ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 205 (2022)

Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 205 (2022)

Дата публикации **14 февраля** 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года — Выходит 15 раз в год

Редактор-составитель выпуска	М. В. Шамолин
Научный редактор выпуска	Е. П. Кругова
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782–4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-205-3-9
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-205-10-15
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-205-16-21
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-205-22-54
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-205-55-94
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-205-96-106
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-205-107-118

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 205

ГЕОМЕТРИЯ И МЕХАНИКА

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-3-9

УДК 517, 531.01

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ» ИМ. ПРОФ. В. В. ТРОФИМОВА ПОД РУКОВОДСТВОМ С. А. АГАФОНОВА, Д. В. ГЕОРГИЕВСКОГО И М. В. ШАМОЛИНА

© 2022 г. **Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Приведена краткая информация о заседаниях семинара в 2020 г.

***Ключевые слова*:** качественная теория динамических систем, геометрия, классическая механика, механика жидкости и газа, механика деформируемого твердого тела.

SESSIONS OF THE WORKSHOP OF THE MATHEMATICS AND MECHANICS DEPARTMENT OF THE LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY, “URGENT PROBLEMS OF GEOMETRY AND MECHANICS” NAMED AFTER V. V. TROFIMOV

© 2022 **D. V. GEORGIEVSKY, M. V. SHAMOLIN**

Abstract. Brief information on sessions of the workshop in 2020 is presented.

***Keywords and phrases*:** qualitative theory of dynamical systems, geometry, classical mechanics, fluid and gas mechanics, solid mechanics.

***AMS Subject Classification*:** 58-xx, 70-xx

Заседание 432 в рамках V Зимней научной школы-конференции по механике композитов им. Б. Е. Победри (Московская область, Красновидово) (7 февраля 2020 г.).

Д. В. Георгиевский.

Линейные дифференциальные операторы второго порядка над тензорными полями высоких рангов.

На тензорные поля произвольного ранга в многомерном пространстве естественным образом распространяются понятия операторов дивергенция, градиент, ротор, деформатор, а также их суперпозиций второго порядка. Приводятся два варианта обобщения ротора как внешнего произведения. Подробно рассматриваются дифференциальные операторы второго порядка, не меняющие ранг тензора, к которому применяются. Вводятся квадратные матрицы, состоящие из дифференциальных операторов $\mathrm{Div}_l\mathrm{Grad}_k$, $\mathrm{Grad}_k\mathrm{Div}_l$, и устанавливается их взаимосвязь. Выписывается явное выражение для повторного оператора ротор. Все введённые обобщённые операторы в частных случаях согласуются по своим свойствам с соответствующими им классическими в векторном и тензорном анализе операторами.

Заседание 433 (21 февраля 2020 г.)
М. В. Шамолин.
Интегрируемые системы нечетного порядка с диссипацией.

Описание диссипации в динамической системе является довольно затруднительной задачей. Но это, к примеру, может быть сделано следующим образом: вполне определенные коэффициенты указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях — на подкачку энергии. Это приводит к потере классических первых интегралов (законов сохранения), глобально выражающихся через гладкие функции.

Топологическим препятствием к наличию в системе полного набора гладких первых интегралов являются притягивающие или отталкивающие предельные множества. При их обнаружении необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве автономных первых интегралов.

При исследовании систем с диссипацией если и удается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями (имеющими существенно особые точки). Поэтому результаты, полученные в данной работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Данная тематика уже затрагивалась в ряде работ автора. Так, например, были рассмотрены системы даже девятого порядка на своем фазовом многообразии с ненулевыми коэффициентами связности Γ^i_{jk}:

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v,$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z_4' = F(\alpha) + \Gamma_4 f^2(\alpha)Z_3^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha)Z_2^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z), \\ Z_3' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_3 Z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)Z_2^2 - \\ \qquad\qquad - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha)Z_2 Z_3 - \\ \qquad\qquad - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha)Z_1 Z_3 - \\ \qquad\qquad - \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f(\alpha)g(\beta_1)Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_3 f(\alpha), \qquad \beta_2' = Z_2 f(\alpha)g(\beta_1), \qquad \beta_3' = Z_1 f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2), \end{cases}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \ \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)}, \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$Z = (Z_1, \ldots, Z_4)$, $z_k = Z_k v$, $k = 1, \ldots, 4$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$, $g(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — некоторые гладкие функции. Сначала в системе отсутствовало внешнее поле сил $b_1 \neq 0$, когда присутствуют лишь коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Данные коэффициенты не нарушали консервативности, поскольку данные системы обладают полным набором (шестью) гладких первых интегралов. Затем в рассматриваемой системе были введены и диссипативные коэффициенты через унимодулярное преобразование.

В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладкому многообразию. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Заседание 434 (28 февраля 2020 г.)
Н. А. Раутиан.

Полугруппы для вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости.

Заседание 435 (20 марта 2020 г.)
А. Ю. Бондаренко (ЦНИИ машиностроения, г. Королёв).

Совершенствование методов расчетного анализа динамических нагрузок на конструкции и способов их отработки с учетом результатов натурных испытаний.

Заседание 436 (8 сентября 2020 г.)
Д. В. Георгиевский.

Оценки экспоненциального затухания возмущений, наложенных на продольные гармонические колебания вязкого слоя.

Исследована эволюция картины возмущений, наложенных на плоскопараллельное периодическое по времени течение ньютоновской вязкой жидкости в слое, одна из границ которого совершает продольные гармонические колебания вдоль самой себя, а на другой границе возможно проскальзывание материала с нулевым трением. Ставится обобщённая задача Орра—Зоммерфельда как линеаризованная задача гидродинамической устойчивости нестационарных вязких несжимаемых течений. На основе метода интегральных соотношений, основанного на вариационных неравенствах для квадратичных функционалов и развитого применительно к нестационарным течениям, выводятся достаточные интегральные оценки экспоненциального затухания начальных возмущений. Эти оценки для каждого волнового числа представляют собой неравенства, связывающие три постоянные безразмерные величины: среднюю по периоду максимальную по толщине скорость сдвига в слое, амплитуду колебаний границы и число Рейнольдса. Произведено сравнение оценок устойчивости для плоской и трёхмерной картин возмущений.

Заседание 437 (9 октября 2020 г.)
В. А. Банько.

Оптимизация распределения масс по длине консервативно нагруженных стержней.

Заседание 438 (16 октября 2020 г.)
А. Б. Подпросветова.

Теоретическое и экспериментальное исследование движения жидкости внутри мягких эластичных трубок.

В работе проведено исследование существования и единственности осесимметричных состояний упругих трубок при протекании степенных жидкостей на основе разработанной одномерной модели течения неньютоновской жидкости в упругой трубке. Для трубок бесконечной длины рассматривались решения в виде бегущих волн и выводилось дисперсионное уравнение. Анализом его корней найдены критерий устойчивости безграничной однородной трубки и критерий абсолютной неустойчивости. Показано, что неустойчивость, при которой сохраняется осесимметричность движения трубки, возможна лишь при показателе степенного закона $n < 0{,}611$, а абсолютная неустойчивость — при $n < 1/3$.

Для сколь угодно большой, но конечной длины трубки граница устойчивости определялась асимптотическим методом глобальной неустойчивости. Для трубок конечной длины была решена задача на собственные значения, а граница устойчивости исследовалась численно с учетом упругости стенки трубки, продольного натяжения и длины трубки.

В связи с существующим несоответствием между большим количеством экспериментальных исследований с турбулентным течением жидкости в упругой трубке и биомеханическими применениями, где поток в большей части сердечно-сосудистой системы ламинарный, экспериментально было изучено влияние режимов потока на возникновение и характер колебаний упругой трубки (модельного кровеносного сосуда) на установке типа «Starling Resistor».

Заседание 439 (23 октября 2020 г.)

А. А. Бобылев.

О самосопряжённости и коэрцитивности оператора Пуанкаре—Стеклова для упругой полуплоскости.

Заседание 440 (6 ноября 2020 г.)

Э. Б. Завойчинская.

О много- и гигацикловой усталости металлов и сплавов при одноосном нагружении.

Проблеме обеспечения безопасной эксплуатации конструкций с длительными сроками службы посвящено обширное количество работ последних лет, актуальность которых, в том числе, связана с необходимостью продления сроков службы их элементов. В зарубежных работах построение кривой усталости в много- и гигацикловой областях при симметричном одноосном нагружении основывается на модели Х. Муграби с выделением двух механизмов зарождения усталостного разрушения: от очагов микроразрушения на поверхности образца с образованием устойчивых полос скольжения (область ограниченной усталости) и от геометрических концентраторов структуры внутри и на границах зерен, около включений и др. в обьеме тела с формированием области мелкогранулированной зернистой структуры «рыбий глаз» и образованием блестящих фасеток микроскола (область гигацикловой усталости). В области многоцикловой усталости наблюдаются оба механизма зарождения микроразрушения. В отечественной литературе рассматривается бифуркационная кривая усталости с наличием области, в которой эти механизмы реализуются с разной вероятностью, полагается возможным разрыв кривой усталости и существование нескольких пределов выносливости. Различные ветви кривой описываются различными степенными зависимостями предельной амплитуды напряжения от числа циклов.

В докладе показано, что диаграмма Х. Муграби и бифуркационная кривая усталости отражают на одном графике области разных кривых усталости при разных частотах симметричного одноосного нагружения. Обсуждаются классы с зависящими и не зависящимися от частоты нагружения материалов. Для никелевого сплава ЭИ437Б и 9–12% хромистой мартенситной стали, усталостные свойства которых не зависят от частоты, строятся области развития хрупких микро-, мезо- и макродефектов и кривые усталости по уровням дефектности, которые удовлетворительно описывают опытные данные. Первый из описанных выше механизмов является механизмом вязкого разрушения с развитием неупругого деформирования, возможно, имеющий место в области ограниченной усталости пластичных материалов. Второй механизм — это механизм развития хрупкого разрушения, который является определяющим в областях гигацикловой усталости. Очаги хрупкого микроразрушения вероятны как в обьеме тела, так и на поверхности от геометрических концентраторов структуры, когда поверхность опережает в накоплении микродефектов внутренние обьемы тела. Оба механизма имеют место при нагружении с любой частотой в зависимости от числа циклов. В области ограниченной усталости пластичных материалов идут одновременно процесс развития вязкого разрушения по первому механизму и развитие хрупких микро- и макротрещин по второму механизму. Предельная амплитуда напряжений является функцией трех переменных: числа циклов, частоты нагружения и температуры. Базовые характеристики модели масштабно-структурного разрушения материалов необходимо рассматривать как функции частоты нагружения и температуры.

Заседание 441 в рамках конференции «Ломоносов–2020» (13 ноября 2020 г.).

А. С. Удалов.

Исследование трещин в упругой среде методом разрывных смещений повышенной точности.

В. А. Банько.

Чувствительность параметра критической силы к перераспределению массы по длине консервативно нагруженных стержней переменного сечения.

А. В. Сероштанов (Донецкий национальный университет).

Изгиб тонких электромагнитоупругих плит.

А. И. Занько (Донецкий национальный университет).

Изгиб эллиптического кольца из вязкоупругого материала.

Т. А. Гаджибеков (МГТУ им. Н. Э. Баумана).

Спектральный анализ дисперсионного уравнения продольных волн Похгаммера–Кри.

Эльсайед Асмаа (МИСИ).

Определение порядка дробной производной по оператору Капуто в модели Бэгли—Торвика.

С. А. Монин (МЭИ).

Статистическое моделирование реакции трибун спортивных сооружений на воздействие зрителей.

И. С. Ермаков (МАИ).

Численное решение трёхмерной задачи теории упругости о концентрации напряжений в одноосно растягиваемой толстой анизотропной пластине с круговым отверстием.

М. А. Полянский (Донецкий национальный университет).

Электромагнитоупругое состояние пьезопластин с криволинейными отверстиями.

Заседание 442, посвященное профессору С. А. Агафонову (20 ноября 2020 г.).

Заседание посвящено соруководителю семинара профессору С. А. Агафонову, из-за тяжелой болезни вынужденному последние годы вести домашний режим. Участники рассказали о своих научных результатах за время пандемии, поделились опытом научной и преподавательской работы в дистанционном формате, а также обсудили планы на будущее.

Заседание 443 (11 декабря 2020 г.)

С. В. Нестеров (ИПМ им. А. Ю. Ишлинского РАН), Д. В. Георгиевский.

Метод ускоренной сходимости в задаче о крутильных колебаниях неоднородного по толщине круглого диска.

На основе разработанного авторами метода ускоренной сходимости численно и аналитически исследуются крутильные колебания насаженного на ось упругого диска, толщина которого зависит от радиуса. Внутренняя граница диска прикреплена к оси, тогда как внешняя свободна от нагрузок. Для различных отношений внешнего и внутреннего радиусов диска и разных распределений масс находятся первые частоты собственных крутильных колебаний.

Заседание 444 (18 декабря 2020 г.)

А. В. Аксенов, К. П. Дружков.

Симметрии, законы сохранения и точные решения одномерной системы уравнений мелкой воды над неровным дном. .

Проведена классификация симметрий одномерной системы уравнений мелкой воды над неровным дном в эйлеровых переменных. На основе результатов полученной классификации сделан вывод о возможности сведения одномерной системы уравнений мелкой воды к линейной системе уравнений с помощью точечных преобразований только в случаях горизонтального и наклонного профилей дна. Также проведена классификация контактных симметрий одномерного уравнения мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных.

Проведена классификация гидродинамических законов сохранения одномерной системы уравнений мелкой воды в эйлеровых переменных. Получен новый базовый закон сохранения. Проведена классификация законов сохранения первого порядка одномерного уравнения мелкой воды в лагранжевых переменных.

Получено и исследовано трехпараметрическое семейство точных решений одномерной системы уравнений мелкой воды над наклонным дном, описывающее набег волны типа «ступеньки» на берег и отражение от него. Описаны нелинейный эффект заплеска и эффект усиления набегающей волны при отражении ее от берега.

Библиография

1. *Аксенов А. В., Доброхотов С. Ю., Дружков К. П.* Точные решения типа «ступеньки» одномерных уравнений мелкой воды над наклонным дном// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 6. — С. 930–936.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
3. *Стокер Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. — М.: ИЛ, 1959.
4. *Aksenov A. V., Druzhkov K. P.* Conservation laws and symmetries of the shallow water system above rough bottom// J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — *722*. — P. 1–7.
5. *Aksenov A. V., Druzhkov K. P.* Conservation laws of the equation of one-dimensional shallow water over uneven bottom in Lagrange's variables// Int. J. Nonlin. Mech. — 2020. — *119*. — 103348.

Заседание 445 (25 декабря 2020 г.)

М. В. Шамолин.

Задача геодезических, движение в потенциальном поле и в поле с диссипацией.

Изучение интегрируемости автономных динамических систем на двумерном конфигурационном многообразии приводит к изучению систем четвертого порядка на касательном расслоении данного многообразия. При этом ключевым, наряду с геометрией многообразия, является структура силового поля, присутствующего в системе. Так, например, известная задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т.д. Иногда в системах с диссипацией все же удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных, в смысле комплексного анализа, функций, поскольку о полном списке даже непрерывных автономных первых интегралов приходится забыть. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил. В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные. В частности, рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ принимает вид

$$\begin{cases}\dot\alpha = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha),\\ \dot z_2 = F_2(\alpha)f_2(\alpha) - f_2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha),\\ \dot z_1 = F_1(\beta)f_1(\alpha) - f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha),\\ \dot\beta = z_1 f_1(\alpha),\end{cases}$$

которая почти всюду эквивалентна следующей системе маятникового типа:

$$\begin{cases}\ddot\alpha - \left\{b\tilde\delta(\alpha) + F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\alpha - F_2(\alpha)f_2^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F_2^1(\alpha) + \\ \qquad + b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0,\\ \ddot\beta - \left\{F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta - F_1(\beta)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0,\end{cases}$$

$$\tilde\delta(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}.$$

В последних системах в явном виде видно линейное по квазискоростям силовое поле, которое в разных частях фазового пространства имеет либо диссипативный характер, либо характер подкачки энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. Фундам. направл. — 2007. — *23.* — С. 16–45.
2. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *62.* — С. 3–13.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65.* — С. 3–10.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76.* — С. 3–10.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2013. — *88.* — С. 3–19.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2015. — *98.* — С. 3–8.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100.* — С. 3–11.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *150.* — С. 3–25.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *174.* — С. 3–11.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *187.* — С. 3–11.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2021. — *202.* — С. 3–9.

Георгиевский Дмитрий Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `cotedurhone@mail.ru, georgiev@mech.math.msu.su`

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 10–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-10-15

УДК 532.5.01

К ВОПРОСУ О НЕСТАЦИОНАРНОМ И НЕЛИНЕЙНОМ НАГРЕВЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ С ПОСТОЯННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2022 г. **С. О. ГЛАДКОВ**

Аннотация. Показано, что в условиях стационарного вращения шара с постоянной угловой скоростью в вязкой жидкости повышение температуры поверхности тела на границе контакта сопровождается нестационарным процессом теплопроводности, что приводит к спонтанному повышению температуры. Доказано, что этот процесс повышения температуры является нелинейным и имеет предельную точку роста по температурной шкале.

Ключевые слова: динамическая вязкость, температура, стационарное вращение, граница контакта.

ON NONSTATIONARY AND NONLINEAR HEATING OF A SPHERICAL BODY ROTATING IN A VISCOUS FLUID WITH A CONSTANT ANGULAR SPEED

© 2022 **S. O. GLADKOV**

Abstract. In this paper, we shown a stationary rotation of a ball in a viscous liquid with a constant angular speed, an increase in the temperature of the body surface at the boundary is accompanied by a nonstationary heat conduction process, which leads to a spontaneous increase in temperature. We prove that this process of temperature increase is nonlinear and has a limiting point of growth on the temperature scale.

Keywords and phrases: dynamic viscosity, temperature, stationary rotation, boundary of the contact.

AMS Subject Classification: 76U05

1. Введение. Задача, о которой сейчас пойдет речь, возникла несколько спонтанно в процессе внимательного анализа задачи, приведенной в замечательной монографии [7] после параграфа 55, и посвященной оценке температуры нагрева как результата поступательного движения шара в вязком континууме. Совершенно понятно, что благодаря движению шара в вязкой среде в результате трения температура его поверхности должна будет возрастать. Однако при этом возникает вполне закономерный и естественный вопрос, до какой конкретной величины она может дойти? Легко понять, что процесс нагрева носит нестационарный и существенно нелинейный характер. Действительно, если в процессе движения, которое может длиться довольно большой промежуток времени, температура поверхности тела постепенно повышается, то в результате контакта поверхности со средой температура среды в области контакта также должна будет повышаться. Последнее повлекло бы за собой автоматическое изменение вязкости континуума, непосредственно примыкающей к поверхности, а это как раз и означает, что процесс будет, во-первых, нестационарным, а во-вторых, существенно нелинейным, поскольку вязкость начинает зависеть от температуры. В настоящей статье речь пойдет о задаче вычисления нестационарного изменения температуры поверхности шара, вращающегося бесконечно долго с постоянной угловой скоростью ω в среде с динамической вязкостью η.

2. Основная часть.

2.1. Основные уравнения. Для решения поставленной задачи удобно воспользоваться системой уравнений Навье—Стокса (см. [7]), уравнением непрерывности и нестационарным уравнением теплопроводности (см. [6]), учитывающим диссипативное воздействие континуума. Имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}, \tag{1}$$

$$c_p\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\Delta T - \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right)^2, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость, P — давление, ρ — плотность континуума, ν его кинематическая вязкость, $\boldsymbol{g}$ — ускорение силы тяжести, c_p — изобарическая теплоемкость, отнесенная к единице объема тела, κ — коэффициент теплопроводности, T — температура. Постоянную Больцмана k_B мы положили равной единице. Вертикальную ось вращения шара выберем в качестве оси z, вдоль которой направим и угловую частоту ω. Сила тяжести при этом направлена вниз. Уравнение (2) получается благодаря простому правилу (см., к примеру, работы [4, 10])

$$T\dot{S} + \dot{Q}_T + \dot{Q}_\eta = 0, \tag{3}$$

где S — энтропия,

$$\dot{Q}_T = \int\limits_V \frac{\kappa}{T}(\nabla T)^2 dV$$

— диссипативная функция, обязанная теплопроводности,

$$\dot{Q}_\eta = \frac{\nu}{2}\int\limits_V \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right)^2 dV$$

— диссипативная функция вязкого континуума, в соответствии с которым в правую часть уравнения (2) плотность диссипативной функций должна входить со знаком минус.

2.2. Решение и анализ уравнений. В силу аксиальной симметрии решаемой задачи распределение скоростей вблизи поверхности шара можно искать в виде

$$\boldsymbol{v} = (v_r, v_\theta, v_\varphi) = (0, 0, v_\varphi(r,\theta)). \tag{4}$$

Рассматривая уравнение Навье—Стокса как стационарное, для z-проекции уравнения (1) находим $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \rho g$, так что давление равно

$$P = P_0 + \rho g z, \tag{5}$$

где P_0 — внешнее атмосферное давление. Поскольку помимо уравнений (1), (2) должно выполняться также и уравнение непрерывности

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \tag{6}$$

то скорость можно искать в виде

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\left(f(r)\omega\right), \tag{7}$$

где функцию $f(r)$ предстоит найти. Для проекции уравнения (1) на орт $\boldsymbol{e}_\varphi$ благодаря соотношению (4) получаем

$$(\Delta\boldsymbol{v})_\varphi = 0. \tag{8}$$

В силу (7) отсюда следует, что

$$(\Delta(\nabla f(r)\times\omega))_\varphi = 0 \iff (\nabla\Delta f)_\varphi = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta f = C_1, \tag{9}$$

где C_1 — константа интегрирования. В сферической системе координат радиальная часть оператора Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr},$$

и прямое интегрирование уравнения (9) дает

$$f(r) = ar^2 + \frac{b}{r}, \tag{10}$$

где a, b — константы, которые следует определить из граничных условий. Поскольку распределение скоростей в окрестности сферы определяется формулой (7), то из условия $\boldsymbol{v}|_{r\to\infty} = 0$ следует, что $a = 0$. Из условия сшивки на границе сферы $\boldsymbol{v}|_{r=R} = [\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}]$ получаем, что

$$\boldsymbol{v}|_{r=R} = [\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}] = (\nabla f(r)\times\boldsymbol{\omega})|_{r=R} = -\frac{f'}{r}\bigg|_{r=R}[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}].$$

Отсюда согласно (10) следует, что $b = -R^3$. Таким образом, решение вблизи поверхности сферы для $r \geqslant R$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{v} = \frac{R^3}{r^3}[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}]. \tag{11}$$

Решение (11) позволяет легко вычислить и плотность диссипативной функции. Действительно, учитывая переход в криволинейную систему координат, можно записать

$$\dot{Q}_\eta = \frac{\eta}{2}\int\limits_V\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - 2\Gamma^s_{ik}v_s\right)^2 dV,$$

где Γ^l_{ik} — символ Кристоффеля второго рода. Несложное вычисление с учетом (4) и алгоритма, приведенного, например, в [3], приводит нас к искомому выражению:

$$\frac{d\dot{Q}_\eta}{dV} = \frac{16\eta R^6\omega^2}{r^6}\sin^2\theta, \tag{12}$$

где θ — азимутальный угол сферической системы координат ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$). Подставляя теперь (12) в уравнение (2), находим

$$c_P\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\Delta T - \frac{16\eta R^6\omega^2}{r^6}\sin^2\theta. \tag{13}$$

Поскольку мы интересуемся временной эволюцией температуры на поверхности сферы, то оператор Лапласа в уравнении (13) можно записать в приближенном конечно-разностном виде, учитывая лишь узкую область контакта ширины δ:

$$\Delta T \approx -\frac{T - T_0}{\delta^2}, \tag{14}$$

где T_0 — равновесная температура континуума при $r \to \infty$. Поэтому уравнение (13) в непосредственной близости к поверхности с учетом (14) можно записать следующим образом:

$$c_P\frac{dT}{dt} = -\kappa\frac{T - T_0}{\delta^2} - 16\eta(T)\omega^2\sin^2\theta. \tag{15}$$

Поскольку речь идет о временной эволюции $T(t)$, то уравнение (15) можно усреднить по угловым переменным по правилу

$$\overline{(\ldots)} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}(\ldots)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

В результате из (15) получаем

$$c_P\frac{dT}{dt} = -\kappa\frac{T - T_0}{\delta^2} - \frac{32}{3}\eta(T)\omega^2. \tag{16}$$

Таким образом, стационарная точка определяется из уравнения

$$T_0 - T^* = -\frac{32\delta^2}{3\kappa}\eta(T^8)\omega^2. \tag{17}$$

Из экспериментов известно, что с повышением температуры вязкость уменьшается. Это означает, что уравнение (17) будет иметь решение, только если выполняется условие

$$T_0 > \frac{32\rho\delta^2\omega^2}{3c_P k_B}\psi(\mathrm{Pr}), \tag{18}$$

где ρ — плотность континуума, $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, а ψ — некоторая функция, в первом приближении являющаяся линейной. Как видно, соотношение (18) хорошо выполняется, если угловая скорость вращения достаточно велика. Заметим также, что в оценку (18) мы ввели постоянную Больцмана для автоматического перехода к температурной шкале. При выполнении неравенства (18) температура T^* может быть найдена из решения уравнения (17). Действительно, если закон изменения вязкости известен (подробности см. в [10]), то эмпирически установленную зависимость можно выбрать, например, в виде степенной

$$\eta = \eta_0\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\mu}, \tag{19}$$

где μ — известный показатель степени. Уравнение (17) легко решить, подставив в него явную зависимость (19). В результате из (17) следует, что

$$x = 1 - \frac{a}{x^{\mu}}, \tag{20}$$

где введены безразмерный аргумент $x = T/T_0$ и параметр

$$a = \frac{21\omega^2\delta^2\eta_0}{3k_B T_0\kappa}. \tag{21}$$

Уравнение (20) будет иметь решение только в том случае, если обе функции в левой и правой частях имеют одно касание в некоторой точке, которая определяется из условия равенства производных от обеих частей уравнения (20), т.е. в точке

$$x_0 = (a\mu)^{\frac{1}{1+\mu}}. \tag{22}$$

Таким образом, решение уравнения существует только при выполнении условия

$$(a\mu)^{\frac{1}{1+\mu}} > 1. \tag{23}$$

Если условие (23) не выполняется, то нагревания нет. В соответствии с определением $x = T/T_0$ легко понять, что наиболее интересен случай, когда выполняются два условия: $\mu > 1$ и $a > 1$. В этом случае стационарная температура, до которой в реальности может нагреться вращающийся шар согласно (22), будет

$$T^* = (a\mu)^{\frac{1}{1+\mu}}T_0. \tag{24}$$

2.3. Численная оценка. К примеру, пусть частота вращения $\omega = 10^5\,\text{с}^{-1}$, динамическая вязкость $\eta_0 = 10^{-2}$ г/(см·с), переходная область (или иначе, область взаимодействия объема шара с его поверхностным слоем, который считается термостатом) имеет характериный размер $\delta = 10^{-3}$ см, температура $T_0 = 300\,\text{K}$, коэффициент теплопроводности $\kappa = 10^{20}\,(\text{см·с})^{-1}$, постоянная Больцмана $k_B = 1{,}38\cdot 10^{-16}$ К/эрг. В результате приходим к оценке

$$a = \frac{32\cdot 10^{10}\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-2}}{3\cdot 1{,}38\cdot 10^{-16}\cdot 300\cdot 10^{20}} \approx 1.9 > 1. \tag{25}$$

Заметим, что если частота вращения шара невелика, то нагревания не будет. Конкретное значение температуры согласно (24) можно оценить, зная степенной закон убывания вязкости с ростом температуры, т.е. показатель степени μ. Эмпирически полученные зависимости коэффициента динамической вязкости от температуры чрезвычайно разнообразны и весьма часто (см. [1, 5, 9]) описываются экспоненциальными законами убывания типа

$$\eta(T) = \eta_0 \exp \frac{\Delta E}{T}, \tag{26}$$

где ΔE — энергия активации молекул жидкости, а ν_0 — практически не зависящая от температуры константа, имеющая размерность вязкости. Совершенно ясно, что зависимости и (19) и (26) в определенных диапазонах температур качественно весьма похожи, и поэтому мы остановились на выборе зависимости в виде степенной согласно (19), как было предложено, например, в [8]. Возвращаясь к уравнению (16), с учетом (19) имеем

$$\dot{x} = -x + 1 + \frac{a}{x^\mu}, \tag{27}$$

где точка означает дифференцирование по безразмерному времени τ:

$$\tau = \frac{\kappa}{\delta^2 c_P} t. \tag{28}$$

Безразмерный параметр, введенный выше, удобно записать в более общей форме:

$$a = \frac{32\rho\delta^2\omega^2}{3T_0 c_P}\psi(\mathrm{Pr}), \tag{29}$$

где $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля.

2.4. Характерное время нагрева. Записывая уравнение (27) вблизи стационарной точки, имеем

$$\dot{x} \approx -\gamma(x - x^*) + \beta(x - x^*)^2 + \ldots, \tag{30}$$

где $\gamma = 1 + \mu$, $\beta = \mu(1 + \mu)/a^{1/(1+\mu)}$. Поэтому характерное время, через которое температура достигнет максимума, можно оценить по формуле

$$\bar{t} \approx \frac{(1 + \mu)\delta^2}{\chi} \tag{31}$$

с перенормированным решением (23):

$$T^* \approx T_0 a^{1/(1+\mu)} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Обратим внимание, что время разогрева в соответствии с (31) существенно зависит от температурного изменения вязкости.

3. Заключение. В заключение работы кратко сформулируем основные результаты.

1. Получено уравнение, описывающее нестационарное поведение температуры и учитывающее нелинейную температурную зависимость динамической вязкости.
2. Исследован процесс нестационарного повышения температуры вращающегося с постоянной угловой частотой шара и найдено предельное значение возможной температуры нагрева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гатчек Э.* Вязкость жидкостей. — Л.: ОНТИ, 1935.
2. *Гладков С. О.* К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра// Ж. техн. физ. — 2018. — *88*, № 3. — С. 337–341.
3. *Гладков С. О.* К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции к задачам гидродинамики и теории упругости// Вестн. МГОУ. Сер. Физ. — 2019. — *88*. — С. 42–67.
4. *Гладков С. О., Богданова С. Б.* К нелинейной теории теплопроводности// Ж. техн. физ. — 2016. — *86*, № 2. — С. 1–7.
5. *Глесстон С., Лейдлер К., Эйринг Г.* Теория абсолютных скоростей реакций. — М.: ИЛ, 1948.
6. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 2002.

8. *Севастьянов Р. М.* Зависимость вязкости от температуры// Уч. зап. ЦАГИ. — 1974. — *5*, № 3. — С. 111–114.
9. *Фогельсон Р. Л., Лихачев Е. Р.* Температурная зависимость вязкости// Ж. техн. физ. — 2001. — *71*, № 8. — С. 128–131.
10. *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей. — Л.: Наука, 1975.

Гладков Сергей Октябринович
Московский авиационный институт
E-mail: sglad51@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 16–21
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-16-21

УДК 519.17

АСИМПТОТИКА ЧИСЛА НЕЗАВИСИМОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПОДГРАФА ГРАФА $G(n, r, <s)$

© 2022 г. **А. М. РАЙГОРОДСКИЙ**

Аннотация. В работе рассматривается вероятностная версия классической задачи экстремальной комбинаторики, изучение которой было начато в середине прошлого века П. Эрдешем, Ч. Ко и Р. Радо.

Ключевые слова: случайный граф, экстремальная система множеств, гиперграф.

ASYMPTOTICS OF THE INDEPENDENCE NUMBER OF A RANDOM SUBGRAPH OF THE GRAPH $G(n, r, <s)$

© 2022 **A. M. RAIGORODSKY**

Abstract. In this paper, we discuss the probabilistic version of the classical problem of extremal combinatorics stated appeared in the middle of the 20th century by P. Erdős, C. Ko, and R. Rado.

Keywords and phrases: random graph, extremal system of sets, hypergraph.

AMS Subject Classification: 05C80

Теорема 1 (П. Эрдеш, Ч. Ко, Р. Радо, см. [12]). *Пусть даны натуральные числа r и s, $s < r$. Пусть $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество из n элементов. Обозначим $m(n, r, s)$ максимальную мощность такой совокупности r-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, что любые два подмножества в этой совокупности имеют не менее s общих элементов (такая совокупность называется s-пересекающейся). Тогда найдется такое $n_0(r, s)$, что при всех $n \geqslant n_0(r, s)$ выполнено $m(n, r, s) = C_{n-s}^{r-s}$.*

Отметим, что оценка $m(n, r, s) \geqslant C_{n-s}^{r-s}$ практически очевидна: достаточно зафиксировать какие-либо s элементов $v_1, v_2, \ldots, v_s \in \mathcal{R}_n$ и рассмотреть все r-элементные подмножества, которые их содержат. В мировой литературе такую «тривиальную» s-пересекающуюся конструкцию принято называть *звездой*.

Ввиду своей исключительной значимости, результат теоремы 1 неоднократно обобщался и уточнялся. В частности, был получен ряд утверждений об устойчивости результата Эрдеша—Ко—Радо. Ярким примером является в первую очередь так называемая граница Франкла, представленная последним в следующей формулировке.

Теорема 2 (П. Франкл, см. [13]). *Пусть даны натуральные числа r и s, $s < r$. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная s-пересекающаяся совокупность r-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$. Тогда найдется такое $n_0(r, s)$, что при всех $n \geqslant n_0(r, s)$ либо $\mathcal{M}$ — это часть некоторой звезды,*

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10014).

либо мощность $\mathcal{M}$ не превосходит величины

$$(s+2)C_{n-s-2}^{r-s-1} + C_{n-s-2}^{r-s-2} = \left|\Big\{V: \ |V| = r, \ \big|\{1, \ldots, s+2\} \cap V\big| \geqslant s+1\Big\} B\right| \quad \text{\emph{при} } r \leqslant 2s+1,$$

$$\sum_{i=1}^{r-s} C_{r-s+1}^{i} C_{n-r-1}^{r-s-i} + s = \left|\Big\{V: \ |V| = r, \ \{1, \ldots, s\} \subset V, \ V \cap \{1+s, \ldots, 1+r\} \neq \emptyset\Big\} \cup \right.$$
$$\left. \cup \Big\{\{1, \ldots, s+1\} \setminus \{i\}: \ i \in \{1, \ldots, s\}\Big\}\right| \quad \text{\emph{при} } r > 2s+1.$$

Отметим, что наименьшее $n_0(r, s)$ было определено Франклом и Уилсоном для любых r, s:

$$n_0(r, s) = (r - s + 1)(s + 1).$$

О современном состоянии исследований в области см. [15]. Мы же перейдем к версии устойчивости, которая изучалась в серии недавних работ (см. [16]— [14]).

Рассмотрим граф $G(n, r, <s) = (V(n, r), E(n, r, s))$:

$$V(n, r) = \Big\{A \subset \{1, 2, \ldots, n\}: \ |A| = r\Big\}, \quad E(n, r, s) = \Big\{\{A, B\}: \ |A \cap B| < s\Big\}.$$

Напомним, что *числом независимости* $\alpha(G)$ графа G называют размер максимального множества его вершин, попарно не соединенных ребрами (сами такие множества называются *независимыми*). Очевидно, что $\alpha(G(n, r, <s)) = m(n, r, s)$, а любая s-пересекающаяся совокупность r-элементных множеств взаимно однозначно отвечает некоторому независимому множеству вершин графа $G(n, r, <s)$. Графы такого типа активно изучаются в теории кодирования, в теории Рамсея, в теории гиперграфов, в комбинаторной геометрии (см. [1–4, 7–11, 17]).

Введем понятие случайного подграфа графа $G(n, r, <s)$. Пусть $p \in [0, 1]$. Тогда $G_p(n, r, <s)$ — это случайный элемент со значениями во множестве всех остовных подграфов $G = (V(n, r), E)$ графа $G(n, r, <s)$ и с биномиальным распределением:

$$\mathbb{P}\big(G_p(n, r, <s) = G\big) = p^{|E|}(1-p)^{|E(n,r,s)| - |E|}.$$

М. М. Пядёркин доказал следующую теорему об устойчивости.

Теорема 3 (см. [5])**.** *Для любых фиксированных r и s имеем*

$$\mathbb{P}\big(\alpha(G_{1/2}(n, r, <s)) = C_{n-s}^{r-s}\big) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Используя технику доказательства теоремы 3 (см. [5]), докажем аналогичное утверждение для непостоянных параметров $r = r(n)$ и $s = s(n)$.

Теорема 4. *Утверждение теоремы 3 верно для $r = r(n) \to \infty$, $s = s(n) \to \infty$ при условии, что*

$$r = o\left(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3}\right), \quad s = o(r).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно обосновать стремление к нулю вероятности существования в случайном графе $G_{1/2}(n, r, <s)$ независимого множества размера $M + 1$, где

$$M = \alpha\big(G(n, r, <s)\big) = C_{n-s}^{r-s} = (1 + o(1))\frac{n^{r-s}}{(r-s)!}.$$

Таким образом, нас интересует величина

$$\mathbb{P}\Big[\exists A \subset V(n, r): \ |A| = M + 1, \ A \text{ независимо в } G_{1/2}(n, r, <s)\Big].$$

Введем в рассмотрение величину

$$M'(n, r, s) = \frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)! r \ln n}.$$

Для каждого из множеств A мы можем определить размер максимального подмножества в множестве A, являющегося независимым в графе $G(n, r, <s)$; обозначим этот размер $\alpha(A)$.

Разобьем исследуемое событие на три части:

$$\mathbb{P}\Big[\exists A \subset V(n,r):\ |A| = M+1,\ A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,{<}s)\Big] = \\ = \mathbb{P}\Big[\exists A:\ \dots,\ \alpha(A) \leqslant M'\Big] + \mathbb{P}\Big[\exists A:\ \dots,\ M' < \alpha(A) \leqslant M - M'\Big] + \\ + \mathbb{P}\Big[\exists A:\ \dots,\ M - M' < \alpha(A)\Big]. \quad (1)$$

Докажем, что каждое слагаемое стремится к нулю.

1. Оценка первого слагаемого в выражении (1) Прежде всего,

$$\mathbb{P}\Big[\exists A:\ \dots,\ \alpha(A) \leqslant M'\Big] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\substack{A:|A|=M+1,\\ \alpha(A)\leqslant M'}} \big\{A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,{<}s)\big\}\right] \leqslant \\ \leqslant \sum_{\substack{A:|A|=M+1,\\ \alpha(A)\leqslant M'}} \mathbb{P}\Big[A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,{<}s)\Big].$$

Вероятность того, что множество A независимо, равна $2^{-e(A)}$, где $e(A)$ — число ребер графа $G(n,r,{<}s)$, оба конца которых принадлежат множеству A. Число ребер внутри множества A можно оценить с помощью теоремы Турана:

$$e(A) \geqslant (1+o(1))\frac{|A|^2}{2\alpha(A)} \geqslant (1+o(1))\frac{(M+1)^2}{2M'} \geqslant \\ \geqslant (1+o(1))\frac{\left(\dfrac{n^{r-s}}{(r-s)!}\right)^2}{2\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}\right)} = (1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}\Big[\exists A:\ \dots,\ \alpha(A) \leqslant M'\Big] \leqslant \sum_{\substack{A:|A|=M+1,\\ \alpha(A)\leqslant M'}} \mathbb{P}\Big[A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,{<}s)\Big] \leqslant \\ \leqslant \sum_{\substack{A:\ |A|=M+1,\\ \alpha(A)\leqslant M'}} 2^{-e(A)} \leqslant \sum_{\substack{A:\ |A|=M+1,\\ \alpha(A)\leqslant M'}} 2^{-(1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}} \leqslant \\ \leqslant \sum_{A:\ |A|=M+1} 2^{-(1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}} = C_{C_n^r}^{M+1} 2^{-(1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}} \leqslant n^{r(M+1)} 2^{-(1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}} = \\ = 2^{(1+o(1))\frac{n^{r-s}r\ln n\frac{1}{\ln 2}}{(r-s)!} - (1+o(1))2\frac{n^{r-s}r\ln n}{(r-s)!}} \to 0, \quad n \to \infty,$$

поскольку $1/\ln 2 < 2$.

2. Оценка второго слагаемого в выражении (1) Рассмотрим максимальное по мощности независимое в $G(n,r,{<}s)$ подмножество B множества A. Докажем от противного, что оно является частью звезды.

Из теоремы 2 известно, что если B не является частью звезды, то

$$|B| < \bigg|\Big\{V:\ |V| = r,\ \{1,\dots,s\} \subset V,\ V \cap \{1+s,\dots,1+r\} \neq \emptyset\Big\} \cup \\ \cup \Big\{\{1,\dots,s+1\} \setminus \{i\}:\ i \in \{1,\dots,s\}\Big\}\bigg| \leqslant rC_{n-s-1}^{r-s-1}.$$

Последнее неравенство верно, поскольку $\{1,\dots,s\}$ — центр, еще один элемент выбираем из $\{1+s,\dots,1+r\}$, чтобы гарантировать пересечение, и остальные $r-s-1$ элементов выбираем из оставшихся $n-s-1$ элементов.

Покажем, что $rC_{n-s-1}^{r-s-1}=o(M')$:

$$\frac{rC_{n-r-1}^{r-s-1}}{\dfrac{1}{4}\dfrac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}}=(1+o(1))\frac{4n^{r-s-1}(r-s)!r^2\ln n}{n^{r-s}(r-s-1)!}=(1+o(1))\frac{4r^3\ln n}{n}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Таким образом, установлено, что M' асимптотически сильно больше границы Франкла, а поскольку в текущей ситуации $|B|=\alpha(A)\geqslant M'$, B действительно является частью звезды.

Теперь рассмотрим произвольную вершину $x\in A\setminus B$. Обозначим через $a\geqslant 1$ количество элементов центра звезды, которые не принадлежат вершине x. Тогда количество вершин из B, которые не соединены с x в графе $G(n,r,<s)$, оценивается сверху величиной

$$C_{r-s+a}^{a}C_{n-s-a}^{r-s-a}.$$

Здесь $r-s+a$ — количество элементов в разности между вершиной x и центром звезды. Таким образом, минимально возможное количество вершин множества B, которые с вершиной x соединены ребрами, есть

$$M'-C_{r-s+a}^{a}C_{n-r-a}^{r-s-a}.$$

Покажем, что эта величина асимптотически равна M':

$$\frac{C_{r-s+a}^{a}C_{n-r-a}^{r-s-a}}{M'}\leqslant(1+o(1))\frac{\dfrac{r^a n^{r-s-a}}{(r-s-a)!}}{\dfrac{1}{4}\dfrac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}}\leqslant(1+o(1))\frac{r^{2a}n^{r-s-a}}{(r-s)!\dfrac{1}{4}\dfrac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}}=$$
$$=(1+o(1))4\frac{r^{2a}}{n^a}r\ln n<(1+o(1))4\left(\frac{r^3\ln n}{n}\right)^a\to 0,\quad n\to\infty.$$

Заметим, что

$$|A\setminus B|\geqslant M+1-\alpha(A)\geqslant M+1-(M-M')>M'.$$

Поэтому число ребер внутри множества A оценивается следующим образом:

$$e(A)\geqslant(1+o(1))(M')^2.$$

Имеем:

$$\mathbb{P}\Big[\exists A:\ \dots,\ M'\leqslant\alpha(A)\leqslant M-M'\Big]\leqslant\sum_{A:M'\leqslant\alpha(A)\leqslant M-M'}\mathbb{P}\Big[A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,<s)\Big]\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{A:M'\leqslant\alpha(A)\leqslant M-M'}2^{-e(A)}\leqslant C_{C_n^r}^{M+1}2^{-(1+o(1))\left(\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}\right)^2}\leqslant n^{r(M+1)}2^{-(1+o(1))\left(\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}\right)^2}=$$
$$=2^{(1+o(1))\frac{n^{r-s}r\ln n\frac{1}{\ln 2}}{(r-s)!}-(1+o(1))\frac{1}{16}\frac{n^{2(r-s)}}{((r-s)!)^2r^2(\ln n)^2}}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Стремление последнего выражения к нулю имеет место, поскольку в показателе экспоненты первое слагаемое (**I**) бесконечно мало по сравнению со вторым (**II**) при достаточно больших n:

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{II}}=(1+o(1))\frac{16}{\ln 2}\frac{((r-s)!)r^3(\ln n)^3}{n^{r-s}}<(1+o(1))\frac{16}{\ln 2}r^3(\ln n)^3\left(\frac{r-s}{n}\right)^{r-s}<$$
$$<(1+o(1))\frac{16}{\ln 2}(r\ln n)^3\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{r-s}\to 0,\quad n\to\infty.$$

3.Оценка третьего слагаемого в выражении (1) Пусть B обозначает любое из максимальных независимых в $G(n,r,<s)$ подмножеств множества A. Видно, что существование независимого в $G_{1/2}(n,r,<s)$ множества A влечет существование независимого в $G(n,r,<s)$ множества B, $|B| > M - M'$, и вершины u, которая в случайном графе $G_{1/2}(n,r,<s)$ не соединена с вершинами из B, т.е. имеют место следующие неравенства:

$$\mathbb{P}\Big[\exists A \subset V(n,r):\ |A| = M+1,\ A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,<s),\ M - M' < \alpha(A)\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \mathbb{P}\Big[\exists B \subset V(n,r),\ \exists u \in V(n,r):\ |B| > M - M',\ B \text{ независимо в } G(n,r,<s),$$
$$u \text{ не соединена ни с одной из вершин } B \text{ в } G_{1/2}(n,r,<s)\Big] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{B,\mathbf{u}} \ldots\right] \leqslant \sum_{B,\mathbf{u}} \mathbb{P}[\ \ldots\ ].$$

Оценим число слагаемых в сумме при больших n:

$$C_n^r C_n^s \sum_{i=0}^{M'-1} C_M^i \leqslant n^{r+s} M' \left(\frac{eM}{M'}\right)^{M'} \leqslant n^{r+s}\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}((1+o(1))4er\ln n)^{\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}} \leqslant$$
$$\leqslant n^{r+s}\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}(5er\ln n)^{\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}} \leqslant n^{2r}(5er\ln n)^{\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{\frac{1}{\ln 2}\left(2r\ln n + (\ln 5 + 1 + \ln r + \ln\ln n)\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}\right)}.$$

Таким образом, искомая вероятность не превосходит величины

$$\mathbb{P}\Big[\exists A:\ \ldots,\ M - M' \leqslant \alpha(A)\Big] \leqslant \sum_{A: M-M' \leqslant \alpha(A)} \mathbb{P}\Big[A \text{ независимо в } G_{1/2}(n,r,<s)\Big] \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(1+o(1))\frac{1}{\ln 2}\left(2r\ln n + (\ln 5 + 1 + \ln r + \ln\ln n)\frac{1}{4}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!r\ln n}\right) - (1+o(1))\frac{n^{r-s}}{(r-s)!}} \to 0, \quad n \to \infty,$$

поскольку

$$\frac{\ln r}{r\ln n} \to 0, \quad \frac{\ln\ln n}{r\ln n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобу А. В., Куприянов А. Э., Райгородский А. М.* Об одном обобщении кнезеровских графов// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 3. — С. 351–365.
2. *Ипатов М. М., Кошелев М. М., Райгородский А. М.* Модулярность некоторых дистанционных графов// Докл. РАН. — 2020. — *490*. — С. 71–73.
3. *Пушняков Ф. А., Райгородский А. М.* Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 2. — С. 286–298.
4. *Пушняков Ф. А., Райгородский А. М.* Оценка числа ребер в подграфах графов Джонсона// Докл. РАН. — 2021. — *499*, № 1. — С. 40–43.
5. *Пядёркин М. М.* Об устойчивости в теореме Эрдёша—Ко—Радо// Докл. РАН. — 2015. — *462*, № 2. — С. 144–147.
6. *Пядёркин М. М.* О пороговой вероятности для устойчивости независимых множеств в дистанционном графе// Мат. заметки. — 2019. — *106*, № 2. — С. 280–294.
7. *Райгородский А. М., Кошелев М. М.* Новые оценки клико-хроматических чисел графов Джонсона// Докл. РАН. — 2020). — *490*. — С. 78–80.
8. *Райгородский А. М., Черкашин Д. Д.* 75// Усп. мат. наук. — 2020. — № 1. — С. 95–154.
9. *Райгородский А. М., Шишунов Е. Д.* О числах независимости некоторых дистанционных графов с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 3. — С. 269–271.
10. *Райгородский А. М., Шишунов Е. Д.* О числах независимости дистанционных графов с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$// Докл. РАН. — 2019. — *488*, № 5. — С. 486–487.

11. *Balogh J., Cherkashin D., Kiselev S.* Coloring general Kneser graphs and hypergraphs via high-discrepancy hypergraphs// Eur. J. Combin. — 2019. — *79*. — P. 228–236.
12. *Erdős P., Ko C., Rado R.* Intersection theorems for systems of finite sets// Quart. J. Math. — 1961. — *12*, № 1. — P. 313—320.
13. *Frankl P.* On intersecting families of finite sets// J. Combin. Theory Ser. A — 1978. — *24*. — P. 146–161.
14. *Kiselev S., Kupavskii A.* Sharp bounds for the chromatic number of random Kneser graphs/ `arXiv: 1810.01161 [math.CO]`.
15. *Kupavskii A.* Degree versions of theorems on intersecting families via stability// J. Combin. Theory Ser. A. — 2019. — *168*. — P. 272–287.
16. *Pyaderkin M. M.* On the chromatic number of random subgraphs of a certain distance graph// Discr. Appl. Math. — 2019. — *267*. — P. 209–214.
17. *Raigorodskii A. M., Koshelev M. M.* New bounds on clique-chromatic numbers of Johnson graphs// Discr. Appl. Math. — 2020. — *283*. — P. 724–729.

Райгородский Андрей Михайлович
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет);
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп;
Бурятский государственный университет, Улан-Удэ
E-mail: `mraigor@ya.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 22–54
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-22-54

УДК 517, 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Во многих задачах динамики возникают системы с пространствами положений — трехмерными многообразиями. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к ним. В работе рассматриваются динамические системы с переменной диссипацией. В работе показана интегрируемость общих классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям.

***Ключевые слова*:** динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLE OF A THREE-DIMENSIONAL MANIFOLD

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In many problems of dynamics, the position spaces of systems considered are three-dimensional manifolds and hence the phase spaces of such systems are the corresponding tangent bundles. In this paper possess, we consider dynamical systems with variable (alternating) dissipation. We prove the integrability of general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on the tangent bundles of three-dimensional manifolds.

***Keywords and phrases*:** dynamical system, nonconservative force field, integrability, transcendental first integral.

***AMS Subject Classification*:** 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к трехмерному многообразию

Необходимо напомнить ряд результатов, без которых рассмотрение систем с диссипацией невозможно (см. также [1, 4, 13, 65, 66]).

1.1. Общие обозначения. Рассмотрим гладкое трехмерное риманово многообразие M^3 с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, x^2, x^3)$ на многообразии порождает гладкую аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим также $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; x^1, x^2, x^3\}$ к гладкому многообразию M^3, где $z = (z_3, z_2, z_1)$ — координаты в касательном пространстве.

Если $z_i = \dot{x}^i$, $i = 1, 2, 3$ (точкой обозначена производная по натуральному параметру), то уравнения геодезических линий имеют вид

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{11}(x)(\dot{x}^1)^2 + 2\Gamma^i_{12}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^2) + 2\Gamma^i_{13}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^3) + \\ + \Gamma^i_{22}(x)(\dot{x}^2)^2 + 2\Gamma^i_{23}(x)(\dot{x}^2)(\dot{x}^3) + \Gamma^i_{33}(x)(\dot{x}^3)^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.1}$$

1.2. Специальные обозначения. Обозначим для наглядности в случае трехмерного многообразия координаты (x^1, x^2, x^3) через (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2)$.

Тогда уравнения (1.1) на касательном расслоении $T_*M^3\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примут вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + \\ \qquad + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^\alpha_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \Gamma^1_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + \\ \qquad + \Gamma^1_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^1_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \Gamma^2_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^2_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + \\ \qquad + \Gamma^2_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Пример 1.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, когда метрика на трехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства, уравнения (1.2) примут вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - [\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2\beta_1]\sin\alpha\cos\alpha = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dot{\beta}_2^2 \sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

т.е. шесть ненулевых коэффициентов связности равны

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1, \qquad \Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$
$$\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1, \qquad \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}.$$

Пример 1.2. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, но когда метрика на трехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. [5, 41–43]), уравнения (1.2) примут вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - [\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2\beta_1]\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - \dot{\beta}_2^2 \sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

т.е. шесть ненулевых коэффициентов связности равны

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1, \qquad \Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha},$$
$$\Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1, \qquad \Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, \qquad \Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}.$$

1.3. Замены координат касательного пространства. Исследуем структуру уравнений (1.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^3. Рассмотрим следующую обратимую замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{3} R^{ij}(x) z_j, \quad z_j = \sum_{i=1}^{3} T_{ji}(x)\dot{x}^i; \tag{1.5}$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i,j=1,2,3,$ — функции от x^1, x^2, x^3, а также $RT=E$, где $R=(R^{ij})$, $T=(T_{ji})$. Назовем уравнения (1.5) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^3 (ср. с [8, 9, 11]).

Справедливы следующие тождества:

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{3} \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{3} T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{3} T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{1.6}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j,i,k = 1,2,3.$$

Подставляя в (1.6) уравнения (1.1), имеем:

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{3} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{3} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q, \tag{1.7}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i=1,2,3$, надо подставить формулы (1.5), и правые части соотношений (1.7) будут квадратичными формами по z_1, z_2, z_3 (см. также [3, 10, 15]). Другими словами, равенство (1.7) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{3} Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k|_{(1.5)} = 0, \tag{1.8}$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{3} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{1.9}$$

Непосредственно из формул (1.7) получаем следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Система* (1.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$*, эквивалентна составной системе* (1.5)*,* (1.7)*.*

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1.1) к эквивалентной системе уравнений (1.5), (1.7) зависит как от замены переменных (1.5) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$. В частности, для примеров 1.1, 1.2 получаем в явном виде следующие утверждения.

Следствие 1.1. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, *когда метрика на трехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства* (*см. также пример* 1.1), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1 \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.3), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3, & \dot{z}_1 = \dfrac{z_1 z_3}{\cos\alpha\sin\alpha} - \dfrac{z_1 z_2}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \dot{z}_3 = -\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{\cos\alpha\sin\alpha}, & \dot{\beta}_1 = \dfrac{z_2}{\cos\alpha\sin\alpha}, \\ \dot{z}_2 = \dfrac{z_2 z_3}{\cos\alpha\sin\alpha} + \dfrac{z_1^2}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \dot{\beta}_2 = -\dfrac{z_1}{\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta_1}, \end{cases} \tag{1.10}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (1.10) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Следствие 1.2. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, *но когда метрика на двумерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий* (*см.* [36, 38, 39], *а также пример* 1.2), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1 \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.4), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3, & \dot{z}_1 = z_1 z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \dot{z}_3 = -(z_1^2 + z_2^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, & \dot{\beta}_1 = z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \dot{\beta}_2 = -z_1\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \end{cases} \tag{1.11}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (1.11) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Очевидно, что системы (1.10) и (1.11) имеют аналитический первый интеграл следующего вида:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \text{const}, \tag{1.12}$$

т.е. в других координатах для системы (1.11)

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_1^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dot{\beta}_2^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\beta_1 = \text{const},$$

а для системы (1.10) — аналитический первый интеграл

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_1^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \dot{\beta}_2^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta_1 = \text{const}.$$

1.4. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай I. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в следующем виде (случай I):

$$\dot{\alpha} = -z_3, \quad \dot{\beta}_1 = z_2 f_1(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \tag{1.13}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2 z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [45, 48, 49]:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1.13) уравнения (1.7) примут вид

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2,\\ \dot z_2 &= \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2,\\ \dot z_3 &= f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \end{aligned} \tag{1.15}$$

и уравнения геодезических (1.14) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.13) почти всюду эквивалентны составной системе (1.13), (1.15) на многообразии $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Для полного интегрирования системы (1.13), (1.15) шестого порядка необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

Следствие 1.3. *Если $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.14)*, может быть приведена к следующему виду*:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3,\\ \dot z_3 = f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_1^2,\\ \dot z_2 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2,\\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2,\\ \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \end{cases} \tag{1.16}$$

$$\dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1). \tag{1.17}$$

Если при этом аффинная связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ при всех i, j, k не зависит от угла β_2, то происходит отделение независимой подсистемы пятого порядка (1.16)*.*

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям z_1, z_2, z_3 первого интеграла более общего вида, нежели (1.12), а именно,

$$\sum_{i,j=1;\ i\leqslant j}^{3} a_{ij}(\alpha,\beta) z_i z_j = \mathrm{const}, \tag{1.18}$$

не требуя даже положительной определенности матрицы $(a_{ij}(\alpha,\beta))$, но мы пока ограничимся следующим случаем (см. также [44, 46, 51]).

Предложение 1.2. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств*

$$\begin{cases} 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0,\\ 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0,\\ f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

то система (1.16), (1.17) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{1.20}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.20) в силу системы (1.16), (1.17) дает

$$2\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]z_2^2z_3+$$
$$+2\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right]z_1^2z_3-$$
$$-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_1(\alpha)}\equiv 0,$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.19). □

Согласно предложению 1.2 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.3) и (1.4) из примеров 1.1 и 1.2, соответственно, и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.20).

Следствие 1.4. *В случае сферических координат (α,β), когда метрика на трехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства* (*см. также пример* 1.1), *однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических* (1.3), *и имеющая первый интеграл вида* (1.20), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases}\dot\alpha=-z_3,\\ \dot z_3=-(z_1^2+z_2^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},\\ \dot z_2=z_2z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}+z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot z_1=z_1z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}-z_1z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot\beta_1=z_2\dfrac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot\beta_2=-z_1\dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\quad \nu_1\in\mathbb{R},\end{cases}\tag{1.21}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (1.21) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Следствие 1.5. *В случае сферических координат (α,β), но когда метрика на трехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий* (*см.* [40, 47, 50], *а также пример* 1.2), *однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических* (1.4), *и имеющая первый интеграл вида* (1.20), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases}\dot\alpha=-z_3,\\ \dot z_3=-(z_1^2+z_2^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},\\ \dot z_2=z_2z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}+z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot z_1=z_1z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}-z_1z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot\beta_1=z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot\beta_2=-z_1\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\quad \nu_1\in\mathbb{R},\end{cases}\tag{1.22}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (1.22) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Системы (1.10) и (1.11) получаются из систем (1.21) и (1.22) при $\nu_1 = -1$ и $\nu_1 = 0$ соответственно.

Важно заметить, что, на первый взгляд, при интегрировании системы равенств (1.19) должны получиться три произвольные постоянные, определяющие трехпараметрические семейства искомых систем вида (1.21) и (1.22). Но, оказывается, система равенств (1.19) определяет не более чем трехпараметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае возможно найти лишь однопараметрические искомые семейства.

Система равенств (1.19) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.20) (или см. ниже (2.3)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [20, 26, 27]). Но, как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы равенств (1.19) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.20) для системы (1.16), (1.17) уравнений геодезических. Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (1.19) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.16), (1.17) выполнение условия

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha); \tag{1.23}$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из системы равенств (1.19):

$$2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0. \tag{1.24}$$

Таким образом, функция $g(\beta_1)$ зависит от коэффициентов связности; ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут приведены ниже.

Предложение 1.3. *Если выполнены свойства* (1.23), (1.24), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{1.25}$$

то система (1.16), (1.17) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\ \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{1.26}$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.26) в силу системы (1.16), (1.17) при условиях (1.23)—(1.25) дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_3\sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 1.4. *Если выполнено свойство* (1.23), *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{1.27}$$

а также второе равенство из (1.25) *(*$\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha)$*), то система* (1.16), (1.17) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_3(z_1;\alpha,\beta_1) = z_1\Phi_0(\alpha)\Phi(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{1.28}$$

$$\Phi(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.28) в силу системы (1.16), (1.17) при рассматриваемых условиях дает

$$z_1z_3\Phi(\beta_1)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right] + \\ + z_1z_2f_1(\alpha)\Phi_0(\alpha)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1) + \frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Phi(\beta_1)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)$$

соответственно, что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 1.1. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.19), а также условия (1.25), (1.27), то в системе (1.16), (1.17) появляется независимая подсистема пятого порядка, состоящая из первых пяти уравнений (уравнение на $\dot\beta_2$ отделяется):

$$\begin{cases}\dot\alpha = -z_3,\\ \dot z_3 = f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_2^2 + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2,\\ \dot\beta_1 = z_2f_1(\alpha),\end{cases} \tag{1.29}$$

$$\dot\beta_2 = z_1f_2(\alpha)g(\beta_1). \tag{1.30}$$

Предложение 1.5. *Если выполнены условия предложений 1.3, 1.4, то система* (1.29), (1.30) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_4(\beta_1,\beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\frac{C_3g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}}db = C_4 = \mathrm{const}, \tag{1.31}$$

где после взятия интеграла (1.31) *вместо постоянных* C_2, C_3 *можно формально подставить левые части равенств* (1.26), (1.28) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.3, 1.4, то, значит, система (1.29), (1.30) обладает двумя первыми интегралами (1.26) и (1.28). Далее, рассмотрим два уровня C_2 и C_3 первых интегралов (1.26) и (1.28) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_3}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(\beta_1) - C_3^2}}. \tag{1.32}$$

Угол β_2 будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (1.29), (1.30):

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \frac{z_1}{z_2} g(\beta_1).$$

Используя в этом уравнении равенство (1.32), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.2, 1.3, 1.4 и 1.5 является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия предложений* 1.2, 1.3 *и* 1.4, *то система* (1.29), (1.30) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых первых интегралов вида* (1.20), (1.26), (1.28), (1.31).

Тот факт, что полный набор состоит из *четырех*, а не из пяти, первых интегралов, будет доказан ниже.

1.5. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай II. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в следующем виде (случай II):

$$\dot\alpha = z_3 f_3(\alpha), \quad \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \tag{1.33}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2 z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [61, 62, 64]:

$$\begin{cases} \ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0, \end{cases} \tag{1.34}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1.33) уравнения (1.7) примут вид

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2, \\ \dot z_2 &= -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_3 &= -f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \end{aligned} \tag{1.35}$$

и уравнения геодезических (1.34) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.33) почти всюду эквивалентны составной системе (1.33), (1.35) на многообразии $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Для полного интегрирования системы (1.33), (1.35) шестого порядка необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

Следствие 1.6. *Если* $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — *не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.34), *может быть приведена к следующему виду*:

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_3 f_3(\alpha), \\ \dot z_3 = -f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_2 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_1 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \end{cases} \tag{1.36}$$

$$\dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1). \tag{1.37}$$

Если при этом аффинная связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ при всех i, j, k не зависит от угла β_2, то происходит отделение независимой подсистемы пятого порядка (1.16).

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям z_1, z_2, z_3 первого интеграла более общего вида (1.18), нежели (1.12), для рассматриваемой системы, но мы пока ограничимся следующим случаем.

Предложение 1.6. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств*

$$\begin{cases} f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\equiv 0,\\ f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0,\\ f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0,\\ \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\equiv 0, \end{cases} \tag{1.38}$$

то система (1.36)*,* (1.37) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_3,z_2,z_1)=z_1^2+z_2^2+z_3^2=C_1^2=\mathrm{const}. \tag{1.39}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.39) в силу системы (1.36), (1.37) дает

$$\begin{gathered} -2f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2^3-\\ -2\left[f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_3}{f_3(\alpha)}-\\ -2\left[f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_3}{f_3(\alpha)}-\\ -2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_1(\alpha)}\equiv 0, \end{gathered}$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.38). □

Пример 1.3. Уравнения (1.2) геодезических в трехмерном пространстве Лобачевского с координатами $(x=\beta_1, y=\beta_2, z=\alpha)$ примут вид

$$\ddot\alpha-\frac{1}{\alpha}(\dot\alpha^2-\dot\beta_1^2-\dot\beta_2^2)=0,\quad \ddot\beta_1-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_1=0,\quad \ddot\beta_2-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_2=0, \tag{1.40}$$

т.е. ненулевые коэффициенты связности равны

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha},\quad \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\alpha},\quad \Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{\alpha 2}(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha}.$$

Согласно предложению 1.6 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.40) из примера 1.3 и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.39).

Следствие 1.7. *В случае геодезических в трехмерном пространстве Лобачевского с координатами* $(x=\beta_1, y=\beta_2, z=\alpha)$ *(см. также пример* 1.3*), четырехпараметрическая система,* *эквивалентная при* $\nu_1, \nu_3 \neq 0$, $\alpha \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.40), *и имеющая первый интеграл вида* (1.39), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3\nu_1\alpha, & \dot{z}_1 = z_1 z_3 \dfrac{\nu_1\nu_3^2\alpha^2}{\nu_3^2\alpha^2+\nu_4}, \\ \dot{z}_3 = -z_2^2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2} - z_1^2\dfrac{\nu_1\nu_3^2\alpha^2}{\nu_3^2\alpha^2+\nu_4}, & \dot{\beta}_1 = z_2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_3\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}, & \dot{\beta}_2 = z_1\dfrac{\nu_1\nu_3\alpha^2}{\sqrt{\nu_3^2\alpha^2+\nu_4}}, \end{cases} \qquad \nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4 \in \mathbb{R}, \tag{1.41}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (1.41) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Важно заметить, что при интегрировании системы равенств (1.38) и получились четыре произвольные постоянные, определяющие четырехпараметрические семейства искомых систем вида (1.41). Система равенств (1.19), вообще говоря, определяет не более чем четырехпараметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае стало возможным найти максимально возможное параметрическое семейство.

Система равенств (1.38) по-прежнему может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.39) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [6, 12, 14]). Но, как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

По-прежнему актуально следующее замечание. Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы дифференциальных равенств (1.38) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.39) для системы (1.36), (1.37) уравнений геодезических. Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (1.38) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.36), (1.37) выполнение условия

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha), \tag{1.42}$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из системы равенств (1.38):

$$2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) \equiv 0. \tag{1.43}$$

Таким образом, функция $g(\beta_1)$ зависит от коэффициентов связности; ограничения на функции $f(\alpha)$, $f_3(\alpha)$ будут приведены ниже.

Предложение 1.7. *Если выполнены свойства* (1.42), (1.43), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) = \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{1.44}$$

то система (1.36), (1.37) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\;\Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{1.45}$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.45) в силу системы (1.36), (1.37) при условиях (1.42)—(1.44) дает

$$-f_3(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_3\sqrt{z_1^2+z_2^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 1.8. *Если выполнено свойство* (1.42), *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1), \tag{1.46}$$

а также второе равенство из (1.44) ($\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha)$)*, то система* (1.36), (1.37) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_3(z_1;\alpha,\beta_1)=z_1\Phi_0(\alpha)\Phi(\beta_1)=C_3=\text{const}, \tag{1.47}$$

$$\Phi(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.47) в силу системы (1.36), (1.37) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_3(\alpha)z_1z_3\Phi(\beta_1)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+$$
$$+f_1(\alpha)z_1z_2\Phi_0(\alpha)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)+\frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Phi(\beta_1)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)$$

соответственно, что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 1.2. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.38), а также условия (1.44), (1.46), то в системе (1.36), (1.37) появляется независимая подсистема пятого порядка, состоящая из первых пяти уравнений (уравнение на $\dot\beta_2$ отделяется):

$$\begin{cases}\dot\alpha=z_3f_3(\alpha),\\ \dot z_3=-\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha)z_2^2-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_2=-f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_1=-f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2,\\ \dot\beta_1=z_2f_1(\alpha),\end{cases} \tag{1.48}$$

$$\dot\beta_2=z_1f_2(\alpha)g(\beta_1). \tag{1.49}$$

Предложение 1.9. *Если выполнены условия предложений 1.7, 1.8, то система* (1.48), (1.49) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_4(\beta_1,\beta_2)=\beta_2\pm\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\frac{C_3g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b)-C_3^2}}db=C_4=\mathrm{const}, \tag{1.50}$$

где, после взятия интеграла (1.50), *вместо постоянных* C_2, C_3 *можно формально подставить левые части равенств* (1.45), (1.47) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.7, 1.8, то, значит, система (1.48), (1.49) обладает двумя первыми интегралами (1.45) и (1.47). Рассмотрим два уровня C_2 и C_3 первых интегралов (1.45) и (1.47) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2}=\mp\frac{C_3}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(\beta_1)-C_3^2}}. \tag{1.51}$$

Угол β_2 будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (1.48), (1.49):

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1}=\frac{z_1}{z_2}g(\beta_1).$$

Используя в этом уравнении равенство (1.51), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.6, 1.7, 1.8 и 1.9 является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Если выполнены условия предложений* 1.6, 1.7 *и* 1.8, *то система* (1.48), (1.49) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых первых интегралов вида* (1.39), (1.45), (1.47), (1.50).

Тот факт, что полный набор состоит из *четырех*, а не из пяти, первых интегралов, будет доказан ниже.

2. Уравнения движения на касательном расслоении к трехмерному многообразию в потенциальном силовом поле

2.1. Приведенная система. Случай I. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в виде (1.13) (случай I). Уравнения (1.7) примут вид (1.15). А уравнения геодезических (1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.13) почти всюду эквивалентны составной системе (1.13), (1.15) на многообразии $T_*M^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ (более общие утверждения см. в [2, 7, 16]).

В общем случае кинематические соотношения (1.13) (с тремя «произвольными» функциями $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$) не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до 18 коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Теперь несколько модифицируем систему (1.16), (1.17). При этом получим систему *консервативную.* А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (2.1) (в отличие от системы (1.16)). В данном случае вводится (внешнее) силовое поле в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$ соответственно:

$$\tilde F(z_3,z_2,z_1;\alpha)=\big(0,\ 0,\ F(\alpha)\big)^T.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3, \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2 + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot{z}_2 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2, \\ \dot{\beta}_1 = z_2 f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Система (2.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай I.

Предложение 2.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств* (1.19), *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad V(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da. \tag{2.3}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (2.3) в силу системы (2.1) дает

$$\begin{gathered} 2F(\alpha)z_3 + 2\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right] z_2^2 z_3 + \\ + 2\left[2\Gamma^1_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right] z_1^2 z_3 - \\ - 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2 z_2}{f_1(\alpha)} - 2F(\alpha)z_3 \equiv 0, \end{gathered}$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.19). □

Предложение 2.2. *Если выполнены условия предложения* 1.3, *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.26).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.26) в силу системы (2.1) при условиях (1.23)—(1.25) дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_3\sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 2.3. *Если выполнены условия предложения* 1.4, *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.28).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.28) в силу системы (2.1) при рассматриваемых условиях дает

$$z_1 z_3 \Phi(\beta_1)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+ \\ + z_1 z_2 f_1(\alpha)\Phi_0(\alpha)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)+\frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Phi(\beta_1)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\qquad \frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)$$

соответственно, что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 2.1. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.19), а также условия (1.25), (1.27), то в системе (2.1) появляется независимая подсистема пятого порядка, состоящая из первых пяти уравнений (уравнение на $\dot\beta_2$ отделяется):

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3, \\ \dot z_3 = F(\alpha)+f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha)z_2^2+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta_1)z_1^2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta_1)z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2, \\ \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1). \tag{2.5}$$

Предложение 2.4. *Если выполнены условия предложений* 1.3, 1.4, *то система* (2.4), (2.5) *имеет первый интеграл вида* (1.31), *где, после взятия интеграла* (1.31), *вместо постоянных* C_2, C_3 *можно формально подставить левые части равенств* (1.26), (1.28) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.3, 1.4, то, значит, система (2.4), (2.5) обладает двумя первыми интегралами (1.26) и (1.28). Рассмотрим два уровня C_2 и C_3 первых интегралов (1.26) и (1.28) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство (1.32). Угол β_2 будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (2.4), (2.5):

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1}=\frac{z_1}{z_2}g(\beta_1).$$

Используя в этом уравнении равенство (1.32), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4 является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия предложений* 2.1, 2.2 *и* 2.3, *то система* (2.4), (2.5) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых первых интегралов вида* (2.3), (1.26), (1.28), (1.31).

Тот факт, что полный набор состоит из *четырех*, а не из пяти, первых интегралов, будет доказан ниже.

2.3. Приведенная система. Случай II. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в виде (1.33) (случай II). Уравнения (1.7) примут вид (1.35). Уравнения геодезических (1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.33) почти всюду эквивалентны составной системе (1.33), (1.35) на многообразии $T_*M^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$.

В общем случае кинематические соотношения (1.33) (с четырьмя «произвольными» функциями $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$) не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до 18 коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Теперь несколько модифицируем систему (1.36), (1.37). При этом получим систему *консервативную*. А именно, введем гладкое (внешнее) силовое поле в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$ соответственно:

$$\tilde F(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_2) f_2(\alpha) g(\beta_1) \\ F_2(\beta_1) f_1(\alpha) \\ F_3(\alpha) f_3(\alpha) \end{pmatrix}$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_3 f_3(\alpha), \\ \dot z_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3^2 - \\ \qquad\qquad - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_2 = F_2(\beta_1) f_1(\alpha) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_1 = F_1(\beta_2) f_2(\alpha) g(\beta_1) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \\ \qquad\qquad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1). \end{cases} \tag{2.6}$$

Система (2.6) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - F_3(\beta_1) f_3^2(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - F_2(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - F_1(\beta_2) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

2.4. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай II.

Предложение 2.5. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств* (1.38), *то система* (2.6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha, \beta_1, \beta_2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.8}$$

$$V(\alpha,\beta_1,\beta_2) = V_3(\alpha) + V_2(\beta_1) + V_1(\beta_2) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a)da - 2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} F_2(b)db - 2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} F_1(b)db.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (2.8) в силу системы (2.6) дает

$$2z_3F_3(\alpha)f_3(\alpha) + 2z_2F_2(\beta_1)f_1(\alpha) + 2z_1F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) - 2f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^3 -$$
$$- 2\left[f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2 z_3}{f_3(\alpha)} -$$
$$- 2\left[f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2 z_3}{f_3(\alpha)} -$$

$$-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_1(\alpha)}-$$
$$-2z_3F_3(\alpha)f_3(\alpha)-2z_2F_2(\beta_1)f_1(\alpha)-2z_1F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)\equiv 0,$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.38). □

Предложение 2.6. *Пусть* $F_1(\beta_2)\equiv F_2(\beta_1)\equiv 0$. *Если выполнены условия предложения* 1.7, *то система* (2.6) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.45).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.45) в силу системы (2.6) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_3(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_3\sqrt{z_1^2+z_2^2}.$$

Функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 2.7. *Пусть* $F_2(\beta_1)\equiv 0$. *Если выполнены условия предложения* 1.8, *то система* (2.6) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.47).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.47) в силу системы (2.6) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_3(\alpha)z_1z_3\Phi(\beta_1)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+$$
$$+f_1(\alpha)z_1z_2\Phi_0(\alpha)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)+\frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Phi(\beta_1)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\qquad \frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)$$

соответственно, что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 2.2. Пусть $F_1(\beta_2)\equiv F_1^0=\mathrm{const}$. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.38), а также условия (1.44), (1.46), то в системе (2.6) появляется независимая подсистема пятого порядка, состоящая из первых пяти уравнений (уравнение на $\dot\beta_2$ отделяется):

$$\begin{cases}\dot\alpha=z_3f_3(\alpha),\\ \dot z_3=F_3(\alpha)f_3(\alpha)-\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha)z_2^2-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_2=F_2(\beta_1)f_1(\alpha)-f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_1=F_1^0f_2(\alpha)g(\beta_1)-f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3-\\ -f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2,\\ \dot\beta_1=z_2f_1(\alpha),\end{cases}\tag{2.9}$$

$$\dot\beta_2=z_1f_2(\alpha)g(\beta_1).\tag{2.10}$$

Предложение 2.8. *В рассматриваемом случае имеем* $F_1(\beta_2) \equiv F_2(\beta_1) \equiv 0$. *Если выполнены условия предложений* 1.7, 1.8, *то система* (2.9), (2.10) *имеет первый интеграл вида* (1.50), *в котором после вычисления интеграла* (1.50) *вместо постоянных* C_2, C_3 *можно формально подставить левые части равенств* (1.45), (1.47) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.7, 1.8, то, значит, система (2.9), (2.10) обладает двумя первыми интегралами (1.45) и (1.47). Далее рассмотрим два уровня C_2 и C_3 первых интегралов (1.45) и (1.47) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство (1.32). Угол β_2 будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (2.9), (2.10):

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \frac{z_1}{z_2} g(\beta_1).$$

Используя в этом уравнении равенство (1.32), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 2.5, 2.6, 2.7 и 2.8 является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия предложений* 2.5, 2.6 *и* 2.7, *то система* (2.9), (2.10) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых первых интегралов вида* (2.8), (1.45), (1.47), (1.50).

Тот факт, что полный набор состоит из *четырех*, а не из пяти, первых интегралов, будет доказан ниже.

3. Уравнения движения на касательном расслоении к трехмерному многообразию в силовом поле с диссипацией

3.1. Приведенная система. Случай I. Теперь несколько модифицируем систему (2.1). При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (3.1) (в отличие от системы (2.1)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$ соответственно:

$$\tilde F(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \\ z_3 F_3^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta) z_2^2 + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1). \end{cases} \tag{3.1}$$

Система (3.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - \left[b\tilde\delta(\alpha) + F_3^1(\alpha)\right]\dot\alpha + F(\alpha) + b\delta(\alpha)F_3^1(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - \left\{b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] + F_2^1(\alpha)\right\}\dot\beta_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - \left\{b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + F_1^1(\alpha)\right\}\dot\beta_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0; \end{cases} \tag{3.2}$$

здесь и далее $\tilde\delta(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.2. Первые интегралы для уравнений в поле с диссипацией. Случай I. Перейдем к интегрированию системы шестого порядка (3.1) при выполнении свойств (1.19), (1.25), (1.27), (1.23). Система (3.1) допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + f^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta_1)z_2^2 + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta_1)z_1^2 + z_3F_3^1(\alpha), \\ \dot{z}_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2z_3 - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1z_3 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 = z_2f(\alpha), \end{cases} \tag{3.3}$$

при наличии также шестого уравнения

$$\dot{\beta}_2 = z_1f(\alpha)g(\beta_1). \tag{3.4}$$

Перейдем к интегрированию системы шестого порядка (3.3), (3.4) при выполнении равенств

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta_1) = \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta_1)g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \tag{3.5}$$

Введем ограничение на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять первому дифференциальному равенству из (1.19), преобразованному в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha) = 0. \tag{3.6}$$

Предположим также, что выполнено (в некотором смысле, техническое) равенство:

$$F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha). \tag{3.7}$$

Для полного интегрирования (системы) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}, \tag{3.8}$$

система (3.3), (3.4) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)z^2 + z_3F_3^1(\alpha), \\ \dot{z} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] zz_3 + zF^1(\alpha), \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_* = \pm z\sqrt{1+z_*^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm\dfrac{zz_*}{\sqrt{1+z_*^2}}f(\alpha), \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm\frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}}f(\alpha)g(\beta_1). \tag{3.11}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.9)—(3.11) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.9), один — системы (3.10), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.11) (т.е. всего *четыре*).

Будем также предполагать, что для некоторых $\kappa, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \tag{3.12}$$

а также

$$F(\alpha) = \lambda_0\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}, \quad F^1(\alpha) = \lambda_1\frac{d}{d\alpha}\delta(\alpha), \quad F_3^1(\alpha) = \lambda_3\frac{d}{d\alpha}\delta(\alpha). \tag{3.13}$$

Условие (3.12) назовем *геометрическим*, потому что, будучи условием на коэффициент связности $\Gamma_3(\alpha)$, оно приводит соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условия группы (3.13) назовем *энергетическими*, потому что при их наложении (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\delta^2(\alpha)/2$ (или $\delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (относительно функции $\delta(\alpha)$). При этом функция $\delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков или так называемую *знакопеременную диссипацию* (см. также [19, 22, 24]).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (3.12) *и* (3.13). *Тогда система* (3.9)—(3.11) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 3.1 для начала сопоставим системе третьего порядка (3.9) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dz_3}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) z^2 + z_3 F_3^1(\alpha)}{-z_3 + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dz}{d\alpha} = \dfrac{[2\Gamma_1(\alpha) + d\ln|f(\alpha)|/d\alpha]\, z z_3 + z F^1(\alpha)}{-z_3 + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$z = u_1\delta(\alpha), \quad z_3 = u_2\delta(\alpha), \tag{3.15}$$

приводим систему (3.14) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha)u_2 = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u_1^2 + \delta(\alpha)u_2 F_3^1(\alpha)}{-u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\delta}(\alpha)u_1 = \dfrac{[2\Gamma_1(\alpha) + d\ln|f(\alpha)|/d\alpha]\, \delta^2(\alpha)u_1u_2 + \delta(\alpha)u_1F^1(\alpha)}{-u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Принимая во внимание (3.6), можем утверждать, что система (3.16) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{H_3(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_1^2 + u_2F_3^1(\alpha) + \tilde{\delta}(\alpha)u_2^2 - b\tilde{\delta}(\alpha)u_2}{-u_2 + b}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{-\Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_1u_2 + u_1F^1(\alpha) + \tilde{\delta}(\alpha)u_1u_2 - b\tilde{\delta}(\alpha)u_1}{-u_2 + b}, \quad H_3(\alpha) = \dfrac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Теперь для интегрирования системы (3.17) нам потребуется выполнение геометрического условия и энергетических условий (3.12) и (3.13). Далее, условия (3.12) и (3.13) можно переписать следующим образом.

1. Для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}. \tag{3.18}$$

2. Для некоторых $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ должны выполняться равенства

$$H_3(\alpha) = \lambda_0\tilde{\delta}(\alpha), \quad F_1^1(\alpha) = \lambda_1\tilde{\delta}(\alpha), \quad F_3^1(\alpha) = \lambda_3\tilde{\delta}(\alpha). \tag{3.19}$$

Действительно, после выполнения условий (3.12) и (3.13) (или (3.18) и (3.19)) система (3.17) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_0 + \kappa u_1^2 + u_2^2 + (\lambda_3 - b)u_2}{(1-\kappa)u_1u_2 + (\lambda_1 - b)u_1}. \tag{3.20}$$

Уравнение (3.20) имеет вид уравнения Абеля (см. [29, 30]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_3$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{3.21}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(z_3, z; \alpha) = \frac{z_3^2 + z^2 + (\lambda_1 - b)z_3\delta(\alpha) + \lambda_0\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{3.22}$$

□

Замечание 3.1. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.9) (как часть системы (3.9)—(3.11)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [21, 23, 25]. При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (3.6), геометрического и энергетических условий (3.12), (3.13) (но при любой гладкой функции $F(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda_1 = \lambda_3 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + \kappa\dfrac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}z^2 - bz_3\tilde{\delta}(\alpha), \\ \dot{z} = -\kappa\dfrac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}zz_3 - bz\tilde{\delta}(\alpha). \end{cases} \tag{3.23}$$

Действительно, система (3.23) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(z_3, z; \alpha) = z^2 + z_3^2 - 2bz_3\delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad V(\alpha) = 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da, \tag{3.24}$$

$$\Phi_2(z; \alpha) = z\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{3.25}$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем:

$$\Phi_2(z;\alpha) = zf(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} = zf(\alpha)\exp\left\{-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma_3(b)f^2(b) + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right]db\right\} \cong$$
$$\cong z\exp\left\{-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_3(b)f^2(b)db\right\},$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (3.12) (или (3.18)) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_3 = -b$, перепишется в виде

$$z\exp\left\{\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{db}\ln|\delta(b)|db\right\} \cong z\delta(\alpha) \tag{3.26}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.24), (3.25) также является первым интегралом системы (3.23). Но при $\lambda_1 = \lambda_3 \neq -b$ каждая из функций

$$z_3^2 + z^2 + (\lambda_1 - b)z_3\delta(\alpha) + \lambda_0\delta^2(\alpha) \tag{3.27}$$

и (3.25) по отдельности не является первым интегралом системы (3.3). Однако отношение функций (3.27), (3.25) является первым интегралом системы (3.9) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda_1 = \lambda_3$, b.

Найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.9) при $\varkappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_3$. Преобразуем инвариантное соотношение (3.21) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{\lambda_1 - b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2}{4} - \lambda_0. \tag{3.28}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 - 4\lambda_0 \geqslant 0, \tag{3.29}$$

и фазовое пространство системы (3.9) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.28). Таким образом, в силу соотношения (3.21) первое уравнение системы (3.17) при условиях (3.12) и (3.13) и при $\varkappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_3$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda_0 + (\lambda_1 - b)u_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \tag{3.30}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0)}\right\}; \tag{3.31}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.29). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.9) примет вид

$$\int \frac{d\delta(\alpha)}{\delta(\alpha)} = \int \frac{(b - u_2)du_2}{2(\lambda_0 + (\lambda_1 - b)u_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0)}\}/2}. \tag{3.32}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln|\delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 + \frac{\lambda_1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 - 4\lambda_0, \tag{3.33}$$

то правая часть равенства (3.32) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \mp \frac{b}{2} I_1, \tag{3.34}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{3.35}$$

При вычислении интеграла (3.35) возможны три случая:

(1) при $(\lambda_1 - b)^2 > 4\lambda_0$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}}\right| +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}}\right| + \text{const}; \tag{3.36}$$

(2) при $(\lambda_1 - b)^2 < 4\lambda_0$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4\lambda_0 - (\lambda_1 - b)^2}} \arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}; \tag{3.37}$$

(3) при $(\lambda_1 - b)^2 = 4\lambda_0$

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{3.38}$$

Возвращаясь к переменной
$$r_1 = \frac{z_2}{\delta(\alpha)} + \frac{\lambda_1 - b}{2}, \tag{3.39}$$
находим окончательный вид для величины I_1:

(1) при $(\lambda_1 - b)^2 > 4\lambda_0$
$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right| + \mathrm{const}; \tag{3.40}$$

(2) при $(\lambda_1 - b)^2 < 4\lambda_0$
$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4\lambda_0 - (\lambda_1-b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}; \tag{3.41}$$

(3) при $(\lambda_1 - b)^2 = 4\lambda_0$
$$I_1 = \mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{3.42}$$

Итак, при перечисленных выше условиях (в том числе, при $\varkappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_3$) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [28, 31, 32, 34]).

Замечание 3.2. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.21). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:
$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G\left(\delta(\alpha), \frac{z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{z}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}; \tag{3.43}$$
Выражение первого интеграла (3.43) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (3.9)—(3.11) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.9). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти один первый интеграл системы (3.10), становящейся независимой после соответствующей замены независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.11).

Искомый первый интеграл для системы (3.10) будет иметь вид
$$\Theta_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \mathrm{const}; \tag{3.44}$$
о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (1.28). В первоначальных переменных первый интеграл (3.44) примет вид
$$\Theta_3'(z_2, z_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\Phi(\beta_1)} = C_3' = \mathrm{const}. \tag{3.45}$$
Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.11), находится по аналогии с (1.31):
$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3'^2\Phi^2(b) - 1}} db = C_4 = \mathrm{const}, \tag{3.46}$$

куда после взятия интеграла (1.32) вместо постоянной C_3' можно формально подставить левую часть равенства (3.45). Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.9)—(3.11) имеет четыре первых интеграла, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа). Теорема 3.1 доказана.

3.3. Приведенная система. Случай II. Модифицируя систему (2.6), получим систему с диссипацией. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризуется не только коэффициентом $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (3.47) (в отличие от системы (2.6)), но и следующей зависимостью (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$:

$$\tilde F(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) \\ F_2(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_3(\alpha)f_3(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1F_1^1(\alpha) \\ z_2F_2^1(\alpha) \\ z_3F_3^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2 + z_3F_3^1(\alpha), \\ \dot z_2 = F_2(\beta_1)f_1(\alpha) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3 - \\ \qquad - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3 - \\ \qquad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha), \\ \dot\beta_1 = z_2f_1(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_1f_2(\alpha)g(\beta_1). \end{cases} \tag{3.47}$$

Система (2.6) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - \left\{b\tilde\delta(\alpha) + F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\alpha - \\ \qquad - F_3(\beta_1)f_3^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F_3^1(\alpha) + b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \\ \qquad + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - \left\{F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_1 - \\ \qquad - F_2(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - \left\{F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_2 - \\ \qquad - F_1(\beta_2)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0; \end{cases} \tag{3.48}$$

здесь, как и выше, $\tilde\delta(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.4. Первые интегралы для уравнений в поле с диссипацией. Случай II. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (3.47) при выполнении свойств (1.38), (1.44), (1.46), (1.42), а также при отсутствии проектирования внешней силы на оси $\dot z_1$ и $\dot z_2$ (т.е. присутствует проекция внешней силы на ось $\dot z_3$):

$$F_1(\beta_2) \equiv F_2(\beta_1) \equiv 0.$$

Тогда система (3.47) допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка:

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha) z_2^2 - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot z_2 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - f(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot\beta_1 = z_2 f(\alpha), \end{cases} \tag{3.49}$$

при наличии также четвертого уравнения

$$\dot\beta_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1). \tag{3.50}$$

Перейдем к интегрированию искомой системы шестого порядка (3.49), (3.50) при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1) g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \tag{3.51}$$

Введем ограничение на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять первому дифференциальному равенству из (1.38), преобразованному в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) = 0. \tag{3.52}$$

Предположим также, что выполнено (в некотором смысле, техническое) равенство:

$$F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha). \tag{3.53}$$

Для полного интегрирования (системы) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}, \tag{3.54}$$

система (3.49), (3.50) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) z^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot z = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) z z_3 + z F^1(\alpha), \end{cases} \tag{3.55}$$

$$\begin{cases} \dot z_* = \pm z\sqrt{1+z_*^2} f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot\beta_1 = \pm\dfrac{z z_*}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{3.56}$$

$$\dot\beta_2 = \pm\frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{3.57}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.55)—(3.57) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.55), один — системы (3.56), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.57) (т.е. всего *четыре* первых интеграла).

Будем также предполагать, что для некоторых $\kappa, \lambda_3^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,3$, выполнены группы равенств

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \tag{3.58}$$

$$F_3(\alpha) = \lambda_3^0\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_3(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha), \quad k = 1,2,3. \tag{3.59}$$

Здесь, как уже отмечалось, $F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda^1$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (3.58) *и* (3.59). *Тогда система* (3.55)—(3.57) *обладает полным набором* (из четырех) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Условие (3.58) назовем *геометрическим*, потому что оно накладывает условие на коэффициент связности $\Gamma_3(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. а условия группы (3.59) — *энергетическими*. Условия группы (3.59) называют энергетическими, потому что (внешние) силы становятся в некотором смысле «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков или так называемую *знакопеременную диссипацию* (см. также [33, 35, 37]).

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 3.2 для начала сопоставим системе третьего порядка (3.55) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dz_3}{d\alpha} = \dfrac{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)z^2/f_3(\alpha) + z_3F_3^1(\alpha)}{z_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dz}{d\alpha} = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)zz_3/f_3(\alpha) + zF^1(\alpha)}{z_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.60}$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$z_3 = u_2\Delta(\alpha), \quad z = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \tag{3.61}$$

приводим систему (3.60) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \dfrac{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_3(\alpha) + \Delta(\alpha)F_3^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_3(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \tag{3.62}$$

что, учитывая (3.52), почти всюду эквивалентно системе

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\left\{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\dfrac{\Delta^2(\alpha)u_1^2}{f_3(\alpha)} - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + \left[\Delta(\alpha)F_3^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\right]u_2\right\}, \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\left\{\left[f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\dfrac{\Delta^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\right]u_1u_2 + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left[\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\right]u_1\right\}, \end{cases} \tag{3.63}$$

здесь и далее $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$. Теперь для интегрирования системы (3.63) нам потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (3.58) и (3.59), которые можно переписать следующим образом:

(1) для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma_3(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}; \tag{3.64}$$

(2) для некоторых $\lambda_3^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,3$, должны выполняться равенства

$$F_3(\alpha) = \lambda_3^0\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha), \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad k = 1,2,3. \tag{3.65}$$

Действительно, после выполнения условий (3.58) и (3.59) (или (3.64) и (3.65)) система (3.63) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_3^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_3^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 + (\lambda^1 - b)u_1}. \tag{3.66}$$

Уравнение (3.66) имеет вид уравнения Абеля [29, 30]; его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$ оно имеет первый интеграл

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_3^0}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{3.67}$$

который в прежних переменных выглядит следующий вид:

$$\Theta_1(z_3, z; \alpha) = \frac{f_3^2(\alpha)(z_3^2 + z^2) + (b - \lambda^1)z_3\delta(\alpha)f_3(\alpha) - \lambda_3^0\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)f_3(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{3.68}$$

□

Замечание 3.3. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.55) (как часть системы (3.55)—(3.57)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [40,47,50]). При выполнении условия (3.52), геометрического и энергетических условий (3.58), (3.59) (но при любой гладкой функции $F_3(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_3^1 = -b$, $\kappa = -1$ она превращается в консервативную систему:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha) - \kappa f_3(\alpha)\dfrac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}z^2 - bz_3 f_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{z} = \kappa f_3(\alpha)\dfrac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}zz_3 - bzf_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \tag{3.69}$$

Действительно, система (3.69) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(z_3, z; \alpha) = z^2 + z_3^2 - 2bz_3\delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad V(\alpha) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a)da, \tag{3.70}$$

$$\Phi_2(z; \alpha) = z\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{3.71}$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем

$$\Phi_2(z;\alpha) = zf(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} = zf(\alpha)\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma_3(b)\frac{f^2(b)}{f_3^2(b)} + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right]db\right\} \cong$$

$$\cong z\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_3(b)\frac{f^2(b)}{f_3^2(b)}db\right\},$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (3.58) (или (3.64)) последняя величина (в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1 = -b$) перепишется в виде

$$z \exp\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db} \ln|\delta(b)| db\right\} \cong z\delta(\alpha) \tag{3.72}$$

с точностью до мультипликативной постоянной. Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.70), (3.71) также является первым интегралом системы (3.69). Но при $\lambda^1 = \lambda_3^1 \neq -b$ каждая из функций (3.71) и

$$z_3^2 + z^2 + (\lambda^1 - b) z_3 \delta(\alpha) + \lambda_3^0 \delta^2(\alpha) \tag{3.73}$$

по отдельности не является первым интегралом системы (3.49). Однако отношение функций (3.73), (3.71) является первым интегралом системы (3.55) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_3^1$ и b.

Найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.55) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.67) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_3^0. \tag{3.74}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_3^0 \geqslant 0, \tag{3.75}$$

и фазовое пространство системы (3.55) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.74).

Таким образом, в силу соотношения (3.67) первое уравнение системы (3.63) при условиях (3.58) и (3.59) и при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda_3^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 U_1(C_1, u_2)}{u_2 + b}, \tag{3.76}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_3^0)}\right\}; \tag{3.77}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.75). Квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.55) примет вид

$$-\int \frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} = \int \frac{(b + u_2) du_2}{2(\lambda_3^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1\{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_3^0)}\}/2}. \tag{3.78}$$

Очевидно, левая часть (с точностью до аддитивной постоянной) равна $-\ln|\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 - \frac{\lambda^1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_3^0, \tag{3.79}$$

то правая часть равенства (3.78) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \mp \frac{b}{2} I_1, \tag{3.80}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{3.81}$$

При вычислении интеграла (3.81) возможны три случая:

(1) при $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_3^0$

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2+4\lambda_3^0}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+\text{const};\quad (3.82)$$

(2) при $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_3^0$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_3^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\text{const};\quad (3.83)$$

(3) при $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_3^0$

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}.\quad (3.84)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1=\frac{z_3}{\Delta(\alpha)}-\frac{\lambda^1-b}{2},\quad (3.85)$$

найдем окончательный вид для величины I_1:

(1) при $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_3^0$

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right|+\text{const}.\quad (3.86)$$

(2) при $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_3^0$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_3^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\text{const};\quad (3.87)$$

(3) при $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_3^0$

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\text{const}.\quad (3.88)$$

Итак, мы нашли дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.55) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_3^1$). Таким образом, предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [17, 52, 54, 55]).

Замечание 3.4. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.67). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_3,z;\alpha)=G\left(\Delta(\alpha),\frac{z_3}{\Delta(\alpha)},\frac{z}{\Delta(\alpha)}\right)=C_2=\text{const}.\quad (3.89)$$

Выражение первого интеграла (3.89) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (3.55)—(3.57) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.55). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти один первый интеграл системы (3.56), становящейся независимой после соответствующей замены независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.57).

Первый интеграл для системы (3.56) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*;\beta_1) = \frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \mathrm{const}; \tag{3.90}$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (1.47). В первоначальных переменных первый интеграл (3.90) примет вид

$$\Theta_3'(z_2, z_1;\beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\Phi(\beta_1)} = C_3' = \mathrm{const}. \tag{3.91}$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.57), находится по аналогии с (1.50):

$$\Theta_4(\beta_1,\beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3'^2\Phi^2(b)-1}}db = C_4 = \mathrm{const}, \tag{3.92}$$

куда после взятия интеграла (3.92) вместо постоянной C_3' можно формально подставить левую часть равенства (3.91).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.55)—(3.57) имеет четыре первых интеграла, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа). Теорема 3.2 доказана.

4. Заключение

Напомним, что самому понятию интегрируемости придают различные значения в соответствии с тем, в каких функциях производится интегрирование (аналитических, гладких, мероморфных и др.), каким образом понимается смысл интегрируемости. В данной работе обсуждается вопрос интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классе трансцендентных функций, т.е. функций, которые после продолжения в комплексную область имеют существенно особые точки. Понятие интегрируемости в классе трансцендентных функций возникает по причине наличия у системы асимптотических (притягивающих или отталкивающих) предельных множеств, т.е. множеств, окрестности которых состоят из многообразий размерности выше 1, полностью притягиваемых или отталкиваемых данными предельными множествами.

Более того, если разрыв трансцендентных интегралов происходит на асимптотических предельных множествах (т.е. на целых многообразиях), то удается выяснить наличие в системе предельных циклов. И хотя в последнем случае трансцендентный первый интеграл, как правило, не выражается через элементарные функции, он имеет многообразие неизолированных существенно особых точек.

В работе проанализированы как уже полученные ранее результаты автора (см. [53,56,57,59,60]), так и найденные впервые случаи интегрируемости систем с диссипацией разного знака на касательном расслоении к трехмерному гладкому многообразию, являющемуся пространством положений рассматриваемой динамической системы. При этом был применен следующий подход. Начиная с рассмотрения систем, в которых отсутствует какое-либо силовое поле, переходим в дальнейшем к системам, в которых присутствует внешнее консервативное силовое поле, и проводим исследование систем, в которых появляется внешнее неконсервативное силовое поле, обладающее диссипацией, причем разных знаков.

В дальнейшем будут получены аналогичные результаты и для систем более высокого порядка (ср. с [18,58,63,69,70]). Более того, в данном случае в многомерных системах будет присутствовать силовое поле существенно неконсервативное, в отличие от случаев, рассмотренных в монографиях автора [67, 68].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9*. — С. 119–211.
2. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.

3. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
14. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Извю РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.

30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
54. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.

55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
58. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
60. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
68. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
69. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
70. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 55–94
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-55-94

УДК 517, 531.01

СИСТЕМЫ С ЧЕТЫРЬМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Работа является обзором по вопросам интегрируемости систем с четырьмя степенями свободы, фазовые пространства которых — касательные расслоения четырехмерных гладких многообразия. Подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил; затем рассмотрены общие динамические системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере; в заключение рассмотрены касательные расслоения к достаточно обширному классу гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH FOUR DEGREES OF FREEDOM WITH DISSIPATION: ANALYSIS AND INTEGRABILITY

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. This paper is a survey on integrable systems with four degrees of freedom whose phase spaces are tangent bundles of four-dimensional smooth manifolds. First, we discuss in detail the original problem from the dynamics of a multidimensional rigid body in a nonconservative force field; then we consider general dynamical systems on the tangent bundles of a sufficiently large class of smooth manifolds and prove sufficient conditions for the integrability of the dynamical systems considered in the class of transcendental.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

Введение. Данная работа является в некотором смысле обзорной по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с четырьмя степенями свободы. Если конфигурационное многообразие системы — гладкое четырехмерное многообразие, то касательное (кокасательное) его расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно, с системами, в которых в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т.е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти речи (см. [41, 67, 68]).

Поэтому данная работа состоит из трех более крупных разделов. Сначала проводится достаточно подробно анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики пятимерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении четырехмерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [6, 30, 34]).

Во втором разделе рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. Данные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в предыдущем разделе. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по четырехмерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [54, 56]).

В заключительном разделе рассмотрены касательные расслоения к достаточно обширным классам гладких четырехмерных многообразий и также предъявлены достаточные условия интегрируемости.

1. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил

1. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного пятимерного твердого тела, граница которого является кусочно-гладкой четырехмерной поверхностью. В частности, часть этой поверхности может иметь форму четырехмерного диска, являющегося многомерным «передним торцом», взаимодействующим со средой, заполняющей пятимерное пространство, в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности (см. также [14, 19, 24]).

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (в частности, D — центр четырехмерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ — тензор угловой скорости тела. При этом $Dx_1 \ldots x_5$ — такая система координат, связанная с телом, что ось динамической симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3, Dx_4, Dx_5 лежат в гиперплоскости диска, I_1, $I_2 = I_3 = I_4 = I_5$, m — главные моменты инерции тела в рассматриваемых осях и масса тела.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \ldots x_5$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, 0, 0, 0\}, \quad \mathbf{v}_D = v\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

— единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$.

При этом примем также разложение для обобщенной силы (в частности, силы воздействия среды, при этом касательные силы, действующие на на четырехмерный диск, отсутствуют), действующей на пятимерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, 0, 0, 0\}, \tag{1.3}$$

т.е. в данном случае внешняя сила $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина; см. [29,33]), которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbb{R}^5$. В интересующем нас случае данная система примет вид:

$$\begin{gathered}\dot v\cos\alpha - \dot\alpha v\sin\alpha - \omega_{10}v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_9 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \\ -\omega_7 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_4 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ +\sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = \frac{F_1}{m} = -\frac{S}{m},\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered}\dot v\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\ +\omega_{10}v\cos\alpha - \omega_8 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_6 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\ -\omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_9\omega_8 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) - \sigma\dot\omega_{10} = 0,\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \\ -\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \omega_8 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\ +\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) + \sigma\dot\omega_9 = 0,\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\ +\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3 - \dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \omega_7 v\cos\alpha - \omega_6 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \\ +\omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \sigma(\omega_6\omega_{10} + \omega_5\omega_9 - \omega_1\omega_4) - \sigma\dot\omega_7 = 0,\end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ +\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + \dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \omega_4 v\cos\alpha + \omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\ -\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \sigma(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) + \sigma\dot\omega_4 = 0,\end{gathered} \tag{1.8}$$

$\sigma = CD$, где внешнее поле — квадратично по v (при этом можно рассмотреть более общий случай зависимости внешнего поля сил квадратичным образом и от тензора угловой скорости, но это нам пока не потребуется):

$$S = s(\alpha)v^2. \tag{1.9}$$

Вспомогательная матрица для вычисления момента внешней силы (приложенной в точке N) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N} \\ -S & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли so(5). В таком случае данная система примет вид (см. также [9, 11, 13, 15]):

$$(\lambda_4 + \lambda_5)\dot\omega_1 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_4\omega_7 + \omega_3\omega_6 + \omega_2\omega_5) = 0, \tag{1.11}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_5)\dot\omega_2 + (\lambda_5 - \lambda_3)(\omega_1\omega_5 - \omega_3\omega_8 - \omega_4\omega_9) = 0, \tag{1.12}$$

$$(\lambda_2 + \lambda_5)\dot\omega_3 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_4\omega_{10} - \omega_2\omega_8 - \omega_1\omega_6) = 0, \tag{1.13}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_5)\dot\omega_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) = -x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2, \tag{1.14}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_4)\dot\omega_5 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_7\omega_9 + \omega_6\omega_8 + \omega_1\omega_2) = 0, \tag{1.15}$$

$$(\lambda_2+\lambda_4)\dot\omega_6+(\lambda_4-\lambda_2)(\omega_5\omega_8-\omega_7\omega_{10}-\omega_1\omega_3)=0, \tag{1.16}$$

$$(\lambda_1+\lambda_4)\dot\omega_7+(\lambda_1-\lambda_4)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9)=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{1.17}$$

$$(\lambda_2+\lambda_3)\dot\omega_8+(\lambda_2-\lambda_3)(\omega_9\omega_{10}+\omega_5\omega_6+\omega_2\omega_3)=0, \tag{1.18}$$

$$(\lambda_1+\lambda_3)\dot\omega_9+(\lambda_3-\lambda_1)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{1.19}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\dot\omega_{10}+(\lambda_1-\lambda_2)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2. \tag{1.20}$$

Таким образом, фазовым пространством системы (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) 15-го порядка является прямое произведение 5-мерного многообразия на алгебру Ли so(5): $\mathbb{R}^1\times\mathbf{S}^4\times\mathrm{so}(5)$.

2. Следствия динамической симметрии. Поскольку имеется отмеченная выше динамическая симметрия

$$I_2=I_3=I_4=I_5, \tag{1.21}$$

то система (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) обладает первыми интегралами

$$\omega_1\equiv\omega_1^0,\quad \omega_2\equiv\omega_2^0,\quad \omega_3\equiv\omega_3^0,\quad \omega_5\equiv\omega_5^0,\quad \omega_6\equiv\omega_6^0,\quad \omega_8\equiv\omega_8^0, \tag{1.22}$$

которые в данной работе будем рассматривать на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0=\omega_2^0=\omega_3^0=\omega_5^0=\omega_6^0=\omega_8^0=0. \tag{1.23}$$

Ненулевых же компонент тензора Ω осталось *четыре*: $\omega_{r_1}=\omega_4$, $\omega_{r_2}=\omega_7$, $\omega_{r_3}=\omega_9$, $\omega_{r_4}=\omega_{10}$.

3. Более общая задача и новые квазискорости в системе. Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$ (имеющей, вообще говоря, пять компонент), лежащей на прямой Dx_1 и обеспечивающей во все время движения выполнение определенного векторного равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс; см. также [21, 31, 32]), например,

$$\mathbf{V}_C\equiv\mathrm{const}, \tag{1.24}$$

то в системе (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) вместо F_1 должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T-s(\alpha)v^2\equiv 0. \tag{1.25}$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T=T_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega)=s(\alpha)v^2,\quad \mathbf{T}\equiv-\mathbf{S}. \tag{1.26}$$

Случай (1.26) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка в системе (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) после некоторого преобразования.

Укажем на *достаточное условие* такого отделения. Пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$\begin{gathered}T=T_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega)=\sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{4}\tau_{i,j}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\omega_{r_i}\omega_{r_j}=T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)v^2,\\ \omega_{r_0}=v.\end{gathered} \tag{1.27}$$

Введем новые квазискорости, для чего преобразуем величины $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_4}$ посредством композиции трёх поворотов, описываемых углами β_1, β_2, β_3. Тогда (касательно системы (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20)) справедливы следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \omega_4 \cos\beta_3 + \omega_7 \sin\beta_3,\\
z_2 &= (\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3)\cos\beta_2 + \omega_9 \sin\beta_2,\\
z_3 &= \Big[\big(-\omega_7 \cos\beta_3 + \omega_4 \sin\beta_3\big)\sin\beta_2 + \omega_9\cos\beta_2\Big]\cos\beta_1 + \omega_{10}\sin\beta_1,\\
z_4 &= \Big[\big(\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3\big)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2\Big]\sin\beta_1 + \omega_{10}\cos\beta_1.
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

4. Редукции в системе и системы нормального вида. Динамическую часть уравнений движения в случаях (1.21)—(1.23) (а также при наличии следящей силы и условия (1.27)) можно переписать в виде

$$
\dot v + \sigma\left(\sum_{s=1}^{4} z_s^2\right)\cos\alpha - \sigma\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)v^2 - s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha, \tag{1.29}
$$

$$
\dot\alpha v + z_4 v - \sigma\left(\sum_{s=1}^{4} z_s^2\right)\sin\alpha - \sigma\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \frac{s(\alpha)v^2 - T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha, \tag{1.30}
$$

$$
\dot\beta_1\sin\alpha - z_3\cos\alpha - \frac{\sigma v}{3I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = 0. \tag{1.31}
$$

$$
\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1 + z_2\cos\alpha - \frac{\sigma v}{3I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.32}
$$

$$
\dot\beta_3\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - z_1\cos\alpha - \frac{\sigma v}{3I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.33}
$$

$$
\dot\omega_4 = -\frac{v^2}{3I_2}x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \quad \dot\omega_7 = \frac{v^2}{3I_2}x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{1.34}
$$

$$
\dot\omega_9 = -\frac{v^2}{3I_2}x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \quad \dot\omega_{10} = \frac{v^2}{3I_2}x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha). \tag{1.35}
$$

Здесь введены следующие функции:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) &= \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\beta_3\right)\right\rangle,\\
\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) &= \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3\right)\right\rangle,\\
\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) &= \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\beta_3+\frac{\pi}{2}\right)\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^5$, а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ представляется в виде

$$
\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\rangle = 0\cdot\cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{5} x_{sN}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)i_{sN}(\beta_1,\beta_2,\beta_3). \tag{1.37}
$$

Теперь здесь $i_{sN}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $s=1,\dots,5$, $(i_{1N}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N=\{0,x_{2N},x_{3N},x_{4N},x_{5N}\}$ на трехмерной сфере $\mathbf{S}^3\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$, заданной равенством $\alpha=\pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$. Таким образом,

$$\mathbf{i}_N(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\beta_2,\beta_3\right), \tag{1.38}$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ определяется в (1.2). Зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,z_1/v,z_2/v,z_3/v,z_4/v)$ в силу (1.28).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k=n_1vZ_k,\quad k=1,\dots,4,\quad \langle\cdot\rangle=n_1v\left\langle{}'\right\rangle,\quad n_1>0,\quad n_1=\mathrm{const}, \tag{1.39}$$

приведем систему (1.29)—(1.35) к следующему виду:

$$v'=v\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z), \tag{1.40}$$

$$\begin{gathered}\alpha'=-Z_4+\sigma n_1\bigl(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\bigr)\sin\alpha+\frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_2,n_1Z\bigr)-\\ -\frac{T_1(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)-s(\alpha)}{mn_1}\sin\alpha,\end{gathered} \tag{1.41}$$

$$\begin{gathered}Z_4'=\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Gamma_v\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)-\bigl(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2\bigr)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\ +\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Bigl\{-Z_3\Delta_{v,1}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)+Z_2\Delta_{v,2}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)-\\ -Z_1\Delta_{v,3}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)\Bigr\}-Z_4\cdot\Psi\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\bigr),\end{gathered} \tag{1.42}$$

$$\begin{gathered}Z_3'=Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\bigl(Z_1^2+Z_2^2\bigr)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Biggl\{Z_4\Delta_{v,1}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)-\\ -Z_2\Delta_{v,2}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1\Delta_{v,3}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\Biggr\}-\\ -\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\bigr)-Z_3\cdot\Psi\bigl(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\bigr),\end{gathered} \tag{1.43}$$

$$\begin{gathered}Z_2'=Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\ +\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)\left[-Z_4+Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\\ +\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)\left[-Z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right]+\\ +\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)-Z_2\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z),\end{gathered} \tag{1.44}$$

$$\begin{gathered}Z_1'=Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\ +\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)\left\{Z_4-Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}-\\ -\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\Delta_{v,3}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)-Z_1\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z),\end{gathered} \tag{1.45}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z), \tag{1.46}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z), \tag{1.47}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} + \frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z), \tag{1.48}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z) = -\sigma n_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha + \\ + \frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z) + \frac{T_1(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \tag{1.49}$$

Видно, что в системе (1.40)—(1.48) девятого порядка может быть выделена независимая подсистема (1.41)—(1.48) восьмого порядка, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем восьмимерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$.

В частности, при выполнении условия (1.26) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы восьмого порядка также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,z_1/v,z_2/v,z3/v,z_4/v)$ (сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z_1,n_1Z_2,n_1Z_3,n_1Z_4))$ в силу (1.28) и (1.39).

5. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (1.41)—(1.48) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)$, $s=1,2,3$, входят линейным образом (и всегда ровно 3 штуки). Так, например, в уравнении (1.42) (с левой частью Z_4') функции (1.36) входят со всеми индексами s от 1 до 3 (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1 \quad 2 \quad 3. \tag{1.50}$$

Далее, в уравнения (1.43)—(1.45) появление набора функций (1.36) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для Z_3' по-прежнему входит набор функций (1.36) с индексами (1.50). А в уравнение для Z_2' входит уже набор с индексами

$$2 \quad 2 \quad 3, \tag{1.51}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)$ уже повторяется дважды. Общее распределение индексов дается таблицей 1.

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (1.36)

Левая часть системы (1.41)—(1.48)	Распределение индексов s набора функций (1.36)		
Z_3'	1	2	3
Z_2'	2	2	3
Z_1'	3	3	3

Так, минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n=3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функции (1.36) (лишь при $s=1$). Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (1.36) (лишь при $s = 1, 2$). Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ (какой мы, собственно, и рассматриваем) и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.41)—(1.48) функций (1.36) (лишь при $s = 1, 2, 3$).

6. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости.

6.1. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [29, 33]), пользуясь (1.2), (1.38), динамические функции s, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N} примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{1.52}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, β_1, β_2, β_3).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)$, $s = 1, 2, 3$, входящие в систему (1.40)—(1.48), примут следующий вид:

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) = R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \equiv 0, \quad s = 1, 2, 3. \tag{1.53}$$

Выбирая безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{3I_2}, \quad n_1 = n_0, \tag{1.54}$$

будем рассматривать следующую систему девятого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{1.55}$$

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{1.56}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.57}$$

$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.58}$$

$$\begin{gathered} Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{gathered} \tag{1.59}$$

$$\begin{gathered} Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{gathered} \tag{1.60}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.61}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.62}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{1.63}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Итак, система (1.55)—(1.63) может быть рассмотрена на своем фазовом девятимерном многообразии $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере.

Видно, что в системе (1.55)—(1.63) девятого порядка образовалась независимая система (1.56)—(1.63) восьмого порядка на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. При этом в независимой системе (1.56)—(1.63) восьмого порядка образовалась еще одна независимая система (1.56)—(1.62) седьмого порядка на своем семимерном многообразии.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *У системы* (1.4)—(1.8) *при условиях* (1.21), (1.22)—(1.24) *выделяется динамическая система* (1.41)—(1.48) *на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ *четырехмерной сферы* $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. *В частности, при условии* (1.52) *— выделяется система* (1.56)—(1.63).

6.2. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.24) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.29)—(1.35) (при условии (1.26)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) - 2\sigma z_4 v \sin\alpha = V_C^2 \qquad (1.64)$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины z_1, z_2, z_3, z_4 выбираются в силу (1.28)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.40)—(1.48) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) - 2bZ_4 \sin\alpha) = V_C^2 \qquad (1.65)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

В частности, равенство (1.65) позволяет, не решая системы (1.55)—(1.63), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (точки D четырехмерного диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2) - 2bZ_4 \sin\alpha}. \qquad (1.66)$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.55)—(1.63) существуют асимптотические предельные множества, то, как будет видно, равенство (1.65) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.55)—(1.63) во всем фазовом пространстве (ср. с [34, 35, 39]).

6.3. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы восьмого порядка (1.56)—(1.63) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до пяти для интегрирования системы.

6.4. Система при отсутствии внешнего силового поля. Для начала рассмотрим систему (1.56)—(1.63) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ так, что получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.37) тождественно равна нулю. В частности, коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (1.57) отсутствует, а также $b = 0$, за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2.$$

Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\sin\alpha, \qquad (1.67)$$

$$Z_4' = -(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \qquad (1.68)$$

$$Z_3' = Z_3 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \qquad (1.69)$$

$$Z_2' = Z_2 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \qquad (1.70)$$

$$Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.71}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.72}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.73}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{1.74}$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.55) на величину v функцию $\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z) = -b(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha.$$

Система (1.67)—(1.74) описывает движение твердого тела при отсутствии *внешнего* поля сил, хотя, как показано в [61–64], некое внутреннее поле сил в системе присутствует, и отвечает за это как раз параметр b.

Теорема 1.2. *Система* (1.67)—(1.74) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(v;Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = v^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{1.75}$$

$$\Phi_2(v;Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{1.76}$$

$$\Phi_3(v;Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{1.77}$$

$$\Phi_4(v;Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = v^2Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{1.78}$$

$$\Phi_5(v;Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{1.79}$$

Замечание 1.1. Поскольку в первые интегралы (1.75)—(1.79), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.67)—(1.74) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Первые четыре первых интеграла (1.75)—(1.78) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются четыре (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости пятимерного твердого тела, а именно:

$$\omega_4 \equiv \omega_4^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_7 \equiv \omega_7^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_9 \equiv \omega_9^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0 = \mathrm{const}. \tag{1.80}$$

В частности, наличие первого интеграла (1.75) объясняется равенством

$$n_0^2v^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2) = \omega_4^2+\omega_7^2+\omega_9^2+\omega_{10}^2 \equiv n_0^2C_1 = \mathrm{const}. \tag{1.81}$$

Пятый первый интеграл (1.79) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\beta_2}, \tag{1.82}$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (1.77), (1.78) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}, \tag{1.83}$$

то квадратура (1.82) примет вид

$$\beta_3 = \pm\int\frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_3^2}{C_4^2}-1\right)-\frac{C_3^2}{C_4^2}u^2}}, \quad u = \cos\beta_2. \tag{1.84}$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\beta_3 + C_5 = \pm \operatorname{arctg} \frac{\cos\beta_2}{\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}}, \quad C_5 = \mathrm{const}, \tag{1.85}$$

позволяющему получить первый интеграл (1.79). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(\beta_3 + C_5) = \frac{C_4^2}{(C_3^2 - C_4^2)\operatorname{tg}^2\beta_2 - C_4^2}. \tag{1.86}$$

Теперь перефразируем теорему 1.2.

Теорема 1.3. *Система* (1.67)—(1.74) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{1.87}$$

$$\Psi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{1.88}$$

$$\Psi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin\beta_2} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{1.89}$$

$$\Psi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \mathrm{const}, \tag{1.90}$$

$$\Psi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \mathrm{const}. \tag{1.91}$$

Замечание 1.2. Поскольку в первые интегралы (1.87)—(1.91), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.67)—(1.74) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Пятый первый интеграл (1.91) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_3, а функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 1.3 (в отличие от теоремы 1.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.87)—(1.91) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.3 преобразованный набор первых интегралов (1.87)—(1.91) системы (1.67)—(1.74) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.67)—(1.74) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$\begin{pmatrix} Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = Z_4, \quad w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}, \quad w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \tag{1.92}$$

система (1.67)—(1.74) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha, \tag{1.93}$$

$$w_4' = -w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + b w_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{1.94}$$

$$w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + b w_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{1.95}$$

$$
\begin{aligned}
w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\
\beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),
\end{aligned}
\tag{1.96}
$$

$$
\begin{aligned}
w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\\
\beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),
\end{aligned}
\tag{1.97}
$$

$$
\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),
\tag{1.98}
$$

где

$$
\begin{aligned}
d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \mathcal{Z}_3(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= -\mathcal{Z}_2(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\\
d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \mathcal{Z}_1(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2},
\end{aligned}
\tag{1.99}
$$

при этом

$$
Z_k = \mathcal{Z}_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3,
\tag{1.100}
$$

— функции в силу замены (1.92).

Видно, что система восьмого порядка (1.93)—(1.98) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.93)—(1.95) — третьего, а системы (1.96), (1.97) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.93)—(1.98) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.93)—(1.95), по одному — для систем (1.96), (1.97), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.98) (*т.е. всего пять*).

Замечание 1.3. Выпишем первые интегралы (1.87)—(1.91) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 в силу (1.92). Получим:

$$
\Theta_1(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2+w_4^2}{w_3\sin\alpha} = C_1'' = \mathrm{const},
\tag{1.101}
$$

$$
\Theta_2(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 w_3\sin\alpha = C_2'' = \mathrm{const},
\tag{1.102}
$$

$$
\Theta_3(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \mathrm{const},
\tag{1.103}
$$

$$
\Theta_4(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \mathrm{const},
\tag{1.104}
$$

$$
\Theta_5(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \mathrm{const}.
\tag{1.105}
$$

Замечание 1.4. Поскольку в первые интегралы (1.101)—(1.105), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.93)—(1.98) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.101), (1.102) достаточны для интегрирования системы (1.93)—(1.95), первые интегралы (1.103), (1.104) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$
\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2,
\tag{1.106}
$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.96), (1.97), и, наконец, первый интеграл (1.105) достаточен для «привязывания» уравнения (1.98). Доказана следующая теорема.

Теорема 1.4. *Система* (1.67)—(1.74) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов.*

6.5. Частичное введение внешнего силового поля. Теперь рассмотрим систему (1.56)—(1.63) при условии $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2.$$

При этом частично добавим внешнее силовое поле. А именно, его наличие характеризует коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (1.57) (в отличие от системы (1.67)—(1.74)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\sin\alpha, \tag{1.107}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.108}$$

$$Z_3' = Z_3 Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.109}$$

$$Z_2' = Z_2 Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.110}$$

$$Z_1' = Z_1 Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{1.111}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.112}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.113}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}; \tag{1.114}$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.55) на величину v функцию $\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha.$$

Теорема 1.5. *Система* (1.107)—(1.114) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{1.115}$$

$$\Phi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{1.116}$$

$$\Phi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{1.117}$$

$$\Phi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{1.118}$$

$$\Phi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{1.119}$$

Замечание 1.5. Поскольку в первые интегралы (1.115)—(1.119), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.107)—(1.114) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Первый интеграл (1.115) по своей структуре похож на интеграл полной энергии. Пятый первый интеграл (1.119) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и найден выше.

Переформулируем теорему 1.5 следующим образом.

Теорема 1.6. *Система* (1.107)—(1.114) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\alpha}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{1.120}$$

$$\Psi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \text{const}, \tag{1.121}$$

$$\Psi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin\beta_2} = C_3' = \text{const}, \tag{1.122}$$

$$\Psi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \text{const}, \tag{1.123}$$

$$\Psi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \text{const}. \tag{1.124}$$

Замечание 1.6. Поскольку в первые интегралы (1.120)—(1.124), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.107)—(1.114) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 1.6 (в отличие от теоремы 1.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.120)—(1.124) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.6 преобразованный набор первых интегралов (1.120)—(1.124) системы (1.107)—(1.114) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.107)—(1.114) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.92) система (1.107)—(1.114) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha, \tag{1.125}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{1.126}$$

$$w_3' = w_3 w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{1.127}$$

$$\begin{cases} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\dfrac{1 + w_2^2}{w_2}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{cases} \tag{1.128}$$

$$\begin{cases} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\dfrac{1 + w_1^2}{w_1}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{cases} \tag{1.129}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{1.130}$$

где выполнены условия (1.99).

Видно, что система восьмого порядка (1.125)—(1.130) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.125)—(1.127) — третьего, а системы (1.128), (1.129) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.125)—(1.130) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.125)—(1.127), по одному — для систем (1.128), (1.129), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.130) (*т.е. всего пять*).

Замечание 1.7. Выпишем первые интегралы (1.120)—(1.124) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 в силу (1.92). Получим:

$$\Theta_1(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2 + \sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{1.131}$$

$$\Theta_2(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 w_3\sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{1.132}$$

$$\Theta_3(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \text{const}, \tag{1.133}$$

$$\Theta_4(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \text{const}, \tag{1.134}$$

$$\Theta_5(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \text{const}. \tag{1.135}$$

Замечание 1.8. Поскольку в первые интегралы (1.131)—(1.135), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.66), либо вместе с системой (1.125)—(1.130) использовать вспомогательное уравнение (1.55).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.131), (1.132) достаточны для интегрирования системы (1.125)—(1.127), первые интегралы (1.133), (1.134) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{1.136}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.128), (1.129), и, наконец, первый интеграл (1.135) достаточен для «привязывания» уравнения (1.130). Доказана следующая теорема.

Теорема 1.7. *Система* (1.107)—(1.114) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов.*

6.6. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (1.56)—(1.63) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (1.56)—(1.63) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.92) система (1.56)—(1.63) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{1.137}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.138}$$

$$w_3' = w_3 w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.139}$$

$$\begin{cases} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\dfrac{1+w_2^2}{w_2}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{cases} \tag{1.140}$$

$$\begin{cases} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\dfrac{1+w_1^2}{w_1}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{cases} \tag{1.141}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{1.142}$$

где выполнены условия (1.99).

Видно, что система восьмого порядка (1.137)—(1.142) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.137)—(1.139) — третьего, а системы (1.140), (1.141) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.137)—(1.142) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.137)—(1.139), по одному — для систем (1.140), (1.141), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.142) (*т.е. всего пять*).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (1.137)—(1.139) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha - w_3^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}, \\ \dfrac{dw_3}{d\alpha} = \dfrac{bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha + w_3 w_4\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}. \end{cases} \tag{1.143}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (1.143) в алгебраическом виде

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\tau} = \dfrac{\tau + bw_4(w_3^2 + w_4^2) - bw_4\tau^2 - w_3^2/\tau}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2 + w_4^2)}, \\ \dfrac{dw_3}{d\tau} = \dfrac{bw_3(w_3^2 + w_4^2) - bw_3\tau^2 + w_3w_4/\tau}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2 + w_4^2)}. \end{cases} \tag{1.144}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1\tau, \quad w_4 = u_2\tau, \tag{1.145}$$

приводим систему (1.144) к следующему виду:

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} + u_2 = \dfrac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} + u_1 = \dfrac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)} \end{cases} \tag{1.146}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} = \dfrac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} = \dfrac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}. \end{cases} \tag{1.147}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (1.147) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{1.148}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{1.149}$$

Итак, уравнение (1.148) имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{1.150}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \tag{1.151}$$

Замечание 1.9. При $b = 0$ первый интеграл (1.151) системы (1.137)—(1.139) совпадает с первым интегралом (1.131) системы (1.125)—(1.127), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (1.151), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (1.137)—(1.139) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель и знаменатель выражения (1.151) являются первыми интегралами системы (1.125)—(1.127)).

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.137)—(1.139). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.150) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{1.152}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{1.153}$$

и фазовое пространство системы (1.137)—(1.139) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.152).

Таким образом, в силу соотношения (1.150) первое уравнение системы (1.147) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2+b(1-\tau^2)+b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2)}, \tag{1.154}$$

где

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-bu_2+1)}\}, \tag{1.155}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.153), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2}=\frac{(b-u_2)\tau-b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2)}{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)}. \tag{1.156}$$

Уравнение (1.156)(при учете (1.155)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2}=\frac{2(u_2-b)p+2b(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2)}{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)},\quad p=\frac{1}{\tau^2}. \tag{1.157}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.157) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.157), даже в частном случае $b=C_1=2$ имеет следующее решение:

$$p=p_0(u_2)=C[\sqrt{1-(u_2-1)^2}\pm 1]\exp\left[\sqrt{\frac{1\mp\sqrt{1-(u_2-1)^2}}{1\pm\sqrt{1-(u_2-1)^2}}}\right],\quad C=\mathrm{const}. \tag{1.158}$$

Замечание 1.10. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.151). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующую структуру:

$$\Theta_2(w_4,w_3;\alpha)=\ln|\sin\alpha|+G_2\left(\sin\alpha,\frac{w_4}{\sin\alpha},\frac{w_3}{\sin\alpha}\right)=C_2=\mathrm{const}. \tag{1.159}$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.151), (1.159) независимой системы третьего порядка (1.137)—(1.139). Осталось указать по одному первому интегралу: для систем (1.140), (1.141), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.142). Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.133)—(1.135), а именно:

$$\Theta_3(w_2;\beta_2)=\frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2}=C_3=\mathrm{const}, \tag{1.160}$$

$$\Theta_4(w_1;\beta_1)=\frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1}=C_4=\mathrm{const}, \tag{1.161}$$

$$\Theta_5(w_2,w_1;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\beta_3\pm\mathrm{arctg}\,\frac{C_4\cos\beta_2}{\sqrt{C_3^2\sin^2\beta_2-C_4^2}}=C_5=\mathrm{const}, \tag{1.162}$$

при этом в левую часть равенства (1.162) вместо C_3,C_4 можно подставить интегралы (1.160), (1.161).

Теорема 1.8. *Система* (1.137)—(1.142) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (пятью) *независимых первых интегралов* (1.151), (1.159), (1.160)—(1.162).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) при условии (1.52) имеет 12 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.24), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.64), циклические первые интегралы вида (1.22), (1.23), первый интеграл вида (1.151), также имеется первый интеграл (1.159), который может быть найден из уравнения (1.157), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.160)—(1.162).

Теорема 1.9. *Система* (1.4)—(1.8), (1.11)—(1.20) *при условиях* (1.24), (1.52), (1.22), (1.23) *обладает 12 инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

7. Случай зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.

7.1. Введение зависимости от тензора угловой скорости и приведенная система. Продолжаем изучать динамику пятимерного твердого тела в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^5$. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N})$ — координаты точки N приложения внешней силы на тело (в частности, на четырехмерный диск, задаваемый равенством $x_{1N} = 0$), $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку даже само данное введение априори не очевидно (см. [25, 29, 37]).

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{1.163}$$

где $R = (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.164}$$

Здесь $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ — тензор угловой скорости, $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$ — некоторые положительные параметры (ср. с [41, 51, 55]). Теперь, применительно к нашей задаче, можно считать, что $x_{1N} \equiv 0$, при этом

$$x_{2N} = Q_2 - h_1\frac{\omega_{10}}{v}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1\frac{\omega_9}{v}, \quad x_{4N} = Q_4 - h_1\frac{\omega_7}{v}, \quad x_{5N} = Q_5 + h_1\frac{\omega_4}{v}, \tag{1.165}$$

где $h_2 = h_3 = h_4 = h_5$, в силу динамической симметрии (что, в принципе, нам в данном месте не потребуется). Здесь ω_4, ω_7, ω_7, ω_{10} — оставшиеся, вообще говоря, ненулевые компоненты тензора угловой скорости Ω.

7.2. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [29, 33]), пользуясь (1.38), имеем

$$Q = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{1.166}$$

а динамические функции s, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N} примем в виде

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{1.167}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости). При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $s = 1, 2, 3$, входящие в систему (1.41)—(1.48), примут следующий вид:

$$\begin{aligned} &\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha - \frac{h_1}{v}z_{n-1}, \qquad \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = \frac{h_1}{v}z_3, \\ &\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = -\frac{h_1}{v}z_2, \qquad \Delta_{v,3}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) = \frac{h_1}{v}z_1. \end{aligned} \tag{1.168}$$

Тогда, благодаря условиям (1.24), (1.167), преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.40)—(1.48)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{1.169}$$

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1Z_4\cos^2\alpha, \tag{1.170}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - \\ - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1Z_4^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_4\cos\alpha, \tag{1.171}$$

$$Z_3' = (1 + bH_1)Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - \\ - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1Z_3Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_3\cos\alpha, \tag{1.172}$$

$$Z_2' = (1 + bH_1)Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1 + bH_1)Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (1 + bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1Z_2Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_2\cos\alpha, \tag{1.173}$$

$$Z_1' = (1 + bH_1)Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1 + bH_1)Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + (1 + bH_1)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1Z_1Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_1\cos\alpha, \tag{1.174}$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.175}$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1)Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.176}$$

$$\beta_3' = (1 + bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3}, \tag{1.177}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1Z_4\sin\alpha\cos\alpha;$$

при этом выберем, как и выше, безразмерные параметры b, H_1 и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{3I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{3I_2n_0}, \quad n_1 = n_0. \tag{1.178}$$

Итак, систему (1.169)—(1.177) можно рассматривать на фазовом девятимерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \tag{1.179}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере.

Видно, что в системе (1.169)—(1.177) девятого порядка образовалась независимая система (1.170)—(1.177) восьмого порядка на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. При этом в независимой системе (1.170)—(1.177) восьмого порядка образовалась еще одна независимая система (1.170)—(1.176) седьмого порядка на своем семимерном многообразии.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.10. *У динамической части уравнений движения при условиях* (1.21), (1.22)—(1.24) *выделяется динамическая система* (1.41)—(1.48) *на касательном расслоении*

$$T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$*. В частности, при условии* (1.167) *выделяется система* (1.170)—(1.177).

7.3. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.24) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.29)—(1.35) (при условии (1.26)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v,\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,z_1,z_2,z_3,z_4)=v^2+\sigma^2(z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2)-2\sigma z_4 v\sin\alpha=V_C^2 \tag{1.180}$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины z_1, z_2, z_3, z_4 выбираются в силу (1.28)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v\neq 0$) у системы (1.169)—(1.177) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v,\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4)=v^2(1+b^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)-2bZ_4\sin\alpha)=V_C^2 \tag{1.181}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (1.181) позволяет, не решая системы (1.169)—(1.177), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C\neq 0$ выполнено равенство

$$v^2=\frac{V_C^2}{1+b^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)-2bZ_4\sin\alpha}. \tag{1.182}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.169)—(1.177) существуют асимптотические предельные множества, то равенство (1.181) задает, как будет показано, единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.169)—(1.177) во всем фазовом пространстве (ср. с [67, 68, 70]).

Таким образом, в силу отделения уравнения на величину v, а также наличия аналитического первого интеграла (1.181) система (1.170)—(1.177) может быть рассмотрена самостоятельно на своем фазовом пространстве.

7.4. Полный список первых интегралов. Для полного интегрирования системы (1.170)—(1.177) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, *семь* независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до *пяти* для интегрирования систем.

Действительно, после замены переменных

$$\begin{pmatrix}Z_4\\Z_3\\Z_2\\Z_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w_4\\w_3\\w_2\\w_1\end{pmatrix},\quad w_4=Z_4,\quad w_3=\sqrt{Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2},\quad w_2=\frac{Z_2}{Z_1},\quad w_1=\frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}}, \tag{1.183}$$

система (1.170)—(1.177) распадается следующим образом:

$$\alpha'=-(1+bH_1)w_4+b\left(w_3^2+w_4^2\right)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-bH_1w_4\cos^2\alpha, \tag{1.184}$$

$$\begin{aligned}w_4'=\sin\alpha\cos\alpha-(1+bH_1)w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_4\left(w_3^2+w_4^2\right)\cos\alpha-\\ -bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha+bH_1w_4^2\sin\alpha\cos\alpha-H_1w_4\cos\alpha,\end{aligned} \tag{1.185}$$

$$\begin{aligned}w_3'=(1+bH_1)w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_3\left(w_3^2+w_4^2\right)\cos\alpha-\\ -bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha+bH_1w_3w_4\sin\alpha\cos\alpha-H_1w_3\cos\alpha,\end{aligned} \tag{1.186}$$

$$\begin{cases}w_2'=d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\dfrac{1+w_2^2}{w_2}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\ \beta_2'=d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3),\end{cases} \tag{1.187}$$

$$\begin{cases} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \dfrac{1+w_1^2}{w_1} \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{cases} \tag{1.188}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{1.189}$$

где выполнены условия

$$\begin{gathered} d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1+bH_1) Z_3(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = -(1+bH_1) Z_2(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1+bH_1) Z_1(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{1.190}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, \ldots, n-2, \tag{1.191}$$

— функции в силу замены (1.183).

Видно, что система (1.184)—(1.189) восьмого порядка распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.184)—(1.186) — третьего, а системы (1.187), (1.188) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.184)—(1.189) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.184)—(1.186), по одному — для систем (1.187), (1.188), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.189) (*т.е. всего пять*).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (1.184)—(1.186) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{R_2(\alpha, w_4, w_3)}{-w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_4\cos^2\alpha}, \\ \dfrac{dw_3}{d\alpha} = \dfrac{R_1(\alpha, w_3, w_4)}{-w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_4\cos^2\alpha}, \end{cases} \tag{1.192}$$

$$\begin{gathered} R_2(\alpha, w_3, w_4) = \sin\alpha\cos\alpha + bw_4(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha - \\ - (1+bH_1) w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 w_4^2 \sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_4\cos\alpha, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} R_1(\alpha, w_3, w_4) = bw_3(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ + (1+bH_1) w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 w_3 w_4 \sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_3\cos\alpha. \end{gathered}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (1.192) в алгебраическом виде

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\tau} = \dfrac{\tau + bw_4(w_3^2+w_4^2) - bw_4\tau^2 - (1+bH_1)w_3^2/\tau + bH_1 w_4^2\tau - H_1 w_4}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2+w_4^2) - bH_1 w_4(1-\tau^2)}, \\ \dfrac{dw_3}{d\tau} = \dfrac{bw_3(w_3^2+w_4^2) - bw_3\tau^2 + (1+bH_1)w_3 w_4/\tau + bH_1 w_3 w_4\tau - H_1 w_3}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2+w_4^2) - bH_1 w_4(1-\tau^2)}. \end{cases} \tag{1.193}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1\tau, \quad w_4 = u_2\tau, \tag{1.194}$$

приводим систему (1.193) к следующему виду:

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} + u_2 = \dfrac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - (1+bH_1)u_1^2 - H_1 u_2 + bH_1 u_2^2\tau^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2) - bH_1 u_2(1-\tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} + u_1 = \dfrac{bu_1(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + (1+bH_1)u_1 u_2 - H_1 u_1 + bH_1 u_1 u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2) - bH_1 u_2(1-\tau^2)}, \end{cases} \tag{1.195}$$

что эквивалентно

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} = \dfrac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} = \dfrac{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}. \end{cases} \tag{1.196}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (1.196) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}, \tag{1.197}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1}\right) = 0. \tag{1.198}$$

Итак, уравнение (1.197) имеет первый интеграл

$$\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{1.199}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{(1+bH_1)(w_4^2+w_3^2)-(b+H_1)w_4\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{1.200}$$

Замечание 1.11. Рассмотрим систему (1.184)—(1.186) с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [56, 58, 60]), становящейся консервативной при $b = H_1$:

$$\begin{cases} \alpha' = -(1+b^2)w_4 + b\left(w_3^2+w_4^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - b^2w_4\cos^2\alpha, \\ w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+b^2)w_3^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4\left(w_3^2+w_4^2\right)\cos\alpha - \\ \qquad - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2w_4^2\sin\alpha\cos\alpha - bw_4\cos\alpha, \\ w'_3 = (1+b^2)w_3w_4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3\left(w_3^2+w_4^2\right)\cos\alpha - \\ \qquad - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2w_3w_4\sin\alpha\cos\alpha - bw_3\cos\alpha. \end{cases} \tag{1.201}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b^2)(w_4^2+w_3^2) - 2bw_4\sin\alpha + \sin^2\alpha = C_1^* = \mathrm{const}, \tag{1.202}$$

$$w_3\sin\alpha = C_2^* = \mathrm{const}. \tag{1.203}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.202), (1.203) также является первым интегралом системы (1.201). Но при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1+bH_1)(w_4^2+w_3^2) - (b+H_1)w_4\sin\alpha + \sin^2\alpha \tag{1.204}$$

и (1.203) по отдельности не является первым интегралом системы (1.184)—(1.186). Однако отношение функций (1.204), (1.203) является первым интегралом системы (1.184)—(1.186) при любых b, H_1.

Далее, найдем дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (1.184)—(1.186). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.199) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 = \frac{(b-H_1)^2+C_1^2-4}{4(1+bH_1)^2}. \tag{1.205}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{1.206}$$

и фазовое пространство системы (1.184)—(1.186) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.205).

Таким образом, в силу соотношения (1.199) первое уравнение системы (1.196) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2+b(1-\tau^2)+b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}, \tag{1.207}$$

где

$$U_1(C_1,u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2-4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2)}\}, \tag{1.208}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.206), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b-(1+bH_1)u_2)\tau - b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2-H_1u_2)}{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}. \tag{1.209}$$

Уравнение (1.209) (при учете (1.208)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1+bH_1)u_2-b)p+2b(1-H_1u_2-u_2^2-U_1^2(C_1,u_2))}{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}, \quad p=\frac{1}{\tau^2}. \tag{1.210}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.210) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.210), даже в частном случае

$$|b-H_1|=2, \quad C_1=\frac{1-A_1^4}{1+A_1^4}, \quad A_1=\frac{1}{2}(b+H_1)$$

имеет следующее достаточно громоздкое решение:

$$p=p_0(u_2)=C[1-A_1u_2]^{2/(1+A_1^4)}\left|\frac{\sqrt{C_1^2-4A_1^2(1-A_1u_2)^2}\pm C_1}{\sqrt{C_1^2-4A_1^2(1-A_1u_2)^2}\mp C_1}\right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)}\times$$
$$\times\exp\frac{2(A_1-b)}{(1+A_1^4)A_1(A_1u_2-1)}, \quad C=\text{const}. \tag{1.211}$$

Замечание 1.12. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.200). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4,w_3;\alpha)=\ln|\sin\alpha|+G_2\left(\sin\alpha,\frac{w_4}{\sin\alpha},\frac{w_3}{\sin\alpha}\right)=C_2=\text{const}. \tag{1.212}$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.200), (1.212) независимой системы третьего порядка (1.184)—(1.186). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.187), (1.188) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.189).

Искомые первые интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s)=\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s}=C''_{s+2}=\text{const}, \quad s=1,2, \tag{1.213}$$

$$\Theta_5(w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=C''_5=\text{const}, \tag{1.214}$$

при этом в левую часть равенства (1.214) вместо C_3, C_4 можно формально подставить интегралы (1.213) при $s=1,2$.

Теорема 1.11. *Система* (1.184)—(1.189) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов* (1.200), (1.212), (1.213), (1.214).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений общего случая при условии (1.167) имеет 12 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.24), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.64), циклические первые интегралы вида (1.22), первый интеграл вида (1.200), также имеется первый интеграл (1.212), который может быть найден из уравнения (1.210), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.213), (1.214).

7.5. Топологические аналогии. Имеют место следующие топологические и механические аналогии.

1. Движение свободного пятимерного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [65, 67]).
2. Движение закрепленного пятимерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [68]).
3. Вращение пятимерного твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [52, 53]).

О более общих топологических аналогиях см. также [1, 4, 6, 18].

2. Более общий класс динамических систем на касательном расслоении четырехмерной сферы

Как мы знаем, в динамике систем со многими степенями свободы часто возникают системы с пространствами положений — конечномерными сферами. Таким образом, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к данным сферам. Так, например, изучение пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [22, 23, 28]).

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики свободного пятимерного твердого тела в неконсервативном силовом поле также породили системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. При этом исследование проводилось, начиная от систем при отсутствии силового поля, и продолжалось системами при наличии неконсервативных силовых полей с дополнительными группами симметрий (см. [16, 17, 42, 43]).

Построение неконсервативного силового поля, действующего на пятимерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для пятимерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля (ср. с [65, 66]).

Естественным образом в рассматриваемый класс задач помещается классическая задача о движении материальной точки по поверхности четырехмерной сферы, вообще говоря, в неконсервативном поле сил.

В данном разделе 2 показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих в динамике пятимерного твердого тела, а также в динамике точки, на касательном расслоении к четырехмерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним (см. [44,46,48]) и обобщают ранее рассмотренные (см. также [57, 59]).

1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к четырехмерному многообразию. Рассмотрим гладкое четырехмерное риманово многообразие M^4 с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, \ldots, x^4)$ на многообразии порождает аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим касательное расслоение

$$T_*M^4\{z_4,\ldots,z_1;x^1,\ldots,x^4\},$$

где $z=(z_4,\ldots,z_1)$ — координаты в касательном пространстве. Если $z_i=\dot{x}^i$, $i=1,\ldots,4$, то уравнения геодезических линий на нем примут вид

$$\ddot{x}^i+\sum_{j,k=1}^{4}\Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k=0,\quad i=1,\ldots,4. \tag{2.1}$$

2. Системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. На касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{z_4,z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ к четырехмерной сфере $\mathbf{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3: 0\leqslant\alpha,\ \beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\ \beta_3 \bmod 2\pi\}$ рассмотрим следующую систему восьмого порядка:

$$\begin{cases}\dot{\alpha}=-z_4+bg(\alpha),\\ \dot{z}_4=F(\alpha)-(z_1^2+z_2^2+z_3^2)f(\alpha),\\ \dot{z}_3=z_3z_4f(\alpha)+(z_1^2+z_2^2)f(\alpha),\\ \dot{z}_2=z_2z_4f(\alpha)-z_2z_3f(\alpha)\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-z_1^2f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\ \dot{z}_1=z_1z_4f(\alpha)-z_1z_3f(\alpha)\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+z_1z_2f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases}\dot{\beta}_1=z_3f(\alpha),\\ \dot{\beta}_2=-z_2f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1},\\ \dot{\beta}_3=z_1f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1\sin\beta_2}.\end{cases} \tag{2.3}$$

Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — 2π-периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha=0 \bmod \pi/2$, $b\geqslant 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — (внешнее) силовое поле. О задачах как с внешним, так и внутренним полями см. также в [8, 10, 12].

Первое уравнение системы (2.2) и система (2.3) задают координаты $z_4,\ldots,z_1$ в касательном пространстве к сфере (являются обобщенными кинематическими соотношениями). При этом система (2.2), (2.3) без последнего уравнения является независимой подсистемой седьмого порядка (ввиду цикличности переменной β_3) (см. также [26, 27]).

Систему (2.2), (2.3) можно представить в маятниковом виде

$$\begin{cases}\ddot{\alpha}-b\dot{\alpha}\tilde{g}(\alpha)+F(\alpha)-[\dot{\beta}_1^2+\dot{\beta}_2^2\sin^2\beta_1+\dot{\beta}_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2]\dfrac{1}{f(\alpha)}=0,\\ \ddot{\beta}_1-b\dot{\beta}_1g(\alpha)f(\alpha)+\dot{\alpha}\dot{\beta}_1\left[\dfrac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right]-\left[\dot{\beta}_2^2+\dot{\beta}_3^2\sin^2\beta_2\right]\sin\beta_1\cos\beta_1=0,\\ \ddot{\beta}_2-b\dot{\beta}_2g(\alpha)f(\alpha)+\dot{\alpha}\dot{\beta}_2\left[\dfrac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right]+2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\dot{\beta}_3^2\sin\beta_2\cos\beta_2=0,\\ \ddot{\beta}_3-b\dot{\beta}_3g(\alpha)f(\alpha)+\dot{\alpha}\dot{\beta}_3\left[\dfrac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right]+2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}=0,\end{cases} \tag{2.4}$$

где $\tilde{g}(\alpha)=dg(\alpha)/d\alpha$.

3. Первые интегралы, метрики и силовые поля. При $b=0$ система (2.2), (2.3) является консервативной и обладает полным набором (пятью) первых интегралов (см. [49, 50, 54]):

$$F_1(z_4,z_3,z_2,z_1;\alpha)=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F(\xi)d\xi=C_1=\mathrm{const}, \tag{2.5}$$

$$F_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \exp \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.6}$$

$$F_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \exp \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.7}$$

$$F_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = z_1 \exp \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin\beta_1 \sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{2.8}$$

$$F_5(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{2.9}$$

При $b > 0$ система (2.2), (2.3) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [36, 38, 45]).

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.10}$$

а также

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha \sin\alpha}. \tag{2.11}$$

Случай (2.10) формирует класс систем, соответствующих пространственному движению динамически симметричного пятимерного твердого тела на нулевых уровнях первых интегралов (т.е. при наличии дополнительных групп симметрий), вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [47, 69] и предыдущий раздел 1 данной работы).

Случай (2.11) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на четырехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. При этом в последнем случае метрика на сфере индуцируется евклидовой метрикой всеобъемлющего пятимерного пространства. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (2.2), (2.3) описывает геодезический поток на четырехмерной сфере (см. также [2, 3]).

Замечание 2.1. В случае (2.10), если

$$g(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}, \tag{2.12}$$

то система (2.2), (2.3) описывает движение свободного пятимерного твердого тела в силовом поле под действием следящей силы (см. [41]). В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin\alpha, \tag{2.13}$$

то система (2.2), (2.3) описывает также закрепленный пятимерный маятник на обобщенном сферическом шарнире, помещенный в поток набегающей среды, заполняющей пятимерное пространство (см. [67, 68]), и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [30, 40]). Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы (2.2), (2.3) (см. [67, 68]).

Для полного интегрирования системы (2.2), (2.3) необходимо знать, вообще говоря, *семь* независимых первых интегралов. Однако после замены переменных в касательном пространстве

$$w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_3 = w = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_4 = z_4 \tag{2.14}$$

система (2.2), (2.3) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -w_4 + g(\alpha), \\ \dot w_4 = F(\alpha) - w_3^2 f(\alpha), \\ \dot w_3 = w_3 w_4 f(\alpha), \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{cases}\dot{w}_k = d_k \dfrac{1+w_k^2}{w_k}\dfrac{\cos\beta_k}{\sin\beta_k},\\ \dot{\beta}_k = d_k, \quad k=1,2,\end{cases} \tag{2.16}$$

$$\dot{\beta}_3 = \mathcal{Z}_1(w_1, w_2, w_3, w_4) f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1 \sin\beta_2}, \tag{2.17}$$

где $\mathcal{Z}_1(w_1, w_2, w_3, w_4) = z_1$ в силу замены (2.14), d_k, $k = 1, 2,$ — некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что для полной интегрируемости системы (2.15)—(2.17) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.15), по одному — для систем (2.16), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.17) (*т.е. всего пять*).

4. Случай (2.10)**.** Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a\alpha, \quad m = 2a-1, \quad m, a \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (2.13).

Теорема 2.1. *В случаях* (2.10), (2.18) *система* (2.2), (2.3) *обладает полным набором* (*пятью*)*, вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

Следствие 2.1. *Система* (2.4) *при условиях* (2.10), (2.18) *обладает пятью, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad z_i = u_i\tau^a, \quad i = 1, 2,$$

то поиск одного из первых интегралов

$$\Phi_1(w_4, w_3; \alpha) = C_1$$

системы (2.15) приведет к уравнению Абеля (см. [6])

$$[(a+1)u_2 - ab]u_1 du_2 = [1 - u_1^2 + au_2^2 - abu_2]du_1, \tag{2.19}$$

общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ если и интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций, то выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл

$$\Phi_2(w_4, w_3; \alpha) = C_2$$

системы (2.15) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b-u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + au_2^2 - abu_2}. \tag{2.20}$$

Первые интегралы для систем (2.16) имеют вид

$$\Phi_{k+2}(w_k; \beta_k) = \frac{\sqrt{1+w_k^2}}{\sin\beta_k} = C_{k+2} = \mathrm{const}, \quad k = 1, 2, \tag{2.21}$$

а дополнительный первый интеграл

$$\Phi_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5,$$

«привязывающий» уравнение (2.17), найдется из равенства

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = -\frac{z_1}{z_2\sin\beta_2}, \tag{2.22}$$

при этом, используя первый интеграл (2.21) при $k = 1, 2$, окончательно получим его вид:

$$\Phi_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \operatorname{arctg}\frac{C_4\cos\beta_2}{\sqrt{C_3^2\sin^2\beta_2 - C_4^2}} = C_5 = \mathrm{const}. \tag{2.23}$$

В частности, при $a = 1$ равенство (2.19) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_4}{\sin\alpha}, \frac{w_3}{\sin\alpha}\right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}.$$

5. Случай (2.11)**.** Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k\alpha}{\cos^k\alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.24}$$

Теорема 2.2. *В случаях* (2.11), (2.24) *система* (2.2), (2.3) *обладает полным набором* (*пятью*)*, вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

Следствие 2.2. *Система* (2.4) *при условиях* (2.11), (2.24) *обладает пятью, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad z_i = u_i\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k, \quad i = 1, 2,$$

то поиск одного из первых интегралов

$$\Phi_1(w_4, w_3; \alpha) = C_1$$

системы (2.15) приведет к уравнению Абеля (2.19) (только с подстановкой $a \leftrightarrow k$), общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл

$$\Phi_2(w_4, w_3; \alpha) = C_2$$

системы (2.15) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \frac{(b-u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + ku_2^2 - kbu_2}.$$

Первые интегралы для систем (2.16) имеют вид (2.20). А дополнительный первый интеграл

$$\Phi_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5,$$

«привязывающий» уравнение (2.17), найдется из равенства (2.22), при этом, используя первый интеграл (2.21) при $k = 1, 2$, окончательно получим его в виде (2.23).

В частности, при $k = 1$ равенство (2.19) ($a \leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_4\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{w_3\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{(w_4^2 + w_3^2)\cos^2\alpha - bw_4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha\cos\alpha} = C_1 = \mathrm{const}.$$

В предыдущих работах автора [67, 68] уже рассматривались задачи о движении свободного пятимерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к четырехмерной сфере. Данная работа присоединяет к данной задаче динамики многомерного твердого тела задачу о движении точки по четырехмерной сфере в неконсервативных силовых полях.

3. Системы на касательных расслоениях к гладкому четырехмерному многообразию

Выше было показано, что изучение пятимерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают диссипацией переменного знака, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выше был также введен класс задач о движении точки по гладкой четырехмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства.

В ряде случаев в системах с силовым полем с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Необходимо отметить, что полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (ср. с [5, 7, 20]).

В данном же разделе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к гладкому четырехмерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2 и 3 см. [55, 57]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы. Как известно, в случае четырехмерного гладкого риманова многообразия M^4 с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^4\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2, \dot\beta_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $\beta_3 = x^4$, $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot x^i + \sum_{j,k=1}^{4} \Gamma^i_{jk}(x)\dot x^j \dot x^k = 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \tag{3.1}$$

Изучим структуру уравнений (3.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^4. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot x^i = \sum_{j=1}^{4} R^{ij}(x) z_j, \tag{3.2}$$

которую почти всюду можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^{4} T_{ji}(x)\dot x^i,$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i, j = 1, \ldots, 4$, — функции от x^1, x^2, x^3, x^4, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (3.2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^4.

Справедливы следующие тождества:

$$\dot z_j = \sum_{i=1}^{4} \dot T_{ji}\dot x^i + \sum_{i=1}^{4} T_{ji}\ddot x^i, \quad \dot T_{ji} = \sum_{k=1}^{4} T_{ji,k}\dot x^k, \tag{3.3}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, \ldots, 4.$$

Подставляя в (3.3) уравнения (3.1), имеем:

$$\dot z_i = \sum_{j,k=1}^{4} T_{ij,k}\dot x^j \dot x^k - \sum_{j,p,q=1}^{4} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot x^p \dot x^q, \tag{3.4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot x^i$, $i = 1, \ldots, 4$, надо подставить формулы (3.2), в результате чего в правой части последнего равенства будет стоять квадратичная форма по переменнымЁz_j. Другими словами, равенство (3.4) можно переписать в виде

$$\dot z_i + \sum_{j,k=1}^{4} Q_{ijk}\dot x^j \dot x^k|_{(3.2)} = 0, \tag{3.5}$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{4} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{3.6}$$

Предложение 3.1. *Система* (3.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (3.2), (3.4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (3.1) к эквивалентной системе уравнений (3.2), (3.4) зависит как от замены переменных (3.2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

2. Достаточно общий случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = -z_4, \quad \dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \tag{3.7}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2, z_3, z_4 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических, в частности, на сфере, более общих поверхностях вращения и др. (см. [6, 27]):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (3.7) уравнения (3.4) примут вид

$$\dot{z}_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \tag{3.9a}$$

$$\dot{z}_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \tag{3.9b}$$

$$\dot{z}_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \tag{3.9c}$$

$$\dot{z}_4 = \Gamma^{\alpha}_{11} f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma^{\alpha}_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \tag{3.9d}$$

и уравнения (3.8) почти всюду эквивалентны составной системе (3.7), (3.9) на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ гладкого четырехмерного многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Для полного интегрирования системы (3.7), (3.9) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно будет меньше, что будет показано далее при изучении систем с диссипацией.

Предложение 3.2. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$\begin{cases} 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

то система (3.7), (3.9) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_4,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{3.11}$$

На первый взгляд, вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (3.11) не «заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (3.10) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных, вырождающиеся в обыкновенные). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (3.10) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k=1,2,3$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,2$, $h(\beta_2)$ системы (3.10) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (3.11) для системы (3.7), (3.9) уравнений геодезических (3.8). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (3.10) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (3.7) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = f(\alpha), \tag{3.12}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (3.10):

$$\begin{cases} 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2} + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)h^2(\beta_2) \equiv 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,2$, $h(\beta_2)$ зависят от коэффициентов связности через систему (3.13), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3.3. *Если выполнены свойства* (3.12), (3.13), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{3.14}$$

то система (3.7), (3.9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_2(z_3,z_2,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}\ \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{3.15}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Предложение 3.4. *Если выполнены условия предложения* 3.3, *а также*

$$g_1(\beta_1) = g_2(\beta_1) = g(\beta_1), \tag{3.16}$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{3.17}$$

то система (3.7), (3.9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{3.18}$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Предложение 3.5. *Если выполнены условия предложений* 3.3, 3.4 *и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) = \Gamma_3(\beta_2), \tag{3.19}$$

то система (3.7), (3.9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const}, \tag{3.20}$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}.$$

Предложение 3.6. *Если выполнены условия предложений* 3.3, 3.4, 3.5, *то система* (3.7), (3.9) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_5(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Phi_2^2(b) - C_4^2}}\, db = C_5 = \mathrm{const}, \tag{3.21}$$

куда после взятия интеграла (3.21) *вместо постоянных* C_3, C_4 *нужно подставить левые части равенств* (3.18), (3.20), *соответственно.*

Набор первых интегралов (3.11), (3.15), (3.18), (3.20), (3.21) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.7), (3.9) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

Как и выше, необходимо отметить, что вопрос о гладкости первого интеграла (3.21) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.21) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также (см. [30])).

3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы. Несколько модифицируя систему (3.7), (3.9) при условиях (3.12)—(3.14), (3.16), (3.17), (3.19), получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (3.22). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ гладкого четырехмерного многообразия

$M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_4, \\ \dot{z}_4 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11} f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma^{\alpha}_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \\ \dot{z}_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta) \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ \qquad\qquad - \Gamma^1_{33}(\alpha, \beta) \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \\ \dot{z}_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ \qquad\qquad - \Gamma^2_{33}(\alpha, \beta) \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ \qquad\qquad - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \\ \dot{\beta}_1 = z_3 f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \\ \dot{\beta}_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \end{cases} \tag{3.22}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 = 0. \end{cases}$$

Предложение 3.7. *Если выполнены условия предложения* 3.2, *то система* (3.22) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_4, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad F_1(\alpha) = 2 \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da. \tag{3.23}$$

Предложение 3.8. *Если выполнены условия предложений 3.3, 3.4, 3.5, то система* (3.22) *имеет три гладких первых интеграла вида* (3.15), (3.18), (3.20).

Предложение 3.9. *Если выполнены условия предложения 3.6, то система* (3.22) *имеет первый интеграл вида* (3.21).

Набор первых интегралов (3.23), (3.15), (3.18), (3.20), (3.21) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.22) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

Аналогично подчеркнем, что вопрос о гладкости первого интеграла (3.21) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (3.21) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [30]).

4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы. Теперь усложним систему (3.22) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot z_4 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma^\alpha_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \\ \dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ \qquad\qquad - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ \qquad\qquad - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ \qquad\qquad - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_3 f(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \\ \dot\beta_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \end{cases} \tag{3.24}$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \ddot\alpha - b\dot\alpha\tilde\delta(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\delta(\alpha) f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\delta(\alpha) f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 - b\dot\beta_3\delta(\alpha) f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0, \end{cases}$$

где $\tilde\delta(\alpha) = dg(\alpha)/d\alpha$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.24) при условиях (3.12), (3.13), (3.16), а также при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) = \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \tag{3.25}$$

Введем также (по аналогии с (3.13)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (3.10):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{3.26}$$

Для полного интегрирования системы (3.24) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}},$$

система (3.24) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -w_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot w_4 = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2, \\ \dot w_3 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4, \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\begin{cases} \dot w_2 = \pm w_3\sqrt{1+w_2^2}f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \dot\beta_2 = \pm\dfrac{w_2w_3}{\sqrt{1+w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\begin{cases} \dot w_1 = \pm w_3\sqrt{1+w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot\beta_1 = \pm\dfrac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}f(\alpha), \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\dot\beta_3 = \pm\frac{w_3}{\sqrt{1+w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \tag{3.30}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.27)—(3.30) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.27), по одному — для систем (3.28) и (3.29) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.30) (т.е. всего *пять*).

Теорема 3.1. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{3.31}$$

Тогда система (3.24) *при выполнении условий* (3.12)*,* (3.13)*,* (3.16)*,* (3.25)*,* (3.26) *обладает полным набором* (*пятью*) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Действительно, для начала в соответствие системе третьего порядка (3.27) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha)+\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)w_3^2}{-w_4+b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_3}{d\alpha} = \dfrac{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]w_3w_4}{-w_3+b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_4\delta(\alpha), \quad w_3 = u_3\delta(\alpha), \tag{3.33}$$

приводим систему (3.32) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_4}{d\alpha} + \delta'(\alpha)u_4 = \dfrac{F(\alpha)+\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u_3^2}{-u_4\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_3}{d\alpha} + \delta'(\alpha)u_3 = \dfrac{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\delta^2(\alpha)u_3u_4}{-u_4\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)}, \end{cases} \tag{3.34}$$

что почти всюду эквивалентно системе

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_4}{d\alpha} = \dfrac{F_3(\alpha)+\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_3^2+\delta'(\alpha)u_4^2-b\delta'(\alpha)u_4}{-u_4+b}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_3}{d\alpha} = \dfrac{-\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_3u_4+\delta'(\alpha)u_3u_4-b\delta'(\alpha)u}{-u_4+b}, \end{cases} \tag{3.35}$$

где $F_3(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}$. После выполнения условий (3.31) система (3.35) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_4}{du_3} = \frac{\lambda+\kappa u_3^2+u_4^2-bu_4}{(1-\kappa)u_3u_4-bu_3}. \tag{3.36}$$

Уравнение (3.36) имеет вид уравнения Абеля (см. [6]). В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_4^2+u_3^2-bu_4+\lambda}{u_3} = C_1 = \text{const}, \tag{3.37}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1\left(\frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{3.38}$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.27) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.37) при $u_3 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_4 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_3 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{3.39}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{3.40}$$

и фазовое пространство системы (3.23) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.39). Таким образом, в силу соотношения (3.37) первое уравнение системы (3.35) при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)}\frac{du_4}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_4 + u_4^2) - C_1U_1(C_1, u_4)}{-u_4 + b}, \tag{3.41}$$

где

$$U_1(C_1, u_4) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - bu_4 + \lambda)}\right\}, \tag{3.42}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.40). Тогда дополнительный первый интеграл для системы (3.27) имеет структурный вид

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.43}$$

и при $\kappa = -1$ он определяется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_4)du_4}{2(\lambda - bu_4 + u_4^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - bu_4 + \lambda)}\}/2},$$

где $u_4 = w_4/\delta(\alpha)$. При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно формально подставить левую часть равенства (3.38). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (3.38), (3.43) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (3.28) и (3.29) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1, 2, \tag{3.44}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (3.18), (3.20). Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.30), находится по аналогии с (3.21):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}}\, db = C_5 = \mathrm{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_3, C_4 можно формально подставить соответствующие левые части равенства (3.44).

5. Замечание о структуре первых интегралов систем с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.27) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [41]). При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (3.23), (3.15). В силу (3.31)

$$\Phi_1(z_4, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da \cong w_4^2 + w_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{3.45}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом, в силу (3.26) и (3.31)

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\; f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\} \cong w_3\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.46}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.45), (3.46) (или (3.23), (3.15)) также является первым интегралом системы (3.27) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 - bw_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{3.47}$$

и (3.46) по отдельности не является первым интегралом системы (3.27). Однако отношение функций (3.47), (3.46) является первым интегралом системы (3.27) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [6, 30]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Архимедовы равномерные структуры// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 46–51.
2. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Многообразия непрерывных структур// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 71–86.
3. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9.* — С. 119–211.
4. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
5. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5.* — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76.* — С. 22–39.
12. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
14. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Извю РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.

15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbb{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.

41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
54. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
58. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
60. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.

66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
68. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
69. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
70. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — С. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 95–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-95-106

УДК 517.933; 531.01

АЛГОРИТМЫ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Посвящается И. Т. Борисенку

Аннотация. В работе проведен качественный и численный математический эксперимент по диагностике системы управления летательным аппаратом при его планировании с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Показано, что предлагаемые алгоритмы диагностирования успешно работают при поиске различного рода опорных неисправностей, в частности, неисправностей датчиков управляющих сигналов с гиростабилизированной платформы, неисправностей, близких к опорным, при траекторных измерениях с ошибкой, а также в случае непрерывной экспресс-диагностики.

Ключевые слова: задача дифференциальной диагностики, система прямого (непрямого) управления, диагностирование, априорный список неисправностей.

ALGORITHMS FOR DIAGNOSING THE MOTION OF AIRCRAFTS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we perform qualitative and numerical mathematical experiments on diagnosing the control system of an aircraft during its planning from nearly orbital altitudes with an initial speed close to the first escape speed. We show that diagnostic algorithms proposed are effective in the search for various types of reference malfunctions, in particular, malfunctions in sensors of control signals from a gyro-stabilized platform, almost reference malfunctions in trajectory measurements with errors, and also in the case of continuous express diagnostics.

Keywords and phrases: problem of differential diagnostics, direct (indirect) control system, diagnostics, a priori list of malfunctions.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 62-xx

1. Введение. Как уже отмечалось ранее (см. [1, 8, 9]), задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля, т.е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, т.е. поиску происшедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри данной поверхности контроля (см. [3, 6, 25]).

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

информации может быть выбрана поверхность контроля. Задача же диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени. Эти обстоятельства иногда не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики (см. также [4, 5, 7]).

Рассматривается применение развиваемой методики диагностирования к теории летательных аппаратов.

В качестве численного эксперимента было рассмотрено движение летательного аппарата (ЛА), описываемого уравнениями, приведенными в [1]. ЛА находится в режиме планирующего спуска с высот, близких к орбитальным ($\cong$ 100 км), с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Воспроизведем полнее и уточним уравнения движения ЛА и покажем, что они приводятся в некотором смысле к каноническому виду.

Остановимся на общем описании рассматриваемого подхода подробнее. Проектирование современных систем управления движением сопряжено со значительными трудностями. Аналитическое исследование ограничено, поскольку порядок системы уравнений движения достаточно высок, сами уравнения нелинейны, нестационарны и многопараметричны. Имеются также такие факторы, как нецентральность поля тяготения, несферичность поверхности Земли и др.

В то же время можно решить рассматриваемый круг задач с помощью метода математического моделирования. Оно используется для синтеза законов управления летательных аппаратов, определения влияния ошибок датчиков инерциальной информации на характеристики движения.

2. Динамические системы, описывающие движение ЛА. Эти уравнения имеют следующую структуру.

Динамические уравнения центра масс (штрихом в системах нормального вида обозначается производная по времени)

$$V'_{y_i} = -W_{e_{y_i}} + g_{y_i} + \frac{F_{y_i}}{m}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где V_{y_i} — проекции вектора путевой скорости ЛА $\mathbf{V}$ на оси системы координат M_{y_i}, связанной с географической вертикалью и ориентированной в азимуте в ортодромической координатной сетке, $W_{e_{y_i}}$ — проекции составляющей ускорения точки M, обусловленной кривизной и вращением Земли на те же оси, g_{y_i} — проекции ускорения силы тяжести на рассматриваемую подвижную систему координат, F_{y_i} — проекции силы $\mathbf{F}$, действующей на ЛА, где $\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{T}$, $\mathbf{A}$ — аэродинамическая сила, $\mathbf{T}$ — сила тяги двигателя, m — масса ЛА.

Кинематические уравнения движения центра масс имеют вид:

$$\sigma'_1 = \frac{V_{y1}}{r \cos \sigma_2}, \quad \sigma'_2 = \frac{V_{y2}}{r}, \quad r' = V_{y3}. \tag{2}$$

Здесь σ_1 и σ_2 — ортодромические долгота и широта центра масс (точки M) летательного аппарата, r — радиус-вектор этой точки в системе O_{y_i}.

Уравнения движения ЛА вокруг центра масс в проекциях на оси $M_s = M_{s_1}, M_{s_2}, M_{s_3}$ системы, жестко связанной с ЛА, таковы:

$$\begin{gathered}
I_{s_1}\frac{d\omega_{s_1}}{dt} + (I_{s_3} - I_{s_2})\omega_{s_2}\omega_{s_3} - I_{s_2 s_3}(\omega_{s_2}^2 - \omega_{s_3}^2) = M_{s_1}, \\
I_{s_2}\frac{d\omega_{s_2}}{dt} + (I_{s_1} - I_{s_3})\omega_{s_1}\omega_{s_3} - I_{s_2 s_3}\left(\frac{d\omega_{s_3}}{dt} + \omega_{s_2}\omega_{s_3}\right) = M_{s_2}, \\
I_{s_3}\frac{d\omega_{s_3}}{dt} + (I_{s_2} - I_{s_1})\omega_{s_1}\omega_{s_2} - I_{s_2 s_3}\left(\frac{d\omega_{s_2}}{dt} - \omega_{s_1}\omega_{s_2}\right) = M_{s_3}.
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь I_{s_1}, I_{s_2}, I_{s_3} — главные, а $I_{s_2 s_3}$ — центробежный моменты инерции, ω_{s_i}, $i = 1, 2, 3,$ — угловые скорости ЛА; все — в проекциях на оси M_s. Так как

$$\omega_s = \omega_c + \alpha' + \beta' + \gamma'_c,$$

где ω_c — угловая скорость траекторной системы координат, α — угол атаки, β — угол скольжения, γ_c — угол скоростного крена, то имеем еще одну группу кинематических уравнений:

$$\omega_s = D_{sc}\omega_c + \gamma_c' D_{sn}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \beta'\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{4}$$

в которой сами уравнения можно разрешить относительно α', β', γ_c'. Здесь D_{sc}, D_{sn} — матрицы перехода (см. также [10, 11, 23]).

Кроме того, имеем группу уравнений, выражающих величину ω_c через U, σ_1, σ_2, ψ_c и θ, где U — угловая скорость вращения Земли, ψ_c — угол скоростного курса, θ — угол наклона траектории:

$$\omega_c = D_{cy}\left[U_y + \psi_c'\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \sigma_2'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] + \sigma_1' D_{c\zeta}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \theta'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где D_{cy}, $D_{c\zeta}$ — соответствующие матрицы перехода (см. также [10, 24]).

Из определения углов ψ_c и θ следуют соотношения

$$\psi_c' = -\frac{V_{y_1}'\cos\psi_c + V_{y_2}'\sin\psi_c}{V\cos\theta}, \quad \theta' = \frac{V_{y_3}'\cos\theta + \sin\theta(V_{y_1}'\sin\psi_c - V_{y_2}'\cos\psi_c)}{V}, \tag{6}$$

где V — абсолютная величина вектора путевой скорости ЛА. Уравнения (1)—(6) могут быть представлены в виде одного уравнения нормального вида на своем 14-мерном фазовом многообразии как

$$x' = K(x), \tag{7}$$

где x — 14-мерный вектор (см. также [1, 12, 16]):

$$x = (V_{y_1}, V_{y_2}, V_{y_3}, \psi_c, \theta, r, \lambda, \varphi, \omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3}, \alpha, \beta, \gamma_c). \tag{8}$$

Здесь (для простоты) рассмотрен случай, когда полюс ортодромии лежит на оси вращения Земли, т.е. $\sigma_1 = \lambda$, $\sigma_2 = \varphi$, где λ и φ — геоцентрические долгота и широта центра масс ЛА (см. [13,17,22]).

3. Структура системы управления ЛА. Аэродинамические силы и моменты, действующие на ЛА, определяются следующими выражениями:

$$\begin{gathered} X = c_x\frac{\rho V^2}{2}S, \quad Y = c_y\frac{\rho V^2}{2}S, \quad Z = c_z\frac{\rho V^2}{2}S,\\ M_{s_1} = \frac{\rho V^2}{2}Sb_a m_z, \quad M_{s_2} = \frac{\rho V^2}{2}Slm_x, \quad M_{s_3} = \frac{\rho V^2}{2}Slm_y, \end{gathered} \tag{9}$$

где ρ — плотность воздуха на высоте полета, S — характерная площадь ЛА, b_a — средняя аэродинамическая хорда, l — размах крыльев, c_x, c_y, c_z — аэродинамические коэффициенты сил, m_x, m_y, m_z — аэродинамические коэффициенты моментов.

Будем рассматривать аэродинамические коэффициенты в виде

$$c_x = c_{x\alpha}(M,\alpha) + c_{xTP}(M,h), \quad c_y = c_{y\alpha}(M,\alpha) + c_y^{\delta_b}(M)\delta_b, \quad c_z = c_z^{\beta}(M,\alpha)\beta + c_z^{\delta_H}(M,\alpha)\delta_H,$$

$$\begin{cases} m_x = m_{s_1} = m_{s_1\alpha}(M,\alpha) + m_{s_1}^{\omega_{s_1}}(M)\dfrac{b_a}{V}\omega_{s_1} + m_{s_1}^{\delta_b}(M)\delta_b,\\ m_y = m_{s_2} = m_{s_2}^{\beta}(M,\alpha)\beta + m_{s_2}^{\omega_{s_2}}(M)\dfrac{l}{2V}\omega_{s_2} + m_{s_2}^{\omega_{s_3}}(M)\dfrac{l}{2V}\omega_{s_3} + m_{s_2}^{\delta_H}(M,\alpha)\delta_H + m_{s_2}^{\delta_E}(M)\delta_E,\\ m_z = m_{s_3} = m_{s_3}^{\beta}(M,\alpha)\beta + m_{s_3}^{\omega_{s_2}}(M)\dfrac{l}{2V}\omega_{s_2} + m_{s_3}^{\omega_{s_3}}(M)\dfrac{l}{2V}\omega_{s_3} + m_{s_3}^{\delta_H}(M,\alpha)\delta_H. \end{cases}$$

Здесь δ_b, δ_E, δ_H имеют вполне ясный геометрический смысл, а именно, отклонение рулей высоты, элеронов и рулей направления, соответственно.

Структура системы управления отклонением рулей высоты, направления и элеронов зависит от выбранной программы движения. В данной работе рассмотрено управления следующего вида:

$$\delta_u = f(\delta_{u\max}, \delta_u^0), \quad u = b, E, H, \tag{10}$$

где $\delta_{u\max}$ — максимальная величина отклонения величин δ_b, δ_E, δ_H, соответственно, а f — некоторая (не обязательно гладкая) функция.

Переменные δ_u^0 определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \delta_b^0 &= r_1\omega_{s_1} - r_2\Phi[1] + f(\alpha_m, \sigma_b), \\ \delta_E^0 &= k_1\omega_{s_2} - k_2\Phi[2] + f(\gamma_m, \sigma_E) + k_7\Phi[3], \\ \delta_H^0 &= l_1\omega_{s_3} - l_2\Phi[3] + f(\beta_m, \sigma_H) + l_7\Phi[2]. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\Phi[1] = \theta'$, $\Phi[2] = \gamma_n - \gamma_s'$, $\Phi[3] = -\beta'$ — сигналы, поступающие с гироплатформы (см. [21]): значения углов тангажа (θ'), скольжения ($-\beta'$) и разности между программным (γ_n) и вычисленным (γ_s') значениями угла крена.

Сигналы с постоянными коэффициентами r_i, k_j, l_s формируются в зависимости от углового движения ЛА. Сигналы $f(\sigma_u)$ формируются в зависимости от характеристик траекторного движения ЛА. Здесь $f(\sigma_u)$ — также некоторая (не обязательно гладкая) функция. Сигналы формируются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= r_3(\alpha' - \alpha_n) + r_4(\tilde{\alpha}' - \alpha_n) + r_5\int\limits_{t_0}^{t}(\alpha' - \alpha_n)dt, \\ \sigma_E &= k_3(\sigma_{2n}'^0 - \sigma_{2n}) + k_4(\tilde{\sigma}_2'^0 - \tilde{\sigma}_{2n}) + k_5\int\limits_{t_0}^{t}(\sigma_2'^0 - \sigma_2)dt + k_6(\psi_s' - \psi_{sn}), \\ \sigma_H &= l_3(\sigma_{2n}'^0 - \sigma_{2n}) + l_4(\tilde{\sigma}_2'^0 - \tilde{\sigma}_{2n}) + l_5\int\limits_{t_0}^{t}(\sigma_2'^0 - \sigma_2)dt + l_6(\psi_s' - \psi_{sn}). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь величины K' (со штрихом) — суть вычисленные значения переменных, K_n (с индексом n) — программные значения этих переменных, r_i, k_j, l_s — постоянные коэффициенты, α_m, β_m, γ_m — постоянные, ограничивающие значения рассматриваемых сигналов траекторного слежения.

Значения коэффициентов r_i, k_j, l_s приведены в таблице 1.

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7
r	20	0	10	0	0	0	0
k	0,4	0,3	0	0	0	0	1
l	7	7	0	0	0	0	0,3

Уравнения (7) совместно с (8)—(12) и с учетом таблицы 1 могут быть представлены в следующем виде:

$$x'' = X(x) + A(x)\xi, \quad \xi = \Phi(\delta), \quad \delta = Bx^* + f(\sigma), \quad \sigma = Cx^{**}. \tag{13}$$

Здесь

$$x^* = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3}, \theta^*, \gamma_n - \gamma_s^*, -\beta), \quad x^{**} = (\alpha^* - \alpha_n, \psi_s^* - \psi_n, \sigma_s^* - \sigma_n)$$

— шестимерный и трехмерный векторы, составляющие которых представляют значения некоторых координат фазового вектора состояния x, вычисленные на ЛА в процессе полета или сигналов, поступающих с гироплатформы; $\delta = (\delta_b^0, \delta_E^0, \delta_H^0)$ — трехмерный вектор переменных вида (11);

$\Phi(\delta) = \big(f(\delta_{b\max}, \delta_b^0), f(\delta_{E\max}, \delta_E^0), f(\delta_{H\max}, \delta_H^0)\big)$ и $f(\sigma) = \big(f(\alpha_m, \sigma_b), f(\gamma_m, \sigma_E), f(\beta_m, \sigma_H)\big)$ — трехмерные векторы допустимых нелинейных функций, имеющих вид (11)—(12), где $\sigma = (\sigma_b, \sigma_E, \sigma_H)$ — трехмерный вектор сигналов (12);

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & -k_2 & k_7 \\ 0 & 0 & l_1 & 0 & l_7 & -l_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} r_3 & 0 & 0 \\ 0 & k_6 & 0 \\ 0 & 0 & l_6 \end{pmatrix}$$

— постоянные матрицы; в настоящей работе в численном эксперименте коэффициенты k_6 и l_6 принимались равными нулю.

Уравнение

$$x'' = X(x) + A(x)\xi,$$

где x — 14-мерный фазовый вектор (8) системы (13), $\xi = (\delta_b, \delta_E, \delta_H)$ — 3-мерный вектор управления, $X(x)$ и $A(x)$ — матрицы-функции с довольно громоздкими коэффициентами — здесь не приводятся (см. также [14, 18, 26]).

Система (13) представляет в настоящей работе систему с прямым перекрестным управлением по отклонениям рулей высоты, элеронов и направления.

4. Численный эксперимент и топологический анализ пространства неисправностей. Мы моделировали движение ЛА, представляющее собой планирующий спуск с высот, близких к орбитальным ($\cong$ 100 км), с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Программное движение определялось заданием программного угла атаки и угла крена.

Численный эксперимент заключался в моделировании различных неисправностей в системе управления (11) и (12). Был составлен список возможных неисправностей, в соответствии с классификацией неисправностей, приведенной в [17–19].

Первый список возможных неисправностей включал следующие неисправности, происходящие в первом канале управления (11), т.е. в канале управления рулями высоты δ_b.

4.1. Априорный список неисправностей № 1. Список состоял из 5 следующих неисправностей.

1. *Отказ датчика угловой скорости ω_{s_1}.* Неисправность моделировалась путем обнуления коэффициента r_1 в матрице B в момент времени $t = t_0$, t_0 — момент возникновения неисправности. Таким образом, при неисправности 1 из априорного списка неисправностей № 1 выполняется условие $r_1(t) = 0$, $t \geqslant t_0$.
2. *Отказ при формировании сигнала σ_b.* Моделируется путем обнуления коэффициента r_3 в матрице C: $r_3(t) = 0$, $t \geqslant t_0$.
3. *Нарушение симметрии функции $f(\delta_{b\max}, \delta_b^0)$.* Моделируется путем замены $f(\delta_{b\max}, \delta_b^0)$ на $f(\delta_{b\max}, \delta_b^0 + \delta')$, т.е. сдвига графика функции f по оси x.
4. *Заклинивание управляющего органа (руля высоты).* Моделируется как $\delta_b(t) = \delta_b(t_0)$ при $t \geqslant t_0$, где t_0 — момент возникновения неисправности.
5. *Активный отказ управляющего органа (руля высоты).* Значение δ_b в момент возникновения неисправности t_0 скачком меняется на $\delta_{b\max}$ — максимально возможное значение δ_b. Таким образом, при неисправности 5 из априорного списка неисправностей № 1 выполняется условие $\delta_b(t) = \delta_{b\max}$, $t \geqslant t_0$.

В процессе полета тяжелого ЛА, уравнения движения которого рассмотрены выше, характерно наличие двух существенно отличных по временным характеристикам движений. Это движения вокруг центра масс с постоянными времени порядка минут.

Все перечисленные выше неисправности приводят к изменениям относительно исправного движения вокруг центра масс. В то же время движения ЛА относительно центра масс при различных неисправностях различны между собой и приводят к выходу на поверхность контроля через разные промежутки времени, начиная с момента возникновения неисправности.

Численное интегрирование исправной и соответствующих неисправных систем (13) проводилось с шагом $h = 0{,}8$ с, характерным для движения относительно центра масс тяжелого ЛА с данными уравнениями движения.

4.2. Поверхность контроля. Вектор контроля $y(t)$ для данной системы состоял из одной компоненты — угла атаки α. Множество начальных условий представляло собой сферу $\mathbf{S}_{0,1}^{x_0}$ радиуса 0,1 (рад) в пространстве фазовых переменных с центром в точке

$$x_0 = (V_{y_1}^0, V_{y_2}^0, V_{y_3}^0, \psi_c^0, \theta^0, r^0, \lambda^0, \varphi^0, \omega_{s_1}^0, \omega_{s_2}^0, \omega_{s_3}^0, \alpha^0, \beta^0, \gamma_c^0).$$

Здесь используются следующие постоянные:

$$\begin{gathered} V_{y_1}^0 = 7350 \text{ км}, \quad V_{y_2}^0 = 0, \quad V_{y_3}^0 = 0, \\ \lambda^0 = 0, \quad \varphi^0 = 45^\circ, \quad \omega_{s_1}^0 = 0, \quad \omega_{s_2}^0 = 0, \quad \omega_{s_3}^0 = 0, \\ \alpha^0 = 0{,}519 \text{ рад}, \quad \gamma_c^0 = 0, \quad \beta^0 = 0, \\ r^0 = 646572 \text{ м} \quad (h = 100 \text{ км}). \end{gathered} \tag{14}$$

Промежуток времени процесса построения был выбран в пределах $[0; 2000 \text{ с}]$.

Для такого множества начальных условий X^0, вектора контроля $y(0)$ и априорного списка неисправностей методом статистических испытаний (см. [2, 20, 27]) была получена поверхность контроля π_k — отрезок $[0{,}499; 0{,}539]$ (в радианах). При исправном движении ЛА значение угла атаки находится внутри π_k. Поверхность контроля построена с доверительной вероятностью, не меньшей 0,95 (доказанное утверждение).

4.3. Обнаружение неисправностей. Путем численного интегрирования системы (13) моделировалось исправное функционирование объекта (полет ЛА), затем возникновение некоторой (j-й) неисправности из априорного списка в момент времени t_0 и дальнейшее функционирование вплоть до выхода траектории на поверхность π_k. Времена выхода на π_k для разных неисправностей из списка приведены в следующей таблице 2.

Таблица 2

номер неисправности	1	2	3	4	5
время выхода на поверхность контроля π_k (сек)	28	118	16	36	2,4

По выходе траектории на π_k включается алгоритм диагностирования с вектором диагностирования $z = \alpha$, т.е. содержащим ту же компоненту фазового вектора, что и вектор контроля.

Характеристиками алгоритма являются время диагностирования τ и число измерений N (так как численное интегрирование осуществлялось с шагом $h = 0{,}8$ с, то N и τ связаны соотношением $\tau = Nh$).

Численный эксперимент показал, что для всех номеров i из априорного списка неисправностей алгоритм диагностирования правильно определяет априорные неисправности при $N = 3$ ($\tau = 2{,}4$ с). Моделировалось также обнаружение неисправностей с вектором диагностирования $\bar{z} = (\omega_{s_1}^0, \omega_{s_2}^0, \omega_{s_3}^0)$. Численный эксперимент также показал, что для $\bar{z}$ все неисправности из априорного списка определялись однозначно за число измерений $N = 3$.

Прежде чем переходить к неисправностям не из априорного списка, сделаем ряд топологических замечаний.

Определение 1. Диагностическим пространством назовем совокупность датчиков, которой становится в соответствие набор возможных опорных неисправностей H_j с их окрестностями O_j, подвергающихся диагностированию посредством опорных невырожденных неисправностей из класса возможных.

Уточним математическую структуру всего диагностического пространства:

$$(M; O_1, O_2, \ldots, O_l; A_1, A_2, A_3), \tag{15}$$

где M — множество рассмотренных неисправностей $H_1, \ldots, H_l$ вместе с их окрестностями $O_1, \ldots, O_l$. Аксиомы A_1, A_2, A_3 определяются следующим образом:

$$A_1 : \forall H_j \in M \; \exists O_j \; (H_j \subset O_j);$$
$$A_2 : \forall O_j \; \exists H_j \; (H_j \subset O_j);$$
$$A_3 : H_j \subset O_j \cap O_k \Rightarrow \exists O_\mu (H_j \subset O_\mu \subset O_j \cap O_k \vee O_\mu \subset O_j \cup O_k).$$

Аксиома A_1 утверждает, что окрестности O_j, являющиеся подмножествами множества M, покрывают все M, а из аксиомы A_2 следует, что эти окрестности не пусты.

Аксиома A_3 позволяет обеспечить непрерывный процесс приближения к элементу H_j:

$$H_j = \lim_{\mu \to \infty} O_\mu \iff \forall O_\mu \exists \overline{M} (\mu > \overline{M} \Rightarrow H_j \subset O_\mu),$$

каждая окрестность O_μ которого содержит H_j и «близкие» к H_j непредвиденные и не содержащиеся в рассматриваемом наборе неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях O_j, надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей.

Если же под элементом x понимать не только событие H_j, но и непредвиденное событие (не включенное в список H возможных неисправностей, которое может произойти в любой точке M и которое требуется диагностировать посредством H_j, то аксиомы математической структуры диагностического пространства (15) могут быть записаны в следующем виде:

$$A_1 : \forall x \in M \exists O_i (x \in O_i),$$

т.е. окрестности покрывают все M;

$$A_2 : \forall O_i \exists x (x \in O_i),$$

т.е. окрестности не пусты;

$$A_3 : x \in O_i \cap O_j \Rightarrow \exists O_k (x \in O_k \subset O_i \cap O_j \vee O_k \subset O_i \cup O_j),$$

т.е. окрестности можно измельчать и обеспечивать процесс приближения к элементу x.

Предел последовательности $\{O_k\}$ можно определить как элемент

$$x = \lim_{k \to \infty} O_k,$$

каждая окрестность $O_j(x)$ которого содержит H_j и «близкие» к H_j непредвиденные и не содержащиеся в наборе неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях $O_j(H_j)$, надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей:

$$x = \lim_{k \to \infty} O_k \iff \forall O_k(x) \exists \overline{K} (k > \overline{K} \Rightarrow x \in O_k, H_j \subset O_k, j = 1, \ldots, l).$$

Математическая структура диагностического пространства (15) позволяет обеспечить ситуацию, при которой решение рассматриваемой динамической системы и системы с неисправностями в системе управления с одинаковыми начальными условиями x^0 из некоторого ограниченного пространства будут отличаться друг от друга, а решение рассматриваемой системы с опорной неисправностью H_j и с не предусмотренной априорным списком (непредвиденной) неисправностью из окрестности O_j этой опорной неисправности с одинаковыми начальными условиями x^0 будут «близкими», то есть «мало» отличаться друг от друга, и они могут быть диагностированы как опорные неисправности.

Это во всяком случае будет справедливо для непересекающихся окрестностей O_j, $j = 1, \ldots, l$, или окрестностей, пересекающихся только вдоль прямых по оси времени.

Теперь переходим к неисправностям не из априорного списка.

4.4. Определение неисправностей не из априорного списка. Располагая априорным списком неисправностей, можно определить неисправность, не находящуюся в списке, но близкую к одной из списочных. Были рассмотрены две неисправности не из списка.

1. *Постепенное ухудшение качества показаний датчика угловой скорости* $\omega^0_{s_1}$ *вплоть до полного исчезновения поступающего с него сигнала.* Эта неисправность моделировалась путем уменьшения r_1 до нуля по линейному закону:

$$r_1(t) = r_{1N}c_1(t - t_0), \quad t > t_0,$$

   где r_{1N} — номинальное значение коэффициента r_1, c_1 — отрицательная константа. Достигнув нуля, значение r_1 больше не меняется. Значение $r_1 = 0$ достигается за время $\tau \cong 30$–40 с, т.е. после выхода неисправной системы на поверхность контроля. Таким образом, эта неисправность близка к неисправности из априорного списка неисправностей № 1, но не совпадает с ней, так как в момент выхода на π_k коэффициент r_1 еще не равен нулю.
2. *Постепенный отказ в формировании сигнала* σ_b. Моделируется функцией

$$r_3(t) = r_{3N}c_3(t - t_0), \quad t > t_0.$$

   Здесь r_{3N} — номинальное значение коэффициента r_3, c_3 — некоторая отрицательная константа. Достигнув нуля, величина r_3 далее не меняется. Значение $r_3 = 0$ достигается за время $\tau \cong 140$–150 с, т.е. после выхода системы на π_k. Эта неисправность близка к неисправности из априорного списка неисправностей № 1.

Линейный закон в последних двух случаях 1 и 2 из раздела 4.4 взят, в принципе, на предварительном этапе. Ну а в дальнейших исследованиях предполагается также и нелинейная аппроксимация рассматриваемых величин.

Обнаружение неисправностей 1 и 2 из раздела 4.4 (т.е. не из априорного списка неисправностей № 1) моделировалось следующим образом: возникновение неисправности 1 (неисправности 2) в момент t_0, включение алгоритма на выходе на π_k (время выхода на π_k для неисправности 1 — 78 с, для неисправности 2 — 224 с), включение алгоритма с одним из векторов диагностирования z, $\bar{z}$ и выбор минимума из S^N_j, $j = 1, \ldots, 5$.

Обнаружением рассматриваемой неисправности 1 (неисправности 2) из раздела 4.4 в данном случае является определение случившейся неисправности как неисправности 1 (неисправности 2) из априорного списка неисправностей № 1.

Численное моделирование показало, что для $N = 5$ ($\tau = 4$ с) алгоритм с векторами диагностирования z и $\bar{z}$ правильно обнаруживают рассматриваемые неисправности 1 и 2.

4.5. Априорный список неисправностей № 2. Каждая неисправность из этого списка характеризовалась наличием функций f_j, $j = 1, \ldots, 17$, где f_j содержала j-й набор значений коэффициентов r_1, r_3, k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3 в цепях формирования сигналов δ^0_u из (11). Различные комбинации приведены в таблице 3. В ней индекс Nom означает номинальное значение коэффициента. Из таблицы видно, что неисправности с номерами 1—3 относятся к первому каналу управления из (11), формирующему величину δ_b, с номерами 4—10 — ко второму (формирующему величину δ_E), а с номерами 11—17 — к третьему (формирующему величину δ_H).

По этим опорным неисправностям проводилось затем определение не списочных неисправностей в каналах управления. В этом случае распознавался только номер канала: при номере i минимального из чисел S^N_j, $j = 1, \ldots, 17$, равном 1, 2 или 3, неисправность определялась как случившаяся в первом канале управления (δ_b), при номере $i = 4, \ldots, 10$, — во втором (δ_E), при номере $i = 11, \ldots, 17$, — в третьем (δ_H).

Поверхность контроля π_k в данном случае при векторе контроля $y = \alpha$ и множестве начальных условий была получена такой же, как и для априорного списка неисправностей № 1 (множество начальных условий такое же, как и для априорного списка неисправностей № 1): $\pi_k : [0{,}499; 0{,}539]$.

Численное моделирование показало, что диагностирование неисправностей с векторами диагностирования $z = \alpha$ и $\bar{z} = (\omega^0_{s_1}, \omega^0_{s_2}, \omega^0_{s_3})$ за число измерений $N = 8$ ($\tau = 6{,}4$ с) привело к правильному определению номера канала, в котором произошла неисправность. Набор не списочных неисправностей, для которых проводилось определение номера неисправного канала, приведен в таблице 4.

Таблица 3

N	r_1	r_3	k_1	k_2	k_3	l_1	l_2	l_3
1	0	Nom						
2	Nom	0						
3	0	0						
4			0	Nom	Nom			
5			Nom	0	Nom			
6			Nom	Nom	0			
7			0	0	Nom			
8			Nom	0	0			
9			0	Nom	0			
10			0	0	0			
11						0	Nom	Nom
12						Nom	0	Nom
13						Nom	Nom	0
14						0	0	Nom
15						Nom	0	0
16						0	Nom	0
17						0	0	0

Номинальные значения коэффициентов в цепях управления (13) приведены в таблице 1. При этом были выбраны следующие значения постоянных:

$$r_1 = 20, \quad r_3 = 10, \quad k_1 = 7, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0{,}3, \quad l_1 = 7, \quad l_2 = 1, \quad l_3 = 0{,}7.$$

4.6. Обнаружение неисправностей без применения метода поверхности контроля. Возможно обнаружение неисправностей по алгоритму диагностирования без построения самой поверхности контроля π_k. При этом:

1. Под номером 0 в априорный список неисправностей вносится *исправная* система.
2. Алгоритм диагностирования, в принципе, включается *циклически*, с некоторым интервалом времени Δt.
3. Если обнаружена так называемая «неисправность» под номером 0 — то есть система *исправна*, — продолжается функционирование объекта до момента нового включения алгоритма диагностирования.
4. Если обнаружена неисправность с номером $i \neq 0$, выдается сообщение *о наличии этой неисправности.*

Численное моделирование диагностики с циклическим включением алгоритма показало, что при интервалах включения алгоритма $\Delta t = 10, 20, 30$ с все вышеперечисленные неисправности из априорного списка неисправностей № 1 и априорного списка неисправностей № 2 были правильно определены.

Таблица 4

Номер канала	Коэффициенты в цепи управления		
1	$r_1 = 5$	$r_3 = 10$	
1	$r_1 = 1$	$r_3 = 5$	
1	$r_1 = 0$	$r_3 = 2$	
2	$k_1 = 0{,}5$	$k_2 = 1$	$k_3 = 0{,}3$
2	$k_1 = 1$	$k_2 = 0$	$k_3 = 0$
2	$k_1 = 3$	$k_2 = 0$	$k_3 = 1$
3	$l_1 = 3$	$l_2 = 1$	$l_3 = 0{,}7$
3	$l_1 = 1$	$l_2 = 0$	$l_3 = 0{,}3$
3	$l_1 = 1$	$l_2 = 0$	$l_3 = 0$

Алгоритм диагностирования работал с векторами диагностирования $z = \alpha$ и $\bar{z} = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3})$ и числом измерений $N = 5$ ($\tau = 4$ с).

Таким образом, с помощью предлагаемого алгоритма диагностирования численным экспериментом показана возможность диагностирования неисправностей датчиков управляющих сигналов, формирующих СУ движением ЛА и, в частности, датчиков управляющих сигналов с гиростабилизированной платформы (см. также [15, 21]).

Таблица 3 представляет собой в некотором роде опорные неисправности. В этой таблице неисправности 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 17 формируются, в частности, отказами датчиков сигналов управления с гиростабилизированной платформы. Эти неисправности правильно диагностируются.

По опорным неисправностям (таблица 3) проводилось диагностирование не списочных неисправностей (таблица 4) в каналах управления движением ЛА (неисправности 5, 6, 8, 9 формируются в таблице 4 и с помощью отказов датчиков сигналов управления с гиростабилизированной платформы). В этом случае распознавался только номер канала управления движением летательного аппарата. Численное моделирование показало, что диагностирование неисправностей за вполне приемлемое время привело к правильному определению номера сигнала управления, в котором произошла неисправность.

Численный эксперимент, таким образом, показал работоспособность предлагаемого алгоритма диагностирования.

5. Диагностика в условиях измерения части фазового вектора. Для практического применения алгоритма диагностирования неисправностей, как показано в предыдущем разделе о численном эксперименте, требуется знание начальных условий для всего 14-мерного фазового вектора состояния x. Это несколько затрудняет возможность практического применения алгоритма диагностирования неисправностей.

Из системы уравнений (13) может быть выделена динамическая подсистема из 3-х уравнений (рассматриваемая на алгебре Ли so(3)) относительно угловых скоростей ω_{s_i}, $i = 1, 2, 3$. В нормальном виде она может быть представлена следующим образом:

$$\omega'_{s_1} = \frac{\rho V_e^2}{2}\frac{Sb_a}{I_{s_1}}\left(m_{s_1}^{\alpha} + m_{s_1}^{\delta_e}\delta_e + m_{s_1}^{\omega_{s_1}}\frac{b_a}{V_e}\omega_{s_1}\right) + \frac{I_{s_2} - I_{s_3}}{I_{s_1}}\omega_{s_2}\omega_{s_3} + \frac{M_{s_1}^{\partial}}{I_{s_1}},$$

$$\omega'_{s_2} = \frac{\rho V_e^2}{2}\frac{SL}{I_{s_2}}\left(m_{s_2}^{\beta}(\beta - \beta_e) + m_{s_2}^{\delta_E}\delta_E + m_{s_2}^{\delta_H}\delta_H + m_{s_2}^{\omega_{s_2}}\frac{L}{2V_e}\omega_{s_2}\right) + \frac{I_{s_3} - I_{s_1}}{I_{s_2}}\omega_{s_1}\omega_{s_3} + \frac{M_{s_2}^{\partial}}{I_{s_2}},$$

$$\omega'_{s_3} = \frac{\rho V_e^2}{2}\frac{SL}{I_{s_3}}\left(m_{s_3}^{\beta}(\beta-\beta_e) + m_{s_3}^{\delta_H}\delta_H + m_{s_3}^{\omega_{s_2}}\frac{L}{2V_e}\omega_{s_2} + m_{s_3}^{\omega_{s_3}}\frac{L}{2V_e}\omega_{s_3}\right) + \frac{I_{s_1}-I_{s_2}}{I_{s_3}}\omega_{s_1}\omega_{s_2} + \frac{M_{s_3}^{\partial}}{I_{s_3}}.$$

Эти уравнения имеют место при совпадении главных осей инерции с так называемыми «строительными осями», т.е. при тензоре инерции следующего вида

$$I = \begin{pmatrix} I_{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{s_3} \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ, L, S, I_{s_i} — вполне определенные физические константы, m_{s_i} — медленно меняющиеся коэффициенты аэродинамических моментов, которые можно считать постоянными на времени работы алгоритма диагностирования. Величины ω_{s_i} — наблюдаются и, таким образом, начальные условия для уравнений известны. Величины δ_e, δ_E, δ_H известны в любой момент времени, так как это — формируемое управление.

Таким образом, измеряя величины V_e, $\beta-\beta_e$, присутствующие а правой части, можно замкнуть систему уравнений и численно ее интегрировать на некотором промежутке времени (диагностирования) $[t_0, t]$ с начальными условиями $\omega_{s_i}(t_0)$.

Численный эксперимент представлял собой диагностирование неисправностей из априорного списка неисправностей № 1 в условиях неточных измерений величин V_e, $\beta-\beta_e$ (измеренные значения отличались (при каждом измерении) на 5–10% от действительных). Измеряемый вектор $z(t) = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3})$, компоненты расчетного вектора z_j получались путем численного интегрирования системы. Алгоритм диагностирования работал циклически (под № 0 в него была включена исправная система) с интервалом включения 15–20 с и правильно определял происшедшее в системе управления ЛА неисправности за 15–20 измерений (8–14 с).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики// Фундам. прикл. мат. — 1999. — *5*, № 3. — С. 775–790.
2. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
3. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем// Автомат. телемех. — 1994. — № 3. — С. 24–36.
4. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование динамических систем// Автомат. телемех. — 1980. — № 3. — С. 96–121..
5. *Окунев Ю. М., Садовничий В. А., Самсонов В. А., Черный Г. Г.* Комплекс моделирования задач динамики полета// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — № 6. — С. 66–75.
6. *Пархоменко П. П., Сагомонян Е. С.* Основы технической диагностики. — М.: Энергия, 1981.
7. *Чикин М. Г.* Системы с фазовыми ограничениями// Автомат. телемех. — 1987. — № 10. — С. 38–46.
8. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: «Экзамен», 2004.
9. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. Изд. 2. — М.: «Экзамен», 2007.
10. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 4. — С. 55–66.
11. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 1. — С. 97–115.
12. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 3. — С. 73–90.
13. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 5. — С. 31–44.
14. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 1. — С. 45–52.

15. *Шамолин М. В.* Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электрон. модел. — 2011. — *33*, № 3. — С. 121–126.
16. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *150*. — С. 88–109.
17. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 1. Уравнения движения и классификация неисправностей// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2019. — *25*, № 1. — С. 32–43.
18. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 2. Задача дифференциальной диагностики// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2019. — *25*, № 3. — С. 22–31.
19. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 3. Задача контроля// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2019. — *25*, № 4. — С. 36–47.
20. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 4. Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений)// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2020. — *26*, № 1. — С. 36–47.
21. *Шамолин М. В., Кругова Е. П.* Задача диагностики модели гиростабилизированной платформы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *160*. — С. 137–141.
22. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
23. *Beck A., Teboulle M.* Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization// Oper. Res. Lett. — 2003. — *31*, № 3. — P. 167–175.
24. *Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A.* The ordered subsets mirror descent optimization method with applications to tomography// SIAM J. Optim. — 2001. — *12*, № 1. — P. 79–108.
25. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — *114*, № 1. — P. 976–1024.
26. *Su W., Boyd S., Candes E.* A differential equation for modeling Nesterov's accelerated gradient method: Theory and insights// J. Machine Learning Res. — 2016. — № 17 (153). — P. 1–43.
27. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru`, `shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 107–118
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-107-118

УДК 517.933; 531.01

АЛГОРИТМЫ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ПРЯМОГО И НЕПРЯМОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Посвящается И. Т. Борисенку

Аннотация. Рассмотрена диагностика неисправностей в системе непрямого управления объектом, движение которого описывается нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями третьего порядка (задача Б. В. Булгакова). Рассматривается также диагностика неисправностей в одной системе прямого управления движением летательного аппарата, которое может быть описано нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. В соответствии с разработанной ранее методикой построен алгоритм диагностирования.

Ключевые слова: задача дифференциальной диагностики, система непрямого управления, система прямого управления, диагностирование, сфера контроля, асимптотическая устойчивость.

DIAGNOSTIC ALGORITHMS IN SOME SYSTEMS OF DIRECT AND INDIRECT CONTROL

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. We discuss the diagnostics of malfunctions in a system of indirect control of an object whose motion is governed by third-order nonlinear ordinary differential equations (B. V. Bulgakov's problem). We also consider diagnostics of malfunctions in one system of direct control of the aircraft described by second-order nonlinear differential equations. Using methods developed earlier, we construct a diagnostic algorithm.

Keywords and phrases: problem of differential diagnostics, indirect control system, direct control system, diagnostics, sphere of control, asymptotic stability.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 62-xx

1. Введение. Задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления, в решение которой значительный вклад внес И. Т. Борисенок (см. [1, 2]), может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля, т.е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, т.е. поиску происшедшей неисправности (см. [8, 9]). Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри данной поверхности контроля (см. [10, 11, 22]).

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля (см. [17, 18]).

Задача диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени, например, за полупериод или за четвертую часть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства иногда не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики.

2. Задача контроля как начальная задача диагностики. Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$x' = f_0(x,t), \quad x(t_0) = x^0 \in S^0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T_0, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где x — n-мерный фазовый вектор системы, $f_0(x,t)$ — непрерывная (или гладкая) вектор-функция, S^0 — известная с центром в начале координат и радиуса R^0 сфера начальных значений, T_0 — конечное время.

Предположим, что тривиальное решение системы (1) при условии

$$f_0(0,t) \equiv 0, \quad \forall t \in [t_0, T_0],$$

асимптотически устойчиво и описывает желаемое движение, которое обеспечивается во времени в рассматриваемой области пространства системой управления (СУ) посредством функции $u(t)$. Структура СУ (управление $u(t)$) и соответствующие параметры выбираем, исходя из цели управления и условий устойчивости системы (1), полученных, например, с помощью некоторой функции Ляпунова $v(x,t) > 0$. Систему (1), удовлетворяющую перечисленным условиям, обычно называют исправной (см. [27, 28]).

Пусть в СУ движением данного объекта может произойти l неисправностей. Формально определим неисправность следующим образом. Априори известно, что в некоторый случайный момент времени t правая часть системы (1) изменяется каким-либо из l способов. При этом система (1) заменяется одной из систем следующего вида:

$$x' = f_j(x,t), \quad x(t_0) = x^0 \in S^0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T_0, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{2}$$

Фазовая траектория системы (1) после возникновения неисправности в некоторый момент времени непрерывно продолжается некоторой траекторией одной из систем вида (2).

Предположим, что наблюдение за некоторыми компонентами фазового вектора (данные компоненты, как известно, образуют вектор контроля $y(t)$ (см. [30, 31]), размерность которого m, очевидно, не превзойдет размерность n фазового вектора $x(t)$) дает возможность судить о том, что система вида (2) исправна, или что в этой системе произошла неисправность. Задачу контроля сформулируем так.

В фазовом пространстве вектора контроля $y(t)$ требуется построить сферу S_R радиуса R такую, чтобы фазовые траектории вектора контроля, при интегрировании системы (1) с начальными условиями из некоторой выбранной сферы S^0 в течение времени $t < T_0 - t_0$ лежали внутри сферы S_R, а траектории систем вида (2) пересекались со сферой S_R.

Пусть фазовая траектория системы (1) находится в малой окрестности начала координат, а неисправности таковы, что они доставляют неустойчивость тривиального решения системы (1) (см. [3, 4, 7]). В некоторый случайный момент времени происходит неисправность, т.е. непрерывный переход на траекторию одной из систем вида (2), которая выходит из окрестности начала координат.

В этом случае, проводя розыгрыш начальных условий x^0 из ограниченного множества S^0 и с этими начальными условиями интегрируя систему (1) на интервале времени $[t_0, T_0]$, можно построить m ансамблей портретов координат вектора контроля $y(t)$. В качестве сферы контроля S_R можно выбрать сферу, охватывающую объем ансамблей.

Изложенный подход позволяет решать задачу контроля и в случае, когда среди систем вида (2) имеются устойчивые системы (т.е. системы, тривиальное решение которых асимптотически устойчиво). Траектории $y(t)$ таких систем, выходящие из сферы S^0, также должны пересекать сферу S_R.

Рассмотрим также сферу контроля S_R и квадратичную форму

$$(y, y') = 0.$$

Этим уравнением для каждой из систем вида (2) определяется объем траекторий вектора контроля. Границу этого объема изнутри будем аппроксимировать некоторой конической поверхностью, пересечение которой со сферой S_R обозначим через S_R^j, $j = 1, \dots, l$. Фазовые траектории вектора контроля $y(t)$, полученные интегрированием j-й системы вида (2) с начальными условиями из сферы S^0 ($R^0 < R$), будут выходить из сферы S_R через множество S_R^j. Те множества S_R^j, которые не пересекаются с другими траекториями вектора контроля, определяют номер неисправности. В противном случае j-я гипотеза отбрасывается сразу (см. также [12, 13, 19, 20]).

Таким образом, уже при решении задачи контроля можно уменьшить список систем вида (2) и даже диагностировать некоторые неисправности.

3. Некоторая динамическая система с непрямым управлением. Рассмотрим динамическую систему с непрямым управлением, которая впервые изучена Б. В. Булгаковым:

$$\begin{cases} T^2\eta'' + U\eta' + k\eta = T^2\xi, \\ \xi' = \varphi(\sigma), \\ \sigma = a\eta + E\eta' + G^2\eta'' - \dfrac{1}{l}\xi. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь T^2 — постоянная, характеризующая инерционность объекта управления, $U > 0$ и $k > 0$ — его естественное демпфирование и восстанавливающая сила; a, E, G^2, l — постоянные параметры системы управления. Величина $\varphi(\sigma)$ принадлежит к классу так называемых допустимых функций и удовлетворяет условиям

$$\varphi(\sigma) = 0 \ \text{ при } \ \sigma = 0 \quad \text{и} \quad \sigma\varphi(\sigma) > 0 \ \text{ при } \ \sigma \neq 0.$$

Будем считать, что в задаче (3) мы параметры T^2, U, k не изменяются в процессе движения, а параметры a, E, G^2, l в процессе движения могут претерпевать изменения.

Сначала необходимо найти условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы (3) в пространстве ее параметров.

3.1. Достаточные условия устойчивости. Уравнения (3) запишем в следующей форме ($\eta = x_1$, $\eta' = x_1' = x_2$):

$$x' = Ax + b\xi, \quad \xi' = \varphi(\sigma), \quad \sigma = C^*x - \rho\xi. \tag{4}$$

Здесь

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix};$$

$$a_1 = \frac{U}{T^2} > 0, \quad a_2 = \frac{k}{T^2} > 0, \quad \rho = \frac{1}{l} - G^2, \quad \gamma_1 = E - U\frac{G^2}{T^2}, \quad \gamma_2 = a - k\frac{G^2}{T^2};$$

звездочкой обозначено транспонирование. Матрица A в (4) является «устойчивой», поскольку корни ее характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

имеют отрицательные действительные части (E — единичная матрица).

Приведем уравнения (4) к виду ($x' = \zeta$)

$$\zeta' = A\zeta + b\varphi(\sigma), \quad \sigma' = C^*\zeta - \rho\varphi(\sigma). \tag{5}$$

При этом для невырожденности преобразования координат
$$\zeta = Ax + b\xi, \quad \sigma = C^* x - \rho\xi, \tag{6}$$
необходимо и достаточно, чтобы следующий определитель был отличен от нуля:
$$\begin{vmatrix} A & b \\ C^* & -\rho \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$
Поскольку $|A| = a^2 \neq 0$, из (7) получаем условие
$$\rho \neq -C^* A^{-1} b = \frac{\gamma_2}{a^2} \quad \text{или} \quad a \neq \frac{1}{l}\frac{k}{T^2}. \tag{8}$$
Задача состоит в определении такой области значений параметров (регулятора), при которых гарантируется асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (5).

Возьмем функцию Ляпунова
$$V = \zeta^* B\zeta + \int\limits_0^\sigma \varphi(s)ds.$$
Ее полная производная в силу системы (5) имеет вид
$$-\dot V\big|_{(5)} = \begin{pmatrix} \zeta^* & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & d \\ d^* & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \varphi \end{pmatrix}, \tag{9}$$
где
$$-C = A^* B = BA, \quad -d = Bb + \frac{1}{2}C. \tag{10}$$
Пусть
$$B = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ q_0 & r_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}.$$
Очевидно, что если выполнены неравенства
$$p > 0, \quad r - q^2 > 0, \tag{11}$$
то матрица C положительно определена.

Из второго неравенства (11) следует, что должно быть выполнено строгое неравенство
$$r > 0. \tag{12}$$
Из первого равенства (10) находим
$$p = 2a_2 q_0, \quad q = a_1 q_0 + a_2 r_0 - p_0, \quad r = 2(a_1 r_0 - q_0). \tag{13}$$
Определитель системы (13) относительно неизвестных p_0, q_0, r_0 равен $4a_1 a_2 > 0$, поэтому данная система имеет единственное решение:
$$p_0 = \frac{1}{2}\frac{a_1^2 + a_2}{a_1 a_2} p - q + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} r, \quad q_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{a_2} p, \quad r_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{a_1 a_2} p + \frac{1}{2}\frac{1}{a_1} r. \tag{14}$$
Далее используем так называемую модификацию Лурье: на выбор параметров системы (5) наложим ограничение, положив $d = 0$. Тогда в соответствии с (10), учитывая (13), получаем два соотношения:
$$p + a_2\gamma_2 = 0, \quad p + ra_2 + a_1 a_2 \gamma_1 = 0. \tag{15}$$
Из первого равенства (15) в силу первого условия (11) следует, что $\gamma_2 < 0$, а из второго равенства (15), в соответствии с неравенством (12), заключаем, что и $\gamma_1 < 0$. Исключая p из (15), с учетом неравенства (12) находим $\gamma_2 > a_1\gamma_1$.

Таким образом, имеем три условия устойчивости параметров системы (3):
$$\gamma_1 < 0, \quad \gamma_2 < 0, \quad \gamma_2 > a_1\gamma_1. \tag{16}$$

К этим условиям необходимо добавить условие, вытекающее непосредственно из (8):

$$\rho > d^* C^{-1} d = 0. \tag{17}$$

Группы неравенств (16) и (17) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости тривиального решения рассматриваемой системы. Запишем их в исходных обозначениях:

$$E < U\frac{G^2}{T^2}, \quad 0 < k\frac{G^2}{T^2} - a < \frac{U}{T^2}\left(U\frac{G^2}{T^2} - E\right), \quad G^2 < \frac{1}{l}. \tag{18}$$

Рассмотрим трехмерное пространство параметров a, E, G^2. В этом пространстве условия (18) задают область $\overline{Y}$, целиком принадлежащую области Y, и соответствуют асимптотической устойчивости тривиального решения исходной системы. Область $\overline{Y}$ ограничена следующими плоскостями:

$$G^2 = \frac{ET^2}{U}. \quad G^2 = \frac{aT^2}{k}. \quad G^2 = \frac{1}{l}. \quad G^2 = T^2\frac{a - EU/T^2}{k - U^2/T^2}.$$

Условие (7) невырожденности преобразования (6) удовлетворяется во всех внутренних точках этой области. Номинальные значения $\overline{a}$, $\overline{E}$, $\overline{G^2}$ параметров a, E, G^2 выбираем внутри области $\overline{Y}$.

Рассмотрим численный пример и алгоритмы решения задачи диагностики (см. [5, 6]).

3.2. Исправная система. Пусть параметры объекта управления рассматриваемой системы (3) имеют значения

$$T = 1; \quad U = 0{,}4; \quad k = 1; \tag{19}$$

а параметры a, E, G^2 системы управления объектом — номинальные значения из области $\overline{Y}$:

$$\overline{a} = 0{,}5; \quad \overline{E} = 0{,}2; \quad \overline{G^2} = 0{,}5. \tag{20}$$

Кроме того, будем считать, что «параметр обратной связи» (l) удовлетворяет условию

$$l = 1. \tag{21}$$

Тривиальное решение системы (3) с параметрами (19)—(21) асимптотически устойчиво. Эту систему и будем считать исправной.

В качестве (замкнутой) области начальных условий H выберем шар (ограниченный сферой S_r) радиуса r:

$$H : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant r^2. \tag{22}$$

Если выбрать $r = 0{,}7$, то любая траектория системы (3) с параметрами (19)—(21) и начальными условиями из области (22) за конечное время вернется в H и не выйдет оттуда, т.е. будет лежать в области притяжения начала координат.

3.3. Выбор сферы контроля S_R. При выборе сферы контроля S_R радиуса R использована идея метода статистических испытаний (см. [14, 15, 25]). Выбор точки в пространстве параметров осуществлен так. Параметры a, E, G^2 приняты независимыми нормально распределенными случайными величинами с математическими ожиданиями $\overline{a}$, $\overline{E}$, $\overline{G^2}$ и дисперсиями $\sigma_a^2 = 0{,}03$, $\sigma_E^2 = 0{,}005$ и $\sigma_{G^2}^2 = 0{,}03$, обеспечивающими близкую к единице вероятность попадания в область $\tilde{Y} \subset \overline{Y}$, имеющую следующие параметры:

$$\tilde{Y}: \quad \overline{a} \pm 3\sigma_a, \quad \overline{E} \pm 3\sigma_E, \quad \overline{G^2} \pm 3\sigma_{G^2}. \tag{23}$$

Для выбора точки в области H начальных условий будем полагать, что при любых фиксированных параметрах из только что построенной области $\tilde{Y}$ область H начальных условий целиком погружена в область притяжения начала координат. В этом случае любая траектория, начинающаяся из области H, за конечное время вернется в H и уже не выйдет оттуда.

Обозначим через X_H область фазового пространства, заполненную траекториями системы, начинающимися в области H. Для отыскания границ множества X_H достаточно рассмотреть только те траектории, которые начинаются со сферы S_r, а в качестве поверхности контроля выбрать сферу S_R, охватывающую множество X_H.

Таблица 1

Неисправность	a	E	G^2	$1/l$
1	0,5	1,5	0,5	1
2	0,5	0,2	1,5	1
3	0,5	0,2	0,5	0

Таблица 2

M_j	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
M_1	$0{,}50124 \cdot 10^{-4}$	$0{,}74702 \cdot 10^{-9}$	$0{,}43220 \cdot 10^{-9}$
M_2	$0{,}11825 \cdot 10^{-6}$	$0{,}14546 \cdot 10^{-10}$	$0{,}24749 \cdot 10^{-11}$
M_3	$0{,}12751 \cdot 10^{-6}$	$0{,}22850 \cdot 10^{-10}$	$0{,}13614 \cdot 10^{-10}$

Начальные условия считаем независимыми и равномерно распределенными по следующей сфере (радиуса $r = 0{,}7$):

$$S_r : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0{,}7^2. \tag{24}$$

Точку в пространстве параметров $\tilde{Y}$ (23) и точку в пространстве начальных условий на сфере S_r (24) выбираем независимо одну от другой. В качестве сферы S_R выбрана сфера радиуса $R = 1$, целиком содержащая множество X_H из более чем 600 траекторий.

3.4. Неисправные системы. Рассмотрим три неисправных системы вида (3) с параметрами, приведенными в таблице 1, и со следующими видами неисправностей: 1 — неисправен датчик угловой скорости, 2 — неисправен прибор, вырабатывающий сигнал, пропорциональный угловому ускорению, 3 — оборвана обратная связь в исполнительном органе. Все описанные неисправности имеют различную физическую природу и различные размерности, т.е. являются невырожденными. Перечисленные неисправности создают неустойчивость тривиального решения рассматриваемой системы. Интегрирование уравнений системы (3) с параметрами, соответствующими неисправным системам, начиналось из точек, равномерно распределенных на сфере S_r радиуса $r = 0{,}7$.

3.5. Выбор констант M_j. Каждая система уравнений (3) с параметрами a, E, G^2, l, соответствующими неисправностям типов 1—3 (см. таблицу 1), проинтегрирована 450 раз. Всякий раз после выхода фазовой траектории в момент времени τ_0 на сферу S_R радиуса $R = 1$ на интервале времени $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$, где $\tau = 0{,}2$ с, для различных $N = 1, 3, 5$ осуществлен подсчет чисел

$$S_j = \sum_{i=1}^{N} [(x_{ij1} - x_{ig1}^2 + (x_{ij2} - x_{ig2}^2) + (x_{ij3} - x_{ig3}^2]. \tag{25}$$

Максимальное из 450 чисел S_j ($j = 1, 2, 3$), полученных для каждой неисправности типа 1—3 (см. таблицу 1) при $N = 1, 3, 5$, выбрано в качестве константы $M_j = \max S_j$ (при каждом фиксированном j) (см. таблицу 2).

Из таблицы 2 видно, что с возрастанием значения N величина константы M_j уменьшается. Таким образом, каждой неисправной системе соответствует определенное число M_j.

3.6. Подсчет $\overline{K_j}$, $\overline{\sigma_j}$, K_j и выбор N. С начальными условиями, равномерно распределенными на сфере S_r, интегрируем одну из неисправных систем при $j = 1, 2, 3$. После выхода фазовой траектории на сферу S_R на интервале времени $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$ при определенном $N = 1, 3, 5$ осуществляем подсчет трех сумм S_j и сравнение их с соответствующими значениями M_j, которые ранее были определены для данных N и j. Количество величин S_j, удовлетворяющих неравенству $S_j \leqslant M_j$, обозначим через $K_j^k(x_0^i)$. Интегрирование уравнений определенной неисправной системы с различными начальными условиями повторяем $k = 50$ раз и таким образом получаем следующие величины (см. [16, 21]):

$$\overline{K_j} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} K_j^k(x_0^i), \quad \overline{\sigma_j} = \left[\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} (\overline{K_j} - K_j^k(x_0^i))^2 \right]^{1/2}, \quad K_j = \overline{K_j} \pm \frac{\overline{\sigma_j}}{\sqrt{50}}.$$

Для рассматриваемой системы уравнений (3) с неисправностями (см. таблицу 2) 1, 2, 3 при произвольных начальных условиях на сфере S_r и $k = 50$, $N = 1, 3, 5$, получено значение $K_j = 1$ с ошибкой в вычислении, не превышающей 2%. Поэтому достаточно выбрать $N = 1$.

Таким образом, при одном измерении, исключая измерение начальных условий в момент выхода фазовой траектории системы на сферу S_R, алгоритм диагностирования позволяет точно определять указанные неисправности.

3.7. Реализация алгоритма восстановления. Используем найденные параметры алгоритма восстановления S_R, M_j, N для обнаружения возникшей неисправности и восстановления системы (3). В результате математического эксперимента по восстановлению системы (3) при неисправном датчике угловой скорости, т.е. с параметрами неисправности 1, установлено, что неисправность возникает в окрестности начала координат $(0; 0; 0{,}1)$ и фазовая точка перемещается по некоторой фазовой траектории T_1.

Согласно алгоритму поиска неисправности процесс восстановления осуществляется следующим образом. В момент τ_0 фазовая траектория неисправной системы встречается со сферой S_R. На интервале $[\tau_0, \tau]$ происходит поиск неисправности (формируются суммы S_j, которые сравниваются с соответствующими константами M_j; $N = 1$). В момент $\tau = 0{,}2$ с происходит обнаружение неисправности и подключение исправной системы. После этого фазовая точка по некоторой фазовой траектории T_2 возвращается в окрестность начала координат.

В случае, когда в системе управления (3) доступна измерению только одна фазовая координата, $x_1 = \eta$, а функционал диагностирования (25) имеет вид

$$S_j = \sum_{i=1}^{N} (x_{ij1} - x_{ig1})^2, \quad j = 1, 2, 3,$$

получается результат, аналогичный изложенному выше.

4. Некоторая динамическая система с прямым управлением (о движении летательного аппарата). Как уже отмечалось ранее (см. [1, 2]), задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля, т.е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, т.е. поиску происшедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри данной поверхности контроля (см. [23, 24]).

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля.

Задача диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени, например, за полупериод или за четвертую часть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства зачастую не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики.

Рассмотрим применение развиваемой методики диагностирования на интересном примере, взятом из теории летательных аппаратов.

4.1. Уравнения движения. Рассмотрим летательный аппарат с прямым управлением, движение которого может быть описано следующими нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка (см. [26]):

$$x' = A(x)\xi - b\delta, \quad \delta = \Phi(\zeta), \quad \zeta = r^T x + h\varphi(x, \delta, f(\eta)). \tag{26}$$

Здесь δ — координата управления;

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— вектор, характеризующий состояние летательного аппарата, и постоянная «устойчивая» матрица (т.е. действительные части ее собственных значений отрицательны);

$$\varphi(x, \delta, f(\eta)) = \int_{t_0}^{t} (p^T x + q\delta - f(\eta))dt;$$

матрицы

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

постоянны; q и h — постоянные скалярные величины; T — символ транспонирования матрицы.

Функции $\Phi(\zeta)$ и $f(\eta)$ (η — формируемый сигнал обратной связи) принадлежат к классу допустимых функций: они определены и непрерывны при всех значениях ζ и η и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\Phi(\zeta) = 0, \qquad \zeta = 0; \qquad \zeta\Phi(\zeta) > 0, \qquad \zeta \neq 0, \\ &f(\eta) = 0, \qquad \eta = 0; \qquad \eta f(\eta) > 0, \qquad \eta \neq 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Первая задача, которая возникает при исследовании системы (26), ставится следующим образом: найти такое формируемое η, которое не доставляет неустойчивости аппарату и обеспечивает выполнение цели управления. Целью управления может быть, например, отслеживание системой формируемого сигнала η. Для решения этой задачи прежде всего необходимо найти условия, при выполнении которых система (26) является устойчивой.

4.2. Достаточные условия устойчивости. В дальнейшем требуется выражение для ζ'. В силу системы (26) выполнены следующие равенства:

$$\zeta' = r^T x' + h\varphi' = c^T x - \rho\Phi(\zeta) - hf(\eta), \tag{28}$$

где

$$c = r^T A + hp^T = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix}, \quad \rho = r^T b + hq.$$

Функцию Ляпунова выберем в следующем виде:

$$V = x^T Bx + \int_0^{\zeta} \Phi(\zeta)d\zeta. \tag{29}$$

Полная производная по времени функции Ляпунова в силу системы (26) имеет вид

$$V' = x'^T Bx + x^T Bx' + \Phi(\zeta)\zeta'.$$

В силу (26) и (28) производная вдоль траектории будет равна

$$-V' = \begin{pmatrix} x^T & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & d \\ d^T & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \Phi \end{pmatrix} + \Phi(\zeta)hf(\eta), \tag{30}$$

где

$$-C = A^T B + BA, \quad d = Bb - \frac{1}{2}c.$$

Для положительной определенности величины $-V'$ как квадратичной формы от x, Φ и f потребуем выполнение условий

$$C > 0, \quad \rho > d^T C^{-1} d, \quad h > 0, \quad \Phi(\zeta)f(\eta) > 0. \tag{31}$$

Далее, положительную определенность величины $-V'$ гарантировать значительно проще, положив

$$d = Bb - \frac{1}{2}c = 0. \tag{32}$$

В силу (32) из (31) следует, что

$$\rho = r_1 b_1 + r_2 b_2 + hq > 0. \tag{33}$$

Из (31) также следует, что функция $f(\eta)$ должна иметь тот же знак, что и функция $\Phi(\zeta)$.

Перейдем теперь к совместному решению уравнений Ляпунова (30) и уравнения (32). С этой целью выберем матрицы B и C в следующем виде:

$$B = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ q_0 & r_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Если в (34) принять, что $p > 0$, $r > 0$, то матрица C положительно определена.

С учетом (34) и уравнения Ляпунова (30) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -p = 2\left(\left(a_{11} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)p_0 - \dfrac{a_{21}^2}{a_{11}+a_{22}}r_0\right), \\ -r = 2\left(\left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)r_0 + \dfrac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}p_0\right), \end{cases} \tag{35}$$

где $a_{11} + a_{22} \neq 0$. Если определитель системы алгебраических уравнений (35) относительно неизвестных p_0, r_0, равный

$$\Delta = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \tag{36}$$

отличен от нуля, то система (35) будет иметь единственное решение. Предположим, что определитель (36) не равен нулю, и выпишем решение системы уравнений (35) в следующем виде:

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{2}{\Delta}\left(-\left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)p - \dfrac{a_{21}^2}{a_{11}+a_{22}}r\right), \\ r_0 = \dfrac{2}{\Delta}\left(-\left(a_{11} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)r - \dfrac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}p\right). \end{cases} \tag{37}$$

При этом

$$q_0 = \frac{2}{\Delta}\frac{1}{a_{11}+a_{22}}(a_{12}a_{22}p + a_{21}a_{11}r). \tag{38}$$

Далее, учитывая (34), выпишем решение уравнения (32). Имеем:

$$p_0 b_1 + q_0 b_2 = \frac{1}{2}c_{11}, \quad q_0 b_1 + r_0 b_2 = \frac{1}{2}c_{22}. \tag{39}$$

Перепишем уравнения (39) с учетом (37) и (38):

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\Delta}\left\{\left(-b_1\left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right) + b_2\dfrac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}\right)p + \left(-b_1\dfrac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} + b_2\dfrac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}\right)r\right\} = \dfrac{1}{2}c_{11}, \\ \dfrac{2}{\Delta}\left\{\left(b_1\dfrac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\dfrac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}\right)p \quad + \quad \left(b_1\dfrac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\left(a_{11} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)r\right\} = \dfrac{1}{2}c_{22}. \end{cases} \tag{40}$$

Определитель системы (40) имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\Delta} = \left(-b_1\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right) + b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}\right)\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right) - \\ - \frac{1}{(a_{11}+a_{22})^2}\big(-b_1a_{21}^2 + b_2a_{21}a_{11}\big)\big(b_1a_{12}a_{22} - b_2a_{12}^2\big). \end{aligned} \tag{41}$$

Решение системы алгебраических уравнений (40) примет следующий вид:

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{\Delta\overline{\Delta}}\left\{\left(b_1\dfrac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\left(a_{11} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{11} - \dfrac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_2a_{21}a_{11} - b_1a_{21}^2)c_{22}\right\}, \\ r = \dfrac{1}{\Delta\overline{\Delta}}\left\{\left(b_2\dfrac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} - b_1\left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{22} - \dfrac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_1a_{12}a_{22} - b_2a_{12}^2)c_{11}\right\}. \end{cases} \tag{42}$$

Учитывая условия $p > 0$ и $r > 0$, из (42) получим

$$\begin{cases} \left(b_1\dfrac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\left(a_{11} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{11} > \dfrac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_2a_{21}a_{11} - b_1a_{21}^2)c_{22}, \\ \left(b_2\dfrac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} - b_1\left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{22} > \dfrac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_1a_{12}a_{22} - b_2a_{12}^2)c_{11}. \end{cases} \tag{43}$$

Таким образом, если

$$a_{11} + a_{22} \neq 0, \quad \Delta \neq 0, \quad \overline{\Delta} \neq 0,$$

то выполняются условия $h > 0$, (33) и (43). Поэтому рассматриваемая система будет абсолютно устойчивой независимо от выбора допустимых функций Φ и f, удовлетворяющих условию $\Phi(\zeta)f(\eta) > 0$, т.е. все решения системы (26) будут сходиться к началу координат при $t \to +\infty$. При этом предполагается, что начало координат x_0 является единственной критической точкой системы (26).

Условие $\Phi(\zeta)f(\eta) > 0$ в силу (32) легко может быть нарушено. Могут возникнуть и другие ситуации, которые обусловят нежелательные последствия, то есть обусловят нарушение цели управления. Поэтому возникает вторая задача при исследовании системы (26) — задача диагностирования нежелательных ситуаций, то есть диагностирования неисправностей, которые могут возникнуть в системе управления летательным аппаратом.

4.3. Априорный список неисправностей. Остановимся только на диагностировании отказов в системе управления летательным аппаратом (26). Рассмотрим список отказов трех датчиков, так или иначе формирующих три обратные связи в системе управления объектом:

$$r_1 = 0. \tag{44}$$

$$r_2 = 0, \quad p_2 = 0, \quad q = 0. \tag{45}$$

$$\eta = 0. \tag{46}$$

4.4. Функционал диагностирования. Рассмотрим следующие суммы:

$$S_j = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_{jk}(t_l) - x_{gk}(t_l))^2, \quad j = 0, \ldots, 3, \tag{47}$$

где $x_{jk}(t_l)$ являются значениями компонент вектора состояния рассматриваемой системы в момент t_l, $l = 1, \ldots, N$, рассчитанными для j-й траектории по уравнениям (26) для исходной системы и систем с параметрами (44)—(46); величины же $x_{gk}(t_l)$ в (47) являются компонентами действительного вектора состояния, измеренного в моменты времени t_l, $l = 1, \ldots, N$.

Справедлива следующая основная теорема для данной задачи.

Теорема 1. *Для конечного набора систем уравнений найдутся такие числа S_j и N* $(j = 0, \ldots, 3)$, *что при некотором номере i величина $S_i = \min_j S_j$ возникшая в системе неисправность с неизвестным номером j в процессе движения объекта с помощью функционала* (47) *будет диагностирована однозначно* (ср. с теоремами из [1, 2, 29]).

Из этой теоремы и вытекает алгоритм диагностирования: из всех чисел S_j выбирается наименьшее, и номер i такого числа S_i принимается за номер случившейся неисправности. Под номером 0 в априорный список включена исходная (исправная) система (26). Алгоритм диагностирования включается циклически и, если он обнаруживает нулевую неисправность, то моделируется дальнейшее функционирование системы.

Если же номер j неисправности не был равен нулю, то выдается сигнал о возникновении j-й неисправности.

4.5. Численный эксперимент. Вычислительными средствами моделировалось поведение рассматриваемой системы, возникновение неисправности в системе и диагностика этой неисправности. Как уже отмечалось, априорный список содержал три неисправности, каждая из которых характеризует обрыв, соответствующий обратной связи в системе управления. В рассматриваемом примере вектор диагностирования был вектором состояния системы (x_1, x_2). Число измерений $N = 3$.

Моделировалось исправное движение системы, начинавшееся в момент $t_0 = 0$, затем возникновение неисправности № 1 в момент $t_1 = 15$ с, включение алгоритма диагностирования в момент $t_2 = 20$ с. Алгоритм правильно диагностировал неисправность в момент $t_3 = 24$ с.

Неисправность № 2 моделировалась аналогичным образом, значения t_0, t_1, t_2, t_3 были такими же, как при моделировании неисправности № 1. Неисправность № 2 была определена в момент t_3 правильно.

Неисправность № 3 моделировалась следующим образом: начало функционирования — момент $t_0 = 0$, возникновение неисправности — $t_1 = 10$ с, включение алгоритма — $t_2 = 15$ с. При первом включении алгоритм диагностировал систему как исправную, поэтому функционирование системы продолжалось и алгоритм включился вторично в момент $t_3 = 30$ с и правильно диагностировал неисправность № 3 в момент $t_4 = 34$ с.

5. Заключение. Сначала рассмотрен модельный пример по диагностике неисправностей в системе непрямого управления объектом, движение которого описывается нелинейными дифференциальными уравнениями третьего порядка, которые впервые изучались Б. В. Булгаковым. При этом используется алгоритм диагностирования, при котором выбирается сфера контроля, каждой неисправной системе ставится в соответствие некоторая константа и по определенным правилам осуществляется сравнение с этими константами чисел, полученных в процессе интегрирования уравнений и характеризующих функциональное состояние системы.

Затем на уровне математических моделей и программ рассматривается диагностика систем прямого управления летательных аппаратов и показывается работоспособность предлагаемых алгоритмов диагностики. Рассматривается летательный аппарат с прямым управлением, движение которого в вертикальной плоскости (посадка) может быть описано нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Диагностике подвергаются отказы трех датчиков, формирующих три обратные связи в системе управления объектом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики// Фундам. прикл. мат. — 1999. — *5*, № 3. — С. 775–790.
2. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
3. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем// Автомат. телемех. — 1994. — № 3. — С. 24–36.
4. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование динамических систем// Автомат. телемех. — 1980. — № 3. — С. 96–121..
5. *Окунев Ю. М., Садовничий В. А., Самсонов В. А., Черный Г. Г.* Комплекс моделирования задач динамики полета// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — № 6. — С. 66–75.
6. *Пархоменко П. П., Сагомонян Е. С.* Основы технической диагностики. — М.: Энергия, 1981.
7. *Чикин М. Г.* Системы с фазовыми ограничениями// Автомат. телемех. — 1987. — № 10. — С. 38–46.
8. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: «Экзамен», 2004.
9. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. Изд. 2. — М.: «Экзамен», 2007.
10. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 4. — С. 55–66.

11. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 1. — С. 97–115.
12. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 3. — С. 73–90.
13. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 5. — С. 31–44.
14. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 1. — С. 45–52.
15. *Шамолин М. В.* Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электрон. модел. — 2011. — *33*, № 3. — С. 121–126.
16. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *150.* — С. 88–109.
17. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 1. Уравнения движения и классификация неисправностей// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2019. — *25*, № 1. — С. 32–43.
18. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 2. Задача дифференциальной диагностики// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2019. — *25*, № 3. — С. 22–31.
19. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 3. Задача контроля// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2019. — *25*, № 4. — С. 36–47.
20. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 4. Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений)// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2020. — *26*, № 1. — С. 36–47.
21. *Шамолин М. В., Кругова Е. П.* Задача диагностики модели гиростабилизированной платформы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *160.* — С. 137–141.
22. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959.* — 080001.
23. *Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B. J., Shwartz A.* Power control in wireless cellular networks// IEEE Trans. Automat. Control. — 2009. — *54*, № 10. — P. 2328–2340.
24. *Antoulas A. C., Sorensen D. C., Zhou Y.* On the decay rate of Hankel singular values and related issues// Syst,. Control Lett. — 2002. — *46.* — P. 323–342.
25. *Beck A., Teboulle M.* Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization// Oper. Res. Lett. — 2003. — *31*, № 3. — P. 167–175.
26. *Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A.* The ordered subsets mirror descent optimization method with applications to tomography// SIAM J. Optim. — 2001. — *12*, № 1. — P. 79–108.
27. *Ober R. J.* Balanced parameterization of classes of linear systems *// SIAM J. Control Optim. — 1991. — *29*, № 6. — P. 1251–1287.
28. *Ober R. J., McFarlane D.* Balanced canonical forms for minimal systems: A normalized coprime factor approach// Linear Algebra Appl. — 1989. — *122-124.* — P. 23–64.
29. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — *114*, № 1. — P. 976–1024.
30. *Su W., Boyd S., Candes E.* A differential equation for modeling Nesterov's accelerated gradient method: Theory and insights// J. Machine Learning Res. — 2016. — № 17 (153). — P. 1–43.
31. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.