(Q)}^2 \leqslant C_{14},$$

$$|u^n(t_2, x_2) - u^n(t_1, x_1)| \leqslant C_{15}|x_2 - x_1|^{1/2} + C_{16}|t_2 - t_1|^{1/6}, \quad (t_2, x_2), (t_1, x_1) \in Q.$$

Повторяя теперь доказательство теоремы 2 из [16], получаем, что существует решение

$$u(t, x) \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, l)) \cap W_{q^*}^{1,2}(Q) \cap C^{0,1/3}(Q), \quad u_t \in L_2(Q), \quad a u_{xx}^2 \in L_1(Q),$$

задачи (1)–(3), причем для $u(t, x)$ справедливы оценки (12), (13). Поскольку в силу доказательства теоремы 2 из [16] функция $u(t, x)$ есть равномерный на Q предел подпоследовательности $u^{n_k}(t, x)$ при $k \rightarrow \infty$, то из оценки (16) следует оценка (14). Теорема 2 доказана. \square

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия (A), (B), число q^* определено в (11). Пусть $h(t, x) \in L_\infty(Q)$ — некоторая функция, удовлетворяющая оценке

$$\|h\|_{L_\infty(Q)} \leq K_h. \quad (26)$$

Пусть $v(t, x) \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, l)) \cap W_{q^*}^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q)$, $v_t \in L_2(Q)$, $av_{xx}^2 \in L_1(Q)$ — решение в Q краевой задачи для уравнения

$$v_t - a(x)v_{xx} + b(x)v_x + c(t, x)v + \gamma(x)v = h(t, x) \quad (27)$$

с однородными краевыми условиями (10). (Заметим, что в силу доказанных выше теорем 1 и 2 такое решение существует и единствено.) Положим

$$\lambda_0 = 3 \left(K_{b,a} a_1 + \frac{l^2}{\pi^2} K_{c,a} \right). \quad (28)$$

Тогда для функции $v(t, x)$ справедлива оценка

$$|v(t, x)| \leq (3lTa_2 e^{\lambda_0 T})^{1/2} l^{\frac{q-1}{2q}} K_h, \quad (t, x) \in Q. \quad (29)$$

Доказательство. Как и в теореме 2, положим $a_n = a(x) + 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, и рассмотрим в Q краевую задачу для уравнения

$$v_t^n - a_n(x)v_{xx}^n + \sqrt{a_n(x)} \frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}} v_x^n + c(t, x)v^n + \gamma(x)v^n = h(t, x) \quad (30)$$

с краевыми условиями (10). В силу теоремы 2

$$v^n(t, x) \rightrightarrows v(t, x), \quad n \rightarrow \infty, \text{ равномерно на } Q. \quad (31)$$

Умножим уравнение (30) на $e^{-\lambda_0 t} v_t^n / a_n(x)$, где λ_0 определено формулой (28), и проинтегрируем результат по прямоугольнику Q_τ , $\tau \in [0, T]$. Тогда после интегрирования по частям с учетом условий (10), придем к соотношению

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t} \frac{|v_t^n|^2}{a_n(x)} dx dt + \frac{1}{2} e^{-\lambda_0 \tau} \|v_x^n(\tau, \cdot)\|_2^2 + \frac{\lambda_0}{2} \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t} |v_x^n|^2 dx dt + \\ & + \frac{1}{2} e^{-\lambda_0 \tau} \int_0^\tau \frac{\gamma(x)}{a_n(x)} |v^n(\tau, x)|^2 dx + \frac{\lambda_0}{2} \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t} \frac{\gamma(x)}{a_n(x)} |v^n|^2 dx dt \leqslant \\ & \leqslant \int_{Q_\tau} \left(e^{-\lambda_0 t/2} \frac{|v_t^n|}{\sqrt{a_n(x)}} \right) \left(e^{-\lambda_0 t/2} \frac{|b(x)|}{\sqrt{a(x)}} |v_x^n| \right) dx dt + \\ & + \int_{Q_\tau} \left(e^{-\lambda_0 t/2} \frac{|v_t^n|}{\sqrt{a_n(x)}} \right) \left(e^{-\lambda_0 t/2} \frac{|c(t, x)|}{\sqrt{a_n(x)}} |v^n| \right) dx dt + \\ & + \int_{Q_\tau} \left(e^{-\lambda_0 t/2} \frac{|v_t^n|}{\sqrt{a_n(x)}} \right) \left(e^{-\lambda_0 t/2} \frac{|h(t, x)|}{\sqrt{a_n(x)}} \right) dx dt. \end{aligned}$$

Для оценки слагаемых в правой части этого неравенства применим неравенство (6), относя множитель $\varepsilon = 1/3$ к слагаемым

$$\int_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t} \frac{|v_t^n|^2}{a_n(x)} dx dt.$$

С учетом того, что $\gamma(x) \geqslant 0$ на $[0, l]$, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} e^{-\lambda_0 \tau} \|v_x^n(\tau, \cdot)\|_2^2 + \frac{\lambda_0}{2} \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t} |v_x^n|^2 dx dt \leqslant \\ & \leqslant \frac{3}{2} \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t} \frac{b^2(x)}{a(x)} |v_x^n|^2 dx dt + \frac{3}{2} \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t} \frac{c^2(t, x)}{a_n(x)} |v^n|^2 dx dt + \frac{3}{2} \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t} \frac{h^2(t, x)}{a_n(x)} dx dt \leqslant \\ & \leqslant \frac{3}{2} \left(K_{b,a} a_1 + K_{c,a} \frac{l^2}{\pi^2} \right) \int_{Q_\tau} |v_x^n|^2 dx dt + \frac{3}{2} K_h^2 \int_{Q_\tau} \frac{1}{a(x)} dx dt \leqslant \\ & \leqslant \frac{3}{2} \left(K_{b,a} a_1 + K_{c,a} \frac{l^2}{\pi^2} \right) \int_{Q_\tau} |v_x^n|^2 dx dt + \frac{3}{2} T K_h^2 l^{\frac{q-1}{q}} a_2; \quad (32) \end{aligned}$$

здесь использовано неравенство (6), условия (A), (B), оценка (26) а в последнем переходе еще неравенство Гельдера. В силу условия (28) из (32) вытекает оценка

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v_x^n(t, \cdot)\|_2^2 \leqslant 3 T K_h^2 e^{\lambda_0 T} l^{\frac{q-1}{q}} a_2.$$

Поскольку $v(t, 0) = 0$, отсюда следует, что

$$|v^n(t, x)| \leqslant \int_0^l |v_y(t, y)| dy \leqslant l^{1/2} \cdot \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v_x^n(t, \cdot)\|_2^2 \leqslant (3 l T a_2 e^{\lambda_0 T})^{1/2} l^{\frac{q-1}{2q}} K_h, \quad (t, x) \in Q,$$

а значит, в силу соотношения (31) справедлива оценка (29). Теорема доказана. \square

3. Исследование обратной задачи. Рассмотрим обратную задачу (1)–(4) и выведем операторное уравнение для нахождения неизвестной функции $\gamma(x) \in L_\infty^+(0, l)$. Для этого умножим уравнение (1) на $\chi(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$. Учитывая условие наблюдения (4) и предположения (D), (E), после интегрирования по частям получим равенство

$$\begin{aligned} \gamma(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \left[F(x) + a(x)\varphi''(x) - b(x)\varphi'(x) - u(T, x)\chi(T) + u_0(x)\chi(0) + \right. \\ \left. + \int_0^T (\chi'(t) - c(t, x)\chi(t)) u dt \right]. \quad (33) \end{aligned}$$

Введем оператор $\mathcal{A}: L_\infty^+(0, l) \rightarrow L_\infty(0, l)$ по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\gamma)(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \left[F(x) + a(x)\varphi''(x) - b(x)\varphi'(x) - u(T, x)\chi(T) + u_0(x)\chi(0) + \right. \\ \left. + \int_0^T (\chi'(t) - c(t, x)\chi(t)) u dt \right], \quad (34) \end{aligned}$$

где $\gamma(x)$ — произвольная функция из $L_\infty^+(0, l)$, а $u(t, x) \equiv u(t, x; \gamma)$ — решение прямой задачи (1)–(3) с данной $\gamma(x)$ в уравнении (1). Такое решение существует и единствено в силу теорем 1 и 2 из предыдущего раздела. Тогда соотношение (33) может быть записано в виде

$$\gamma = \mathcal{A}(\gamma). \quad (35)$$

Замечание 2. В силу условий (A)–(E) и теорем 1, 2 оператор \mathcal{A} определен корректно и действует из $L_\infty^+(0, l)$ в $L_\infty(0, l)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (A)–(E). Тогда операторное уравнение (35) эквивалентно обратной задаче (1)–(4) в следующем смысле. Если пара $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ является решением обратной задачи, то $\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (35). Обратно, если $\gamma^*(x) \in L_\infty^+(0, l)$ является решением операторного уравнения (35), а $u^*(t, x)$ — решение прямой задачи (1)–(3) с данной $\gamma^*(x)$ в уравнении (1), то пара $\{u^*(t, x), \gamma^*(x)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1)–(4).

Доказательство. Первое утверждение леммы доказано выше при выводе соотношения (33). Докажем второе утверждение. Пусть $\gamma^*(x) \in L_\infty^+(0, l)$ является решением уравнения (35). Рассмотрим функцию $u^*(t, x)$ как единственное обобщенное решение прямой задачи (1)–(3) с выбранной функцией $\gamma(x) \equiv \gamma^*(x)$ в правой части уравнения (1). Положим

$$\varphi^*(x) = \int_0^T u^*(t, x) \chi(t) dt. \quad (36)$$

Тогда

$$\varphi^*(x) \in W_{q^*}^2(0, l), \quad a(x)\varphi''(x) \in L_2(0, l). \quad (37)$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше при выводе (33) (в этих рассуждениях достаточно, чтобы было выполнено условие (37)), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \gamma^*(x)\varphi^*(x) = & \left[F(x) + a(x)\varphi^{*''}(x) - b(x)\varphi^{*'}(x) - u^*(T, x)\chi(T) + u_0(x)\chi(0) + \right. \\ & \left. + \int_0^T (\chi'(t) - c(t, x)\chi(t))u^* dt \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Отметим, что из (38) вытекает, что $a(x)\varphi^{*''}(x) \in L_\infty(0, l)$, откуда $\varphi^{*''}(x) \in L_q(0, l)$.

С другой стороны, $\gamma^*(x)$ является решением уравнения (35), поэтому, учитывая определение оператора \mathcal{A} в (34), имеем

$$\begin{aligned} \gamma^*(x)\varphi(x) = & \left[F(x) + a(x)\varphi''(x) - b(x)\varphi'(x) - u^*(T, x)\chi(T) + u_0(x)\chi(0) + \right. \\ & \left. + \int_0^T (\chi'(t) - c(t, x)\chi(t))u^* dt \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Заметим, что из определения $\varphi^*(x)$ в (36) и условия (E) следует, что

$$\varphi^*(0) = \int_0^T \mu_1(t)\chi(t)dt = \varphi(0), \quad \varphi^*(l) = \int_0^T \mu_2(t)\chi(t)dt = \varphi(l). \quad (40)$$

Положим $z(x) = \varphi(x) - \varphi^*(x)$. Тогда $z(x) \in W_q^2(0, l)$, $a(x)z''(x) \in L_\infty(0, l)$. Вычитая (39) из (38) и учитывая соотношения (40), получаем, что $z(x)$ является обобщенным решением краевой задачи

$$-z'' + \frac{b(x)}{a(x)}z' + \frac{\gamma^*(x)}{a(x)}z = 0, \quad x \in (0, l), \quad (41)$$

$$z(0) = z(l) = 0. \quad (42)$$

Пусть $v(x) \in W_2^1(0, l)$ — произвольная функция, для которой выполнены условия $v(x) \geq 0$, $z(x)v(x) \geq 0$ на $[0, l]$. Тогда из (41), (42) следует, что

$$\int_0^l z'v' dx + \int_0^l \frac{b(x)}{a(x)}z'v dx + \int_0^l \frac{\gamma^*(x)}{a(x)}zv dx = 0.$$

Учитывая, что $\gamma^*(x) \geq 0$, $a(x) \geq 0$, $z(x)v(x) \geq 0$ на $[0, l]$, получаем отсюда неравенство

$$\int_0^l z'v' dx + \int_0^l \frac{b(x)}{a(x)} z'v dx \leq 0.$$

Повторяя теперь рассуждения, проведенные в доказательстве теоремы 8.1 из [1, с. 173] после формулы (8.10), получаем, что $z(x) = 0$ на $[0, l]$, т.е. $\varphi(x) = \varphi^*(x)$ на $[0, l]$, а следовательно, пара $\{u^*(t, x), \gamma^*(x)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1)–(4). Лемма доказана. \square

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (A)–(E), константа M определена в формуле (14). Предположим, что выполнено неравенство*

$$F_1 + \varphi_1 \geq K_{b,a}a_1K_\varphi^* + M_0|\chi(0)| + M(|\chi(T)| + K_\chi^* + K_cK_\chi). \quad (43)$$

Тогда для всех $\gamma(x) \in L_\infty^+(0, l)$ имеем $\mathcal{A}(\gamma)(x) \geq 0$.

Доказательство. Из (43) в силу условий (A)–(E) и оценки (14) вытекает неравенство

$$F(x) + a(x)\varphi''(x) - b(x)\varphi'(x) - u(T, x)\chi(T) + u_0(x)\chi(0) + \int_0^T (\chi'(t) - c(t, x)\chi(t))udt \geq 0,$$

из которого в силу определения оператора \mathcal{A} следует утверждение леммы. \square

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для всех $\gamma(x) \in L_\infty^+(0, l)$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{A}(\gamma)\|_\infty \leq R_0, \quad (44)$$

где

$$R_0 = \frac{1}{\varphi_0} \left[F_2 + \varphi_2 + K_{b,a}a_1K_\varphi^* + M_0|\chi(0)| + M(|\chi(T)| + K_\chi^* + K_cK_\chi) \right]. \quad (45)$$

Доказательство. Оценка (44) есть непосредственное следствие определения оператора \mathcal{A} , условий (A)–(E) и оценки (14). \square

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда оператор \mathcal{A} отображает множество $L_\infty^+(0, l)$ в $B_{R_0}^+$, где R_0 определено в (45).*

Лемма 4 непосредственно следует из лемм 2 и 3.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда оператор \mathcal{A} непрерывен на множестве B_R^+ при всех $R > 0$.*

Доказательство. Пусть $\gamma^{(1)}(x), \gamma^{(2)}(x) \in B_R^+$, а $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x)$ – соответствующие обобщенные решения прямой задачи (1)–(3). Положим

$$v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x), \quad \sigma(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x).$$

Тогда для данных функций выполняется уравнение

$$v_t - a(x)v_{xx} + b(x)v_x + c(t, x)v + \gamma^{(1)}(x)v = -\sigma(x)u^{(2)}(t, x) \quad (46)$$

и краевые условия (10). Заметим, что уравнение (46) совпадает с уравнением (27) при $h(t, x) = -\sigma(x)u^{(2)}(t, x)$, а следовательно, в силу теоремы 3 с учетом оценки (14) имеем

$$|v(t, x)| \leq (3lTa_2e^{\lambda_0 T})^{1/2}l^{\frac{q-1}{2q}}M\|\sigma\|_\infty, \quad (t, x) \in Q, \quad (47)$$

где λ_0 определена в (28). Но тогда в силу определения оператора \mathcal{A} в (34) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})\|_\infty &\leq |\chi(T)|\|v(T, \cdot)\|_\infty + (K_\chi^* + K_cK_\chi)\|v\|_{L_\infty(Q)} \leq \\ &\leq (|\chi(T)| + K_\chi^* + K_cK_\chi)(3lTa_2e^{\lambda_0 T})^{1/2}l^{\frac{q-1}{2q}}M\|\sigma\|_\infty, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\|\mathcal{A}(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})\|_\infty \rightarrow 0$, если $\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_\infty \rightarrow 0$. Лемма доказана. \square

Лемма 6. Пусть выполнены условия леммы 2. Пусть $R > 0$ произвольно. Тогда оператор \mathcal{A} является вполне непрерывным оператором на множестве B_R^+ .

Доказательство. Утверждение леммы есть прямое следствие оценки (13), компактности вложения пространства $C^{0,1/3}(Q)$ в пространство $C(Q)$ и леммы 5. \square

Теорема 4. Пусть выполнены условия (A)–(E) и неравенство (43). Тогда существует обобщенное решение $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ обратной задачи (1)–(4), причем для $\gamma(x)$ справедлива оценка

$$0 \leq \gamma(x) \leq R_0, \quad (48)$$

где R_0 определено в (45), а для функции $u(t, x)$ справедливы оценки (12), (13) с константами C_1, C_2, C_3 , зависящими от $K_\gamma \equiv R_0$, а также оценка (14).

Доказательство. В силу лемм 2–6 оператор \mathcal{A} является вполне непрерывным оператором, переводящим замкнутое выпуклое множество $B_{R_0}^+$ на свою часть. Поэтому по теореме Шаудера о неподвижной точке (см. [10, с. 193]) существует решение $\gamma(x)$ уравнения (35), принадлежащее множеству $B_{R_0}^+$, так что для $\gamma(x)$ выполнена оценка (48).

Пусть $u(t, x)$ — решение прямой задачи (1)–(3) с данным $\gamma(x)$ в уравнении (1). Такое решение существует и единственno в силу теорем 1 и 2. Кроме того, в силу теоремы 2 и оценки (48) для $u(t, x)$ справедливы оценки (12), (13), в которых константы C_1, C_2, C_3 , зависят от $K_\gamma \equiv R_0$, а также оценка (14). Применяя лемму 1, получаем, что пара $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1)–(4). Теорема доказана. \square

Докажем теперь теорему единственности решения обратной задачи (1)–(4).

Теорема 5. Пусть выполнены условия (A)–(E). Предположим, что справедливо неравенство

$$\frac{1}{\varphi_0}(|\chi(T)| + K_\chi^* + K_c K_\chi)(3lTa_2 e^{\lambda_0 T})^{1/2} l^{\frac{q-1}{2q}} M < 1, \quad (49)$$

где M из (14), а λ_0 из (28). Тогда обратная задача (1)–(4) не может иметь более одного обобщенного решения.

Доказательство. Предположим, что существуют два различных решения $\{u^{(1)}, \gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)}, \gamma^{(2)}\}$ этой обратной задачи. Положим

$$v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x), \quad \sigma(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x).$$

Тогда для пары $\{v, \sigma\}$ справедливы соотношения (46), (10), а также соотношение

$$\int_0^T v(t, x) \chi(t) dt = 0. \quad (50)$$

Умножим (46) на $\chi(t)$ и проинтегрируем результат по $[0, T]$. Учитывая соотношения (50) и (4), после интегрирования по частям получим, что

$$\sigma(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \left[\int_0^T (\chi'(t) - c(t, x)\chi(t)) v(t, x) dt - \chi(T)v(T, x) \right]. \quad (51)$$

Заметим, что при доказательстве леммы 5 для функции $v(t, x)$ — решения задачи (46), (10) — была получена оценка (47), где константа M из (14), а λ_0 из (28). Но тогда из соотношения (51) получаем неравенство

$$\|\sigma\|_\infty \leq \frac{1}{\varphi_0}(|\chi(T)| + K_\chi^* + K_c K_\chi)(3lTa_2 e^{\lambda_0 T})^{1/2} l^{\frac{q-1}{2q}} M \|\sigma\|_\infty,$$

откуда в силу условия (49) вытекает, что $\sigma(x) = 0$ на $[0, l]$, т.е. $\gamma^{(1)}(x) = \gamma^{(2)}(x)$. Но тогда и $u^{(1)}(t, x) = u^{(2)}(t, x)$ в Q в силу единственности решения прямой задачи (1)–(3) (см. теорему 1). Таким образом, решения $\{u^{(1)}, \gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)}, \gamma^{(2)}\}$ обратной задачи (1)–(4) совпадают. Теорема 5 доказана. \square

4. Некоторые примеры. В данном разделе приведем примеры конкретных обратных задач, для которых применимы доказанные в разделе 3 теоремы существования и единственности.

Пример 1. Рассмотрим в Q обратную задачу

$$u_t - x^{1/2}u_{xx} + \gamma(x)u = 0, \quad (52)$$

$$u(0, x) = \frac{6}{T^3}(l^{1/2}x + l), \quad x \in [0, l], \quad (53)$$

$$u(t, 0) = \frac{6l}{T^3}, \quad u(t, l) = \frac{6}{T^3}(l^{3/2} + l), \quad t \in [0, T], \quad (54)$$

$$\int_0^T u(t, x)t(T-t)dt = x^{3/2} + l, \quad x \in [0, l]. \quad (55)$$

Для обратной задачи (52)–(55) имеем

$$\begin{aligned} a(x) &= x^{1/2}, \quad b(x) = 0, \quad c(t, x) = f(t, x) = 0, \quad u_0(x) = \frac{6}{T^3}(l^{1/2}x + l), \quad \mu_1(t) = \frac{6l}{T^3}, \\ \mu_2(t) &= \frac{6}{T^3}(l^{3/2} + l), \quad \chi(t) = t(T-t), \quad \varphi(x) = x^{3/2} + l. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для задачи (52)–(55) выполнены условия (A)–(E). Кроме того, константы, входящие в условие (43) из теоремы 4 и в условие (49) из теоремы 5, могут быть выбраны следующими:

$$\begin{aligned} F_1 = F_2 &= 0, \quad \varphi_0 = l, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{3}{4}, \quad K_\varphi^* = \frac{3l^{1/2}}{2}, \quad q = \frac{3}{2}, \quad a_1 = l^{1/2}, \quad a_2 = 16^{1/3}l^{1/6}, \\ K_\chi &= \frac{T^3}{6}, \quad K_\chi^* = \frac{T^2}{2}, \quad K_{b,a} = K_c = 0, \quad M_0 = M = \frac{6}{T^3}(l^{3/2} + l). \end{aligned}$$

Тогда условие (43) имеет вид

$$1 \geq \frac{4l}{T}(l^{1/2} + 1), \quad (56)$$

а условие (49) — вид

$$6^{3/2}2^{1/6} \frac{l^{3/4}}{2T^{1/2}}(l^{1/2} + 1) < 1. \quad (57)$$

Таким образом, условия (56) и (57) будут выполнены либо при достаточно большом T (и фиксированном l), либо при достаточно малом l (и фиксированном T). В обоих этих случаях для задачи (52)–(55) выполняются условия теорем 4 и 5, а следовательно, обратная задача (52)–(55) имеет решение, которое будет единственным.

Пример 2. Рассмотрим в Q обратную задачу для уравнения (52), но с краевыми условиями

$$u(0, x) = l^{1/2}x + l, \quad x \in [0, l], \quad (58)$$

$$u(t, 0) = l, \quad u(t, l) = l^{3/2} + l, \quad t \in [0, T], \quad (59)$$

и дополнительным условием наблюдения

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(t, x)dt = x^{3/2} + l, \quad x \in [0, l]. \quad (60)$$

Заметим, что условие наблюдения (60) имеет простой физический смысл: это взятие среднего по времени от функции $u(t, x)$ на промежутке $[0, T]$.

Для обратной задачи (52), (58)–(60) имеем

$$\begin{aligned} a(x) &= x^{1/2}, \quad b(x) = 0, \quad c(t, x) = f(t, x) = 0, \quad u_0(x) = l^{1/2}x + l, \quad \mu_1(t) = l, \\ \mu_2(t) &= l^{3/2} + l, \quad \chi(t) = \frac{1}{T}, \quad \varphi(x) = x^{3/2} + l. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для задачи (52), (58)–(60) выполнены условия (A)–(E), при этом константы, входящие в условие (43) из теоремы 4 и в условие (49) из теоремы 5, могут быть выбраны следующими:

$$\begin{aligned} F_1 = F_2 = 0, \quad \varphi_0 = l, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{3}{4}, \quad K_\varphi^* = \frac{3l^{1/2}}{2}, \quad q = \frac{3}{2}, \quad a_1 = l^{1/2}, \quad a_2 = 16^{1/3}l^{1/6}, \\ K_\chi, \quad K_\chi^* = 0, \quad K_{b,a} = K_c = 0, \quad M_0 = M = (l^{3/2} + l). \end{aligned}$$

Поэтому условие (43) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{3}{4} \geq \frac{2l}{T}(l^{1/2} + 1), \quad (61)$$

а условие (49) — вид

$$6^{1/2}2^{1/6}\frac{l^{3/4}}{T^{1/2}}(l^{1/2} + 1) < 1. \quad (62)$$

Как и в примере 1, эти условия будут выполнены либо при достаточно большом T (l фиксировано), либо при достаточно малом l (T фиксировано). В обоих случаях для задачи (52), (58)–(60) будут выполнены условия теорем 4 и 5, а следовательно, обратная задача (52), (58)–(60) имеет решение, которое будет единственным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
2. Камынин В. Л., Костин А. Б. Две обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении // Диффер. уравн. — 2010. — 46, № 3. — С. 372–383.
3. Камынин В. Л. Обратная задача определения коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении в классе L_∞ // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — 61, № 3. — С. 413–427.
4. Камынин В. Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Мат. заметки. — 2013. — 94, № 2. — С. 207–217.
5. Камынин В. Л. Обратная задача определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с неограниченными коэффициентами // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 5. — С. 832–841.
6. Коэнанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. — 2004. — 76, № 6. — С. 840–853.
7. Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 1979. — № 5. — С. 217–272.
8. Кружков С. Н. Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1969.
9. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
10. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1982.
11. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении, I // Сиб. мат. ж. — 1992. — 33, № 3. — С. 146–155.
12. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении, II // Сиб. мат. ж. — 1993. — 34, № 5. — С. 147–162.
13. Прилепко А. И., Тихонов И. В. Принцип позитивности решения в линейной обратной задаче и его применение к коэффициентной задаче теплопроводности // Докл. РАН. — 1999. — 394, № 1. — С. 21–23.
14. Bouchouev I., Isakov V. Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets // Inv. Probl. — 1999. — 15, № 3. — P. 95–116.
15. Cannarsa P., Martinez P., Vancostenoble J. Global Carleman estimates for degenerate parabolic operators with applications // Mem. Am. Math. Soc. — 2016. — 239, № 1133. — P. 1–207.
16. Hussein M. S., Lesnic D., Kamynin V. L., Kostin A. B. Direct and inverse source problem for degenerate parabolic equations // J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2020. — 28, № 3. — P. 425–448.

17. Kamynin V. L. Inverse problem of determining the absorption coefficient in a degenerate parabolic equation in the class of L_2 -functions// J. Math. Sci. — 2020. — 250, № 2. — P. 322–336.
18. Prilepko A. I., Kamynin V. L., Kostin A. B. Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2018. — 26, № 4. — P. 523–539.

Камынин Виталий Леонидович

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва

E-mail: v1kamynin2008@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 82–97
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-82-97

УДК 517.957

О РАЗРЕШИМОСТИ ДРОБНО-НАГРУЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2022 г. М. Т. КОСМАКОВА, Л. Ж. КАСЫМОВА

Аннотация. В работе исследуется краевая задача для нагруженного дробного уравнения теплопроводности; нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной Капуто по временной производной.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, дробное уравнение, дробная производная.

ON THE SOLVABILITY OF A FRACTIONAL LOADED HEAT CONDUCTION PROBLEM

© 2022 М. Т. KOSMAKOVA, L. Zh. KASYMOVA

ABSTRACT. In this paper, we study a boundary-value problem for the loaded fractional heat equation; the loaded term is represented as the fractional Caputo derivative with respect to the time derivative.

Keywords and phrases: heat equation, fractional equation, fractional derivative.

AMS Subject Classification: 35G30

1. Введение. Исследования по дробным дифференциальным уравнениям активно проводились в предыдущие десятилетия (см. [8, 9, 12, 17]); в настоящее время интерес к этой области не ослабевает (см. [14, 21]). Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и ее приложениями в различных областях науки. Важный раздел теории дифференциальных уравнений составляют нагруженные уравнения, в которых нагруженное слагаемое содержит дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор, включающий операцию взятия следа от искомой функции на многообразиях размерности, меньшей размерности области определения искомой функции. В [7] на многочисленных примерах А. М. Нахушев показал практическую и теоретическую важность исследований нагруженных уравнений. В работах М. Т. Дженалиева и учеников его научной школы теория нагруженных уравнений получила дальнейшее развитие (см. [2–4]).

Интерес представляют краевые задачи для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности, когда нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной. В [5] нагруженное слагаемое — след производной дробного порядка на многообразии $x = t$, а именно, нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной Римана—Лиувилля. Возникающее сингулярное интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при определенных значениях порядка дробной производной. В [6, 20] нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной Капуто по временной переменной и пространственной переменной, причем порядок

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № АР08955795, 2020–2021).

производной в нагруженном слагаемом меньше порядка дифференциальной части. В [6] доказано, что существует непрерывность справа по порядку дробной производной. Непрерывность слева нарушена. В [20] имеет место непрерывность по порядку производной в нагруженном слагаемом задачи.

В данной работе исследуется краевая задача для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности: нагруженное слагаемое уравнения представлено в виде дробной производной Капуто по временной производной, причем, в отличие от работы [6], порядок дробной производной выше порядка по временной переменной в дифференциальной части уравнения. В разделе 2 приведены некоторые понятия и ранее известные результаты из теории дробного исчисления, а также даны определения и некоторые из наиболее полезных свойств некоторых специальных функций, которые будут использоваться на протяжении всей статьи. В разделе 3 дана постановка неоднородной краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой в естественных для исследования функциональных классах. Раздел 4 посвящен редукции поставленной краевой задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ядром, содержащим специальную функцию, а именно, вырожденную гипергеометрическую функцию Трикоми. В разделе 5 рассмотрены предельные случаи для порядка дробной производной слагаемого с нагрузкой в уравнении и показана непрерывность по порядку дробной производной. В разделе 6 установлена разрешимость интегрального уравнения в зависимости от порядка дробной производной в нагруженном члене в уравнении краевой задачи и характера линии, на которой задана нагрузка, при малых значениях времени.

2. Необходимые сведения по дробным производным и специальным функциям.

Приведем некоторые известные понятия и результаты.

Определение 1 (см. [12]). Пусть $f(t) \in L_1[a, b]$. Производная Римана—Лиувилля порядка β , где $n - 1 < \beta < n$, определяется равенством

$${}_r D_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\beta-n+1}} d\tau, \quad \beta, a \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Для практических приложений важно определение дробной производной Капуто. Оно получается перестановкой операций дифференцирования и интегрирования в (1).

Определение 2 (см. [15]). Пусть $f(t) \in AC^n[a, b]$ (т.е. $f^{(n-1)}(t)$ — абсолютно непрерывная функция). Производная Капуто порядка β , $n - 1 < \beta < n$, определяется равенством

$${}_c D_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\beta-n+1}} d\tau; \quad \beta, a \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Из формулы (1) следует, что

$${}_r D_{a,t}^0 f(t) = f(t), \quad {}_r D_{a,t}^n f(t) = f^{(n)}(t), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Производные, определенные формулами (1) и (2), связаны соотношением (см., например, [16])

$${}_c D_{a,t}^\beta f(t) = {}_r D_{a,t}^\beta \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right]. \quad (4)$$

Дробное дифференцирование по Капуто может быть приложено не для всех функций, в отличие от дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля. Известно, что основные соотношения, определенные при помощи дробных производных Капуто, обладают преимуществом при моделировании вязкоупругости. При этом упрощается понимание физического смысла поставленной задачи, поскольку начальные условия можно записать, ограничившись классическими производными целого порядка. Другими словами, производная по Капуто более практична и удобна в использовании, но применима к меньшему количеству функций.

Дробное исчисление можно рассматривать как «лабораторию» для специальных функций. Ладим определения и некоторые свойства специальных функций, которые понадобятся нам на протяжении всей работы.

Интеграл ошибок и дополнительный интеграл ошибок имеют вид:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\zeta^2) d\zeta, \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-\zeta^2) d\zeta = 1 - \operatorname{erf}(z).$$

Линейно независимыми решениями уравнениями

$$[zD^2 + (c-z)D - a]\omega(z) = 0, \quad D = \frac{d}{dz},$$

являются функции $\Phi(a, c; z)$ и $\Psi(a, c; z)$, где $\Phi(a, c; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция

$$\Phi(a, c; z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

и $\Psi(a, c; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми

$$\Psi(a, c; z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \Phi(a, c; z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; z)$$

(см. [18, с. 119], [1, с. 1072]). Вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми может быть представлена в виде интеграла (см. [11, с. 365, формула 72.2(7)]):

$$\Psi(a, c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \xi^{a-1} (1+\xi)^{c-a-1} e^{-z\xi} d\xi, \quad \operatorname{Re} a > 0. \quad (5)$$

Для больших значений z имеет место асимптотическое представление

$$\Psi(a, c; z) \sim z^{-a} {}_2F_0 \left(a, 1+a-c; -\frac{1}{z} \right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{3\pi}{2} - \epsilon, \quad \epsilon > 0, \quad (6)$$

(см. [18, с. 127, формула 4.7 (1)]), где ${}_2F_0(a, 1+a-c; -1/z)$ — обобщенный гипергеометрический ряд, определяемый формулой

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}$$

(см. [18, с. 136]), где $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ — символ Похгаммера.

Вырожденные гипергеометрические функции при некоторых значениях своих аргументов связаны с функцией параболического цилиндра (функцией Вебера) $D_\nu(z)$

$$\begin{aligned} D_\nu(z) &= 2^{(\nu-1)/2} e^{-z^2/4} \Psi \left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2} \right) = \\ &= 2^{\nu/2} e^{-z^2/4} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} \Phi \left(-\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2} \right) - \frac{\sqrt{2\pi}z}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})} \Phi \left(\frac{1-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

(см. [18, с. 212]). Формула (7) является определением функции параболического цилиндра $D_\nu(z)$. Имеет место также представление вырожденной гипергеометрической функции Трикоми через функцию Уиттекера $W_{\lambda,\mu}(z)$ (см. [11, с. 264, формула 2.20]):

$$\Psi(a, b; z) = z^{-b/2} e^{z/2} W_{b/2-a, (b-1)/2}(z). \quad (8)$$

Точка $z = 0$ является для функции $W_{\lambda,\mu}(z)$ точкой ветвления, а $z = \infty$ — существенно особой точкой (см. [1, с. 1074]). Поэтому будем рассматривать эту функцию только для $|\arg z| < \pi$.

Естественным развитием дробного исчисления и теории нагруженных уравнений является теория дробно-нагруженных дифференциальных уравнений. На первом этапе исследования воспользуемся методом интегральных уравнений, в котором краевая задача сводится к решению соответствующего интегрального уравнения, с дальнейшим преобразованием ядра полученного уравнения. Такие методы позволяют ставить краевые задачи более компактно, чем дифференциальные уравнения, с учетом всех условий задачи.

Рассматриваемая задача сводится к интегральному уравнению путем обращения дифференциальной части уравнения.

Известно (см. [19, с. 57]), что в области $Q = \{(x, t) \mid x > 0, t > 0\}$ решение краевой задачи теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(x, t), \quad u|_{t=0} = f(x), \quad u|_{x=0} = g(x),$$

описывается формулой

$$u(x, t) = \int_0^\infty G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi + \int_0^t H(x, t - \tau) g(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (9)$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right) \right\}, \quad H(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at^{3/2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

Функция Грина $G(x, \xi, t - \tau)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) d\xi = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right). \quad (10)$$

3. Постановка граничной задачи Дирихле для уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой. Итак, в области $Q = \{(x, t) \mid x > 0, t > 0\}$ рассматривается задача

$$u_t - u_{xx} + \lambda \{ {}_c D_{0,t}^\beta u(x, t) \}|_{x=\gamma(t)} = f(x, t), \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad (11)$$

где λ — комплексный параметр, ${}_c D_{0,t}^\beta u(x, t)$ — производная Капуто порядка β , $1 < \beta < 2$; $\gamma(t)$ — непрерывная возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$. Задача исследуется в классе функций $u(x, t) \in AC^2(0, +\infty) \cap C^1$ по переменной t , $t \in [0, T]$. Классы определяются из естественного требования существования и сходимости несобственных интегралов, возникающих в ходе исследования.

4. Сведение задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Лемма 1. Краевая задача (11) сводится к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ядром, содержащим специальную функцию.

Доказательство. Обратим дифференциальную часть задачи (11) по формуле (9):

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) \mu(\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$\mu(t) = \{ {}_c D_{0,t}^\beta u(x, t) \}|_{x=\gamma(t)} = \left\{ \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{u_{\tau\tau}(x, \tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau \right\} \Big|_{x=\gamma(t)}. \quad (12)$$

С учетом соотношения (10), вводя обозначение

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (13)$$

получим следующее представление решения задачи (11):

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t). \quad (14)$$

Подействуем оператором дробного дифференцирования по формуле (2) на полученное представление (14), а именно, от представления (14) найдем производную Капуто порядка β по t при $1 < \beta < 2$ и затем положим $x = \gamma(t)$. Предварительно вычислим

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau) d\tau = \mu(t) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)} \right) \mu(\tau) d\tau;$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau) d\tau &= \\ &= \mu'(t) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t x \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)} \right) \left[-\frac{3}{2(t-\tau)^{5/2}} + \frac{x^2}{4(t-\tau)^{7/2}} \right] \mu(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Согласно формуле производной Капуто порядка β при $1 < \beta < 2$ имеем

$$\begin{aligned} {}_c D_{0,t}^\beta \left[\int_0^t \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau) d\tau \right] &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}} \times \\ &\times \left\{ \mu'(\tau) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\tau x \exp \left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)} \right) \left[-\frac{3}{2(\tau-\theta)^{5/2}} + \frac{x^2}{4(\tau-\theta)^{7/2}} \right] \mu(\theta) d\theta \right\} d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \left[\int_0^t \frac{\mu'(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau + \frac{3x}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\tau \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\theta)^{5/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)} \right) \mu(\theta) d\theta d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^3}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\tau \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\theta)^{7/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)} \right) \mu(\theta) d\theta d\tau \right]. \end{aligned}$$

Первый интеграл вычисляем интегрированием по частям, во втором и третьем интегралах меняем порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} {}_c D_{0,t}^\beta \left[\int_0^t \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau) d\tau \right] &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \times \left[\lim_{\tau \rightarrow t-0} \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} - (\beta-1) \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau + \right. \\ &+ \frac{3x}{4\sqrt{\pi}} \mu(\theta) \left(\int_\theta^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\theta)^{5/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)} \right) d\tau \right) d\theta - \\ &\quad \left. - \frac{x^3}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu(\theta) \left(\int_\theta^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\theta)^{7/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)} \right) d\tau \right) d\theta \right]. \end{aligned}$$

Потребуем выполнения условия

$$\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} \sim (t-\tau)^\varepsilon \quad \text{при } \tau \rightarrow t-0, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\beta \left[\int_0^t \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau) d\tau \right] &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \left[\frac{3x}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu(\theta) I_1(x, t, \theta, \beta) d\theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^3}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu(\theta) I_2(x, t, \theta, \beta) d\theta \right] - \frac{\beta-1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(x, t, \theta, \beta) &= \int_\theta^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1} (\tau-\theta)^{5/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)} \right) d\tau, \\ I_2(x, t, \theta, \beta) &= \int_\theta^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1} (\tau-\theta)^{7/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Выполняя замену

$$\begin{aligned} z &= \frac{\tau-\theta}{t-\tau} \Rightarrow \tau = \frac{\theta+zt}{z+1}; \quad 0 \leq z < +\infty; \\ d\tau &= \frac{t-\theta}{(z+1)^2} dz; \quad t-\tau = t - \frac{\theta+zt}{z+1} = \frac{t-\theta}{z+1}; \quad \tau-\theta = \frac{\theta+zt}{z+1} - \theta = \frac{z(t-\theta)}{z+1}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} I_1(x, t, \theta, \beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{(z+1)^{\beta-1} (z+1)^{5/2} (t-\theta)}{(t-\theta)^{\beta-1} z^{5/2} (\tau-\theta)^{5/2} (z+1)^2} \exp \left(-\frac{x^2(z+1)}{4z(\tau-\theta)} \right) dz = \\ &= \frac{1}{(t-\theta)^{\beta+1/2}} \int_0^{+\infty} (z+1)^{\beta-1/2} z^{-5/2} \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)} \left(1 + \frac{1}{z} \right) \right) dz = \\ &= \frac{1}{(t-\theta)^{\beta+1/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)} \right) \int_0^{+\infty} (z+1)^{\beta-1/2} z^{-5/2} \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)} \frac{1}{z} \right) dz \end{aligned}$$

После замены переменной $v = 1/z$ последнее выражение примет вид

$$\begin{aligned} I_1(x, t, \theta, \beta) &= \frac{1}{(\tau-\theta)^{\beta+1/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)} \right) \int_0^\infty \frac{(v+1)^{\beta-1/2} v^{5/2}}{v^{\beta-1/2} v^2} \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)} v \right) dv = \\ &= \frac{1}{(t-\theta)^{\beta+1/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)} \right) \int_0^\infty (v+1)^{\beta-1/2} v^{1-\beta} \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)} v \right) dv. \end{aligned}$$

Интеграл в последнем выражении вычисляем по формуле 2.3.6(9) из [10, с. 286]:

$$I_1(x, t, \theta, \beta) = \frac{\Gamma(2-\beta)}{(\tau-\theta)^{\beta+1/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)} \right) \Psi \left(2-\beta; \frac{5}{2}; \frac{x^2}{4(t-\theta)} \right). \quad (16)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} I_2(x, t, \theta, \beta) &= \frac{1}{(t-\theta)^{\beta+3/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)} \right) \int_0^{+\infty} (z+1)^{\beta+1/2} z^{-7/2} \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)} \frac{1}{z} \right) dz = \\ &= \frac{1}{(t-\theta)^{\beta+3/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)} \right) \int_0^\infty (v+1)^{\beta+1/2} v^{1-\beta} \exp \left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)} v \right) dv, \end{aligned}$$

или

$$I_2(x, t, \theta, \beta) = \frac{\Gamma(2 - \beta)}{(t - \theta)^{\beta+3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \theta)}\right) \Psi\left(2 - \beta; \frac{7}{2}; \frac{x^2}{4(t - \theta)}\right). \quad (17)$$

Здесь $\Psi(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми.

Подставив выражения (16) и (17) в (15), находим:

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\beta \left[\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right] &= \\ &= \frac{3x}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t - \tau)^{\beta+1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \Psi\left(2 - \beta; \frac{5}{2}; \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) d\tau - \\ &- \frac{x^3}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t - \tau)^{\beta+3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \Psi\left(2 - \beta; \frac{7}{2}; \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) d\tau - \\ &- \frac{\beta - 1}{\Gamma(2 - \beta)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t - \tau)^\beta} d\tau. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом (18) при $x = \gamma(t)$ из (14) получим:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= -\lambda \left[\frac{3\gamma(t)}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t - \tau)^{\beta+1/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t - \tau)}\right) \Psi\left(2 - \beta; \frac{5}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t - \tau)}\right) - \right. \\ &- \frac{\gamma^3(t)}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t - \tau)^{\beta+3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t - \tau)}\right) \Psi\left(2 - \beta; \frac{7}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t - \tau)}\right) d\tau - \\ &\left. - \frac{\beta - 1}{\Gamma(2 - \beta)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t - \tau)^\beta} d\tau \right] + f_2(t), \end{aligned}$$

где

$$f_2(t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \beta)} \int_0^t \frac{\partial^2 f_1(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} \frac{1}{(t - \tau)^{\beta-1}} d\tau \Big|_{x=\gamma(t)}, \quad (19)$$

или

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &= \left[\frac{\gamma^3(t)}{8\sqrt{\pi}(t - \tau)^{\beta+3/2}} \Psi\left(2 - \beta; \frac{7}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t - \tau)}\right) - \frac{3\gamma(t)}{4\sqrt{\pi}(t - \tau)^{\beta+1/2}} \Psi\left(2 - \beta; \frac{5}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t - \tau)}\right) \right] \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t - \tau)}\right) - \frac{\beta - 1}{\Gamma(2 - \beta)(t - \tau)^\beta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках в равенстве (21), обозначив его через $A(t, \tau, \beta)$. Введем обозначение

$$z = \frac{\gamma^2(t)}{4(t - \tau)} \Rightarrow t - \tau = \frac{\gamma^2(t)}{4z}.$$

Тогда

$$\frac{\gamma^3(t)}{8(t-\tau)^{\beta+3/2}} = \frac{\gamma^3(t)4^{\beta+3/2}z^{\beta+3/2}}{8(\gamma^2(t))^{\beta+3/2}} = \left(\frac{2}{\gamma(t)}\right)^{2\beta} z^{\beta+3/2};$$

$$\frac{3\gamma(t)}{4(t-\tau)^{\beta+1/2}} = \frac{3\gamma(t)4^{\beta+1/2}z^{\beta+1/2}}{4(\gamma^2(t))^{\beta+1/2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{\gamma(t)}\right)^{2\beta} z^{\beta+1/2}.$$

Отсюда получим

$$A(t, \tau, \beta) = \frac{\gamma^3(t)}{8\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+3/2}} \Psi\left(2-\beta; \frac{7}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) - \frac{3\gamma(t)}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+1/2}} \Psi\left(2-\beta; \frac{5}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\gamma(t)}\right)^{2\beta} z^{\beta+1/2} \left[z\Psi\left(2-\beta; \frac{7}{2}; z\right) - \frac{3}{2}\Psi\left(2-\beta; \frac{5}{2}; z\right) \right] \Big|_{z=\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}}. \quad (22)$$

Согласно [13] введем обозначения

$$\begin{aligned} \Psi(a+) &= \Psi(a+1; c; z), & \Psi(c+) &= \Psi(a; c+1; z), \\ \Psi(a-) &= \Psi(a-1; c; z), & \Psi(c-) &= \Psi(a; c-1; z). \end{aligned}$$

Тогда согласно формулам (7) и (6) из [13, с. 246] имеем

$$\begin{aligned} z\Psi\left(2-\beta; \frac{7}{2}; z\right) - \frac{3}{2}\Psi\left(2-\beta; \frac{5}{2}; z\right) &= \\ &= \left(\frac{1}{2} + \beta\right)\Psi\left(2-\beta; \frac{5}{2}; z\right) + \Psi\left(1-\beta; \frac{5}{2}; z\right) - \frac{3}{2}\Psi\left(2-\beta; \frac{5}{2}; z\right) = \\ &= (\beta-1)\Psi\left(2-\beta; \frac{5}{2}; z\right) + \Psi\left(1-\beta; \frac{5}{2}; z\right) = \\ &= (\beta-1)\left(\frac{1}{1-\beta}\Psi\left(1-\beta; \frac{5}{2}; z\right) - \frac{1}{1-\beta}\Psi\left(1-\beta; \frac{3}{2}; z\right)\right) + \Psi\left(1-\beta; \frac{5}{2}; z\right) = \\ &= \Psi\left(1-\beta; \frac{3}{2}; z\right). \end{aligned}$$

Теперь выражение (22) примет вид с учетом обозначения для z

$$\begin{aligned} A(t, \tau, \beta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\gamma(t)}\right)^{2\beta} \left(\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)^{\beta+1/2} \Psi\left(1-\beta; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) = \\ &= \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+1/2}} \Psi\left(1-\beta; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right). \end{aligned}$$

Ядро (21) можно переписать в виде

$$K_\beta(t, \tau) = \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+1/2}} \Psi\left(1-\beta; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) - \frac{\beta-1}{\Gamma(2-\beta)(t-\tau)^\beta}. \quad (23)$$

Итак, краевая задача (11) сведена к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра (21) с правой частью (19) и ядром (23). Лемма доказана. \square

5. Исследование на непрерывность по порядку производной в нагруженном слагаемом краевой задачи.

Лемма 2. Для граничной задачи (11) имеет место непрерывность ядра редуцированного интегрального уравнения по порядку β производной в нагруженном слагаемом уравнения (11).

Доказательство. Рассмотрим предельные случаи для порядка дробной производной члена с нагрузкой в уравнении (11).

I. $\beta = 1$. Тогда из формул (3), (4) и краевых условий (11) имеем

$$D_{0,t}^1 u(x, t) = u_t(x, t).$$

Введя обозначение $\mu(t) = u_t(x, t)|_{x=\gamma(t)}$, из задачи (11) при $\beta = 1$ получим граничную задачу

$$u_t - u_{xx} + \lambda\mu(t) = f(x, t), \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0.$$

Запишем ее решение, обращая дифференциальную часть по формуле (9) и учитывая (10):

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t). \quad (24)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} {}_c D_{0,t}^1 \left\{ \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right\} &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right\} = \\ &= \mu(t) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) \mu(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

то, дифференцируя (24) по t и подставляя $x = \gamma(t)$, получим

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{1+\lambda} \int_0^t K_1(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t), \quad (25)$$

где

$$f_2(t) = \frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=\gamma(t)}, \quad K_1(t, \tau) = \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right). \quad (26)$$

С другой стороны, найдём предел при $\beta \rightarrow 1+0$ от (23). Функция под знаком предела определена и непрерывна при $\beta = 1$, следовательно, можно совершить предельный переход:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 1+0} K_\beta(t, \tau) &= \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \Psi\left(0; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) = \\ &= \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right). \end{aligned}$$

Полученное выражение совпадает с ядром (26), так как $\Psi(0, b, z) = 1$. Итак,

$$\lim_{\beta \rightarrow 1+0} K_\beta(t, \tau) = K_1(t, \tau).$$

II. $\beta = 2$. Тогда из формул (3), (4) имеем $D_{0,t}^2 u(x, t) = u_{tt}(x, t)$. Из задачи (11) при $\beta = 2$ получим граничную задачу

$$u_t - u_{xx} + \lambda\mu(t) = f(x, t), \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0,$$

где $\mu(t) = u_{tt}(x, t)|_{x=\gamma(t)}$. Запишем ее решение, обращая дифференциальную часть по формуле (9) и учитывая формулу (10):

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t), \quad (27)$$

где функция $f_1(x, t)$ определяется формулой (13). Так как

$${}_c D_{0,t}^2 \left\{ \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right\} =$$

$$= \mu'(\tau) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t x \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) \left[-\frac{3}{2(t-\tau)^{5/2}} + \frac{x^2}{4(t-\tau)^{7/2}} \right] \mu(\tau) d\tau,$$

то из (27) получим

$$\mu(t) = -\lambda \left\{ \mu'(t) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \left[-\frac{3\gamma(t)}{2(t-\tau)^{5/2}} + \frac{\gamma^3(t)}{4(t-\tau)^{7/2}} \right] \mu(\tau) d\tau \right\} + f_2(t),$$

где

$$f_2(t) = \left. \frac{\partial^2 f_1(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=\gamma(t)}.$$

Здесь использовано равенство (4):

$${}_c D_{0,t}^2 f(t) = {}_r D_{0,t}^2 [f(t) - f(0) - f'(0)t], \quad f|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad {}_c D_{0,t}^2 f(t) = {}_r D_{0,t}^2 f(t) = f''(t).$$

Получим интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра второго рода

$$\lambda \mu'(t) + \mu(t) - \lambda \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \left[\frac{\gamma^3(t)}{4(t-\tau)^{7/2}} - \frac{3\gamma(t)}{2(t-\tau)^{5/2}} \right] \mu(\tau) d\tau = f_2(t). \quad (28)$$

С другой стороны, найти предел при $\beta \rightarrow 2 - 0$ от (23), как в случае I, мы не можем, так как $a < 0$ для функции Трикоми $\Psi(a, c, z)$. Возьмём предел при $\beta \rightarrow 2 - 0$ от эквивалентного выражения (21), учитывая, что $\Psi(0, c, z) = 1$:

$$\lim_{\beta \rightarrow 2-0} K_\beta(t, \tau) = \left(\frac{\gamma^3(t)}{8\sqrt{\pi}(t-\tau)^{7/2}} - \frac{3\gamma(t)}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{5/2}} \right) \cdot \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right).$$

Это выражение совпадает с ядром в уравнении (28), но при $\beta = 2$ исходная задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению. Лемма 2 доказана. \square

6. Исследование интегрального уравнения (20) на разрешимость. Основной результат. Ядро (23) интегрального уравнения (20) имеет особенности при $\tau = t$ и $t = 0$. Непосредственное исследование уравнения (20) затруднительно, так как его ядро содержит вырожденную гипергеометрическую функцию Трикоми. Найдем интеграл

$$\int_0^t K_\beta(t, \tau) d\tau$$

и исследуем поведение полученной функции при малых значениях t .

Теорема. Интегральное уравнение (20) с ядром и правой частью, определяемыми формулами (23) и (19) соответственно, для $\gamma(t) \sim t^\omega$, $\omega > 0$ при $t \rightarrow +0$ однозначно разрешимо в классе непрерывных функций при любой непрерывной правой части, если $0 < \omega < 1/2$ при $1 \leq \beta < 2$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл от (23):

$$\int_0^t K_\beta(t, \tau) d\tau = \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi\left(1-\beta; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)}{(t-\tau)^{\beta+1/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) d\tau - \frac{\beta-1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\beta}. \quad (29)$$

Поскольку второй интеграл в (29)

$$\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\beta} = - \lim_{\tau \rightarrow t-0} \frac{1}{(\beta-1)(t-\tau)^{\beta-1}} + \frac{t^{1-\beta}}{\beta-1}$$

расходится при $1 < \beta < 2$, то для сходимости интеграла (29) необходимо (но не достаточно), чтобы первый интеграл был равен $-\infty$. Далее, применяя правило Лопитала для вычисления предельных значений $\tau \rightarrow t - 0$, найдем достаточные условия для выполнения предельного соотношения

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K_\beta(t, \tau) d\tau = 0.$$

Вычислим интеграл

$$I(t, \beta) = \int_0^t \frac{\Psi\left(1 - \beta; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)}{(t-\tau)^{\beta+1/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) d\tau; \quad (30)$$

для этого воспользуемся представлением функции Трикоми через функцию Уиттекера по формуле (8):

$$\Psi\left(1 - \beta; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) = \left(\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)^{-3/4} \exp\left(\frac{\gamma^2(t)}{8(t-\tau)}\right) W_{\beta-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}}\left(\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right).$$

Тогда интеграл (30) принимает вид

$$\begin{aligned} I(t, \beta) &= \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \Psi\left(1 - \beta; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) d\tau = \\ &= \frac{2^{3/2}}{(\gamma(t))^{3/2}} \int_0^t (t-\tau)^{1/4-\beta} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{8(t-\tau)}\right) W_{\beta-1/4; 1/4}\left(\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) d\tau = \\ &= \frac{2^{2\beta-1}}{(\gamma(t))^{2\beta-1}} \int_{\gamma^2(t)/(4t)}^{+\infty} z^{\beta-9/4} e^{-z/2} W_{\beta-1/4; 1/4}(z) dz = \\ &= \frac{2^{3/2} t^{5/4-\beta}}{(\gamma(t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{8t}\right) W_{\beta-5/4; 1/4}\left(\frac{\gamma^2(t)}{4t}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь введена замена $z = \gamma^2(t)/(4(t-\tau))$ и использована формула 2.19.5(13) из [11, с. 217].

Пусть $\gamma(t) \sim t^\omega$ при $t \rightarrow +0$. Тогда в окрестности точки $t = 0$ выражение (31) можно переписать в виде

$$I(t; \beta) = 2^{3/2} t^{5/4-\beta-\frac{3}{2}\omega} \exp\left(-\frac{1}{8} t^{2\omega-1}\right) W_{\beta-5/4; 1/4}\left(\frac{1}{4} t^{2\omega-1}\right).$$

Для функции Уиттекера применим формулу 7.2.2(5) из [11, с. 366]:

$$W_{\beta-5/4; 1/4}\left(\frac{1}{4} t^{2\omega-1}\right) = 2^{-3/2} t^{\omega/2-3/4} \exp\left(-\frac{1}{8} t^{2\omega-1}\right) \Psi\left(2 - \beta; \frac{3}{2}; \frac{1}{4} t^{2\omega-1}\right).$$

Тогда

$$I(t; \beta) = t^{1/2-\beta-\omega} \exp\left(-\frac{1}{4} t^{2\omega-1}\right) \Psi\left(2 - \beta; \frac{3}{2}; \frac{1}{4} t^{2\omega-1}\right).$$

Для функции Трикоми $\Psi(a, b, z)$ используем представление (5) и затем применим формулу (12) из [10, с. 262]:

$$\begin{aligned} I(t; \beta) &= \frac{t^{1/2-\beta-\omega}}{\Gamma(2-\beta)} \exp\left(-\frac{1}{4} t^{2\omega-1}\right) \times \int_0^\infty \xi^{1-\beta} (1+\xi)^{\beta-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4} t^{2\omega-1} \xi\right) d\xi = \\ &= 2^{5/2-\beta} t^{1-2\beta-2\omega} \exp\left(-\frac{1}{8} t^{2\omega-1}\right) D_{2\beta-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} t^{\omega-1/2}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, подставляя выражение (32) в (29), получим:

$$\int_0^t K_\beta(t, \tau) d\tau = \lim_{\tau \rightarrow t-0} \frac{1}{\beta-1} \left[\frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}} - \frac{1}{t^{\beta-1}} \right] - \\ - \frac{2^{3/2-\beta}}{\sqrt{\pi}} t^{1-2\beta-\omega} \exp\left(-\frac{1}{8}t^{2\omega-1}\right) D_{2\beta-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t^{\omega-1/2}\right), \quad (33)$$

где $D_\nu(z)$ — функция параболического цилиндра. Далее,

$$\frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}} - \frac{1}{t^{\beta-1}} = \frac{1}{t^{\beta-1}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\beta-1}} - 1 \right] = \frac{1}{t^{\beta-1}} \left[\left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{1-\beta} - 1 \right].$$

Поскольку $0 < \tau < t$, то $0 < \tau/t < 1$. Тогда

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow t-0 \\ t \rightarrow +0}} \frac{\tau}{t} = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow t-0 \\ t \rightarrow +0}} \frac{1}{t^{\beta-1}} \left(\left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{1-\beta} - 1 \right) = \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right).$$

Введём замену $x = \tau/t$. Вместо последнего предела можно рассматривать

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1-\beta} - 1}{x^{1-\beta}} = \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\beta)(1-x)^{-\beta}}{(1-\beta)x^{-\beta}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\beta}{(1-x)^\beta} = 0,$$

так как $1 < \beta < 2$. Тогда из (33) имеем:

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \int_0^t K_\beta(t, \tau) d\tau = - \lim_{t \rightarrow +0} \left\{ \frac{t^{1-2\beta-\omega}}{2^{\beta-3/2}\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{8}t^{2\omega-1}\right) D_{2\beta-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t^{\omega-1/2}\right) \right\}. \quad (34)$$

Здесь $-1 < 2\beta - 3 < 1$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $2\omega - 1 > 0$. Применяя формулу (4) из [13, с. 120] при $z = 0$ и формулу 2.3.3(1) из [10, с. 259], получим

$$D_{2\beta-3}(0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int e^{-t^2/2} t^{2\beta-3} \cos(\beta\pi) dt = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \beta\pi \int_0^\infty e^{-t^2/2} t^{2\beta-3} dt = \\ = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \beta\pi \int_0^\infty x^{\beta-2} e^{-x/2} dx = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cos \beta\pi \cdot \Gamma(\beta-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta-1} = -\frac{\cos \beta\pi \cdot \Gamma(\beta-1)}{2^{\beta-1/2}\sqrt{\pi}}.$$

Тогда при $2\omega - 1 > 0$ из (34) имеем:

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \int_0^t K_\beta(t, \tau) d\tau = \frac{\cos \beta\pi}{2^{2\beta-2}\pi} \lim_{t \rightarrow 0+0} t^{1-2\beta-\omega} = \infty. \quad (35)$$

2. $0 < \omega < 1/2$, $1 < \beta < 2$. В этом случае в (34) аргумент функции параболического цилиндра будет неограниченно расти при $t \rightarrow +0$. Поскольку имеет место асимптотическое разложение функции согласно формуле 9.246(1) из [1, с. 1079], то из (34) имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \int_0^t K_\beta(t, \tau) d\tau = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{t \rightarrow +0} t^{7/2-3\beta-\omega+2\beta\omega} \exp\left(-\frac{1}{4t^{1/2-\omega}}\right) = 0. \quad (36)$$

3. $\omega = 1/2$. Из (34) следует

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \int_0^t K_\beta(t, \tau) d\tau = -e^{-1/8} D_{2\beta-3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{2^{\beta-3/2} \sqrt{\pi}} \cdot \lim_{t \rightarrow 0+0} t^{1/2-2\beta}.$$

Вычислим $D_{2\beta-3}(1/\sqrt{2})$, используя формулу 9.241(1) из [1, с. 1078]:

$$D_{2\beta-3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2\beta-\frac{1}{2}} e^{-\pi(2\beta-1)i/2} e^{1/8} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\beta-1} e^{-2x^2+xi/\sqrt{2}} dx.$$

Для вычисления интеграла

$$J(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\beta-1} e^{-2x^2+xi\sqrt{2}} dx$$

используем формулу 3.462(3) из [1, с. 352]:

$$J(\beta) = \frac{1}{i^{2\beta-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^{2\beta-1} e^{-2x^2-xi/\sqrt{2}} dx = \frac{2^{1/2-2\beta}}{i^{2\beta-1}} \sqrt{\pi} e^{-1/32} D_{2\beta-3} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right).$$

Тогда

$$D_{2\beta-3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{i^{2\beta-2}} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \pi\beta \right) D_{2\beta-3} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right).$$

Заметим, что аргумент функции параболического цилиндра убывает в геометрической прогрессии со знаменателем $1/2$, оставаясь положительным.

Вычислим $D_{2\beta-3}(0)$ с помощью формул 8.3 (1) из [13, с. 125] и 3.194(3) из [1, с. 299]:

$$D_{2\beta-3}(0) = \frac{2^{\beta-3/2}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\beta)} \int_0^\infty t^{1/2-\beta} (1+t)^{\beta-2} dt = \frac{2^{\beta-3/2}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\beta)} B \left(\frac{3}{2}-\beta; \frac{1}{2} \right) = \frac{2^{\beta-3/2} \sqrt{\pi}}{\Gamma(2-\beta)}.$$

Отсюда следует, что $D_{2\beta-3}(1/\sqrt{2})$ — ограниченная функция аргумента β . Тогда при $\omega = 1/2$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K_\beta(t, \tau) d\tau = \infty, \quad 1 < \beta < 2. \quad (37)$$

Рассмотрим предельные случаи β .

I. $\beta = 1$. Используем формулу (26), где $\gamma(t) \sim t^\omega$ при $t \rightarrow +0$, и $\omega > 0$:

$$\int_0^t K_1(t, \tau) d\tau = - \int_0^t \frac{t^\omega}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp \left(-\frac{t^{2\omega}}{4(t-\tau)} \right) d\tau. \quad (38)$$

После замены

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{t^{2\omega}}{4(t-\tau)}}; & t-\tau &= \frac{t^{2\omega}}{4z^2}; & d\tau &= \frac{t^{2\omega}}{2z^3} dz; \\ \tau = 0 &\Rightarrow z = \frac{1}{2}t^{(2\omega-1)/2}, & \tau = t &\Rightarrow z \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

интеграл (38) примет вид:

$$\int_0^t K_1(t, \tau) d\tau = -\frac{t^\omega}{2\sqrt{\pi}} \int_{t^{(2\omega-1)/2}/2}^{+\infty} \frac{2^3 z^3}{t^{3\omega}} \frac{t^{2\omega}}{2z^3} \exp(-z^2) dz = -\operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} t^{(2\omega-1)/2} \right).$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \int_0^t K_1(t, \tau) d\tau = \begin{cases} -1, & \text{если } \omega > 1/2; \\ 0, & \text{если } 0 < \omega < 1/2. \end{cases}.$$

По условию $x = \gamma(t)$ возрастает в области Q^- и $\gamma(0) = 0$. Поэтому случай $\omega \leq 0$ мы не рассматриваем.

Теперь рассмотрим случай при $\gamma(t) = \sqrt{t}$ и $\beta = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^t K_1(t, \tau) d\tau &= -\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{t}{4(t-\tau)}\right) d\tau = \\ &= -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{z^2} e^{-t/(4z^2)} dz = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = -\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

При вычислении интеграла использована замена $z = \sqrt{t-\tau}$. Итак,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t K_1(t, \tau) d\tau = \begin{cases} -1, & \text{если } \omega > 1/2; \\ 0, & \text{если } 0 < \omega < 1/2; \\ -\operatorname{erfc}(1/2) \neq 0, & \text{если } \omega = 1/2. \end{cases}. \quad (39)$$

II. $\beta = 2$. Используем формулу ядра в уравнении (28) при $\gamma(t) \sim t^\omega$, если $t \rightarrow +0$, $\omega > 0$:

$$\int_0^t K_2(t, \tau) d\tau = \int_0^t \left(\frac{t^{2\omega}}{8\sqrt{\pi}(t-\tau)^{7/2}} - \frac{3t^\omega}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{5/2}} \right) \exp\left(-\frac{t^{2\omega}}{4(t-\tau)}\right) d\tau. \quad (40)$$

После замен

$$z = \sqrt{\frac{t^{2\omega}}{4(t-\tau)}}, \quad t-\tau = \frac{t^{2\omega}}{4z^2}, \quad d\tau = \frac{t^{2\omega}}{2z^3} dz, \quad z^2 = x$$

интеграл (40) примет вид:

$$\int_0^t K_2(t, \tau) d\tau = \frac{4}{t^{2\omega}\sqrt{\pi}} \int_{t^{2\omega-1}/4}^{+\infty} x^{3/2} e^{-x} dx - \frac{6}{t^{2\omega}\sqrt{\pi}} \int_{t^{2\omega-1}/4}^{+\infty} z^{1/2} e^{-x} dx.$$

Применив формулу 2.3.6(6) из [10, с. 261], получим

$$\begin{aligned} \int_0^t K_2(t, \tau) d\tau &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} t^{3\omega-5/2} \exp\left(-\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) \Psi\left(1; \frac{7}{2}; \frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) - \\ &\quad - \frac{3}{4\sqrt{\pi}} t^{\omega-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) \Psi\left(1; \frac{5}{2}; \frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) \end{aligned}$$

или

$$\int_0^t K_2(t, \tau) d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{\omega-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) \left[\frac{1}{4} t^{2\omega-1} \Psi\left(1; \frac{7}{2}; \frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) - \frac{3}{2} \Psi\left(1; \frac{5}{2}; \frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) \right]. \quad (41)$$

Введя согласно [13] обозначения

$$\Psi(a, c, x) = \Psi\left(1; \frac{5}{2}; \frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right), \quad \Psi(0, c+, x) = \Psi\left(1; \frac{7}{2}; \frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right), \quad \Psi(a-, c, x) = \Psi\left(0; \frac{5}{2}; \frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right),$$

из формулы (7) (см. [13, с. 246]) получим

$$x\Psi\left(1; \frac{7}{2}; x\right) - \frac{3}{2}\Psi\left(1; \frac{5}{4}; x\right) = \Psi\left(0; \frac{5}{2}; x\right) \equiv 1.$$

Тогда (41) можно переписать в виде

$$\int_0^t K_2(t, \tau) d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{\omega-3/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t K_2(t, \tau) d\tau = \begin{cases} \infty, & \text{если } 1/2 \leq \omega < 3/2; \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, & \text{если } \omega = 3/2; \\ 0, & \text{если } 0 < \omega < 1/2 \text{ или } \omega > 3/2. \end{cases}.$$

Суммируя результаты (35), (36), (37), (39), получаем основной результат. Теорема доказана. \square

Замечание. Случай $\beta = 2$ в основной результат не включается, так как при $\beta = 2$ граничная задача (11) сводится к интегро-дифференциальному уравнению (28).

7. Заключение. В условиях теоремы ядро (23) интегрального уравнения обладает слабой особенностью. Следовательно, можно применить метод последовательных приближений для нахождения единственного решения уравнения (21). Тогда соответствующие краевые задачи корректны в естественных классах функций, т.е. нагруженное слагаемое поставленной граничной задачи является слабым возмущением дифференциального уравнения.

Если же линия, на которой дается нагрузка в поставленной задаче, удовлетворяет условию $\gamma(t) \sim t^\omega$ при $t \rightarrow +0$ и определяется при $\omega \geq 1/2$, и порядок дробной производной $1 \leq \beta < 2$, то интегральное уравнение (21) не разрешимо методом последовательных приближений. Можно показать, что соответствующее однородное уравнение при некоторых значениях параметра λ будет иметь ненулевые решения. Если единственность решения первой краевой задачи нарушается, то в этом случае нагрузку можно интерпретировать как сильное возмущение. Таким образом, существование и единственность решений возникающего интегрального уравнения зависит от порядка дробной производной в нагруженном члене поставленной краевой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
2. Джесеналиев М. Т. Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболического уравнения с нелокальными граничными условиями // Диффер. уравн. — 1991. — 27, № 10. — С. 1825–1827.
3. Джесеналиев М. Т. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями // Диффер. уравн. — 2001. — 37, № 1. — С. 48–54.
4. Джесеналиев М. Т., Рамазанов М. И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Гылым, 2010.
5. Исқаков С. А., Рамазанов М. И., Иванов И. А. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка, II // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Мат. — 2015. — № 2 (78). — С. 25–30.
6. Космакова М. Т., Касымова Л. Ж. К решению уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой // Вестн. КазНУ. Сер. мат. мех. информ. — 2019. — 104, № 4. — С. 50–62.
7. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
8. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их приложения. — Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2000.
9. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. — М.: Физматлит, 2002.

11. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. — М.: Физматлит, 2003.
12. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
13. Bateman H., Erdélyi A. Higher Transcendental Functions. — New York: McGraw-Hill, 1953.
14. Cao Labora D., Rodriguez-Lopez R., Belmekki M. Existence of solutions to nonlocal boundary value problems for fractional differential equations with impulses// Electron. J. Differ. Equations. — 2020. — 15. — P. 1–16.
15. Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent, II// Geophys. J. Astronom. Soc. — 1967. — 13. — P. 529–539.
16. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 2010.
17. Le Mehaute A., Tenreiro Machado J. A., Trigeassou J. C., Sabatier J. (eds.) Fractional Differentiation and Its Applications. — Bordeaux: Bordeaux Univ., 2003.
18. Luke Y. L. The Special Functions and Their Approximations. — Academic Press, 1969.
19. Polyanin A. D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. — New York–London: Chapman & Hall, 2002.
20. Ramazanov M.I., Kosmakova M. T., Kasymova L. Zh. On a problem of heat equation with fractional load// Lobachevskii J. Math. — 2020. — 41, № 9. — P. 1873–1885.
21. Yusuf A., Qureshi S., Inc M., Aliyu A. I., Baleanu D., Shaikh A. A. Two-strain epidemic model involving fractional derivative with Mittag-Leffler kernel// Chaos. — 2018. — 28. — 123121.

Космакова Минзилия Тимербаевна

Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова

E-mail: svetlanamir578@gmail.com

Касымова Лайла Жумажановна

Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова

E-mail: l.kasymova2017@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 98–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-98-106

УДК 519.765, 517.9, 81-132

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ В ЯЗЫКОЗНАНИИ

© 2022 г. А. А. КРЕТОВ, М. В. ПОЛОВИНКИНА, И. П. ПОЛОВИНКИН

Аннотация. Рассматриваются диффузионные модели изменения языка. Первая из моделей представляет собой начально-краевую задачу для уравнения Хотеллинга. Эта модель описывает изменение размера словаря естественного языка с течением времени под воздействием собственно его развития и диффузионного проникновения. Другая модель описывает процесс взаимодействия носителей двух языков. Обсуждается вопрос об устойчивости стационарных решений.

Ключевые слова: диффузионная модель, стационарное состояние, устойчивость, рост словаря.

ON SOME MODELS IN LINGUISTICS

© 2022 А. А. КРЕТОВ, М. В. ПОЛОВИНКИНА, И. П. ПОЛОВИНКИН

ABSTRACT. Two diffusion models of language change are considered. The first model is an initial-boundary-value problem for the Hotelling equation. This model describes the change in the size of a natural language vocabulary over time under the influence of its development and diffusion penetration. The other model describes the process of interaction between native speakers of two languages. The stability of stationary solutions is discussed.

Keywords and phrases: diffusion model, steady state, stability, vocabulary growth.

AMS Subject Classification: 35B35, 35Q99

1. Введение. Методы теории нелинейной динамики применяются во многих отраслях науки. Одно из направлений, где может быть использована идеология нелинейной динамики, связано с изучением формирования и изменения языка во времени. Накопленные на сегодняшний день сведения о количественных характеристиках процесса изменения языка позволяют предположить, что этот процесс протекает по законам, схожим с законами роста и распространения популяций. Это наблюдение дает возможность применять математические методы, уже с успехом используемые в биологии, медицине и даже в экономике, к изучению развития языка. Ниже мы приведем пример применения одного из методов исследования устойчивости стационарного состояния системы к изучению развития языка. Модели, рассмотренные в настоящей работе, в их диффузионном варианте, введены в [2].

2. О моделировании роста словаря естественного языка. Обратимся к вопросу о моделировании роста словаря языка. Очень содержательные мысли по этой проблеме можно найти в книгах [7] и [9]. Сделаем краткое введение в настоящий раздел, опираясь на эти книги (к сожалению, каждая из них является библиографической редкостью).

Общеизвестным является тезис о том, что «в результате постоянного расширения сферы деятельности человека лексика каждого языка, особенно его терминологический словарь, несмотря на выпадение некоторого количества слов, неуклонно растет» (см. [7, с. 56]). Такому неуклонному нарастанию размера словаря соответствует, в частности, экспоненциальный закон роста по

следующей формуле (см. [7, с. 57]):

$$L(t) = L_0 e^{nt}, \quad (1)$$

где t — текущий момент времени, $L(t)$ — размер словаря в момент времени t , L_0 — начальный размер словаря, задающий начало отсчета времени, $n > 0$ — коэффициент прироста. По экспоненциальному закону скорость роста словаря имеет «лавинообразный» характер (скорость роста словаря пропорциональна достигнутому уровню), который может быть описан обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dL(t)}{dt} = nL(t). \quad (2)$$

Множитель L_0 задается начальным условием

$$L(0) = L_0. \quad (3)$$

Ретроспективная проверка закона (1) на основе данных о представительных (например, толковых) словарях некоторых естественных языков убеждает в том, что рост общеупотребительной лексики и рост объема словаря литературного языка за разные промежутки времени может характеризоваться экспоненциальным законом только в отдельные периоды развития языка [9]. В действительности процесс роста лексики начинается медленно (период становления литературного языка), затем ускоряется и принимает «лавинообразный» характер (период формирования литературного языка), но в какой-то момент процесс роста обязательно замедляется (период стабилизации). Такой схеме развития отвечает математическая модель, выражаемая т. н. логистической функцией

$$L(t) = \frac{L_c}{1 + ae^{-kt}}, \quad (4)$$

где L_c — теоретический супремум словаря, $k > 0$, a суть некоторые параметры. Графически эта модель представляется S-образной кривой, которая выражает сначала рост с возрастающей скоростью, затем скорость уменьшается и почти прекращается по мере асимптотического приближения к пределу L_c .

По всей вероятности, закон логистического развития в своей общей форме (ускорение — точка перегиба — замедление) имеет всеобщее социально-лингвистическое значение и характеризует рост и развитие лексики большинства литературных языков, хотя конкретную форму этот закон принимает в зависимости от условий исторического развития данного народа — носителя языка. Можно добавить, что логистический закон роста в различных своих конкретных проявлениях (имеется ряд вариантических формул логистического роста) считается одним из основных законов развития самоорганизующихся сложных систем, если рассматривать их развитие при достаточно больших временных интервалах. S-образной кривой характеризуются также некоторые другие диахронные лингвистические процессы, и они находят себе в наши дни широкое применение во многих областях науки, в том числе при решении задач моделирования развития самой науки (см. [9, с. 155]).

Здесь нельзя не отметить, в частности, что осознание законов развития роста словаря естественного языка идет по тому же пути, что и осознание законов роста популяций.

Уравнение (2) называется моделью Мальтуса (см. [10]). Одним из первых исследователей динамики населения был Томас Мальтус (Thomas Malthus). Мальтус заметил в эссе, написанном в 1798 году, что рост человеческого населения принципиально отличался от роста запасов продовольствия, чтобы прокормить это население. Он писал, что человеческое население растет геометрически (то есть экспоненциально), в то время как запасы продовольствия растут арифметически (то есть линейно). Он пришел к выводу, что если его не остановить, то будет лишь вопросом времени следующая ситуация: население будет слишком велико, чтобы прокормить себя. Мальтус предположил, что темпы роста населения прямо пропорциональны его нынешнему размеру. Если популяция в момент времени t обозначается $L(t)$, то предположение о естественном росте может быть записано символически как (2), а L_0 — начальная популяция. Решение предсказывает демографический взрыв при $n > 0$, вымирание популяции при $n < 0$ и отсутствие изменений при $n = 0$.

Мальтузианскую модель обычно называют моделью естественного роста или моделью экспоненциального роста. Эта модель может быть полезна в ситуации, в которых временной масштаб наблюдения достаточно мал, чтобы сделать приемлемым предположение, что $n > 0$ остается почти постоянным, ресурсы кажутся неограниченными, а L_0 мал.

Позже (1838) Пьер Франс Ферхюльст (Pierre François Verhulst) заменил постоянную относительную скорость роста n в (2) на относительную скорость роста

$$k \left(1 - \frac{L}{L_c}\right),$$

которая линейно уменьшается в зависимости от L . Безразмерный множитель $k(1 - L/L_c)$ служит для отражения уменьшения относительного темпа роста от k до нуля по мере увеличения численности населения от его начальный уровень $L_0 - L_c$. Константа L_c представляет собой максимальное устойчивое население, за пределами которого L не может увеличиться. Полученная модель (см. [10])

$$\frac{dL}{dt} = kL \left(1 - \frac{L}{L_c}\right), \quad (5)$$

называется моделью логистического роста или моделью Ферхюльста. Модель Ферхюльста предполагает, что скорость роста колеблется от значения k , когда условия очень благоприятны, к значению 0, когда популяция увеличилась до максимального значения L_c , которое может поддерживать окружающая среда. Решение уравнения (5) имеет вид

$$L(t) = \frac{L_c L_0}{L_0 + (L_c - L_0)e^{-kt}},$$

и это совпадает с (4) при $a = (L_c - L_0)/L_0$.

Логистическая модель предсказывает быстрый начальный рост для $0 < L_0 < L_c$, затем снижение темпов роста с течением времени, так что размер популяции приближается к пределу. Такое поведение согласуется с наблюдаемым поведением многих популяций, и по этой причине логистическая модель часто используется в качестве средства описания численности популяции

Модель Ферхюльста и мальтузианская модель не учитывали миграции населения. Гарольд Хотеллинг (Harold Hotelling) (1921) добавил к уравнению Ферхюльста слагаемое, описывающее миграции. В результате уравнение приняло вид (см. [13])

$$\frac{\partial L}{\partial t} = A(L_c - L)L + B\Delta L, \quad (6)$$

где $L = L(x_1, x_2, t)$ — плотность населения в точке (x_1, x_2) в момент времени t ,

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

— оператор Лапласа, A — скорость роста населения, B — скорость миграции, s — коэффициент насыщенной плотности населения, t — временной параметр, x_1, x_2 — географические координаты.

Модель Хотеллинга описывает как рост населения, так и миграционные процессы. Рост населения моделируется как логистический процесс. Миграционные процессы описываются с помощью закона Фурье теплопроводности. Хотеллинг ввел понятие насыщенной плотности населения. Если реальная плотность населения выше насыщенной, то население уменьшается, если реальная плотность населения ниже насыщенной, то население увеличивается. Пространственная диффузия объяснялась тем, что рост населения приводит к снижению производства на душу населения, а люди перемещаются из более населенных мест в менее населенные.

Существенным недостатком модели Хотеллинга как модели роста и распространения населения является то, что предполагается, что запасы средств к существованию равны заданной константе, не зависящей от времени и численности населения (рабочей силы). Таким образом, эта модель более пригодна для популяций животных, о чем свидетельствует его успешное применение в экологии через 30 лет после создания.

В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из плодотворных подходов к такого рода объектам является использование аналогий с уже изученными явлениями (см. [8]). В интересующем нас случае моделирования роста словаря мы можем повторить фрагменты пути исследований роста и распространения популяции. Часто наряду с явным заданием функций, которое далеко не всегда известно, полезно изучать дифференциальные уравнения, которым эта функция удовлетворяет, развивая закон, который это уравнение описывает. В нашем случае мы можем наряду с заданием функции (4) в явном виде рассматривать и дифференциальное уравнение (5), которое его задает. Такой подход целесообразен, например, при изучении вопросов, связанных с устойчивостью стационарного состояния.

Уравнение (5) хорошо изучено. Мы можем пойти дальше по тому же пути что и при исследовании роста и распространения популяции. Добавим справа от знака равенства диффузионный член и получим уравнение вида (6), где $L = L(x_1, x_2, t)$ размер словаря в точке (x_1, x_2) в момент времени t .

В некоторых случаях удобно трактовать $L = L(x_1, x_2, t)$ как отклонение размера словаря в момент времени t от размера, зафиксированного как некий стационарный уровень, который принимается нулевым. К сожалению, такой «локализованный» подход может повлечь за собой дополнительные технические трудности в экспериментальном подтверждении модели. Без диффузионного члена $B\Delta L$ мы имеем дело с «точечной» моделью, которая на самом деле как раз глобальна в том смысле что закон (6) может быть применен к языку в целом. В этом случае можно опираться на представительные словари рассматриваемого языка разных лет для проверки гипотез. В случае диффузионно-логистической модели (6) мы, возможно, если речь идет о большой стране, вынуждаем себя заменить исследование национального языка изучением наречий и диалектов, динамика изменения которых не так подробно отражена в официальных словарях. Впрочем, можно надеяться, что эта модель подойдет для исследования влияния взаимопроникновения языков некоторой территории с относительно небольшими подтерриториями (странами, федеральными землями, регионами и т. д.) языки и наречия которых фиксируются в словарях. Диффузионный подход на самом деле дает новые знания о модели. Простейшим примером, иллюстрирующим это, может служить задача об устойчивости стационарного состояния. Пусть $w = w(x_1, x_2)$ — стационарное решение уравнения (6) в некоторой ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей, удовлетворяющее на границе этой области классическому краевому условию первого, второго или третьего рода, d — диаметр области Ω . В [5] показано, что условие

$$w > \frac{L_c}{2} - \frac{B}{2Ad^2}$$

является достаточным для устойчивости стационарного решения $w(x_1, x_2)$ (см. также [12], где этот результат обобщен). Хорошо известно, что без диффузионного члена (при $B = 0$) нулевое стационарное решение является неустойчивым. В диффузионном случае (при $B \neq 0$) тривиальное стационарное решение может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым, что определяется размером области Ω . Это эффект исключительно диффузионной модели.

3. О моделировании взаимодействия языковых групп. Рассматриваемая далее модель в бездиффузионном виде заимствована из работы [3]. Мы дополняем ее до диффузионного вида. Только величинам, в ней участвующим, придан нами иной смысл. Мы по-прежнему считаем возможной новую интерпретацию, исходя из уже упомянутого принципа аналогий при построении моделей [8]. Мы осознаем, что получение достоверных данных о входных величинах модели, как и об искомых величинах для ее экспериментальной проверки, представляет собой отдельную трудоемкую задачу, которую мы здесь не рассматриваем.

Пусть $u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$ и $u_2 = u_2(x_1, x_2, t)$ суть численности (в условных единицах) групп носителей двух языков (наречий, диалектов), проживающих на общей территории. Будем считать, что вторая группа обладает «агgressivностью» в следующем смысле: за счет влияния участников

второй группы возможен переход из первой группы во вторую. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая этот процесс, имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \mu u_1(u_1 - \alpha)(1 - u_1) - u_1 u_2, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\beta(b - u_1)u_2, \quad (8)$$

где $\alpha \in [0, 1]$, μ , β и b суть некоторые параметры. К системе (7)–(8) добавим начальные условия

$$u_1|_{t=0} = u_1^0 \in [0, 1], \quad (9)$$

$$u_2|_{t=0} = u_2^0 \in [0, 1]. \quad (10)$$

В диффузионном варианте система принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \mu u_1(u_1 - \alpha)(1 - u_1) - u_1 u_2 + \vartheta_1 \Delta u_1, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\beta(b - u_1)u_2 + \vartheta_2 \Delta u_2, \quad (12)$$

где $\vartheta_1 \geq 0$, $\vartheta_2 \geq 0$ (при $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 0$ мы получаем систему (7)–(8) из [3]). Будем считать, что система рассматривается в ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей Γ . Добавим краевые условия

$$\left. \left(\eta_{11}u_1 + \eta_{12}\frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right) \right|_{\Gamma} = \zeta_1(x_1, x_2), \quad (13)$$

$$\left. \left(\eta_{21}u_2 + \eta_{22}\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right) \right|_{\Gamma} = \zeta_2(x_1, x_2), \quad (14)$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к границе Γ , $\eta_{s1}^2 + \eta_{s2}^2 > 0$, $\eta_{s1}\eta_{s2} > 0$, $s = 1, 2$. Всюду далее будем рассматривать регулярные решения, обладающие достаточной гладкостью, что в частности, влечет за собой выполнение всех необходимых условий согласования начальных и граничных данных.

4. Исследование устойчивости стационарного состояния в диффузионной модели взаимодействия языковых групп. Пусть $v = (v_1, v_2)$ — стационарное решение системы (11)–(12), то есть решение системы

$$\mu u_1(u_1 - \alpha)(1 - u_1) - u_1 u_2 + \vartheta_1 \Delta u_1 = 0, \quad (15)$$

$$-\beta(b - u_1)u_2 + \vartheta_2 \Delta u_2 = 0, \quad (16)$$

удовлетворяющее граничным условиям (13)–(14).

Пусть $z_j = u_j - v_j$, $j = 1, 2$. Выведем уравнения для каждого из отклонений z_j , полученное равенство умножим на z_j и проинтегрируем по Ω . Из первого уравнения (11) имеем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial z_1}{\partial t} = \mu(v_1 + z_1)(v_1 + z_1 - \alpha)(1 - v_1 - z_1) - (v_1 + z_1)(v_2 + z_2) + \vartheta_1 \Delta(v_1 + z_1).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial t} = & \mu z_1^2 + 2\mu v_1 z_1 - \mu \alpha z_1 - \mu z_1^3 - 3\mu v_1 z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1 + \mu + \alpha z_1^2 + \\ & + 2\mu \alpha v_1 z_1 - z_1 z_2 - v_1 z_2 - v_2 z_1 + \vartheta \Delta z_1 + \mu v_1(v_1 - \alpha)(1 - v_1) - v_1 v_2 + \vartheta_1 \Delta v_1. \end{aligned}$$

В силу того, что $v = (v_1, v_2)$ является решением системы (15)–(16), сумма последних трех слагаемых в правой части последнего равенства равна нулю. Поэтому получим

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = \mu z_1^2 + 2\mu v_1 z_1 - \mu \alpha z_1 - \mu z_1^3 - 3\mu v_1 z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1 + \mu \alpha z_1^2 + 2\mu \alpha v_1 z_1 - z_1 z_2 - v_1 z_2 - v_2 z_1 + \vartheta \Delta z_1. \quad (17)$$

Умножим равенство (17) на z_1 , после чего получим

$$\begin{aligned} z_1 \frac{\partial z_1}{\partial t} = & \mu z_1^3 + 2\mu v_1 z_1^2 - \mu \alpha z_1^2 - \mu z_1^4 - 3\mu v_1 z_1^3 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + \\ & + \mu \alpha z_1^3 + 2\mu \alpha v_1 z_1^2 - z_1^2 z_2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2 + z_1 \vartheta \Delta z_1. \end{aligned}$$

Считая отклонения z_j достаточно малыми, после умножения равенств на z_j будем отбрасывать одночлены переменных (z_1, z_2) , имеющие степень выше второй. Последнее равенство после этого будет преобразовано к виду

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (z_1^2) = 2\mu v_1 z_1^2 - \mu \alpha z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + 2\mu \alpha v_1 z_1^2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2 + \vartheta z_1 \Delta z_1.$$

Проинтегрируем полученное равенство по Ω и получим

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (z_1^2) dx = \vartheta \int_{\Omega} z_1 \Delta z_1 dx + \int_{\Omega} (2\mu v_1 z_1^2 - \mu \alpha z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + 2\mu \alpha v_1 z_1^2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2) dx.$$

К первому интегралу в правой части последнего равенства применим формулу Грина [1]. Учитывая граничные условия, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (z_1^2) dx = & -\vartheta \int_{\Omega} |\nabla z_1|^2 dx + \vartheta_1 \int_{\partial\Omega} z_1 \frac{\partial z_1}{\partial \nu} d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} (2\mu v_1 z_1^2 - \mu \alpha z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + 2\mu \alpha v_1 z_1^2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2) dx, \quad (18) \end{aligned}$$

где $d\Gamma$ является элементом границы $d\Omega$, так что второе слагаемое в правой части равенства (18) представляет собой криволинейный интеграл первого рода по границе области Ω . В интеграле по границе при $\mu_s = 0$ или при $\eta_s = 0$ подынтегральная функция равна нулю в силу краевого условия (13). Из этого же краевого условия при $\mu_s \eta_s > 0$ получим:

$$\left. \frac{\partial z_1}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = -\frac{\mu_s}{\eta_s} z_1 \Big|_{\partial\Omega}.$$

Поэтому равенство (18) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (z_1^2) dx = & -\vartheta \int_{\Omega} |\nabla z_1|^2 dx - \sigma_1 \vartheta_1 \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_1}{\eta_1} z_1^2 d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} (2\mu v_1 z_1^2 - \mu \alpha z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + 2\mu \alpha v_1 z_1^2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2) dx. \quad (19) \end{aligned}$$

Аналогичным образом мы получим из второго уравнения (12):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l z_2^2 dx = -\vartheta_2 \int_{\Omega} |\nabla z_2|^2 dx - \sigma_2 \vartheta_2 \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_2}{\eta_2} z_2^2 d\Gamma + \int_{\Omega} (\beta v_2 z_1 z_2 + \beta v_1 z_2^2 - b\beta z_2^2) dx, \quad (20)$$

где $\sigma_s = 1$ в случае $\mu_s \eta_s > 0$ или $\sigma_s = 0$ в случае $\mu_s \eta_s = 0$, $s = 1, 2$.

Сложив равенства (19)–(20), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l |z|^2 dx = & -\vartheta_1 \int_{\Omega} |\nabla z_1|^2 dx - \vartheta_2 \int_{\Omega} |\nabla z_2|^2 dx - \sigma_1 \vartheta_1 \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_1}{\eta_1} z_1^2 d\Gamma - \sigma_2 \vartheta_2 \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_2}{\eta_2} z_2^2 d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} (2\mu v_1 z_1^2 - \mu \alpha z_1^2 - 3\mu v_1^2 z_1^2 + 2\mu \alpha v_1 z_1^2 - v_1 z_1 z_2 - v_2 z_1^2 + \beta v_2 z_1 z_2 + \beta v_1 z_2^2 - b\beta z_2^2) dx. \quad (21) \end{aligned}$$

где $|z|^2 = z_1^2 + z_2^2$. Положим

$$\Theta_{11} = (2\mu v_1 + 2\mu\alpha v_1 - \mu\alpha - 3\mu v_1^2 - v_2), \quad (22)$$

$$\Theta_{12} = \Theta_{21} = \frac{1}{2}(\beta v_2 - v_1), \quad (23)$$

$$\Theta_{22} = \beta v_1 - b\beta \quad (24)$$

Нас интересует знак выражения, определенного формулой (21). Более точно, мы хотим установить достаточные условия для того, чтобы это выражение было отрицательным. Безусловно, отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{kj} \xi_k \xi_j \quad (25)$$

будет таким достаточным условием. Однако еще есть резерв для уточнения достаточных условий. Воспользуемся методом, примененным в [5]. К интегралам от квадратов градиентов в правой части равенства (21) применим неравенство Стеклова—Пуанкаре—Фридрихса [4, 6, 11, 14],. С его учетом из равенства (21) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l |z|^2 dx \leq \int_0^l (a_{11} z_1^2 + 2a_{12} z_1 z_2 + a_{22} z_2^2) dx, \quad (26)$$

где

$$a_{11} = 2\mu v_1 + 2\mu\alpha v_1 - \mu\alpha - 3\mu v_1^2 - v_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2}, \quad (27)$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}(\beta v_2 - v_1), \quad (28)$$

$$a_{22} = \beta v_1 - b\beta - \frac{\vartheta_2}{d^2}, \quad (29)$$

где d — диаметр области Ω .

Уточненное достаточное условие асимптотической устойчивости стационарного решения состоит в том, чтобы квадратичная форма

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{kj} \xi_k \xi_j \quad (30)$$

была отрицательно определенной. Безусловно, проверка этого условия хотя и несколько громоздка, все же вполне реализуема, особенно с помощью компьютера.

Отметим, что учет диффузионных явлений и здесь может внести новые знания об объекте исследования или о модели. Обратимся к первоисточнику рассматриваемой модели. В работе [3] указывается, что система обыкновенных дифференциальных уравнений (7)–(8) имеет четыре стационарные точки. Отметим, что каждая из них является и стационарным решением системы (11)–(12) уравнений в частных производных с диффузионными членами. Для иллюстрации нашего тезиса о новой информации об объекте рассмотрим две из указанных стационарных точек. 1. $v_1 = \alpha, v_2 = 0$. В этой стационарной точке собственные значения матрицы правой части уравнений (7)–(8) будут следующими: $\lambda_1 = \mu\alpha(1 - \alpha) > 0, \lambda_2 = -\beta(b - \alpha)$. Поскольку одно из собственных значений положительно, эта стационарная точка будет неустойчивой. Посмотрим, что даст нам наличие ненулевых диффузионных членов. Оказывается, в таком случае квадратичная форма (30) может быть отрицательно определенной при выполнении некоторых условий. В этом случае имеем:

$$a_{11} = \mu\alpha(1 - \alpha) - \vartheta_1/d^2, \quad a_{12} = -\alpha/2, \quad a_{22} = \beta(\alpha - b) - \vartheta_2/d^2.$$

Согласно критерию Сильвестра, для отрицательной определенности формы (30) необходимо и достаточно выполнение условий

$$a_{11} = \mu\alpha(1 - \alpha) - \vartheta_1/d^2 < 0,$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \Phi_1(d; \alpha, \beta, \mu, b) = (\mu\alpha(1 - \alpha) - \vartheta_1/d^2)(\beta(\alpha - b) - \vartheta_2/d^2) - \alpha^2/4 > 0.$$

Совершенно очевидно, что каждое из этих двух условий будет выполняться при достаточно малых d .

2. $v_1 = 1, v_2 = 0$. В этой точке $\lambda_1 = -\mu(1 - \alpha) < 0, \lambda_2 = -\beta(b - 1)$. Неравенство $b > 1$ является необходимым и достаточным условием устойчивости точки $(1, 0)$, рассматриваемой как стационарная точка системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7)–(8). При рассмотрении системы (11)–(12) мы имеем:

$$a_{11} = -\mu(1 - \alpha) - \vartheta_1/d^2, \quad a_{12} = -1/2, \quad a_{22} = \beta(1 - b) - \vartheta_2/d^2.$$

Критерий Сильвестра отрицательной определенности квадратичной формы в этом случае приведет к условиям

$$a_{11} = -\mu(1 - \alpha) - \vartheta_1/d^2 < 0,$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \Phi_2(d; \alpha, \beta, \mu, b) = (-\mu(1 - \alpha) - \vartheta_1/d^2)(\beta(1 - b) - \vartheta_2/d^2) - 1/4 > 0.$$

На сей раз первое условие выполнено. Второе условие может быть выполнено при малых значениях d не только при $b > 1$, но и при $b \leq 1$.

Отметим также точку $v_1 = 0, v_2 = 0$. В этой стационарной точке собственные значения матрицы правой части уравнений (7)–(8) будут отрицательными, а значит, эта точка будет устойчивой. В этом случае добавление диффузионных членов ничего нового не дает.

5. Заключение. Мы затронули некоторые стороны обширной проблемы математического моделирования в языкоznании. Мы полагаем, что принцип аналогий, широко используемый при моделировании, даст свои плоды и при моделировании в задачах языкоznания. В частности, мы считаем, что аппарат дифференциальных уравнений весьма пригоден для моделирования роста словаря и взаимодействия разных языковых групп. При моделировании процесса взаимодействия двух разных языковых групп мы добавили диффузионные (миграционные) составляющие в уравнения системы. Это привело к некоторым новым эффектам, которые не были ожидаемы a priori. Выяснилось, что некоторые стационарные состояния, будучи неустойчивыми как стационарные точки системы с сосредоточенными параметрами (системы обыкновенных дифференциальных уравнений), становятся устойчивыми в областях с малыми диаметрами как стационарные состояния системы с распределенными параметрами (системы дифференциальных уравнений в частных производных). В терминах предметной области это означает, что миграционные процессы способны сохранить устойчивые состояния языка в малых областях. Этот вывод, безусловно, нуждается в подтверждении статистическими данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
2. Кретов А. А., Половинкина М. В., Половинкин И. П., Ломец М. В. О моделировании изменений языка// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж. зимняя мат. школа (Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 г.). — Воронеж: Изд-во ВГУ, 2021. — С. 172.
3. Колпак Е. П., Гаврилова А. В. Математическая модель возникновения культурных центров и течений в живописи Мол. ученый. — 2019. — 22 (260). — С. 1–17.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
5. Мешков В. З., Половинкин И. П., Семенов М. Е. Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга// Обозр. прикл. пром. мат. — 2002. — 9, № 1. — С. 226–227..
6. Михайлова В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
7. Пиотровский Р. Г., Бектаев К. Б., Пиотровская А. А. Математическая лингвистика. — М.: Высшая школа, 1977.

8. Самарский А. А., Михайлова А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2005.
9. Тулдаев Ю. А. Проблемы и методы квантитативно-системного исследования лексики. — Таллин: Валгус, 1987.
10. Brauer F., Castillo-Chavez C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. — New York: Springer, 2012.
11. Friedrichs K. O. Spectral Theory of Operators in Hilbert Space. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1973.
12. Gogoleva T. N., Shchepina I. N., Polovinkina M. V., Rabeeakh S. A. On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1203. — 012041.
13. Puu T. Nonlinear Economic Dynamics. — Berlin,: Springer-Verlag, 1997.
14. Rektorys K. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. — Springer Science & Business Media, 2012.

Кретов Алексей Александрович

Воронежский государственный университет

E-mail: kretov@rgph.vsu.ru

Половинкина Марина Васильевна

Воронежский государственный университет инженерных технологий

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Половинкин Игорь Петрович

Воронежский государственный университет

E-mail: polovinkin@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 107–124
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-107-124

УДК 517.977, 519.7

О ПОСТАНОВКЕ И РАЗРЕШИМОСТИ l -ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. С. С. ПОСТНОВ

Аннотация. Работа обобщает полученные ранее результаты анализа применимости метода моментов к исследованию задач оптимального управления линейными системами дробного порядка с сосредоточенными параметрами на новые типы систем, отличающиеся выбором оператора дробного дифференцирования в определяющих уравнениях. Исследована постановка и разрешимость l -проблемы моментов для простейших одно- и двумерных систем с операторами Прабхакара, Сайго, Гринько. В ряде случаев получены точные аналитические решения этой проблемы.

Ключевые слова: динамическая система дробного порядка, оптимальное управление, дробная производная, l -проблема моментов.

ON THE STATEMENT AND SOLVABILITY OF THE l -PROBLEM OF MOMENTS FOR FRACTIONAL SYSTEMS

© 2022 S. S. POSTNOV

ABSTRACT. In this paper, we generalize the method of moments for optimal control problems for fractional linear systems with concentrated parameters to new types of systems. We analyze the statement and solvability of the l -problem of moments for the simplest one- and two-dimensional systems with Prabhakar, Saigo, and Grinko operators. In some cases, we obtain exact analytical solutions of this problem.

Keywords and phrases: fractional order dynamical system, optimal control, fractional derivative, l -problem of moments.

AMS Subject Classification: 49N05, 49J21, 93C23, 34K35, 34A08

1. Введение. В ходе ранее выполненных исследований было проанализировано влияние типа оператора дробного дифференцирования в уравнении, описывающем динамику системы, на свойства решений задачи оптимального управления для данной системы (см. [5] и ссылки в ней). Были рассмотрены операторы Хильфера, Адамара, Эрдейи–Кобера, Катугамполы, Капуто–Фабрицио, Атанганы–Балеану. В целом, на основе полученных результатов можно отметить два основных момента. Во-первых, для всех операторов, за исключением оператора Капуто–Фабрицио, при постановке l -проблемы моментов возникают дополнительные условия её корректности, связывающие показатели оператора дробного дифференцирования с индексом лебегова пространства, в котором определено управление. Это качественно отличает исследованные системы дробного порядка от аналогичных систем целого порядка, при этом полученные дополнительные условия, как правило, тривиально выполняются при целых значениях показателей оператора дифференцирования. Кроме того, выполнение условий корректности l -проблемы моментов, для исследованных систем влечёт за собой выполнение условий её разрешимости, которые

принято проверять для систем целого порядка. Во-вторых, сравнение решений задачи оптимального управления, полученных в вышеупомянутых работах методом моментов, показало наличие как весьма схожих, так и кардинально отличающихся тенденций в их поведении. Например, граничные траектории систем Римана—Лиувилля и Капуто оказываются весьма близки, но зависимости нормы оптимального управления от показателя дробной производной различаются как количественно, так и качественно. В то же время, зависимости нормы оптимального управления от показателя дробной производной в случае операторов Римана—Лиувилля и Адамара оказываются близки качественно, а в определённом диапазоне изменения показателя производной — и количественно. Отмеченные факты подтверждают, что динамические системы дробного порядка с управлением обладают характерными особенностями, не только отличающими их от аналогичных систем целого порядка, но и позволяющими характеризовать их разновидности, соответствующие разным определениям оператора дробного дифференцирования. В свою очередь, это делает актуальной затронутую проблематику.

Настоящая работа продолжает упомянутые исследования и содержит аналогичные результаты для уравнений с операторами Прабхакара, Сайго и Гринько. Данные операторы являются многопараметрическими и содержат в ядре как дробно-степенную функцию, так и одну из специальных функций — соответственно функцию Прабхакара, гипергеометрическую функцию Гаусса или вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера.

2. Предварительные сведения. В данном разделе приводятся определения используемых в дальнейшем левосторонних операторов дробного интегрирования и дифференцирования. Правосторонние операторы могут быть определены аналогичным образом.

Определение 1. Дробный интеграл Прабхакара от некоторой функции $q(t) \in L_1(0, T)$ может быть вычислен по следующей формуле (см. [8]):

$${}_0^P I_{\rho, \mu, \omega, t}^\gamma q(t) = \int_0^t \frac{E_{\rho, \mu}^\gamma[\omega(t - \tau)^\rho]}{(t - \tau)^{1-\mu}} q(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Здесь $E_{\rho, \mu}^\gamma[z]$ — функция Прабхакара, являющаяся обобщением функции Миттаг-Леффлера:

$$E_{\rho, \mu}^\gamma[z] = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + k)}{\Gamma(\rho k + \mu)} \frac{z^k}{k!}, \quad (2)$$

$\gamma, \rho, \mu, \omega \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\rho) > 0$, $\operatorname{Re}(\mu) > 0$.

Определение 2. Пусть задана функция $q(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Прабхакара типа Римана—Лиувилля может быть вычислена по следующей формуле (см. [8]):

$${}_0^{PRL} D_{\rho, \mu, \omega, t}^\gamma q(t) = \frac{d}{dt} {}_0^P I_{\rho, 1-\mu, \omega, t}^{-\gamma} q(t), \quad (3)$$

$\gamma, \rho, \omega \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\rho) > 0$, $\mu \in (0, 1)$.

Определение 3. Пусть задана функция $q(t)$, удовлетворяющая условию $q'(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Прабхакара типа Капуто может быть вычислена по следующей формуле (см. [8]):

$${}_0^{PC} D_{\rho, \mu, \omega, t}^\gamma q(t) = {}_0^P I_{\rho, 1-\mu, \omega, t}^{-\gamma} q'(t), \quad (4)$$

$\gamma, \rho, \omega \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\rho) > 0$, $\mu \in (0, 1)$.

Определение 4. Дробный интеграл Сайго от некоторой функции $q(t) \in L_1(0, T)$ может быть вычислен по следующей формуле (см. [7]):

$${}_0^S I_t^{\alpha, \beta, \gamma} q(t) = \frac{t^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{2F_1(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{t})}{(t - \tau)^{1-\alpha}} q(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Здесь

$${}_2F_1\left(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{t}\right)$$

— гипергеометрическая функция Эйлера, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Определение 5. Пусть задана функция $q(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Сайго типа Капуто может быть вычислена по следующей формуле (см. [7]):

$${}_0^{SC}D_t^{\alpha, \beta, \gamma} q(t) = {}_0^S I_t^{1-\alpha, -\beta-1, \alpha+\gamma-1} q'(t), \quad (6)$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$.

Определение 6. Пусть задана функция $q(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Сайго типа Римана—Лиувилля может быть вычислена по следующей формуле (см. [7]):

$${}_0^{SRL}D_t^{\alpha, \beta, \gamma} q(t) = \frac{d}{dt} {}_0^S I_t^{1-\alpha, -\beta-1, \alpha+\gamma-1} q(t), \quad (7)$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$.

Определение 7. Дробный интеграл Гринько от некоторой функции $q(t) \in L_1(0, T)$ может быть вычислен по следующей формуле (см. [3, 9]):

$${}_0^G I_t^{\alpha, \beta, \eta} q(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{{}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(t-\tau)]}{(t-\tau)^{1-\alpha}} q(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Здесь ${}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(t-\tau)]$ — гипергеометрическая функция Куммера, $\alpha, \beta > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$.

Определение 8. Пусть задана функция $q(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Гринько типа Римана—Лиувилля может быть вычислена по следующей формуле (см. [3, 9]):

$${}_0^{GRL}D_t^{\alpha, \beta, \eta} q(t) = \frac{d}{dt} {}_0^G I_t^{1-\alpha, -\beta, \eta} q(t), \quad (9)$$

$\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$.

Определение 9. Пусть задана функция $q(t)$, удовлетворяющая условию $q'(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Гринько типа Капуто может быть вычислена по следующей формуле:

$${}_0^{GC}D_t^{\alpha, \beta, \eta} q(t) = {}_0^G I_t^{1-\alpha, -\beta, \eta} q'(t), \quad (10)$$

$\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$.

3. Постановка задачи. Будем полагать, что состояние системы $q(t)$ и управление $u(t)$ определены на полуинтервале $t \in (0, T]$, и рассмотрим две простейшие линейные системы дробного порядка с сосредоточенными параметрами — одиночный и двойной интеграторы.

Определение 10. Одиночным интегратором будем называть систему, динамика которой определяется уравнением следующего вида:

$${}_0 D_t^\sigma q(t) = u(t), \quad (11)$$

где ${}_0 D_t^\sigma$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования, $t \in (0, T]$.

Определение 11. Двойным интегратором будем называть систему, динамика которой определяется уравнениями следующего вида:

$${}_0 D_t^{\sigma_1} q_1(t) = q_2(t), \quad {}_0 D_t^{\sigma_2} q_2(t) = u(t), \quad t \in (0, T]. \quad (12)$$

Показатели дробного дифференцирования σ и $\sigma_{1,2}$ в уравнениях (11)–(12) являются в общем случае составными, подразумевая набор из нескольких чисел в соответствии с используемым определением оператора дробного дифференцирования.

Допустимые управлния $u(t)$ считаются элементами пространства $L_p(0, T]$, $p > 1$.

В следующем разделе будут рассмотрены случаи, когда оператор ${}_0D_t^\sigma$ в уравнениях (11)–(12) понимается в смысле Прабхакара, Сайго или Гринько. Соответственно, системы, которые описываются уравнениями (11) или (12) с одним из перечисленных операторов дробного дифференцирования, будут называться системами Прабхакара, Сайго или Гринько.

Для систем (11) и (12) начальные условия задаются в локальном или нелокальном виде, в зависимости от типа выбранного определения оператора дробного дифференцирования (см. след. раздел). Конечные условия для этих систем задаются единообразно:

$$q(T) = q^T(T), \quad (13)$$

где в случае системы (11) функция $q(T)$ является скаляром, а в случае системы (12) — вектор-функцией $q(T) = (q_1(T), q_2(T))$. Подразумевается также, что правая часть выражения (13) может параметрически зависеть от выбора конечного момента T .

Задача 1 (задача оптимального управления). Найти такое управление $u(t)$, $t \in (0, T]$, чтобы исследуемая система перешла из заданного начального состояния в заданное конечное состояние и при этом было выполнено одно из следующих условий:

- (i) норма управления в пространстве $L_p(0, T]$, $p > 1$, достигла минимального значения, когда значение T задано (задача А);
- (ii) время управления T было минимальным при условии $\|u\|_{L_p} \leq l$, $l > 0$, где l задано (задача Б).

Известно (см. [2, 4]), что для систем целого порядка задача 1 может быть сведена к l -проблеме моментов следующего вида.

Задача 2 (l -проблема моментов). Пусть дана система функций $g_n(\tau) \in L_{p'}(0, T]$ и набор чисел c_n , $n = 1, \dots, N$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, а также задано число $l > 0$. Необходимо построить такую функцию $u(t) \in L_p(0, T]$, $1/p + 1/p' = 1$, что выполняются соотношения

$$\int_0^T g_n(\tau) u(\tau) d\tau = c_n, \quad (14)$$

и условие

$$\|u(t)\|_{L_p} \leq l. \quad (15)$$

Числа c_n в формуле (14), называемые моментами, также могут параметрически зависеть от выбора времени T : $c_n = c_n(T)$.

Определение 12. Будем говорить, что постановка l -проблемы моментов в форме задачи 2 для заданной системы корректна, если для этой системы определена норма функций $g_n(\tau)$ в пространстве $L_{p'}[0, T]$, моменты c_n определены и ограничены и хотя бы один из них отличен от нуля.

Необходимым и достаточным условием разрешимости l -проблемы моментов в форме задачи 2 является линейная независимость функций $g_n(\tau)$ или, что эквивалентно, выполнение условия

$$\Lambda_N > 0 \quad (16)$$

(см. [2, 4]), где число Λ_N определяет норму оптимального (в смысле задачи А) управления и является решением следующей задачи условной минимизации.

Задача 3. Найти

$$\min_{\xi_1, \dots, \xi_N} \left(\int_0^T \left| \sum_{i=1}^N \xi_i g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} = \left(\int_0^T \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} = \frac{1}{\Lambda_N} \quad (17)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^N \xi_i c_i = \sum_{i=1}^N \xi_i^* c_i = 1. \quad (18)$$

Если задача 3 решена, то оптимальное управление в смысле задачи А даётся формулой

$$u(t) = \Lambda_N^{p'} \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \left[\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right], \quad t \in (0, T] \quad (19)$$

(см. [2]). Решение задачи Б, в свою очередь, определяется формулой

$$u(t) = l^{p'} \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \left[\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right], \quad t \in (0, T^*] \quad (20)$$

(см. [2]), где T^* — минимальный неотрицательный действительный корень уравнения

$$\Lambda_N(T) = l. \quad (21)$$

Далее в данной работе для систем (11) и (12) задача 1 будет сведена к задаче 2, при этом будут получены условия корректности постановки последней и построены её решения.

4. Основные результаты. В данном разделе приведены результаты, касающиеся обоснования корректности и разрешимости l -проблемы моментов для одиночного интегратора дробного порядка в случаях, когда оператор дробного дифференцирования в определяющем уравнении (11) понимается в смысле Прабхакара, Сайго или Гринько. В ряде случаев получены явные аналитические решения l -проблемы моментов для исследуемой системы.

Как известно, непосредственным многомерным обобщением одиночного интегратора является цепочка интеграторов, в частности, двойной интегратор (12). Для такой системы получить общее аналитическое решение l -проблемы моментов уже не удается, как и для исследованных ранее двойного интегратора Хильфера, Адамара и Эрдейи—Кобера (см. [5, 6] и ссылки в них). В настоящем разделе приводятся результаты, касающиеся обоснования корректности и разрешимости l -проблемы моментов.

4.1. Постановка и разрешимость l -проблемы моментов: одиночный интегратор. Рассмотрим одиночный интегратор Прабхакара: уравнение (11), в котором оператор дробного дифференцирования будем понимать в смысле определений (4) или (3) при $\mu \in (0, 1)$. В первом случае начальное условие для уравнения (11) ставится в локальном виде:

$$q(0+) = q^0. \quad (22)$$

Во втором случае начальное условие является нелокальным и может быть записано в виде

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}_0^P I_{\rho, 1-\mu, \omega, t}^{-\gamma} q(t) \right] = s^0. \quad (23)$$

Решение уравнения (11) можно записать в виде

$$q(t) = \int_0^t \frac{E_{\rho, \mu}^\gamma [\omega(t - \tau)^\rho]}{(t - \tau)^{1-\mu}} u(\tau) d\tau + f(t) \quad (24)$$

(см. [8]), где $f(t) = q^0$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (4), и $f(t) = s^0 t^{\mu-1}$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (3).

Решение (24) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме одномерной проблемы моментов (14), если положить

$$c(T) = q^T - f(T), \quad (25)$$

где $f(T)$ определяется так же, как и в решении (24),

$$g(\tau) = \frac{E_{\rho, \mu}^\gamma [\omega(T - \tau)^\rho]}{(T - \tau)^{1-\mu}}. \quad (26)$$

Теорема 1. Пусть дана одномерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функция $g(\tau)$ определяется формулой (26), $\gamma > 0$, $\rho > 0$, $\mu \in (0, 1)$, а момент $c(T)$ определяется формулой (25) и отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов будет корректна и разрешима при выполнении условия

$$\mu > \frac{1}{p}. \quad (27)$$

Доказательство. Норма функции $g(\tau)$, определяемой формулой (26), в пространстве $L_{p'}(0, T]$ может быть оценена следующим образом:

$$\|g\|_{L_{p'}} \leq \| (T - \tau)^{\mu-1} \|_{L_{p'}} \| E_{\rho, \mu}^\gamma [\omega(T - \tau)^\rho] \|_{L_{p'}}.$$

Поскольку обобщённая функция Миттаг-Леффлера является целой функцией конечного порядка роста (см. [10, Ch. 1]), то второй множитель в правой части неравенства ограничен. Первый же множитель определён, положителен и ограничен при условии

$$p'(\mu - 1) > -1.$$

Учитывая связь $1/p + 1/p' = 1$, получаем отсюда условие (27). Выполнение этого условия означает, что норма функции (26) определена, что с учётом предположения об отличии от нуля момента (25) обуславливает корректность исследуемой проблемы моментов. Параметр Λ_1 можно вычислить, решив одномерную задачу 3. В данном случае $\xi = \xi^* = 1/c$ и параметр Λ_1 выражается через норму функций (26) и момент (25) следующим образом:

$$\Lambda_1 = \frac{|c|}{\|g\|_{L_{p'}}}. \quad (28)$$

Следовательно, при сделанных в условии теоремы предположениях и при выполнении условия (27) правая часть выражения (28) ограничена и положительна. Следовательно, проблема моментов (14)–(15) с учётом (25)–(26) разрешима. Теорема доказана. \square

Рассмотрим теперь одиночный интегратор Сайго: уравнение (11), в котором оператор дробного дифференцирования будем понимать в смысле определений (6) или (7) при $\alpha \in (0, 1)$. В первом случае, как и выше, начальное условие для уравнения (11) можно поставить в локальном виде (22), а во втором случае начальное условие ставится в нелокальном виде:

$$\frac{\Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(\alpha + \gamma)} \lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}_0^S I_t^{1-\alpha, -\beta-1, \alpha+\gamma-1} q(t) \right] = s^0. \quad (29)$$

При этом предполагается выполнение следующих условий (см. [11]):

$$\gamma - \beta > 0, \quad \beta < 0, \quad \alpha + \gamma > 0. \quad (30)$$

Решение уравнения (11) можно записать в виде

$$q(t) = \frac{t^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{{}_2F_1(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{t})}{(t - \tau)^{1-\alpha}} u(\tau) d\tau + f(t) \quad (31)$$

(см. [7, 11]), где $f(t) = q^0$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (6), и $f(t) = s^0 t^{-\beta-1}$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (7).

Решение (31) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме одномерной проблемы моментов (14), если положить

$$c(T) = q^T - f(T), \quad (32)$$

где $f(T)$ определяется так же, как и в решении (31),

$$g(\tau) = \frac{T^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{{}_2F_1(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{T})}{(T - \tau)^{1-\alpha}}. \quad (33)$$

Теорема 2. Пусть дана одномерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функция $g(\tau)$ определяется формулой (33), $\alpha \in (0, 1)$, а момент $c(T)$ определяется формулой (32) и отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов будет корректна и разрешима при выполнении следующих условий:

1. в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется в смысле Капуто (формулой (6)), – условия

$$\alpha > \frac{1}{p}, \quad \gamma > \beta; \quad (34)$$

2. в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется в смысле Римана–Лиувилля (формулой (7)) и выполнены условия (30), – условия

$$\alpha > \frac{1}{p} \quad (35)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется в смысле Капуто. Начальное условие тогда ставится в виде (22) и момент $c(T)$ считается ограниченным и отличным от нуля.

Оценим норму функции $g(\tau)$, определяемой формулой (33), в пространстве $L_{p'}(0, T]$:

$$\|g\|_{L_{p'}} \leq \frac{T^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \|(T - \tau)^{\alpha-1}\|_{L_{p'}} \left\| {}_2F_1 \left(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{T} \right) \right\|_{L_{p'}}.$$

Если выполнено первое из условий (34), то норма $\|(T - \tau)^{\alpha-1}\|_{L_{p'}}$ определена (как и выше, в доказательстве теоремы 1). Выполнение второго из условий (34) означает, что гипергеометрическая функция представляется абсолютно сходящимся степенным рядом (см. [10, Ch. 1]) и, следовательно, имеет конечный порядок роста. Т. е., при выполнении условий (34) норма $\|g\|_{L_{p'}}$ определена и ограничена, следовательно, рассматриваемая проблема моментов корректна.

Рассмотрим теперь случай, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется в смысле Римана–Лиувилля. Начальное условие тогда ставится в виде (29) и определено при выполнении условий (30), тогда момент $c(T)$ может считаться ограниченным и по условию предполагается отличным от нуля. Сделанная выше оценка для нормы функции (33), в пространстве $L_{p'}(0, T]$ будет справедлива и в этом случае. Соответственно, требование существования нормы $\|(T - \tau)^{\alpha-1}\|_{L_{p'}}$, как и ранее, приводит к условию (35), а первое из условий (30) обеспечивает существование нормы

$$\left\| {}_2F_1 \left(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{T} \right) \right\|_{L_{p'}}.$$

Таким образом, в этом случае рассматриваемая проблема моментов корректна при выполнении условий (30).

Параметр Λ_1 можно вычислить, как и выше, по формуле (28). Следовательно, при сделанных в условии теоремы предположениях и при выполнении условий (34) или (35) правая часть выражения (28) будет ограничена и положительна. Следовательно, проблема моментов (14)–(15) с учётом (32)–(33) разрешима. Теорема доказана. \square

Наконец, рассмотрим одиночный интегратор Гринько: уравнение (11), в котором оператор дробного дифференцирования будем понимать в смысле определений (10) или (9) при $\alpha \in (0, 1)$. Аналогично предыдущему рассмотрению, локальное начальное условие (22) можно поставить для уравнения (11) с оператором (10), а в случае оператора (9) начальное условие нужно ставить в нелокальном виде:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}_0^G I_t^{1-\alpha, -\beta, \eta} q(t) \right] = s^0. \quad (36)$$

Решение уравнения (11) можно записать в виде

$$q(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{{}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(t - \tau)]}{(t - \tau)^{1-\alpha}} u(\tau) d\tau + f(t) \quad (37)$$

(см. [3, 9]), где $f(t) = q^0$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (10), и $f(t) = s^0 t^{\alpha-1}$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (9).

Решение (37) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме одномерной проблемы моментов (14), если положить

$$c(T) = q^T - f(T), \quad (38)$$

где $f(T)$ определяется так же, как и в решении (37),

$$g(\tau) = \frac{{}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(T - \tau)]}{(T - \tau)^{1-\alpha}}. \quad (39)$$

Теорема 3. Пусть дана одномерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функция $g(\tau)$ определяется формулой (39), $\alpha \in (0, 1)$, а момент $c(T)$ определяется формулой (38) и отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов будет корректна и разрешима при выполнении условия

$$\alpha > \frac{1}{p}. \quad (40)$$

Доказательство. Оценим норму функции $g(\tau)$ (см. (39)) в пространстве $L_{p'}(0, T]$:

$$\|g\|_{L_{p'}} \leq \| (T - \tau)^{\alpha-1} \|_{L_{p'}} \| {}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(T - \tau)] \|_{L_{p'}}.$$

Вырожденная гипергеометрическая функция представляется абсолютно сходящимся степенным рядом (см. [10, Ch. 1]) и, следовательно, имеет конечный порядок роста. Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что при выполнении условия (40) норма $\| (T - \tau)^{\alpha-1} \|_{L_{p'}}$ определена. Следовательно, рассматриваемая проблема моментов корректна.

Как и ранее, параметр Λ_1 можно вычислить по формуле (28). Следовательно, при сделанных в условии теоремы предположениях и при выполнении условия (40) правая часть выражения (28) будет ограничена и положительна, т.е. проблема моментов (14)–(15) с учётом (38)–(39) будет разрешима. Теорема доказана. \square

4.2. Решение l -проблемы моментов: одиночный интегратор. Рассмотрим теперь решения l -проблемы моментов для уравнения (11). Имеют место следующие результаты.

Теорема 4. Пусть дано уравнение (11), где оператор дробного дифференцирования определён формулой (4) или (3), $u(t) \in L_\infty(0, T]$ и задано начальное условие в локальном (22) или нелокальном (23) виде соответственно и конечное условие в виде (13). Пусть также выполнены условия теоремы 1.

1. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (25) и (26), имеющее минимальную норму при заданном носителе $t \in (0, T]$ даётся формулой

$$u(t) = \frac{c(T)}{T^\mu E_{\rho, \mu+1}^\gamma(\omega T^\rho)}, \quad t \in (0, T]. \quad (41)$$

2. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (25) и (26), имеющее минимальный носитель $t \in (0, T^*]$ даётся формулой

$$u(t) = l \operatorname{sign}[c(T)], \quad t \in (t_0, T^*], \quad (42)$$

где T^* – наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном $l > 0$ уравнению

$$\frac{|c(T)|}{T^\mu E_{\rho, \mu+1}^\gamma(\omega T^\rho)} = l. \quad (43)$$

Доказательство. Поскольку считается, что выполнены условия теоремы 1, l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (25) и (26) корректна и разрешима. Тогда её решение можно строить по формулам (17)–(18) и (19)–(20).

Вычислим в явном виде параметр Λ_1 по формуле (28). Для этого сначала вычислим норму функции (26) в случае $u(t) \in L_\infty(0, T]$, т.е. $g(t) \in L_1(0, T]$:

$$\|g\|_{L_1} = \int_0^T |g(t)| dt = \int_0^T \left| \frac{E_{\rho,\mu}^\gamma[\omega(T-\tau)^\rho]}{(T-\tau)^{1-\mu}} \right| dt. \quad (44)$$

На полуинтервале $t \in (0, T]$ при $\mu \in (0, 1)$, $\gamma > 0$, $\rho > 0$ функция Прабхакара $E_{\rho,\mu}^\gamma(z)$ положительно определена и представляется абсолютно сходящимся степенным рядом (2). Следовательно, можно подставить представление (2) в (44) и выполнить почленное интегрирование:

$$\|g\|_{L_1} = \frac{T^\mu}{\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\rho k + \mu + 1)} \frac{\omega^k}{k!} T^{\rho k + \mu}.$$

Отсюда, с учётом представления (2):

$$\|g\|_{L_1} = T^\mu E_{\rho,\mu+1}^\gamma(\omega T^\rho).$$

Используя полученное выражение, вычислим (28):

$$\Lambda_1 = \frac{|c(T)|}{T^\mu E_{\rho,\mu+1}^\gamma(\omega T^\rho)}. \quad (45)$$

Подставим (45) в выражение (19) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$. Функция (26) на полуинтервале $t \in (0, T]$ при $\mu \in (0, 1)$, $\gamma > 0$, $\rho > 0$ неотрицательна, следовательно, получим формулу (41).

Аналогично, запишем выражение (20) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$, $p' = 1$ и учтём неотрицательность функции (26) на полуинтервале $t \in (0, T^*]$. В результате получим формулу (42). Подставив выражение (45) в уравнение (21), получим (43). Теорема доказана. \square

Следствие 1. На основе решений (41)–(42) можно вычислить закон движения одиночного интегратора Прабхакара, соответствующий оптимальному управлению. Подставив выражения (41)–(42) в общее решение (24) и вычислив интеграл (с использованием представления (2)), получим:

$$q_A(t) = c(T) \frac{t^\mu E_{\rho,\mu+1}^\gamma(\omega t^\rho)}{T^\mu E_{\rho,\mu+1}^\gamma(\omega T^\rho)} + f(t), \quad t \in (0, T], \quad (46)$$

$$q_B(t) = l \operatorname{sign}[c(T)] t^\mu E_{\rho,\mu+1}^\gamma(\omega t^\rho) + f(t), \quad t \in (0, T^*], \quad (47)$$

где $q_A(t)$ и $q_B(t)$ – соответственно законы движения, реализующие оптимальное управление (41) и (42), $f(t)$ определяется так же, как и в выражении (24). Непосредственной проверкой можно убедиться, что для законов движения (46)–(47) выполняется конечное условие (13).

Теорема 5. Пусть дано уравнение (11), где оператор дробного дифференцирования определён формулой (6) или (7), $u(t) \in L_\infty(0, T]$ и задано начальное условие в локальном (22) или нелокальном (29) виде соответственно и конечное условие в виде (13). Пусть также выполнены условия теоремы 2 и условие $\alpha > \beta$.

1. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (32) и (33), имеющее минимальную норму при заданном носителе $t \in (0, T]$ даётся формулой

$$u(t) = \frac{\Gamma(\alpha + \gamma + 1)\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta + 1)} T^\beta c(T), \quad t \in (0, T]. \quad (48)$$

2. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (32) и (33), имеющее минимальный носитель $t \in (0, T^*]$, даётся формулой

$$u(t) = l \operatorname{sign}[c(T)], \quad t \in (t_0, T^*], \quad (49)$$

где T^* – наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном $l > 0$ уравнению

$$\frac{\Gamma(\alpha + \gamma + 1)\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta + 1)} T^\beta |c| = l. \quad (50)$$

Доказательство. Поскольку считается, что выполнены условия теоремы 2, то l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (32) и (33) является корректной и разрешимой. Следовательно, решение этой проблемы можно строить по формулам (17)–(18) и (19)–(20).

Вычислим в явном виде норму функции (33) в случае $u(t) \in L_\infty(0, T]$, т.е. $g(t) \in L_1(0, T]$:

$$\|g\|_{L_1} = \int_0^T |g(t)| dt = \frac{T^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left| \frac{2F_1(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{T})}{(T - \tau)^{1-\alpha}} \right| dt. \quad (51)$$

На полуинтервале $t \in (0, T]$ при $\alpha > \beta$ гипергеометрическая функция Гаусса, присутствующая под интегралом в выражении (51), положительно определена. При выполнении условий теоремы 2 упомянутая функция представляется абсолютно сходящимся степенным рядом следующего вида:

$$2F_1\left(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{T}\right) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(-\gamma)\Gamma(\alpha + \beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + k)\Gamma(-\gamma + k)}{\Gamma(\alpha + k)} \frac{(1 - \frac{\tau}{T})^k}{k!}. \quad (52)$$

Подставив представление (52) в (51) и выполнив почленное интегрирование, получим:

$$\|g\|_{L_1} = \frac{T^{-\beta}}{\Gamma(\alpha + 1)} 2F_1(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha + 1; 1).$$

Значение гипергеометрической функции в правой части полученного выражения можно вычислить через значения гамма-функции (см. [1, с. 371]):

$$\|g\|_{L_1} = T^{-\beta} \frac{\Gamma(\gamma - \beta + 1)}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)}.$$

Используя полученное выражение, вычислим параметр Λ_1 по формуле (28):

$$\Lambda_1 = |c(T)|T^\beta \frac{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \beta + 1)}. \quad (53)$$

Подставим (53) в выражение (19) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$. Функция (33) на полуинтервале $t \in (0, T]$ при сделанных предположениях неотрицательна, следовательно, получим формулу (48).

Аналогично, запишем выражение (20) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$, $p' = 1$ и учтём неотрицательность функции (33) на полуинтервале $t \in (0, T^*]$. В результате получим формулу (49). Подставив выражение (53) в уравнение (21), получим (50). Теорема доказана. \square

Замечание. Уравнение (50) имеет единственное решение в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется выражением (6) и начальное условие ставится в виде (22):

$$T^* = \left(\frac{\Gamma(\gamma - \beta + 1)}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)} \frac{l}{|q^T - q^0|} \right)^{1/\beta}.$$

В случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется выражением (7) и начальное условие ставится в виде (29), явное решение уравнения (50) можно получить при $q^T = 0$:

$$T^* = \frac{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \beta + 1)} \frac{|s^0|}{l}.$$

Следствие 2. На основе решений (48)–(49) можно вычислить закон движения одиночного интегратора Сайго, соответствующий оптимальному управлению. Подставив выражения (48)–(49) в общее решение (31) и, вычислив интеграл (с использованием представления (52)), получим:

$$q_A(t) = c(T) \left(\frac{T}{t} \right)^\beta + f(t), \quad t \in (0, T], \quad (54)$$

$$q_B(t) = l \operatorname{sign}[c(T)] t^{-\beta} \frac{\Gamma(\gamma - \beta + 1)}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)} + f(t), \quad t \in (0, T^*], \quad (55)$$

где $q_A(t)$ и $q_B(t)$ – соответственно законы движения, реализующие оптимальное управление (48) и (49), $f(t)$ определяется так же, как и в выражении (31). Непосредственной проверкой можно убедиться, что для законов движения (54)–(55) выполняется конечное условие (13).

Теорема 6. Пусть дано уравнение (11), где оператор дробного дифференцирования определён формулой (10) или (9), $u(t) \in L_\infty(0, T]$ и задано начальное условие в локальном (22) или нелокальном (36) виде соответственно и конечное условие в виде (13). Пусть также выполнены условия теоремы 3 и $\beta \geq 0$.

1. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (38) и (39), имеющее минимальную норму при заданном носителе $t \in (0, T]$ даётся формулой

$$u(t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{{}_1F_1(\beta; \alpha + 1; \eta T)} \frac{c(T)}{T^\alpha}, \quad t \in (0, T]. \quad (56)$$

2. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (38) и (39), имеющее минимальный носитель $t \in (0, T^*]$, даётся формулой

$$u(t) = l \operatorname{sign}[c(T)], \quad t \in (t_0, T^*], \quad (57)$$

где T^* – наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном $l > 0$ уравнению

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{{}_1F_1(\beta; \alpha + 1; \eta T)} \frac{|c(T)|}{T^\alpha} = l. \quad (58)$$

Доказательство. Условия теоремы 3 считаются выполненными. Следовательно, l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (38) и (39) корректна, разрешима и её решение можно строить по формулам (17)–(18) и (19)–(20).

Воспользуемся формулой (28) и вычислим параметр Λ_1 . Сначала вычислим норму функции (39) в случае $u(t) \in L_\infty(0, T]$, т.е. $g(t) \in L_1(0, T]$:

$$\|g\|_{L_1} = \int_0^T |g(t)| dt = \int_0^T \left| \frac{{}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(T - \tau)]}{(T - \tau)^{1-\alpha}} \right| dt. \quad (59)$$

На полуинтервале $t \in (0, T]$ при $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \geq 0$ вырожденная гипергеометрическая функция положительно определена и представляется абсолютно сходящимся степенным рядом:

$${}_1F_1[\beta, \alpha, \eta(T - \tau)] = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + k)}{\Gamma(\alpha + k)} \frac{[\eta(T - \tau)]^k}{k!}. \quad (60)$$

Подставим теперь представление (60) в (59) и, выполнив почленное интегрирование и использовав представление (60), получим:

$$\|g\|_{L_1} = \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} {}_1F_1[\beta, \alpha + 1, \eta T].$$

Используя полученное выражение, вычислим (28):

$$\Lambda_1 = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{{}_1F_1[\beta, \alpha + 1, \eta T]} \frac{|c(T)|}{T^\alpha}. \quad (61)$$

Подставим (61) в выражение (19) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$. Функция (39) на полуинтервале $t \in (0, T]$ при $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \geq 0$ неотрицательна, следовательно, получим формулу (56).

Запишем теперь выражение (20) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$, $p' = 1$ и, учтя неотрицательность функции (39) на полуинтервале $t \in (0, T^*]$ при $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \geq 0$, получим формулу (57). Подставив выражение (61) в уравнение (21), получим (58). Теорема доказана. \square

Следствие 3. Аналогично следствиям 1 и 2 вычислим закон движения одиночного интегратора Гринько, соответствующий оптимальному управлению, подставив выражения (56)–(57) в общее решение (37). Используем представление (60) чтобы вычислить интеграл в формуле (37), тогда получим:

$$q_A(t) = c(T) \frac{{}_1F_1(\beta, \alpha + 1, \eta t)}{{}_1F_1(\beta, \alpha + 1, \eta T)} \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha + f(t), \quad t \in (0, T], \quad (62)$$

$$q_B(t) = l \operatorname{sign}[c(T)] \frac{{}_1F_1(\beta, \alpha + 1, \eta t)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f(t), \quad t \in (0, T^*], \quad (63)$$

где $q_A(t)$ и $q_B(t)$ – соответственно законы движения, реализующие оптимальное управление (56) и (57), $f(t)$ определяется так же, как и в выражении (37). Непосредственной проверкой можно убедиться, что для законов движения (62)–(63) выполняется конечное условие (13).

4.3. Постановка и разрешимость l -проблемы моментов: двойной интегратор. Рассмотрим двойной интегратор Прабхакара: систему уравнений (12), в котором оператор дробного дифференцирования будем понимать в смысле определений (4) или (3) при $\mu \in (0, 1)$. В первом случае начальные условия, как и выше, могут быть поставлены в локальном виде:

$$q_i(0+) = q_i^0, \quad i = 1, 2. \quad (64)$$

Во втором случае начальное условие ставится в нелокальном виде:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}_0^P I_{\rho_i, 1-\mu_i, \omega_i, t}^{-\gamma_i} q_i(t) \right] = s_i^0, \quad i = 1, 2. \quad (65)$$

Будем полагать также, что показатели операторов дробного дифференцирования μ_i и γ_i в первом и втором уравнениях системы (12) в общем случае различны, а индексы ρ и ω – одинаковы, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Теорема 7. Пусть задана система уравнений (12), где $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\mu_{1,2} \in (0, 1)$, $\gamma_{1,2} \in \mathbb{C}$, $u(t) \in L_p(0, T]$, $p > 1$. Пусть также выполнено одно из условий:

- (i) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (3) и заданы начальные условия (65);
- (ii) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (4) и заданы начальные условия (64).

Тогда решение системы уравнений (12) существует, единственно и определяется формулами

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \int_0^t \frac{E_{\rho, \mu_1 + \mu_2}^{\gamma_1 + \gamma_2} [\omega(t - \tau)^\rho]}{(t - \tau)^{1-\mu_1-\mu_2}} u(\tau) d\tau + f_1(t), \\ q_2(t) &= \int_0^t \frac{E_{\rho, \mu_2}^{\gamma_2} [\omega(t - \tau)^\rho]}{(t - \tau)^{1-\mu_2}} u(\tau) d\tau + f_2(t), \end{aligned} \quad (66)$$

где

$$f_1(t) = s_1^0 t^{\mu_1 - 1} + s_2^0 t^{\mu_1 + \mu_2 - 1} E_{\rho, \mu_1 + \mu_2}^{\gamma_1} (\omega t^\rho), \quad f_2(t) = s_2^0 t^{\mu_2 - 1},$$

в случае, когда справедливо условие (i), и

$$f_1(t) = q_1^0 + q_2^0 t^{\mu_1} E_{\rho, \mu_1 + 1}^{\gamma_1} (\omega t^\rho), \quad f_2(t) = q_2^0,$$

в случае, когда справедливо условие (ii).

Доказательство. Подействовав на обе части уравнений системы (12) соответственно операторами ${}_0^P I_{\rho, \mu_1, \omega, t}^{\gamma_1}$ и ${}_0^P I_{\rho, \mu_2, \omega, t}^{\gamma_2}$ и воспользовавшись правилами композиции операторов Прабхакара, получим

$$q_1(t) = {}_0^P I_{\rho, \mu_1, \omega, t}^{\gamma_1} q_2(t) + \tilde{f}_1(t), \quad q_2(t) = {}_0^P I_{\rho, \mu_2, \omega, t}^{\gamma_2} u(t) + \tilde{f}_2(t) \quad (67)$$

(см. [8]), где $\tilde{f}_i(t) = q_i^0$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (4), и $\tilde{f}_i(t) = s_i^0 t^{\mu_i-1}$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (3), $i = 1, 2$. Данное представление единственно (см. [8]).

Подставим теперь второе из полученных уравнений в первое и воспользуемся полугрупповым свойством интегралов Прабхакара (см. [8]):

$$q_1(t) = {}_0^P I_{\rho, \mu_1 + \mu_2, \omega, t}^{\gamma_1 + \gamma_2} u(t) + {}_0^P I_{\rho, \mu_1, \omega, t}^{\gamma_1} \tilde{f}_2(t) + \tilde{f}_1(t). \quad (68)$$

Сравнив второе выражение в представлении (67) и аналогичное выражение в представлении (66), можно убедиться в их идентичности при $\tilde{f}_2(t) = f_2(t)$. Далее воспользуемся определением 1 и вычислим второе слагаемое в выражении (68), используя представление (2). В результате получим:

$$q_1(t) = {}_0^P I_{\rho, \mu_1 + \mu_2, \omega, t}^{\gamma_1 + \gamma_2} u(t) + f_1(t).$$

Теорема доказана. \square

Решение (66) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме двумерной проблемы моментов (14), если положить:

$$c_i(T) = q_i^T - f_i(T), \quad i = 1, 2, \quad (69)$$

где $f_i(T)$ определяется так же, как и в решении (66),

$$g_1(\tau) = \frac{E_{\rho, \mu_1 + \mu_2}^{\gamma_1 + \gamma_2} [\omega(T - \tau)^\rho]}{(T - \tau)^{1 - \mu_1 - \mu_2}}, \quad g_2(\tau) = \frac{E_{\rho, \mu_2}^{\gamma_2} [\omega(T - \tau)^\rho]}{(T - \tau)^{1 - \mu_2}}. \quad (70)$$

Теорема 8. Пусть дана двумерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функции $g_{1,2}(\tau)$ определяются формулами (70), $\gamma_{1,2} > 0$, $\rho > 0$, $\mu_{1,2} \in (0, 1)$, а моменты $c_{1,2}(T)$ определяются формулой (69) и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов будет корректна и разрешима при выполнении условия:

$$\mu_2 > \frac{1}{p}. \quad (71)$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 оценим норму функций $g_{1,2}(\tau)$, определяемых формулами (70), в пространстве $L'_p(0, T]$:

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{L_{p'}} &\leqslant \|(T - \tau)^{\mu_1 + \mu_2 - 1}\|_{L_{p'}} \|E_{\rho, \mu_1 + \mu_2}^{\gamma_1 + \gamma_2} [\omega(T - \tau)^\rho]\|_{L_{p'}}, \\ \|g_2\|_{L_{p'}} &\leqslant \|(T - \tau)^{\mu_2 - 1}\|_{L_{p'}} \|E_{\rho, \mu_2}^{\gamma_2} [\omega(T - \tau)^\rho]\|_{L_{p'}}. \end{aligned}$$

Обобщённая функция Миттаг-Леффлера является целой функцией конечного порядка роста (см. [10, Ch. 1]), следовательно, второй множитель в правых частях полученных неравенств ограничен. Первые же множители в рассматриваемых неравенствах будут определены, положительны и ограничены при выполнении условий

$$\mu_1 + \mu_2 > \frac{1}{p}, \quad \mu_2 > \frac{1}{p}.$$

Поскольку $\mu_{1,2} \in (0, 1)$, то выполнение второго из этих неравенств влечёт выполнение и первого. Следовательно, в предположении об отличии от нуля хотя бы одного из моментов (69), получаем в качестве условия корректности исследуемой проблемы моментов неравенство (71).

Функции (70) представляют собой произведение функции Прабхакара и дробно-степенной функции и отличаются набором показателей этих функций. Следовательно, такие функции являются линейно независимыми, а l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (69)–(70) является разрешимой. Теорема доказана. \square

Рассмотрим далее двойной интегратор Сайго: систему уравнений (12), в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определений (6) или (7) при $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$.

Как и выше, при использовании операторов (6) начальные условия для уравнений (12) можно поставить в локальном виде (64), а в случае использования операторов (7) начальные условия ставятся в нелокальном виде:

$$\frac{\Gamma(\gamma_i - \beta_i)}{\Gamma(-\beta_i)\Gamma(\alpha_i + \gamma_i)} \lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}_0^S I_t^{1-\alpha_i, -\beta_i-1, \alpha_i+\gamma_i-1} q(t) \right] = s_i^0, \quad i = 1, 2. \quad (72)$$

При этом предполагается выполнение следующих условий (см. [11]):

$$\gamma_i - \beta_i > 0, \quad \beta_i < 0, \quad \alpha_i + \gamma_i > 0, \quad i = 1, 2. \quad (73)$$

Примем также $\gamma_1 = \gamma$ и наложим дополнительное ограничение на показатели операторов дробного дифференцирования в уравнениях (12): $\gamma_2 = \gamma + \alpha_1$.

Теорема 9. *Пусть задана система уравнений (12), где $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \gamma + \alpha_1$, $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $u(t) \in L_p(0, T]$, $p > 1$. Пусть также выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (7), выполнены условия (73) и заданы начальные условия (65);
- (ii) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (6), $\gamma - \beta_1 > 0$ и заданы начальные условия (64).

Тогда решение системы уравнений (12) существует, единственно и определяется формулами

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{t^{-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \int_0^t \frac{{}_2F_1(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2, -\gamma; \alpha_1+\alpha_2; 1-\frac{\tau}{t})}{(t-\tau)^{1-\alpha_1-\alpha_2}} u(\tau) d\tau + f_1(t), \\ q_2(t) &= \frac{t^{-\alpha_2-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \frac{{}_2F_1(\alpha_2+\beta_2, -\gamma-\alpha_1; \alpha_2; 1-\frac{\tau}{t})}{(t-\tau)^{1-\alpha_2}} u(\tau) d\tau + f_2(t), \end{aligned} \quad (74)$$

где

$$f_1(t) = s_1^0 t^{-\beta_1-1} + s_2^0 \frac{\Gamma(-\beta_2)\Gamma(\gamma-\beta_1-\beta_2)}{\Gamma(\gamma+\alpha_1-\beta_2)\Gamma(-\beta_1-\beta_2)} t^{-\beta_1-\beta_2-1}, \quad f_2(t) = s_2^0 t^{-\beta_2-1},$$

в случае, когда справедливо условие (i), и

$$f_1(t) = q_1^0 + q_2^0 \frac{\Gamma(\gamma-\beta_1+1)}{\Gamma(1-\beta_1)\Gamma(\gamma+\alpha_1+1)} t^{-\beta_1}, \quad f_2(t) = q_2^0,$$

в случае, когда справедливо условие (ii).

Доказательство. Подействовав на обе части уравнений системы (12) соответственно операторами ${}_0^S I_t^{\alpha_1, \beta_1, \gamma}$ и ${}_0^S I_t^{\alpha_2, \beta_2, \gamma+\alpha_1}$ и воспользовавшись правилами композиции операторов Сайго (см. [7, 11]), получим

$$q_1(t) = {}_0^S I_t^{\alpha_1, \beta_1, \gamma} q_2(t) + \tilde{f}_1(t), \quad q_2(t) = {}_0^S I_t^{\alpha_2, \beta_2, \gamma+\alpha_1} u(t) + \tilde{f}_2(t), \quad (75)$$

где $\tilde{f}_i(t) = q_i^0$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (6), и $\tilde{f}_i(t) = s_i^0 t^{-\beta_i-1}$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (3), $i = 1, 2$. Данное представление единственno (см. [7, 11]).

Очевидно, второе выражение в представлении (67) и аналогичное выражение в представлении (66) идентичны при $f_2(t) = f_1(t)$.

Подставим теперь второе из полученных уравнений в первое и воспользуемся полугрупповым свойством интегралов Сайго (см. [7]):

$$q_1(t) = {}_0^S I_t^{\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2, \gamma} u(t) + {}_0^S I_t^{\alpha_1, \beta_1, \gamma} \tilde{f}_2(t) + \tilde{f}_1(t). \quad (76)$$

Воспользовавшись определением 4, вычислим второе слагаемое в выражении (76) и получим исключим второе выражение из решения (74) (при этом используется представление (52), справедливое при $\gamma - \beta_1 > 0$). Теорема доказана. \square

Решение (74) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме двумерной проблемы моментов (14), если положить

$$c_i(T) = q_i^T - f_i(T), \quad i = 1, 2, \quad (77)$$

где $f_i(T)$ определяется так же, как и в решении (74),

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= \frac{T^{-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \frac{{}_2F_1(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2, -\gamma; \alpha_1+\alpha_2; 1-\frac{\tau}{T})}{(T-\tau)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}, \\ g_2(\tau) &= \frac{T^{-\alpha_2-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \frac{{}_2F_1(\alpha_2+\beta_2, -\gamma-\alpha_1; \alpha_2; 1-\frac{\tau}{T})}{(T-\tau)^{1-\alpha_2}}. \end{aligned} \quad (78)$$

Теорема 10. Пусть дана двумерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функции $g_{1,2}(\tau)$ определяются формулами (78), $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$, а моменты $c_{1,2}(T)$ определяются формулами (77) и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов будет корректна и разрешима при выполнении следующих условий:

- (i) в случае, когда операторы дробного дифференцирования в системе уравнений (12) определяются формулой (6), – условия

$$\alpha_2 > \frac{1}{p}, \quad \gamma > \beta_1, \quad \gamma > \beta_1 + \beta_2, \quad \gamma + \alpha_1 > \beta_2 \quad (79)$$

- (ii) в случае, когда операторы дробного дифференцирования в системе уравнений (12) определяются формулой (7) и выполнены условия (73) (с учётом $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \gamma + \alpha_1$), – условия

$$\alpha_2 > \frac{1}{p} \quad (80)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда операторы дробного дифференцирования в уравнениях (12) определяются в смысле Капуто и начальные условия ставятся в виде (64). По условию теоремы хотя бы один из моментов $c_{1,2}(T)$ отличен от нуля.

Оценим норму функций $g_{1,2}(\tau)$, определяемых формулами (78), в пространстве $L_{p'}(0, T]$:

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{L_{p'}} &\leq \frac{T^{-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \|(T-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\|_{L_{p'}} \left\| {}_2F_1\left(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2, -\gamma; \alpha_1+\alpha_2; 1-\frac{\tau}{T}\right) \right\|_{L_{p'}}, \\ \|g_2\|_{L_{p'}} &\leq \frac{T^{-\alpha_2-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \|(T-\tau)^{\alpha_2-1}\|_{L_{p'}} \left\| {}_2F_1\left(\alpha_2+\beta_2, -\gamma-\alpha_1; \alpha_2; 1-\frac{\tau}{T}\right) \right\|_{L_{p'}}. \end{aligned}$$

Если выполнено первое из условий (79), то норма $\|(T-\tau)^{\alpha_2-1}\|_{L_{p'}}$ определена, а учитывая, что $\alpha_1 > 0$ определена и норма $\|(T-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\|_{L_{p'}}$. Выполнение оставшихся условий в системе неравенств (79) означает, что гипергеометрическая функция представляется абсолютно сходящимся степенным рядом (см. [10, Ch. 1]) и, следовательно, имеет конечный порядок роста и для неё также определена норма в пространстве $L_{p'}(0, T]$.

Рассмотрим теперь случай, когда оператор дробного дифференцирования в уравнениях (12) определяется в смысле Римана–Лиувилля. Начальные условия тогда ставятся в виде (72) и определены при выполнении условий (73), тогда моменты $c_{1,2}(T)$ могут считаться ограниченными. Также по условию теоремы хотя бы один из этих моментов предполагается отличным от нуля. Сделанная выше оценка для нормы функций (78), в пространстве $L_{p'}(0, T]$ будет справедлива и в этом случае. Выполнение последних трёх условий (79) обеспечивает существование нормы гипергеометрических функций, входящих в правую часть выписанных выше неравенств для нормы. Требование существования нормы $\|(T-\tau)^{\alpha_2-1}\|_{L_{p'}}$, как и ранее, приводит к первому условию в системе неравенств (80) и влечёт существование нормы $\|(T-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\|_{L_{p'}}$ (с учётом $\alpha_1 > 0$).

Тем самым, корректность рассматриваемой проблемы моментов обоснована.

Функции (78) представляют собой произведения гипергеометрической функции Эйлера и дробно-степенной функции и отличаются набором показателей этих функций. Следовательно, такие

функции являются линейно независимыми, а l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (77)–(78) является разрешимой. Теорема доказана. \square

Рассмотрим теперь двойной интегратор Гринько: систему уравнений (12), в котором операторы дробного дифференцирования будем понимать в смысле определений (10) или (9) при $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$. По аналогии с проводившимся выше рассмотрением локальные начальные условия (64) можно поставить для уравнений (12) с операторами (10), а в случае операторов (9) начальные условия ставятся в нелокальном виде:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}_0^G I_t^{1-\alpha_i, -\beta_i, \eta_i} q(t) \right] = s_i^0, i = 1, 2. \quad (81)$$

Примем также дополнительное ограничение на значения показателей оператора дробного дифференцирования: $\eta_1 = \eta_2 = \eta$.

Теорема 11. *Пусть задана система уравнений (12), где $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$, $\beta_{1,2} > 0$, $u(t) \in L_p(0, T]$, $p > 1$. Пусть также выполнено одно из условий:*

- (i) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (9) и заданы начальные условия (81);
- (ii) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (10) и заданы начальные условия (64).

Тогда решение системы уравнений (12) существует, единственно и определяется формулами

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_0^t \frac{{}_1F_1[\beta_1 + \beta_2; \alpha_1 + \alpha_2; \eta(t - \tau)]}{(t - \tau)^{1-\alpha_1-\alpha_2}} u(\tau) d\tau + f_1(t), \\ q_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \frac{{}_1F_1[\beta_2; \alpha_2; \eta(t - \tau)]}{(t - \tau)^{1-\alpha_2}} u(\tau) d\tau + f_2(t), \end{aligned} \quad (82)$$

где

$$f_1(t) = s_1^0 t^{\alpha_1-1} + s_2^0 \frac{\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} t^{\alpha_1+\alpha_2-1} {}_1F_1(\beta_1; \alpha_1 + \alpha_2; \eta t), \quad f_2(t) = s_2^0 t^{\alpha_2-1},$$

в случае, когда справедливо условие (i), и

$$f_1(t) = q_1^0 + \frac{q_2^0 t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} {}_1F_1(\beta_1; \alpha_1 + 1; \eta t), \quad f_2(t) = q_2^0,$$

в случае, когда справедливо условие (ii).

Доказательство. Подействовав на обе части уравнений системы (12) соответственно операторами ${}_0^G I_t^{\alpha_1, \beta_1, \eta}$ и ${}_0^G I_t^{\alpha_2, \beta_2, \eta}$ и воспользовавшись правилами композиции операторов Гринько (см. [3, 9]), получим

$$q_1(t) = {}_0^G I_t^{\alpha_1, \beta_1, \eta} q_2(t) + \tilde{f}_1(t), \quad q_2(t) = {}_0^G I_t^{\alpha_2, \beta_2, \eta} u(t) + \tilde{f}_2(t), \quad (83)$$

где $\tilde{f}_i(t) = q_i^0$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (10), и $\tilde{f}_i(t) = s_i^0 t^{\alpha_i-1}$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (9), $i = 1, 2$. Данное представление единственno (см. [3, 9]).

Очевидно, второе выражение в представлении (83) и аналогичное выражение в представлении (82) идентичны при $\tilde{f}_2(t) = f_2(t)$.

Подставим теперь второе из полученных уравнений в первое и воспользуемся полугрупповым свойством интегралов Гринько (см. [9]):

$$q_1(t) = {}_0^G I_t^{\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2, \eta} u(t) + {}_0^G I_t^{\alpha_1, \beta_1, \eta} \tilde{f}_2(t) + \tilde{f}_1(t). \quad (84)$$

Воспользовавшись определением 7, вычислим второе слагаемое в выражении (84) и получим искомое второе выражение из решения (82) (при этом используется представление (60)). Теорема доказана. \square

Решение (82) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме двумерной проблемы моментов (14), если положить

$$c_i(T) = q_i^T - f_i(T), \quad i = 1, 2, \quad (85)$$

где $f_i(T)$ определяется так же, как и в решении (82),

$$g_1(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{{}_1F_1[\beta_1 + \beta_2, \alpha_1 + \alpha_2, \eta(T - \tau)]}{(T - \tau)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}, \quad g_2(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \frac{{}_1F_1[\beta_2, \alpha_2, \eta(T - \tau)]}{(T - \tau)^{1-\alpha_2}}. \quad (86)$$

Теорема 12. *Пусть дана двумерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функции $g_{1,2}(\tau)$ определяются формулами (86), $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$, а моменты $c_{1,2}(T)$ определяются формулами (85) и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов корректна и разрешима при выполнении условия*

$$\alpha_2 > \frac{1}{p}. \quad (87)$$

Доказательство. Оценим норму функций $g_{1,2}(\tau)$, определяемых формулами (86), в пространстве $L_{p'}(0, T]$:

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{L_{p'}} &\leq \|(T - \tau)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\|_{L_{p'}} \|{}_1F_1[\beta_1 + \beta_2, \alpha_1 + \alpha_2, \eta(T - \tau)]\|_{L_{p'}}, \\ \|g_2\|_{L_{p'}} &\leq \|(T - \tau)^{\alpha_2-1}\|_{L_{p'}} \|{}_1F_1[\beta_2, \alpha_2, \eta(T - \tau)]\|_{L_{p'}}. \end{aligned}$$

Вырожденная гипергеометрическая функция Куммера представляется абсолютно сходящимся степенным рядом (см. [10, Ch. 1]) и имеет конечный порядок роста, следовательно, для неё определена норма в пространстве $L_{p'}(0, T]$. Непосредственной проверкой (как и выше при доказательстве теорем 3, 8 и др.) можно убедиться, что норма $\|(T - \tau)^{\alpha_2-1}\|_{L_{p'}}$ определена при выполнении условия (87). Учитывая, что $\alpha_1 > 0$, в этом случае определена и норма $\|(T - \tau)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\|_{L_{p'}}$.

Следовательно, рассматриваемая проблема моментов корректна.

Функции (86) представляют собой произведения вырожденной гипергеометрической функции Куммера и дробно-степенной функции и отличаются набором показателей этих функций. Следовательно, такие функции являются линейно независимыми, а l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (85)–(86) является разрешимой. Теорема доказана. \square

5. Заключение. Таким образом, в данной работе исследована l -проблема моментов для одномерных и двумерных линейных систем дробного порядка, которые описываются уравнениями с операторами Прабхакара, Сайго или Гринько. Получены условия, при которых l -проблема моментов будет корректна и разрешима. В ряде случаев, когда выполнены условия корректности и разрешимости l -проблемы моментов, получены точные аналитические решения поставленных задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
2. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами. — М.: Наука, 1975.
3. Гринько А. П. Операторы дробного интегродифференцирования с гипергеометрической функцией Куммера в ядре// Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2011. — 19, № 1. — С. 22–31.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
5. Постнов С. С. l -Проблема моментов и оптимальное управление для систем, моделируемых уравнениями дробного порядка с многопараметрическими и «несингулярными» производными// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 199. — С. 86–116.
6. Постнов С. С., Постнова Е. А. Об особенностях динамики двумерных линейных систем дробного порядка с управлением// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 182. — С. 101–118.
7. Dutta B. K., Arora L. K. On the existence and uniqueness of solutions of a class of initial value problems of fractional order// Math. Sci. — 2013. — 7. — 17.

8. *Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Z.* Hilfer—Prabhakar derivatives and some applications// Appl. Math. Comput. — 2014. — 242. — P. 576–589.
9. *Grinko A. P.* Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives// Integral Trans. Spec. Funct. — 2018. — 29, № 6. — P. 489–504.
10. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
11. *Rao A., Garg M., Kalla S. L.* Caputo-type fractional derivative of a hypergeometric integral operator// Kuwait J. Sci. Eng. — 2010. — 37, № 1A. — P. 15–29.

Постнов Сергей Сергеевич

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

E-mail: postnov.sergey@inbox.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 125–132
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-125-132

УДК 514.76

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ $lcAC_S$ -СТРУКТУР

© 2022 г. А. Р. РУСТАНОВ, С. В. ХАРИТОНОВА

Аннотация. Работа посвящена изучению почти эрмитовых структур, индуцируемых на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения локально конформно почти косимплектического многообразия.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, интегральное многообразие, фундаментальное распределение, косимплектическое многообразие.

INTEGRABILITY OF $lcAC_S$ -STRUCTURES

© 2022 A. R. RUSTANOV, S. V. KHARITONOVA

ABSTRACT. In this paper, we study almost Hermitian structures induced on maximal integral manifolds of the first fundamental distribution of a locally conformally almost cosymplectic manifold.

Keywords and phrases: almost Hermitian structure, integral manifold, fundamental distribution, cosymplectic manifold.

AMS Subject Classification: 53B35

Между контактной и эрмитовой геометрией существует тесная связь. Ряд работ посвящен изучению почти контактных структур, индуцируемых на ориентируемых гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. В данной работе мы изучаем почти эрмитовы структуры, индуцируемые на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения локально конформно почти косимплектического многообразия.

Одним из наиболее интересных тензоров почти контактных метрических многообразий, с геометрической точки зрения, является тензор Нейенхайса структурного эндоморфизма. Как известно, обращение в нуль тензора Нейенхайса структурного эндоморфизма почти контактной метрической структуры равносильно интегрируемости структуры. С тензором Нейенхайса естественным образом связаны еще четыре тензора. В данной работе мы также исследуем обращение этих тензоров в нуль, а именно, каким образом обращение в нуль каждого из этих тензоров влияет на почти эрмитову структуру, индуцируемую на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения локально конформно почти косимплектического многообразия.

Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = 2n + 1$; $\mathcal{X}(M)$ — $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на многообразии M ; \otimes — тензорное произведение, \wedge — внешнее умножение, d — оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т. п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . В данной работе будем полагать, что индексы i, j, k, \dots принимают значения от 0 до $2n$, а индексы a, b, c, \dots — значения от 1 до n , и будем считать, что $\hat{a} = a + n$, $\hat{\hat{a}} = a$, $\hat{0} = 0$.

Определение 1 (см. [4, 8]). Почти контактной метрической структурой (*AC*-структурой) на нечетномерном ориентируемом многообразии M называется четверка (η, ξ, Φ, g) тензорных полей на этом многообразии, где η — дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры, ξ — векторное поле, называемое характеристическим, Φ — эндоморфизм модуля $\mathcal{X}(M)$, называемый структурным эндоморфизмом, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова структура на M . При этом

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi; \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle &= \langle X, Y \rangle - \eta(x)\eta(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется, *почти контактным метрическим многообразием* (*AC*-многообразием).

Задание почти контактной метрической структуры на многообразии внутренним образом порождает присоединенную G -структуру, totальное пространство расслоения которой состоит из, так называемых, A -реперов. Матрицы компонент тензоров Φ и g в A -репере имеют вид соответственно

$$(\Phi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где I_n — единичная матрица порядка n . Структурной группой такой G -структуры является группа $1 \times U(n)$ (см. [2–4]).

В модуле $\mathcal{X}(M)$ гладких векторных полей *AC*-структурь (η, ξ, Φ, g) многообразия M^{2n+1} внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $m = \eta \otimes \xi$ и $l = \text{id} - m = -\Phi^2$ на подмодули M и L соответственно (см. [2–4]). Таким образом, $\mathcal{X}(M) = L \oplus M$, где $L = \text{Im}(\Phi) = \ker \eta$ — так называемое первое фундаментальное распределение, $M = \text{Im } m = \ker(\Phi) = L(\xi)$ — второе фундаментальное распределение (линейная оболочка структурного вектора). Распределения M и L инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны.

Определение 2 (см. [2, 3]). Почти эрмитовой структурой на четномерном многообразии N называется пара $\{J, g\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на многообразии. При этом $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(N)$.

Поскольку $(\Phi|_L)^2 = -\text{id}$, $\langle \Phi|_L X, \Phi|_L Y \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in L$, то пара $\{\Phi|_L, g_L\}$ задает почти эрмитову структуру на L . Первая группа структурных уравнений соответствующего почти эрмитова многообразия имеет вид

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c, \end{aligned} \quad (2)$$

где ω^i , θ_j^i — компоненты форм смещения и римановой связности ∇ соответственно (см. [3, 4]).

Определение 3 (см. [10]). Конформным преобразованием *AC*-структурь $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ на многообразии M называется переход от S к *AC*-структуре $\tilde{S} = (\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$, при этом

$$\tilde{\eta} = e^{-\sigma} \eta, \quad \tilde{\xi} = e^{\sigma} \xi, \quad \tilde{\Phi} = \Phi, \quad \tilde{g} = e^{-2\sigma} g,$$

где σ — определяющая функция соответствующего конформного преобразования.

Определение 4 (см. [7]). Почти контактная метрическая структура (ξ, η, Φ, g) на многообразии M называется локально конформно почти косимплектической структурой (*lcAC* _{S -структурой), если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p \in M$ допускает конформное преобразование в почти косимплектическую структуру.}

Многообразие, снабженное локально конформно почти косимплектической структурой, называется *локально конформно почти косимплектическим многообразием* (*lcAC* _{S -многообразием).}

Первая группа структурных уравнений $lcAC_S$ -многообразий на пространстве присоединенной G -структуре имеет вид

$$\begin{aligned} d\omega &= C_b \omega \wedge \omega^b + C^b \omega \wedge \omega_b; \\ d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B_b^a \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_a^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b \end{aligned} \quad (3)$$

(см. [7]), где

$$\begin{aligned} B^{[abc]} &= B_{[abc]} = 0; \quad B^{[ab]} = B_{[ab]} = 0; \\ B_a^b &= B^b_a = \sigma_0 \delta_a^b; \quad B^{ab}_c = 2\sigma^{[a} \delta_c^{b]}; \quad B_{ab}^c = 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c; \\ C^{ab} &= C_{ab} = 0; \quad C^b = -\sigma^b; \quad C_b = -\sigma_b; \\ d\sigma &= \sigma_0 \omega + \sigma_a \omega^a + \sigma^a \omega_a. \end{aligned} \quad (4)$$

Определение 5 (см. [3]). Распределение D многообразия M называется инволютивным, если оно является подалгеброй Ли алгебры Ли $\mathcal{X}(M)$, рассматриваемой как (бесконечномерное) R -линейное пространство, т.е. $\forall X, Y \in D \Rightarrow [X, Y] \in D$.

Распределение инволютивно тогда и только тогда, когда существует такая 1-форма ω , что $d\omega \wedge \omega = 0$ (см. [3]).

Определение 6 (см. [3]). Распределение на M называется вполне интегрируемым, если через каждую точку многообразия M проходит интегральное многообразие максимальной размерности.

Предложение 1. Первое фундаментальное распределение $lcAC_S$ -многообразия является вполне интегрируемым.

Доказательство. Из (3) следует, что первое фундаментальное распределение L $lcAC_S$ -многообразия инволютивно, а значит, в силу теоремы Фробениуса (см. [3]) вполне интегрируемо. \square

Напомним, что компоненты ковариантного дифференциала структурного оператора Φ в римановой связности ∇ для $lcAC_S$ -многообразий на пространстве присоединенной G -структуре имеют следующий вид (см. [7]):

$$\begin{aligned} \Phi_{0,b}^a &= -\Phi_{\hat{a},b}^0 = -\sqrt{-1} \delta_b^a \sigma_0; \quad \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} = -\Phi_{a,\hat{b}}^0 = \sqrt{-1} \delta_a^b \sigma_0; \\ \Phi_{0,0}^a &= -\Phi_{\hat{a},0}^0 = \sqrt{-1} \sigma^a; \quad \Phi_{0,0}^{\hat{a}} = -\Phi_{a,0}^0 = -\sqrt{-1} \sigma_a; \\ \Phi_{\hat{b},c}^a &= 4\sqrt{-1} \sigma^{[a} \delta_c^{b]}; \quad \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}} = -4\sqrt{-1} \sigma_{[a} \delta_{b]}^c; \\ \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^a &= 4\sqrt{-1} B^{cab} \quad \Phi_{\hat{b},c}^{\hat{a}} = -4\sqrt{-1} B_{cab}; \\ \Phi_{a,b}^0 &= -\Phi_{0,b}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1} B_{ab}; \quad \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0 = -\Phi_{0,\hat{b}}^a = \sqrt{-1} B^{ab}; \\ \Phi_{\hat{b},0}^a &= \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тензором Нейенхайса (см. [5]) эндоморфизма Φ называется тензор N типа $(2, 1)$, для $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ определяемый формулой

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4} \left([\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2 [X, Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] \right).$$

В терминах ковариантного дифференцирования тензор Нейенхайса AC -структуры можно определить формулой

$$N(X, Y) = \frac{1}{4} \left\{ \nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \Phi \nabla_X(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X + \Phi \nabla_Y(\Phi)X \right\}.$$

На пространстве присоединенной G -структурой компоненты тензора N определяются тождествами

$$\begin{aligned} N_{ab}^0 &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{[a,b]}^0; \quad N_{\hat{a}\hat{b}}^0 = -N_{\hat{b}\hat{a}}^0 = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{(\hat{a},\hat{b})}^0; \\ N_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0; \quad N_{\hat{b}0}^a = -N_{0\hat{b}}^a = \frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi_{\hat{b},0}^a - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{0,\hat{b}}^a; \\ N_{\hat{b}\hat{c}}^a &= \sqrt{-1}\Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^a; \quad N_{bc}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}\Phi_{[b,c]}^{\hat{a}}; \\ N_{b0}^{\hat{a}} &= -N_{0b}^{\hat{a}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi_{b,0}^{\hat{a}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю (см. [3, 4]). Тогда согласно (4) и (5) ненулевые компоненты тензора Нейенхайса структурного эндоморфизма $lcAC_S$ -структуры задаются равенствами

$$N_{\hat{b}0}^a = -N_{0\hat{b}}^a = -\frac{1}{2}B^{ab}; \quad N_{b0}^{\hat{a}} = -N_{0b}^{\hat{a}} = -\frac{1}{2}B_{ab}; \quad N_{\hat{b}\hat{c}}^a = 2B^{abc}; \quad N_{bc}^{\hat{a}} = 2B_{abc}. \quad (7)$$

Определение 7 (см. [3, 5]). AC -Структура на многообразии называется интегрируемой, если AC -многообразие локально эквивалентно произведению комплексного многообразия на гладкое многообразие без дополнительной структуры.

Обращение тензора Нейенхайса в нуль равносильно интегрируемости AC -структуры (см. [3, 5]).

Пусть $lcAC_S$ -структура интегрируема; тогда из (7) следует, что $B^{abc} = B_{abc} = 0$, $B_{ab} = B^{ab} = 0$. Первая группа структурных уравнений (3) запишется в виде

$$\begin{aligned} d\omega &= C_b\omega \wedge \omega^b + C^b\omega \wedge \omega_b; \\ d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}_c\omega^c \wedge \omega_b + B_b^a\omega \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_a^b\omega \wedge \omega_b, \end{aligned}$$

а первая группа структурных уравнений (2) почти эрмитовой структуры интегральных многообразий распределения L интегрируемой $lcAC_S$ -структуры — в виде

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}_c\omega^c \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c\omega_c \wedge \omega^b. \end{aligned}$$

где $B^{ab}_c = 2\sigma^{[a}\delta_c^{b]}$, $B_{ab}^c = 2\sigma_{[a}^c\delta_{b]}$. Т. е. в классификации Грея—Хервеллы (см. [3]) эта структура является структурой класса W_4 .

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения интегрируемого $lcAC_S$ -многообразия является структурой класса W_4 в классификации Грея—Хервеллы почти эрмитовых структур.*

Известно (см. [9]), что задание тензора Нейенхайса равносильно заданию четырех тензоров $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}$, а именно,

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= N(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi; \\ N^{(2)}(X, Y) &= (\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) - (\mathcal{L}_{\Phi Y}\eta)(X); \\ N^{(3)}(X) &= (\mathcal{L}_{\xi}\Phi)(X); \\ N^{(4)}(X) &= (\mathcal{L}_{\xi}\eta)(X); \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \end{aligned}$$

где \mathcal{L}_X — производная Ли в направлении векторного поля X .

В [1, 6] приведено аналитическое выражение тензоров $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$:

$$\begin{aligned} N^{(2)}(X, Y) &= \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} - \nabla_{\Phi Y}(\eta)(X) - \eta\{\nabla_X(\Phi)Y\}; \\ N^{(3)}(X) &= \nabla_{\xi}(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi(\nabla_X\xi); \\ N^{(4)}(X) &= \nabla_{\xi}(\eta)(X); \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned} \quad (8)$$

Для получения компонент этих тензоров на пространстве присоединенной G -структуре $lcAC_S$ -многообразия, проведем предварительные вычисления. Пусть M — $lcAC_S$ -многообразие тензорные компоненты формы римановой связности имеют следующий вид (см. [7]):

$$\begin{aligned} \theta_{\hat{b}}^a &= -2\sigma^{[a}\delta_c^{b]}\omega^c - 2B^{cab}\omega_c; \quad \theta_b^{\hat{a}} = -2\sigma_{[a}\delta_{b]}^c\omega_c - 2B_{cab}\omega^c; \\ \theta_0^a &= \sigma_0\omega^a + B^{ab}\omega_b - \sigma^a\omega; \quad \theta_0^{\hat{a}} = \sigma_0\omega_a + B_{ab}\omega^b - \sigma_a\omega; \\ \theta_a^0 &= -\sigma_0\omega_a - B_{ab}\omega^b + \sigma_a\omega; \\ \theta_{\hat{a}}^0 &= -\sigma_0\omega^a - B^{ab}\omega_b + \sigma^a\omega \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим характеристический вектор $lcAC_S$ -многообразия. Поскольку ξ — тензор типа $(0, 1)$, его компоненты на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M удовлетворяют уравнениям

$$d\xi^i + \xi^j\theta_j^i = \xi^i,_j\omega^j,$$

где $\xi^i,_j$ — компоненты тензора $\nabla\xi$. Расписывая эти соотношения на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (9) и того обстоятельства, что на этом пространстве $\xi^a = 0$, $\xi^{\hat{a}} = 0$, $\xi^0 = 1$, получаем для $lcAC_S$ -многообразий следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \xi^0,_j &= 0; \quad \xi^a,_0 = \sqrt{-1}\Phi_{0,0}^a = C^a = -\sigma^a; \\ \xi^a,_b &= \sqrt{-1}\Phi_{0,b}^a = B^a_b = \sigma_0\delta_b^a; \quad \xi^a,_b = \sqrt{-1}\Phi_{0,\hat{b}}^a = B^{ab}; \\ \xi^{\hat{a}},_0 &= -\sqrt{-1}\Phi_{0,0}^{\hat{a}} = C_a = -\sigma_a; \quad \xi^{\hat{a}},_b = -\sqrt{-1}\Phi_{0,b}^{\hat{a}} = B_{ab}; \\ \xi^{\hat{a}},_{\hat{b}} &= -\sqrt{-1}\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} = B_a^b = \sigma_0\delta_a^b. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично для контактной формы η $lcAC_S$ -многообразия получим компоненты ковариантной производной:

$$\begin{aligned} \eta_{0,i} &= 0; \quad \eta_{\hat{a},0} = \sqrt{-1}\Phi_{0,0}^{\hat{a}} = C^a = -\sigma^a; \\ \eta_{\hat{a},b} &= \sqrt{-1}\Phi_{0,b}^{\hat{a}} = B^a_b = \sigma_0\delta_b^a; \quad \eta_{\hat{a},\hat{b}} = \sqrt{-1}\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} = B^{ab}; \\ \eta_{a,0} &= -\sqrt{-1}\Phi_{0,0}^a = C_a = -\sigma_a; \quad \eta_{a,b} = -\sqrt{-1}\Phi_{0,b}^a = B_{ab}; \\ \eta_{a,\hat{b}} &= -\sqrt{-1}\Phi_{0,\hat{b}}^a = B_a^b = \sigma_0\delta_a^b. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая, что $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, где π — естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на $lcAC_S$ -многообразие M , находим, что на этом пространстве тензор $N^{(1)}$ имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} (N^{(1)})_{a0}^0 &= -(N^{(1)})_{0a}^0 = -C_a = \sigma_a; \\ (N^{(1)})_{\hat{a}0}^0 &= -(N^{(1)})_{0\hat{a}}^0 = -C^a = \sigma^a; \\ (N^{(1)})_{\hat{b}0}^a &= -(N^{(1)})_{0\hat{b}}^a = -\frac{1}{2}B^{ab}; \quad (N^{(1)})_{\hat{b}\hat{c}}^a = 2B^{abc}; \\ (N^{(1)})_{bc}^{\hat{a}} &= 2B_{abc}, \quad (N^{(1)})_{b0}^{\hat{a}} = -(N^{(1)})_{0b}^{\hat{a}} = -\frac{1}{2}B_{ab}; \end{aligned} \quad (12)$$

остальные компоненты нулевые.

Определение 8 (см. [8, 9]). Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если

$$N(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0.$$

Понятие нормальности было введено С. Сасаки и Дж. Хатакеямой (см. [9]) и является одним из фундаментальных понятий контактной геометрии, тесно связанных с понятием интегрируемости структуры.

Пусть M — нормальное $lcAC_S$ -многообразие. Тогда из (12), (4) и определения 8 следует, что

$$C_a = C^a = 0, \quad B^{ab} = B_{ab} = 0, \quad B^{abc} = B_{abc} = 0, \quad B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0.$$

Первая группа структурных уравнений нормального $lcAC_S$ -многообразия запишется в виде

$$\begin{aligned} d\omega &= 0; \\ d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^a{}_b \omega \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_a{}^b \omega \wedge \omega_b, \end{aligned}$$

а первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры, индуцированной на первом фундаментальном распределении, — запишется в виде

$$d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b; \quad d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b.$$

Таким образом, в классификации Грея—Хервеллы (см. [3]) эта структура является келеровой структурой.

Теорема 2. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения нормального $lcAC_S$ -многообразия является келеровой структурой.*

На пространстве присоединенной G -структуре тождество (8) примет вид

$$N_{ij}^{(2)} = \eta_{j,k} \Phi_i^k - \eta_{i,k} \Phi_j^k + \eta_k \Phi_{i,j}^k - \eta_k \Phi_{j,i}^k. \quad (13)$$

С учетом соотношений $\eta_{\hat{a}} = \eta_a = 0$, $\eta_0 = 1$, (1) и (11), из (13) имеем

$$\begin{aligned} N_{0a}^{(2)} &= -N_{a0}^{(2)} = -\eta_0 \Phi_{a,0}^0 = \sqrt{-1} C_a = -\sqrt{-1} \sigma_a; \\ N_{0\hat{a}}^{(2)} &= -N_{\hat{a}0}^{(2)} = -\eta_0 \Phi_{\hat{a},0}^0 = -\sqrt{-1} C^a = \sqrt{-1} \sigma^a, \end{aligned} \quad (14)$$

остальные компоненты нулевые.

Пусть на $lcAC_S$ -многообразии $N^{(2)}(X, Y) = 0$; тогда из (14), с учетом (4) следует, что

$$C_a = C^a = 0, \quad B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0.$$

Первая группа структурных уравнений такого $lcAC_S$ -многообразия примет вид

$$\begin{aligned} d\omega &= 0; \\ d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B^a{}_b \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_a{}^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b. \end{aligned}$$

Первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры, индуцированной на первом фундаментальном распределении данного $lcAC_S$ -многообразия, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned}$$

В классификации Грея—Хервеллы (см. [3]) эта структура является почти келеровой структурой. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении $lcAC_S$ -многообразия, для которого $N^{(2)}(X, Y) = 0$, является почти келеровой структурой в классификации Грея—Хервеллы почти эрмитовых структур.*

На пространстве присоединенной G -структуре тождество (8) равносильно соотношениям

$$(N^{(3)})_k^i = \Phi_{k,j}^i \xi^j - \xi_{,j}^i \Phi_k^j + \Phi_j^i \xi_{,k}^j.$$

С учетом (5) и (10) ненулевые компоненты $N^{(3)}$ для $lcAC_S$ -многообразия на пространстве присоединенной G -структуре имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (N^{(3)})_a^0 &= \Phi_{a,0}^0 = -\sqrt{-1}C_a = \sqrt{-1}\sigma_a; \\ (N^{(3)})_{\hat{a}}^0 &= \Phi_{\hat{a},0}^0 = \sqrt{-1}C^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}\sigma^{\hat{a}}; \\ (N^{(3)})_{\hat{b}}^a &= 2\sqrt{-1}\xi^a_{,\hat{b}} = -2\Phi_{0,\hat{b}}^a = 2\sqrt{-1}B^{ab}; \\ (N^{(3)})_b^{\hat{a}} &= -2\sqrt{-1}\xi^{\hat{a}}_{,b} = -2\Phi_{0,b}^{\hat{a}} = -2\sqrt{-1}B_{ab}. \end{aligned} \quad (15)$$

Обращение в нуль тензора $N^{(3)}(X)$ на $lcAC_S$ -многообразии влечет, согласно (15) с учетом (4), выполнение равенств

$$C_a = C^a = 0, \quad B^{ab}_c = B_{ab}^c = 0, \quad B^{ab} = B_{ab} = 0.$$

Первая группа структурных уравнений $lcAC_S$ -многообразия на пространстве присоединенной G -структуре примет следующий вид:

$$\begin{aligned} d\omega &= 0; \\ d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B^a{}_b \omega \wedge \omega^b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_a{}^b \omega \wedge \omega_b. \end{aligned}$$

Следовательно, почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении $lcAC_S$ -многообразия, для которого $N^{(3)}(X) = 0$ является почти келеровой структурой в классификации Грея—Хервельлы почти эрмитовых структур.

Наконец, рассмотрим тензор $N^{(4)}(X) = \nabla_\xi(\eta)(X); \forall X \in \mathcal{X}(M)$. На пространстве присоединенной G -структуре это равенство запишется в виде $(N^{(4)})_i = \eta_{i,0}$; последнее равносильно соотношениям

$$\begin{aligned} (N^{(4)})_0 &= \eta_{0,0} = 0; \\ (N^{(4)})_a &= \eta_{a,0} = -\sqrt{-1}\Phi_{0,0}^{\hat{a}} = C_a = -\sigma_a; \\ (N^{(4)})_{\hat{a}} &= \eta_{\hat{a},0} = \sqrt{-1}\Phi_{0,0}^{\hat{a}} = C^{\hat{a}} = -\sigma^{\hat{a}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Равенство нулю тензора $N^{(4)}(X)$, согласно (16) с учетом (4), равносильно соотношениям

$$C_a = C^a = 0, \quad B^{ab}_c = B_{ab}^c = 0.$$

В этом случае первая группа структурных уравнений $lcAC_S$ -многообразия на пространстве присоединенной G -структуре примет следующий вид:

$$\begin{aligned} d\omega &= 0; \\ d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B^a{}_b \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_a{}^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b. \end{aligned}$$

Поэтому почти эрмитова структура, индуцируемая на первом фундаментальном распределении $lcAC_S$ -многообразия, для которой $N^{(4)}(X) = 0$, является почти келеровой структурой в классификации Грея—Хервельлы почти эрмитовых структур.

Как промежуточный факт можно отметить следующее утверждение.

Предложение 2. Для $lcAC_S$ -многообразия обращение тензора $N^{(2)}$ в нуль равносильно обращению в нуль тензора $N^{(4)}$.

Доказательство. Сравнивая полученные для $lcAC_S$ -многообразия компоненты тензора $N^{(2)}$ и тензора $N^{(4)}$ на пространстве присоединенной G -структуре, а именно соотношения (14) и (16), получим требуемое утверждение. \square

Обобщая вышеизложенное, сформулируем следующий результат.

Теорема 4.

1. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения интегрируемого $lcAC_S$ -многообразия, является структурой класса W_4 .*
2. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения нормального $lcAC_S$ -многообразия, является келеровой структурой.*
3. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях первого фундаментального распределения $lcAC_S$ -многообразия, для которого $N^{(2)}(X, Y) = 0$, или $N^{(3)}(X) = 0$, или $N^{(4)}(X) = 0$, является почти келеровой структурой в классификации Грея—Хервельлы почти эрмитовых структур.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абу-Салеем А., Рустанов А. Р., Харитонова С. В. Свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу // Владикавказ. мат. ж. — 2018. — 20, № 3. — С. 4–20.
2. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 1986. — 18. — С. 25–71.
3. Кириченко В. Ф. Дифференциальноп-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: Печатный дом, 2013.
4. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Мат. сб. — 2002. — 193, № 8. — С. 71–100.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1981.
6. Рустанов А. Р. Свойства интегрируемости NC_1 0-многообразий // Мат. физ. комп. модел. — 2017. — 20, № 5. — С. 32–38.
7. Харитонова С. В. О геометрии локально конформно почти косимплектических многообразий // Мат. заметки. — 2009. — 86, № 1. — С. 126–138.
8. Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry // Lect. Notes Math. — 1976. — 509. — P. 1–146.
9. Sasaki S., Hatakeyama J. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure // Tôhoku Math. J. — 1961. — 13, № 2. — P. 281–294.
10. Vaisman I. Conformal changes of almost contact metric manifolds // Lect. Notes Math. — 1980. — 792. — P. 435–443.

Рустанов Алигаджи Рабаданович

Московский государственный строительный университет

E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Харитонова Светлана Владимировна

Оренбургский государственный университет

E-mail: hcb@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 133–137
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-133-137

УДК 517.927.21, 517.911.5, 51-73

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ОДНОРОДНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МИШЕНЯХ

© 2022 г. Д. В. ТУРТИН, В. В. КАЛМАНОВИЧ, М. А. СТЕПОВИЧ

Аннотация. На основе методов качественной теории дифференциальных уравнений проведено исследование корректности математической модели одномерной диффузии неравновесных носителей заряда, генерированных электронным пучком, доказана непрерывная зависимость решения от входных данных, получены оценки влияния погрешностей исходных данных на распределение диффундирующей примеси. Полученные результаты могут быть использованы при планировании эксперимента в электроннозондовых технологиях.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальное уравнение диффузии, задача Коши, полупроводник, корректность.

ON THE WELL-POSEDNESS OF A MODEL PROBLEM OF HEAT AND MASS TRANSFER IN HOMOGENEOUS SEMICONDUCTOR TARGETS

© 2022 D. V. TURTIN, V. V. KALMANOVICH, M. A. STEPOVICH

ABSTRACT. Based on the methods of the qualitative theory of differential equations, we examine the well-posedness of the mathematical model of one-dimensional diffusion of nonequilibrium charge carriers generated by an electron beam. We prove the continuous dependence of solutions on input data and obtain estimates of the influence of errors in the initial data on the distribution of the diffusing impurity. The results obtained can be used in electron probe technologies.

Keywords and phrases: mathematical model, diffusion equation, Cauchy problem, semiconductor, well-posedness.

AMS Subject Classification: 34B05, 34C60, 80A19

1. Введение. При математическом описании любых явлений и процессов необходимо решить ряд математических задач, наиболее важными из которых являются следующие: установление существования решения, доказательство единственности решения, обоснование непрерывной зависимости решения от данных задачи (начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов операторного уравнения (см. [2]). Задачи, удовлетворяющие этим требованиям, называются корректно поставленными. В настоящей работе на примере диффузии носителей заряда, генерированных в однородном полупроводнике широким электронным пучком, рассмотрен вопрос о корректности одной модельной задачи тепломассопереноса. Эта математическая задача представляет интерес как с точки зрения изучения рассматриваемого класса дифференциальных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области (проекты № 19-03-00271, № 18-41-400001).

уравнений, так и как задача, интересная для практического приложения в физическом материаловедении.

Выбор объекта исследования обусловлен следующим. Одними из немногих методов, позволяющими реализовать бесконтактную неразрушающую диагностику твёрдых тел, являются электроннозондовые методы, основанные на использовании остро сфокусированных пучков киловольтных электронов низких (примерно до 8–10 кэВ) и средних (от 8–10 до 50 кэВ) энергий (см. [8]). В полупроводниковом материаловедении при проведении локальных исследований материалов с использованием сфокусированных пучков электронов наиболее часто в качестве информативного регистрируется сигнал, связанный с генерацией и диффузией в полупроводниковой мишени неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) и/или регистрируются сигналы, характеристики которых существенно зависят от распределения ННЗ.

Регистрация информативных сигналов, возбуждаемых в полупроводниковой мишени и сравнение экспериментальных данных с математической моделью этого явления позволяют идентифицировать параметры полупроводника, которые весьма сложно или даже невозможно определить другими методами (см. [5, 6, 9]).

Однако математически корректное исследование математических моделей физических явлений, возникающих при взаимодействии электронных пучков с полупроводниковыми объектами и описываемых дифференциальными уравнениями тепломассопереноса, ранее практически не проводилось (см. [10–14]). Необходимость подобных математических исследований обусловлена также недостаточной изученностью физических явлений математическими методами: имеются лишь единичные публикации, посвящённые изучению корректности математических моделей, используемых в электроннозондовых технологиях. В частности, можно сказать, что ранее такая задача моделирования диффузии для рассматриваемого процесса в определённой степени носила полукачественный характер. Она решалась только при использовании модели потерь энергии первичными низкоэнергетическими электронами в мишени в виде нормального распределения Гаусса (см. [?, 5, 7, 11]), что для широкого диапазона материалов и энергий электронов зонда (до 50 кэВ) является довольно грубым приближением, описывающим имеющиеся экспериментальные данные потерь энергии в конденсированном веществе во многом лишь качественно (см., например, [3, 4]). В настоящей работе использована математическая модель, наиболее полно описывающая потери энергии электронами пучка в конденсированном веществе и количественное рассмотрение проведено на основе этой модели, чего ранее не делалось.

2. Постановка задачи. Для количественного описания задачи тепломассопереноса необходимо построить математическую модель рассматриваемого явления. Для этого требуется описать процесс потерь энергии электронами пучка в твердом теле и, как следствие этого, генерацию электронно-дырочных пар в полупроводнике, а также процесс диффузии генерированных электронным пучком ННЗ. Анализ характерных времён вышеуказанных процессов показывает, что эти процессы можно описывать последовательно, а значит, моделировать каждый из них отдельно (см., например, [3, 9]).

Диффузию ННЗ, генерированных в полупроводниковой мишени электронным пучком, будем описывать с использованием модели независимых источников, согласно которой на диффузию генерированных электронным пучком неравновесных ННЗ из любого микрообъема полупроводника не оказывают влияния другие электроны или дырки из других микрообластей материала (см. [1]). В этом случае для одномерной диффузии в полубесконечном полупроводнике распределение избыточных ННЗ по глубине $\Delta p(z)$ дается выражением

$$\Delta p(z) = \int_0^{\infty} \Delta p(z, z_0) dz_0.$$

Здесь функция $\Delta p(z, z_0)$ описывает распределение по глубине ННЗ, генерированных плоским бесконечно тонким источником, находящимся на глубине z_0 , $z_0 \in [0, \infty)$; z — координата, отсчитываемая от плоской поверхности в глубь полупроводника. Распределение $\Delta p(z, z_0)$ является

решением дифференциального уравнения

$$D \frac{d^2 \Delta p(z, z_0)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z, z_0)}{\tau} = -\rho(z) \delta(z - z_0) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$D \frac{d \Delta p(z, z_0)}{dz} \Big|_{z=0} = v_s \Delta p(0, z_0), \quad \Delta p(\infty, z_0) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\rho(z)$ — концентрация ННЗ, пропорциональная плотности энергии первичного электронного пучка, рассеянной в тонком слое мишени на глубине z , а постоянные D , τ и v_s — коэффициент диффузии, время жизни и скорость поверхностной рекомбинации ННЗ соответственно; $\delta(z - z_0)$ — дельта-функция.

3. О существовании и единственности решения рассматриваемой задачи. Следующая теорема посвящена установлению решения задачи (1)–(2) на луче $z \geq 0$.

Теорема 1. *Задача (1)–(2) на луче $z \geq 0$ имеет решение, которое определяется следующей формулой:*

$$\Delta p(z, z_0) = \begin{cases} \frac{\rho(z_0)\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \right] & \forall z \in [0, z_0], \\ \frac{\rho(z_0)\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \right] & \forall z \in [z_0, \infty). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $L = \sqrt{D\tau}$ — диффузационная длина ННЗ, а $S = v_s L/D$ — приведённая скорость поверхностной рекомбинации ННЗ.

Доказательство теоремы 1, т.е. решение задачи (1)–(2) в виде (3), приведено в [1, 9].

В следующей теореме устанавливается единственность решения задачи (1)–(2).

Теорема 2. *Решение задачи (1)–(2) единствено на луче $z \geq 0$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть n_1 и n_2 — два различных решения задачи (1)–(2) на луче $z \geq 0$. Рассмотрим функцию $u = n_2 - n_1$, которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$D \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{u}{\tau} = 0.$$

и стремится к 0 в бесконечности. Применив к полученной задаче формулу (3) с $\rho(z_0) = 0$, получим $u = 0$, откуда следует $n_2 = n_1$. Полученное противоречие и доказывает единственность решения задачи (1)–(2) на луче $z \geq 0$. Теорема 2 доказана. \square

4. Теоремы об оценках решения рассматриваемой задачи. Следующие теоремы устанавливают непрерывную зависимость решения задачи (1)–(2) от члена в правой части дифференциального уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть $\Delta p_1(z, z_0)$ — решение уравнения*

$$D \frac{d^2 \Delta p_1(z, z_0)}{dz^2} - \frac{\Delta p_1(z, z_0)}{\tau} = -\rho_1(z) \delta(z - z_0)$$

с граничными условиями (2), $\Delta p_2(z, z_0)$ — решение уравнения

$$D \frac{d^2 \Delta p_2(z, z_0)}{dz^2} - \frac{\Delta p_2(z, z_0)}{\tau} = -\rho_2(z) \delta(z - z_0)$$

с граничными условиями (2) и для всех $z \geq 0$

$$|\rho_2(z) - \rho_1(z)| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Тогда для всех $z \geq 0$ справедлива оценка

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{\varepsilon \tau}{L}.$$

Доказательство. На отрезке $z \in [0, z_0]$ решение задачи (1)–(2) определяется формулой (3). Тогда для функций $\Delta p_1(z, z_0)$ и $\Delta p_2(z, z_0)$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta p_1(z, z_0) &= \frac{\rho_1(z_0)\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \right], \\ \Delta p_2(z, z_0) &= \frac{\rho_2(z_0)\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \right],\end{aligned}$$

откуда

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{|\rho_2(z_0) - \rho_1(z_0)|\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \right].$$

Применив оценку (4) и учитывая условие $z \in [0, z_0]$, получим

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{\varepsilon\tau}{L} \exp\left(-\frac{z_0 - z}{L}\right). \quad (5)$$

На полуинтервале $z \in [z_0, \infty)$ решение задачи (1)–(2) также определяется формулой (3). Тогда для функций $\Delta p_1(z, z_0)$ и $\Delta p_2(z, z_0)$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta p_1(z, z_0) &= \frac{\rho_1(z_0)\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \right], \\ \Delta p_2(z, z_0) &= \frac{\rho_2(z_0)\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \right],\end{aligned}$$

откуда

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{|\rho_2(z_0) - \rho_1(z_0)|\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \right].$$

Применив оценку (4) и учитывая условие $z \in [z_0, \infty)$, получим

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{\varepsilon\tau}{L} \exp\left(-\frac{z - z_0}{L}\right). \quad (6)$$

Объединяя оценки (5) и (6), получим, что при всех $z \geq 0$

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{\varepsilon\tau}{L} \exp\left(-\frac{|z - z_0|}{L}\right),$$

откуда вытекает

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{\varepsilon\tau}{L}.$$

Теорема 3 доказана. \square

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда при всех $z \geq 0$ справедлива оценка

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \leq \varepsilon\tau.$$

Доказательство. Оценим выражение

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| = \int_0^\infty |\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| dz_0.$$

Применив оценку (5), получим

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \leq \frac{\varepsilon\tau}{L} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{|z - z_0|}{L}\right) dz_0. \quad (7)$$

Поскольку

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{|z - z_0|}{L}\right) dz_0 = \int_0^{z_0} \exp\left(\frac{z - z_0}{L}\right) dz_0 + \int_{z_0}^\infty \exp\left(\frac{z_0 - z}{L}\right) dz_0 = L \exp\left(-\frac{z}{L}\right),$$

из (7) получим

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \leq \varepsilon\tau.$$

Теорема 4 доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов А. А., Петров В. И., Степович М. А. Использование модели независимых источников для расчета распределения неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком// Изв. РАН. Сер. физ. — 2002. — 66, № 9. — С. 1317–1322.
2. Владимириов В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2004.
3. Михеев Н. Н., Петров В. И., Степович М. А. Количественный анализ материалов полупроводниковой оптоэлектроники методами растровой электронной микроскопии// Изв. РАН. Сер. физ. — 1991. — 55, № 8. — С. 1474–1482.
4. Михеев Н. Н., Степович М. А. Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом// Завод. лаб. Диагн. мат. — 1996. — 62, № 4. — С. 20–25.
5. Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А. Двумерная диффузия и катодолюминесценция экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования// Поверхность. Рентген. синхротр. нейтрон. исслед. — 2012. — № 11. — С. 35–40.
6. Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А. Катодолюминесцентные экспериментальные исследования транспорта экситонов в нитриде галлия// Изв. РАН. Сер. физ. — 2012. — 76, № 9. — С. 1082–1085.
7. Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А. Оценка значений электрофизических параметров полупроводниковых материалов по результатам измерений катодолюминесценции экситонов// Прикл. физ. — 2012. — № 6. — С. 41–46.
8. Растворная электронная микроскопия для нанотехнологий. Методы и применение. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.
9. Степович М. А. Количественная катодолюминесцентная микроскопия прямозонных материалов полупроводниковой оптоэлектроники/ Дисс. на соиск. уч. сте. д-ра физ.-мат. наук — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.
10. Туртин Д. В., Серегина Е. В., Степович М. А. Количественный анализ одного класса дифференциальных уравнений тепломассопереноса в конденсированном веществе// Пробл. мат. анал. — 2020. — № 104. — С. 149–156.
11. Polyakov A. N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material// Lobachevskii J. Math. — 2018. — 39, № 2. — P. 259–262.
12. Stepovich M. A., Turtin D. V., Seregina E. V., Polyakov A. N. On the qualitative characteristics of a two-dimensional mathematical model of diffusion of minority charge carriers generated by a low-energy electron beam in a homogeneous semiconductor material// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1203. — 012095.
13. Stepovich M. A., Turtin D. V., Seregina E. V., Kalmanovich V. V. On the correctness of mathematical models of time-of-flight cathodoluminescence of direct-gap semiconductors// ITM Web Conf. — 2019. — 30 estimates. — 07014.
14. Turtin D. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. Qualitative analysis of a class of differential equations of heat and mass transfer in a condensed material// J. Math. Sci. — 2020. — 250, № 1. — P. 166–174.

Туртин Дмитрий Витальевич

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Ивановский филиал
E-mail: turtin@mail.ru

Калманович Вероника Валерьевна

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского
E-mail: v572264@yandex.ru

Степович Михаил Адольфович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского
E-mail: m.stepovich@rambler.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 138–145
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-138-145

УДК 517.51

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДУБИНИНА ДЛЯ ВЕСОВОЙ ЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРА ХЕССЕ С A_1 -ВЕСОМ МАКЕНХАУПТА

© 2022 г. В. А. ШЛЫК

Аннотация. Для конденсатора Хессе в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, доказана эквивалентность его весовой емкости и его весового модуля с A_1 -весом Макенхаупта. Это дает решение одной задачи Дубинина об оценке емкости конденсатора с упомянутым весом.

Ключевые слова: емкость конденсатора, модуль семейства кривых, вес Макенхаупта.

ON ONE DUBININ PROBLEM FOR THE WEIGHT CAPACITANCE OF A HESSE CONDENSER WITH A_1 -MACKENHAUPT WEIGHT

© 2022 V. A. SHLYK

ABSTRACT. For the Hesse condenser in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, the equivalence of its weight capacitance and its weight modulus with A_1 -Muckenhoupt weight is proved. This gives a solution of the Dubinin problem on estimating the capacitance of a capacitor with the weight mentioned.

Keywords and phrases: capacitance, modulus of a family of curves, Muckenhoupt weight.

AMS Subject Classification: 46E35

1. Введение. Равенство p -емкости и p -модуля конденсатора с двумя пластинами для $p \in (1, +\infty)$ и его приложения достаточно полно изложены в литературе (см., например, [3, 5, 10]). Недавно В. Н. Дубинин в [6] поставил задачу о нахождении аналога упомянутого выше равенства в конформном случае, когда число пластин конечно и больше двух. В [1] дано решение этой задачи в более общей постановке для весовой емкости конденсатора с A_p -весом Макенхаупта (см. [9]), где $p \in (1, +\infty)$. Ниже мы распространяем этот результат на случай весовой емкости конденсатора Хессе (см. [8]) с A_1 -весом Макенхаупта.

2. Основные определения и обозначения. Обозначим через $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ одноточечную компактификацию евклидова пространства \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Все топологические рассмотрения проводятся ниже проводятся в метрическом пространстве $(\overline{\mathbb{R}^n}, h)$, где h — хордальная метрика, определяемая с помощью стереографической проекции.

Если $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, то \bar{F} , ∂F обозначают соответственно замыкание и границу множества F в топологии $\overline{\mathbb{R}^n}$. Норму точки (вектора) $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и скалярное произведение зададим формулами

$$|x| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}, \quad x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Если $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$, то $h(a, F)$ означает хордальное расстояние от a до $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$. Соответственно, если $a \in \mathbb{R}^n$, то $\text{dist}(a, F)$ будет означать евклидово расстояние от a до $F \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим множество

натуральных чисел через $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Для заданного $r > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}; \quad B(\infty, r) = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0, 1/r).$$

Множество

$$O(F, \varepsilon) = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$$

назовем ε -окрестностью множества $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$. Обозначим n -мерную меру Лебега через m_n и положим $m_n(F) = |F|$ для m_n -измеримого множества $F \subset \mathbb{R}^n$. Будем использовать аббревиатуру «п.в.» для словосочетаний «почти всюду» или «почти везде» по отношению к m_n -мере. Аналогично используем понятия «измеримая» и «локально интегрируемая» относительно меры m_n .

Пусть F — измеримое подмножество из \mathbb{R}^n и u — измеримая вещественноненеотрицательная функция на F . Для $1 \leq p < \infty$ положим

$$\|u\|_{L_p(F)} = \left(\int_F |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Ниже в тексте Ω — открытое множество в \mathbb{R}^n и пусть u — измеримая функция на Ω . Мы будем писать, что $u \in L_p(\Omega, loc)$, если $\|u\|_{L_p(F)} < \infty$ для каждого компактного множества $F \subset \Omega$. Класс всех функций u удовлетворяющих условию $\|u\|_{L_p(\Omega)} < \infty$, обозначим через $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Следуя Макенхаупту (см. [9]), функцию $w: \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$, где $w \in L_1(\mathbb{R}^n, loc)$, назовем A_1 -весом, если существует такая постоянная A , что для каждого шара $B = B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$

$$\left\{ \left(\frac{1}{|B|} \int_B w dx \right) \cdot \operatorname{ess\,sup}_B \frac{1}{w(x)} \right\} \leq A.$$

Обозначим через A_1 класс всех A_1 -весов. Далее в тексте w будет означать некоторый вес из A_1 .

Положим для $x \in \mathbb{R}^n$

$$M(w(x)) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} w(y) dy.$$

Кроме того, определим $L_{1,w}(\Omega)$ как множество всех измеримых функций u на Ω с

$$\|u\|_{L_{1,w}(\Omega)} = \int_{\Omega} |u| w dx < \infty$$

и обозначим через $L_{1,w}(\Omega, loc)$ множество всех измеримых функций u на Ω , удовлетворяющих условию $uw \in L_1(\Omega, loc)$.

Пусть $E_0, E_1, \dots, E_m \subset \overline{\Omega}$ — попарно непересекающиеся непустые компакты (в топологии $\overline{\mathbb{R}^n}$); $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_m$ — попарно различные вещественные числа, $m \geq 1$. Тогда тройку $\mathcal{K} = (\mathcal{E}, \Delta, \Omega)$, где $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i=0}^m$ и $\Delta = \{\delta_i\}_{i=0}^m$, назовем конденсатором на $\overline{\Omega}$. Множества E_i и $\Omega \setminus E$, где

$$E = \bigcup_{i=0}^m E_i,$$

назовем соответственно пластинами и полем конденсатора \mathcal{K} . Число δ_i назовем потенциалом пластины E_i , $i = 0, 1, \dots, m$.

Если $E \subset \Omega$, либо $E_0 = \partial\Omega$ и, следовательно, $E_1, \dots, E_m \subset \Omega$, то \mathcal{K} будем называть конденсатором Хессе (см. [8]) в \mathbb{R}^n .

Величину

$$\operatorname{Cap}_{1,w} \mathcal{K} = \inf_u \int_{\Omega} |\nabla u| w dx$$

назовем $(1, w)$ -емкостью конденсатора \mathcal{K} . Здесь инфимум берется по всем вещественноненеотрицательным функциям u , удовлетворяющим локально условию Липшица на Ω и равным δ_i в некоторой окрестности множества E_i , $i = 0, \dots, m$. Класс таких функций, допустимых для $\operatorname{Cap}_{1,w} \mathcal{K}$, обозначим

через $\text{Adm}_{1,w} \mathcal{K} = \text{Adm}(\mathcal{E}, \Delta, \Omega)$. Здесь отметим, что по теореме Радемахера (см. [4, Theorem 3.16]) любая функция $u \in \text{Adm} \mathcal{K}$ дифференцируема п.в. на Ω и в точках ее дифференцируемости на Ω мы имеем $|\nabla u| = L(x, u)$, где

$$L(x, u) = \limsup_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right|$$

является борелевской функцией на Ω (см. [11, Sec. 5]). Поэтому ниже мы будем считать, что $|\nabla u(x)| = L(x, u)$ в тех точках Ω , где u не дифференцируема. Данное требование не повлияет на величину

$$\int_{\Omega} |\nabla u| w dx$$

для $u \in \text{Adm}_{1,w} \mathcal{K}$.

Под кривой γ в \mathbb{R}^n будем понимать образ невырожденного числового интервала (a, b) или сегмента $[a, b]$ при его непрерывном отображении $x = x(t)$ в \mathbb{R}^n . В последующем мы полагаем, что отображение $x = x(t)$ не является постоянным на любом невырожденном отрезке из (a, b) и определяет параметризацию кривой γ . Мы будем говорить, что кривая γ соединяет множества $F, K \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, если ее параметризация $x = x(t)$, $a < t < b$, удовлетворяет условиям

$$\liminf_{t \rightarrow a} h(x(t), F) = \liminf_{t \rightarrow b} h(x(t), K) = 0. \quad (1)$$

Если условия (1) выполнены, то мы будем говорить, что кривая γ ориентирована в направлении от F к K .

По заданной борелевской функции $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ и локально спрямляемой кривой γ , используя ее натуральную параметризацию $x = x(s)$, $s \in S$ (подробнее см., например, [10, Sec. 2.1]), определим

$$\int_{\gamma} \rho ds$$

как интеграл Лебега

$$\int_S \rho(x(s)) ds.$$

С конденсатором $\mathcal{K} = (\mathcal{E}, \Delta, \Omega)$ мы ассоциируем конфигурацию

$$\alpha H = (\alpha_{01} H_{01}, \dots, \alpha_{m-1,m} H_{m-1,m}).$$

Здесь H_{ij} — семейство всех локально спрямляемых кривых γ в $\Omega \setminus E$, которые соединяют множества E_i и E_j , $\alpha_{ij} = |\delta_i - \delta_j|$, $0 \leq i < j \leq m$, $H = \{H_{01}, \dots, H_{m-1,m}\}$, $\alpha = \{\alpha_{01}, \dots, \alpha_{m-1,m}\}$. Кроме того, каждая кривая $\gamma \in H_{ij}$ ориентирована в направлении от E_i к E_j , если $\delta_i < \delta_j$, и в противоположном направлении, если $\delta_i > \delta_j$.

Определим $(1, w)$ -модуль конфигурации αH , или, иначе, $(1, w)$ -модуль конденсатора \mathcal{K} как величину

$$m_{1,w}(\alpha H) = \inf \int_{\Omega} \rho w dx.$$

Здесь инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho: \Omega \rightarrow [0; +\infty]$, удовлетворяющим условию

$$\int_{\gamma} \rho ds \geq \alpha_{ij}$$

для всех $\gamma \in H_{ij}$ с $0 \leq i < j \leq m$ и $H_{ij} \neq \emptyset$. Класс всех таких функций, называемых в дальнейшем допустимыми метриками для $m_{1,w}(\alpha H)$, будем обозначать через $\text{adm}_{1,w}(\alpha H) = \text{adm}_{1,w}(\mathcal{E}, \Delta, \Omega)$. По определению $m_{1,w}(\alpha H) = 0$, если $H_{ij} = \emptyset$ для всех $0 \leq i < j \leq m$. В этом случае $\text{adm}_{1,w}(\alpha H)$ представляет собой множество всех борелевских функций $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$.

Как следует из теоремы Витали–Каратеодори (см. [11, с. 57, Theorem 2.24]), для $\rho \in L_{1,w}(\mathbb{R}^n) \cap \text{adm}_{1,w}(\alpha H)$ существует полунепрерывная снизу на \mathbb{R}^n функция $g \geq \rho$ с нормой $\|g\|_{L_{1,w}(\mathbb{R}^n)}$, сколь угодно близкой к $\|\rho\|_{L_{1,w}(\mathbb{R}^n)}$. Отсюда нетрудно заметить, что

$$m_{1,w}(\alpha H) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \rho w dx : \rho \text{ полунепрерывна снизу на } \mathbb{R}^n \text{ и } \rho \in \text{adm}_{1,w}(\mathcal{K}) \right\}. \quad (2)$$

Пусть теперь \mathcal{K} — конденсатор Хессе. Для $\frac{1}{k}$ -окрестностей $O(E_i, 1/k)$ его пластин E_i , $0 \leq i \leq m$, $k \in \mathbb{N}$, выберем \tilde{k}_0 так, чтобы замыкания этих окрестностей попарно не пересекались при $k = \tilde{k}_0$. Пусть $O_i(k) \subset O(E_i, 1/k)$ — открытые множества с кусочно-гладкой границей и $E_i \subset \overline{O_i(k+1)} \subset O_i(k)$, $k \geq \tilde{k}_0$. Также обозначим

$$E(k) = \bigcup_{i=0}^m \overline{O_i(k)},$$

$$\Omega(k) = \Omega \setminus E(k).$$

Через $H_{ij}(k)$ обозначим семейство локально спрямляемых кривых в $\Omega(k)$, соединяющих $\overline{O_i(k)}$ и $\overline{O_j(k)}$, $0 \leq i < j \leq m$. Кривые из $H_{ij}(k)$ считаются ориентированными в направлении от $\overline{O_i(k)}$ до $\overline{O_j(k)}$ при $\delta_i < \delta_j$, и в противоположном направлении, если $\delta_i > \delta_j$. Кроме того, нетрудно заметить, что в случае $H_{ij} = \emptyset$ семейство $H_{ij}(k)$ также будет пустым при всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$.

3. Вспомогательные результаты. Ниже w — некоторый фиксированный A_1 -вес. Нам понадобятся следующие известные свойства A_1 -весов.

Предложение 1 (см. [12, Remark 1.2.4, Properties 7-8]). *Существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2 , что неравенства*

$$M(w(x)) \leq C_1 w(x), \quad w(x) \geq \frac{C_2}{(1 + |x|)^n} \quad (3)$$

выполняются п.в. на \mathbb{R}^n .

Предложение 2 (см. [12, Remark 1.2.4, Property 1]). *$L_{1,w}(\Omega) \subset L_1(\Omega, loc)$ и, если Ω — ограниченное открытое множество в \mathbb{R}^n , то $L_{1,w}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$.*

Как и в случае A_p -весов, $1 < p < \infty$, по стандартной схеме (см. [1, лемма 1]) доказывается следующее утверждение.

Лемма 1. *Для заданного конденсатора \mathcal{K} существует функция u_0 на $\overline{\mathbb{R}^n}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- (i) u_0 — бесконечно дифференцируемая функция в \mathbb{R}^n и $u_0 \in \text{Adm}_{1,w} \mathcal{K}$;
- (ii) u_0 равна постоянной C_0 в некоторой окрестности точки ∞ , где $C_0 = 0$, если $\infty \notin E$, и $C_0 = \delta_0$, если $\infty \in E_0$.

Из леммы 1 и свойства $|\nabla u| \in \text{adm}_{1,w} \alpha H$, где $u \in \text{Adm}_{1,w} \mathcal{K}$, получим еще одно утверждение.

Следствие 1. *Для конденсатора \mathcal{K} справедлива оценка*

$$m_{1,w}(\alpha H) \leq \text{Cap}_{1,w} \mathcal{K} < \infty. \quad (4)$$

Лемма 2. *По заданному $\beta > 0$ можно указать такую положительную непрерывную на \mathbb{R}^n функцию g , что*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g w dx < \beta.$$

Доказательство. Для $j = 1, 2, \dots$ пусть $A_j = B(0, j+1) \setminus \overline{B(0, j-1)}$. Пусть $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty - C^\infty$ -разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ пространства \mathbb{R}^n . По построению носитель $\text{supp } \psi_j w \subset A_j$. В силу $w \in L_{1,w}(\mathbb{R}^n, \text{loc})$ можно подобрать такое $\varepsilon_j \in (0, 1)$, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon_j w \psi_j dx < \frac{\beta}{2^j}.$$

Тогда можно взять

$$g = \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j \psi_j,$$

что завершает доказательство. \square

Лемма 3. *По данному $\varepsilon > 0$ можно указать метрику $\rho \in \text{adm}_{1,w}(\alpha H) \cap L_{1,w}(\mathbb{R}^n)$, для которой выполняются следующие условия:*

- (i) ρ полуценерывна снизу, положительна на \mathbb{R}^n и для любого ограниченного замкнутого множества $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\inf_K \rho > 0;$$

- (ii) ρ непрерывна на $\Omega \setminus E$;

- (iii) выполняются неравенства

$$m_{1,w}(\alpha H) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho w dx < C_1 m_{1,w}(\alpha H) + \varepsilon,$$

где постоянная C_1 введена в предложении 1 и $C_1 = 1$ в случае $w \equiv 1$.

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ в силу (2), (4) существует такая полуценерывная снизу на \mathbb{R}^n метрика $\rho_1 \in \text{adm}_{1,w}(\alpha H) \cap L_{1,w}(\mathbb{R}^n)$, что

$$m_{1,w}(\alpha H) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_1 w dx < m_{1,w}(\alpha H) + \frac{\varepsilon}{3C_1}.$$

Определим $d(x): \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ как $\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus (\Omega \setminus E))$. Известно (см. [4, Sec. 3.2.34]), что $d(x)$ удовлетворяет на \mathbb{R}^n условию Липшица с константой Липшица $Lip(d) \leq 1$ и $|\nabla d(x)| = 1$ в точках дифференцируемости $d(x)$ на $\Omega \setminus E$.

Положим для $x \in \mathbb{R}^n$

$$\rho_{2,k}(x) = T_k(\rho_1(x)) = \frac{1}{|B(0, 1)|} \int_{B(0, 1)} \rho_1 \left(x + \frac{d(x)}{2k} y \right) dy, \quad (5)$$

где $k \in \mathbb{N}$ и T_k — усредняющий оператор, изученный детально в [8, Lemma 4.3]. В частности, для всех $k \geq 1$ $\rho_{2,k}$ — функция, полуценерывная снизу на \mathbb{R}^n и непрерывная в $\Omega \setminus E$ в силу того, что $d(x) > 0$ на $\Omega \setminus E$. Отметим, что при фиксированном $y \in B(0, 1)$ отображение $\theta_{y,k}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданное по правилу

$$\theta_{y,k}(x) = x + \frac{d(x)}{2k} y,$$

удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\left(1 - \frac{1}{2k}\right) |x - x'| \leq |\theta_{y,k}(x) - \theta_{y,k}(x')| \leq \left(1 + \frac{1}{2k}\right) |x - x'| \quad (6)$$

для любых $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Другими словами, $\theta_{y,k}$ — квазизометрический гомеоморфизм области \mathbb{R}^n на $\theta_{y,k}(\mathbb{R}^n)$. По теореме Брауэра (см. [2]) $\theta_{y,k}(\mathbb{R}^n) = G$ — область в \mathbb{R}^n и поскольку $\theta_{y,k}(x) | < \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то G не имеет в \mathbb{R}^n конечных граничных точек. Действительно, пусть $z_0 \in \partial G$ и $|z_0| < \infty$. Тогда существует прямолинейный отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$, где $[a, b] \subset G$, $b \in \partial G$. В силу (6) $\theta_{y,k}^{-1}$ можно доопределить до непрерывной функции на $[a, b]$ так, что $\theta_{y,k}^{-1}(b) = x_0$ будет конечной точкой в \mathbb{R}^n . Это противоречит тому, что по теореме Брауэра $\theta_{y,k}(B(x_0, r_0))$ — область в G для

$r_0 > 0$ и, следовательно, $b \in G$. Отсюда заключаем, что $\theta_{y,k}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Ввиду того, что $d(x) = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus (\Omega \setminus E)$ также заключаем, что $\theta_{y,k}(\mathbb{R}^n \setminus (\Omega \setminus E)) = \mathbb{R}^n \setminus (\Omega \setminus E)$ и, значит,

$$\theta_{y,k}(\Omega \setminus E) = \Omega \setminus E. \quad (7)$$

Кроме того, якобиан $J(x, \theta_{y,k})$ отображения $\theta_{y,k}$ равен $1 + \frac{y \cdot \nabla d(x)}{2k}$ п.в. на \mathbb{R}^n и, следовательно, в силу (6)

$$1 - \frac{1}{2k} \leq J(x, \theta_{y,k}) \leq 1 + \frac{1}{2k} \quad (8)$$

п.в. на \mathbb{R}^n .

Из (5) интегрированием получим, что

$$\|\rho_{2,k}\|_{L_{1,w}(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} dy \int_{\mathbb{R}^n} \rho_1 \left(x + \frac{d(x)}{2k} y \right) w(x) dx.$$

Применив во внутреннем интеграле справа замену $z = x + \frac{d(x)}{2k} y$, из (8) и свойств $\theta_{y,k}$, меняя порядок интегрирования, придем к оценке

$$\|\rho_{2,k}\|_{L_{1,w}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(1 - \frac{1}{2k})} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} w(x(z)) dy \right) \rho_1(z) dz.$$

Ввиду предложения 2 и соотношения $x = z - \frac{d(x(z))}{2k} y$ заключим, что

$$\frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} w \left(z - \frac{1}{2k} d(x(z)) y \right) dy = \frac{1}{|B(z, \frac{d(x(z))}{2k})|} \int_{B(z, \frac{d(x(z))}{2k})} w(y) dy \leq M(w(z)) \leq C_1 w(z)$$

п.в. на \mathbb{R}^n . Отсюда

$$\|\rho_{2,k}\|_{L_{1,w}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_1}{1 - \frac{1}{2k}} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_1(z) w(z) dz. \quad (9)$$

Очевидно, что в случае $w \equiv 1$ выполняется равенство $M(w(x)) = 1$ на \mathbb{R}^n и в (3), (9) можно положить $C_1 = 1$.

Покажем теперь, что

$$\rho_{3,k} = \left(1 + \frac{1}{2k} \right) \rho_{2,k} \in \text{adm}_{1,w} \alpha H.$$

Рассмотрим кривую $\gamma \in H_{ij}$, $0 \leq i < j \leq m$. Поскольку согласно (7)

$$z = \theta_{y,k}(x) = x + \frac{d(x)}{2k} y$$

— квазизометрический гомеоморфизм множества $\Omega \setminus E$ на $\Omega \setminus E$ при каждом $y \in B(0,1)$, то по теореме Фубини (см. [4, теорема 2.6.2]) имеем

$$\int_{\gamma} \rho_{2,k} ds = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} dy \int_{\gamma} \rho_1 \left(x + \frac{1}{2k} d(x) y \right) ds_x.$$

Для внутреннего интеграла очевидным образом получим оценку

$$\int_{\gamma} \rho_1 \left(x + \frac{1}{2k} d(x) y \right) ds_x = \int_{z^{-1}(\gamma)} \rho_1(z) \frac{ds_x}{ds_z} ds_z \geq \frac{\alpha_{ij}}{1 + \frac{1}{2k}},$$

поскольку в силу (6) справедлива оценка

$$\frac{ds_z}{ds_x} = \left| \frac{dx}{ds} + \frac{1}{2k} d'_s(x) y \right| \leq 1 + \frac{1}{2k}$$

для всех $s = s_x$ из области определения натуральной параметризации кривой γ , исключая множество нулевой линейной меры, и кривая $z^{-1}(\gamma) \in \text{adm}_{1,w} \alpha H$. Это влечет нужное свойство $\rho_{3,k} \in \text{adm}_{1,w} \alpha H$. Кроме того, из выбора $\rho_1, \rho_{3,k}$ следует, что

$$m_{1,w}(\alpha H) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{3,k} w dx < C_1 m_{1,w}(\alpha H) + \frac{\varepsilon}{3} + o(1),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Выберем число $k' \in \mathbb{N}$, для которого $o(1) < \varepsilon/3$ и положим $\rho = \rho_{3,k'} + g$, где g — функция из леммы 2 с $0 < \beta < \varepsilon/3$. Очевидно, что ρ удовлетворяет условиям леммы, и это завершает доказательство. \square

Лемма 4. Пусть \mathcal{K} — конденсатор Хессе в \mathbb{R}^n и пусть метрика $\rho \in \text{adm}_{1,w} \alpha H$ удовлетворяет условиям леммы 3 с заданным $\varepsilon > 0$. Тогда для $\eta \in (0, 1)$ и всех $H_{ij} \neq \emptyset$, $0 \leq i < j \leq m$, существует такое натуральное число $k_0 \geq \tilde{k}$, что

$$\int_{\gamma} \rho ds > \alpha_{ij}(1 - \eta) \quad (10)$$

для всех $\gamma \in H_{ij}(k)$ и всех $k \geq k_0$. Здесь $\tilde{k}, H_{ij}(k)$ из п. 2.

Лемма 4 доказывается по схеме, предложенной в [1, лемма 5] для произвольных конденсаторов в \mathbb{R}^n с A_p -весом Макенхаупта, $1 < p < \infty$. В силу топологического условия $(\partial\Omega \setminus E) \cap E = \emptyset$ для конденсаторов Хессе эта схема значительно упрощается и позволяет заменить показатель суммируемости $p \in (1, +\infty)$ на $p = 1$, поэтому доказательство этой леммы опускаем.

4. Формулировка и доказательство основного результата.

Теорема 1. Пусть w — некоторый A_1 -вес и \mathcal{K} — конденсатор Хессе в \mathbb{R}^n . Тогда емкость $\text{Cap}_{1,w} \mathcal{K}$ эквивалентна модулю $m_{1,w}(\alpha H)$. Другими словами,

$$m_{1,w}(\alpha H) \leq \text{Cap}_{1,w} \mathcal{K} \leq C_1 m_{1,w}(\alpha H),$$

где положительная постоянная C_1 введена в предложении 1 и $C_1 = 1$ в случае $w \equiv 1$.

Доказательство. В силу следствия 1 достаточно доказать, что $\text{Cap}_{1,w} \mathcal{K} \leq C_1 m_{1,w}(\alpha H)$. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ и пусть метрика ρ удовлетворяет условиям леммы 3 с указанным ε .

Применим лемму 4 к этой метрике ρ с заданным наперед $\eta \in (0, 1/2)$ и найдем для ρ, η соответствующее натуральное число $k_0 = k_0(\eta, \rho)$, для которого выполняются неравенства (10) с $k \geq k_0$.

Пусть

$$\rho_0 = \begin{cases} \frac{\rho}{1 - 2\eta}, & x \in \Omega(k_0), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega(k_0). \end{cases}$$

Тогда $\rho_0 \in \text{adm}_{1,w} \alpha H$ и по построению ρ_0 непрерывна на $\Omega(k_0) = \Omega \setminus E(k_0)$, равна нулю на

$$E(k_0) = \bigcup_{i=0}^m \overline{O_i(k_0)}$$

и, следовательно, ρ_0 локально ограничена на

$$\Omega_{k_0+1} = \Omega \bigcup \left(\bigcup_{i=0}^m O_i(k_0 + 1) \right)$$

и п.в. непрерывна на Ω_{k_0+1} .

Положим $u_i = \delta_i$ на $\overline{O_i(k_0 + 2)}$ и

$$u_i(x) = \delta_i + \inf_{\gamma_x} \int_{\gamma_x} \rho_0 ds$$

для всех $\Omega_{k_0+1} \setminus \overline{O_i(k_0+2)}$, где инфимум берется по всем спрямляемым кривым, $\gamma_x \subset \Omega_{k_0+1} \setminus \overline{O_i(k_0+2)}$, соединяющим точку x и $\overline{O_i(k_0+2)}$. Если таких кривых не найдется, то положим

$$u_i(x) = \max_{0 \leq j \leq m} \delta_j.$$

В силу известных свойств функций типа

$$\inf_{\gamma_x} \int_{\gamma_x} \rho_0 ds$$

(см. [8, Lemma 5.3]) $u_i(x)$ удовлетворяет на Ω_{k_0+1} локально условию Липшица (поскольку ρ_0 локально ограничена на Ω_{k_0+1}) и $|\nabla u_i(x)| \leq \rho_0(x)$ п.в. на Ω_{k_0+1} (в точках, где ρ_0 непрерывна на Ω_{k_0+1}). Кроме того, $u_i = \delta_i$ в окрестности E_i и либо $u_i(x) \geq \delta_i + \alpha_{ij} = \delta_i + |\delta_i - \delta_j| \geq \delta_j$, либо

$$u_i(x) = \max_{0 \leq l \leq m} \delta_l \geq \delta_j$$

в точках $x \in O_j(k_0+2)$ для всех $0 \leq j \leq m$, $j \neq i$.

Положим

$$u(x) = \min_{0 \leq i \leq m} u_i(x)$$

на Ω_{k_0+1} . Как срезка (см. [7, Theorem 1.20]) $u(x)$ удовлетворяет на $\Omega_{k_0+1} \cap \Omega$ локально условию Липшица и равна δ_i в некоторой окрестности множества E_i и, следовательно, $u(x) \in \text{Adm}_{1,w} \mathcal{K}$, $|\nabla u(x)| \leq \rho_0(x)$ п.в. на Ω_{k_0+1} . Отсюда

$$\text{Cap}_{1,w} \mathcal{K} \leq \int_{\Omega} |\nabla u| w dx \leq \int_{\Omega} \rho_0 w dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho w dx + o(1) \leq C_1 m_{1,w}(\alpha H) + o(1) + \varepsilon,$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$.

Устремляя последовательно $\eta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, получим утверждение теоремы. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дымченко Ю. В., Шлык В. А. Об одной задаче Дубинина для емкости конденсатора с конечным числом пластин // Мат. заметки. — 2018. — 103, № 6. — С. 841–852.
2. Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. — М.: Наука, 1964.
3. Сычев А. В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. — Новосибирск: Наука, 1983.
4. Феддерер Г. Геометрическая теория меры. — М.: Наука, 1987.
5. Ahlfors L. V. Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory. — New York: McGraw-Hill, 1973.
6. Dubinin V. Some unsolved problems about condenser capacities on the plane // in: Complex Analysis and Dynamical Systems (Agranovsky M., Golberg A., Jacobzon F., Shoikhet D., Zalcman L. Complex, eds.). — Cham: Birkhäuser, 2018. — P. 81–92.
7. Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O. Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. — New York: Dover, 2012.
8. Hesse J. A p -extremal length and p -capacity equality // Ark. Mat. — 1975. — 13, № 1. — С. 131–144.
9. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions // Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — 192. — P. 207–226.
10. Ohtsuka M. Extremal Length and Precise Functions. — Tokyo: Gakkōtoshō, 2003.
11. Rudin W. Real and Complex Analysis. — New York: McGraw-Hill, 1987.
12. Turesson B. Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces. — Berlin: Springer, 2000.

Шлык Владимир Алексеевич

Российская таможенная академия, Владивостокский филиал;

Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН, Владивосток

E-mail: shlykva@yandex.ru

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель – академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редакцией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редакцией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов – любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

- | | |
|--|---|
| Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
SISSA) | Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, МГУ им.
М. В. Ломоносова) |
| Акбаров Сергей Сайдмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики») | Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова) |
| Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н.
(ВИНТИ РАН) | Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики») |
| Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова) | Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова) |
| Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент
(МГУ им. М. В. Ломоносова) | Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова) |
| Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова) | Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики») |
| Воблый Виталий Антониевич,
д.ф.-м.-н.
(ВИНТИ РАН) | Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции) |
| Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор
(МПГУ,
ВИНТИ РАН) | Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый
университет при Правительстве РФ,
ВИНТИ РАН) |
| Дудин Евгений Борисович,
к.т.н.
(ВИНТИ РАН) | Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова) |

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Сайдмузафарович
Кругова Елена Павловна
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Шамолин Максим Владимирович
Юлдашев Турсун Камалдинович