

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 204 (2022)



Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 204 (2022)

Дата публикации 17 января 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 15 раз в год

Редактор-составитель выпуска
Научный редактор выпуска
Компьютерная вёрстка

М. Ш. Бурлуцкая
Н. И. Гусева
А. А. Широнин

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя: 125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции: +7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта: math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN 2782-4438

Форма распространения: периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-3-15>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-16-26>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-27-36>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-37-43>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-44-52>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-53-65>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-66-73>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-74-84>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-85-96>

<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-97-103>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-104-114>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-115-123>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-124-134>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-135-145>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-146-159>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-160-169>
<http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-170-184>

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 204

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXXI»

ВОРОНЕЖ, 3–9 МАЯ 2020 г.



Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Метод подобных операторов в проблеме биинвариантных подпространств (<i>А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова</i>)	3
Об одном классе начально-краевых задач в аэрогидроупругости (<i>П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, Ю. В. Покладова</i>)	16
Мультипотентные множества в однородных коммутативных моноидах (<i>Ю. П. Вирченко</i>)	27
Комбинаторный алгоритм нахождения количества путей на ориентированном графе (<i>Я. М. Ерусалимский, М. И. Чердынцева</i>)	37
Методы исследования дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов (<i>Е. П. Иванова</i>)	44
Частно-интегральное уравнение Фредгольма в анизотропных классах функций Лебега в \mathbb{R}_2 (<i>Л. Н. Ляхов, А. И. Иноземцев</i>)	53
О решении нестационарной задачи тепломассопереноса в многослойной среде методом интегральных представлений (<i>Д. В. Туртин, М. А. Степович, В. В. Калманович, Е. В. Серегина</i>)	66
О принципе усреднения для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве с отклоняющимся аргументом и малым параметром (<i>М. И. Каменский, Г. Г. Петросян</i>)	74
Локальное расширение группы параллельных переносов плоскости до локально дважды транзитивной группы Ли преобразований этой же плоскости (<i>В. А. Кыров</i>)	85
Теоремы об итерациях частных интегралов в пространстве со смешанной нормой (<i>Л. Н. Ляхов, Н. И. Трусова</i>)	97
Многошаговые методы численного решения интегро-алгебраических уравнений с двумя особенностями в ядре (<i>С. С. Орлов, О. С. Будникова, М. Н. Ботороева</i>)	104
О достаточных условиях устойчивости стационарного решения и об одном эффекте в диффузионных моделях онкологических процессов (<i>М. В. Половинкина, И. П. Половинкин</i>)	115
Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения с распадающимися краевыми условиями при отсутствии полноты собственных функций (<i>В. С. Рыжлов</i>)	124
Контактная задача для параболического уравнения второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами (<i>С. И. Сахаров</i>)	135
О первой начально-краевой задаче теплопроводности в области с криволинейными боковыми границами (<i>К. Д. Федоров</i>)	146
Экстремальные свойства средних нечетко-случайных величин (<i>В. Л. Хацкевич</i>)	160
Асимптотика расщепляющего преобразования линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием (<i>О. Б. Цехан, Ч. А. Налигама</i>)	170



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 3–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-3-15

УДК 517.9

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОБЛЕМЕ БИИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

© 2022 г. А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО,
И. А. КРИШТАЛ, Н. Б. УСКОВА

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы построения биинвариантных подпространств для самосопряженного линейного замкнутого оператора с дискретным спектром, возмущенного ограниченным оператором. Основной теоремой является теорема о подобии исследуемого оператора блочно-диагональному оператору, из которой вытекают не только результаты, касающиеся биинвариантных подпространств, но и формулы для проекторов и взвешенных средних собственных значений. Кроме того, построена соответствующая группа операторов и предложена новая модификация метода подобных операторов.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектральный проектор, биинвариантное подпространство.

METHOD OF SIMILAR OPERATORS IN THE PROBLEM OF BI-INVARIANT SUBSPACES

© 2022 A. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO,
I. A. KRISHTAL, N. B. USKOVA

ABSTRACT. In this paper, we discuss the construction of bi-invariant subspaces for a self-adjoint, linear, closed operator with discrete spectrum perturbed by a bounded operator. The main result is the theorem on the similarity of this operator to a block diagonal operator. This theorem implies results concerning biinvariant subspaces and formulas for projectors and weighted average eigenvalues. In addition, we construct the corresponding group of operators and propose a new modification of the method of similar operators.

Keywords and phrases: method of similar operators, spectral projectors, biinvariant subspaces.

AMS Subject Classification: 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. В работах К. Фойаша (см., например, [14–16]) доказано существование инвариантного подпространства для нормального ограниченного оператора с дискретным спектром, возмущенного оператором ранга 1. В данной работе доказано существование и построены биинвариантные (см. определение 1) подпространства для самосопряженного линейного замкнутого оператора с дискретным спектром, возмущенного ограниченным оператором. В частности, в качестве примеров возмущенного оператора рассматриваются операторы из идеала операторов Гильберта—Шмидта и операторы ранга 1. Основным результатом работы является теорема 4

Работа первого и четвертого авторов выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

о подобии исследуемого возмущенного оператора оператору, имеющему диагональную операторную матрицу. Методом исследования служит метод подобных операторов (см. [2–12]). Более того, в работе предложена новая модификация этого метода, отличающаяся от [3].

Из основной теоремы о подобии вытекают остальные результаты статьи. Таковыми являются теоремы о подобии возмущенного оператора оператору с диагональной или блочно-диагональной матрицей (теоремы 7 и 8) и вытекающие из них результаты, касающиеся бинвариантных подпространств. Кроме того, получены представление проекторов возмущенного оператора и оценки взвешенных средних его собственных значений, а также выписана группа операторов, генератором которой является возмущенный оператор.

2. Предварительные сведения.

2.1. *Основные определения.* Пусть \mathcal{H} — комплексное гильбертово пространство.

Определение 1. Нетривиальное замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ (т.е. $\mathcal{H}_0 \neq \{0\}$ и $\mathcal{H}_0 \neq \mathcal{H}$) называется бинвариантным для линейного оператора $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, если \mathcal{H}_0 и его ортогональное дополнение \mathcal{H}_0^\perp инвариантны для A .

Лемма 1. Пусть линейный оператор $E: D(E) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ перестановочен с некоторым ортопроектором Q , т.е. $QE = EQ$. Тогда подпространства $\text{Im } Q$ и $\text{Ker } Q$, т.е. образ и ядро ортопроектора Q , являются бинвариантными для оператора E .

Символом \mathbb{J} обозначим одно из множеств \mathbb{Z} или \mathbb{N} . Пусть пространство \mathcal{H} — ортогональная прямая сумма замкнутых подпространств \mathcal{H}_n , $n \in \mathbb{J}$, т.е. $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{J}} \mathcal{H}_n$, а $I = \sum_{n \in \mathbb{J}} P_n$ — соответствующее разложение единицы ортопроекторами P_n , $n \in \mathbb{J}$, с $\text{Im } P_n = \mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{J}$; сходимость ряда понимается в сильной операторной топологии. В этом случае подпространства \mathcal{H}_n , $n \in \mathbb{J}$, образуют в \mathcal{H} ортогональный базис из подпространств, согласно терминологии из [6].

Введем используемые далее пространства операторов. Символом $\text{End } \mathcal{H}$ обозначена банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в \mathcal{H} , с нормой

$$\|X\| = \|X\|_\infty = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|, \quad X \in \text{End } \mathcal{H}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Через $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ обозначен двусторонний идеал операторов Гильберта—Шмидта из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$ (см. [6]) с нормой, обозначаемой $\|X\|_2$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Определение 2 (см. [9]). Линейный замкнутый оператор $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ с $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ называется нормальным, если для сопряженного оператора $A^*: D(A^*) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ выполняются условия $D(A) = D(A^*)$, $\|A^*x\| = \|Ax\|$, $x \in D(A)$. Нормальный оператор A называется самосопряженным, если $Ax = A^*x$, $x \in D(A)$, т.е. $A = A^*$.

Пусть $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — самосопряженный линейный замкнутый оператор, $\sigma(A)$ — его спектр, и $\rho(A)$ — его резольвентное множество. Пусть $\sigma(A)$ допускает представление

$$\sigma(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{J}} \sigma_k, \quad \sigma_k = \{\lambda_k\},$$

где λ_k , $k \in \mathbb{Z}$, — его полупростые собственные значения конечной кратности. Далее используется последовательность d_k , $k \in \mathbb{J}$, определенная равенствами $d_k = \inf_{j \neq k} |\lambda_k - \lambda_j|$ и число $d = \min_{k \in \mathbb{J}} d_k$.

При этом предполагается условие $d > 0$ разделенности собственных значений оператора A .

Пусть $P_k = P(\sigma_k, A)$, $k \in \mathbb{Z}$, — проекторы Рисса, построенные по множествам σ_k , $k \in \mathbb{J}$. Система проекторов $(P_k, k \in \mathbb{J})$ образует разложение единицы, и $AP_k = \lambda_k P_k$. Обозначим $\mathcal{H}_k = \text{Im } P_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отметим, что подпространства \mathcal{H}_k , $k \in \mathbb{J}$, образуют базис из подпространств в пространстве \mathcal{H} . Пусть

$$P_{(k)} = \sum_{i \in \mathbb{J}, |i| \leq k} P_i$$

и $\mathcal{H}_{(k)} = \text{Im } P_{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда подпространства $\mathcal{H}_{(k)}$, \mathcal{H}_i , $|i| > k$, $i \in \mathbb{J}$, также образуют в \mathcal{H} базис из подпространств и, как и в первом случае, образуют счетную систему биинвариантных подпространств для оператора A .

Через $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ обозначим пространство операторов, подчиненных оператору A (см. [2]).

Каждому оператору $X \in \text{End } \mathcal{H}$ поставим в соответствие его операторную матрицу $\mathcal{X} \sim (X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{J}$, $X_{ij} = P_i X P_j \in \text{End } \mathcal{H}$, $i, j \in \mathbb{J}$. При этом бывает удобно рассматривать операторы X_{ij} как элементы $\text{Hom}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$. Символом $\text{Hom}(X, Y)$ обозначено пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y , $\text{End } \mathcal{H} = \text{Hom}(X, X)$ (см. [2]).

Так как $\mathcal{H}_j \subset D(A)$, $j \in \mathbb{J}$, то можно также ввести матрицу \mathcal{A} оператора A , положив $\mathcal{A} = (P_i A P_j)$, $i, j \in \mathbb{J}$, при этом $A_{ij} = \lambda_i I_i$, если $i = j$ и $A_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Аналогично определяется и матрица любого оператора из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Отметим, что ненулевой оператор из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ не может иметь нулевую матрицу. Следовательно, такие операторы однозначно определяются своей матрицей. Отметим также, что согласно [6] норма в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ удовлетворяет

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{J}} \|P_i X P_j\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{J}} \|X_{ij}\|_2^2, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

Определение 3. Пусть $\mathcal{X} = (X_{ij})$ — матрица оператора X . Последовательность операторов $Y_k: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, где $Y_k(n) = X_{kn}$, $k, n \in \mathbb{J}$, называется k -й строкой матрицы \mathcal{X} оператора X . Последовательность $Z_k: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, где $Z_k(n) = X_{nk}$, $k, n \in \mathbb{J}$, называется k -ым столбцом матрицы \mathcal{X} оператора X . Последовательность $V_k: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, $V_k(n) = X_{n,n-k}$, называется k -й диагональю матрицы \mathcal{X} оператора X . При $k = 0$ диагональ называется главной.

Оператор назовем диагональным (согласно [14]–[16]), если его матрица диагональна. Оператор $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ является диагональным оператором, если $X P_i = P_i X$ для всех $i \in \mathbb{J}$.

Определение 4 (см. [6, 11]). Пусть \mathcal{H}_i , $i \in \mathbb{J}$, — базис из подпространств в пространстве \mathcal{H} и $U, (I+U)^{-1} \in \text{End } \mathcal{H}$. Тогда подпространства $(I+U)\mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{J}$, образуют в пространстве \mathcal{H} базис из подпространств, эквивалентный ортогональному, или спрямляемый.

Определение 5. Пусть подпространство \mathcal{H}_i , $i \in \mathbb{J}$, биинвариантно для некоторого оператора. Тогда биинвариантные подпространства вида $(I+U)\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{J}$, при $U, (I+U)^{-1} \in \text{End } \mathcal{H}$, назовем биинвариантными подпространствами Рисса. Если $U \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то назовем их биинвариантными подпространствами Бари.

В дальнейшем также используется определение взвешенного среднего собственных значений.

Определение 6. Для любой комплексной ограниченной квадратной матрицы взвешенным средним ее собственных значений μ_1, \dots, μ_n , называется число

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

Определение 7. Полугруппа (группа) $T_b: \tilde{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, $\tilde{\mathbb{J}} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$, называется базовой для сильно непрерывной полугруппы (группы) $T_0: \tilde{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, если существует непрерывная операторнозначная функция $Y: \tilde{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ и обратимый оператор $U \in \text{End } \mathcal{H}$ такие, что $T_0(t) = U T_b(t) Y(t) U^{-1}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t)\| = 0$. Полугруппа (группа) $T_b: \tilde{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ называется экспоненциально базовой, если кроме того, $\|Y(t)\| \leq C e^{-\beta t}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $t \in \tilde{\mathbb{J}}$.

2.2. Метод подобных операторов. Абстрактная схема. В этой части вкратце приводятся основные понятия и идеи метода подобных операторов (более подробно метод изложен в [2]). Отметим, что метод подобных операторов имеет множество модификаций, что позволяет лучше учитывать спектральные свойства невозмущенного оператора или принадлежность оператора-возмущения специальным операторным пространствам и получать более тонкие оценки. Мы в изложении общих положений метода будем опираться на работу [5].

Напомним определение подобных операторов.

Определение 8. Два линейных оператора $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } \mathcal{H}$ такой, что

$$A_1 U x = U A_2 x, \quad x \in D(A_2), \quad U D(A_2) = D(A_1). \quad (1)$$

Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в A_2 .

Отметим, что соотношение (1) иногда называют сплетающим свойством (см. [7, 10]), оператор преобразования называется также «transmutation» и говорят, что он сплетает операторы A_1 и A_2 (intertwining operator). Историю и обзор операторов преобразования можно найти в [7, 10].

Из определения 8 следует, что подобны и операторы $A_1 - \lambda I$, $A_2 - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, если подобны операторы A_1 и A_2 .

Подобные операторы интересны тем, что, зная спектральные свойства одного оператора, легко можно получить спектральные свойства ему подобного. Соответствующее утверждение удобно оформить в виде леммы.

Лемма 2 (см. [5]). Пусть $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — два подобных оператора и $U \in \text{End } \mathcal{H}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2 . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. $\text{Im } A_1 = U \text{Im } A_2$.
2. $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$ — спектр, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$ и $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2$, — дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i , $i = 1, 2$, соответственно.
3. Если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2i} = A_2|_{\mathcal{H}_i}$, $i = 1, 2$, — сужение A_2 на \mathcal{H}_i относительно прямой суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств \mathcal{H}_i , $i = 1, 2$, то подпространства $\tilde{\mathcal{H}}_i = U(\mathcal{H}_i)$, $i = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1i} = A_1|_{\tilde{\mathcal{H}}_i}$, $i = 1, 2$, относительно разложения $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2$. Кроме того, если P — проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ (т.е. $\mathcal{H}_1 = \text{Im } P$ — образ проектора P , $\mathcal{H}_2 = \text{Im}(I - P)$), то проектор \tilde{P} , осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2$, определяется формулой

$$\tilde{P} = U P U^{-1}. \quad (2)$$

4. Если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной группы (полугруппы) операторов $T_2: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ ($T_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$), то оператор A_1 является генератором сильно непрерывной группы (полугруппы) операторов $T_1: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ ($T_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$) и $T_1 = U T_2 U^{-1}$.

Одним из основных понятий метода подобных операторов является определение допустимой для невозмущенного оператора A тройки, которая для применимости метода должна удовлетворять ряду условий.

Определение 9 (см. [5]). Пусть \mathfrak{U} — банахово пространство операторов из $\text{End } \mathcal{H}$ с нормой $\|X\|_*$, $X \in \mathfrak{U}$, и $J: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$, $\Gamma: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ — трансформаторы, т.е. линейные операторы в пространстве линейных операторов. Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ будем называть допустимой тройкой для оператора A , а \mathfrak{U} — пространством допустимых возмущений, если выполнены следующие условия:

- (i) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;
- (ii) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$, для любого $X \in \mathfrak{U}$ выполняется соотношение

$$A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX \quad (3)$$

и $Y = \Gamma X$ — единственное решение уравнения

$$AY - YA = X - JX, \quad (4)$$

удовлетворяющее условию $JY = O$, где O — нулевой оператор в \mathcal{H} ;

- (iii) $X(\Gamma Y)$, $(\Gamma Y)X \in \mathfrak{U}$ для всех $X, Y \in \mathfrak{U}$ и существует такая константа $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| \leq \gamma$ и

$$\max\{\|X(\Gamma Y)\|_*, \|(\Gamma Y)X\|_*\} \leq \gamma \|X\|_* \|Y\|_*;$$

(iv) для любого $X \in \mathfrak{U}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon;$$

(v) $J((\Gamma X)JY) = O$ для всех $X, Y \in \mathfrak{U}$.

Отметим, что для одного невозмущенного оператора A иногда можно построить много разных допустимых троек.

Трансформатор J — обычно это оператор диагонализации (блочной диагонализации) матрицы оператора $X \in \mathfrak{U}$. Трансформатор Γ связан с построением оператора U из определения 8. Свойства (ii)–(v) допустимой тройки необходимы для разрешения нелинейного операторного уравнения (6) метода подобных операторов, приведенного ниже.

Зафиксируем теперь некоторую допустимую тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ для невозмущенного оператора A .

Теорема 1 (см. [5]). Пусть $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка и B — некоторый оператор из пространства возмущений \mathfrak{U} . Если

$$4\gamma\|J\|\|B\|_* < 1, \quad (5)$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathfrak{U}$ — решение уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X), \quad (6)$$

и оно может быть найдено методом простых итераций, если положить $X_0 = 0, X_1 = B, \dots$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in \text{End } \mathcal{H}$. Отображение $\Phi: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ является сжимающим в шаре $\mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{U} : \|X - B\|_* \leq 3\|B\|_*\}$.

3. Основные результаты.

3.1. Построение допустимой тройки. В этом параграфе приводится модификация метода подобных операторов, базирующаяся на [3]. Везде далее A и B — операторы из раздела 2.1.

Так как $B \in \text{End } \mathcal{H}$ и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \text{End } \mathcal{H}$, то удобно сначала в качестве пространства допустимых возмущений взять пространство $\text{End } \mathcal{H}$, затем построить трансформаторы $J, \Gamma \in \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$ и потом рассмотреть случай $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Рассмотрим сильно непрерывное изометрическое представление $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, заданное формулой

$$T(t)x = \sum_{k \in \mathbb{J}} e^{i\lambda_k t} P_k x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Отметим, что изометричность представления T следует из равенства Парсеваля: $\|T(t)x\|^2 = \|x\|^2$, $x \in \mathcal{H}$. Наряду с изометрическим представлением $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ рассмотрим представление $\tilde{T}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$, положив

$$(\tilde{T}(t)X)x = T(t)XT(-t)x, \quad X \in \text{End } \mathcal{H}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Особенностью представления $\tilde{T}: t \mapsto \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$ является его непрерывность не в сильной операторной топологии, а в другой, более слабой, операторной топологии, при которой функции вида $t \mapsto (\tilde{T}(t)X)x: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$, $X \in \text{End } \mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, непрерывны.

Далее символом $L_1(\mathbb{R})$ обозначена банахова алгебра суммируемых на \mathbb{R} (классов эквивалентности) функций со сверткой в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds, \quad f, g \in L_1(\mathbb{R}),$$

и нормой

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt.$$

Символом $\widehat{L}_1(\mathbb{R})$ обозначим банахову алгебру преобразований Фурье функций из $L_1(\mathbb{R})$ с поточечным умножением функций в качестве операции, где

$$\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

с нормой $\|\widehat{f}\|_{\infty} = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)|$. Для каждой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ и оператора $X \in \text{End } \mathcal{H}$ определим оператор $\widetilde{T}(f)$, положив

$$(\widetilde{T}(f)X)x = \int_{\mathbb{R}} f(t)(\widetilde{T}(-t)X)x dt, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Далее через $f_0 \in L_1(\mathbb{R})$ обозначена функция, преобразование Фурье которой равно единице в нуле ($\widehat{f}_0(0) = 1$) и носитель $\text{supp } \widehat{f}_0$ преобразования Фурье функции f_0 лежит в окрестности нуля $(-d + \varepsilon, d - \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, вне указанного промежутка $\widehat{f}_0(\lambda) = 0$. Пусть $a \in (0, d - \varepsilon)$. Тогда в качестве $\widehat{f}_0(\lambda)$ удобно рассматривать функцию

$$\widehat{f}_0(\lambda) = \begin{cases} 0, & |\lambda| > a, \\ 1 - \frac{\lambda}{a}, & 0 \leq \lambda \leq a, \\ 1 + \frac{\lambda}{a}, & -a \leq \lambda < 0. \end{cases}$$

Так как функция f_0 неотрицательна (см., например, [17, Theorem 3.2]), $\|f_0\|_1 = \widehat{f}_0(0) = 1$. Символом $f_1 \in L_1(\mathbb{R})$ — функция, преобразование Фурье которой в некоторой окрестности нуля равно нулю и $\widehat{f}_1(\lambda) = 1/\lambda$, $\lambda \neq 0$. Такую функцию можно построить, например, так. Положим $\widehat{f}_1(\lambda) = (1 - \widehat{f}_0(\lambda))\lambda^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\widehat{f}_1(0) = 0$. Тогда $\widehat{f}_1 \in \widehat{L}_1(\mathbb{R})$ и, следовательно, $f_1 \in L_1(\mathbb{R})$ (см. [3]). Отметим, что существует функция $f_1 \in L_1(\mathbb{R})$ такая, что $\|f_1\|_1 \leq \pi/2$.

Лемма 3. Пусть оператор $X \in \text{End } \mathcal{H}$ имеет операторную матрицу $X \sim (X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{J}$. Тогда оператор $\widetilde{T}(f)X$ имеет операторную матрицу, состоящую из элементов $(\widehat{f}(\lambda_i - \lambda_j)X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{J}$.

Доказательство. Пусть $X \sim (X_{ij})$, где $X_{ij} = P_i X P_j$, $i, j \in \mathbb{J}$. Тогда

$$T(t)P_i = e^{i\lambda_i t} P_i = P_i T(t).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} P_i(\widetilde{T}(t)X)P_j &= P_i T(t) X T(-t) P_j = e^{-i\lambda_j t} P_i T(t) X P_j = e^{i(\lambda_i - \lambda_j)t} X_{ij}, \\ P_i(\widetilde{T}(f)X)P_j &= \int_{\mathbb{R}} f(t) P_i(\widetilde{T}(-t)X)P_j dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i(\lambda_i - \lambda_j)t} X_{ij} dt = \widehat{f}(\lambda_i - \lambda_j) X_{ij}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

С помощью изометрического представления $\widetilde{T}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$ определим трансформаторы $J, \Gamma \in \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$ из определения 9 следующим образом. Положим $JX = \widetilde{T}(f_0)X$, где $f_0 \in L_1(\mathbb{R})$. Напомним, что функции $f_0, f_1 \in L_1(\mathbb{R})$ определены перед леммой 3, причем $\widehat{f}_0(0) = 1$ и $\widehat{f}_0(\lambda) = 0$ вне некоторой окрестности нуля. Тогда по лемме 3 матрица оператора $JX = \widetilde{T}(f_0)X$ диагональна. Или, по-другому,

$$JX = \widetilde{T}(f_0)X = \sum_{i \in \mathbb{J}} P_i X P_i, \quad X \in \text{End } \mathcal{H}.$$

Пусть $\Gamma X = \widetilde{T}(f_1)X$, где $f_1 \in L_1(\mathbb{R})$ такая функция, что $\widehat{f}_1(\lambda) = 1/\lambda$ везде, кроме некоторой окрестности нуля $(-d + \varepsilon, d - \varepsilon)$ и $\widehat{f}_1(0) = 0$. Очевидно также, что

$$\|JX\| = \|f_0\| = 1, \quad \|\Gamma X\| = \|f_1\| \leq \pi/2.$$

Теорема 2. *Тройка $(\text{End } \mathcal{H}, J, \Gamma)$ с $JX = \tilde{T}(f_0)X$ и $\Gamma X = \tilde{T}(f_1)X$, $X \in \text{End } \mathcal{H}$, является допустимой тройкой для невозмущенного оператора A . Константа γ из определения 9 допускает оценку $\gamma \leq \pi/(2d)$.*

Доказательство. Непрерывность трансформаторов $J, \Gamma \in \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$ следует из их построения. Покажем, что $J(JX) = JX$. Действительно,

$$Z = J(JX) = J(\tilde{T}(f_0)X) = \tilde{T}(f_0)(\tilde{T}(f_0)X).$$

Пусть $Y = \tilde{T}(f_0)X$. Тогда

$$Y_{ij} = \hat{f}_0(\lambda_i - \lambda_j)X_{ij} = X_{ij}$$

при $i = j$ и $Y_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Кроме того,

$$Z_{ij} = (\tilde{T}(f_0)Y)_{ij} = (\hat{f}_0(\lambda_i - \lambda_j))X_{ij} = X_{ij}$$

при $i = j$ и $Z_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Проверим выполнение условия (ii) определения 9. С одной стороны,

$$P_i(A\Gamma X - \Gamma X A)P_j = \lambda_i P_i(\tilde{T}(f_1)X)P_j - \lambda_j P_j(\tilde{T}(f_1)X)P_i = (\lambda_i - \lambda_j)\hat{f}_1(\lambda_i - \lambda_j)X_{ij} = X_{ij}$$

при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{J}$, или 0 в противном случае. С другой стороны,

$$P_i(X - JX)P_j = X_{ij} - \hat{f}_0(\lambda_i - \lambda_j)X_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j, i, j \in \mathbb{J}, \\ X_{ij} & \text{при } i \neq j, i, j \in \mathbb{J}. \end{cases}$$

Таким образом, установлено равенство (3).

Докажем включение $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$. Возьмем $X \in \text{End } \mathcal{H}$. Пусть $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$. Рассмотрим последовательность проекторов

$$Q_{(n)} = \sum_{|j| \leq n, j \in \mathbb{J}} P_j, \quad n \geq 0.$$

Для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ имеют место равенства (проверяемые на базисных векторах):

$$\begin{aligned} Q_{(n)}A(\Gamma X)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}y &= \\ &= Q_{(n)}(\Gamma X)A(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}y + Q_{(n)}(X - JX)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}y = Q_{(n)}A_0y, \end{aligned} \quad (7)$$

где оператор A_0 представим в виде

$$A_0y = (\Gamma X)A(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}y + (X - JX)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}y.$$

Так как оператор A_0 является оператором из $\text{End } \mathcal{H}$, то последовательность операторов из правой части равенства (7) сходится к оператору A_0 по норме пространства $\text{End } \mathcal{H}$. Из замкнутости оператора A следует, что $\Gamma X \in D(A)$ при $x \in D(A)$ и имеет место равенство

$$A(\Gamma X)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} = (\Gamma X)A(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} + (X - JX)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}.$$

Таким образом, выполнено включение $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$.

Из [3, теорема 1.3] в рассматриваемом случае (A — самосопряженный оператор) следует оценка на норму решения уравнения (3):

$$\|Y\|_\infty \leq \frac{\pi}{2d}\|X\|_\infty.$$

Другими словами, $\|\Gamma\| \leq \gamma = \pi/(2d)$. Условие (iii) определения 9, очевидно, выполняется с той же константой.

Проверим выполнение свойства (iv). Пусть $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ и $\lambda_\varepsilon = in$, где $n \in \mathbb{N}$ — достаточно большое натуральное число. Тогда норму оператора $X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} \in \text{End } \mathcal{H}$, $X \in \text{End } \mathcal{H}$. В пространстве $\text{End } \mathcal{H}$ можно сделать сколь угодно малой, так как норма первого сомножителя конечна, а норму второго можно сделать малой подходящим выбором натурального числа n .

Перейдем к проверке последнего свойства. Имеем

$$P_i(\Gamma X)(JX)P_i = \sum_{\substack{k \in \mathbb{J} \\ k \neq i}} P_i \tilde{T}(f_1) X P_k \cdot P_k \tilde{T}(f_0) X P_i = \sum_{\substack{k \in \mathbb{J} \\ k \neq j}} \hat{f}_1(\lambda_i - \lambda_k) X_{ik} \hat{f}_0(\lambda_k - \lambda_i) X_{ki} = 0$$

в силу свойств преобразований Фурье функций \hat{f}_0 и \hat{f}_1 . Теорема доказана. \square

Теорема 3. *Тройка $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J, \Gamma)$ является допустимой тройкой для невозмущенного оператора A с константой $\gamma = 1/d$.*

Доказательство. В данном случае $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Так как трансформаторы J и Γ определены для операторов из $\text{End } \mathcal{H}$ и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \text{End } \mathcal{H}$, то они определены и для операторов из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Все остальные рассуждения проводятся аналогично предыдущему случаю. \square

Замечание. В случае $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ удобно все выкладки проводить на операторных матрицах. Результат теоремы 3 непосредственно вытекает из [12]. Важно, что в случае $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, в отличие от теоремы 2, константа γ из определения 9 оценивается величиной $\gamma = d^{-1}$ (без множителя $\pi/2$), что следует из свойств идеала $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Отметим, что включение $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ в этом случае также удобно доказывать с использованием матриц (см. [12]).

3.2. Теоремы о подобии и бинвариантных подпространствах. Один из ключевых результатов статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть выполнено одно из условий:*

- (i) $B \in \text{End } \mathcal{H}$, $2\pi \|B\|_\infty d^{-1} < 1$,
- (ii) $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $4\|B\|_2 d^{-1} < 1$.

Тогда оператор $A - B$ подобен диагональному оператору $A - \tilde{T}(f_0)X_$. При этом если $B \in \text{End } \mathcal{H}$, то $X_* \in \text{End } \mathcal{H}$, если же $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Оператор X_* есть решение нелинейного операторного уравнения (6) метода подобных операторов. Имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \tilde{T}(f_1)X_*) = (I + \tilde{T}(f_1)X_*)(A - \tilde{T}(f_0)X_*).$$

Кроме того, если $B \in \text{End } \mathcal{H}$, то $\tilde{T}(f_1)X_$, $\tilde{T}(f_0)X_* \in \text{End } \mathcal{H}$; если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $\tilde{T}(f_1)X_*$, $\tilde{T}(f_0)X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Доказательство теоремы 4 немедленно вытекает из теоремы 1 и теорем 2, 3. \square

Отметим, что в теореме 4 указаны условия, при которых возможна полная диагонализация оператора A . Это довольно жесткие условия, означающие малость нормы возмущения в соответствующих пространствах и хорошую отделенность собственных значений невозмущенного оператора. В ряде случаев условие малости нормы возмущения можно снять, но тогда с помощью метода подобных операторов мы приводим возмущенный оператор не к диагональному, а к блочно-диагональному виду. Такое возможно, например, если $d_k \rightarrow \infty$ при $|k| \rightarrow \infty$. Или в случае, если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\lambda_k = ak$, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{J}$. Соответствующие теоремы будут приведены далее (см. теоремы 7 и 8).

Из теоремы 4 и леммы 2 с учетом того, что A — оператор с дискретным спектром, вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. *В условиях теоремы 4 спектр $\sigma(A - B)$ оператора $A - B$ представим в виде*

$$\sigma(A - B) = \bigcup_{k \in \mathbb{J}} \sigma(A_k) = \bigcup_{k \in \mathbb{J}} \tilde{\sigma}_k,$$

где $\sigma(A_k) = \sigma(A - P_k X_ | \mathcal{H}_k) = (\lambda_k + \tilde{\sigma}_k)$, $\mathcal{H}_k = \text{Im } P_k$, $k \in \mathbb{J}$, $\tilde{\sigma}_k = \sigma(P_k X_* P_k)$. При этом, если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то*

$$\sum_{k \in \mathbb{J}} |\tilde{\sigma}_k|^2 < \infty, \quad \text{где} \quad |\tilde{\sigma}_k| = \max_{\lambda \in \tilde{\sigma}_k} |\lambda|.$$

Из леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть $\widehat{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{J}$, — взвешенное среднее собственных значений матрицы $A_n = P_n A P_n$, $n \in \mathbb{J}$, $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, и $\dim \operatorname{Im} P_n = m_n$. Тогда

$$\widehat{\lambda}_n = \lambda_n - \frac{1}{m_n} \operatorname{tr}(P_n B P_n) + \zeta_n, \quad n \in \mathbb{J},$$

где последовательность ζ_n , $n \in \mathbb{J}$, суммируема.

Пусть $\widetilde{P}_n = P(\widetilde{\sigma}_n, A - B)$, $n \in \mathbb{J}$, где множества $\widetilde{\sigma}_n$, $n \in \mathbb{J}$, введены в лемме 4. Опять же из леммы 2 и теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 6. Для спектральных проекторов \widetilde{P}_n , $n \in \mathbb{J}$, имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_n &= (I + \widetilde{T}(f_1)X_*)P_n(I + \widetilde{T}(f_1)X_*)^{-1}, \\ \widetilde{P}_n - P_n &= (\widetilde{T}(f_1)X_*P_n - P_n\widetilde{T}(f_1)X_*)(I + \widetilde{T}(f_1)X_*)^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема 5. Подпространства $\operatorname{Im} \widetilde{P}_k = (I + \widetilde{T}(f_1)X_*)\mathcal{H}_k$, $\operatorname{Ker} \widetilde{P}_k$, $k \in \mathbb{J}$, образуют счетный набор бинвариантных подпространств для оператора $A - B$.

Следствие. Бинвариантные подпространства $(I + \widetilde{T}(f_1)X_*)\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, есть при $B \in \operatorname{End} \mathcal{H}$ бинвариантные подпространства Рисса. Если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то бинвариантные подпространства $(I + \widetilde{T}(f_1)X_*)\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{J}$, образуют систему Бари бинвариантных подпространств.

Теорема 6. Оператор $i(A - B)$ является генератором сильно непрерывной группы операторов $T_0: \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$ и эта группа подобна группе $\widetilde{T}_0: \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$, где

$$\widetilde{T}_0(t) = \sum_{n \in \mathbb{J}} e^{iA_n t} P_n = \sum_{n \in \mathbb{J}} e^{i\lambda_n I_n t} e^{-iP_n X_* P_n t} P_n \quad (8)$$

и

$$T_0(t) = (I + \widetilde{T}(f_1)X_*)\widetilde{T}_0(t)(I + \widetilde{T}(f_1)X_*)^{-1},$$

где $A_n = (A - P_n X_*)|_{\mathcal{H}_n}$, $n \in \mathbb{J}$, и символом I_n , $n \in \mathbb{J}$, обозначен тождественный оператор в \mathcal{H}_n , $n \in \mathbb{J}$.

Отметим, что в случае конкретного возмущения B и конкретной последовательности собственных значений λ_n , $n \in \mathbb{J}$, из теоремы 6 можно получить базовую группу для группы $T_0: \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$.

Приведем теоремы о блочной диагонализации возмущенного оператора. Обозначим через $P_{(n)}$ оператор

$$P_{(n)} = \sum_{|i| \leq n} P_i, \quad i \in \mathbb{J}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема 7. Пусть выполнено условие

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} d_k = \infty \quad (9)$$

и B принадлежит $\operatorname{End} \mathcal{H}$, либо $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$ подобен блочно-диагональному оператору

$$\widetilde{A} = A - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{|i| > k} P_i X_* P_i, \quad (10)$$

где X_* — решение нелинейного операторного уравнения (6) из теоремы 1 и если $B \in \operatorname{End} \mathcal{H}$, то $X_* \in \operatorname{End} \mathcal{H}$, $\Gamma_k X_* \in \operatorname{End} \mathcal{H}$. Если же $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $\Gamma_k X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Преобразование подобия осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma_k X_* \in \operatorname{End} \mathcal{H}$.

Доказательство. Случай $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, а следовательно, и $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ подробно рассматривался в работе [5]. Если же $B \in \operatorname{End} \mathcal{H}$, то доказательство аналогично доказательству теоремы 4. Отметим, что в обоих случаях условие (5) гарантирует малость величины γ из определения 9 и, следовательно, разрешимость уравнения (6). \square

Приведем еще одну теорему, аналогичную [4, теорема 3] или [12, теорема 4.5].

Теорема 8. Пусть $\lambda_n = an$, где $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{J}$, и $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что возмущенный оператор $A - B$ подобен оператору (10), где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение нелинейного уравнения (6).

Доказательство можно найти в [4, 12]. □

Отметим, что в указанном случае выполнение условия (5) теоремы 1 гарантировано при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$ за счет выбора другого, более узкого пространства допустимых возмущений $\mathfrak{U}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, учитывающего скорость убывания элементов матрицы оператора $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ по строкам и столбцам.

Из теорем 7 и 8 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. Подпространства

$$(I + \Gamma X_*)\mathcal{H}_{(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (I + \Gamma X_*)\mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{J}, \quad |n| > k,$$

в условиях теорем 7 и 8 образуют счетный набор бинвариантных подпространств для оператора $A - B$.

Отметим, что в лемме 4 спектр оператора $A - B$ представим в виде (см. [12]):

$$\sigma(A - B) = \tilde{\sigma}_{(k)} \bigcup \left(\bigcup_{|n| \geq k, n \in \mathbb{J}} \sigma_n \right),$$

где $\sigma_{(k)} = \sigma(A - P_{(k)}X_*|\mathcal{H}_k)$, $\sigma_n = \sigma(A - P_nX_*|\mathcal{H}_n)$. Оценка леммы 5 также имеет место, но при $|n| > k$, $n \in \mathbb{J}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

В теореме 6 формула (8) при выполнении условий теорем 7 или 8 переписывается в виде

$$\tilde{T}_0(t) = e^{i((A - P_{(k)}X_*)|\mathcal{H}_k)} I_{(k)} + \sum_{\substack{|n| > k \\ n \in \mathbb{J}}} e^{iA_n t} P_n$$

и $I_{(k)}$ — тождественный оператор в $\mathcal{H}_{(k)} = \text{Im } P_{(k)}$.

4. Примеры.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим возмущение ранга 1 (по Фойашу). Пусть $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z})$ — гильбертово пространство с обычным скалярным произведением и $\{e_n, n \in \mathbb{J}\}$ — фиксированный ортонормированный базис в \mathcal{H} . Оператор $B \in \text{End } \mathcal{H}$ называется оператором ранга 1, если существуют такие ненулевые векторы $u, v \in \mathcal{H}$, что

$$Bx = (x, v)u, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (11)$$

Пусть векторы $u, v \in \mathcal{H}$ разлагаются в ряды Фурье

$$u = \sum_{n \in \mathbb{J}} \hat{u}(n)e_n, \quad v = \sum_{n \in \mathbb{J}} \hat{v}(n)e_n$$

(относительно введенного ортонормированного базиса). Тогда, очевидно, относительно этого базиса числовая матрица оператора $B = (b_{ij})$ состоит из элементов $b_{ij} = \hat{u}(i)\overline{\hat{v}(j)}$. Очевидно, что $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\|B\|_2 = \|u\|\|v\|$, где $\|x\|^2 = (x, x)$, $x \in \mathcal{H}$.

Пусть также $\lambda_k = ak$, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{J}$, и

$$Ax = \sum_{k \in \mathbb{J}} \lambda_k(x, e_k)e_k = \sum_{k \in \mathbb{J}} \lambda_k \hat{x}(k)e_k, \quad x \in D(A),$$

где

$$D(A) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{k \in \mathbb{J}} |k^2 \hat{x}(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Из теоремы 4 и теоремы 8 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 10. Пусть $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и B действует по формуле (11). Если

$$4\|u\|\|v\| < a, \quad (12)$$

то оператор $A - B$ подобен диагональному оператору

$$A - \sum_{i \in \mathbb{J}} P_i X_* P_i,$$

где $P_i x = (x, e_i) e_i = \hat{x}(i) e_i$, $i \in \mathbb{J}$, и X_* — решение уравнения (6). Также существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$ подобен оператору блочно-диагонального вида

$$A - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{\substack{|i| > k \\ i \in \mathbb{J}}} P_i X_* P_i,$$

где X_* — решение уравнения (6) с трансформаторами $J_k, \Gamma_k \in \text{End } \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. При этом при выполнении условия (12) подпространства $(I + \Gamma X_*) \mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{J}$, $\mathcal{H}_i = \text{Ran } P_i$, образуют счетную систему бинвариантных подпространств Бари. Во втором случае подпространства

$$(I + \Gamma_k X_*) \mathcal{H}_{(k)}, \quad (I + \Gamma_k X_*) \mathcal{H}_i$$

образуют счетную систему бинвариантных подпространств Бари.

Теорема 11. Оператор $i(A - B)$ является генератором некоторой сильно непрерывной группы операторов $T_0: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ и эта группа подобна группе $\tilde{T}_0: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, где

$$\tilde{T}_0(t) = e^{iA_{(n)}t} P_{(n)} + \sum_{\substack{|j| > n \\ j \in \mathbb{J}}} e^{i(a_j - \mu_j)t} P_j,$$

где $\mu_j = \hat{u}(j) \overline{\hat{v}(j)} + \beta_j$, $|j| > n$, и последовательность $\{\beta_j, |j| > n\}$ суммируема. Пусть выполнено условие $\text{Im}(\hat{v}(i) \overline{\hat{u}(i)}) < 0$ для всех $i \geq m$, где $m > n$ достаточно большое натуральное число. Тогда экспоненциально базовой для группы $T_0: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ является группа

$$T_b: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}, \quad T_b(t) = e^{iA_{(n)}t} P_{(n)} + \sum_{\substack{|j| > n \\ j \in \mathbb{J}}} e^{ia_j t} P_j.$$

Пример 2. Пусть невозмущенный диагональный оператор A имеет собственные значения $\lambda_k = ak^2$, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, собственное значение $\lambda_0 = 0$ простое и $P_0 x = (x, e_0) e_0$, $\lambda_n = an^2$, $n \neq 0$, — двукратные собственные значения и $P_n x = (x, e_n) e_n + (x, e_{-n}) e_{-n}$, $n \neq 0$. Пусть возмущение B так же, как и в примере 1, является оператором ранга 1, $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\|B\|_2 = \|u\|\|v\|$. Очевидно, что $\dim \mathcal{H}_0 = 1$, $\dim \mathcal{H}_i = 2$, $i \neq 0$, $\dim \mathcal{H}_{(k)} = 2k + 1$.

Из теорем 1 и 7 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 12. Пусть выполнено условие

$$4\|v\|\|u\| < |a|.$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору

$$A - \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X_* P_i,$$

где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение нелинейного уравнения (6). Преобразование подобия осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in \text{End } \mathcal{H}$, $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$ подобен оператору

$$\tilde{A} = A - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{\substack{i > k \\ i \in \mathbb{Z}_+}} P_i X_* P_i,$$

где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение уравнения (6) с Γ_k и J_k . Преобразование подобия оператора A в оператор \tilde{A} осуществляет оператор $I + \Gamma_k X_* \in \text{End } \mathcal{H}$, $\Gamma_k X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Теорема 13. В условиях теоремы 12 подпространства

$$(I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_{(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_i, \quad i > k,$$

образуют счетный набор бинвариантных подпространств Бари, а также спрямляемый базис в пространстве \mathcal{H} .

Пример 3. Пусть в пространстве \mathcal{H} есть ортогональный базис из подпространств \mathcal{H}_i , $i \in \mathbb{Z}$, т.е.

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_i,$$

являющихся бинвариантными подпространствами для невозмущенного самосопряженного оператора A . Причем соответствующие ортопроекторы P_i , $\mathcal{H}_i = \text{Im } P_i$, $i \in \mathbb{Z}$, являются спектральными проекторами для невозмущенного оператора A и $AP_i = \lambda_i P_i$, $i \in \mathbb{Z}$, λ_i , $i \in \mathbb{Z}$, — изолированные собственные значения. Пусть возмущение $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ такое же, как в примере 1, т.е. $Bx = (x, u)v$, где

$$u = \sum_{i \in \mathbb{J}} P_i u, \quad v = \sum_{i \in \mathbb{J}} P_i v,$$

причем выписанные ряды абсолютно сходятся.

Теорема 14. Пусть $\lambda_k = ak$, $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$ подобен оператору

$$\tilde{A} = A - \sum_{|i| > k} P_i X_* P_i - P_{(k)} X_* P_{(k)},$$

где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение уравнения (6). Имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_k X_*) = (I + \Gamma_k X_*)\tilde{A},$$

где $\Gamma_k X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $I + \Gamma_k X_* \in \text{End } \mathcal{H}$. Подпространства $(I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_{(k)}$, $(I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_i$, образуют счетный набор бинвариантных подпространств Бари.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.
2. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987.
3. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. мат. ж. — 1983. — 24, № 1. — С. 21–39.
4. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 3. — С. 3–28.
5. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб. — 2017. — 208, № 1. — С. 3–47.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
7. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. мат. Фундам. направл. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
8. Левитан Б. М. Об одном обобщении неравенств С.Н. Бернштейна и Н. Воhr'a // Докл. АН СССР. — 1937. — 15. — С. 17–19.
9. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
10. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
11. Фаге М. Н. Спрявление базисов в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. — 1950. — 74, № 6. — С. 1053–1056.
12. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices // J. Math. Anal. Appl. — 2019. — 477. — P. 930–960.

13. *Favard J.* Application de la formule sommatoire d'Euler á la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques ou presque périodiques// *Mat. Tidskrift K benhavn*, В. Н. — 1936. — 4. — P. 81–94.
14. *Foias C., Jung I., Ko E., Pearcy C.* On rank-one perturbation of normal operators// *J. Funct. Anal.* — 2007. — 253. — P. 628–646.
15. *Foias C., Jung I., Ko E., Pearcy C.* On rank-one perturbation of normal operators, II// *Indiana Univ. Math. J.* — 2008. — 57. — P. 2745–2760.
16. *Foias C., Jung I., Ko E., Pearcy C.* Spectral decomposability of rank-one perturbation of normal operators// *J. Math. Anal. Appl.* — 2011. — 375. — P. 602–609.
17. *Lukacs E.* Characteristic Functions. — New York: Hather Publ., 1970.

Баскаков Анатолий Григорьевич

Воронежский государственный университет;

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валериевна

Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Криштал Илья Аркадьевич

Университет Северного Иллинойса, Де-Калб, Иллинойс, США

E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна

Воронежский государственный технический университет

E-mail: nat-uskova@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 16–26
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-16-26

УДК 517.9, 532.5, 539.3

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

© 2022 г. П. А. ВЕЛЬМИСОВ, Ю. А. ТАМАРОВА, Ю. В. ПОКЛАДОВА

Аннотация. Рассматриваются начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, представляющие собой математические модели механической системы «трубопровод-датчик давления», которые предназначены для контроля давления в газожидкостных средах. На основе предложенных моделей исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Для описания динамики рабочей среды и динамики чувствительного элемента используются линейные модели механики жидкости и газа, механики твердого деформируемого тела. Получены дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающие величину перемещения (деформации) чувствительного элемента датчика с законом изменения давления рабочей среды в двигателе. Разработаны аналитические и численные методы решения указанных начально-краевых задач.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, аэрогидроупругость, трубопровод, датчик давления, динамика, метод конечных разностей, метод Галеркина.

ON ONE CLASS OF INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN AEROHYDROELASTICITY

© 2022 P. A. VELMISOV, Yu. A. TAMAROVA, Yu. V. POKLADOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider initial-boundary problems for systems of differential equations, which are mathematical models of the mechanical system “pipeline-pressure sensor” intended for controlling pressure in gas-liquid media. Based on the models proposed, we examine the joint dynamics of the sensitive element of the pressure sensor and the medium in the pipeline. To describe the dynamics of the medium and the dynamics of the sensitive element, we use linear models of fluid and gas mechanics and mechanics of solid deformable bodies. We obtain differential equations with deviating arguments that relate the displacement (deformation) of the sensitive element of the sensor with the pressure law of the medium in the engine. Also, we develop analytical and numerical methods for solving these initial-boundary problems.

Keywords and phrases: differential equation, aerohydroelasticity, pipeline, pressure sensor, dynamics, finite difference method, Galerkin method.

AMS Subject Classification: 35Q35, 35Q74, 65M06

1. Введение. Упругие чувствительные элементы нашли широкое применение в авиационной, ракетно-космической и другой технике в приборах измерения давления различных сред, в топливно-регулирующих системах двигателей, в пилотажно-навигационных приборах и др. Развитие

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, № 19-41-730006).

техники требует постоянного совершенствования и разработки новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков давления, характеризующихся экстренными условиями эксплуатации. Датчики измерительных систем, принципы их работы, технические характеристики описываются, например, в работах [1–3, 5, 6, 8, 16, 18, 20, 21, 25, 26].

Все датчики давления независимо от принципа преобразования в той или иной степени критичны к воздействию температур и виброускорений. Вопросам повышению виброустойчивости датчиков, выбору конструкционных и функциональных материалов посвящена работа [9], влияние нестационарной температуры измеряемой среды на погрешность измерения рассмотрено в [22]. Более высокая достоверность измерения обеспечивается размещением датчика давления непосредственно на двигателе, но, как правило, при этом на датчики давления действуют большие диапазоны температур и повышенные виброускорения, что приводит к дополнительной погрешности измерений, и в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика.

Таким образом, возникает задача проектирования механической системы «трубопровод-датчик давления», в которой датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения давления рабочей среды на выходе из камеры сгорания двигателя (на входе в трубопровод) и деформацию упругого элемента датчика (расположенного на выходе из трубопровода), и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе. Математические модели системы «трубопровод-датчик давления» в случае несжимаемости рабочей среды рассматривались в работах [10–13, 15, 28–30]. В монографиях [4, 14] представлена совокупность моделей и методов исследования механической системы «трубопровод-датчик давления».

В данной работе исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе на основе одномерной и двумерной моделей, представляющих собой начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений. В одномерном случае для описания динамики чувствительного элемента используется модель, основой которой является обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс одностепенной системы. Динамика рабочей среды в трубопроводе описывается дифференциальным уравнением с частными производными, соответствующим линейной теории движения жидкостей или газов в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. Рассмотрено несколько способов исследования указанной одномерной начально-краевой задачи:

- (1) аналитическое исследование, позволяющее свести решение задачи к исследованию дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего между собой величину перемещения чувствительного элемента датчика с законом изменения давления рабочей среды в двигателе;
- (2) численно-аналитическое исследование с помощью метода Галеркина;
- (3) численное исследование на основе метода конечных разностей [17, 19].

В двумерном (осесимметричном) случае исследование задачи с помощью введения усредненных характеристик сводится к аналогичному исследованию одномерной модели.

2. Одномерная математическая модель системы «трубопровод-датчик давления».

2.1. *Постановка задачи.* Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей одномерной модели механической системы «трубопровод — датчик давления», имеет вид

$$\varphi_{tt} - a_0^2 \varphi_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, t) = P(t), \tag{2}$$

$$\varphi_x(l, t) = \dot{w}(t), \tag{3}$$

$$L(w(t)) \equiv m\ddot{w}(t) + f(\dot{w}(t), w(t)) = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, t) - P_*. \tag{4}$$

Здесь $\varphi(x, t)$ — потенциал скорости, описывающий движение рабочей среды в трубопроводе в модели сжимаемой среды; $w(t)$ — закон движения чувствительного (упруго закрепленного) элемента

датчика; ρ_0 , P_0 , a_0 — плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; $P(t)$ — закон изменения избыточного давления ($p = P_0 + P(t)$) рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя); P_* — некоторое внешнее (например, управляющее) воздействие; m — масса элемента; l — длина трубопровода; $f(\dot{w}(t), w(t))$ — некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации $w(t)$ и скорости деформации $\dot{w}(t)$; индексы x , t снизу обозначают частные производные по координате x и времени t , точка сверху — производную по t .

Волновое уравнение (1) описывает движение рабочей среды (газа или жидкости) в трубопроводе; условие (2) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; (3) — условие непротекания (условие равенства скорости элемента и скорости рабочей среды на поверхности этого элемента); уравнение (4) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций $\varphi(x, t)$ и $w(t)$, которую следует дополнить начальными условиями.

2.2. Сведение решения задачи к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом. Общее решение волнового уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x, t) = A\left(t - \frac{x}{a_0}\right) + B\left(t + \frac{x}{a_0}\right), \quad (5)$$

где

$$A\left(t - \frac{x}{a_0}\right), \quad B\left(t + \frac{x}{a_0}\right)$$

— произвольные функции своих аргументов.

Удовлетворяя условиям (2), (3), (4) получим

$$-\rho_0[A'(t) + B'(t)] = P(t), \quad (6)$$

$$-A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right) = a_0\dot{w}(t), \quad (7)$$

$$P_0 - P_* - \rho_0\left[A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] = L(w(t)). \quad (8)$$

Из (7), (8) находим

$$A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) = -\frac{1}{2\rho_0}[P_* - P_0 + L(w(t))] - \frac{a_0}{2}\dot{w}(t), \quad (9)$$

$$B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right) = -\frac{1}{2\rho_0}[P_* - P_0 + L(w(t))] + \frac{a_0}{2}\dot{w}(t). \quad (10)$$

Согласно (9), (10)

$$A'(t) = -\frac{1}{2\rho_0}\left[P_* - P_0 + L\left(w\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right)\right] - \frac{a_0}{2}\dot{w}\left(t + \frac{l}{a_0}\right), \quad (11)$$

$$B'(t) = -\frac{1}{2\rho_0}\left[P_* - P_0 + L\left(w\left(t - \frac{l}{a_0}\right)\right)\right] + \frac{a_0}{2}\dot{w}\left(t - \frac{l}{a_0}\right). \quad (12)$$

Подставляя (11), (12) в (6), получим уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее величину отклонения $w(t)$ чувствительного элемента датчика с законом изменения давления $P(t)$ рабочей среды в двигателе

$$L\left(w\left(t - \frac{l}{a_0}\right)\right) + L\left(w\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right) - \rho_0 a_0 \left[\dot{w}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{w}\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] = 2[P(t) + P_0 - P_*]. \quad (13)$$

Приведем пример. Пусть

$$L(w(t)) = m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma_1 w(t) + \gamma_3 w^3(t) + \xi w^2(t)\dot{w}(t), \quad (14)$$

где α , ξ — коэффициенты демпфирования; γ_1 , γ_3 — коэффициенты жесткости упругой связи.

Тогда уравнение (13) примет вид

$$\begin{aligned}
 m \left[\ddot{w} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + \ddot{w} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] + \alpha \left[\dot{w} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + \dot{w} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] + \\
 + \gamma_1 \left[w \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + w \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] + \gamma_3 \left[w^3 \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + w^3 \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] + \\
 + \xi \left[w^2 \left(t - \frac{l}{a_0} \right) \dot{w} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + w^2 \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \dot{w} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] - \\
 - \rho_0 a_0 \left[\dot{w} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) - \dot{w} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] = 2[P(t) + P_0 - P_*]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Некоторые методы исследования уравнений с отклоняющимся аргументом, подобных уравнению (15), изложены, например, в [7, 23, 24, 27].

Если $l/a_0 = \varepsilon$ — малый параметр (например, для воздуха $a_0 \approx 330$ м/с), то, проводя в (15) разложение по степеням ε и отбрасывая старшие по порядку члены, можно получить приближенное уравнение (без отклонения аргумента t), связывающее $w(t)$ и $P(t)$. Например, в линейной модели ($\gamma_3 = \xi = 0$), оставляя члены порядка единицы и ε^2 , получим

$$\begin{aligned}
 (m + \rho_0 l) \ddot{w}(t) + \alpha \dot{w}(t) + \gamma_1 w(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\left(m + \frac{\rho_0 l}{3} \right) w^{(4)}(t) + \alpha \ddot{w}(t) + \gamma_1 \ddot{w}(t) \right] + O(\varepsilon^4) = \\
 = P(t) + P_0 - P_*. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами можно искать классическими методами. Например, если пренебречь демпфированием ($\alpha = 0$), то несложно получить «отклик» $w(t)$ на периодическое изменение давления в двигателе $P(t) = A \sin \omega t$:

$$w(t) = \frac{P_0 - P_*}{\gamma_1} + w_0(c_1, c_2, c_3, c_4, t) + B \sin \omega t, \quad (17)$$

где общее решение однородного уравнения $w_0(c_1, c_2, c_3, c_4, t)$ является ограниченной величиной, а амплитуда вынужденных колебаний B определяется выражением

$$B = \frac{A}{\gamma_1 - (m + \rho_0 l)\omega^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega^2 \left[\left(m + \frac{1}{3}\rho_0 l \right) \omega^2 - \gamma_1 \right]}. \quad (18)$$

Согласно (18), имеет место резонанс, когда частота возмущающей силы ω близка к частоте собственных колебаний $\sqrt{\gamma_1/(m_0 + \rho_0 l)}$, при этом B является величиной порядка $1/\varepsilon^2 \gg 1$.

Если закон изменения давления имеет вид $P(t) = Ae^{\lambda t}$, отклик $w(t)$ согласно точной модели (15) в линейном приближении ($\gamma_3 = \xi = 0$) можно искать в виде

$$w(t) = \frac{P_0 - P_*}{\gamma_1} + Be^{\lambda t}.$$

Тогда получим связь между A и B :

$$B = \frac{A}{2 \left[m\lambda^2 + \alpha\lambda + \gamma_1 + \rho_0 a_0 \lambda \operatorname{th} \left(\frac{\lambda l}{a_0} \right) \right] \operatorname{ch} \left(\frac{\lambda l}{a_0} \right)}.$$

Заметим, что характер свободных колебаний упругого элемента зависит от корней нелинейного алгебраического уравнения

$$m\lambda^2 + \alpha\lambda + \gamma_1 + \rho_0 a_0 \lambda \operatorname{th} \left(\frac{\lambda l}{a_0} \right) = 0.$$

2.3. *Метод Галеркина.* Потенциал скорости $\varphi(x, t)$ представим в виде отрезка ряда по полной на отрезке $[0, l]$ системе функций $g_m(x) = \sin \lambda_m x$, удовлетворяющих однородным граничным условиям $g_m(0) = 0$, $g'_m(l) = 0$, соответствующим условиям (2), (3)

$$\varphi(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{m=1}^M \psi_m(t) \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2l}. \quad (19)$$

Удовлетворяя условиям (2), (3), находим

$$\dot{a} = -\frac{1}{\rho_0} P(t), \quad b = \dot{w}(t). \quad (20)$$

Подставляя (19), (20) в (1), (4), получим

$$\sum_{m=1}^M [\ddot{\psi}_m(t) + a_0^2 \lambda_m^2 \psi_m(t)] \sin \lambda_m x = \frac{1}{\rho} \dot{P}(t) - \ddot{w}(t)x, \quad (21)$$

$$P(t) - \rho_0 l \ddot{w}(t) - \rho_0 \sum_{m=1}^M \dot{\psi}_m(t) \sin \lambda_m l = P_* - P_0 + L(w(t)). \quad (22)$$

Согласно методу Галеркина, выполняя условие ортогональности невязки уравнения (21) к базисным функциям $\{\sin \lambda_k x\}_{k=1, \overline{M}}$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\psi}_k(t) + a_0^2 \lambda_k^2 \psi_k(t) = \frac{2}{l \rho_0 \lambda_k} \dot{P}(t) - 2\ddot{w}(t) \frac{\sin(\lambda_k l)}{l \lambda_k^2}, \quad k = 1, \dots, M. \quad (23)$$

Зададим $L(w(t))$ в виде $L(w(t)) = m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma_1 w(t)$ и продифференцируем уравнение (22):

$$\dot{P}(t) - \rho_0 l \ddot{w}(t) - \rho_0 \sum_{m=1}^M \ddot{\psi}_m(t) \sin \lambda_m l = m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma_1 w(t). \quad (24)$$

Дополняя систему обыкновенных дифференциальных уравнений (23), (24) для функций $w(t)$, $\psi_k(t)$, $k = 1, \dots, M$, начальными условиями, получим задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента.

2.4. *Метод конечных разностей.* Дополним задачу (1)–(4) начальными условиями:

$$w(0) = S, \quad \dot{w}(0) = Q, \quad (25)$$

$$\varphi(x, 0) = \psi_1(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \psi_2(x). \quad (26)$$

Пусть $L(w(t)) = m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma_1 w(t)$. Проведем численное исследование задачи (1)–(4), (25), (26) методом конечных разностей. Разобьем отрезок $[0, l]$ на N частей точками $x_n = h_x n$, $n = 0, 1, \dots, N$, где $h_x = l/N$, отрезок $[0, T]$ — на K частей точками $t_k = h_t k$, $k = 0, 1, \dots, K$, где $h_t = T/K$. Введем обозначения $\varphi(x_n, t_k) = \varphi_n^k$, $w(t_k) = w^k$.

Явная конечно-разностная аппроксимация уравнений и условий (1)–(4), (25), (26) имеет вид

$$\frac{\varphi_n^{k+1} - 2\varphi_n^k + \varphi_n^{k-1}}{h_t^2} - a_0^2 \frac{\varphi_{n+1}^k - 2\varphi_n^k + \varphi_{n-1}^k}{h_x^2} = 0, \quad (27)$$

$$-\frac{\rho_0}{h_t} (\varphi_0^{k+1} - \varphi_0^k) = P(t_k), \quad (28)$$

$$\frac{\varphi_N^{k+1} - \varphi_{N-1}^{k+1}}{h_x} = \frac{w^{k+1} - w^k}{h_t}, \quad (29)$$

$$\frac{m(w^{k+1} - 2w^k + w^{k-1}))}{h_t^2} + \frac{\alpha(w^k - w^{k-1})}{h_t} + \gamma_1 w^k = P_0 - P_* - \frac{\rho_0(\varphi_N^k - \varphi_{N-1}^{k-1})}{h_t}, \quad (30)$$

$$w^0 = S, \quad w^1 = w^0 + h_t Q, \quad (31)$$

$$\varphi_n^0 = \psi_1(x_n), \quad \varphi_n^1 = \psi_1(x_n) + h_t \psi_2(x_n). \quad (32)$$

Разностная схема (27)—(32) является условно устойчивой. Исследование устойчивости проводилось с использованием спектрального признака Неймана с привлечением критерия Бабенко—Гельфанда [17].

Алгоритм решения системы (27)—(32)

1: задаем начальные условия (31), (32);

2: из уравнения (27) находим значения потенциала φ

$$\varphi_i^{k+1} = 2\varphi_i^k - \varphi_i^{k-1} + \frac{a_0^2 h_t}{h_x^2} (\varphi_{i+1}^k - 2\varphi_i^k + \varphi_{i-1}^k), \quad i = 1, \dots, n-1;$$

3: из условия (28) находим значения потенциала в граничной точке

$$\varphi_0^{k+1} = -\frac{P(t_k)h_t}{\rho_0} + \varphi_0^k;$$

4: из уравнения (30) находим значения функции w

$$w^{k+1} = \frac{(P_0 - P_*)h_t^2}{m} - \frac{\rho_0 h_t}{m} (\varphi_n^k - \varphi_n^{k-1}) + 2w^k - w^{k-1} - \frac{\alpha h_t}{m} (w^k - w^{k-1}) - \frac{\gamma_1 h_t^2}{m} w^k;$$

5: из условия (29) находим

$$\varphi_n^{k+1} = \varphi_{n-1}^{k+1} + \frac{h_x}{h_t} (w^{k+1} - w^k).$$

Цикл повторяется с п. 2 по п. 5 для $k = 1, 2, \dots, K-1$.

2.5. Численный эксперимент. Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда — воздух ($\rho_0 = 1$). Параметры системы: $P_0 = P_* = 10^5$, $a_0 = 331$, $l = 5$, $m = 0,1$, $\alpha = 200$ (все значения приведены в системе СИ).

С помощью системы Mathematica численно получены решение уравнения (16) и решение системы (23), (24). При решении уравнения (16) начальные условия заданы в виде

$$w(0) = \dot{w}(0) = \ddot{w}(0) = \ddot{\dot{w}}(0) = 0.$$

Для расчета системы (23), (24) начальные условия заданы в виде

$$\psi_k(0) = \dot{\psi}_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad w(0) = \frac{P(0)}{\gamma_1}, \quad \dot{w}(0) = \ddot{w}(0) = 0.$$

На основе описанного алгоритма решения системы (27)—(32) разработана программа на C++, позволяющая получать графики функции $w(t)$ при различном задании закона изменения давления $P(t)$. При численном эксперименте было введено разбиение $n = 200$, $K = 100000$, начальные данные заданы в виде: $w(0) = \dot{w}(0) = 0$, $\psi_1(x) = 0$, $\psi_2(x) = 0$.

На рис. 1–3 представлены результаты расчетов при различном задании функции $P(t)$ и параметра γ_1 . Из этих графиков видно, что решение задачи (1)—(4), (25), (26), полученное по методу конечных разностей (рис. 3), и решение, построенное с помощью метода Галеркина (рис. 2), достаточно точно согласуются с численным решением уравнения (16) (рис. 1). Следует отметить значительное влияние параметра γ_1 на амплитуду колебаний подвижного элемента. Отметим также, что расчеты по методу конечных разностей с помощью метода Галеркина и численное решение уравнения (16) дают результаты, хорошо согласующиеся с решением (17), (18).

Замечание. Для несжимаемой среды в одномерной модели потенциал скорости имеет вид

$$\varphi(x, t) = \theta(t)x + \beta(t).$$

Давление определяется согласно нелинейному интегралу Лангранжа—Коши

$$p = P_0 - \rho_0 \left(\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2 \right)$$

и имеет вид

$$p(x, t) = P_0 - \rho_0 \left[\dot{\theta}(t)x + \dot{\beta}(t) + \frac{1}{2} \theta^2(t) \right].$$

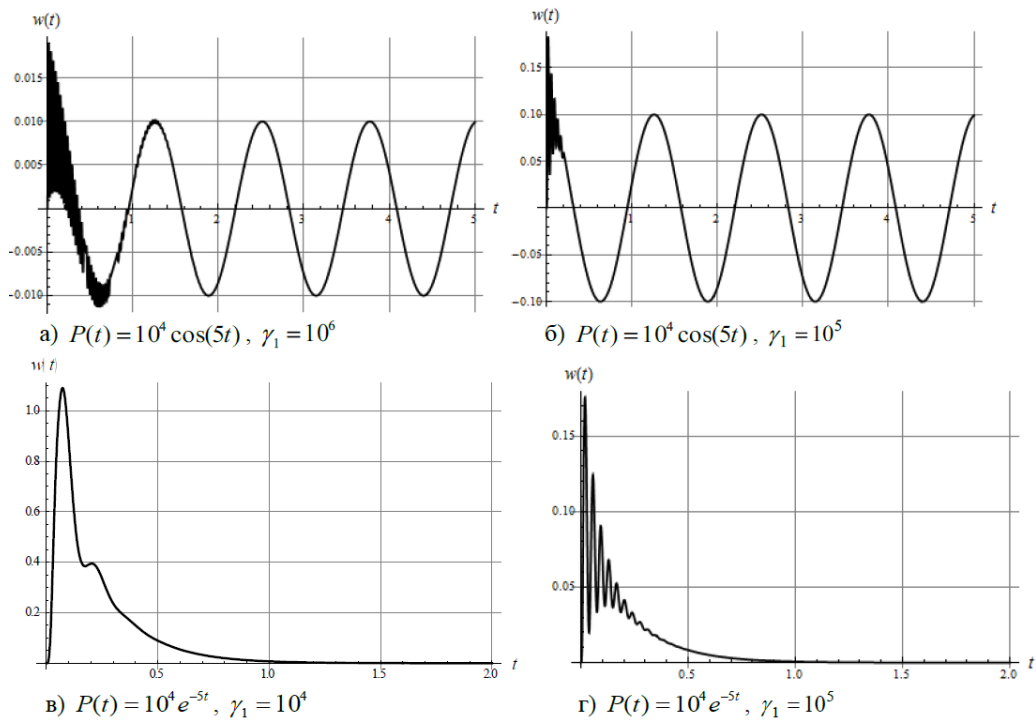


Рис. 1. Графики отклонения подвижного элемента датчика (решение уравнения (16)).

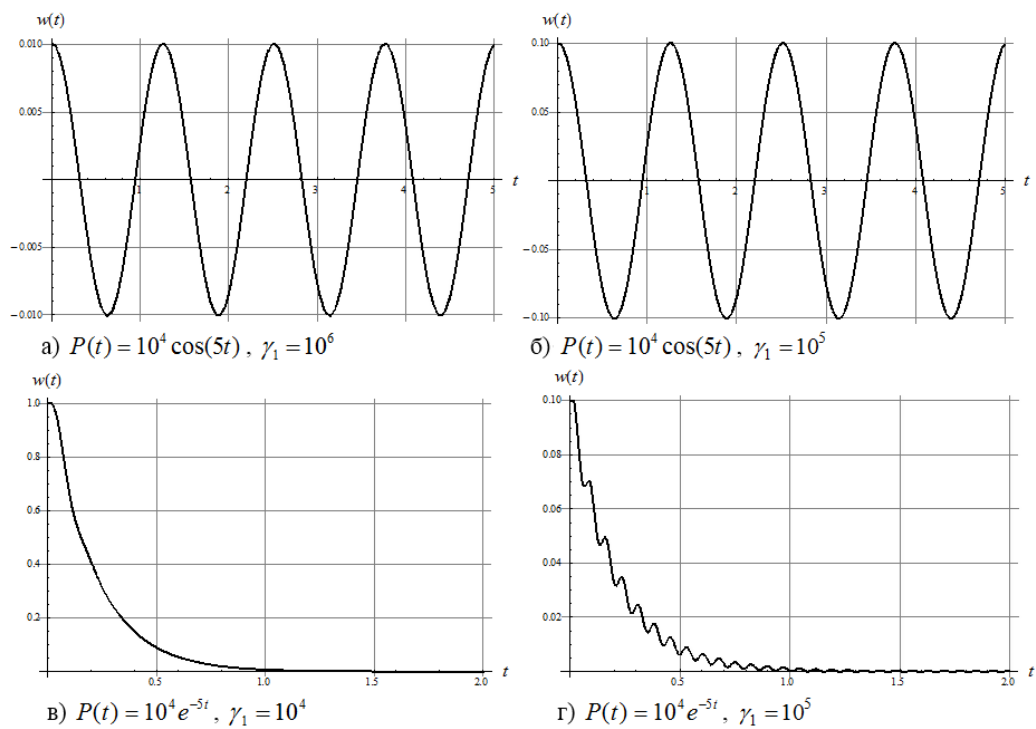


Рис. 2. Графики отклонения подвижного элемента датчика (метод Галеркина $M = 10$).

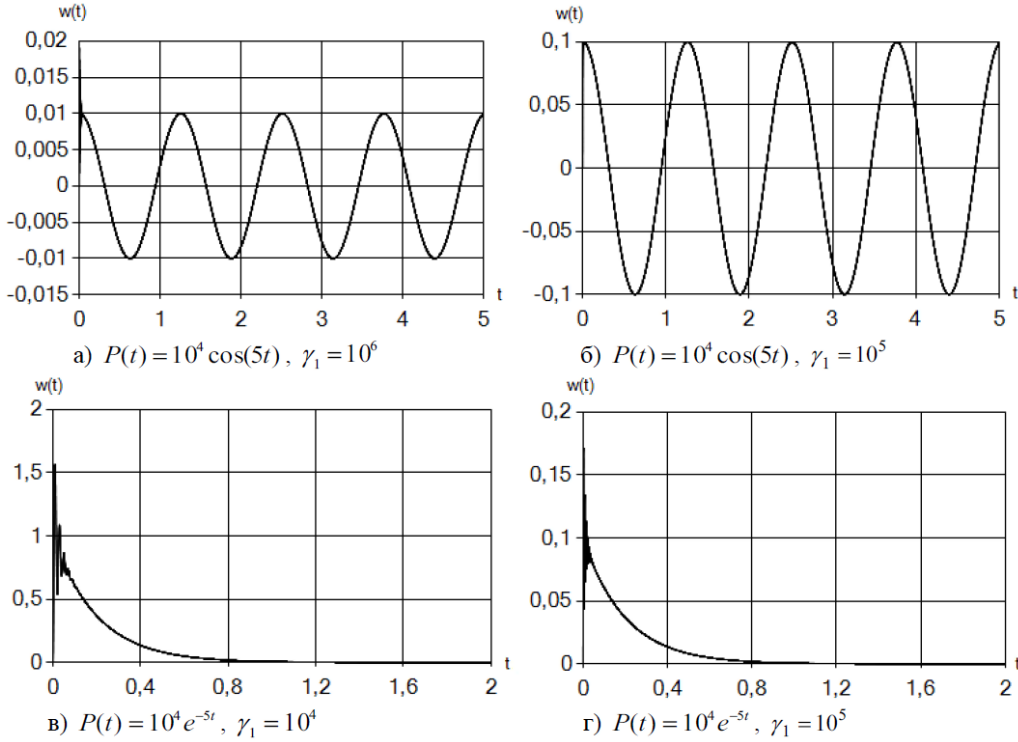


Рис. 3. Графики отклонения подвижного элемента датчика (метод конечных разностей).

Тогда, удовлетворяя условиям $p(0, t) = P_0 + P(t)$, $\varphi_x(l + w, t) = \dot{w}(t)$, получим уравнение, связывающее $w(t)$ и $P(t)$:

$$(m + \rho_0 l + \rho_0 w)\ddot{w} + f(\dot{w}, w) = P_0 - P_* + P(t).$$

3. Двумерная модель механической системы «трубопровод — датчик давления».

3.1. *Постановка задачи.* Приведем математическую постановку, соответствующую осесимметричной модели механической системы «трубопровод — датчик давления» в предположении, что рабочая среда является идеальной и сжимаемой:

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left(\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad (33)$$

$$\varphi_r(x, R, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (34)$$

$$\varphi_x(l, r, t) = \dot{w}(r, t), \quad r \in (0, R), \quad (35)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, t) = P(r, t), \quad r \in (0, R), \quad (36)$$

$$P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, r, t) - P_* = L(w(r, t)), \quad r \in (0, R). \quad (37)$$

Дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор в уравнении (37), описывающем динамику упругого элемента, может быть задан по-разному в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например

$$L(w(r, t)) = m\ddot{w} + D\nabla^4 w + N\nabla^2 w + \beta\nabla^4 \dot{w} + f(\dot{w}, w), \quad (38)$$

где

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3}.$$

В (33)–(38) $\varphi(x, r, t)$ — потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе; $w(r, t)$ — деформация упругого элемента, расположенного в конце трубопровода

$x = l$; ρ_0, P_0, a_0 — плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; $P(r, t)$ — заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод $x = 0$; P_* — внешнее воздействие на упругий элемент; m и D — погонная масса и изгибная жесткость упругого элемента; N — сжимающее (растягивающее) элемент усилие; β — коэффициент внутреннего демпфирования; R — радиус упругого элемента, представляющего собой круглую деформируемую пластину; $f(\dot{w}, w)$ — некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации $w(r, t)$ и скорости деформации $\dot{w}(r, t)$; индексы x, r, t снизу обозначают частные производные по координатам x, r и времени t , точка сверху — производную по t .

Уравнение (33) описывает движение идеального газа (жидкости) в трубопроводе; (34), (35) — условия непротекания стенки $r = R$ трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (36) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (37) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций $\varphi(x, r, t)$, $w(r, t)$, которая должна быть дополнена начальными условиями. Необходимо также задать граничные условия для $w(r, t)$ при $r = R$, соответствующие типу закрепления элемента (например, $w(R, t) = w_r(R, t) = 0$ для жесткого защемления, $w(R, t) = w_{rr}(R, t) = 0$ для шарнирного закрепления).

3.2. *Приближенный метод решения.* Рассмотрим один из способов решения задачи (33)–(37). Введем усредненные характеристики основных величин динамической системы

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \int_0^R r\varphi(x, r, t)dr, & \xi(t) &= \int_0^R rw(r, t)dr, \\ G(t) &= \int_0^R rP(r, t)dr, & Q(w) &= \int_0^R rL(w(r, t))dr.\end{aligned}\tag{39}$$

Тогда, проводя в (33)–(37) интегрирование по r в пределах от 0 до R , с учетом граничного условия (34), получим систему уравнений

$$\Phi_{tt} - a_0^2\Phi_{xx} = 0,\tag{40}$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t),\tag{41}$$

$$-\rho_0\Phi_t(0, t) = G(t),\tag{42}$$

$$(P_0 - P_*)\frac{R^2}{2} - \rho_0\Phi_t(l, t) = Q(w).\tag{43}$$

Общее решение уравнения (40) имеет вид

$$\Phi(x, t) = A\left(t - \frac{x}{a_0}\right) + B\left(t + \frac{x}{a_0}\right).\tag{44}$$

Положим $w(r, t) = g(r)\theta(t)$,

$$w_0 = \int_0^R rg(r)dr,$$

где функция $g(r)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента (например, в случае жесткого защемления упругого элемента в точках его границы $r = R$, можно задать $g(r) = 1 - 3(r/R)^2 + 2(r/R)^3$). Тогда

$$\xi(t) = \theta(t) \cdot \int_0^R rg(r)dr = w_0\theta(t).$$

Пусть, например, $L(w(r, t)) = m\ddot{w} + D\nabla^4 w + N\nabla^2 w + \beta\nabla^4 \dot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w$. Тогда

$$Q(w) = m_0\ddot{\theta}(t) + \alpha_0\dot{\theta}(t) + \gamma_0\theta(t),\tag{45}$$

где

$$m_0 = m \int_0^R r g(r) dr, \quad \alpha_0 = \alpha \int_0^R r g(r) dr + \beta \int_0^R r \nabla^4 g(r) dr,$$

$$\gamma_0 = D \int_0^R r \nabla^4 g(r) dr + N \int_0^R r \nabla^2 g(r) dr + \gamma \int_0^R r g(r) dr.$$

Подставляя (44), (45) в (41)–(43) и проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям для одномерного случая (1)–(4), получим уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее характеристику отклонения упругого элемента $\theta(t)$ с законом изменения давления $G(t)$. Некоторые методы исследования этого уравнения, так же как и численный метод решения задачи (40)–(43), рассмотрены выше при обсуждении одномерной математической модели.

Замечание. Математическая постановка, соответствующая модели механической системы «трубопровод-датчик давления» в предположении, что рабочая среда является идеальной несжимаемой, имеет вид (33)–(37), при этом в уравнении (33) отсутствует член φ_{tt} и функция $\varphi(x, r, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Для решения задач такого типа эффективным является метод Фурье, а также (для плоских задач) методы теории функции комплексного переменного [4, 10–15, 28–30].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н. Датчики контроля и регулирования. — М.: Машиностроение, 1965.
2. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. — М.: Машиностроение, 1981.
3. Андреева Л. Е., Богданова Ю. А. Методы проектирования мембранных упругих элементов. — М.: Машиностроение, 1972.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод–датчик давления». — Ульяновск: УлГТУ, 2008.
5. Аш Ж. и др. Датчики измерительных систем. Кн. 1. — М.: Мир, 1992.
6. Аш Ж. и др. Датчики измерительных систем. Кн. 2. — М.: Мир, 1992.
7. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
8. Белозубов Е. М., Васильев В. А., Запеевлин А. И., Чернов П. С. Проектирование упругих элементов нано- и микроэлектромеханических систем // Измерит. техн. — 2011. — № 1. — С. 17–19.
9. Белозубов Е. М., Мокров Е. А., Тихомиров Д. В. Минимизация погрешности тонкопленочных тензорезисторных датчиков давления при воздействии нестационарной температуры // Датчики и системы. — 2004. — № 1. — С. 26–29.
10. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д. Об одной математической модели системы «трубопровод–датчик давления» // Тр. 4 Междунар. науч.-техн. конф. «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов. Математика». — Ульяновск: УлГТУ, 2001. — С. 43–44.
11. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д. Об одной математической модели системы «трубопровод–датчик давления» // Мат. 11 Межвуз. конф. «Математическое моделирование и краевые задачи». — Самара: СамГТУ, 2001. — С. 15–17.
12. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А. Математическая модель системы «трубопровод-датчик давления» // в кн.: Механика и процессы управления. — Ульяновск: УлГТУ, 2002. — С. 9–15.
13. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А. Математическое моделирование механической системы «трубопровод-датчик давления» // Датчики и системы. — 2003. — № 6 (49). — С. 12–15.
14. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. — Ульяновск: УлГТУ, 2018.
15. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Серебрянникова Е. С. Математическое моделирование системы «трубопровод-датчик давления» // Ж. Средневож. мат. о-ва. — 2010. — 12, № 4. — С. 85–93.

16. Герасимов В. К., Тыжнов Г. И. К вопросу выбора упругого чувствительного элемента для измерения давления// Изв. вузов. Приборостроение. — 1973. — № 6. — С. 80–83.
17. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. Введение в теорию. — М.: Наука, 1977.
18. Казарян А. А., Грошев Г. П. Универсальный датчик давления// Измерит. техн. — 2008. — № 3. — С. 26–30.
19. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
20. Корсунов В. П. Упругие чувствительные элементы. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980.
21. Михайлов П. Г., Мокров Е. А., Митрохин С. В., Сергеев Д. А. Особенности метрологического обеспечения современных датчиков пульсаций давлений// Изв. Южн. федер. ун-та. Техн. науки. — 2012. — 130, № 5. — С. 174–179.
22. Мокров Е. А., Лебедев Д. В., Базаев В. П., Ефремов Е. В., Семина И. А., Колчин П. А. О конструктивно-технологическом совершенствовании тензорезисторных тонкопленочных датчиков давлений// Датчики и системы. — 2008. — № 6. — С. 2–7.
23. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
24. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1965.
25. Пирогов С. П. Манометрические трубчатые пружины. — СПб.: Недра, 2009.
26. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
27. Bellman R., Cooke K. L. Differential-Difference Equations. — New York–London: Academic Press, 1963.
28. Velmisov P. A., Garnefska L. V., Gorbokononko V. D. An investigation of mathematical models “pipeline-pressure sensor”// Proc. XXVII Summer School “Applications of Mathematics in Engineering and Economics”. — Sofia, Bulgaria: Heron Press, 2002. — P. 542–548.
29. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the “pipeline-pressure sensor” system// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1353. — 012085.
30. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline-pressure sensor”// AIP Conf. Proc. — 2019. — 2172, № 1. — 030006.

Вельмисов Петр Александрович
Ульяновский государственный технический университет
E-mail: velmisov@ulstu.ru

Тамарова Юлия Александровна
Ульяновский государственный технический университет
E-mail: kazakovau@mail.ru

Покладова Юлия Валерьевна
Ульяновский государственный технический университет
E-mail: pokladovau@inbox.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 27–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-27-36

УДК 511.348

МУЛЬТИПОТЕНТНЫЕ МНОЖЕСТВА В ОДНОРОДНЫХ КОММУТАТИВНЫХ МОНОИДАХ

© 2022 г. Ю. П. ВИРЧЕНКО

Аннотация. Введено понятие о k -потентных множествах в моноидах, $k \in \mathbb{N}$, установлены их простейшие свойства. Выделен класс однородных моноидов, обладающих набором образующих элементов. Найдены простейшие необходимые условия того, чтобы фиксированное множество в таком моноиде было k -потентным. При наличии коммутативности в моноидах установлен изоморфизм каждого из них моноиду $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ с соответствующим ему множеством меток \mathfrak{J} . Для коммутативных однородных моноидов, обладающих множеством образующих, доказаны необходимые и достаточные условия k -потентности их подмножеств. Описано приложение этого результата к анализу так называемой бинарной проблемы Гольдбаха в аналитической теории чисел.

Ключевые слова: коммутативность, моноид, мультипотентное множество, однородность, простое число, цикл.

MULTIPOTENT SETS IN HOMOGENEOUS COMMUTATIVE MONOIDS

© 2022 Yu. P. VIRCHENKO

ABSTRACT. In this paper, we introduce the concept of k -potent sets in monoids, $k \in \mathbb{N}$, establish their simplest properties, and indicate a class of homogeneous monoids with a set of generating elements. We find simple necessary conditions of the k -potency of a fixed set in such a monoid. For commutative monoids, we establish an isomorphism between them and the monoid $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ with the corresponding label set \mathfrak{J} . For commutative homogeneous monoids with sets of generators, we prove necessary and sufficient conditions for the k -potency of their subsets. Finally, we apply this result to the binary Goldbach problem in analytic number theory.

Keywords and phrases: commutativity, monoid, multipotent set, homogeneity, prime number, cycle.

AMS Subject Classification: 06F05, 20M14, 11P32

1. Введение. Понятие о мультипотентных, в частности, квадратентных множествах в моноидах возникает, естественным образом, как обобщение представления о множествах, которые являются объектом изучения в некоторых задачах теории чисел, связанных с суммами чисел со специальными свойствами. Таковыми являются, например, задача о представлении чисел из \mathbb{N} в виде сумм n -х степеней фиксированного числа натуральных чисел — так называемая проблема Варинга (см. [8]) — или задача о представлении всех нечетных чисел в виде сумм трех простых чисел — проблема Гольдбаха (см. [7]). Замечательно, что при алгебраическом анализе указанных задач оказывается важным только лишь то, что на изучаемом множестве \mathfrak{A} элементов задана бинарная алгебраическая ассоциативная операция коммутативной композиции, которую будем в дальнейшем обозначать знаком $+$, так что для любых двух элементов $x \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{A}$ определен элемент $x + y \in \mathfrak{A}$. Задание ассоциативной операции превращает множество \mathfrak{A} в *полугруппу*,

в частности, коммутативную. В связи с таким положением, настоящая работа посвящена описанию общей абстрактной постановки и выработки подхода к решению указанных выше и родственных им задач.

Пусть \mathfrak{A} — полугруппа с единицей e , в общем случае, некоммутативная, т.е. \mathfrak{A} является моноидом¹ (см. [1]). Операцию композиции обозначим посредством $*$. В соответствии с этим, степень d любого элемента $x \in \mathfrak{A}$ будем обозначать посредством x_*^d . Наличие единицы не ограничивает общности рассмотрения, так как любую полугруппу \mathfrak{A} , при отсутствии в ней единицы, всегда можно дополнить новым элементом e , который обладает свойствами единицы, т.е. для любого элемента $x \in \mathfrak{A}$ имеет место $x * e = e * x = x$, при этом расширяв таблицу умножения в \mathfrak{A} .

Определим на основе операции $*$ в моноиде \mathfrak{A} аналогичную операцию на классе $P(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} : \mathfrak{B} \neq \emptyset\}$ всех непустых подмножеств из \mathfrak{A} . Пусть $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{A}$, $j = 1, 2$ — любая пара подмножеств из \mathfrak{A} . Определим подмножество

$$\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{B}_2 = \{x \in \mathfrak{B} : x = y_1 * y_2, y_j \in \mathfrak{B}_j, j = 1, 2\} \subset \mathfrak{A}. \quad (1)$$

Отображение $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}$, которое паре $\langle \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \rangle$ ставит в соответствие множество (1), определяет на классе $P(\mathfrak{A})$ бинарную ассоциативную и коммутативную операцию и тем самым превращает этот класс в коммутативный моноид, единицей которого служит одноэлементное подмножество $\{e\}$. На основе операции $*$ на классе $P(\mathfrak{A})$ вводится понятие о степени $d \in \mathbb{N}$ любого подмножества $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, которую будем обозначать, так же как и выше, посредством \mathfrak{B}_*^d . Именно, для любого $d \in \mathbb{N}$ положим $\mathfrak{B}_*^{d+1} = \mathfrak{B}_*^d * \mathfrak{B}$, $d \in \mathbb{N}$ и, посредством этого соотношения, определим, индуктивным образом, множества \mathfrak{B}_*^d , $d \in \mathbb{N}$.

Введем теперь базовое понятие k -потентного множества.

Определение 1. Подмножество \mathfrak{B} моноида \mathfrak{A} будем называть мультипотентным порядка $k \in \mathbb{N}$ (k -потентным), если имеет место равенство

$$\mathfrak{B}_*^k = \mathfrak{A}.$$

В частности, при $k = 2$ такое множество \mathfrak{B} будем называть *квадратопотентным*. Для него имеет место

$$\mathfrak{B}_*^2 = \{x \in \mathfrak{A} : x = y * z; y, z \in \mathfrak{B}\} = \mathfrak{A}. \quad (2)$$

Основной задачей развиваемой далее теории мультипотентных множеств является установление признаков, на основе которых можно было бы судить, является ли k -потентным заданное подмножество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

2. Моноиды. Пусть \mathfrak{B} — подмоноид моноида \mathfrak{A} , т.е. такое подмножество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, которое замкнуто относительно операции $*$, так что для любой пары подмножеств $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{B}$, $j = 1, 2$, имеет место $\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$. Подмоноид $M(\mathfrak{C})$ называется минимальным по отношению к \mathfrak{C} , если любой подмоноид \mathfrak{B} , содержащий \mathfrak{C} , обязательно содержит $M(\mathfrak{C})$.

Множество \mathfrak{C} будем называть *порождающим* минимальный моноид $M(\mathfrak{C})$. В частности, если $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ и $M(\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}$, то \mathfrak{C} порождает моноид \mathfrak{A} .

Теорема 1. Для любого моноида \mathfrak{A} и любого множества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ существует единственный минимальный моноид $M(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{A}$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{d=0}^{\infty} \mathfrak{C}_*^d, \quad \mathfrak{C}_*^0 = \{e\}.$$

Пусть x_j , $j = 1, \dots, d$ — набор любых отличных от e элементов моноида, не обязательно различных между собой. Тогда элемент $x_1 * \dots * x_d \in \mathfrak{B}_*^d$ и, точно так же, согласно определению моноида,

¹По поводу общих свойств полугрупп см., например, [3, 6].

он принадлежит любому моноиду, содержащему элементы x_j , $j = 1, \dots, d$. Следовательно, любой такой элемент принадлежит $M(\mathfrak{C})$ и поэтому, ввиду произвольности $d \in \mathbb{N}$, $M(\mathfrak{C}) \supset \mathfrak{B}$.

С другой стороны, \mathfrak{B} является моноидом ввиду замкнутости этого множества относительно операции $*$. В самом деле, если $y_j \in \mathfrak{B}$; $j = 1, 2$, то существуют такие числа $d_1 \in \mathbb{N}_+$ и $d_2 \in \mathbb{N}_+$, что $y_j \in \mathfrak{B}_*^{d_j}$; $j = 1, 2$. Тогда существуют такие последовательности $\langle x_1^{(j)}, \dots, x_{d_j}^{(j)} \rangle$ элементов из \mathfrak{C} , что $y_j = x_1^{(j)} \dots x_{d_j}^{(j)}$, $j = 1, 2$. Отсюда следует, что

$$y_1 * y_2 = x_1^{(1)} * \dots * x_{d_1}^{(1)} * x_1^{(2)} * \dots * x_{d_2}^{(2)} \in \mathfrak{B}_*^{d_1} * \mathfrak{B}_*^{d_2} = \mathfrak{B}_*^{d_1+d_2},$$

т.е. $y_1 * y_2 \in \mathfrak{B}$.

Так как \mathfrak{B} — моноид, содержащий \mathfrak{C} , то $\mathfrak{B} \supset M(\mathfrak{C})$. Из полученных двух противоположных включений следует, что $\mathfrak{B} = M(\mathfrak{C})$. \square

Следствие 1. Минимальный моноид $M(\mathfrak{C})$, порожденный множеством $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, состоит из всех произведений $x = x_1 * x_2 * \dots * x_l$, составляемых из компонент последовательностей $\langle x_1, x_2, \dots, x_l \rangle$, где $x_j \in \mathfrak{C}$, $j = 1, \dots, l$, $l \in \mathbb{N}$. Если моноид \mathfrak{A} коммутативен, то элементы x моноида $M(\mathfrak{C})$ определяются множеством пар $\{\langle y_j, m_j \rangle; j = 1, \dots, d\}$, где x_j — различные элементы из \mathfrak{C} , $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$ и каждый из них представим в виде $m_1 y_1 + \dots + m_d y_d$, $m_1 + \dots + m_d = l$ с $m_j y_j \equiv (y_j)_+^{m_j}$, $j = 1, \dots, d$.

Определение 3. Если для моноида \mathfrak{A} найдется такое порождающее его множество \mathfrak{B}_0 , которое не содержит в себе никакого другого множества, порождающего моноид \mathfrak{A} , то множество \mathfrak{B}_0 называется системой образующих элементов моноида \mathfrak{A} , а его элементы — образующими моноида.

Замечание 1. Для заданного моноида \mathfrak{A} система образующих не обязана существовать.

Замечание 2. Если для элемента x моноида \mathfrak{A} определен обратный ему элемент y такой, что $x * y = e$ (в частности, такое положение имеет место, если \mathfrak{A} является группой с операцией $*$), и если $x \in \mathfrak{B}_0$, то с точки зрения Определения 3 x^{-1} может входить в \mathfrak{B}_0 как независимый элемент.

Если множество \mathfrak{A} конечно, то соответствующий моноид с операцией $*$ будем называть конечным. В противном случае бесконечным. Приведем пример простейшего конечного моноида.

Пример 1. Моноид $\mathfrak{A} = \{0, 1, 2, \dots, d-1\}$, $d \geq 2$, с операцией $*$ сложения по модулю d и единичным элементом $e = 0$. Этот моноид конечен, коммутативен и имеет один образующий элемент $x = 1$.

Заметим, что в случае, когда моноид \mathfrak{A} обладает множеством образующих, и он является минимальным для некоторого множества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, $M(\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}$, совсем не обязательно, что образующие принадлежат \mathfrak{C} . В моноиде примера 1 при $d = 6$ множество $\mathfrak{C} = \{2, 3\}$ его порождает, но содержит образующий элемент моноида — число 1.

Определение 4. Будем говорить, что моноид \mathfrak{A} содержит цикл, если в нем существует такой элемент a , для которого имеются последовательности $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ и $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ такие, что выполняется равенство $x_1 * \dots * x_m * a * y_1 * \dots * y_n = a$.

Моноид примера 1 содержит цикл, у которого $a = e = 0$, $d = n$ и $y_j = 1$, $j = 1, \dots, n$, так как $1_+^n = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_n \bmod n = 0$ и $x_i = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Легко видеть, что в конечных моноидах всегда имеется цикл, так как взяв произвольный элемент z конечного моноида \mathfrak{A} и построив последовательность $\langle z_*^l; l = 1, \dots, n \rangle$, ввиду конечности \mathfrak{A} , для любого элемента $z_*^m \equiv a$, при достаточно большом $n > m$, что выполняется $a * z_*^{n-m} = a$.

Заметим также, что если моноид \mathfrak{A} с операцией $*$ для какого-то элемента x имеет обратный элемент x^{-1} , $e = x * x^{-1}$ и, в частности, если моноид является группой относительно этой операции, то он, тривиальным образом, содержит цикл $x = x * x^{-1} * x$.

В настоящей работе будем рассматривать моноиды, у которых отсутствуют циклы.

Определение 5. Если в моноиде \mathfrak{A} отсутствуют циклы, то такой моноид назовем направленным.

Теорема 2. Если моноид \mathfrak{A} направленный и обладает набором \mathfrak{B}_0 образующих его элементов, то этот набор определен однозначным образом.

Доказательство. Положим имеются два набора \mathfrak{B}_0 и \mathfrak{B}'_0 образующих элементов так, что их симметрическая разность не пуста $(\mathfrak{B}'_0 \setminus \mathfrak{B}_0) \cup (\mathfrak{B}_0 \setminus \mathfrak{B}'_0) \neq \emptyset$. Положим, для определенности, что $x \in \mathfrak{B}_0 \setminus \mathfrak{B}'_0 \neq \emptyset$. Тогда этот элемент представим в виде композиции образующих набора \mathfrak{B}'_0 :

$$x = x'_1 * \dots * x'_l, \quad x'_j \in \mathfrak{B}'_0, \quad j = 1, \dots, l.$$

В свою очередь, каждая из образующих x'_j представима в виде композиции образующих элементов из набора \mathfrak{B}_0 :

$$x'_j = x_{k_1^{(j)}} * \dots * x_{k_{m_j}^{(j)}}; \quad x_{k_s^{(j)}} \in \mathfrak{B}_0, \quad s = 1, \dots, m_j; \quad j = 1, \dots, l.$$

Отсюда следует, что

$$x = (x_{k_1^{(1)}} * \dots * x_{k_{l_1}^{(1)}}) * \dots * (x_{k_1^{(l)}} * \dots * x_{k_{m_l}^{(l)}}). \quad (3)$$

Если в последовательности сомножителей присутствует элемент x , как один из образующих элементов моноида \mathfrak{A} , то это означает, что в \mathfrak{A} имеется цикл и это противоречит направленности моноида. Если же в этой последовательности элемент x отсутствует, то это противоречит тому, что он входит в набор образующих элементов, так как ввиду представления в виде (3) его можно исключить из набора \mathfrak{B}_0 . \square

Целью настоящей работы является изучение направленных и, следовательно, бесконечных моноидов. Приведем примеры таких моноидов. Имея в виду предмет настоящей работы, все моноиды в приводимых ниже примерах коммутативны.

В примерах 2–5 числовое множество \mathfrak{A} имеют счетную мощность. Это, во-первых, направленные моноиды, связанные с натуральными числами.

Пример 2. Моноид $\mathfrak{A} = \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ с операцией сложения натуральных чисел. Он имеет одну образующую $1 \in \mathbb{N}_+$. Единицей моноида является $\{0\}$.

Пример 3. Моноид $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ с операцией умножения натуральных чисел. Используя основную теорему арифметики [2], заключаем, что он имеет бесконечный набор образующих, которые представляются множеством простых натуральных чисел \mathfrak{P} .

Следующие примеры связаны с рациональными числами.

Пример 4. Направленный моноид $\mathfrak{A} = \mathbb{Q} = \{p/q \in \mathbb{Q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$, состоящий из положительных рациональных чисел. Он имеет бесконечный набор образующих, который состоит из всех дробей p/q , у которых числитель и знаменатель являются не равными друг другу простыми числами.

Пример 5. Моноид $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cup \{0\}$ с операцией сложения рациональных чисел. Он является направленным, но не обладает множеством образующих. Последнее связано с тем, что любое множество \mathfrak{B} дробей $p/q \in \mathbb{Q}_+$, которое могло бы быть множеством образующих, и любого интервала $(0, s^{-1})$, $s \in \mathbb{N}$, можно сузить, ограничив его только дробями из $\mathfrak{B} \cap (0, s^{-1})$.

Моноиды, связанные с положительными действительными числами, которые имеют мощность континуума.

Пример 6. Моноиды с множествами $\mathfrak{A} = (0, \infty)$ и $\mathfrak{A} = [0, \infty)$ с операциями умножения и сложения действительных чисел, соответственно. Они не имеют множества образующих по причине, указанной в предыдущем примере.

Дальнейшие примеры направленных моноидов, в конструкции которых используются числовые множества, строятся на основе каждого из моноидов, указанных в примерах 2–6, посредством построения их декартовых степеней, кратность которых (показатель декартовой степени) может

быть как конечной, так и бесконечной. В последнем случае кратность декартовой степени может иметь любое бесконечное кардинальное число. При этом операция композиции в конструируемых моноидах получается в виде покомпонентного применения операции композиции в моноидах, входящих в состав декартовой степени. Легко видеть, что для всех таких моноидов реализуется точно такая же ситуация с точки зрения существования в них множества образующих.

3. Минимальные k -потентные множества. Прежде всего, отметим справедливость простейших утверждений, связывающих операцию композиции в моноиде с булевыми операциями.

Лемма 1. *Для любых подмножеств \mathfrak{B}_j , $j = 1, 2$; \mathfrak{C} моноида \mathfrak{A} имеют место равенства*

$$(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} = (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cup (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C}), \quad (\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} = (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C}). \quad (4)$$

Доказательство. Положив, что $x \in \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ и $y \in \mathfrak{C}$, т.е. $x * y \in (\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C}$, где, не ограничивая общности, $x \in \mathfrak{B}_1$, получим, что $x * y \in \mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}$ и, следовательно, $x * y \in (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cup (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Таким образом, ввиду произвольности x и y , $(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} \subset (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cup (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Обратное включение доказывается аналогично и поэтому выполняется первое из равенств (4).

Пусть теперь $x \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ и, как и ранее, $y \in \mathfrak{C}$. Тогда $x \in \mathfrak{B}_1$ и $x \in \mathfrak{B}_2$. Поэтому $x * y \in \mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}$ и, одновременно, $x * y \in \mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C}$. Следовательно, $x * y \in (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Ввиду произвольности элементов x и y имеет место включение $(\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} \subset (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Обратное включение доказывается аналогично и поэтому выполняется второе равенство в (4). \square

Индукцией по числу компонент, входящих, соответственно, в объединение и пересечение подмножеств моноида \mathfrak{A} , используя формулы (4), убеждаемся в справедливости следующих равенств.

Следствие 2. *Для любого семейства множеств $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{A}$, $j \in \Sigma$, и любого множества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ имеют место равенства*

$$\left(\bigcup_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j \right) * \mathfrak{C} = \bigcup_{j \in \Sigma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}), \quad \left(\bigcap_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j \right) * \mathfrak{C} = \bigcap_{j \in \Sigma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}). \quad (5)$$

Из формул (5) получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Для любых семейств множеств $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{A}$, $j \in \Sigma$ и $\mathfrak{C}_k \subset \mathfrak{A}$, $k \in \Gamma$ имеют место равенства*

$$\left(\bigcup_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j \right) * \left(\bigcup_{k \in \Gamma} \mathfrak{C}_k \right) = \bigcup_{j \in \Sigma, k \in \Gamma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}_k), \quad \left(\bigcap_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j \right) * \left(\bigcap_{k \in \Gamma} \mathfrak{C}_k \right) = \bigcap_{j \in \Sigma, k \in \Gamma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}_k). \quad (6)$$

Обратимся к изучению мультипотентных множеств в направленных моноидах.

Определение 6. k -потентное подмножество \mathfrak{B}_∞ моноида \mathfrak{A} будем называть минимальным, если оно не содержит в себе собственного подмножества \mathfrak{B} , которое является мультипотентным порядка k для моноида \mathfrak{A} .

Очевидно, что в силу данного определения любое k -потентное множество одновременно является l -потентным при любом $l > k$.

В отличие от понятия системы образующих элементов моноида, которая может отсутствовать, понятие минимального k -потентного множества обладает универсальностью, так как справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *В любом моноиде \mathfrak{A} , для любого множества $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ и при любом значении $k \in \mathbb{N}$ имеется по крайней мере одно минимальное k -потентное множество \mathfrak{B}_∞ , содержащее \mathfrak{B} .*

Доказательство. Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$. Множество \mathfrak{A} является тривиальным образом k -потентным, так как $\mathfrak{A} * \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ и оно содержит \mathfrak{B} . Допустим, что оно не является минимальным. Тогда существует сужающаяся последовательность $\langle \mathfrak{B}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ k -потентных множеств,

$\mathfrak{B}_{n+1} \subset \mathfrak{B}_n$, $(\mathfrak{B}_n)_*^k = \mathfrak{A}$, каждое из которых содержит \mathfrak{B} , но не является минимальным. Рассмотрим теоретико-множественный предел

$$\mathfrak{B}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n.$$

Это множество непусто, оно содержит множество \mathfrak{B} и является k -потентным, так как

$$(\mathfrak{B}_\infty)_*^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n \right)_*^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathfrak{B}_n)_*^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A} \right)_*^k = \mathfrak{A}. \quad \square$$

Замечание 3. При любом $k \in \mathbb{N}$ минимальное k -потентное множество, вообще говоря, не единственно.

Допустим, что моноид \mathfrak{A} направленный. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Любое k -потентное множество \mathfrak{B} в направленном моноиде содержит единицу e моноида.

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы не имеет места. Тогда, так как $\mathfrak{B}_*^k = \mathfrak{A}$ и $e \in \mathfrak{A}$, то должны существовать такие элементы $x_j \in \mathfrak{B}$, $j = 1, \dots, k$, для которых $x_1 * \dots * x_k = e$. Однако ввиду направленности моноида \mathfrak{A} , т.е. отсутствия в нем циклов, это равенство может иметь место только в случае, когда $x_j = e$, $j = 1, \dots, k$. \square

Далее будем предполагать, что моноид \mathfrak{A} , наряду с направленностью, обладает системой образующих \mathfrak{B}_0 . Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Для любого направленного моноида \mathfrak{A} , обладающего системой образующих \mathfrak{B}_0 , при любом $k \in \mathbb{N}$, каждое k -потентное множество \mathfrak{B} содержит \mathfrak{B}_0 .

Доказательство. Допустим противное, что в системе \mathfrak{B}_0 образующих элементов моноида \mathfrak{A} имеется такой элемент x , который не содержится в \mathfrak{B} . Тогда, так как \mathfrak{B} является k -потентным, то в этом множестве найдется такая последовательность $\langle y_1, \dots, y_k \rangle$, $y_j \in \mathfrak{B}$, $j = 1, \dots, k$, что имеет место равенство $y_1 * \dots * y_k = x$. Следовательно, так как каждый из элементов y_j представим в виде композиции $y_j = x_{k_1^{(j)}} * \dots * x_{k_{m_j}^{(j)}}$, где ее компонентами $x_{k_l^{(j)}}$, $l = 1, \dots, m_j$, являются образующие элементы моноида \mathfrak{A} , $j = 1, \dots, k$. Подстановка этих разложений элементов y_j , $j = 1, \dots, k$, в композицию $y_1 * \dots * y_k = x$ дает представление образующего элемента x в виде произведения, в состав которого входят только образующие элементы из \mathfrak{B}_0 .

Может реализоваться только один из двух случаев:

- (i) в списке всех компонент последовательностей $\langle x_{k_1^{(j)}}, \dots, x_{k_{m_j}^{(j)}} \rangle$, $j = 1, \dots, k$, отсутствует образующий элемент x ;
- (ii) среди всех компонент последовательностей $\langle x_{k_1^{(j)}}, \dots, x_{k_{m_j}^{(j)}} \rangle$, $j = 1, \dots, k$, присутствует элемент x .

Если имеет место положение (i), то элемент x не может входить в систему образующих элементов \mathfrak{B}_0 ввиду минимальности ее выбора. Пусть имеет место положение (ii) и l — номер последнего элемента из числа тех, которые входят в состав композиции $x = y_1 * \dots * y_k$ и в композиции которого присутствует образующий элемент x , а $k_s^{(l)}$ — номер такого элемента в композиции элемента y_l , что $x_{k_s^{(l)}}^{(l)} = x$, так что он представляет последнее вхождение этого образующего элемента в композицию $y_l = x_{k_1^{(j)}} * \dots * x_{k_{m_j}^{(j)}}$. Тогда в композиции $x = y_1 * \dots * y_k$ имеется цикл

$$(y_1 * \dots * y_{l-1} * x_{k_1^{(l)}} * \dots * x_{k_{s-1}^{(l)}}) * x * (x_{k_{s+1}^{(l)}} * \dots * x_{k_{m_l}^{(l)}} * y_{l+1} * \dots * y_k) = x. \quad \square$$

В заключение раздела введем следующее понятие.

Определение 7. Направленный моноид \mathfrak{A} , обладающий набором \mathfrak{B}_0 образующих его элементов, назовем однородным, если имеет место $(\mathfrak{B}_0)_*^m \cap (\mathfrak{B}_0)_*^n = \emptyset$ при $n \neq m$.

4. Коммутативные моноиды. В этом разделе рассмотрим более подробно коммутативные однородные моноиды \mathfrak{A} , которые обладают множеством образующих x_j , $j \in \mathfrak{J}$, где множество \mathfrak{J} либо конечно и содержит d элементов, либо оно бесконечно и обладает $\text{card}(\mathfrak{J}) = \aleph_s$, $s \in \mathbb{N}_+$. В связи с этим будем обозначать мощность множества образующих элементов посредством d , которое либо конечно и принадлежит \mathbb{N} , либо бесконечно и $d = \aleph_s$, $s \in \mathbb{N}$. Операцию композиции в таких моноидах будем обозначать посредством знака $+$.

Рассмотрим далее коммутативный моноид \mathbb{N}_+^d , где операцией композиции является покомпонентное сложение, так что каждый элемент \mathbf{a} моноида представим в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{i \in \mathfrak{J}} m_i x_i \quad (7)$$

с $m_i \in \mathbb{N}_+$, где $\Delta(\mathbf{a}) \subset \mathfrak{J}$ — множество номеров i , для которых $m_i \neq 0$ конечно и $x_i = \langle \delta_{ij}; j \in \mathfrak{J} \rangle$, $i \in \mathfrak{J}$ — множество образующих.

Для любых двух элементов \mathbf{a} и

$$\mathbf{b} = \sum_{j \in \mathfrak{J}} n_j x_j$$

с $n_j \in \mathbb{N}_+$, $j \in \mathfrak{J}$ их композиция представляется элементом

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{i \in \mathfrak{J}} (m_i + n_i) x_i.$$

Теорема 6. Если моноид \mathfrak{A} обладает набором образующих $\{x_j; j \in \mathfrak{J}\}$, коммутативен и однороден, то он изоморфен моноиду $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$. При этом единица \mathbf{e} моноида отображается в $\mathbf{0} \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ и множество образующих $\mathfrak{B}_0 = \{x_j; j \in \mathfrak{J}\}$ моноида \mathfrak{A} отображается в множество $\{\langle \delta_{ij}; j \in \mathfrak{J} \rangle; i \in \mathfrak{J}\}$.

Доказательство. Сопоставим единице $\mathbf{e} \in \mathfrak{A}$ элемент $\mathbf{0} \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ и образующим x_i элементам — векторы $\langle \delta_{ij}; j \in \mathfrak{J} \rangle$, $i \in \mathfrak{J}$ множества $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$. Тогда первое утверждение теоремы следует из предположения каждого из элементов коммутативного моноида, указанного в следствии теоремы 1. Ввиду отсутствия циклов в моноиде \mathfrak{A} , \mathbf{e} отображение в $\mathbf{0} \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ однозначно.

Принимая во внимание утверждение теоремы 2, замечаем, что множество образующих элементов в однородном моноиде \mathfrak{A} единственно, и его отображение в моноид $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ определено однозначным образом, с точностью до перестановки в нумерации элементов в $\{x_j; j \in \mathfrak{J}\}$. \square

Нашей дальнейшей задачей является найти необходимые и достаточные условия k -потентности множеств \mathfrak{B} в коммутативном однородном моноиде. Ввиду теоремы 6 достаточно исследовать моноиды $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$.

Любой элемент $\mathbf{a} = \langle m_i \in \mathbb{N}_+; i \in \mathfrak{J} \rangle \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ представляется в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{i \in \mathfrak{J}} m_i x_i. \quad (8)$$

Если \mathfrak{B} — k -потентное множество в \mathfrak{A} , то для элемента \mathbf{a} найдется такой набор элементов $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$, что имеет место

$$\mathbf{a} = \sum_{l=1}^k \mathbf{b}_l.$$

Каждый элемент из этого набора имеет представление, аналогичное (8),

$$\mathbf{b}_l = \sum_{j \in \mathfrak{J}} n_j^{(l)} x_j, \quad (9)$$

где $\langle n_j^{(l)} \in \mathbb{N}; j \in \mathfrak{J} \rangle$ и для каждого $l = 1, \dots, k$ множество тех номеров j , для которых $n_j^{(l)} \neq 0$ конечно.

Таким образом, для любого элемента $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$ из k -потентного множества \mathfrak{B} в моноиде \mathfrak{A} должно иметь место представление

$$\mathbf{a} = \sum_{j \in \mathfrak{J}} m_j \mathbf{x}_j = \sum_{l=1}^k \sum_{j \in \mathfrak{J}} n_j^{(l)} \mathbf{x}_j = \sum_{j \in \mathfrak{J}} \mathbf{x}_j \sum_{l=1}^k n_j^{(l)}.$$

Ввиду однозначности разложения (8), это означает, что для любого набора натуральных чисел $\langle m_j; j \in \mathfrak{J} \rangle$, среди которых имеется только лишь конечное множество $\Delta(\mathbf{a})$ отличных от нуля, должна быть разрешима в натуральных числах система уравнений

$$m_j = \sum_{l=1}^k n_j^{(l)}, \quad j \in \Delta(\mathbf{a}), \quad (10)$$

где $\langle n_j^{(l)}; j \in \mathfrak{J} \rangle \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$, $l = 1, \dots, k$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы множество $\mathfrak{B} \subset \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ было k -потентным, является наличие в нем таких элементов, представляемых в виде (9), для которых разрешима система уравнений (10).*

Теперь докажем утверждение, относящееся к моноидам, у которых $\mathfrak{J} \equiv I_d = \{1, \dots, d\}$ конечно. Оно имеет важное значение для приложений изложенной выше теории. Введем функцию, характеризующую распределение элементов в любом подмножестве $\mathfrak{B} \subset \mathbb{N}_+^d$:

$$\varphi_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_d) = |\{x \in \mathfrak{B} : x = \langle n_1, \dots, n_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n_j \leq x_j, j = 1, \dots, d\}|, \quad \langle x_1, \dots, x_d \rangle \in \mathbb{R}_+^d.$$

Эта функция распределения не убывает.

Лемма 2. *Пусть*

$$\varphi_{\mathfrak{C}}(x_1, \dots, x_d) = |\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n_1, \dots, n_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n_j \leq x_j, j = 1, \dots, d\}|, \quad \langle x_1, \dots, x_d \rangle \in \mathbb{R}_+^d$$

— функция распределения некоторого множества \mathfrak{C} . Тогда

$$\varphi_{\mathfrak{C}}^{(j)}(n_1, \dots, n_d) = \varphi_{\mathfrak{C}}(n_1, \dots, n_j, \dots, n_d) - \varphi_{\mathfrak{C}}(n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots, n_d) \in \{0, 1\}$$

для любого $j = 1, \dots, d$. Для того чтобы элемент $\langle n_1, \dots, n_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d$ принадлежал множеству \mathfrak{C} необходимо и достаточно, чтобы при любом $j = 1, \dots, d$ имело место равенство

$$\varphi_{\mathfrak{C}}^{(j)}(n_1, \dots, n_d) = 1. \quad (11)$$

Доказательство. В доказательстве нуждается только последнее утверждение. Если имеет место (11), то это означает одноэлементность множества $\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l, l \neq j; n'_j = n_j\}$ при любом $j = 1, \dots, d$, так как при всех $j = 1, \dots, d$ имеет место

$$\begin{aligned} 1 &= |\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l, l = 1, \dots, d\}| - \\ &\quad - |\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l - \delta_{jl}, l = 1, \dots, d\}| = \\ &\quad = |\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l, l = 1, \dots, d\} \setminus \\ &\quad \setminus \{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l - \delta_{jl}, l = 1, \dots, d\}| = \\ &\quad = |\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l, l \neq j; n'_j = n_j\}|. \end{aligned}$$

Совокупность таких равенств с $j = 1, \dots, d$ эквивалентна соотношению

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \bigcap_{j=1}^d \{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l, l \neq j; n'_j = n_j\} \right| = \\ &= |\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n_1, \dots, n_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d\}|. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 8. Для того чтобы множество \mathfrak{B} было k -потентным, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $\langle m_1, \dots, m_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d$ одновременно выполнялись все неравенства

$$\sum_{\substack{\langle n_j^{(1)}, \dots, n_j^{(k)} \rangle: \\ n_j^{(1)} + \dots + n_j^{(k)} = m_j}} \prod_{l=1}^k \varphi^{(j)}(n_1^{(l)}, \dots, n_d^{(l)}) \geq 1, \quad j = 1, \dots, d$$

и имело место $\varphi(0, \dots, 0) = 1$.

Доказательство. Теорема следует из теоремы 7 и леммы 2, примененных для каждого $j = 1, \dots, d$. \square

В частности, при $k = 2$, $d = 1$ из теоремы 8 получаем следующее утверждение.

Теорема 9. Для квадратентности множества $\mathfrak{B} \subset \mathbb{N}_+$ необходимо и достаточно, чтобы для его функции распределения $\varphi(x)$ имело место $\varphi(0) = 1$ и выполнялось неравенство

$$\sum_{n=1}^m [\varphi(n) - \varphi(n-1)] \cdot [\varphi(m-n) - \varphi(m-n-1)] \geq 1 \quad (12)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$.

5. Приложение к проблеме Гольдбаха. В 1742 году в переписке между К. Гольдбахом и Л. Эйлером была высказана следующая гипотеза: *Каждое чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел.* Эта гипотеза получила название «бинарной проблемы Гольдбаха» (или проблемы Эйлера). Покажем, каким образом эта проблема может быть сформулирована в терминах моноида \mathbb{N}_+ . (В такой формулировке единица включается в множество простых чисел).

Обозначим посредством \mathfrak{P} множество всех простых чисел в указанном смысле. Нужно доказать, что каждое четное число $2(m+1)$, $m \in \mathbb{N}_+$, представимо в виде суммы двух простых $2(m+1) = p + q$, $p, q \in \mathfrak{P}$. Каждое простое число, большее 2, о которых идет речь в формулировке проблемы, нечетно. Таким образом, для этих чисел $p = 2r + 1$, $q = 2s + 1$; $r, s \in \mathbb{N}$ и $r + s = m$. Обратно, если $r, s \in \mathbb{N}_+$, то $p + q = 2(r + s + 1) = 2(m + 1)$, $r + s + 1 \equiv m + 1$, $m \in \mathbb{N}$.

Добавим к этим числам $p = q = 1$, для которых $r, s = 0$, что соответствует добавлению числа $p + q = 2(m + 1)$ с $m = 0$, для которого утверждение бинарной гипотезы Гольдбаха тривиально. В связи с этим определим множество \mathfrak{B} равенством

$$\mathfrak{B} = \{t \in \mathbb{N}_+ : 2t + 1 \in \mathfrak{P}\} \cup \{0\}.$$

Отсюда следует, что бинарная гипотеза Гольдбаха эквивалентна утверждению о том, что множество \mathfrak{B} в моноиде \mathbb{N}_+ должно обладать свойством $\mathfrak{B} + \mathfrak{B} = \mathbb{N}$, т.е. быть мультипотентным с показателем $k = 2$.

Рассмотрим используемую в теории чисел функцию (см., например, [4, 5])

$$\psi(x) \equiv |\{p \in \mathfrak{P} : p \leq x\}|, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда, используя определение множества \mathfrak{B} , имеем

$$\psi(x) = |\{l \in \mathbb{N} : 2l + 1 \in \mathfrak{P}, 2l + 1 \leq x\}| = |\{l \in \mathbb{N} : 2l + 1 \in \mathfrak{P}, l \leq (x-1)/2\}|,$$

т.е.

$$|\{l \in \mathfrak{B} : l \leq x\}| = |\{l \in \mathbb{N} : 2l + 1 \in \mathfrak{P}, l \leq x\}| \equiv \psi(2x + 1).$$

Полагая $\varphi_{\mathfrak{B}}(x) = \psi(2x + 1)$, на основании следствия теоремы 8 получаем следующее утверждение.

Теорема 10. Для того чтобы множество \mathfrak{B} было квадратентным, необходимо и достаточно, чтобы для любого $m \in \mathbb{N}$ имело место неравенство

$$S(m) \equiv \sum_{n=1}^m [\psi(2n + 1) - \psi(2n - 1)] \cdot [\psi(2(m - n) + 1) - \psi(2(m - n) - 1)] \geq 1. \quad (13)$$

6. Заключение. В работе введено понятие мультипотентности множеств в моноидах, которое, при наличии однородности и коммутативности в таких алгебраических структурах, оказывается полезным при анализе задач аддитивной теории чисел, связанных с представлениями натуральных чисел в виде сумм чисел, обладающих специальными свойствами. Выявлены самые общие свойства мультипотентных множеств и представлена формулировка в терминах таких множеств с показателем $k = 2$ известной бинарной проблемы Гольдбаха. Ключевым результатом работы, позволяющим анализировать задачи указанного выше типа, является теорема 8. В частности, ее применение в случае $k = 2$ позволило несколько по-иному подойти к анализу бинарной проблемы Гольдбаха.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Алгебра. Часть 1. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. — М.: Физматлит, 1962.
2. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — М.-Л.: Гостехиздат, 1952.
3. *Ляпин Е. С.* Полугруппы. — М.: Физматлит, 1960.
4. *Прахар К. П.* Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967.
5. *Чандрасекхаран К.* Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974.
6. *Шеврин Л. Н.* Полугруппы// в кн.: Справочная математическая библиотека. Общая алгебра. Т. 2.. — М.: Наука, 1991. — С. 11–191.
7. *Goldbach C.* Lettre XLIII// in: Correspondance mathematique et physique de quelques celebres geometres du XVIII-eme siecle (Band 1). — St. Petersburg, 1743. — P. 125–129.
8. *Waring E.* Meditationes Algebraicae. — Cambridge, 1770.

Вирченко Юрий Петрович

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: virch@bsu.edu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 37–43
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-37-43

УДК 519.1

КОМБИНАТОРНЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ПУТЕЙ НА ОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ

© 2022 г. Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, М. И. ЧЕРДЫНЦЕВА

Аннотация. В работе приведен алгоритм нахождения количества путей на ориентированном графе, начинающихся в произвольном подмножестве его вершин. Алгоритм основан на идеях, лежащих в основе построения треугольника Паскаля. Трудоемкость алгоритма совпадает с трудоемкостью известного алгоритма Дейкстры нахождения кратчайших путей на графах. Также осуществлена адаптация предложенного алгоритма для решения этой задачи на графах с ограничениями на достижимость.

Ключевые слова: ориентированный граф, путь, треугольник Паскаля, ограничения на достижимость.

COMBINATORIAL ALGORITHM FOR FINDING THE NUMBER OF PATHS ON A DIRECTED GRAPH

© 2022 Ya. M. ERUSALIMSKIY, M. I. CHERDYNTSEVA

ABSTRACT. In this paper, we present an algorithm for finding the number of paths on a directed graph that start at an arbitrary subset of its vertices. The algorithm is based on the ideas underlying the construction of Pascal's triangle. The complexity of the algorithm coincides with the complexity of the well-known Dijkstra algorithm for finding shortest paths on graphs. We also generalize the algorithm proposed to the problem on graphs with reachability constraints.

Keywords and phrases: directed graph, path, Pascal's triangle, reachability constraints.

AMS Subject Classification: 05C38

1. Введение. Блез Паскаль, изучая знаменитый арифметический треугольник, носящий его имя (см., например, [5]), вероятно, не подозревал, что решает задачу о количестве путей, ведущих из фиксированной вершины графа-решетки в остальные его вершины. Граф-решетка имеет вершины в точках с целочисленными координатами в первом квадранте декартовой плоскости. Из каждой вершины графа-решетки выходит две дуги — в ближайшую правую вершину и в ближайшую верхнюю вершину (см. рис. 1).

Ясно, что для каждой его вершины, отличной от вершины $O(0; 0)$, количество путей, ведущих в нее из вершины $O(0; 0)$, равно количеству таких путей, которые заканчиваются горизонтальной дугой, плюс количество таких путей, которые заканчиваются вертикальной дугой. Именно это свойство множества путей графа-решетки порождает известное свойство треугольника Паскаля

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}. \quad (1)$$

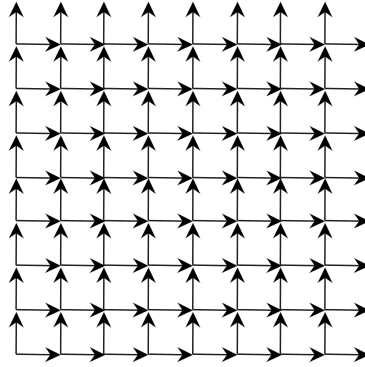


Рис. 1. Граф-решетка

Далее, отправляясь от идей Б. Паскаля, реализованных в треугольнике Паскаля, и Э. Дейкстры, реализованных в его алгоритме нахождения кратчайших путей на графе (см., например, [13]), предложим алгоритм нахождения количества путей, ведущих в вершины графа из фиксированного подмножества его вершин.

2. Обоснование и описание алгоритма. Будем пользоваться общим определением ориентированного графа (см., например, [11]), понимая под графом тройку $G(X, U, f)$, где $X (\neq \emptyset)$ — множество вершин графа, U — множество дуг графа, $f: U \rightarrow X \times X$ — отображение смежности вершин, сопоставляющее каждой дуге графа упорядоченную пару вершин. Если $f(u) = (x; y)$, то вершину x будем называть началом дуги u и писать $x = (p_1 \circ f)(u)$, а вершину y — концом дуги u и писать $y = (p_2 \circ f)(u)$.

Следуя [4], путем длины n ($n \in \mathbb{N}$) на графе $G(X, U, f)$ будем называть такое отображение $\mu: [1; n]_{\mathbb{N}} \rightarrow U$, что для любого $i \in [1; n-1]_{\mathbb{N}}$ выполнено соотношение

$$(p_2 \circ f \circ \mu)(i) = (p_1 \circ f \circ \mu)(i+1),$$

т.е. конец предыдущей дуги является началом следующей. Вершина $(p_1 \circ f \circ \mu)(1)$ называется началом пути, а вершина $(p_2 \circ f \circ \mu)(n)$ — концом пути.

Через $U_+(x)$ обозначим множество дуг графа, начинающихся в вершине x , а через $O_+(x)$ — множество вершин, в которых заканчиваются дуги из $U_+(x)$.

Через $U_-(x)$ обозначим множество дуг графа, заканчивающихся в вершине x , а через $O_-(x)$ — множество вершин, в которых начинаются дуги из $U_-(x)$.

Обозначим через $M_+(x)$ множество путей, заканчивающихся в вершине x , а через $M_{+,n}(x)$ — множество путей, имеющих длину n , заканчивающихся в вершине x .

Очевидно, что справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Для любой вершины x графа $G(X, U, f)$ справедливо равенство

$$|M_+(x)| = \sum_{u \in U_-(x) | y_u = (p_2 \circ f)(u)} |M_+(y_u)|. \quad (2)$$

Здесь и далее $|A|$ — количество элементов во множестве A . Равенство (2) является аналогом соотношения Паскаля (1).

Обозначим через $M_{y,+}(x)$ множество путей, начинающихся в вершине y и заканчивающихся в вершине x , а через $M_{y,+,n}(x)$ — множество путей длины n , начинающихся в вершине y и заканчивающихся в вершине x .

Утверждение 2. Пусть $Y \subseteq X$, $x \in X$. Тогда

$$M_{Y,+}(x) = \bigcup_{y \in Y} M_{y,+}(x), \quad (3)$$

$$|M_{Y,+}(x)| = \sum_{y \in Y} |M_{y,+}(x)|, \quad (4)$$

Здесь $M_{Y,+}(x)$ — множество путей, начинающихся в вершинах множества Y и заканчивающихся в вершине x .

Утверждение 3. Пусть $Y \subseteq X$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|M_{Y,+,n}(x)| = \sum_{y \in Y} |M_{y,+,n}(x)|. \quad (5)$$

Утверждение 4. Для любой вершины x графа $G(X, U, f)$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$|M_{+,n}(x)| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |M_{+,n}(x)|. \quad (6)$$

Замечание 1. Ясно, что утверждения 1–4 содержательны в случае, когда фигурирующие в них множества конечны. Это справедливо, в частности, для конечных графов, не содержащих контуры.

Опишем теперь динамический алгоритм, позволяющий находить для каждой вершины графа количество путей, ведущих в нее из произвольного подмножества вершин Y . Будем считать, что вершины и дуги графа занумерованы, т.е. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Каждой вершине x_i поставим в соответствие пару чисел $(M_i; \nu_i)$. Эти пары образуют массив V длины n .

Для предотвращения заикливания алгоритма определим максимально допустимое количество итераций NM (причиной заикливания может быть только наличие на графе контуров).

0. Зададим начальное значение массива V :

```
for  $i \in [1, n]$  do  $M_i := 0$ ,  $\nu_i := 0$ 
for  $y \in Y$  do  $\nu_y := 1$ 
```

Найдем характеристику T_V массива V , положив

$$T_V = \sum M_i.$$

Номер итерации $N_i := 0$.

1. По массиву V построим массив V' , который устроен аналогично массиву V :

```
for  $i \in [1, n]$  do  $M'_i := M_i + \nu_i$ ,  $\nu'_i := 0$ 
for  $u_j \in U$  do  $\nu'_y := \nu'_y + \nu_x$ , где  $u_j = (x; y)$ .
```

Найдем

$$T_{V'} = \sum M'_i.$$

$N_i := N_i + 1$.

2. Пока характеристики не совпадают и не превышено допустимое количество итераций: $T_V \neq T_{V'}$ & $N_i < NM$, меняем массив $V := V'$ и повторяем построение массива V' (шаг 1).

3. Количество путей получено в массиве M_i .

Приведем еще один вариант этого алгоритма.

0. Зададим начальное значение массива V :

```
for  $i \in [1, n]$  do  $M_i := 0$ ,  $\nu_i := 0$ 
for  $y \in Y$  do  $\nu_y := 1$ 
```

Найдем характеристику R_V массива V , положив

$$R_V = \sum \nu_i.$$

Номер итерации $N_i := 0$.

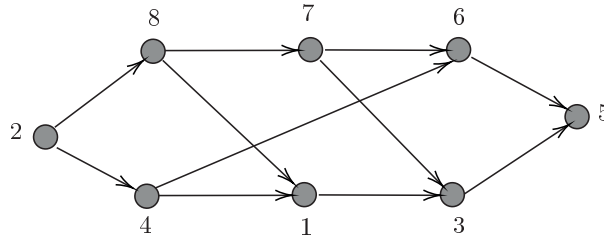


Рис. 2

Таблица 1

Номера вершин									
	1	2	3	4	5	6	7	8	T
V_0	(0; 0)	(0; 1)	(0; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(0; 1)	(0; 0)	0
V'_0	(0; 0)	(1; 0)	(0; 1)	(0; 1)	(0; 0)	(0; 1)	(1; 0)	(0; 1)	2
V_1	(0; 0)	(1; 0)	(0; 1)	(0; 1)	(0; 0)	(0; 1)	(1; 0)	(0; 1)	2
V'_1	(0; 2)	(1; 0)	(1; 0)	(1; 0)	(0; 2)	(1; 1)	(1; 1)	(1; 0)	6
V_2	(0; 2)	(1; 0)	(1; 0)	(1; 0)	(0; 2)	(1; 1)	(1; 1)	(1; 0)	6
V'_2	(2; 0)	(1; 0)	(1; 3)	(1; 0)	(2; 1)	(2; 1)	(2; 0)	(1; 0)	12
V_3	(2; 0)	(1; 0)	(1; 3)	(1; 0)	(2; 1)	(2; 1)	(2; 0)	(1; 0)	12
V'_3	(2; 0)	(1; 0)	(4; 0)	(1; 0)	(3; 4)	(3; 0)	(2; 0)	(1; 0)	17
V_4	(2; 0)	(1; 0)	(4; 0)	(1; 0)	(3; 4)	(3; 0)	(2; 0)	(1; 0)	17
V'_4	(2; 0)	(1; 0)	(4; 0)	(1; 0)	(7; 0)	(3; 0)	(2; 0)	(1; 0)	21
V_5	(2; 0)	(1; 0)	(4; 0)	(1; 0)	(7; 0)	(3; 0)	(2; 0)	(1; 0)	21
V'_5	(2; 0)	(1; 0)	(4; 0)	(1; 0)	(7; 0)	(3; 0)	(2; 0)	(1; 0)	21

1. По массиву V построим массив V' , который устроен аналогично массиву V :

```
for  $i \in [1, n]$  do  $M'_i \in M_i + \nu_i$ ,  $\nu'_i := 0$ 
for  $u_j \in U$  do  $\nu'_y := \nu'_y + \nu_x$ , где  $u_j = (x; y)$ 
```

Найдем

$$R_V = \sum \nu'_i.$$

$N_i := N_i + 1$.

2. Пока характеристика $R_{V'} \neq 0$ и не превышено допустимое количество итераций: $N_i < NM$, меняем массив $V := V'$ и повторяем построение массива V' (шаг 1).

3. Количество путей получено в массиве M_i .

Приведем пример работы алгоритма. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 2. Пусть $Y = \{2, 7\}$. Результаты вычислений сведем в таблицу 1.

Где же в описанном алгоритме применяются приведенные выше утверждения? В п. 1 фрагмент

```
for  $i \in [1, n]$  do  $M'_i := M_i + \nu_i$ 
```

есть применение утверждения 4, а фрагмент

```
for  $u_j \in U$  do  $\nu'_y := \nu'_y + \nu_x$ , где  $u_j = (x; y)$ 
```

есть применение утверждения 2.

Сделаем теперь несколько замечаний.

Замечание 2. После выполнения k -го шага алгоритма получившийся массив m_i представляет собой количества путей длины не большей, чем k , ведущих из множества Y (под длиной пути понимаем количество дуг, через которые он проходит).

Замечание 3. В силу замечания 2 алгоритм можно применять разумно (т.е. устанавливая необходимое количество итераций) и на графах, содержащих контуры.

Замечание 4. Ясно, что алгоритм применим и в случае мультиграфов, т.е. графов, имеющих кратные дуги.

3. Особенности применения алгоритма к графам с ограничениями на достижимость. Графы с ограничениями на достижимость — объекты, впервые рассмотренные в [1–3, 7, 11, 14] (обзор результатов имеется в [12]). Ограничения на достижимость означают, что на графе рассматривается не все множество путей, а некоторое его подмножество (допустимые пути). Это множество задается дополнительными требованиями на формирование последовательности дуг допустимых путей. Например, на графах со смешанной достижимостью во множестве дуг выделено непустое подмножество дуг, а последовательность дуг допустимого пути такова, что никакие две последовательные дуги пути не могут одновременно принадлежать выделенному подмножеству дуг.

В настоящее время определены и изучены различные виды ограничений на достижимость (см., например, [11]). Для этих графов решены задачи о достижимости вершин, о кратчайших путях и о случайных блужданиях по вершинам графов с ограничениями на достижимость. Характерной чертой графов с ограничениями на достижимость является неприменимость напрямую известных алгоритмов для решения классических задач о кратчайших путях, случайных блужданиях и потоковых задач. Потоковым задачам посвящены работы [6, 8–10].

Для решения перечисленных выше задач применяется метод разверток, состоящий в следующем. По исходному графу с ограничениями на достижимость строится его развертка. Множество вершин развертки представляет собой объединение множества вершин исходного графа X и нескольких его дубликатов (X_1, X_2, \dots, X_k). Количество дубликатов определяется видом ограничений на достижимость. Таким образом, у каждой вершины исходного графа на развертке имеется несколько ее «экземпляров» — она сама и набор ее «двойников». Множество дуг развертки строится по множеству дуг исходного графа в соответствии с рассматриваемым видом ограничений на достижимость.

Исходная задача (о достижимости, о кратчайших путях, о случайных блужданиях, потоковая задача) переносится соответствующим образом на развертку. Развертка является графом без ограничений на достижимость и на ней возможно применение известных алгоритмов. Полученное решение на развертке «возвращается» на исходный граф с ограничениями на достижимость. С приведенным в этой работе алгоритмом можно поступить аналогично описанному, поскольку справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. *Количество допустимых путей, ведущих из вершины y в вершину x , на графе с ограничениями на достижимость равно количеству путей, ведущих из вершины y во множество вершин $\{x, x^1, \dots, x^k\}$, на развертке.*

Пример 1. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 3; развертка этого графа изображена на рис. 4. Дуги, лежащие на сторонах квадрата, образуют множество дуг, по которым путь не может проходить подряд. Рассмотрим задачу о количестве допустимых путей на этом графе, ведущих из множества вершин $\{1, 3\}$. Применим на развертке алгоритм подсчета количества путей, ведущих из множества вершин $\{1, 3\}$; результаты приведены в таблице 2.

Количество смешанных путей, ведущих из множества вершин $\{1, 3\}$, на этом графе приведено во второй строке таблицы 3. В третьей строке приведено количество путей в случае отсутствия ограничения на достижимость.

В заключение сделаем еще три замечания.

1. В п. 0 присваиваем $\nu_y := 1$ для $y \in Y$, тем самым считаем, что каждая вершина соединена сама с собой путем длины ноль.

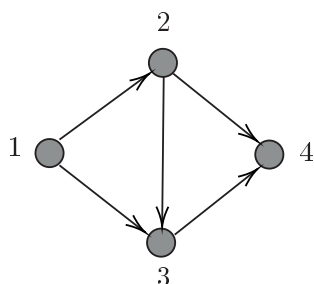


Рис. 3. Граф с ограничениями на достижимость

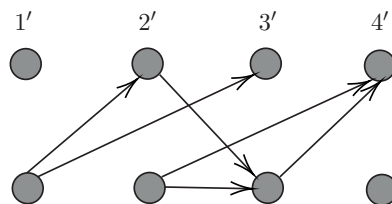


Рис. 4. Развертка графа

Таблица 2

Номера вершин									
	1	1'	2	2'	3	3'	4	4'	T_V
V_0	(0; 1)	(0; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(0; 1)	(0; 0)	(0; 0)	(0; 0)	0
V'_0	(1; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(0; 1)	(1; 0)	(0; 1)	(0; 0)	(0; 1)	2
V_1	(1; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(0; 1)	(1; 0)	(0; 1)	(0; 0)	(0; 1)	2
V'_1	(1 : 0)	(0; 0)	(0; 0)	(1; 0)	(1; 1)	(1; 0)	(0; 0)	(1; 0)	5
V_2	(1 : 0)	(0; 0)	(0; 0)	(1; 0)	(1; 1)	(1; 0)	(0; 0)	(1; 0)	5
V'_2	(1; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(1; 0)	(2; 0)	(1; 0)	(0; 0)	(1; 1)	6
V_3	(1; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(1; 0)	(2; 0)	(1; 0)	(0; 0)	(1; 1)	6
V'_3	(1; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(1; 0)	(2; 0)	(1; 0)	(0; 0)	(2; 0)	7
V_4	(1; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(1; 0)	(2; 0)	(1; 0)	(0; 0)	(2; 0)	7
V'_4	(1; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(1; 0)	(2; 0)	(1; 0)	(0; 0)	(2; 0)	7

Таблица 3

Номер вершины	1	2	3	4
Количество смешанных путей	1	1	3	2
Количество путей без ограничения на достижимость	1	1	3	4

- Трудоёмкость алгоритма не зависит от количества вершин во множестве Y вершин графа, для которых вычисляем количество путей на графе, начинающихся в этих вершинах.
- Трудоёмкость предложенного алгоритма такая же, как у алгоритма Дейкстры нахождения кратчайших путей на графе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Басангова Е. О., Ерусалимский Я. М. Различные виды смешанной достижимости // в кн.: Алгебра и дискретная математика. — Элиста: КалмГУ, 1985. — С. 70–75.
- Басангова Е. О., Ерусалимский Я. М. Смешанная достижимость на частично ориентированных графах // в кн.: Вычислительные системы и алгоритмы. — Ростов-на-Дону: РГУ, 1983. — С. 135–140.
- Ерусалимский Я. М. 2–3 paths in a lattice graph. Random walks // Мат. заметки. — 2018. — 104, № 3. — С. 396–406.
- Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум. — СПб.: Лань, 2018.

5. *Ерусалимский Я. М.* Треугольник Паскаля: комбинаторика и случайные блуждания. — М.: Вузовская книга, 2020.
6. *Ерусалимский Я. М., Петросян А. Г.* Многопродуктовые потоки в сетях с нестандартной достижимостью// Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. Прилож. — 2005. — № 6. — С. 8–16.
7. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А.* Общий подход к нестандартной достижимости на графах// Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2005. — Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. — С. 64–67.
8. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А.* О потоках в сети с ограничениями на достижимость. Вычислительный эксперимент// Мат. Весенней Воронеж. мат. школы «Современные методы теории краевых задач» (Понтрягинские чтения–XXVI). — ВГУ, 2015. — С. 89–90.
9. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А.* Потоки в сетях со связанными дугами// Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. Прилож. — 2003. — № 8. — С. 9–12.
10. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А.* Прибыль от потоков с обратной связью в орсетях с ограничениями на достижимость// Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. Прилож. — 2003. — № 8. — С. 3–8.
11. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Кузьмина М. В., Петросян А. Г.* Графы с нестандартной достижимостью. Задачи, приложения. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009.
12. *Жулякова Л. Ю.* Графовые динамические модели и их свойства// Автомат. телемех. — 2015. — 8. — С. 115–139.
13. *Dijkstra E. W.* A note on two problems in connexion with graphs// Numer. Math. — 1959. — 1. — P. 269–271.
14. *Erusalimskiy I. M.* Graph-lattice: random walk and combinatorial identities// Bol. Soc. Mat. Mexicana. — 2016. — 22, № 2. — P. 329–335.

Ерусалимский Яков Михайлович
Южный федеральный университет
E-mail: ymerusalimskiy@sfedu.ru

Чердынцева Марина Игоревна
Южный федеральный университета
E-mail: micherdynceva@sfedu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 44–52
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-44-52

УДК 517.9

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ АРГУМЕНТОВ

© 2022 г. Е. П. ИВАНОВА

Аннотация. Рассматриваются эллиптические краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений, содержащих несоизмеримые сдвиги аргументов в старших членах. Исследуется разрешимость краевых задач, гладкость решений, спектральные свойства путем сведения исходной задачи к нелокальной.

Ключевые слова: эллиптическое дифференциально-разностное уравнение, несоизмеримые сдвиги аргументов, нелокальная краевая задача.

METHODS FOR STUDYING DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS WITH INCOMMENSURABLE SHIFTS OF ARGUMENTS

© 2022 E. P. IVANOVA

ABSTRACT. We consider elliptic boundary-value problems for differential-difference equations containing incommensurable shifts of arguments in leading terms. Using the reduction of the original problem to a certain nonlocal problem, we examine the solvability of boundary-value problems, the smoothness of solutions, and spectral properties.

Keywords and phrases: elliptic differential-difference equation, incommensurable shifts of arguments, nonlocal boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 47G40

1. Введение. Теория эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сдвигами аргументов в старших членах построена А. Л. Скубачевским в [5,6]. Интерес к этим задачам связан с важными приложениями к теории многослойных пластин и оболочек (см. [5]), нелинейных лазерных систем (см. [7]). В указанных работах были изучены краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами пространственных переменных, содержащихся в разностных операторах. Поскольку даже малые возмущения сдвигов приводят к их несоизмеримости и к изменению свойств решений соответствующих краевых задач, важным является построение теории дифференциально-разностных операторов с несоизмеримыми сдвигами аргументов. Такие задачи обладают рядом принципиально новых свойств. Например, гладкость обобщенных решений краевой задачи может нарушаться внутри области почти всюду. Дифференциально-разностные уравнения с несоизмеримыми сдвигами в одномерном случае рассматривались в [1,3,6].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20–01–00288).

А. Л. Скубачевским был предложен метод исследования задач для дифференциально-разностных уравнений с помощью задач с нелокальными краевыми условиями. Для операторов с несоизмеримыми сдвигами этот метод в общем случае неприменим. Однако если орбита границы заданной области под действием сдвигов разностного оператора конечна, исходная краевая задача также может быть сведена к нелокальной. Для одномерного случая такая задача была исследована в [3]. Было построено специальное разбиение исходной области на непересекающиеся подобласти с помощью графа, ассоциированного с множеством сдвигов разностного оператора. Это разбиение описано в [2, 4]; оно применяется также для исследования гладкости решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами (см. [4]) и получения условий сильной эллиптичности (см. [2]). Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений в случае бесконечной орбиты границы исследовались в [1, 2].

В данной статье исследуется разрешимость и гладкость эллиптических краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргумента в цилиндрических областях методом сведения их к нелокальным задачам.

Автор выражает глубокую благодарность профессору А. Л. Скубачевскому за поддержку работы.

2. Разностные операторы и орбита границы. Рассмотрим разностный оператор

$$R: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n), \quad (Rv)(x) = \sum_{h \in M} a_h v(x+h), \quad (1)$$

где $a_h \in \mathbb{C}$, M — конечное множество векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с несоизмеримыми координатами. Иными словами, в M найдутся сдвиги, из которых нельзя составить нетривиальную линейную комбинацию с целыми коэффициентами, равную нулевому вектору.

Будем рассматривать действия операторов R на функциях $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$v(x) = 0, \quad x \notin Q. \quad (2)$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$ или $Q = (0, d) \times G \subset \mathbb{R}^n$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geq 3$ и $G = (a, b)$, если $n = 2$.

Для учета однородных краевых условий (2) используем операторы

$$I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n), \quad P_Q: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(Q);$$

I_Q — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем вне Q , P_Q — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q . Введем также оператор

$$R_Q = P_Q R I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q).$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \widehat{M} &:= M \cup (-M), \quad S_0 = \partial Q, \quad S_1 := \left(\bigcup_{h \in \widehat{M}} S_0 + h \right) \cap \bar{Q}, \\ S_2 &:= \left(\bigcup_{h \in \widehat{M}} (S_1 + h) \right) \cap \bar{Q}, \quad \dots, \quad S_k := \left(\bigcup_{h \in \widehat{M}} (S_{k-1} + h) \right) \cap \bar{Q}, \quad \dots, \quad S = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_k. \end{aligned}$$

В силу построения $S_{k-1} \subseteq S_k$.

Назовем S орбитой границы ∂Q . Возможны следующие два случая.

Случай 1. Множество S состоит из конечного числа множеств (следов сдвигов границы). Будем говорить, что орбита S конечна.

Случай 2. Множество S состоит из бесконечного числа множеств. Будем говорить, что орбита S бесконечна.

В данной работе будем рассматривать только случай 1.

Рассмотрим открытое множество $U = \bar{Q} \setminus S$; оно состоит из конечного числа непересекающихся связных компонент Q_r ($r = 1, 2, \dots$) и

$$U = \bigcup_r Q_r, \quad S = \bigcup_r \partial Q_r.$$

Замечание 1. В работе А. Л. Скубачевского [6] для исследования свойств разностных операторов с соизмеримыми сдвигами и гладкости решений соответствующих краевых задач строится разбиение области Q на непересекающиеся подобласти с использованием аддитивной абелевой группы, порожденной множеством сдвигов M . Для множества, содержащего несоизмеримые сдвиги, такое разбиение не существует.

Будем использовать разбиение, построенное без использования группы и описанное в [2].

Определение 1. Будем говорить, что произведено *регулярное разбиение* \mathfrak{R}_0 области Q на непересекающиеся подобласти Q_r ($r = 1, 2, \dots$), если:

- (i) $\bigcup_r \bar{Q}_r = \bar{Q}$;
- (ii) для любой подобласти Q_{r_1} и любого $h \in \widehat{M} = \{M, -M\}$ либо найдется такая подобласть Q_{r_2} , что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \in \mathbb{R} \setminus Q$. Здесь M — множество векторов из формулы (1).

В силу [2, теорема 2.1] справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Совокупность всех непересекающихся связных компонент множества U является регулярным разбиением \mathfrak{R}_0 области Q .*

Разбиению \mathfrak{R}_0 поставим в соответствие ориентированный граф. Вершины графа — это подобласти Q_r , дуги графа — это сдвиги $h \in M$. Если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, то вершины графа, ассоциированные с подобластями Q_{r_2} , Q_{r_1} , соединяем ориентированной дугой $h = \langle Q_{r_1}, Q_{r_2} \rangle$. На дугах задана числовая функция $\varphi(h) = a_h$, где a_h — коэффициенты разностного оператора из формулы (1). Введем на множестве подобластей (вершин графа) бинарное отношение π следующим образом: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathfrak{R}_0$ находятся в отношении π , если существует цепь в графе, соединяющая вершины Q_{r_1} и Q_{r_2} . В цепи движение может осуществляться как по направлению дуги, так и против. Это отношение является отношением эквивалентности и порождает разбиение множества \mathfrak{R}_0 на классы эквивалентности. Обозначим подобласти через Q_{sl} , где s — номер класса эквивалентности, l — номер области в этом классе. В силу ограниченности области Q каждый класс s состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} .

Обозначим через $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ подпространство функций из $L_2(Q)$, обращающихся в нуль вне $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$, $l = 1, \dots, N(s)$. Обозначим через

$$P_s : L_2(Q) \rightarrow L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$$

оператор ортогонального проектирования на $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$. В силу [6, лемма 8.5] $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ является инвариантным подпространством оператора R_{ijQ} ; при этом

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right).$$

Введем изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s : L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$$

по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}), \quad x \in Q_{s1},$$

где $l = 1, \dots, N = N(s)$, h_{sl} таково, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}(h_{s1} = 0)$,

$$L_2^N(Q_{s1}) = \prod_{l=1}^N L_2(Q_{s1}).$$

Аналогично доказательству леммы 8.6 из [6] можно показать, что оператор

$$R_s: L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1}), \quad R_s = U_s R_Q U_s^{-1},$$

есть оператор умножения на матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$, элементы r_{km}^s которой вычисляются по формуле

$$r_{km}^s = \begin{cases} a_h, & h = h_{sm} - h_{sk} \in M, \\ 0, & h = h_{sm} - h_{sk} \notin M. \end{cases} \quad (3)$$

Если для построения матрицы R_s использовать ассоциированный с разбиением \mathfrak{R}_0 граф, для вершин Q_{sk}, Q_{sm} , связанных дугой $h = \langle Q_{sk}, Q_{sm} \rangle$, положим $r_{km}^s = \varphi(h) = a_h$, в противном случае $r_{km}^s = 0$.

В силу [6, лемма 8.7] спектр $\sigma(R_Q)$ оператора R_Q совпадает с объединением спектров всех матриц

$$\sigma(R_Q) = \bigcup_s \sigma(R_s).$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Оператор R_Q невырожден тогда и только тогда, когда все матрицы R_s невырождены.*

Рассмотрим отдельно случай, когда область Q является цилиндром: $Q = (0, d) \times G \subset \mathbb{R}^n$. При этом сдвиги h разностного оператора R осуществляются только вдоль оси цилиндра

$$Rv(x) = \sum_{h \in M} a_h v(x_1 + h, x_2, \dots, x_n), \quad (4)$$

где M — конечное множество несоизмеримых между собой сдвигов $h \in \mathbb{R}$.

Действуя по изложенному выше алгоритму, построим орбиту S^0 левого основания $\Gamma^0 = \{0\} \times \bar{G}$ цилиндра Q :

$$S^0 = \text{orb}(\Gamma^0) = \bigcup_{i=0}^N \Gamma_i^0.$$

Упорядочим связные компоненты орбиты $\Gamma_i^0 = \{\tau_i\} \times \bar{G}$ по возрастанию τ_i :

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N < d.$$

Построим аналогичную орбиту S^d правого основания $\Gamma^d = \{d\} \times \bar{G}$ цилиндра. Также упорядочим элементы орбиты:

$$S^d = \text{orb}(\Gamma^d) = \bigcup_{i=0}^N \Gamma_i^d, \quad \Gamma_i^d = \{d - \tau_i\} \times \bar{G}, \quad i = 0, \dots, N.$$

Рассмотрим множество

$$\bar{Q} \setminus (S^0 \cup S^d \cup (\partial G \times (0, d))) = \bigcup Q_r.$$

Присвоим первый номер классу подобластей разбиения, левой границей которых являются элементы $\Gamma_i^0 = \{\tau_i\} \times \bar{G}$ орбиты S^0 . Оператор

$$R_{Q1}: L_2^{N+1}(Q_{11}) \rightarrow L_2^{N+1}(Q_{11}), \quad R_{Q1} = U_1 R_Q U_1^{-1},$$

есть оператор умножения на матрицу R_1 порядка $(N+1) \times (N+1)$.

Пример 1. Пусть разностный оператор R имеет вид

$$(Ru)(x_1, x_2) = a_0u(x_1, x_2) + a_1u(x_1 + 1 + \tau, x_2) + a_2u(x_1 - 1 - 2\tau, x_2), \quad (5)$$

где $1/3 < \tau < 1/2$, τ — иррациональное. Рассмотрим оператор

$$R_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q), \quad R_Q = P_Q R I_Q,$$

где $Q = (0, 2) \times (0, 1)$. Орбиты S^0 левой и S^d правой границ цилиндра:

$$S^0 = \left\{ \{0\} \times [0, 1]; \{\tau\} \times [0, 1]; \{1 + \tau\} \times [0, 1]; \{1 + 2\tau\} \times [0, 1] \right\},$$

$$S^d = \left\{ \{1 - 2\tau\} \times [0, 1]; \{1 - \tau\} \times [0, 1]; \{2 - \tau\} \times [0, 1]; \{2\} \times [0, 1] \right\}.$$

Разбиение области Q состоит из трех классов подобластей. Первый класс содержит 4 подобласти:

$$Q_{11} = (0, 1 - 2\tau) \times (0, 1), \quad Q_{12} = (\tau, 1 - \tau) \times (0, 1),$$

$$Q_{13} = (1 + \tau, 2 - \tau) \times (0, 1), \quad Q_{14} = (1 + \tau, 2) \times (0, 1);$$

второй класс состоит из подобластей

$$Q_{21} = (1 - 2\tau, \tau) \times (0, 1), \quad Q_{22} = (2 - \tau, 1 + 2\tau) \times (0, 1).$$

Третий класс состоит из одной области

$$Q_{13} = (1 - \tau, 1 + \tau) \times (0, 1).$$

Для первого класса $s = 1$ подобластей

$$R_1: L_2^4(Q_{11}) \rightarrow L_2^4(Q_{11}), \quad R_1 = U_1 R_Q U_1^{-1}, \quad R_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q).$$

Действию оператора R_1 в силу формулы (3) соответствует умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для второго класса $s = 2$ подобластей

$$R_2: L_2^2(Q_{21}) \rightarrow L_2^2(Q_{21}), \quad R_2 = U_2 R_Q U_2^{-1}.$$

Действию этого оператора соответствует умножение на матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

На третьем классе действию оператора R_Q соответствует умножение на a_0 .

3. Действие разностных операторов в пространствах Соболева. Введем в рассмотрение пространство Соболева $H^m(Q)$ комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе с обобщенными производными до порядка m включительно; $H^m(Q)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^m(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_Q D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha_i \geq 0$,

$$D^\alpha = \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(-i \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

Обозначим через $\dot{H}^m(Q)$ замыкание пространства $C_0^\infty(Q)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^m(Q)$.

Пусть $Q = (0, d) \times G \in \mathbb{R}^n$ — цилиндр, R — разностный оператор, определенный формулой (4) со сдвигами только вдоль оси цилиндра. Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^N$, $0 = \tau_0 < \tau_2 < \dots < \tau_N$, — абсциссы компонент

орбиты S^0 основания цилиндра под действием разностного оператора R . Введем в рассмотрение пространство $H_\gamma^1(Q)$ функций $u \in H^1(Q)$, для которых

$$u|_{x_1=0} = \sum_{i=1}^N \gamma_i^1 u|_{x_1=\tau_i}, \quad u|_{x_1=d} = \sum_{i=1}^N \gamma_i^2 u|_{x_1=d-\tau_i}. \quad (8)$$

Пусть R_1 — матрица первого класса подобластей разбиения области Q , определенная формулой (3). Матрица R_{11} получена из R_1 вычеркиванием последней строки и столбца. Обозначим через R_1^1 (соответственно, R_1^2) матрицу, полученную из матрицы R_1 вычеркиванием первого (соответственно, последнего) столбца. Обозначим i -ю строку матрицы R_1^1 (соответственно, матрицы R_1^2) через e_i (соответственно, g_i).

Предположим, что $\det R_{11} \neq 0$. Тогда первая строка матрицы R_1^1 есть линейная комбинация остальных ее строк:

$$e_1 = \sum_{i=1}^N \gamma_i^1 e_{i+1}. \quad (9)$$

Аналогично, последняя строка матрицы R_1^2 есть линейная комбинация предыдущих строк:

$$g_{N+1} = \sum_{i=1}^N \gamma_i^2 g_{N+1-i}. \quad (10)$$

Введем обозначения

$$\gamma^1 = (-1, \gamma_1^1, \dots, \gamma_N^1)^t, \quad \gamma^2 = (\gamma_N^2, \dots, \gamma_1^2, -1)^t,$$

$(R_1^1)^t$ — транспонированная матрица для R_1^1 . Тогда систему для нахождения γ^1 можно переписать в виде

$$(R_1^1)^t \gamma^1 = 0. \quad (11)$$

Система уравнений относительно γ^2 примет вид

$$(R_1^2)^t \gamma^2 = 0. \quad (12)$$

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству, приведенному для одномерного случая в [3].

Теорема 1. Пусть R_Q — невырожденный оператор и $\det R_{11} \neq 0$. Тогда существуют такие $\gamma_i^1, \gamma_i^2, i = 1, \dots, N$, что оператор R_Q отображает $\dot{H}^1(Q)$ на $H_\gamma^1(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно.

Пример 2. Пусть разностный оператор R имеет вид

$$(Rv)(x) = a_0 v(x_1, x_2) + a_1 (v(x_1 + 1, x_2) + v(x_1 - 1, x_2)) + a_2 (v(x_1 + 1 + \tau, x_2) + v(x_1 - 1 - \tau, x_2)), \quad (13)$$

где $1/4 < \tau < 1/2$, τ — иррациональное число. Рассмотрим оператор

$$R_Q = P_Q R I_Q,$$

где $Q = (0, 2) \times (0, 1)$. Абсциссы орбит левого и правого оснований цилиндра равны соответственно

$$S^0 = \{0, \tau, 1, 1 + \tau\}, \quad S^d = \{1 - \tau, 1, 2 - \tau, 2\}.$$

Разбиение области Q состоит из двух классов подобластей. Первый класс содержит 4 подобласти:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= (0, 1 - \tau) \times (0, 1), & Q_{12} &= (\tau, 1) \times (0, 1), \\ Q_{13} &= (1, 2 - \tau) \times (0, 1), & Q_{14} &= (1 + \tau, 2) \times (0, 1); \end{aligned}$$

второй класс состоит из подобластей

$$Q_{21} = (1 - \tau, \tau) \times (0, 1), \quad Q_{22} = (2 - \tau, 1 + \tau) \times (0, 1).$$

На первом классе подобластей действию оператора R_Q соответствует умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix};$$

ее определитель

$$\det R_1 = (a_0^2 - a_1^2 - a_0 a_2)(a_0^2 - a_1^2 + a_0 a_2).$$

На втором классе действию оператора R_Q соответствует умножение на матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad \det R_2 = (a_0^2 - a_1^2).$$

В силу леммы 2 необходимое и достаточное условие невырожденности оператора R_Q имеет вид

$$\begin{aligned} |a_0| &\neq |a_1|, \\ (a_0^2 - a_1^2 - a_0 a_2)(a_0^2 - a_1^2 + a_0 a_2) &\neq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Запишем матрицы $R_1^1 = R_1^2, R_{11}$:

$$R_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix}, \quad R_{11} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Условие невырожденности R_{11} :

$$\det R_{11} = a_0(a_0^2 - a_1^2) \neq 0. \quad (15)$$

Пусть выполнены условия (14), (15). Тогда в силу теоремы 1 существуют такие $\gamma_i^1 = \gamma_i^2$, $i = 1, \dots, 3$, что оператор R_Q отображает $\dot{H}^1(Q)$ на $H_\gamma^1(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно, где $H_\gamma^1(Q)$ — подпространство функций $u \in H^1(Q)$, удовлетворяющих условиям

$$u(0, x_2) = \gamma_1 u(\tau, x_2) + \gamma_2 u(1, x_2) + \gamma_3 u(1 + \tau, x_2), \quad (16)$$

$$u(2, x_2) = \gamma_1 u(2 - \tau, x_2) + \gamma_2 u(1, x_2) + \gamma_3 u(1 - \tau, x_2), \quad (17)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в силу симметричности матрицы R_1 находятся из системы (11).

Решение этой системы существует и единственно:

$$\gamma_1 = \frac{a_1 a_2}{a_1^2 - a_0^2}, \quad \gamma_2 = \frac{a_1}{a_0}, \quad \gamma_3 = -\frac{a_0 a_2}{a_1^2 - a_0^2}. \quad (18)$$

4. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. Используем результаты теории нелокальных эллиптических задач для исследования свойств эллиптических дифференциально-разностных операторов и гладкости обобщенных решений соответствующих краевых задач.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$AR_Q v = f(x) \quad (x \in Q) \quad (19)$$

с однородными краевыми условиями

$$v|_{\partial Q} = 0. \quad (20)$$

Здесь $Q = (0, d) \times G \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geq 3$, и $G = (a, b)$, если $n = 2$), $A = A_0 + a_0$ — дифференциальный оператор, где

$$A_0 = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (21)$$

$a_{ij} = a_{ji}$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $f_0 \in L_2(Q)$; $R_Q = P_Q R I_Q$; разностный оператор R определен по формуле

$$Rv(x) = \sum_{h \in M} a_h v(x_1 + h, x_2, \dots, x_n), \quad (22)$$

M — конечное множество несоизмеримых между собой сдвигов $h \in \mathbb{R}$, $a_h \in \mathbb{C}$. Используем матрицы R_1, R_{11} , определенные в разделе 3.

Пусть $A_R: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ — неограниченный оператор, заданный следующим образом:

$$D(A_R) = \{v \in \dot{H}^1(Q) \mid R_Q v \in H^2(Q)\}, \quad A_R v = A R_Q v. \quad (23)$$

Задача (19), (20) для целочисленных сдвигов разностного оператора R исследована в [6]. А. Л. Скубачевским предложен метод сведения этой задачи к краевой задаче с нелокальными краевыми условиями. Разбиение, описанное в разделе 3, позволяет обобщить этот метод на случай несоизмеримых сдвигов (если орбита границы конечна).

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений вида (19), (20), вообще говоря, не имеют гладких классических решений, и естественно определить решение в обобщенном смысле (см. [6]).

Определение 2. Функцию $v \in D(A_R)$ назовем обобщенным решением задачи (19), (20), если

$$A_R v = f. \quad (24)$$

Это определение эквивалентно следующему.

Определение 3. Функцию $v \in \dot{H}^1(Q)$ назовем обобщенным решением задачи (19), (20), если для любой функции $w \in \dot{H}^1(Q)$ выполнено тождество

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} R_Q v_{x_j}, w_{x_i})_{L_2(Q)} + (a_0 v, w)_{L_2(Q)} = (v, f)_{L_2(Q)}, \quad (25)$$

где $(v, w)_{L_2(Q)}$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$.

Определение 4. Будем называть уравнение (19) и соответствующий оператор $A R_Q$ эллиптическим в \bar{Q} , если выполняются следующие условия:

(i) оператор A сильно эллиптичен в \bar{Q} , т.е. квадратичная форма

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j$$

положительно определена;

(ii) оператор R_Q регулярен, т.е. R_Q невырожден и $\det R_{11} \neq 0$.

Рассмотрим также краевую задачу для уравнения

$$A u = A_0 u + a_0 u(x) = f(x) \quad (x \in Q) \quad (26)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$u|_{x_1=0} = \sum_{i=1}^k \gamma_i^1 u|_{x_1=\tau_i}, \quad u|_{x_1=d} = \sum_{i=1}^k \gamma_i^2 u|_{x_1=d-\tau_i} \quad u b|_{[0,d] \times \partial G} = 0. \quad (27)$$

где $\gamma_i^1, \gamma_i^2 \in \mathbb{C}$ — постоянные.

Введем неограниченный оператор $A_\gamma: D(A_\gamma) \subset L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ с областью определения $D(A_\gamma) = \{u \in H_\gamma^1(Q) : A_\gamma u \in L_2(Q)\}$, действующий в пространстве обобщенных функций $D'(Q)$ по формуле $A_\gamma u = A u$, где $H_\gamma^1(Q)$ — подпространство функций в $H^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям (27).

Определение 5. Функцию u назовем обобщенным решением нелокальной эллиптической задачи (26), (27), если $u \in D(A_\gamma)$ и

$$A_\gamma u = f. \quad (28)$$

Сведение задачи (19), (20) к нелокальной эллиптической задаче (26), (27) позволяет обобщить утверждение теореме 2 из [4] о гладкости обобщенных решений краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

Теорема 2. Пусть уравнение (19) является эллиптическим в \bar{Q} и пусть v — обобщенное решение краевой задачи (19), (20). Тогда $R_Q v \in H^2(Q)$ и $v \in H^2(Q_{sl})$ для всех подобластей Q_{sl} регулярного разбиения \mathfrak{R}_0 области Q .

Доказательство. В силу условия (ii) и теоремы 2 существуют такие числа $\gamma_i^1, \gamma_i^2 \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, N$), что оператор R_Q отображает $\dot{H}^1(Q)$ на $H_\gamma^1(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно. Таким образом, функция $u = R_Q v$ является обобщенным решением задачи (26), (27). Поэтому в силу [6, лемма 7.1] имеем $R_Q v \in H^2(Q)$. Отсюда и из [6, лемма 2.15] следует, что $v \in H^2(Q_{sl})$ для всех подобластей Q_{sl} регулярного разбиения. \square

Теорема 3. Пусть уравнение (19) является эллиптическим. Тогда неограниченный оператор $A_R: D(A_R) \subset L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ фредгольмов и $\text{ind } A_R = 0$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что уравнение (24) эквивалентно уравнению (28). В силу [6, теорема 1.2] оператор A_γ фредгольмов и $\text{ind } A_\gamma = 0$. Следовательно, оператор A_R фредгольмов и $\text{ind } A_R = 0$. \square

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству [6, теорема 7.4].

Теорема 4. Пусть уравнение (19) является эллиптическим. Если кроме того $a_h = \bar{a}_{-h}$, то оператор $A_R: D(A_R) \subset L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ самосопряжен, а его спектр состоит из вещественных изолированных собственных значений конечной кратности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванова Е. П. Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента // Совр. мат. Фундам. напр. — 2016. — 59. — С. 74–96.
2. Иванова Е. П. О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов // Совр. мат. Фундам. напр. — 2016. — 62. — С. 85–99.
3. Иванова Е. П. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов, сводящиеся к нелокальным задачам // Совр. мат. Фундам. напр. — 2019. — 65, № 4. — С. 613–622.
4. Иванова Е. П. О гладких решениях дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов // Мат. заметки. — 2019. — 105, № 1. — С. 145–148.
5. Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений и их приложения // Усп. мат. наук. — 2016. — 71, № 5 (431). — С. 3–112.
6. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.
7. Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. — 1998. — 32, № 2. — P. 261–278.

Иванова Елена Павловна

Московский авиационный институт (научно-исследовательский университет);

Российский университет дружбы народов, Москва

E-mail: elpali@yandex.ru



ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА В АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА В \mathbb{R}_2

© 2022 г. Л. Н. ЛЯХОВ, А. И. ИНОЗЕМЦЕВ

Аннотация. Работа содержит формулу представления решения частно-интегрального уравнения Фредгольма второго рода в виде соответствующего ряда Неймана. Приведены условия существования и единственности этого решения в классах функций Лебега $L_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, определенных в конечном прямоугольнике $D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ евклидова пространства точек \mathbb{R}_2 .

Ключевые слова: частный интеграл, уравнение Фредгольма, анизотропное пространство, резольвента, ряд Неймана, теорема о резонансе.

PARTIAL INTEGRAL FREDHOLM EQUATION IN ANISOTROPIC CLASSES OF LEBESGUE FUNCTIONS ON \mathbb{R}_2

© 2022 L. N. LYANOV, A. I. INOZEMTSEV

АБСТРАКТ. In this paper, we propose a formula for representing the solution of a partial integral Fredholm equation of the second kind in the form of the corresponding Neumann series. We obtain conditions for the existence and uniqueness of this solution in the classes of Lebesgue functions $L_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, defined in a finite rectangle $D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ of the Euclidean space \mathbb{R}_2 .

Keywords and phrases: partial integral, Fredholm equation, anisotropic space, resolvent, Neumann series, resonance theorem.

AMS Subject Classification: 45B99, 47G99

1. Введение. В работе рассматривается уравнение Фредгольма 2-го рода с частными интегралами K_1, K_2 вида

$$\varphi(x) = \lambda(K_1\varphi)(x) + f(x), \quad (1)$$

$$\varphi(x) = \lambda(K_2\varphi)(x) + f(x), \quad (2)$$

где роль оператора Фредгольма играют частные интегралы в \mathbb{R}_2

$$(K_1u)(x) = \int_{D_1} k_1(x; t_1)u(t_1, x_2)dt_1, \quad D_1 = (a_1, b_1), \quad (3)$$

$$(K_2u)(x) = \int_{D_2} k_2(x; t_2)u(x_1, t_2)dt_2, \quad D_2 = (a_2, b_2), \quad (4)$$

и $x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}_2$, $D = D_1 \times D_2$.

Анизотропное пространство Лебега $L_{\mathbf{p}}(D) = L_{(p_1, p_2)}(D) = L_{p_1}(D_1; L_{p_2}(D_2))$, $p_i \geq 1$, представляет собой класс функций с конечной нормой (см. [1, с. 9])

$$\|f\|_{L_{p_1}(D_1; L_{p_2}(D_2))} = \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1} dt_1 \right)^{p_2/p_1} dt_2 \right)^{1/p_2},$$

т.е. $f \in L_{p_1}(D_1; L_{p_2}(D_2)) \iff \|f\|_{L_{p_1}(D_1; L_{p_2}(D_2))} < \infty$. Отметим, что пространства $L_{p_1}(D_1; L_{p_2}(D_2))$ и $L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))$ не совпадают. Однако справедливо неравенство (см. [1, с. 23, неравенство (11)])

$$\|f\|_{L_{p_1}(D_1; L_{p_2}(D_2))} \leq \|f\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))}. \quad (5)$$

Пусть $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ — сопряженный мультииндекс:

$$\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1.$$

В [5] (см. также [6]) доказаны неравенства

$$\|K_1 u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|k_1\|_{L_{(q_1; p_1, p_2 q_2)}(D_1 \times D)} \|u\|_{L_{(p_1, p_2^2)}(D_1 \times D_2)}, \quad (6)$$

$$\|K_2 u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|k_2\|_{L_{(q_2; p_1 q_1, p_2)}(D_2 \times D)} \|u\|_{L_{(p_2, p_1^2)}(D_2 \times D_1)}. \quad (7)$$

В этих рассуждениях полезно записать неравенства (6) и (7) в терминах функций со значениями в соответствующих банаховых пространствах (здесь мы следуем монографии [4, с. 19]), в частности, $L_{\mathbf{p}}(D) = L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))$, а неравенства (6) и (7) примут вид

$$\|K_1 u\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \leq \|k_1\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|u\|_{L_{p_2^2}(D_2; L_{p_1}(D_1))}, \quad (8)$$

$$\|(K_2 u)\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \leq \|k_2\|_{L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1}))} \|u\|_{L_{p_1^2}(D_1; L_{p_2}(D_2))}. \quad (9)$$

Для оператора K_2 нам понадобится другое неравенство, в котором изменен порядок интегрирования по сравнению с (9), именно

$$\|K_2 f\|_{L_{p_1^2}(D_1; L_{p_2}(D_2))} \leq \|k_2\|_{L_{p_1^2 q_1}(D_1; L_{(q_2, p_2)}(D_{2,2}))} \|f\|_{L_{p_1^3}(D_1; L_{p_2}(D_2))}. \quad (10)$$

Доказательство (10) принципиально не отличается от доказательства (9), приведенного в [5, 6], но в данном случае оно получается из (9) применением неравенства (5).

2. Итерации частных интегралов K_1 и K_2 . Пусть r — натуральное число. Итерацией порядка r частного интеграла K_i ($i = 1, 2$) называется оператор K_i^r .

В следующей теореме установлена связь параметров $(p_1, p_2) = \mathbf{p}$ анизотропного пространства Лебега с порядком итерации.

Теорема 1. Пусть

$$\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1, \quad j = 1, 2$$

и r — произвольное натуральное число. Если

$$k_1(x; t_1) \in L_{p_2^r q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1})), \quad f(x) \in L_{p_2^{r+1}}(D_2; L_{p_1}(D_1)),$$

то

$$(K_1^r f)(x) \in L_{\mathbf{p}}(D),$$

при этом

$$\|K_1^r f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \prod_{i=1}^r \|k_1\|_{L_{p_2^i q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \cdot \|f\|_{L_{p_2^{r+1}}(D_2; L_{p_1}(D_1))}. \quad (11)$$

Если

$$k_2(x_1, x_2; t_2) \in L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1})), \quad k_2(x_1, x_2; t_2) \in L_{p_1^{r-1} q_1}(D_1; L_{(q_2, p_2)}(D_{2,2})), \\ f(x_1, x_2) \in L_{p_1^{r+1}}(D_1; L_{p_2}(D_2)),$$

то

$$(K_2^r f)(x_1, x_2) \in L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1)),$$

при этом

$$\|K_2^r f\|_{L_p(D)} \leq \|k_2\|_{L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1}))} \prod_{i=2}^r \|k_2\|_{L_{p_1^i q_1}(D_1; L_{(q_2, p_2)}(D_{2,2}))} \cdot \|f\|_{L_{p_1^{r+1}}(D_1; L_{p_2}(D_2))}. \quad (12)$$

Доказательство. Вначале докажем (11). Поочередно применяя неравенство (8), получим

$$\begin{aligned} \|K_1^r f\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} &\leq \|k_1\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|K_1^{r-1} f\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \leq \\ &\leq \|k_1\|_{L_{p_2^2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|k_1\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|K_1^{r-2} f\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \leq \dots \\ &\dots \leq \prod_{i=1}^r \|k_1\|_{L_{p_2^i q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|f\|_{L_{p_2^{r+1}}(D_2; L_{p_1}(D_1))}. \end{aligned}$$

Тем самым подтверждена справедливость неравенства (11).

В случае оператора K_2^r из неравенства (9) следует, что порядок интегрирования в (9) слева для функции $K_2 u$ и справа для функции u противоположный. Поэтому для оценки нормы оператора K_2^r в $L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))$ один раз применим формулу (9), затем воспользуемся неравенством (10), последовательно применяя которое, получим

$$\begin{aligned} \|K_2^r f\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} &= \|K_2(K_2^{r-1} f)\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \leq \\ &\leq \|k_2\|_{L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1}))} \cdot \|K_2^{r-1} f\|_{L_{p_1^2}(D_1; L_{p_2}(D_2))} \leq \\ &\leq \|k_2\|_{L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1}))} \|k_2\|_{L_{p_1^2 q_1}(D_1; L_{(q_2, p_2)}(D_{2,2}))} \cdot \|K_2^{r-2} f\|_{L_{p_1^3}(D_1; L_{p_2}(D_2))} \leq \\ &\leq \|k_2\|_{L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1}))} \|k_2\|_{L_{p_1^2 q_1}(D_1; L_{(q_2, p_2)}(D_{2,2}))} \|k_2\|_{L_{p_1^3 q_1}(D_1; L_{(q_2, p_2)}(D_{2,2}))} \times \\ &\quad \times \|K_2^{r-3} f\|_{L_{p_1^4}(D_1; L_{p_2}(D_2))} \leq \dots \leq \\ &\leq \|k_2\|_{L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1}))} \prod_{i=2}^r \|k_2\|_{L_{p_1^i q_1}(D_1; L_{(q_2, p_2)}(D_{2,2}))} \cdot \|f\|_{L_{p_1^{r+1}}(D_1; L_{p_2}(D_2))}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо (12). \square

3. Итерированное ядро оператора K_1^m . Введем итерированное ядро $k_1^{(m)}(x; t_1)$, соответствующее натуральным степеням оператора K_1^m . Это ядро определено последовательностью частно-интегральных операций

$$k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1) = \int_{D_1} k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau) k_1(\tau, x_2; t_1) d\tau, \quad (13)$$

в которых первой итерацией является

$$k_1^{(1)}(x_1, x_2; t_1) = k_1(x_1, x_2; t_1).$$

Справедливо равенство

$$(K_1^m u)(x) = \int_{D_1} k_1^{(m)}(x; t_1) u(t_1, x_2) dt_1, \quad (14)$$

где итерированное ядро $k_1^{(m)}$ представлено набором следующих повторных частно-интегральных операций

$$k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1) = \int_{D_1} \int_{D_1} \dots \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; \tau_{m-1}) k_1(\tau_{m-1}, x_2; \tau_{m-2}) \dots k_1(\tau_1, x_2; t_1) d\tau_1 \dots d\tau_{m-1}.$$

Таким образом, m -кратная итерация частного интеграла снова представляет собой частный интеграл с ядром $k_1^{(m)}$, которое называется m -кратно итерированным ядром (m -итерированным ядром). Для итерации $K_1^{(m)}$, как и для любого частного интеграла вида K_1 , справедливо неравенство (8), т.е.

$$\|(K_1^m u)\|_{L_p(D_{1,2}^{(2)})} \leq \|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|u\|_{L_{p_2^2}(D_2; L_{p_1}(D_1))}. \quad (15)$$

Отсюда возникает интерес к норме m -итерированного ядра $k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1)$ в пространстве $L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))$.

Теорема 2 (о норме m -итерированного ядра k_1). *В пространстве*

$$L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))$$

норма итерированного ядра $k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1)$ оператора K_1^m удовлетворяет неравенству

$$\|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \leq \|k_1(x_1, x_2; \tau_1)\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \prod_{i=1}^{m-1} \|k_1\|_{L_{p_2^2 q_2^i}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}. \quad (16)$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (13)

$$\|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} = \left\| \int_{D_1} k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1) k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1}) d\tau_{m-1} \right\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))}.$$

По переменной τ_{m-1} воспользуемся неравенством Гельдера с показателями p_1 и q_1 . Имеем

$$\begin{aligned} \|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \left\| \left(\int_{D_1} |k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})|^{q_1} d\tau_{m-1} \right)^{1/q_1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_{D_1} |k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{m-1} \right)^{1/p_1} \right\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} = \\ &= \left\{ \int_{D_2} \left[\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})|^{q_1} d\tau_{m-1} \right)^{q_1/q_1} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\int_{D_1} |k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{m-1} \right)^{q_1/p_1} dt_1 \right]^{p_1/q_1} dx_1 \right\}^{p_2 q_2/p_1} dx_2 \Big\}^{1/p_2 q_2}. \end{aligned}$$

Выражение

$$\int_{D_1} |k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})|^{q_1} d\tau_{m-1}$$

не зависит от переменной t_1 , поэтому

$$\begin{aligned} \|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \left\{ \int_{D_2} \left[\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})|^{q_1} d\tau_{m-1} \right)^{p_1/q_1} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{m-1} \right)^{q_1/p_1} dt_1 \right)^{p_1/q_1} dx_1 \right]^{p_2 q_2/p_1} dx_2 \right\}^{1/(p_2 q_2)}. \end{aligned}$$

Выражение

$$\left(\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{m-1} \right)^{q_1/p_1} dt_1 \right)^{p_1/q_1}$$

не зависит от x_1 , поэтому

$$\begin{aligned} \|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \left\{ \int_{D_2} \left[\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})|^{q_1} d\tau_{m-1} \right)^{p_1/q_1} dx_1 \right]^{p_2 q_2/p_1} dx_2 \right\} \times \\ &\times \left\{ \int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{m-1} \right)^{q_1/p_1} dt_1 \right\}^{p_2 q_2/q_1} dx_2 \Bigg\}^{1/(p_2 q_2)}. \end{aligned}$$

Еще раз воспользуемся неравенством Гельдера по переменной x_2 с показателями p_2 и q_2 , получим неравенство

$$\begin{aligned} \|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \\ &\leq \left\{ \int_{D_2} \left[\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})|^{q_1} d\tau_{m-1} \right)^{p_1/q_1} dx_1 \right]^{p_2 q_2^2/p_1} dx_2 \right\}^{1/(p_2 q_2^2)} \times \\ &\times \left\{ \int_{D_2} \left[\int_{D_1} \left(\int_{D_1} |k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1)|^{p_1} d\tau_{m-1} \right)^{q_1/p_1} dx_1 \right]^{p_2^2 q_2/q_1} dx_2 \right\}^{1/(p_2^2 q_2)} = \\ &= \|k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})\|_{L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \times \|k_1(\tau_{m-1}, x_2; t_1)\|_{L_{p_2^2 q_2}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}. \end{aligned}$$

Таким образом, норма m -итерированного ядра оценена через посредство $(m-1)$ -итерированного ядра. Рассуждая аналогично, получим оценку нормы $(m-1)$ -итерированного ядра $k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})$ в пространстве $L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))$:

$$\begin{aligned} \|k_1^{(m-1)}(x_1, x_2; \tau_{m-1})\|_{L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \\ &\leq \|k_1^{(m-2)}(x_1, x_2; \tau_{m-2})\|_{L_{p_2 q_2^2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \times \|k_1(\tau_{m-2}, x_2; \tau_{m-1})\|_{L_{p_2^2 q_2}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}. \end{aligned}$$

Последним действием в процессе доказательства теоремы является оценка нормы дважды итерированного ядра $k_1^{(2)}(x_1, x_2; \tau_2)$ в пространстве $L_{p_2 q_2^{m-1}}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))$. Здесь, применяя описанный выше подход, получим необходимое неравенство:

$$\begin{aligned} \|k_1^{(2)}(x_1, x_2; \tau_2)\|_{L_{p_2 q_2^{m-1}}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \\ &\leq \|k_1(x_1, x_2; \tau_1)\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \|k_1(\tau_1, x_2; \tau_2)\|_{L_{p_2^2 q_2^{m-1}}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}. \quad \square \end{aligned}$$

В результате можем сформулировать теорему о норме m -кратно итерированного ядра оператора K_1^m .

Теорема 3. Если $k_1 \in \left\{ L_\infty \left(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,2}^{(2)}) \right) \cap L_\infty \left(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}) \right) \right\}$, то

$$\begin{aligned} \left\| (K_1^m u) \right\|_{L_p(D_{1,2}^{(2)})} &\leq \left\| k_1(x_1, x_2; \tau_1) \right\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{m-1} \left\| k_1 \right\|_{L_{p_2^2 q_2^i}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))} \left\| u \right\|_{L_{p_2^2}(D_2; L_{p_1}(D_1))}. \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство. Нам уже известно, что оператор $K_1^{(m)}$ представляет собой частный интеграл, отвечающий m -итерированному ядру $k_1^{(m)}$. Поэтому воспользовавшись неравенством (8), запишем

$$\left\| (K_1^m u) \right\|_{L_p(D_{1,2}^{(2)})} \leq \left\| k_1^{(m)} \right\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \left\| u \right\|_{L_{p_2^2}(D_2; L_{p_1}(D_1))}$$

Теперь утверждение теоремы следует из неравенства (16). \square

Правая часть неравенство (16) содержит m множителей: один вида

$$\left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))},$$

оставшиеся $m - 1$ множителей вида

$$\left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_{p_2^2 q_2^i}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}.$$

При применении метода последовательных приближений решения интегральных уравнений возникает необходимость в бесконечных итерациях частных интегралов. Как видим, некоторые параметры анизотропных лебеговых классов функций в неравенстве (16) стремятся к ∞ при $m \rightarrow \infty$ ($p_2 q_2^m \rightarrow \infty$, $p_2^2 q_2^{m-1} \rightarrow \infty$). Хорошо известно, что $L_p(D)$ вложено в $L_q(D)$ при $p > q$, если область D конечна (см. [3, с. 72]). Это приводит к неравенствам

$$\begin{aligned} \left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq A_1 \left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_\infty(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))}, \\ \left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_{p_2^2 q_2^i}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))} &\leq A_1 \left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_\infty(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))}, \end{aligned}$$

где константа A_1 зависит от области интегрирования и вычисляется по формуле

$$A_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ (\mu(D_2))^{1/(p_2^2 q_2^i)}, (\mu(D_2))^{1/(p_2 q_2^m)} \right\}$$

Заметим, что пространства $L_\infty(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))$ и $L_\infty(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))$, вообще говоря, различны. Пусть

$$Q_1 = \max \left\{ \left\| k_1 \right\|_{L_\infty(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))}, \left\| k_1 \right\|_{L_\infty(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))} \right\};$$

тогда

$$\begin{aligned} \left\| k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_{p_2 q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} &\leq \\ &\leq \left\| k_1(x_1, x_2; \tau_1) \right\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \prod_{i=1}^{m-1} \left\| k_1 \right\|_{L_{p_2^2 q_2^i}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))} \leq A_1^m Q_1^m. \end{aligned}$$

Введем функцию

$$V_m(x_2) = \left\| k_1^{(m)}(x_2) \right\|_{L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1})}$$

и рассмотрим ряд

$$V(x_2; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m V_{m+1}(x_2). \quad (18)$$

Поскольку функция $V_{m+1}(x_2)$ существенно ограничена, то почти всюду

$$|\lambda| V_m(x_2) < \lambda A_1 Q_1 < 1$$

и ряд (18) сходится абсолютно и равномерно и определяет функцию из $L_\infty(D_2)$. Ряд (18) будем называть регулярным, если функция

$$r_1(x; t_1; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m k_1^{(m+1)}(x_1, x_2; t) \in L_\infty(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1})). \quad (19)$$

Примером регулярного ряда (19) является ряд, построенный на основе ядра $k_1(x; t_1)$, непрерывного по всем переменным своего аргумента.

Если ряд (19) является регулярным, то определяемая им функция $r_1 = r_1(x; t_1; \lambda)$ называется резольвентой ядра $k_1(x; t_1)$ частного интеграла K_1 . Эта же функция называется резольвентой частно-интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int_{D_1} k_1(x; t_1) \varphi(t_1, x_2) dt_1 + f(x).$$

4. Итерированное ядро оператора K_2^m . Операторы K_1 и K_2 принципиально различны, что приводит к различным структурам применяемых к ним норм анизотропных пространств Лебега. Поэтому доказательство теоремы об оценке m -итерированного ядра k_2 частного интеграла K_2 не вытекает из рассуждений предыдущего пункта. Однако эти результаты легко прогнозируемы, поэтому приведем их без подробных доказательств, но с необходимыми комментариями.

Итерированным ядром $k_2^{(m)}(x; t_2)$ частного интеграла K_2^m называется последовательность частно-интегральных операций

$$k_2^{(m)}(x_1, x_2; t_2) = \int_{D_2} k_2^{(m-1)}(x_1, x_2; \sigma) k_2(x_1, \sigma, t_2) d\sigma, \quad (20)$$

в которых первой итерацией является

$$k_2^{(1)}(x_1, x_2; t_2) = k_2(x_1, x_2; t_2).$$

Справедливо равенство

$$(K_2^m u)(x) = \int_{D_2} k_2^{(m)}(x; t_2) u(x_1; t_2) dt_2, \quad (21)$$

где итерированное ядро $k_2^{(m)}$ имеет вид

$$k_2^{(m)}(x_1, x_2; t_2) = \int_{D_2} \int_{D_2} \dots \int_{D_2} k_2(x_1, x_2; \sigma_{m-1}) k_2(x_1, \sigma_{m-1}; \sigma_{m-2}) \dots k_2(x_1, \sigma_1; t_2) d\sigma_1 \dots d\sigma_{m-1}.$$

Таким образом, m -кратная итерация частного интеграла снова представляет собой частный интеграл с ядром $k_2^{(m)}$, которое называется m -кратно итерированным ядром (m -итерированным ядром). Для итерации K_2^m , как и для любого частного интеграла вида K_2 , справедливо неравенство (9), т.е.

$$\left\| (K_2^m u) \right\|_{L_p(D)} \leq \left\| k_2^{(m)} \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1}))} \left\| u \right\|_{L_{p_1^2}(D_1; L_{p_2}(D_2))}. \quad (22)$$

Теорема 4 (о норме m -итерированного ядра k_2). *В пространстве $L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1}))$ норма итерированного ядра $k_2^{(m)}(x_1, x_2; t_2)$ оператора K_2^m удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} & \left\| k_2^{(m)}(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1}))} \leq \\ & \leq \left\| k_2^{(1)}(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1^m)}(D_{2,1}))} \prod_{i=1}^{m-1} \left\| k_2(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_1^2 q_1^i}(D_1; L_{(p_2, q_2)}(D_{2,2}))}. \end{aligned} \quad (23)$$

Теорема 5. Если $k_2 \in \left\{ L_{p_2} \left(D_2; L_{(q_2, \infty)}(D_{2,1}^{(2)}) \right); L_{p_1^2 q_1^i} \left(D_1; L_{(p_2, q_2)}(D_{2,2}) \right) \right\}$, то

$$\begin{aligned} \left\| (K_2^m u) \right\|_{L_p(D_{1,2}^{(2)})} &\leq \left\| k_2^{(1)}(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_2} \left(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1^m)}(D_{2,1}) \right)} \times \\ &\times \prod_{i=1}^{m-1} \left\| k_2(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_1^2 q_1^i} \left(D_1; L_{(p_2, q_2)}(D_{2,2}) \right)} \|u\|_{L_{p_1^2} \left(D_1; L_{p_2} \right)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Неравенство (23) содержит m множителей: один вида $\left\| k_2^{(1)}(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_2} \left(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1^m)}(D_{2,1}) \right)}$, оставшиеся $m - 1$ множителей вида $\left\| k_2(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_1^2 q_1^i} \left(D_1; L_{(p_2, q_2)}(D_{2,2}) \right)}$.

При применении метода последовательных приближений решения интегральных уравнений возникает необходимость в бесконечных итерациях частных интегралов. Как видим, некоторые параметры анизотропных лебеговых классов функций в неравенстве (23) стремятся к ∞ при $m \rightarrow \infty$ ($p_1 q_1^m \rightarrow \infty$, $p_1^2 q_1^{m-1} \rightarrow \infty$). Хорошо известно, что $L_p(D)$ вложено в $L_q(D)$ при $p > q$, если область D конечна (см. [3, с. 72]). Это приводит к неравенствам

$$\begin{aligned} \left\| k_2^{(1)}(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_2} \left(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1^m)}(D_{2,1}) \right)} &\leq A_2 \left\| k_2(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_2} \left(D_2; L_{(q_2, \infty)}(D_{2,1}) \right)}, \\ \left\| k_2(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_1^2 q_1^i} \left(D_1; L_{(p_2, q_2)}(D_{2,2}) \right)} &\leq A_2 \left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_\infty \left(D_1; L_{(p_2, q_2)}(D_{2,2}) \right)}, \end{aligned}$$

где константа A_2 зависит от области интегрирования:

$$A_2 = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ (\mu(D_1))^{1/(p_1^2 q_1^i)}, (\mu(D_1))^{1/(p_1 q_1^m)} \right\}.$$

Пусть

$$Q_2 = \max \left\{ \left\| k_2(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_2} \left(D_2; L_{(q_2, \infty)}(D_{2,1}) \right)}, \left\| k_1(x_1, x_2; t_1) \right\|_{L_\infty \left(D_1; L_{(p_2, q_2)}(D_{2,2}) \right)} \right\};$$

тогда

$$\begin{aligned} \left\| k_2^{(m)}(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_2} \left(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1}) \right)} &\leq \\ &\leq \left\| k_2^{(1)}(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_2} \left(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1^m)}(D_{2,1}) \right)} \prod_{i=1}^{m-1} \left\| k_2(x_1, x_2; t_2) \right\|_{L_{p_1^2 q_1^i} \left(D_1; L_{(p_2, q_2)}(D_{2,2}) \right)} \leq A_2^m Q_2^m. \end{aligned}$$

Введем функцию

$$W_m(x_1) = \left\| k_2^{(m)}(x_1) \right\|_{L_{(p_2, q_2)}(D_{2,2})}$$

и рассмотрим ряд

$$W(x_1; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m W_{m+1}(x_1). \quad (25)$$

Поскольку функция $W_m(x_1)$ существенно ограничена, то $|\lambda| W_m(x_1) < |\lambda| A_2 Q_2 < 1$ почти всюду, и ряд (25) сходится абсолютно и равномерно и определяет функцию из $L_\infty(D_1)$. Ряд (25) будем называть регулярным, если функция

$$r_2(x; t_2; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m k_2^{(m+1)}(x_1, x_2; t_2) \in L_\infty \left(D_1; L_{(p_2, q_2)}(D_{2,2}) \right). \quad (26)$$

Примером регулярного ряда (26) является ряд, построенный на основе ядра $k_2(x; t_2)$ непрерывного по всем переменным своего аргумента.

Если ряд (26) является регулярным, то определяемая им функция $r_2 = r_2(x; t; \lambda)$ называется резольвентой ядра $k_2(x; t_2)$ частного интеграла K_2 или резольвентой частного-интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int_{D_2} k_2(x; t_2) \varphi(x_1, t_2) dt_2 + f(x).$$

5. Частно-интегральное уравнение Фредгольма второго рода с частным интегралом K_i . Рассмотрим частно-интегральное уравнение Фредгольма (1) с частным интегралом (2). Применяется классический метод последовательных приближений в том виде, в каком он используется для определения решений интегрального уравнения Фредгольма. То есть его решение будем искать в виде степенного ряда

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x) \lambda^m. \tag{27}$$

Подставив (27) в (1), получим равенство степенных рядов по λ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(x) &= f(x), \\ \varphi^{(1)}(x) &= \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; t_1) \varphi^{(0)}(t_1, x_2) dt_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi^{(m)}(x) &= \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; t_1) \varphi^{(m-1)}(t_1, x_2) dt_1. \end{aligned}$$

Выражая $\varphi^{(m)}(x)$ через $f(x)$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x) &= \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; t_1) f(t_1, x_2) dt_1 = \int_{D_1} k_1^{(1)}(x_1, x_2; t_1) f(t_1, x_2) dt_1, \\ \varphi^{(2)}(x) &= \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; \tau_1) \left[\int_{D_1} k_1^{(1)}(\tau_1, x_2; t_1) f(t_1, x_2) dt_1 \right] d\tau_1 = \\ &= \int_{D_1} \left[\int_{D_1} k_1(x_1, x_2; \tau_1) k_1^{(1)}(\tau_1, x_2; t_1) d\tau_1 \right] f(t_1, x_2) dt_1 = \int_{D_1} k_1^{(2)}(x_1, x_2; t_1) f(t_1, x_2) dt_1. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\varphi^{(m)}(x) = \int_{D_1} k_1^{(m)}(x_1, x_2; t_1) f(t_1, x_2) dt_1. \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно формуле (14)

$$\int_{D_1} k_1^{(m)}(x; t) f(t_1, x_2) dt_1 = (K_1^m f)(x),$$

имеем

$$\varphi^{(m)}(x) = (K_1^m f)(x) \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, предполагаемое решение (27) примет вид следующего ряда Неймана:

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K_1^m f)(x). \tag{28}$$

Теорема 6. Пусть ядро k_1 частного интеграла (3) и правая часть неравенства (17) удовлетворяют условиям

$$Q_1 = \max \left\{ \|k_1\|_{L_{p_2^m q_2}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \right\}_{m=1}^{\infty} < \infty, \quad \|f\|_{\Lambda_1} = \max \left\{ \|f\|_{L_{p_2^{m+1}}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \right\}_{m=1}^{\infty} < \infty$$

и пусть $|\lambda|A_1Q_1 < 1$. Тогда в $L_{\mathbf{p}}$ существует предел

$$\Phi = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r$$

функциональной последовательности

$$\Phi_r f = \varphi^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^r \lambda^i K_1^i f(x).$$

Оператор Φ действует ограниченно из $L_{\mathbf{p}}(D_{1,2})$ в $L_{(p_1, \infty)}(D_{1,2})$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi\|_{L_{(p_1, p_2)}(D_{1,2})} \leq \varliminf_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r\|_{L_{(p_1, p_2)}(D_{1,2})}. \quad (29)$$

Решение уравнения Фредгольма с частным интегралом (3) существует в виде операторного ряда Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_1^m f, \quad \text{причем} \quad \|\varphi\|_{L_{\mathbf{p}}} \leq \frac{\|f\|_{\Lambda_1}}{1 - |\lambda|A_1Q_1}.$$

Это решение единственно.

Доказательство. Нужно показать, что ряд (27) определяет некоторую функцию из пространства $L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))$. Достаточно убедиться, что последовательность

$$\varphi^{(r)}(x) = \sum_{m=0}^r \lambda^m (K_1^m f)(x)$$

фундаментальна в $L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))$. Действительно. Пусть ℓ — произвольное натуральное число. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)} \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} &= \left\| \sum_{m=r+1}^{r+\ell} \lambda^m (K_1^m f)(x) \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \leq \\ &\leq \sum_{m=r+1}^{r+\ell} |\lambda|^m \left\| (K_1^m f)(x) \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (17), получим

$$\begin{aligned} \left\| \varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)} \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} &\leq \sum_{m=r+1}^{r+\ell} |\lambda|^m \|k_1(x_1, x_2; \tau_1)\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2; L_{(q_1, p_1)}(D_{1,1}))} \times \\ &\times \prod_{i=1}^{m-1} \|k_1\|_{L_{p_2^2 q_2^i}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1}))} \|f\|_{L_{p_2^2}(D_2; L_{p_1}(D_1))}. \end{aligned}$$

Здесь m сомножителей из норм ядра k_1 , каждое из которых не превосходит числа Q_1 . Поэтому получим следующую оценку разности:

$$\begin{aligned} \left\| \varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)} \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} &\leq \|f\|_{L_{p_2^2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \sum_{m=r+1}^{r+m} |\lambda|^m A_1 Q_1^m = \\ &= \|f\|_{L_{p_2^2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} (|\lambda|A_1Q_1)^r \sum_{m=1}^{\ell} |\lambda|^m A_1^m Q_1^m \leq \|f\|_{L_{p_2^2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} (|\lambda|A_1Q_1)^r \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda|^m A_1^m Q_1^m. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left\| \varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)} \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \leq \|f\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} (|\lambda| A_1 Q_1)^r \frac{1}{1 - |\lambda| A_1 Q_1}. \quad (30)$$

Так как $|\lambda| A_1 Q_1 < 1$, то величина $(|\lambda| A_1 Q_1)^r$ стремится к нулю с ростом r . Таким образом, последовательность $\varphi^{(r)}$ фундаментальна в анизотропном пространстве Лебега $L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))$. Итак, мы убедились в существовании функции $\varphi \in L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))$, определенной рядом (28) и, следовательно, (27). Покажем, что эта функция есть решение уравнения (1).

Введем оператор

$$\Phi_r f = \varphi^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^r \lambda^i K_1^i f(x). \quad (31)$$

Положим $\Phi_\infty = \Phi$:

$$\Phi f(x) = \varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_1^m f. \quad (32)$$

Из (31), (32) и (17) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \Phi_r f - \Phi f \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=r+1}^{\infty} \lambda^i K_1^i f \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \lambda^{r+1} K_1^{r+1} \sum_{i=0}^{\infty} K_1^i f \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \lambda^{r+1} K_1^{r+1} \phi \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} \leq \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} (A_1 Q_1 |\lambda|)^{r+1} \|\varphi\|_{L_{p_2}^{r+2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} = 0. \end{aligned}$$

Здесь первый сомножитель стремится к нулю за счет выбора λ , а второй ограничен значением $\|\Phi\|_{L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))}$. Следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \Phi_r f - \Phi f \right\|_{L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))} = 0,$$

т.е. существует сильный предел функциональной последовательности $\Phi_r f$, который обозначим $s\text{-}\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r f = \Phi f$.

Теперь воспользуемся следующими утверждениями.

Лемма 1 (теорема о резонансе; см. [2, следствия 1 и 2, с. 104]). Пусть $\{\Phi_r\}$ — семейство ограниченных линейных операторов, отображающих B -пространство X в нормированное линейное пространство Y . Если множество $\{\|\Phi_r f(x)\|\}$ ограничено при каждом фиксированном f , то и множество $\{\|\Phi_r\|\}$ ограничено.

Лемма 2. Предположим, что сильный предел $s\text{-}\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r f = \Phi f$ существует при каждом фиксированном f . Тогда Φ — тоже ограниченный линейный оператор, отображающий X в Y , причем

$$\|\Phi\| \leq \varliminf_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r\|.$$

В нашем случае

$$X = \left\{ f \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1)) : \|f\|_{\Lambda_1} = \max \left\{ \|f\|_{L_{(p_1, p_2^{m+1})}(D_{1,2})} \right\}_{m=1}^{\infty} < \infty \right\}, \quad Y = L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1)).$$

Ясно, что

$$\|\Phi_r f\|_{L_p(D)} = \|\varphi^{(r)}\|_{L_p} \leq \frac{\|f\|_{\Lambda_1}}{1 - |\lambda| A_1 Q_1},$$

Отсюда вытекает, что множество $\{\|\Phi_r\|_X\}$ ограничено. Доказано существование сильного предела $s\text{-}\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r f = \Phi f$. Поэтому из теоремы о резонансе вытекает неравенство (23).

Нетрудно проверить, что введенная выше функция

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K_1^m f)(x)$$

является решением уравнения (1). Действительно, подставляя $\varphi(x)$ в правую часть уравнения (1), получим левую часть этого уравнения:

$$\lambda K_1 * \left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K_1^m f)(x) \right) + f = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m (K_1^m f)(x) + f = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K_1^m f)(x) = \varphi(x).$$

Как мы уже показали,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r f\|_{L_p(D)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \|\varphi^{(r)}\|_{L_p} \leq \frac{\|f\|_{\Lambda_1}}{1 - |\lambda| A_1 Q_1},$$

т.е. множество $\|\Phi_r f\|_{L_p(D)}$ ограничено, и существует предел

$$\varphi(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r f(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^r \lambda^i K_1^i \right) f(x) = \Phi f(x),$$

то из теоремы о резонансе получим ограниченность $\|\Phi\|$, причем из существования сильного предела $\Phi f(x)$ последовательности $\Phi_r f(x)$ имеем (см. [2, с. 104, следствие 2])

$$\|\Phi\|_{L_{(p_1, p_2)}(D_{1,2})} \leq \varliminf_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r\|_{L_{(p_1, p_2)}(D_{1,2})}$$

и существует обращающий оператор $\Phi = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r$, отображающий $L_p(D)$ в $L_p(D)$.

Функция

$$\varphi = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi^{(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^r \lambda^m K_1^m f = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_1^m f$$

является решением уравнения (1). Полученное решение φ в пространстве $L_{(p_1, p_2)}(D_{1,2})$ единственно, поскольку решение однородного уравнения равно нулю. \square

Вернемся к решению, представленному рядом (29). Воспользовавшись формулой (20), выразим это решение через итерированные ядра частного интеграла K_1^m :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{D_1} \left[\sum_{m=0}^{\infty} k_1^{(m+1)}(x_1, x_2; t_1) l^m \right] f(t_1, x_2) dt_1.$$

выражение в квадратных скобках представляет собой резольвенту ядра k_1 (см. формулу (19)):

$$r_1(x; t_1; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m k_1^{(m+1)}(x_1, x_2; t_1) \in L_{\infty}(D_2; L_{(p_1, q_1)}(D_{1,1})).$$

Следовательно, решение уравнения (1) можно записать в операторной форме

$$(I + \lambda R_1) f(x) = \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{D_1} r_1(x; t_1; \lambda) f(t_1, x_2) dt_1, \quad (33)$$

в которой $I + \lambda R_1$ представляет собой оператор типа частного интеграла, ядром которого является резольвента ядра частного интеграла K_1 .

Запишем уравнение (1) в операторной форме:

$$(I - \lambda K_1) \varphi(x) = f(x), \quad (34)$$

Тогда операторная форма (33) решения (34) определена применением оператора $I + \lambda R_1$ к правой части операторного уравнения (34):

$$\varphi(x) = (I + \lambda R_1)(I - K_1) \varphi(x) = (I + \lambda R_1) f(x).$$

В связи с этим положим

$$I + \lambda R_1 = (I - \lambda K_1)^{-1}.$$

Оператор $I + \lambda R_1$ совпадает с оператором Φ и является обратным к оператору $I - \lambda K_1$.

Приведем без доказательства теорему о существовании и единственности решения уравнения (2).

Теорема 7. Пусть ядро k_2 частного интеграла (4) и правая часть неравенства (24) удовлетворяют условиям

$$Q_2 = \max \left\{ \|k_2\|_{L_{p_2}(D_2; L_{(q_2, p_1 q_1)}(D_{2,1}))}; \left\{ \|k_2\|_{L_{p_1^{m_1} q_1}(D_1; L_{(q_2, p_2)}(D_{2,2}))} \right\}_{m=2}^{\infty} \right\} < \infty,$$

$$\|f\|_{L_{\Lambda_2}} = \max \left\{ \|f\|_{L_{p_1^{m+1}}(D_1; L_{p_2}(D_2))} \right\}_{m=1}^{\infty} < \infty$$

и пусть $|\lambda| A_2 Q_2 < 1$. Тогда в L_p существует предел $\Phi = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r$ функциональной последовательности

$$\Phi_r f = \phi^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^r \lambda^i K_2^i f(x).$$

Оператор Φ действует ограниченно из $L_p(D_{1,2})$ в $L_{(p_2, \infty)}(D_{2,1})$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi\|_{L_{(p_2, \infty)}(D_{2,1})} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|\Phi_r\|_{L_{(p_1, p_2)}(D_{1,2})}.$$

Тогда существует решение уравнения Фредгольма с частным интегралом (4) в виде операторного ряда Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_2^m f, \quad \text{причем} \quad \|\varphi\|_{L_p} \leq \frac{\|f\|_{\Lambda_2}}{1 - |\lambda| A_2 Q_2}.$$

Это решение единственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральное представление функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
2. Иосада К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
3. Корпусов М. О., Панин А. А. Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Т. II. Специальные пространства. — М.: Физический факультет МГУ, 2016.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
5. Ляхов Л. Н., Иноземцев А. И. Частные интегралы в анизотропных классах Лебега. I. Двумерный случай// в кн.: Проблемы математического анализа. — СПб., 2020. — Т. 102. — С. 119–123.
6. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue spaces. I: Two-dimensional case// J. Math. Sci. — 2020. — 247, № 6. — P. 888–892.

Ляхов Лев Николаевич
Воронежский государственный университет
E-mail: levnya@mail.ru

Иноземцев Алексей Иванович
Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского
E-mail: inozemtsev.a.i@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 66–73
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-66-73

УДК 517.951, 517.955

О РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

© 2022 г. Д. В. ТУРТИН, М. А. СТЕПОВИЧ,
В. В. КАЛМАНОВИЧ, Е. В. СЕРЕГИНА

Аннотация. Рассмотрена возможность использования метода интегральных представлений (метода Ханкеля) для решения нестационарной задачи тепломассопереноса в полупроводниковой мишени. Изучены некоторые особенности использования такого подхода для решения задач тепломассопереноса в однородной и многослойной средах. Рассмотрение проведено на примере двумерной диффузии неосновных носителей заряда, генерированных электронным зондом. Показано, что для решения ряда практических задач для многослойных мишеней с отличающимися параметрами слоёв может быть использован подход, разработанный ранее для задач тепломассопереноса в однородных полупроводниковых мишенях.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальное уравнение тепломассопереноса, частная производная, задача Коши, электронный зонд, полупроводник, преобразование Ханкеля.

ON THE SOLUTION OF A NONSTATIONARY PROBLEM OF HEAT AND MASS TRANSFER IN A MULTILAYER MEDIUM BY THE METHOD OF INTEGRAL REPRESENTATIONS

© 2022 D. V. TURTYN, M. A. STEPovich,
V. V. KALMANOVICH, E. V. SEREGINA

ABSTRACT. In this paper, we discuss the possibility of using the method of integral representations (the Hankel method) for solving the nonstationary problem of heat and mass transfer in a semiconductor target. Some features of this approach to problems of heat and mass transfer in homogeneous and multilayer media are studied. We consider the example of two-dimensional diffusion of minority charge carriers generated by an electron probe. We show that a number of practical problems for multilayer targets with different layer parameters can be solved by the approach developed earlier for problems of heat and mass transfer in homogeneous semiconductor targets.

Keywords and phrases: mathematical model, differential equation of heat and mass transfer, partial derivative, Cauchy problem, electron probe, semiconductor, Hankel transform.

AMS Subject Classification: 35A22, 34N05, 35G16, 33C10

1. Введение. Ранее описано использование метода Фурье в сочетании с матричным методом для моделирования одномерного нестационарного процесса остывания в многослойной планарной среде (см. [7]), стационарного процесса одномерной диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных в многослойной планарной полупроводниковой структуре

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Калужской области (проекты № 18-41-400001, № 19-03-00271).

с произвольным числом слоёв (см. [8, 18, 24]), а также рассмотрены некоторые возможности математического моделирования стационарного процесса теплопереноса, обусловленного объёмным распределением источников в однородных проводящих материалах (см. [1, 2, 31–33]). Для одномерной математической модели диффузии ННЗ проведено исследование корректности, доказана непрерывная зависимость решения от входных данных, получены соотношения, позволяющие оценить влияние погрешностей в исходных данных на распределение диффундирующей примеси (см. [21, 29, 35]). В то же время при решении некоторых нестационарных задач теплопереноса может оказаться весьма целесообразным использование метода интегральных представлений (см. [4, 10, 11, 16, 20]). Отметим, что ранее для решения задач, связанных с взаимодействием остро сфокусированных пучков электронов с конденсированным веществом, подобный подход не рассматривался. Изучение возможности метода интегральных представлений, использующего преобразование Ханкеля для решения задач теплопереноса, и является предметом рассмотрения в настоящей работе.

2. Постановка задачи. Выбор преобразования Ханкеля обусловлен следующим: при использовании в качестве источника неравновесных ННЗ остро сфокусированного пучка электронов, что обычно и реализуется в электронно-зондовых технологиях, задача математического моделирования диффузии ННЗ в полупроводниковой мишени имеет осевую симметрию. В этом случае решение операторного уравнения можно разложить по одной из функций Бесселя и для решения задачи использовать преобразование Ханкеля. Применяв данный метод к решению задачи диффузии ННЗ, получим решение рассматриваемой задачи в виде, удобном для дальнейшего исследования. Отметим, что традиционные подходы через преобразование Лапласа или применение метода Фурье дают более сложные зависимости от энергии электронов зонда и параметров полупроводниковой мишени для решения изучаемой задачи процесса диффузии ННЗ. Этим и объясняется изучение возможностей использования преобразования Ханкеля при математическом моделировании диффузии, обусловленной остро сфокусированным электронным зондом в полупроводниковых мишенях. В настоящей работе получено решение такой задачи методом интегральных представлений с использованием преобразования Ханкеля (см. [4, 10, 11, 16, 20]). Показано, что метод интегральных преобразований для данной задачи позволяет получить решение, которое может быть использовано для дальнейшего изучения рассматриваемой математической модели.

3. Математическая модель изучаемого процесса. В общем случае при использовании остро сфокусированного электронного зонда реализуется трёхмерная диффузия неравновесных ННЗ (см. [14, 23, 26, 36]). Однако при использовании электронов низких энергий (примерно до 8 кэВ) основная часть энергии рассеивается практически в поверхностном слое мишени и поэтому в этом случае может быть использована двумерная модель (см. [15, 28, 29, 35]). В этом случае математическая модель нестационарной диффузии ННЗ в рассматриваемой задаче (при выключении электронного зонда; см. [15, 28, 29, 35]) описывается при помощи уравнения в частных производных

$$\frac{\partial c(x, y, t)}{\partial t} = D\Delta c(x, y, t) - \frac{c(x, y, t)}{\tau} \quad (1)$$

с начальным условием

$$c(x, y, 0) = n(x, y). \quad (2)$$

Оси прямоугольной декартовой системы координат x и y лежат на плоской поверхности полубесконечного полупроводника, $x, y \in (-\infty, \infty)$; $c(x, y, t)$ — концентрация ННЗ в точке с координатами (x, y) в момент времени t , а постоянные τ и D — время жизни и коэффициент диффузии ННЗ; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа. Функция $n(x, y)$ удовлетворяет стационарному дифференциальному уравнению, описывающему диффузию ННЗ в состоянии квазиравновесия (при включённом электронном зонде, когда число ННЗ, генерируемых и рекомбинирующих в объёме полупроводника в единицу времени, постоянно и равно друг другу; см. [14, 15, 28]):

$$\Delta n(x, y) - \frac{n(x, y)}{\lambda^2} = -\rho(x, y). \quad (3)$$

Граничные условия для уравнения (3) имеют вид:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n(x, y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} n(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} n(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} n(x, y) = 0. \quad (4)$$

Здесь постоянная $\lambda = \sqrt{D\tau}$ — диффузионная длина ННЗ. Отметим, что при моделировании процесса диффузии в правой части уравнения (3) должна находиться функция $\rho(x, y)$, описывающая концентрацию ННЗ, генерированных в полупроводнике в единицу времени, что достигается делением энергии, выделяемой в единице объёма полупроводника в единицу времени, на энергию образования электронно-дырочной пары (см. [3]).

4. Решение задачи с использованием преобразования Ханкеля. Сделаем в задаче (1)–(2) замену

$$c(x, y, t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)v(x, y, t),$$

получим

$$\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} = D\Delta v(x, y, t), \quad (5)$$

$$v(x, y, 0) = n(x, y). \quad (6)$$

К уравнению (5) применим преобразование Ханкеля. Введем обозначения

$$\hat{V}(\eta, t) = \int_0^{+\infty} rV(r, t)J_0(\eta r)dr, \quad V(r, t) = \int_0^{+\infty} \eta \hat{V}(\eta, t)J_0(\eta r)d\eta;$$

здесь $J_0(\eta r)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

В левой части уравнения (5) выражение $V_t(r, t)$ заменяется на $\hat{V}_t(\eta, t)$, а для правой части этого уравнения, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \right) r J_0(\eta r) dr = \\ & = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \right) J_0(\eta r) dr = \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} J_0(\eta r) \right) \Big|_{r=0}^{r=\infty} - \int_0^{+\infty} \eta r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} dr = \\ & = -\eta \int_0^{+\infty} r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} dr = -\eta \left(V(r, t) r \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} \right) \Big|_{r=0}^{r=\infty} + \eta \int_0^{+\infty} V \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \left(r \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} \right) dr = \\ & = \eta \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} r \eta \right) V dr = \int_0^{+\infty} \left(\eta^2 r \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} + \eta \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} \right) V dr. \end{aligned}$$

Для функции Бесселя $J_0(x)$ по определению имеем равенство

$$\eta^2 \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} + \eta^2 J_0(\eta r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^2 r \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} + \eta \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} = -r\eta^2 J_0(\eta r).$$

Значит,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \right) r J_0(\eta r) dr = -\eta^2 \int_0^{+\infty} r V J_0(\eta r) dr = -\eta^2 \hat{V}(\eta, t).$$

Поэтому уравнение (5) переходит в уравнение вида

$$\frac{\partial \hat{V}(\eta, t)}{\partial t} + D\eta^2 \hat{V}(\eta, t) = 0. \quad (7)$$

Решив уравнение (7), получим $\hat{V}(\eta, t) = A(\eta) \exp(-D\eta^2)$, откуда

$$V(r, t) = \int_0^{+\infty} B(\eta) J_0(\eta r) \exp(-D\eta^2) d\eta. \quad (8)$$

Здесь $B(\eta) = \eta A(\eta)$ — произвольная функция. Учитывая начальное условие (6), из (8) имеем

$$\int_0^{+\infty} B(\eta) J_0(\eta r) d\eta = n(r). \quad (9)$$

Применив к (9) обратное преобразование Ханкеля, получим

$$B(\eta) = \int_0^{+\infty} n(\xi) J_0(\eta \xi) \xi d\xi. \quad (10)$$

Подставив (10) в (8) и учитывая, что $B(\eta) = \eta A(\eta)$, находим

$$V(r, t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} n(\xi) J_0(\xi \eta) J_0(\eta r) \exp(-D\eta^2 t) \eta \xi d\eta d\xi. \quad (11)$$

С учётом соотношения

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\rho^2 x^2) J_p(\alpha x) J_p(\alpha x) x dx = \frac{1}{2\rho^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\rho^2}\right) I_p\left(\frac{\alpha\beta}{2\rho^2}\right),$$

где $I_p(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка p (см. [4, 10, 11, 16, 20]), выражение (11) можно переписать в виде

$$V(r, t) = \frac{1}{2Dt} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4Dt}\right) I_0\left(\frac{r\xi}{2Dt}\right) n(\xi) \xi d\xi.$$

Таким образом, решение $c(r, t)$ задачи Коши (1)–(2) имеет вид

$$c(r, t) = \frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{2Dt} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4Dt}\right) I_0\left(\frac{r\xi}{2Dt}\right) n(\xi) \xi d\xi. \quad (12)$$

Отметим, что выражение (12) совпадает с результатами расчёта распределений ННЗ, генерированных остро сфокусированным электронным зондом после диффузии ННЗ в однородном полубесконечном полупроводниковом материале, и полученными для двухмерной модели (см. [34]), а также с результатами сравнения расчётов с использованием формулы (12) с экспериментальными данными.

В цилиндрической системе координат

$$n(r) = A_1 \exp(\sqrt{\sigma}r) + B_1 \exp(-\sqrt{\sigma}r) - \frac{1}{D\sqrt{\sigma}} \int_0^r \rho(\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}(r - \xi)) d\xi, \quad (13)$$

где $\sigma = 1/D\tau$, а числа A_1 и B_1 удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$D_1(A_1\sqrt{\sigma} - B_1\sqrt{\sigma}) = v_{s1}(A_1 - B_1),$$

$$\begin{aligned} v_{s2} \left(A_1\sqrt{\sigma} \exp(\sqrt{\sigma_1}) + B_1\sqrt{\sigma} \exp(\sqrt{-\sigma_1}) - \frac{1}{D\sqrt{\sigma}} I_1 \right) + \\ + D_2 \left(A_1\sqrt{\sigma} \exp(\sqrt{\sigma_1}) - B_1\sqrt{\sigma} \exp(\sqrt{-\sigma_1}) - \frac{1}{D} I_2 \right) = 0, \end{aligned}$$

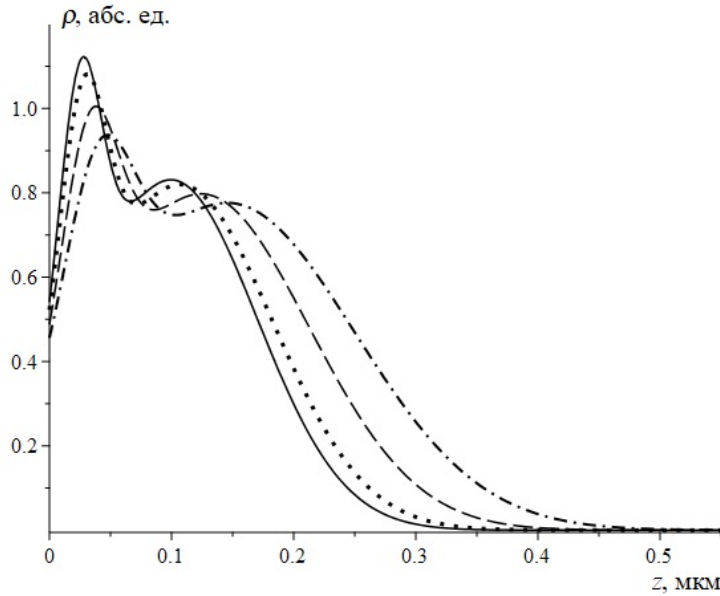


Рис. 1. Распределение плотностей потерь энергии электронами пучка $\rho(z)$ в HgTe (сплошная кривая), $\text{Cd}_{0,2}\text{Hg}_{0,8}\text{Te}$ (кривая, обозначенная точками), $\text{Cd}_{0,6}\text{Hg}_{0,4}\text{Te}$ (пунктирная кривая), CdTe (штрих-пунктирная кривая). Зависимости рассчитаны для энергии электронов $E_0 = 10$ кэВ

где

$$I_1 = \int_0^l \rho(\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}(1 - \xi)) d\xi, \quad I_2 = \int_0^l \rho(\xi) \operatorname{ch}(\sqrt{\sigma}(1 - \xi)) d\xi.$$

Решив последнюю систему уравнений, находим A_1 и B_1 .

Полученное решение (12) задачи Коши (1)–(2) и формула (13) в дальнейшем позволяют устанавливать классы единственности и корректной разрешимости рассматриваемой задачи.

5. О некоторых особенностях использования преобразования Ханкеля для решения задач теплопереноса в многослойной среде с отличающимися параметрами слоёв. С математической точки зрения рассматриваемая задача теплопереноса может быть решена строго аналитически для произвольного числа слоёв многослойной мишени (см. [5,6,9,19,25,30]). В то же время физическая постановка задачи и её реализация представляют определённые трудности, связанные с изменением параметров изначально монохроматического источника возбуждения при прохождении ускоренными электронами слоёв мишени (см. [12,27]).

На рис. 1 представлены результаты расчётов распределений плотностей потерь энергии электронами пучка $\rho(z)$ в HgTe (сплошная кривая) и широко используемых в оптоэлектронике и СВЧ-технике полупроводниковых материалах: монокристаллическом теллуриде кадмия (штрих-пунктирная кривая) и его твёрдых растворах $\text{Cd}_{0,2}\text{Hg}_{0,8}\text{Te}$ (кривая, обозначенная точками) и $\text{Cd}_{0,6}\text{Hg}_{0,4}\text{Te}$ (пунктирная кривая; см. [22]).

Зависимости рис. 1 рассчитаны для энергии электронов $E_0 = 10$ кэВ. Здесь использовано выражение для ρ , наилучшим образом описывающее реальное распределение потерь энергии в однородном материале (см. [13]). Этот рисунок иллюстрирует близость распределений для CdTe и $\text{Cd}_{0,6}\text{Hg}_{0,4}\text{Te}$, что позволяет при моделировании двухслойной структуры $\text{Cd}_{0,6}\text{Hg}_{0,4}\text{Te} - \text{CdTe}$

в правой части дифференциальных уравнений использовать значения ρ , параметры которых отвечают монокристаллическому теллуриду кадмия. Как показывают результаты математического моделирования, в этом и в ряде других случаев для решения практических задач для многослойных структур вполне может быть использован и подход, характерный для однородных мишеней (см. [5, 6, 8, 9, 17, 18, 24, 25, 30]).

6. Заключение. В работе показана возможность использования метода Ханкеля для решения нестационарной задачи тепломассопереноса в полупроводниковой мишени. Изучены некоторые особенности использования такого подхода для решения задач тепломассопереноса в однородной и многослойной средах. Рассмотрение проведено на примере диффузии неосновных носителей заряда, генерированных электронным зондом. Показано, что для решения ряда практических задач для многослойных мишеней с отличающимися параметрами слоёв может быть использован подход, разработанный ранее для задач тепломассопереноса в однородных полупроводниках. Эти результаты могут быть использованы при планировании эксперимента, проведении количественных вычислений и обработки полученных результатов в электроннозондовых технологиях при использовании электронов низких энергий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амрастанов А. Н., Серегина Е. В., Степович М. А.* Оценка нагрева поверхности однородной металлической мишени электронным зондом // Изв. РАН. Сер. физ. — 2019. — 83, № 11. — С. 1455–1460.
2. *Амрастанов А. Н., Серегина Е. В., Степович М. А., Филиппов М. Н.* Оценка нагрева поверхности полупроводниковой мишени низкоэнергетичным электронным зондом // Поверхн. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2018. — № 8. — С. 48–52.
3. *Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г.* Физика полупроводников. — М.: Наука, 1990.
4. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2004.
5. *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А.* О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде // Поверхн. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2017. — № 10. — С. 105–110.
6. *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А.* О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией // Вопр. атом. науки техн. Яд.-реакт. константы. — 2018. — № 3. — С. 158–167.
7. *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А.* О применении матричного метода для математического моделирования процессов теплопереноса // Мат. 20 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 28 января – 1 февраля 2020 г.). — Сарато: Научная книга, 2020. — С. 118–121.
8. *Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А.* Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами // Изв. РАН. Сер. физ. — 2020. — 84, № 7. — С. 1027–1033.
9. *Калманович В. В., Степович М. А.* О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники // Probl. разrab. persp. микро- и наноэлектрон. систем. — 2018. — № 3. — С. 194–201.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974.
11. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их разложения. — М.: Учпедгиз, 1963.
12. *Михеев Н. Н., Петров В. И., Степович М. А.* Энергетический спектр электронов, прошедших плёночную мишень // Изв. РАН. Сер. физ. — 1993. — 57, № 9. — С. 7–11.
13. *Михеев Н. Н., Степович М. А.* Завод. лаб. Диагн. мат. — 1996. — 62, № 4. — С. 20–25.
14. *Поляков А. Н., Степович М. А., Туртин Д. В.* Трёхмерная диффузия экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования // Поверхн. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2015. — № 12. — С. 48–52.

15. Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А. Двумерная диффузия и катодолюминесценция экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования// Поверхн. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2012. — № 11. — С. 35–40.
16. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
17. Серегина Е. В., Калманович В. В., Степович М. А. О моделировании распределений неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком в многослойных планарных полупроводниковых структурах// Поверхн. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2020. — № 7. — С. 93–100.
18. Серегина Е. В., Калманович В. В., Степович М. А. Сравнительный анализ матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда в многослойной планарной полупроводниковой структуре// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2019. — 172. — С. 108–116.
19. Степович М. А., Калманович В. В., Серегина Е. В. О возможности приложения матричного метода к моделированию катодолюминесценции, обусловленной широким электронным пучком в планарной многослойной полупроводниковой структуре// Изв. РАН. Сер. физ. — 2020. — 84, № 5. — С. 700–703.
20. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.
21. Туртин Д. В., Серегина Е. В., Степович М. А. Качественный анализ одного класса дифференциальных уравнений теплопереноса в конденсированном веществе// Пробл. мат. анал. — 2020. — № 104. — С. 149–156.
22. Филачев А. М., Таубкин И. И., Трищенко М. А. Твердотельная фотоэлектроника. Фотодиоды. — М.: Физматкнига, 2011.
23. Everhart T. E. Kilovolt electron energy dissipation in solids// J. Appl. Phys. — 1960. — 31, № 10. — P. 1483–1492.
24. Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. Comparison of analytical and numerical modeling of distributions of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide beam of medium-energy electrons in a two-layer semiconductor structure// J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — 1479. — 012116.
25. Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. On the possibility of a numerical solution of the heat and mass transfer problem with the combined matrix and generalized powers of Bers method// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1163. — 012012.
26. Kanaya K., Okayama S. Penetration and energy-loss theory of electrons in solid targets// J. Phys. D. — 1972. — 5, № 1. — P. 43–58.
27. Mikheev N. N., Stepovich M. A. The energy spectrum of electrons passing through film targets and some of its applications to electron beam engineering// Mat. Sci. Eng. B. — 1995. — 32, № 1-4. — P. 1–16.
28. Noltemeyer M., Bertram F., Hempel T., Bastek B., Polyakov A., Christen J., Brandt M., Lorenz M., Grundmann M. Excitonic transport in ZnO// J. Mater. Research. — 2012. — 27, № 17. — P. 2225–2231.
29. Polyakov A. N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material// Lobachevskii J. Math. — 2018. — 39, № 2. — P. 259–262.
30. Seregina E. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V. Modeling of heating in the epitaxial structure $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}/\text{CdTe}$ with the projection least squares method// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1163. — 012013.
31. Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Seregina E. V., Filippov M. N. Assessment of the heating of conductive targets with an electron beam. Results of computational experiment// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1203. — 012042.
32. Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Seregina E. V., Filippov M. N. Mathematical modelling of heating of homogeneous metal targets with a focused electron beam// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1163. — 012014.
33. Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Seregina E. V., Filippov M. N. On one peculiarity of the model describing the interaction of the electron beam with the semiconductor surface// J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — 955. — 012040.
34. Stepovich M. A., Turtin D. V., Seregina E. V., Kalmanovich V. V. On the correctness of mathematical models of time-of-flight cathodoluminescence of direct-gap semiconductors// ITM Web Conf. — 2019. — 30. — 07014.

35. *Stepovich M. A., Turtin D. V., Seregina E. V., Polyakov A. N.* On the qualitative characteristics of a two-dimensional mathematical model of diffusion of minority charge carriers generated by a low-energy electron beam in a homogeneous semiconductor material// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2019. — 1203. — 012095.
36. *Wittry D. B., Kyser D. F.* Measurements of diffusion lengths in direct-gap semiconductors by electron beam excitation// *J. Appl. Phys.* — 1967. — 38. — P. 375–382.

Туртин Дмитрий Витальевич

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Ивановский филиал

E-mail: turtin@mail.ru

Степович Михаил Адольфович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: m.stepovich@rambler.ru

Калманович Вероника Валерьевна

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: v572264@yandex.ru

Серегина Елена Владимировна

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

(национальный исследовательский университет), Калужский филиал

E-mail: evfs@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 74–84
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-74-84

УДК 517.929.7

О ПРИНЦИПЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ И МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2022 г. М. И. КАМЕНСКИЙ, Г. Г. ПЕТРОСЯН

Аннотация. В статье рассматривается задача Коши для класса полулинейных дифференциальных включений с дробной производной Капуто порядка $q \in (0, 1)$, малым параметром и отклоняющимся аргументом в сепарабельном банаховом пространстве. Предполагается, что линейная часть включения порождает C_0 -полугруппу. В пространстве непрерывных функций построен многозначный интегральный оператор, неподвижные точки которого представляют собой решения. Анализ зависимости этого оператора от параметра позволяет установить аналог принципа усреднения. В работе использованы методы теории дробного математического анализа и теории топологической степени для уплотняющих многозначных отображений.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальное включение, дробная производная, малый параметр, отклоняющийся аргумент, мера некомпактности, уплотняющий мультиоператор.

ON THE AVERAGING PRINCIPLE FOR SEMILINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS IN A BANACH SPACE WITH A DEVIATING ARGUMENT AND A SMALL PARAMETER

© 2022 M. I. KAMENSKII, G. G. PETROSYAN

ABSTRACT. In this paper, we consider the Cauchy problem for a class of semilinear differential inclusions in a separable Banach space involving a fractional Caputo derivative of order $q \in (0, 1)$, a small parameter, and a deviant argument. We assume that the linear part of the inclusion generates a C_0 -semigroup. In the space of continuous functions, we construct a multivalued integral operator whose fixed points are solutions. An analysis of the dependence of this operator on a parameter allows one to establish an analog of the averaging principle. We apply methods of the theory of fractional analysis and the theory of topological degree for condensing set-valued mappings.

Keywords and phrases: Cauchy problem, differential inclusion, fractional derivative, small parameter, deviant argument, measure of noncompactness, condensing multioperator.

AMS Subject Classification: 34Kxx, 47Hxx

1. Введение. В последние годы большой интерес к теории дробного анализа и дифференциальных уравнений дробного порядка значительно усилился. В первую очередь это происходит благодаря приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см., например, [8, 19, 20, 22, 23, 25] и др.). В настоящее время данное

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 19-31-60011, № 20-51-15003 НЦНИ_а).

направление занимает довольно широкое место в современной математике, исследования в ней проводят ученые со всего мира (см. [5, 6, 12–15, 17, 24]). В то же время в классической теории дифференциальных уравнений и включений важное место занимает класс уравнений и включений с отклоняющимся аргументом. Этот факт не мог не отразиться и в теории дифференциальных уравнений и включений дробного порядка. В данный момент происходит активное исследование дифференциальных уравнений и включений дробного порядка с отклоняющимся аргументом (см. [1, 3, 4, 16, 18]). К этому кругу исследований примыкает и наша задача.

В настоящей работе рассматривается следующая задача Коши для полулинейного дифференциального включения с отклоняющимся аргументом в сепарабельном банаховом пространстве E :

$${}^C D^q x(t) \in Ax(t) + F\left(\frac{t}{\epsilon}, x(t), x(t-h)\right), \quad t \in [0, a], \quad (1)$$

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0], \quad (2)$$

где ${}^C D^q$ — дробная производная Капуто порядка $q \in (0, 1)$, $\epsilon > 0$ — малый параметр, $\varphi \in C([-h, 0]; E)$ — заданная функция, $A: D(A) \subseteq E \rightarrow E$ — линейный замкнутый (не обязательно ограниченный) оператор, порождающий C_0 -полугруппу, $F: \mathbb{R} \times E \times E \rightarrow E$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями.

Для указанной задачи построим многозначный интегральный оператор в пространстве непрерывных функций, неподвижные точки которого дают решения. Далее, анализируя зависимость этого оператора от параметра ϵ , установим аналог принципа усреднения. В работе используются методы теории дробного математического анализа и теории топологической степени для уплотняющих многозначных отображений (см. [2, 9–11, 21]).

2. Предварительные сведения.

2.1. Дробный интеграл и дробная производная. Приведем вначале определения дробного интеграла и дробной производной Капуто (см., например, [19, 22]).

Определение 1. Дробным интегралом порядка $\alpha \in (0, 1)$ от функции $g \in L^1([0, a]; E)$ называется функция

$$I^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Определение 2. Дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (N-1, N]$ от функции $g \in C^N([0, a]; E)$ называется функция

$${}^C D^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{N-\alpha-1} g^{(N)}(s) ds.$$

2.2. Многозначные отображения. Пусть \mathcal{E} — банахово пространство. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}) &= \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \emptyset\}, & Pb(\mathcal{E}) &= \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ ограничено}\}, \\ Pv(\mathcal{E}) &= \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ выпукло}\}; & K(\mathcal{E}) &= \{A \in Pb(\mathcal{E}) : A \text{ компактно}\}; \\ & & Kv(\mathcal{E}) &= Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Определение 3 (см. [11, 21]). Пусть (\mathcal{A}, \geq) — некоторое частично упорядоченное множество. Функция $\beta: P(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности в \mathcal{E} , если для любого $\Omega \in P(\mathcal{E})$ выполняется условие $\beta(\overline{\text{co}} \Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\text{co}} \Omega$ — замыкание выпуклой оболочки Ω .

Мера некомпактности β называется

- (i) *монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$ включение $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ влечет неравенство $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;
- (ii) *несингулярной*, если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется равенство $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если \mathcal{A} конус в банаховом пространстве, то мера некомпактности β называется

- (iii) *правильной*, если равенство $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$;
- (iv) *вещественной*, если \mathcal{A} — подмножество действительных чисел \mathbb{R} с естественным порядком;
- (v) *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$.

Примером вещественной меры некомпактности, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является мера некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{ при которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\}.$$

Определение 4 (см. [11, 21]). Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F}: X \rightarrow P(\mathcal{E})$ называется

- (i) *полу непрерывным сверху (п.н.с.)*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$;
- (ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times \mathcal{E}$;
- (iii) *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ — относительно компактно в \mathcal{E} ;
- (iv) *квазикompактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Нам понадобятся в дальнейшем следующее утверждение (см. [11, 21]).

Лемма 1. Пусть X и Y — метрические пространства и $\mathcal{F}: X \rightarrow K(Y)$ — замкнутое квазикompактное мультиотображение. Тогда \mathcal{F} полунепрерывно снизу.

Определение 5. Мультиотображение $\mathcal{F}: X \subseteq \mathcal{E} \rightarrow K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности β (β -уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, имеем $\beta(\mathcal{F}(\Omega)) \not\leq \beta(\Omega)$.

Справедливы следующие теоремы о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений (см. [11, 21]).

Теорема 1. Пусть M — выпуклое ограниченное замкнутое подмножество банахова пространства \mathcal{E} и $\mathcal{F}: M \rightarrow Kv(M)$ — β -уплотняющее мультиотображение, где β — несингулярная мера некомпактности в \mathcal{E} . Тогда множество неподвижных точек $\text{Fix } \mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ непусто.

Теорема 2. Пусть X — ограниченное замкнутое подмножество банахова пространства \mathcal{E} , β — монотонная мера некомпактности в \mathcal{E} и $\mathcal{F}: X \rightarrow K(\mathcal{E})$ — замкнутое мультиотображение, которое является β -уплотняющим на каждом ограниченном множестве. Если множество неподвижных точек $\text{Fix } \mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ ограничено, то оно компактно.

Определение 6. Пусть Λ — метрическое пространство параметров. Семейство мультиотображений $G: \Lambda \times X \subseteq \mathcal{E} \rightarrow K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности β (β -уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, имеем $\beta(G(\Lambda \times \Omega)) \not\leq \beta(\Omega)$.

Теорема 3. Пусть X — ограниченное замкнутое подмножество в пространстве \mathcal{E} , β — монотонная мера некомпактности в \mathcal{E} , Λ — метрическое пространство и $G: \Lambda \times X \rightarrow K(\mathcal{E})$ — такое β -уплотняющее семейство замкнутых мультиоператоров, что множество неподвижных точек $\text{Fix } G(\lambda, \cdot) := \{x \in X : x \in G(\lambda, x)\}$ непусто для каждого $\lambda \in \Lambda$. Тогда мультиотображение $\mathcal{F}: \Lambda \rightarrow P(\mathcal{E})$, где $\mathcal{F}(\lambda) = \text{Fix } G(\lambda, \cdot)$, полунепрерывно снизу.

2.3. *Измеримые мультифункции.* Напомним некоторые понятия (см. [11, 21]). Пусть \mathcal{E} — банахово пространство.

Определение 7. Мультифункция $G: [0, a] \rightarrow K(\mathcal{E})$, для $p \geq 1$, называется

- (i) *L^p -интегрируемой*, если она допускает L^p -интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует такая функция $g \in L^p([0, a]; \mathcal{E})$, что $g(t) \in G(t)$ для почти всех $t \in [0, a]$;
- (ii) *L^p -интегрально ограниченной*, если существует такая функция $\xi \in L^p([0, a])$, что

$$\|G(t)\| := \sup \left\{ \|g(t)\|_{\mathcal{E}} : g(t) \in G(t) \right\} \leq \xi(t)$$

для почти всех $t \in [0, a]$.

Множество всех L^p -интегрируемых сечений мультифункции $G: [0, a] \rightarrow K(\mathcal{E})$ обозначается \mathcal{S}_G^p .

Определение 8. Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0, a]; \mathcal{E})$ называется L^p -полукомпактной, если она L^p -интегрально ограничена, т.е.

$$\|\xi_n(t)\|_{\mathcal{E}} \leq v(t) \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots \text{ и почти всех } t \in [0, a],$$

где $v \in L^p([0, a])$, а множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в \mathcal{E} для почти всех $t \in [0, a]$.

Если G сильно измерима и L^p -интегрально ограничена, то она L^p -интегрируема. Для L^p -интегрируемой мультифункции G определен многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s) ds := \left\{ \int_0^t g(s) ds : g \in \mathcal{S}_G^p \right\}$$

для любого $t \in [0, a]$.

Лемма 2 (см. [11, теорема 4.2.3]). Пусть \mathcal{E} — сепарабельное банахово пространство. Пусть $G: [0, a] \rightarrow P(\mathcal{E})$ — такая L^p -интегрируемая и L^p -интегрально ограниченная мультифункция, что $\chi(G(t)) \leq q(t)$ для почти всех $t \in [0, a]$, где $q \in L_+^p([0, a])$. Тогда

$$\chi \left(\int_0^t G(s) ds \right) \leq \int_0^t q(s) ds$$

для всех $t \in [0, a]$. В частности, если мультифункция $G: [0, a] \rightarrow K(\mathcal{E})$ измерима и L^p -интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причем

$$\chi \left(\int_0^t G(s) ds \right) \leq \int_0^t \chi(G(s)) ds$$

для всех $t \in [0, a]$.

Лемма 3 (см. [11, теорема 4.2.1]). Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^1([0, a]; \mathcal{E})$ для всех $n = 1, 2, \dots$ и почти всех $t \in [0, a]$, является L^1 -интегрально ограниченной. Предположим, что $\chi(\{\xi_n\}) \leq \alpha(t)$ для почти всех $t \in [0, a]$, где $\alpha \in L_+^1([0, a])$. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют такие компактное множество $K_\delta \subset \mathcal{E}$, множество $m_\delta \subset [0, a]$ с лебеговой мерой $m_\delta < \delta$ и множество функций $G_\delta \subset L^1([0, a]; \mathcal{E})$ со значениями в K_δ , что для каждого $n \geq 1$ существует функция $b_n \in G_\delta$, для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_{\mathcal{E}} \leq 2\alpha(t) + \delta, \quad t \in [0, a] \setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ , и эта последовательность слабо компактна.

3. Вспомогательные результаты. В [3] была рассмотрена задача Коши для полулинейного дифференциального включения дробного порядка в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида:

$${}^C D^q x(t) \in Ax(t) + \tilde{F}(t, x_t), \quad t \in [0, a], \quad (3)$$

$$x(s) + g(x)(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0], \quad (4)$$

где ${}^C D^q$, $0 < q < 1$, — дробная производная Капуто, $\tilde{F}: [0, a] \times C([-h, 0]; E) \rightarrow Kv(E)$ — мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями, $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ — линейный замкнутый оператор в E (не обязательно ограниченный), $g: C([-h, a]; E) \rightarrow C([-h, 0]; E)$ — нелинейное отображение, x_t предыстория функции до момента $t \in [0, a]$, т.е. $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, и функция $\varphi \in C([-h, 0]; E)$.

Данная задача рассматривалась при следующих предположениях:

- (A) $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ — линейный замкнутый оператор в E , порождающий C_0 -полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, обозначим $M = \sup\{\|T(t)\|; t \in [0, a]\}$;
 (\tilde{F}_1) для каждого $\xi \in C([-h, 0]; E)$ мультифункция $\tilde{F}(\cdot, \xi): [0, a] \rightarrow Kv(E)$ допускает измеримое сечение;
 (\tilde{F}_2) для почти всех $t \in [0, a]$ мультиотображение $\tilde{F}(t, \cdot): C([-h, 0]; E) \rightarrow Kv(E)$ полунепрерывно сверху;
 (\tilde{F}_3) существует такая функция $\alpha \in L_+^\infty([0, a])$, что

$$\|\tilde{F}(t, \xi)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|\xi\|_{C([-h, 0]; E)}) \text{ для почти всех } t \in [0, a];$$

- (\tilde{F}_4) найдется такая функция $\mu \in L^\infty([0, a])$, что для любого ограниченного множества $Q \subset C([-h, 0]; E)$ имеем $\chi(\tilde{F}(t, Q)) \leq \mu(t)\psi(Q)$ для почти всех $t \in [0, a]$, где χ — мера некомпактности Хаусдорфа в E , $\psi(Q) = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} \chi(Q(\theta))$, $Q(\theta) = \{y(\theta), y \in Q\}$, $\theta \in [-h, 0]$;

(g_1) $g: C([-h, a]; E) \rightarrow C([-h, 0]; E)$ — вполне непрерывное отображение;

(g_2) существует такая константа $K > 0$, что $\|g(x)\|_{C([-h, 0]; E)} \leq K$.

Определение 9. Интегральным решением задачи Коши (3)–(4) на промежутке $[-h, a]$ называется функция $x \in C([-h, a]; E)$:

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(x)(t), & t \in [-h, 0], \\ \mathcal{G}(t)(\varphi(0) - g(x)(0)) + \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s)\phi(s)ds, & t \in [0, a], \end{cases}$$

где

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta, \quad \mathcal{T}(t) = q \int_0^\infty \theta \xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta, \quad \xi_q(\theta) = \frac{1}{q}\theta^{-1-1/q}\Psi_q(\theta^{-1/q}),$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \theta^{-qn-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q), \quad \theta \in \mathbb{R}^+, \quad \phi \in \mathcal{P}_F^\infty(x).$$

Замечание 1. Имеют место соотношения

$$\xi_q(\theta) \geq 0, \quad \int_0^\infty \xi_q(\theta)d\theta = 1, \quad \int_0^\infty \theta \xi_q(\theta)d\theta = \frac{1}{\Gamma(q+1)}.$$

Лемма 4 (см. [26]). *Операторы \mathcal{G} и \mathcal{T} обладают следующими свойствами:*

- (i) для любого $t \in [0, a]$ операторы $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ являются линейными и ограниченными; более того,

$$\|\mathcal{G}(t)x\|_E \leq M\|x\|_E, \quad \|\mathcal{T}(t)x\|_E \leq \frac{qM}{\Gamma(1+q)}\|x\|_E;$$

- (ii) операторы $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ сильно непрерывны для всех $t \in [0, a]$.

При решении задачи (3)–(4) конструируется следующая схема. Для $x \in C([-h, a]; E)$ вводится в рассмотрение мультифункция

$$\Phi_F: [-h, a] \rightarrow Kv(E), \quad \Phi_F(t) = F(t, x_t).$$

Ясно, что функция $t \in [0, a] \rightarrow x_t$ непрерывна. Тогда мультифункция Φ_F является L^p -интегрируемой для любого $p \geq 1$ (см. [21]).

Пусть $\mathcal{P}_F^p: C([-h, a]; E) \rightarrow L^p([0, a]; E)$ — суперпозиционное мультиотображение, заданное формулой $\mathcal{P}_F^p(x) = \mathcal{S}_{\Phi_F}^p$. Для решения задачи (3)–(4) использовалось суперпозиционное мультиотображение

$$\mathcal{P}_F^\infty: C([-h, a]; E) \rightarrow L^\infty([0, a]; E),$$

заданное формулой $\mathcal{P}_F^\infty(x) = \mathcal{S}_{\Phi_F}^\infty$, и отображение

$$S: L^\infty([0, a]; E) \rightarrow C([0, a]; E), \quad S(\phi)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s)\phi(s)ds,$$

для которого справедливо следующее утверждение.

Лемма 5 (см. [12]). *Для каждого компактного множества $K \subset E$ и такой ограниченной последовательности $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0, T]; E)$, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для почти всех $t \in [0, T]$, слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0, T]; E)$ влечет сходимость $S(\eta_n) \rightarrow S(\eta_0)$ в $C([0, T]; E)$.*

Затем задача сводилась к доказательству существования неподвижных точек мультиотображения $\Gamma: C([-h, a]; E) \rightarrow C([-h, a]; E)$, заданного следующим образом:

$$\Gamma(x) = j(x) + S \circ \mathcal{P}_F^\infty(x), \quad j(x)(t) = \begin{cases} \varphi(t) - g(x)(t), & t \in [-h, 0], \\ \mathcal{G}(t)(\varphi(0) - g(x)(0)), & t \in [0, a]. \end{cases}$$

В итоге было доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *При выполнении условий (A), (\tilde{F}_1) – (\tilde{F}_4) , (g_1) – (g_2) множество решений задачи (3)–(4) на $[-h, a]$ непусто и компактно.*

4. Принцип усреднения. Рассмотрим сначала задачу Коши для включения

$${}^C D^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t), x(t-h)), \quad t \in [0, a], \quad (5)$$

с начальным условием (2), полагая, что $\varphi \in C([-h, 0]; E)$, оператор $A: D(A) \subseteq E \rightarrow E$ удовлетворяет условию (A), мультиотображение $F: [0, a] \times E \times E \rightarrow Kv(E)$ подчинено следующим условиям:

(F₁) для всех $(\xi, \eta) \in E \times E$ мультифункция $F(\cdot, \xi, \eta): [0, a] \rightarrow Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

(F₂) для почти всех $t \in [0, a]$ мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot): E \times E \rightarrow Kv(E)$ полунепрерывно сверху;

(F₃) существует такая функция $\alpha \in L_+^\infty([0, a])$, что

$$\|F(t, \xi, \eta)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|\xi\|_E + \|\eta\|_E) \quad \text{для почти всех } t \in [0, T];$$

(F₄) существует такая константа $k > 0$, что для любых ограниченных множеств $\Omega, \Delta \subset E$ справедливо неравенство

$$\chi(F([0, T] \times \Omega \times \Delta)) \leq k(\chi(\Omega) + \chi(\Delta)).$$

Из (F₄) следует, что мультиоператор F преобразует ограниченные множества в ограниченные.

Очевидно, что последняя задача (5), (2), если считать, что $F(t, x(t), x(t-h)) = \tilde{F}(t, \varphi(0), \varphi(-h))$ и $g(x)(\cdot) = 0$, является частным случаем задачи Коши (3)–(4), поэтому при выполнении условий (A), (F₁)–(F₄) множество ее интегральных решений непусто и компактно в пространстве $C([-h, a]; E)$.

Рассмотрим теперь задачу Коши (1)–(2). Будем полагать, что линейный оператор $A: D(A) \subseteq E \rightarrow E$ удовлетворяет условию (A), а мультиоператор $F: \mathbb{R} \times E \times E \rightarrow Kv(E)$ удовлетворяет условиям (F₁)–(F₄), а также следующему условию:

(F_T) мультиотображение F является T -периодическим по первому аргументу, т.е. существует такое $T > 0$, что

$$F(t + T, \xi, \eta) = F(t, \xi, \eta)$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ и для каждой пары $(\xi, \eta) \in E \times E$.

Ясно, что из последнего условия следует существование T -периодических измеримых селекторов для мультифункции $F(\cdot, \xi, \eta)$, для всех $(\xi, \eta) \in E \times E$.

Заметим, что в силу условия (F_3) множество решений задачи (1)–(2) ограничено на отрезке $[-h, a]$, равномерно по ϵ .

Параллельно с включением (1) введем в рассмотрение усредненное включение:

$$D^q x(t) \in Ax(t) + F_0(x(t), x(t-h)), \quad (6)$$

с начальным условием (2), где

$$F_0(\xi, \eta) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, \xi, \eta) ds.$$

Аналогично тому, как это сделано в [11], можно доказать следующий факт.

Лемма 6. *Мультиоператор $F_0: E \times E \rightarrow Kv(E)$ полунепрерывен снизу.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{(\xi_n, \eta_n)\}_{n=1}^\infty \subset E \times E$ такова, что $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (\xi_0, \eta_0)$. Возьмем произвольное $z_n \in F_0(\xi_n, \eta_n)$, $n \geq 1$; тогда существует такое сечение $f_n \in \mathcal{P}_F^\infty(\bar{\xi}_n, \bar{\eta}_n)$, где $\bar{\xi}_n \equiv \xi_n$, $\bar{\eta}_n \equiv \eta_n$, что

$$z_n = \frac{1}{T} \int_0^T f_n(s) ds, \quad n \geq 1.$$

Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является L^1 -полукомпактной, поэтому благодаря лемме 3 можем без ограничения общности считать, что $f_n \rightarrow f_0 \in \mathcal{P}_F^\infty(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0)$, где $\bar{\xi}_0 \equiv \xi_0$, $\bar{\eta}_0 \equiv \eta_0$.

Заметим, что если в определении оператора S взять $q = 1$ и считать оператор $A = 0$, то в силу леммы 5 получаем, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_n(s) ds \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T f_0(s) ds,$$

т.е. $z_n \rightarrow z_0 \in F_0(\xi_0, \eta_0)$, что и требовалось доказать. \square

Для любых ограниченных множеств $\Omega, \Delta \subset E$ справедлива оценка

$$\chi(F_0(\Omega, \Delta)) \leq k(\chi(\Omega) + \chi(\Delta)), \quad (7)$$

где k — константа из условия (F_4) . Действительно, для любых $\xi \in \Omega$, $\eta \in \Delta$ и $f \in \mathcal{P}_F^\infty(\xi, \eta)$ получаем, что $f(t) \in F([0, T] \times \Omega \times \Delta)$ для почти всех $t \in [0, T]$. Поэтому

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds \in \overline{\text{co}} F([0, T] \times \Omega \times \Delta);$$

более того, $F_0(\Omega \times \Delta) \subset \overline{\text{co}} F([0, T] \times \Omega \times \Delta)$, поэтому благодаря определению меры некомпактности и условию (F_4) получаем (7).

Введем в пространстве $C([0, a]; E)$ векторную меру некомпактности со значениями в конусе \mathbb{R}_+^2 :

$$\nu: P(C([0, a]; E)) \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad \nu(\Omega) = (\psi(\Omega), \text{mod}_C(\Omega));$$

здесь первая компонента — это модуль послыонной некомпактности

$$\psi(\Omega) = \sup_{t \in [0, a]} e^{-pt} \chi(\Omega(t)),$$

и константа $p > 0$ выбрана так, что для положительного d , удовлетворяющего неравенству

$$\frac{2qM\|\mu\|_\infty}{\Gamma(1+q)} \frac{d^q}{q} < \frac{1}{4}, \quad (8)$$

выполняется следующая оценка:

$$\frac{2qM\|\mu\|_\infty}{\Gamma(1+q)} \frac{1}{pd^{1-q}} < \frac{1}{4}. \quad (9)$$

Вторая компонента введенной меры некомпактности ν есть модуль равностепенной непрерывности:

$$\text{mod}_C(\Omega) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \max_{x \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \|x(t_1) - x(t_2)\|.$$

Рассмотрим выпуклое замкнутое множество

$$\mathcal{D} = \{x \in C([0, a]; E), x(0) = \varphi(0)\} \subset C([0, a]; E);$$

для функции $x \in \mathcal{D}$ определим

$$x[\varphi](t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h, 0], \\ x(t), & t \in [0, a]. \end{cases}$$

Теперь можно ввести в рассмотрение суперпозиционный мультиоператор

$$\mathcal{P}_{F_\epsilon}^\infty : \mathcal{D} \rightarrow P(L^\infty([0, a]; E)),$$

$$\mathcal{P}_{F_\epsilon}^\infty(x) = \left\{ \phi \in L^\infty([0, a]; E) : \phi(t) \in F\left(\frac{t}{\epsilon}, x(t), x[\varphi](t-h)\right) \text{ для почти всех } t \in [0, a] \right\}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующий многозначный аналог леммы Красносельского—Крейна для банахова пространства \mathcal{E} (см. [11]). Чтобы записать ее в удобной форме для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset C([0, a]; \mathcal{E})$, обладающей свойством $x_n \xrightarrow{C} x^0$, положим

$$\mathcal{F}_n(s) = F\left(\frac{s}{\epsilon_n}, x_n(s), x_n(s-h)\right), \quad \mathcal{F}_0(s) = F_0(x^0(s), x^0(s-h)),$$

для почти всех $s \in [0, a]$.

Лемма 7. Пусть мультиоператор F удовлетворяет условиям (F_1) , (F_2) , (F_4) , (F_T) , последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset C([0, a]; \mathcal{E})$ и $f_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}_n}^1$. Предположим, что $\epsilon_n \rightarrow 0$, $x_n \xrightarrow{C} x^0$ и $f_n \xrightarrow{L^1} f^0$. Тогда $f^0 \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}^1$.

В частности, отметим, что в последней лемме в качестве пространства \mathcal{E} может быть использовано $E \times E$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $F_\epsilon(t, x, y) = F(t/\epsilon, x, y)$; для $\epsilon > 0$ будем обозначать символом $\Sigma_\varphi^{F_\epsilon}$ множество решений задачи Коши (1)–(2), а через $\Sigma_\varphi^{F_0}$ — множество решений задачи Коши для усредненного включения (6) с начальным условием (2). Также будем обозначать r -раздутье множества через W_r .

Теорема 5. Предположим, что мультиоператор F удовлетворяет условиям (F_1) – (F_4) и (F_T) . Тогда для каждого $r > 0$ существует такое $\epsilon_0 > 0$, что

$$\Sigma_\varphi^{F_\epsilon}[0, a] \subset W_r(\Sigma_\varphi^{F_0}[0, a]) \quad \text{для почти всех } \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

Доказательство. Рассмотрим семейство мультиоператоров $G : [0, 1] \times \mathcal{D} \rightarrow Kv(\mathcal{D})$:

$$G(\epsilon, x) = \left\{ z : z(t) = \mathcal{G}(t)\varphi(0) + \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s)\phi_\epsilon(s)ds, \phi_\epsilon \in \mathcal{P}_{F_\epsilon}^\infty(x) \right\}.$$

Вначале покажем, что G полунепрерывно сверху в каждой точке $(0, x)$. Для этого возьмем такие последовательности $\{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset [0, 1]$, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}$, что $\epsilon_n \rightarrow 0$, $x_n \rightarrow x$. Тогда для каждой последовательности $\phi_n \in \mathcal{P}_{F_{\epsilon_n}}^\infty(x_n)$, $n \geq 1$, для почти всех $t \in [0, a]$ множество $\{\phi_n(t)\}_{n=1}^\infty$ по

условию (F_4) , лежит в относительно компактном множестве $F([0, T] \times \{x_n(t)\}_{n=1}^\infty \times \{y_n(t)\}_{n=1}^\infty)$, где $y_n(t) = x_n(t - h)$, поэтому последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ является L^1 -полукомпактной. В силу критерия Дистеля (см. [7]) можем предположить без ограничения общности, что $\phi_n \xrightarrow{L^1} \phi^0$. По лемме 7 получаем, что $\phi^0 \in \mathcal{P}_{F_0}^1$, но последовательность ϕ_n ограничена, поэтому $\phi^0 \in \mathcal{P}_{F_0}^\infty$. Теперь остается использовать условие леммы 5.

Докажем, что мультиоператор G — уплотняющий относительно меры некомпактности ν . Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ — непустое ограниченное множество и

$$\nu(G([0, 1] \times \Omega)) \geq \nu(\Omega). \quad (10)$$

Покажем, что Ω — относительно компактное множество.

Очевидно, достаточно доказать последнее утверждение для мультиотображения $S \circ \mathcal{P}_{F_\epsilon}^\infty$.

Из оценки (10) вытекают неравенства

$$\psi(S \circ \mathcal{P}_{F_\epsilon}^\infty(\Omega)) \geq \psi(\Omega), \quad \text{mod}_C(S \circ \mathcal{P}_{F_\epsilon}^\infty(\Omega)) \geq \text{mod}_C(\Omega). \quad (11)$$

Применяя условие регулярности (F_4) , имеем

$$\begin{aligned} \chi\left(\left\{\phi_\epsilon(s) : \phi_\epsilon \in \mathcal{P}_{F_\epsilon}^\infty(\Omega)\right\}\right) &\leq \chi\left(F\left([0, T] \times \{x(s)\} \times \{y(s) = x(s - h)\} : x \in \Omega\right)\right) \leq \\ &\leq k\left(\chi(\{x(s)\} : x \in \Omega) + \chi(\{x[\varphi](s - h)\} : x \in \Omega)\right) = \\ &= e^{ps}k\left(e^{-ps}\chi(\{x(s)\} : x \in \Omega) + e^{-ps}\chi(\{x[\varphi](s - h)\} : x \in \Omega)\right) \leq 2e^{ps}k\psi(\Omega). \end{aligned}$$

Используя лемму 4 и последнее неравенство, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} e^{-pt}\chi\left(S \circ \mathcal{P}_{F_\epsilon}^\infty(\Omega(t))\right) &\leq e^{-pt}\frac{qMk}{\Gamma(1+q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}2e^{ps}\psi(\Omega)ds \leq \\ &\leq \frac{2qMk}{\Gamma(1+q)}\psi(\Omega)\left(e^{-pt}\int_0^{t-d}(t-s)^{q-1}e^{ps}ds + e^{-pt}\int_{t-d}^t(t-s)^{q-1}e^{ps}ds\right) \leq \\ &\leq \frac{2qMk}{\Gamma(1+q)}\psi(\Omega)\left(e^{-pt}\frac{1}{d^{1-q}}\frac{e^{p(t-d)}-1}{p} + \frac{d^q}{q}\right) \leq \frac{2qMk}{\Gamma(1+q)}\psi(\Omega)\left(\frac{1}{d^{1-q}}\frac{e^{-pd}}{p} + \frac{d^q}{q}\right) \leq \\ &\leq \frac{2qMk}{\Gamma(1+q)}\psi(\Omega)\left(\frac{1}{pd^{1-q}} + \frac{d^q}{q}\right). \end{aligned}$$

Теперь, используя неравенства (8) и (9), для последней оценки имеем

$$\sup_{t \in [0, a]} e^{-pt}\chi\left(S \circ \mathcal{P}_{F_\epsilon}^\infty(\Omega)\right) \leq \frac{1}{2}\psi(\Omega), \quad \psi\left(S \circ \mathcal{P}_{F_\epsilon}^\infty(\Omega)\right) \leq \frac{1}{2}\psi(\Omega).$$

Учитывая первое неравенство из (11) вместе с последним, получаем

$$\psi(\Omega) \leq \frac{1}{2}\psi(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \psi(\Omega) = 0;$$

более того,

$$\chi(\Omega(t)) = 0 \quad \text{для всех } t \in [0, a]. \quad (12)$$

Перейдем теперь к оценке модуля равностепенной непрерывности. Возьмем последовательности $\{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset [0, 1]$, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega$. Ограниченность мультиоператора F на ограниченных множествах влечет за собой ограниченность множества $\{f_n : f_n \in \mathcal{P}_{F_\epsilon_n}^\infty(x_n)\}_{n=1}^\infty$. Из условий (F_4) и (12) следует, что множество $F([0, T] \times \{x_n(t)\}_{n=1}^\infty \times \{x_n(t - h)\}_{n=1}^\infty)$ относительно компактно, поэтому множество $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ также относительно компактно для почти всех $t \in [0, a]$. Следовательно, множество $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ слабо компактно в $L^1([0, a]; E)$. Из (12) следует в силу леммы 3, что для каждого $\delta > 0$ существуют компактное множество $K_\delta \subset E$, множество $m_\delta \subseteq [0, a]$ с лебеговой мерой $\text{mes}(m_\delta) < \delta$ и такое множество функций $\Xi_\delta \subset L^1([0, a]; E)$ со значениями в K_δ , что для каждого

$n \geq 1$ существует функция $b_n \in \Xi_\delta$, для которой $\|f_n(t) - b_n(t)\|_E \leq \delta$ для всех $t \in [0, a] \setminus m_\delta$. В силу последних рассуждений и леммы 5 получаем, что множество

$$\left\{ \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) f_n(s) ds : f_n(s) \in \mathcal{P}_{F_{\epsilon_n}}^\infty(\Omega) \right\}_{n=1}^\infty$$

относительно компактно в $C([0, a]; E)$. Используя второе неравенство из (11), имеем

$$\text{mod}_C(\Omega) \leq \text{mod}_C(S([0, T] \times \Omega)) = \text{mod}_C\left(\left\{ S f_n \mid f_n(s) \in \mathcal{P}_{F_{\epsilon_n}}^\infty(\Omega) \right\}\right) = 0,$$

где

$$S f_n(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) f_n(s) ds.$$

Таким образом, $\nu(\Omega) = (0, 0)$, поэтому Ω относительно компактное множество, и мультиоператор G уплотняющий относительно меры некомпактности ν . Остается сослаться на теорему 3. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасова М. С., Петросян Г. Г.* О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве // Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 9. — С. 3–15.
2. *Каменский М. И., Макаренко О. Ю., Нистри П.* Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Докл. РАН. — 2003. — 388, № 4. — С. 439–442.
3. *Петросян Г. Г., Афанасова М. С.* О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием // Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2017. — № 1. — С. 135–151.
4. *Afanasova M., Liou Y. Ch., Obukhovskii V., Petrosyan G.* On the controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space // J. Nonlin. Convex Anal. — 2019. — 20, № 9. — P. 1919–1935.
5. *Appell J., Lopez B., Sadarangani K.* Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives // J. Nonlin. Var. Anal. — 2018. — 2, № 1. — P. 25–33.
6. *Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V.* On generalized boundary-value problems for a class of fractional differential inclusions // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — № 20. — P. 1424–1446.
7. *Diestel J., Ruess W. M., Schachermayer W.* Weak compactness in $L^1(\mu, X)$ // Proc. Am. Math. Soc. — 1993. — 118. — P. 447–453.
8. *Hilfer R.* Applications of Fractional Calculus in Physics. — Singapore: World Scientific, 2000.
9. *Johnson R., Nistri P., Kamenski M.* On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods // J. Differ. Equations. — 1997. — 140, № 1. — P. 186–208.
10. *Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V.* Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces // Nonlin. Anal. — 1993. — 20, № 7. — P. 781–792.
11. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. — Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 2001.
12. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J. C.* On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces // Fixed Point Theory. — 2017. — 18, № 1. — P. 269–292.
13. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J. C.* Boundary-value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // Appl. Anal. — 2018. — 97, № 4. — P. 571–591.
14. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J. C.* On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces // Fixed Point Theory Appl. — 2017. — 28, № 4. — 28.
15. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J. C.* Existence and approximation of solutions to nonlocal boundary-value problems for fractional differential inclusions // Fixed Point Theory Appl. — 2019. — 2.
16. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J. C.* On a periodic boundary-value problem for a fractional-order semilinear functional differential inclusions in a Banach space // Mathematics. — 2019. — 7, № 12. — 1146.

17. *Ke T. D., Loi N. V., Obukhovskii V.* Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities// *Fract. Calc. Appl. Anal.* — 2015. — № 18. — P. 531–553.
18. *Ke T. D., Obukhovskii V., Wong N. C., Yao J. C.* On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays// *Appl. Anal.* — 2013. — 92. — P. 115–137.
19. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
20. *Mainardi F., Rionero S., Ruggeri T.* On the initial-value problem for the fractional diffusion-wave equation// in: *Waves and Stability in Continuous Media.* — Singapore: World Scientific, 1994. — P. 246–251.
21. *Obukhovskii V. V., Gelman B. D.* Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications. — Singapore: World Scientific, 2020.
22. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. — San Diego: Academic Press, 1999.
23. *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. — London–New York: Springer-Verlag, 2010.
24. *Zhang Z., Liu B.* Existence of mild solutions for fractional evolution equations// *Fixed Point Theory.* — 2014. — 15. — P. 325–334.
25. *Zhou Y.* Fractional Evolution Equations and Inclusions: Analysis and Control. — London: Elsevier, 2016.
26. *Zhou Y., Jiao F.* Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations// *Comput. Math. Appl.* — 2010. — 59. — P. 1063–1077.

Каменский Михаил Игоревич
Воронежский государственный университет
E-mail: mikhailkamenski@mail.ru

Петросян Гарик Гагикович
Воронежский государственный университет инженерных технологий
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 85–96
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-85-96

УДК 512.816.3

ЛОКАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ ГРУППЫ
ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ ПЛОСКОСТИ
ДО ЛОКАЛЬНО ДВАЖДЫ ТРАНЗИТИВНОЙ ГРУППЫ ЛИ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЭТОЙ ЖЕ ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. В. А. КЫРОВ

Аннотация. В работе поставлена задача о нахождении всех локально дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов двумерного пространства. Эта задача сводится к нахождению алгебр Ли локально дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов. Базисные операторы таких алгебр Ли находятся из решений систем дифференциальных уравнений второго порядка. Доказано, что матрицы этих систем уравнений коммутируют между собой и упрощаются приведением к жордановой форме. Из решений систем дифференциальных уравнений выделены алгебры Ли всех локально дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов плоскости. С помощью экспоненциального отображения найдены локально дважды транзитивные группы Ли преобразований.

Ключевые слова: дважды транзитивная группа преобразований, алгебра Ли, жорданова форма матрицы.

LOCAL EXTENSION OF THE TRANSLATION GROUP OF A PLANE
TO A LOCALLY DOUBLY TRANSITIVE TRANSFORMATION LIE GROUP
OF THE SAME PLANE

© 2022 V. A. KYROV

ABSTRACT. In this paper, we examine the problem of finding all locally doubly transitive extensions of the translation group of a two-dimensional space. This problem is reduced to the search for finding Lie algebras of locally doubly transitive extensions of the translation group. The basis operators of such Lie algebras are found from solutions of systems of second-order differential equations. We prove that the matrices of these systems commute with each other and can be simplified by reduction to the Jordan form. From the solutions of systems of differential equations, the Lie algebras of all locally doubly transitive extensions of the translation group of the plane are obtained. Using the exponential mapping, we calculate locally doubly transitive Lie transformation groups.

Keywords and phrases: doubly transitive transformation group, Lie algebra, Jordan form.

AMS Subject Classification: 22F05

1. Введение. В работе В. В. Горбачевича [3] приводится определение расширения транзитивной группы Ли G , действующей в многообразии M : расширением транзитивной группы Ли G называется группа Ли G_1 , содержащая G в виде подгруппы Ли и тоже транзитивная на M , причем ограничение этого транзитивного действия на G дает исходное транзитивное действие группы Ли G . Классическим примером расширения группы параллельных переносов плоскости

\mathbb{R}^2 является группа аффинных преобразований этой же плоскости. Также отметим, что в [3] рассматриваются глобальные действия и приводится алгебраическая конструкция, дающая расширения транзитивных действий разрешимых групп Ли на компактных многообразиях.

В монографии Г. Г. Михайличенко [6] доказано, что локально просто транзитивная группа Ли преобразований плоскости \mathbb{R}^2 задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга (2, 2), а локально дважды транзитивная группа Ли преобразований плоскости \mathbb{R}^2 задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга (3, 2). Отметим, что первым множеством является плоскости \mathbb{R}^2 , а вторым множеством является транзитивно действующая группа Ли G .

В данной работе поставлена задача о нахождении всех локальных дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов плоскости \mathbb{R}^2 . Эти группы Ли преобразований четырехмерные. Согласно [6] такие группы Ли преобразований задают феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга (3, 2). В данной статье сначала проводятся исследования алгебр Ли таких расширений. Базис алгебр Ли состоит из системы четырех операторов X_1, X_2, Y_1, Y_2 , причем $X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y$ задают базис группы параллельных переносов. Из условия замкнутости коммутаторов $[X_i, Y_j]$, где $i, j = 1, 2, 3$, записываются две системы дифференциальных уравнений на коэффициенты операторов Y_1, Y_2 . Матрицы коэффициентов этих систем можно упростить приведением их к жордановым формам. Также доказано, что эти матрицы должны коммутировать между собой, что приводит к существенному упрощению их вида. Затем находятся решения системы этих дифференциальных уравнений, после чего из них выделяются алгебры Ли дважды транзитивных групп Ли преобразований плоскости. В заключение с помощью экспоненциального отображения

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \text{Exp}(tY) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + tY \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (tY)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / 2! + \dots$$

по базисным операторам алгебр Ли находятся уравнения групп Ли преобразований плоскости. Таких групп Ли преобразований оказалось шесть.

2. Основные определения. Сначала определим локальное действие класса C^2 группы Ли G , причем $\dim G = n$, в пространстве \mathbb{R}^2 , которое приводим согласно работе [1].

Определение 1. Дифференцируемое класса C^2 отображение $\pi: \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *эффективным локальным действием*, если выполнены следующие свойства:

- (i) $\pi(a, e) = a$ для всех $a \in W$, где W — область в \mathbb{R}^2 , $e \in G$ — единица; $\pi(\pi(a, h_1), h_2) = \pi(a, h_1 h_2)$ для всех $a \in W$, где $h_1, h_2 \in G$;
- (ii) $\pi(a, h) = a$ для всех $a \in W$, где $h \in G$, тогда и только тогда, когда $h = e$;
- (iii) $\pi_h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — локальный диффеоморфизм для всякого $h \in G$.

Тройка (\mathbb{R}^2, G, π) называется *локальной группой Ли преобразований* многообразия \mathbb{R}^2 .

Обозначим через L алгебру Ли этой группы преобразований. Базис этой алгебры Ли состоит из операторов

$$Z_i = Z_i^1 \partial_x + Z_i^2 \partial_y, \quad (2.1)$$

где $i = 1, \dots, n$.

Определение 2. Эффективное локальное действие $\pi: \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *дважды локально транзитивным*, если дополнительно выполняются свойства:

- (iv) $n = 4$;
- (v) матрица

$$V = \begin{pmatrix} Z_1^1(a) & Z_2^1(a) & Z_1^1(b) & Z_2^1(b) \\ Z_1^2(a) & Z_2^2(a) & Z_1^2(b) & Z_2^2(b) \\ Z_1^3(a) & Z_2^3(a) & Z_1^3(b) & Z_2^3(b) \\ Z_1^4(a) & Z_2^4(a) & Z_1^4(b) & Z_2^4(b) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

составленная из коэффициентов операторов (2.1), невырождена для любых точек некоторых окрестностей $U(a), U(b) \in W$.

Свойства (iv) и (v) равносильны тому, что действие $\pi \times \pi$ в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ локально просто транзитивно.

Определение 3. Будем говорить, что дважды локально транзитивное действие $\pi: \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ является локальным расширением группы параллельных переносов, если базис его алгебры Ли L состоит из операторов

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_i = A_i \partial_x + B_i \partial_y, \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

В таком случае в алгебре Ли L выделяется коммутативная двумерная подалгебра J , образованная операторами X_1 и X_2 . Произвольный оператор Y является линейной комбинацией базисных операторов.

Теорема 1. Локальное действие $\pi: \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ с операторами алгебры Ли (2.3) локально дважды транзитивно тогда и только тогда, когда матрица

$$K(b) - K(a) \quad (2.4)$$

невырождена, где

$$K = \begin{pmatrix} A_1(x, y) & B_1(x, y) \\ A_2(x, y) & B_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Доказательство. Матрица (2.2) для действия $\pi: \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ с операторами ее алгебры Ли (2.3) принимает следующий вид:

$$V = \begin{pmatrix} E & E \\ K(a) & K(b) \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица 2×2 . Согласно формуле Шура (см. [2, с. 59]) $|V| = |K(b) - K(a)|$. Если действие $\pi: \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ дважды локально транзитивно, то $|V| \neq 0$ и поэтому $|K(b) - K(a)| \neq 0$. Справедливо и обратное. \square

Из доказательства этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие. Локальное действие $\pi: \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ с операторами алгебры Ли вида

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = A_1(x, y) \partial_x, \quad Y_2 = A_2(x, y) \partial_x \quad (2.6)$$

не является локально дважды транзитивным.

Алгебра Ли обладает важным свойством — замкнутость относительно коммутирований, т.е. коммутаторы $[X_j, Y_k]$, где $j, k = 1, 2$, принадлежат этой же алгебре Ли. В координатной записи, с учетом (2.3), это свойство приводит к системе дифференциальных уравнений на коэффициенты A_i, B_i :

$$\begin{cases} \frac{\partial A_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 a_i^j A_j + g_i^1, & \frac{\partial A_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^3 b_i^j A_j + p_i^1, \\ \frac{\partial B_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 a_i^j B_j + g_i^2, & \frac{\partial B_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^3 b_i^j B_j + p_i^2, \end{cases} \quad (2.7)$$

причем $a_i^j, b_i^j, g_i^1, g_i^2, q_i^1, q_i^2, p_i^1, p_i^2 = \text{const}$. Введем матричные обозначения:

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}^j = \begin{pmatrix} g_1^j \\ g_2^j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^j = \begin{pmatrix} q_1^j \\ q_2^j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^j = \begin{pmatrix} p_1^j \\ p_2^j \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2.7) в матричном виде принимает простой вид:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_x = T_1 \mathbf{A} + \mathbf{G}^1, & \mathbf{A}_y = T_2 \mathbf{A} + \mathbf{P}^1, \\ \mathbf{B}_x = T_1 \mathbf{B} + \mathbf{G}^2, & \mathbf{B}_y = T_2 \mathbf{B} + \mathbf{P}^2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Из свойства независимости частных производных относительно порядка дифференцирования вытекают следующие соотношения:

$$(T_1T_2 - T_2T_1)\mathbf{A} = \mathbf{R}_1, \quad (T_1T_2 - T_2T_1)\mathbf{B} = \mathbf{R}_2, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ — некоторые постоянные векторы.

Теорема 2. *Подалгебра Ли J алгебры Ли L является идеалом тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{B}_y$ постоянные.*

Доказательство. Пусть сначала J — идеал в L . Заметим, что J является идеалом тогда и только тогда, когда

$$[X_i, Y_k] = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2,$$

причем $\mu_1, \mu_2 = \text{const}$, $i, k = 1, 2$ (см. [7]). Тогда $\mathbf{A}_x = \text{const}$, $\mathbf{B}_x = \text{const}$, $\mathbf{A}_y = \text{const}$, $\mathbf{B}_y = \text{const}$.

Предположим противное: пусть производные коэффициентов операторов Y_1 и Y_2 постоянны; тогда коммутаторы $[X_i, Y_k]$ будут линейно выражаться через операторы X_1 и X_2 , поэтому J — идеал в L . \square

Из доказательства этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие. $T_1 = T_2 = 0$ тогда и только тогда, когда J — идеал в L .

Доказательство. Если $T_1 = T_2 = 0$, то из системы (2.8) получаем $\mathbf{A}_x = \text{const}$, $\mathbf{B}_x = \text{const}$, $\mathbf{A}_y = \text{const}$, $\mathbf{B}_y = \text{const}$ и поэтому J — идеал в L (теорема 2).

Пусть J — идеал в L . Предположим, для определенности, $T_1 \neq 0$. Тогда, согласно системе (2.8) хотя бы одна из производных $\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x$ не постоянна. Поэтому по теореме 2 получаем, что J не является идеалом в L . Противоречие. \square

Теорема 3. *Матрицы коэффициентов системы (2.8) взаимно коммутативны, т.е.*

$$T_1T_2 - T_2T_1 = 0.$$

Доказательство. Предположим, что матрицы коэффициентов системы (2.8) не коммутируют, т.е. $T_1T_2 - T_2T_1 \neq 0$. В случае, если $\det(T_1T_2 - T_2T_1) \neq 0$, из системы (2.9) вытекает постоянство векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} , т.е. базисные операторы (2.3) линейно зависимы. В случае, если $\det(T_1T_2 - T_2T_1) = 0$, имеем $\alpha A_1 + \beta A_2 = \alpha B_1 + \beta B_2 = 0$, значит, операторы (2.3) также линейно зависимы. Полученное противоречие и доказывает теорему. \square

Теорема 4. *Для алгебры Ли локально дважды транзитивного действия $\pi: \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ в подходящем базисе матрица T_1 принимает жорданов вид:*

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

причем $\alpha, \beta, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 = \text{const}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Доказательство. Базис алгебры Ли локально дважды транзитивного действия $\pi: \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ задается операторами (2.3). Перейдем к новому базису

$$X'_i = X_i, \quad Y'_i = \sum_{j=1}^2 \chi_i^j Y_j,$$

причем матрица коэффициентов $\chi = (\chi_i^j)$ невырождена. Тогда выражения (2.3) принимают вид

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y'_i = A'_i \partial_x + B'_i \partial_y,$$

причем

$$\mathbf{A}' = \chi \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}' = \chi \mathbf{B}. \quad (2.11)$$

Далее, вычисляя коммутаторы $[X_i, Y'_j]$, учитывая их замкнутость и сравнивая коэффициенты перед ∂_x и ∂_y , получаем векторные уравнения

$$\begin{cases} \mathbf{A}'_x = T'_1 \mathbf{A}' + \mathbf{G}'^1, & \mathbf{A}'_y = T'_2 \mathbf{A}' + \mathbf{P}'^1, \\ \mathbf{B}'_x = T'_1 \mathbf{B}' + \mathbf{G}'^2, & \mathbf{B}'_y = T'_2 \mathbf{B}' + \mathbf{P}'^2. \end{cases}$$

В последнюю систему подставляем выражения (2.11) и сравниваем с (2.8), имеем

$$T_1 = \chi^{-1} T'_1 \chi, \quad T_2 = \chi^{-1} T'_2 \chi.$$

В линейной алгебре доказывается, что подбором невырожденной матрицы χ матрицу T_1 можно привести к жорданову виду (см. [4, с. 482]), т.е. приходим к утверждению теоремы. \square

Теорема 5. Пусть матрица T_1 имеет жорданов вид (2.10). Тогда соответствующая ей произвольная коммутативная матрица T принимает следующий вид:

$$(1) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Доказательство этой теоремы сводится к вычислению матричных коммутаторов и приравнению их к нулевой матрице: $T_1 T - T T_1 = 0$. Проиллюстрируем этот алгоритм для третьего случая, т.е. когда матрица T_1 имеет вид (2.10)(3) и

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем

$$T_1 T - T T_1 = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 - a_1 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ясно, что $a_3 = 0$, $a_4 = a_1$. В результате матрица T принимает вид (2.12)(3). \square

Теоремы 3, 4 и 5 дают существенные ограничения на матрицу коэффициентов T_2 из системы (2.8).

Теорема 6. Возможны только следующие неупорядоченные пары матриц T_1 и T_2 :

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_3 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ -\lambda_3 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_3 \\ -\mu_3 & \mu_1 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

где $\lambda_3^2 + \mu_3^2 \neq 0$.

Схема доказательства. Пусть первая матрица T_1 принимает любой вид из системы (2.10). Далее, применяя теорему 3, получаем допустимый вид второй матрицы T_2 . Применяя теорему 5, получаем допустимый вид матрицы преобразования χ . Затем упрощаем вторую матрицу с помощью найденной матрицы преобразования: $\chi^{-1} T_2 \chi$.

Продемонстрируем эту схему на следующем примере. Пусть

$$T_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно теореме 4 имеем

$$T_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad \det \chi \neq 0.$$

Упрощая матрицу T_2 ($\chi^{-1} T_2 \chi$), получаем результаты:

$$T_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

В остальных случаях доказательство аналогично. \square

3. Случай разложимой алгебры Ли L . Здесь рассматривается случай $T_1 = T_2 = 0$.

Теорема 7. *Решение системы дифференциальных уравнений (2.8) с нулевыми матрицами T_1 и T_2 в подходящем базисе принимает следующий вид:*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (g_1^1 x + p_1^1 y + c_1^1) \boldsymbol{\xi} + (g_2^1 x + p_2^1 y + c_2^1) \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{B} &= (g_1^2 x + p_1^2 y + c_1^2) \boldsymbol{\xi} + (g_2^2 x + p_2^2 y + c_2^2) \boldsymbol{\eta}, \end{aligned}$$

где $g_j^i, p_j^i, c_j^i = \text{const}$, $i, j = 1, 2$, $\boldsymbol{\xi} = (1, 0)^T$, $\boldsymbol{\eta} = (0, 1)^T$.

Доказательство очевидно. □

По найденным решениям запишем базисные операторы (2.3) *шестимерных линейных пространств*, при этом операторы Y_1 и Y_2 комбинируем с операторами X_1 и X_2 так, чтобы исчезли свободные члены:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & Y_1 &= (g_1^1 x + p_1^1 y) \partial_x + (g_2^1 x + p_2^1 y) \partial_y, \\ X_2 &= \partial_y, & Y_2 &= (g_2^2 x + p_2^2 y) \partial_x + (g_1^2 x + p_1^2 y) \partial_y. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В матричном виде операторы Y_1 и Y_2 записываются так:

$$Y_1 = \left\langle U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle, \quad Y_2 = \left\langle V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (3.2)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} g_1^1 & p_1^1 \\ g_2^1 & p_2^1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} g_2^2 & p_2^2 \\ g_1^2 & p_1^2 \end{pmatrix}$$

— матрицы коэффициентов, а \langle, \rangle — скалярное произведение векторов. Несложно вычислить коммутатор этих операторов:

$$[Y_1, Y_2] = \left\langle (VU - UV) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle = - \left\langle [U, V] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Таким образом, вычисление коммутаторов операторов Y_1 и Y_2 сводится к вычислению коммутаторов матриц U и V коэффициентов этих операторов.

Далее выясним, при каких условиях на коэффициенты в операторах (3.1) они становятся базисными операторами четырехмерных алгебр Ли. Очевидно, что алгебра Ли $L = J \oplus I$ *разложима*, так как является прямой суммой коммутативного двумерного идеала J , образованного операторами X_1 и X_2 и двумерной подалгебры Ли I , образованной операторами Y_1 и Y_2 . Следуя классификации абстрактных двумерных вещественных алгебр Ли, приводим полный список (с точностью до изоморфизма) подалгебр Ли I :

$$[Y_1, Y_2] = 0; \quad (3.3)$$

$$[Y_1, Y_2] = Y_1. \quad (3.4)$$

Теорема 8. *Для локально дважды транзитивной группы Ли преобразований с разложимой алгеброй Ли $L = J \oplus I$, базис которой задается операторами (3.1), матрица K невырождена.*

Доказательство. Согласно теореме 1 матрица, составленная по коэффициентам операторов (3.1), невырождена; значит,

$$\begin{vmatrix} E & E \\ K(1) & K(2) \end{vmatrix} = |K(2) - K(1)| \neq 0,$$

где

$$K = \begin{pmatrix} g_1^1 x + p_1^1 y & g_2^1 x + p_2^1 y \\ g_2^2 x + p_2^2 y & g_1^2 x + p_1^2 y \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица

$$K(2) - K(1) = \begin{pmatrix} g_1^1 x_{12} + p_1^1 y_{12} & g_2^1 x_{12} + p_2^1 y_{12} \\ g_2^2 x_{12} + p_2^2 y_{12} & g_1^2 x_{12} + p_1^2 y_{12} \end{pmatrix},$$

где $x_{12} = x_2 - x_1$, $y_{12} = y_2 - y_1$, невырождена. Точки $1 = (x_1, y_1)$ и $2 = (x_2, y_2)$ выбираются произвольно, поэтому матрица K *невырождена*. □

Необходимо из линейных пространств с базисными операторами (3.1) выделить алгебры Ли. Для этого пользуемся возможностью перехода к новому базису, заменой координат (следствие локальной изотопии действий), тождеством Якоби, а также замкнутостью коммутаторов

$$[X_i, X_j], \quad [X_i, Y_j], \quad [Y_i, Y_j], \quad i, j = 1, 2.$$

Последнее означает, что сам коммутатор должен принадлежать алгебре Ли (см. [7, § 13]). Также учитывается теорема 8.

Теорема 9. *Из системы (3.1), с точностью до линейной замены координат и перехода к новому базису, выделяются операторы, образующие базисы четырехмерных алгебр Ли локально дважды транзитивных групп Ли преобразований плоскости \mathbb{R}^2 , являющихся расширением группы параллельных переносов:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y, \quad (3.5)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = y\partial_x, \quad (3.6)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = y\partial_x - x\partial_y \quad (3.7)$$

для алгебры Ли (3.3);

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = y\partial_x, \quad Y_2 = bx\partial_x + (b+1)y\partial_y, \quad (3.8)$$

для алгебры Ли (3.4); здесь $b = \text{const}$.

Доказательство. В операторах (3.1) произведем линейную замену координат:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}^T = A \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T,$$

причем матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

произвольная и невырожденная. Тогда для операторов дифференцирования относительно старых и новых координат получим связь

$$\begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \end{pmatrix}^T = A^T \begin{pmatrix} \partial_{x'} & \partial_{y'} \end{pmatrix}^T.$$

В новых координатах операторы X_1, X_2, Y_1 и Y_2 принимают вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}\partial_{x'} + a_{21}\partial_{y'}, & Y_1 &= \left\langle AU A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \end{pmatrix} \right\rangle, \\ X_2 &= a_{12}\partial_{x'} + a_{22}\partial_{y'}, & Y_2 &= \left\langle AV A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Линейной комбинацией от операторов X_1, X_2 в новом базисе переходим к операторам $X'_1 = \partial_{x'}$, $X'_2 = \partial_{y'}$. Тогда, возвращаясь к прежним обозначениям координат и базисных операторов, получим:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = \left\langle U' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle, \quad Y_2 = \left\langle V' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где введены обозначения

$$U' = AU A^{-1}, \quad V' = AV A^{-1}, \quad (3.9)$$

причем A — произвольная невырожденная матрица. В линейной алгебре доказывается, что тогда матрица U' приводится к жордановой форме (см. [4, с. 482]):

$$U' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

где $a, a_2 \neq 0, a_1 \neq a_3$.

В таком случае оператор Y_1 принимает одно из следующих выражений:

$$\begin{aligned} Y_1 &= ax\partial_x + ay\partial_y, & Y_1 &= a_1x\partial_x + a_3y\partial_y, \\ Y_1 &= (a_1x + y)\partial_x + a_1y\partial_y, & Y_1 &= (a_1x + a_2y)\partial_x + (-a_2x + a_1y)\partial_y. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Очевидно, матрица

$$U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

коммутирует с любой матрицей, поэтому матрицу V можно, как и выше, привести к жордановой форме:

$$V' = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix},$$

где $b, b_2 \neq 0$, $b_1 \neq b_3$. Тогда, если оператор Y_1 имеет первый вид из системы (3.10), то для оператора Y_2 будем иметь

$$\begin{aligned} Y_2 &= b_1x\partial_x + b_3y\partial_y, & Y_2 &= (b_1x + y)\partial_x + b_1y\partial_y, \\ Y_2 &= (b_1x + b_2y)\partial_x + (-b_2x + b_1y)\partial_y; \end{aligned} \quad (3.11)$$

в противном случае

$$Y_2 = (b_1x + b_2y)\partial_x + (b_3x + b_4y)\partial_y.$$

I. Пусть сначала операторы Y_1 и Y_2 образуют базис коммутативной алгебры Ли (3.3). Подставляя найденные выше операторы в коммутатор $[Y_1, Y_2] = 0$, получаем системы базисных операторов коммутативных алгебр Ли:

$$Y_1 = ax\partial_x + ay\partial_y, \quad Y_2 = b_1x\partial_x + b_3y\partial_y, \quad (3.12)$$

$$Y_1 = ax\partial_x + ay\partial_y, \quad Y_2 = (b_1x + y)\partial_x + b_1y\partial_y, \quad (3.13)$$

$$Y_1 = ax\partial_x + ay\partial_y, \quad Y_2 = (b_1x + b_2y)\partial_x + (-b_2x + b_1y)\partial_y, \quad (3.14)$$

$$Y_1 = a_1x\partial_x + a_3y\partial_y, \quad Y_2 = b_1x\partial_x + b_4y\partial_y, \quad (3.15)$$

$$Y_1 = (a_1x + y)\partial_x + a_1y\partial_y, \quad Y_2 = (b_1x + b_2y)\partial_x + b_1y\partial_y, \quad (3.16)$$

$$Y_1 = (a_1x + a_2y)\partial_x + (-a_2x + a_1y)\partial_y, \quad Y_2 = (b_1x + b_2y)\partial_x + (-b_2x + b_1y)\partial_y. \quad (3.17)$$

II Пусть Y_1 и Y_2 образуют базис некоммутативной алгебры Ли (3.4). Подставляя найденные выше операторы в коммутатор $[Y_1, Y_2] = Y_1$, получаем системы базисных операторов алгебр Ли:

$$Y_1 = y\partial_x, \quad Y_2 = (b_1x + b_2y)\partial_x + (b_1y + y)\partial_y. \quad (3.18)$$

Далее в полученных алгебрах Ли (I: (3.12)–(3.17), II: (3.18)) переходим к подходящему базису и вводим удобную линейную систему координат, проверяем тождество Якоби, а также применяем теорему 3, т.е. в каждом из полученных случаев исследуем на невырожденность матрицу K , составленную из коэффициентов операторов Y_1 и Y_2 . В результате получаем алгебры Ли с базисными операторами (3.5)–(3.8).

Теорема 9 доказана полностью. \square

4. Случай неразложимой алгебры Ли L . Здесь рассматривается случай, когда матрица T_1 и T_2 из теоремы 6 одновременно ненулевые.

Теорема 10. Система (2.8) при условии одновременного отличия от нуля матриц T_1 и T_2 будет иметь решения:

$$\begin{cases} A_1 = c_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + a_1, \\ A_2 = c_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} + a_2, \\ B_1 = d_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + b_1, \\ B_2 = d_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} + b_2; \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = a_1 x + a_2 y + c_1, \\ A_2 = c_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} + a_3, \\ B_1 = b_1 x + b_2 y + d_1, \\ B_2 = d_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} + b_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = c_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + a_3, \\ A_2 = a_1 x + a_2 y + c_2, \\ B_1 = d_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + b_3, \\ B_2 = b_1 x + b_2 y + d_2; \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = (c_1 + c_2(\lambda_3 x + \mu_3 y)) e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + a_1, \\ A_2 = c_2 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + a_2, \\ B_1 = (d_1 + d_2(\lambda_3 x + \mu_3 y)) e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + b_1, \\ B_2 = d_2 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + b_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = (\lambda_3 x + \mu_3 y)(a_1 x + a_2 y)/2 + a_3 x + a_4 y + c_1, \\ A_2 = a_1 x + a_2 y + c_2, \\ B_1 = (\lambda_3 x + \mu_3 y)(b_1 x + b_2 y)/2 + b_3 x + b_4 y + d_1, \\ B_2 = b_1 x + b_2 y + d_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = c_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y + c_2) + a_1, \\ A_2 = c_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y + c_2) + a_2, \\ B_1 = d_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y + d_2) + a_1, \\ B_2 = d_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y + d_2) + a_2, \end{cases}$$

где c_1, c_2, d_1, d_2 — произвольные постоянные интегрирования, а $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ — постоянные, выражаемые через коэффициенты исходной системы, причем

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 \neq 0, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 \neq 0, \quad \lambda_3^2 + \mu_3^2 \neq 0.$$

По найденным решениям записываем базисные операторы (2.3) четырехмерных линейных пространств, при этом операторы Y_1 и Y_2 комбинируем с операторами X_1 и X_2 так, чтобы исчезли свободные члены:

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(c_1 \partial_x + d_1 \partial_y), \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_2 x + \mu_2 y}(c_2 \partial_x + d_2 \partial_y); \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = (a_1 x + a_2 y)\partial_x + (b_1 x + b_2 y)\partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_2 x + \mu_2 y}(c_2 \partial_x + d_2 \partial_y); \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(c_1 \partial_x + d_1 \partial_y), \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = (a_1 x + a_2 y)\partial_x + (b_1 x + b_2 y)\partial_y; \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}((c_1 + c_2(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_x + (d_1 + d_2(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_y); \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(c_2 \partial_x + d_2 \partial_y), \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = ((\lambda_3 x + \mu_3 y)(a_1 x + a_2 y)/2 + a_3 x + a_4 y)\partial_x + \\ & + ((\lambda_3 x + \mu_3 y)(b_1 x + b_2 y)/2 + b_3 x + b_4 y)\partial_y; \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = (a_1 x + a_2 y)\partial_x + (b_1 x + b_2 y)\partial_y, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(c_1 \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y) + c_2 \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_x + \\ & + e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(d_1 \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y) + d_2 \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(c_1 \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y) - c_2 \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_x + \\ & + e^{\lambda_1 x + \mu_1 y}(d_1 \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y) - d_2 \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y))\partial_y, \end{cases} \quad (4.6)$$

где

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 \neq 0, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 \neq 0, \quad \lambda_3^2 + \mu_3^2 \neq 0.$$

Из теоремы 1 следует, что в системах (4.1)—(4.4), (4.6) матрица

$$\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

невырождена, поэтому вводим линейную замену координат так, чтобы

$$c_1 \partial_x + d_1 \partial_y = \partial_{x'}, \quad c_2 \partial_x + d_2 \partial_y = \partial_{y'}.$$

В системе (4.5) с точностью до переобозначения переменных можно считать $\lambda_3 \neq 0$, поэтому вводим замену координат $x' = \lambda_3 x + \mu_3 y$, $y' = y$. Затем комбинируем операторы X_1 и X_2 , после чего возвращаемся к прежним обозначениям координат, операторов и постоянных (в новых

обозначениях неравенства на коэффициенты сохраняются):

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \partial_x, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} \partial_y; \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = (a_1 x + a_2 y) \partial_x + (b_1 x + b_2 y) \partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} \partial_y; \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \partial_x, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = (a_1 x + a_2 y) \partial_x + (b_1 x + b_2 y) \partial_y; \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \partial_x + (\lambda_3 x + \mu_3 y) e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \partial_y; \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_2 = (a_1 x + a_2 y) \partial_x + (b_1 x + b_2 y) \partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_1 = ((a_1 x^2 + a_2 x y)/2 + a_3 x + a_4 y) \partial_x + ((b_1 x^2 + b_2 x y)/2 + b_3 x + b_4 y) \partial_y; \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y) \partial_x + e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y) \partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y) \partial_x - e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y) \partial_y, \end{cases} \quad (4.12)$$

где

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 \neq 0, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 \neq 0, \quad \lambda_3^2 + \mu_3^2 \neq 0.$$

Далее воспользуемся условием замкнутости коммутаторов $[X_2, Y_1]$, $[X_1, Y_1]$, $[Y_1, Y_2]$. В результате получим следующие алгебры Ли, которые запишем с точностью до переобозначения координат:

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x} \partial_x, & \mu_2 \neq 0, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\mu_2 y} \partial_y, & \lambda_1 \neq 0; \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \partial_x, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{-\lambda_1 x - \mu_1 y} \partial_y, & \lambda_1^2 + \mu_1^2 \neq 0; \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = \frac{a_1}{\mu_2} x (\mu_2 \partial_x - \lambda_2 \partial_y), \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} \partial_y, & \mu_2 \neq 0; \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x} \partial_x + (\lambda_3 x + \lambda_1 y) e^{\lambda_1 x} \partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_1 x} \partial_y, & \lambda_1 \neq 0; \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = (a_3 x + a_4 y) \partial_x + (b_1 x^2/2 + b_3 x + b_4 y) \partial_y; \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = b_1 x \partial_y, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = (a_1 x^2/2 + a_3 x + a_4 y) \partial_x + (b_1 x^2/2 + b_3 x + b_4 y) \partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = a_1 x \partial_x + b_1 x \partial_y, & a_1 \neq 0; \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y) \partial_x + \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y) \partial_y, \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = \cos(\lambda_3 x + \mu_3 y) \partial_x - \sin(\lambda_3 x + \mu_3 y) \partial_y, & \lambda_3^2 + \mu_3^2 \neq 0; \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, & Y_1 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} [\sin(\mu_1 x - \lambda_1 y) \partial_x + \cos(\mu_1 x - \lambda_1 y) \partial_y], \\ X_2 = \partial_y, & Y_2 = e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} [\cos(\mu_1 x - \lambda_1 y) \partial_x - \sin(\mu_1 x - \lambda_1 y) \partial_y], & \lambda_1^2 + \mu_1^2 \neq 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

В системах (4.13)–(4.20) вводим следующие линейные замены координат:

- (i) в (4.13): $x' = \lambda_1 x$, $y' = \mu_2 y$;
- (ii) в (4.14): $x' = x$, $y' = \mu_1 y$ при $\lambda_1 = 0$; $x' = \lambda_1 x + \mu_1 y$, $y' = y$ при $\lambda_1 \neq 0$;
- (iii) в (4.15): $x' = x$, $y' = \lambda_2 x + \mu_2 y$;
- (iv) в (4.16): $x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_3 x + \lambda_1 y$;
- (v) в (4.18): $\partial_{x'} = a_1 \partial_x + b_1 \partial_y$, $\partial_{y'} = \partial_y$;

- (vi) в (4.19): $x' = \lambda_3 x$, $y' = \lambda_3 y$ при $\mu_3 = 0$; $x' = -\lambda_3 x + \mu_3 y$, $y' = \mu_3 x + \lambda_3 y$ при $\mu_3 \neq 0$;
 (vii) в (4.20): $x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_1 y$ при $\mu_1 = 0$; $x' = -\lambda_1 x + \mu_1 y$, $y' = \mu_1 x + \lambda_1 y$ при $\mu_1 \neq 0$.

Затем линейно комбинируем операторы, возвращаемся к прежним обозначениям координат и операторов, а также проверяем коммутационные соотношения. В результате получаем:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^x \partial_x, \quad Y_2 = e^y \partial_y; \quad (4.21)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^y \partial_x, \quad Y_2 = e^{-y} \partial_y; \quad (4.22)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^x \partial_x, \quad Y_2 = e^{-x}(a\partial_x + \partial_y); \quad (4.23)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = e^y \partial_y; \quad (4.24)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^x \partial_x + ye^x \partial_y, \quad Y_2 = e^x \partial_y; \quad (4.25)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_2 = x\partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + (x^2 + ry)\partial_y; \quad (4.26)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_2 = x\partial_x, \quad Y_1 = x^2 \partial_x + x\partial_y; \quad (4.27)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = \sin x \partial_x + \cos x \partial_y, \quad Y_2 = \cos x \partial_x - \sin x \partial_y; \quad (4.28)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^y [\sin x \partial_x + \cos x \partial_y], \quad Y_2 = e^y [\cos x \partial_x - \sin x \partial_y]. \quad (4.29)$$

Далее в системах (4.21)–(4.29) вводим подходящие нелинейные замены координат, после чего линейно комбинируем базисные операторы и переходим к прежним обозначениям координат и операторов. В результате получаем:

- (i) в (4.21) замена координат $x' = e^{-x}$, $y' = e^{-y}$ приводит к (3.5);
 (ii) в (4.22) замена координат $x' = x$, $y' = e^y$ дает (3.8) при $b = 0$;
 (iii) в (4.23) при $a \neq 0$ замена координат $x' = e^{-x}$, $y' = ay$ дает (4.27), а при $a = 0$ замена координат $x' = y$, $y' = -x$ приводит к (4.22);
 (iv) в (4.24) замена координат $x' = x$, $y' = e^{-y}$ приводит к (3.5);
 (v) в (4.25) замена координат $x' = e^{-x}$, $y' = ye^{-x}$ и последующее их переобозначение приводит к (3.6);
 (vi) в (4.27) замена координат $x' = e^{-x}$, $y' = ye^{-x}$ и последующее их переобозначение приводит к представлению базиса в виде:

$$X_1 = x\partial_x, \quad X_2 = y\partial_y, \quad Y_1 = x\partial_y, \quad Y_2 = y\partial_x; \quad (4.30)$$

(vii) в (4.28) замена координат

$$x = \operatorname{arctg} \frac{2x'}{1-x'^2} / \ln \frac{y'^2}{1+x'^2}, \quad y = 1 / \ln \frac{y'^2}{1+x'^2}$$

приводит к (3.7), и, наконец, в (4.29) замена координат $x' = e^{-y} \sin x$, $y' = e^{-y} \cos x$ приводит к (3.7) (см. [5]).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 11. *Существует всего шесть четырехмерных алгебр Ли локально дважды транзитивных групп Ли преобразований плоскости \mathbb{R}^2 , являющихся расширением группы параллельных переносов. С точностью до замены координат и перехода к новому базису имеем базисные операторы этих алгебр Ли: (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), (4.26) и (4.30).*

5. Вычисления локально дважды транзитивных действий. Далее к найденным операторам применим экспоненциальное отображение

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \operatorname{Exp}(tY) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + tY \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (tY)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / 2! + \dots \quad (5.1)$$

Применяя это отображение с базисным оператором алгебр Ли групп преобразований из теоремы 10, находим однопараметрические группы Ли преобразований пространства \mathbb{R}^2 . Затем вычисляя композицию этих однопараметрических подгрупп, записываем явные выражения уравнений такого действия.

Теорема 12. *Локальные группы Ли преобразований трехмерного пространства \mathbb{R}^3 с операторами ее алгебр Ли из теоремы 10, задающие локально дважды транзитивные действия, в подходящих обозначениях параметров и координат принимают соответственно следующий вид:*

$$x' = a_1x + a_3, \quad y' = a_2y + a_4, \quad (5.2)$$

$$x' = a_1x + a_2y + a_3, \quad y' = a_1y + a_4, \quad (5.3)$$

$$x' = a_1x + a_2y + a_3, \quad y' = -a_2x + a_1y + a_4, \quad (5.4)$$

$$x' = a_1^b x + a_2y + a_3, \quad y' = a_1^{b+1}y + a_4, \quad (5.5)$$

$$x' = a_1x + a_3, \quad y' = a_2x + a_1^r y + x^2 \frac{a_1^r - a_1^2}{r-2} + a_4, \quad (5.6)$$

$$x' = a_1x + a_2y, \quad y' = a_3x + a_4y. \quad (5.7)$$

Доказательство теоремы сводится к применению экспоненциального отображения (3.2) к базисным операторам алгебры Ли и дальнейшему вычислению композиции получаемых действий. Продемонстрируем эту процедуру на примере вычисления группы преобразований (5.6). Применяя к базисным операторам (4.26) экспоненциальное отображение (3.2), в результате получаем однопараметрические подгруппы:

$$x' = x + t_1, \quad y' = y;$$

$$x' = x, \quad y' = y + t_2;$$

$$x' = x, \quad y' = y + t_3x;$$

$$x' = xe^{t_4}, \quad y' = ye^{rt_4} + x^2 \frac{e^{rt_4} - e^{2t_4}}{r-2}.$$

Далее вычисляем композицию этих однопараметрических подгрупп:

$$x' = xe^{t_4} + t_1, \quad y' = ye^{t_4} + ye^{rt_4} + x^2 \frac{e^{rt_4} - e^{2t_4}}{r-2} + xt_3e^{t_4} + t_2.$$

Введя упрощающие обозначения для параметров: $a_1 = e^{t_4}$, $a_2 = t_3e^{t_4}$, $a_3 = t_1$, $a_4 = t_2$, получаем выражения (5.6). Аналогично находятся и остальные локально дважды транзитивные действия из списка (5.2)–(5.7). \square

Благодарность. В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую признательность профессору Геннадию Григорьевичу Михайличенко за обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Физматлит, 2010.
3. Горбачев В. В. О расширении транзитивных действий групп Ли // Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — 81, № 6. — С. 86–99.
4. Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.
5. Кыров В. А., Михайличенко Г. Г. Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга (2, 2) в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга (3, 2) // Вестн. Удмуртск. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2018. — 28, № 3. — С. 305–327.
6. Михайличенко Г. Г. Групповая симметрия физических структур. — Барнаул: Барнаул. гос. пед. ун-т, 2003.
7. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский государственный университет
E-mail: kyrovVA@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 97–103
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-97-103

УДК 517.98

ТЕОРЕМЫ ОБ ИТЕРАЦИЯХ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

© 2022 г. Л. Н. ЛЯХОВ, Н. И. ТРУСОВА

Аннотация. В \mathbb{R}_2 рассматриваются частные интегралы, действующие по первой или по второй переменной. Получены условия ограниченного действия в пространствах непрерывных функций по одной из переменных со значениями в лебеговом классе L_p по другой переменной. Предполагается, что эти функции определены в конечном прямоугольнике $D \in \mathbb{R}_2$. Доказаны теоремы об ограниченности итераций указанных частных интегралов в пространствах анизотропных функций $C(D_\alpha^{(1)}; L_p(D_{\bar{\alpha}}^{(1)}))$, где $\alpha; \bar{\alpha}$ — дополняющие друг друга индексы до двойного индекса (1; 2).

Ключевые слова: частный интеграл, анизотропное пространство функций, смешанная норма.

THEOREMS ON ITERATIONS OF PARTIAL INTEGRALS IN A SPACE WITH MIXED NORM

© 2022 L. N. LYAKHOV, N. I. TRUSOVA

ABSTRACT. In \mathbb{R}_2 , we consider partial integrals acting on the first or second variable and obtain conditions for bounded action in spaces of continuous functions with respect to one of the variables with values in the Lebesgue class L_p with respect to the other variable. We assume that these functions are defined in a finite rectangle $D \in \mathbb{R}_2$. We prove theorems on the boundedness of iterations of these partial integrals in the spaces of anisotropic functions $C(D_\alpha^{(1)}; L_p(D_{\bar{\alpha}}^{(1)}))$, where α and $\bar{\alpha}$ are indices complementing each other up to the double index (1; 2).

Keywords and phrases: partial integral, anisotropic function space, mixed norm.

AMS Subject Classification: 45B99, 47G99

1. Введение. Через $D = D_1^{(1)} \times D_2^{(1)}$ обозначим конечный прямоугольник в \mathbb{R}_2 , где $D_1^{(1)} = (a_1, b_1)$, $D_2^{(1)} = (a_2, b_2)$. В данной работе будем рассматривать частные интегралы в евклидовом пространстве точек \mathbb{R}_2 вида (см. [1–3])

$$(K_1 u)(x) = \int_{D_1^{(1)}} k_1(x; t_1) u(t_1, x_2) dt_1, \quad (1)$$

$$(K_2 u)(x) = \int_{D_2^{(1)}} k_2(x; t_2) u(x_1, t_2) dt_2. \quad (2)$$

В [3] подробно изложена теория непрерывности линейных операторов с частными интегралами в классе непрерывных функций, а в [1, 2] показана непрерывность действия частных интегралов

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-41-480002).

вида (1) и (2) в классах функций, обладающих разными свойствами по разным переменным, называемых анизотропными классами функций. В [1] рассмотрены случаи ограниченности частных интегралов в анизотропных лебеговых классах функций $L_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i > 1$, а в [2] рассматривались частные интегралы в \mathbb{R}_2 , где анизотропность функциональных классов понимается в следующем смысле: по первой переменной применяется sup -норма, а по второй — лебегова L_p -норма при $1 < p < \infty$. Данный случай приводит к анизотропным лебеговым классам $L_{\mathbf{r}}$ с мультииндексами $\mathbf{r} = (p, p^2)$ и $\mathbf{r} = (q, pq)$.

Через $C(D_\alpha; L_p(D_{\bar{\alpha}}))$ обозначим пространство непрерывных функций со значениями в лебеговом классе функций, α и $\bar{\alpha}$ — индексы, дополняющие друг друга до двойного индекса (1; 2), т.е. если $\alpha = 1$, то $\bar{\alpha} = 2$ и наоборот, если $\alpha = 2$, то $\bar{\alpha} = 1$. Норму в данном классе функций определим по следующей формуле:

$$\|u\|_{C(D_\alpha; L_p(D_{\bar{\alpha}}))} = \sup_{x_\alpha \in D_\alpha^{(1)}} \|u(x_\alpha, t_{\bar{\alpha}})\|_{L_p(D_{\bar{\alpha}}^{(1)})} = \sup_{x_\alpha \in D_\alpha^{(1)}} \left[\int_{D_{\bar{\alpha}}^{(1)}} |u(x_\alpha, t_{\bar{\alpha}})|^p dt_{\bar{\alpha}} \right]^{1/p} < \infty,$$

где D_α — область интегрирования частного интеграла K_α , а α — индекс, принимающий одно значение из номеров 1, 2.

Ранее (см. [2]) доказано неравенство

$$\|K_\alpha u\|_{C(D_\alpha; L_p(D_{\bar{\alpha}}))} \leq C \|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{D_\alpha; L_p(D_{\bar{\alpha}})})},$$

из которого вытекает непрерывность функции K_α по x_1 со значением в банаховом пространстве $L_p(D_2)$. В этой работе мы докажем принципиально другой результат, именно, что функция $K_\alpha u$ непрерывна по x_1 и непрерывна в целом по x_2 в L_p , $p \geq 1$. Мы докажем этот факт в случае $\alpha = 1$ для частных интегралов K_1 и K_2 . Доказательство приведенного выше результата для случая $\alpha = 2$ повторяет одно из приведенных доказательств для K_1 или K_2 , поэтому мы его не приводим. В некоторых случаях для удобства класс функций $C(D_1; L_p(D_2))$ будем обозначать CL_p . Полученные результаты обобщаются итерацией рассмотренных частных интегралов.

При доказательстве теорем в статье используются установленные в [1, 2] неравенства

$$\|K_1 u\|_{CL_p} \leq \|k_1\|_{C(D_1^{(1)}; L_{q,pq}(D_{1,2}^{(2)}))} \|u\|_{L_{p,p^2}(D_{1,2}^{(2)})}, \quad (3)$$

$$\|K_2 u\|_{CL_p} \leq (b_2 - a_2)^{1/p^2} \|k_2\|_{C(D_1^{(1)}; L_{q,pq}(D_{2,2}^{(2)}))} \|u\|_{CL_p}, \quad (4)$$

где $1/p + 1/q = 1$.

2. О непрерывности частных интегралов в \mathbb{R}_2 . Функциональное пространство

$$C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$$

определено ограниченностью нормы

$$\|f\|_{C(D_1; L_p(D_2))} = \sup_{x_1 \in D_1} \left[\int_{D_1} |f(x_1, t_2)|^p dt_2 \right]^{1/p} < \infty,$$

2.1. Непрерывность частного интеграла K_1 в $C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$.

Утверждение 1. Пусть $\psi(x) = (K_1 u)(x)$ и $\Delta\psi = (K_1 u)(x + \Delta x) - (K_1 u)(x)$. Если

$$k_1 \in C(D_1; L_{q,pq}(D_{1,2})), \quad u \in L_p(D_1; L_{p^2}(D_2)),$$

то

$$\|\Delta\psi\|_{C(D_1; L_p(D_2))} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h_1 \rightarrow 0.$$

Другими словами, функция $\psi = K_1 u$ является непрерывной в D_1 со значением в пространстве Лебега, т.е. $K_1 u \in C(D_1; L_p(D_2))$.

Доказательство. Рассмотрим частный интеграл вида (1), действующий по первой переменной, в функциональном пространстве $C(D_1; L_p(D_2))$. Пусть $1/p + 1/q = 1$, $u \in L_p(D_{1,2})$ и $\Delta x = (h_1, h_2)$ — приращение аргумента. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= (K_1u)(x + \Delta x) - (K_1u)(x) = \\ &= \int_{D_1^{(1)}} [k_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2; t_1)u(t_1, x_2 + h_2) - k_1(x_1, x_2; t_1)u(t_1, x_2)] dt_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Упростим данное выражение, положив $h_2 = 0$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$|\Delta\psi| \leq \left[\int_{D_1^{(1)}} |k_1(x_1 + h_1, x_2; t_1) - k_1(x_1, x_2; t_1)|^q dt_1 \right]^{1/q} \left[\int_{D_1^{(1)}} |u(t_1, x_2)|^p dt_1 \right]^{1/p}.$$

Отсюда вытекает непрерывность функции $\psi(x_1, x_2)$ по x_1 , если ядро $k_1 = k_1(x; t_1)$ представляет собой непрерывную функцию по x_1 со значением в L_p . Рассмотрим разность $\Delta\psi$ при условии принадлежности ядра пространству функций со смешанной нормой. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta\psi\|_{C(D_1; L_p(D_2))} &\leq \\ &\leq \sup_{x_1 \in D_1^{(1)}} \left(\int_{D_2} \left(\int_{D_1} |k_1(x_1 + h_1, x_2; t_1) - k_1(x_1, x_2; t_1)|^q dt_1 \right)^{1/q} \left[\int_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p dt_1 \right]^{1/p} dx_2 \right)^p \leq \\ &\leq \sup_{x_1 \in D_1^{(1)}} \left(\int_{D_2} \left[\int_{D_1} |k_1(x_1 + h_1, x_2; t_1) - k_1(x_1, x_2; t_1)|^q dt_1 \right]^{p/q} \times \left[\int_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p dt_1 \right]^{p/p} dx_2 \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \sup_{x_1 \in D_1} \left(\int_{D_2} \left[\int_{D_1} |k_1(x_1 + h_1, x_2; t_1) - k_1(x_1, x_2; t_1)|^q dt_1 \right]^p dx_2 \right)^{1/pq} \left(\int_{D_2} \left[\int_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p dt_1 \right]^p dx_2 \right)^{1/p^2} = \\ &= \sup_{x_1 \in D_1} \|\Delta_{x_1} k_1\|_{L_{q,pq}(D)} \|u\|_{L_{p,p^2}(D)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Итак, функция ψ непрерывна по x_1 как функция L_p -нормы по x_2 , т.е. непрерывна в целом в пространстве со смешанной нормой. Отметим, что справа в неравенстве (6) (даже при принятом упрощении $h_2 = 0$) оказались нормы анизотропных пространств Лебега.

При $h_2 \neq 0$ разность $\Delta\psi$ (5) представим в виде

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= (K_1u)(x + \Delta x) - (K_1u)(x) = \\ &= \int_{D_1^{(1)}} u(t_1, x_2 + h_2) [k_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2; t_1) - k_1(x_1 + h_1, x_2; t_1)] dt_1 + \\ &\quad + \int_{D_1} u(t_1, x_2 + h_2) [k_1(x_1 + h_1, x_2; t_1) - k_1(x_1, x_2; t_1)] dt_1 + \\ &\quad + \int_{D_1} k_1(x_1, x_2; t_1) [u(t_1, x_2 + h_2) - u(t_1, x_2)] dt_1. \end{aligned}$$

Здесь можно лишь утверждать, что функция ψ будет непрерывна, если ядро частного интеграла k_1 непрерывно по совокупности переменных $x = (x_1, x_2)$, а функция u непрерывна по свободной от интегрирования переменной.

Если же известно, что $k_1 \in C(D_1^{(1)}; L_{q,pq}(D_{1,2}^{(2)}))$, $u \in L_p(D_{1,2}^{(2)})$, то применив неравенство (3), получим

$$\begin{aligned} \|\Delta\psi\|_{C(D_1; L_p(D_2))} &\leq \|\Delta_{x_2} k_1\|_{C(D_1; L_{q,pq}(D))} \|u\|_{L_{p,p^2}(D)} + \\ &+ \|\Delta_{x_1} k_1\|_{C(D_1; L_{q,pq}(D))} \|u\|_{L_{p,p^2}(D_{1,2})} + \|k_1\|_{C(D_1^{(1)}; L_{q,pq}(D_{1,2}^{(2)}))} \|\Delta_{x_2} u\|_{L_{p,p^2}(D)}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое справа стремится к нулю при $|\Delta x| = |h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \rightarrow 0$, так как непрерывно в целом, второе слагаемое стремится к нулю, поскольку его значения в L_{pq} непрерывны по x_1 , и, наконец, третье слагаемое стремится к нулю по причине непрерывности в целом функции u . \square

2.2. *Непрерывность частного интеграла K_2 в $C(D_1; L_p(D_2))$.*

Утверждение 2. Пусть $\psi(x) = (K_2 u)(x)$ и $\Delta\psi = (K_2 u)(x + \Delta x) - (K_2 u)(x)$. Если

$$k_2 \in C(D_1^{(1)}; L_{q,pq}(D_{2,2}^{(2)})), \quad u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)})),$$

то

$$\|\Delta\psi\|_{C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h_2 \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\psi = K_2 u$ является непрерывной функцией со значением в пространстве Лебега, т.е. $K_2 u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$.

Доказательство. Рассмотрим частный интеграл вида (2) в функциональном пространстве $C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$. Пусть $1/p + 1/q = 1$ и $\Delta x = (h_1, h_2)$ — приращение аргумента. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta\psi(x) &= \int_{D_2^{(1)}} \left[k_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2; t_2) u(x_1 + h_1, t_2) - k_2(x_1, x_2; t_2) u(x_1, t_2) \right] dt_2 = \\ &= \int_{D_2^{(1)}} \left[k_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2; t_2) - k_2(x_1, x_2 + h_2; t_2) \right] u(x_1 + h_1, t_2) + \\ &+ \int_{D_2^{(1)}} \left[k_2(x_1, x_2 + h_2; t_2) - k_2(x_1, x_2; t_2) \right] u(x_1 + h_1, t_2) dt_2 + \\ &+ \int_{D_2^{(1)}} k_2(x_1, x_2; t_2) \left[u(x_1 + h_1, t_2) - u(x_1, t_2) \right] dt_2. \end{aligned}$$

Установим условие на ядро k_2 оператора K_2 , при котором функция ψ окажется непрерывной. Предыдущее равенство запишем в виде

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \int_{D_2^{(1)}} \left[\Delta_{x_1} k_2(x_1, x_2 + h_2; t_2) u(x_1 + h_1, t_2) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{x_2} k_2(x_1, x_2; t_2) u(x_1 + h_1, t_2) + k_2(x_1, x_2; t_2) \Delta_{x_1} u(x_1, t_2) \right] dt_2. \end{aligned}$$

Как видим, непрерывность функции ψ будет следовать из непрерывности ядра $k_2(x; t_2)$ по совокупности переменных $x = (x_1, x_2)$ и непрерывности функции u по первой переменной. Но такой комплекс условий, вообще говоря, не выполняется, если рассматривать функцию ψ как функцию из пространства со смешанной нормой, поскольку по одной из переменных должна присутствовать лишь L_p -норма. Упростим предыдущее равенство, положив $h_1 = 0$. Тогда

$$|\Delta\psi| = \int_{D_2^{(1)}} \left[k_2(x_1, x_2 + h_2; t_2) - k_2(x_1, x_2; t_2) \right] u(x_1, t_2) dt_2.$$

Применив неравенство Гельдера, получим

$$|\Delta\psi| \leq \left[\int_{D_2^{(1)}} |\Delta_{x_2} k_2(x_1, x_2; t_2)|^q dt_2 \right]^{1/q} \left[\int_{D_2^{(1)}} |u(x_1, t_2)|^p dt_2 \right]^{1/p}.$$

Покажем, что при условии принадлежности ядра k_2 пространству функций со смешанной CL_p -нормой функция ψ оказывается непрерывной в целом. Имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta\psi\|_{CL_p} &= \|\Delta\psi\|_{C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))} \leq \\ &\leq \sup_{x_1 \in D_1^{(1)}} \left(\int_{D_2^{(1)}} \left[\int_{D_2^{(1)}} |\Delta_{x_2} k_2(x_1, x_2; t_2)|^q dt_2 \right]^{p/q} \left[\int_{D_2^{(1)}} |u(x_1, t_2)|^p dt_2 \right]^{p/p} dx_2 \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

К внешнему интегралу (по x_2) снова применим неравенство Гельдера с теми же показателями p и q . Получим

$$\begin{aligned} \|\Delta\psi\|_{CL_p} &\leq \\ &\leq \sup_{x_1 \in D_1^{(1)}} \left(\left[\int_{D_2^{(1)}} \left(\int_{D_2^{(1)}} |\Delta_{x_2} k_2(x_1, x_2; t_2)|^q dt_2 \right)^{pq/q} dx_2 \right]^{1/q} \left[\int_{D_2^{(1)}} \left[\int_{D_2^{(1)}} |u(x_1, t_2)|^p dt_2 \right]^{p^2/p} dx_2 \right]^{1/p} \right)^{1/p} = \\ &= \sup_{x_1 \in D_1^{(1)}} \left(\left[\int_{D_2^{(1)}} \left(\int_{D_2^{(1)}} |\Delta_{x_2} k_2(x_1, x_2; t_2)|^q dt_2 \right)^{pq/q} dx_2 \right]^{1/pq} (b_2 - a_2)^{1/p^2} \left[\int_{D_2^{(1)}} |u(x_1, t_2)|^p dt_2 \right]^{1/p} \right). \end{aligned}$$

В правой части этого неравенства перейдем к соответствующим нормам для ядра k_2 и функции u :

$$\|\Delta\psi\|_{C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))} \leq (b_2 - a_2)^{1/p^2} \sup_{x_1 \in D_1^{(1)}} (\|\Delta_{x_2} k_2\|_{L_{q,pq}(D_{2,2}^{(2)})} \|u(x_1)\|_{L_p(D_2^{(1)})}). \quad (7)$$

Тем самым показано, что функция ψ непрерывна в целом в пространстве со смешанной нормой. Заметим, что так же, как и в предыдущем случае, в неравенстве (7) оказались задействованы нормы анизотропных пространств Лебега. \square

3. Теоремы об итерациях частных интегралов в \mathbb{R}_2 .

3.1. Итерации частного интеграла K_1 .

Теорема 1. Пусть

$$k_1 \in C(D_1^{(1)}; L_{q,\infty}(D_{1,2}^{(2)})), \quad u \in C(D_1^{(1)}; L_{p^{r+1}}(D_2^{(1)})), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда

$$(K_1^r u)(x_1, x_2) \in C(D_1^{(1)}; L_{p^r}(D_2^{(1)})), \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

При условии

$$u \in L_{p,p^{r+1}}(D_{1,2}^{(2)}) \quad (9)$$

утверждение (8) выполняется при всех натуральных значениях $r \geq 1$.

Доказательство. Поскольку $p > 1$, то $p^{r+1} > p$ при любом $r \geq 1$; тогда пространство $L_{p^{r+1}}(D)$ вложено в $L_p(D)$ для любой конечной области D и утверждение (8) при $r = 1$ вытекает из (3):

$$\begin{aligned} \|K_1 u\|_{CL_p} &\leq C_1 \|u\|_{L_{p,p^2}(D_{1,2}^{(2)})} = \\ &= C_1 \left(\int_{D_2^{(1)}} \left[\int_{D_1^{(1)}} |u(t_1, x_2)|^p dt_1 \right]^{p^2/p} dx_2 \right)^{1/p^2} \leq C \sup_{t_1 \in \overline{D_1^{(1)}}} \left(\int_{D_2^{(1)}} |u(t_1, x_2)|^{p^2} dx_2 \right)^{1/p^2} = \\ &= C \|u\|_{C(D_1^{(1)}; L_{p^2}(D_2^{(1)}))}. \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь

$$C_1 = \|k_1\|_{C(D_1^{(1)}; L_{q,pq}(D_{1,2}^{(2)}))}, \quad C = (b_1 - a_1)^{1/p} C_1.$$

В дальнейшем, вообще говоря, через C будут обозначены различные константы, не зависящие от функции u , а зависящие от ядра k_1 .

При $r = 2$ согласно неравенству (3) имеем

$$\|K_1^2 u\|_{CL_p} \leq C_1 \|K_1 u\|_{L_{p,p^2}(D_{1,2}^{(2)})} = C_1 \left(\int_{D_2^{(1)}} \left[\int_{D_1^{(1)}} |K_1 u(x_1, x_2)|^p dx_1 \right]^{p^2/p} dx_2 \right)^{1/p^2},$$

а также $K_1 u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$ согласно утверждению 1. Поэтому, взяв \sup по первой переменной, получим

$$\|K_1^2 u\|_{CL_p} \leq C \|K_1 u\|_{C(D_1^{(1)}; L_{p^2}(D_2^{(1)}))}.$$

Воспользовавшись неравенством (10) с показателем p^2 вместо p , получим

$$\|K_1^2 u\|_{C(D_1^{(1)}; L_{p^2}(D_2^{(1)}))} \leq C \|u\|_{C(D_1^{(1)}; L_{p^3}(D_2^{(1)}))}$$

и мы получим утверждение (8) для $r = 2$:

$$(K_1^2 u)(x_1, x_2) \in C(D_1^{(1)}; L_{p^2}(D_2^{(1)})).$$

Последующие рассуждения проводятся методом математической индукции, т.е. предположив, что (8) верно для $r = r_1$, выведем его справедливость для $r = r_1 + 1$.

Если же выполнено условие (9), то учтем, что $K_1 u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$ согласно утверждению 1 и по аналогии с предыдущими рассуждениями имеем цепочку неравенств

$$\|K_1^r u\|_{CL_p} \leq C \|K_1^{r-1} u\|_{C(D_1^{(1)}; L_{p^2}(D_2^{(1)}))} \leq C \|K_1^{r-2} u\|_{C(D_1^{(1)}; L_{p^3}(D_2^{(1)}))} \leq \dots \leq C \|K_1^1 u\|_{C(D_1^{(1)}; L_{p^r}(D_2^{(1)}))},$$

что доказывает (8) в этом случае. \square

3.2. Итерации частного интеграла K_2 . Для частного интеграла K_2 подход, применённый для частного интеграла K_1 , применим только если рассматривать смешанную норму пространства $C(D_2^{(1)}; L_p(D_1^{(1)}))$.

Теорема 2. Пусть

$$k_2 \in C(D_1^{(1)}; L_{q,pq}(D_{2,2}^{(2)})), \quad u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)})), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда

$$(K_2^r u)(x_1, x_2) \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)})), \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Следовательно, $\psi = K_2^r u$ является непрерывной функцией со значением в пространстве Лебега, т.е. $K_2 u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$.

Доказательство. Для $r = 1$ принадлежность (11) вытекает из оценки (4):

$$\|K_2 u\|_{C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))} \leq C_2 \|u\|_{C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))},$$

где $C_2 = (b_2 - a_2)^{1/p^2} \|k_2\|_{C(D_1^{(1)}; L_{q,pq}(D_{2,2}^{(2)}))}$.

При $r = 2$ имеем

$$\|K_2^2 u\|_{C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))} \leq C_2 \|K_1 u\|_{C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))} \leq C_2^2 \|u\|_{C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))}.$$

Согласно условию леммы функция $K_2 u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$, поэтому принадлежность (11) при $r = 2$ выполнена.

Продолжая эти рассуждения, получим (11) для произвольного натурального числа r .

Таким образом, в отличие от K_1 , оператор K_2 действует из $C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$ в себя. Доказательство закончено. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляхов Л. Н., Иноземцев А. И. Частные интегралы в анизотропных классах Лебега, I. Двумерный случай // Пробл. мат. анализ. — 2020. — 102. — С. 119–123.
2. Ляхов Л. Н., Трусова Н. И. Ограниченность операторов с частными интегралами со смешанной нормой, I // Челяб. физ.-мат. ж. — 2020. — 5, № 1. — С. 22–31.
3. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000.

Ляхов Лев Николаевич

Воронежский государственный университет;

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского

E-mail: levnlya@mail.ru

Трусова Наталья Ивановна

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского

E-mail: trusova.nat@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 104–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-104-114

УДК 517.968

МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРЕ

© 2022 г. С. С. ОРЛОВ, О. С. БУДНИКОВА, М. Н. БОТОРОЕВА

Аннотация. Рассматривается класс интегро-алгебраических уравнений типа Вольтерра с двумя интегрируемыми степенными особенностями в ядре. Отмечены принципиальные трудности исследования таких объектов. В терминах матричных пучков сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения. Предложены многошаговые методы решения, основанные на методе интегрирования произведений и квадратурных формулах типа Адамса. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: интегро-алгебраическое уравнение типа Вольтерра; многошаговый метод; граничная особенность; диагональная особенность; критерий ранг-степень.

MULTI-STEP METHODS FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRO-ALGEBRAIC EQUATIONS WITH TWO SINGULARITIES IN THE KERNEL

© 2022 S. S. ORLOV, O. S. BUDNIKOVA, M. N. BOTOROEVA

ABSTRACT. We consider a class of Volterra integro-algebraic equations with two integrable power singularities in the kernel and indicate fundamental difficulties in studying such equations. In terms of matrix pencils, we formulate sufficient conditions for the existence of a unique continuous solution. Also, we propose multi-step methods for solving such equations based on the method of integrating products and Adams quadrature formulas and present the results of numerical experiments.

Keywords and phrases: Volterra integro-algebraic equation; multi-step method; boundary singularity; diagonal singularity; rank-degree criterion.

AMS Subject Classification: 45F15, 65R20

1. Введение. При математическом моделировании упругих механических систем, гидравлических и электрических сетей (см. [1, 5, 14] и библиографию в них) обычно используются либо обыкновенные дифференциальные уравнения, либо дифференциальные уравнения в частных производных (уравнения динамики) и алгебраические соотношения (уравнения баланса). Их принято объединять в системы дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей при старшей производной. В современной научной литературе эти системы называют *дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ). В отличие от невырожденных систем дифференциальных уравнений, начальные и краевые условия для ДАУ необходимо согласовать с правой частью.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Вьетнамской академии наук и технологий (проект № 20-51-54003 Вьет_а.)

Один из способов исследования ДАУ, о котором подробно изложено в [3], состоит в редукции ДАУ к его интегральному аналогу — системе интегральных уравнений типа Вольтерра с тождественно вырожденной матрицей в главной части, называемой *интегро-алгебраическим уравнением* (ИАУ). Переход к интегральным аналогам позволяет решать ДАУ, содержащие различного рода особенности (см. [9]). Изучение ИАУ началось с работы В. Ф. Чистякова [7], в которой описаны принципиальные трудности исследования таких объектов, указаны достаточные условия существования и единственности непрерывного решения и предложен метод первого порядка для численного решения. Систематические исследования в области качественной теории и численных методов решения ИАУ проводят М. В. Булатов и В. Ф. Чистяков [8, 12], Х. Бруннер [10], М. Хадизаде [15]. К настоящему времени изучены лишь отдельные классы ИАУ.

В представляемой работе рассматриваются ИАУ с двумя слабыми особенностями в ядре. Частным случаем этих абстрактных объектов являются интегральные уравнения типа Вольтерра с аналогичными особенностями, исследованные недавно в [16]. Близкими к изучаемому классу уравнений являются также слабосингулярные ИАУ с диагональной особенностью или ИАУ типа Абеля (см. [13]), рассмотренные впервые в [11]. В [4] к этим уравнениям были применены k -шаговые методы, основанные на экстраполяции главной части ИАУ, формуле интегрирования произведений для интегрального слагаемого и явных методах типа Адамса. В настоящей статье разработанный подход применяется к более сложному объекту — ИАУ с диагональной и граничной слабыми особенностями.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$A(t)x(t) + \int_0^t s^{-a}(t-s)^{-b}K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0; 1], \quad (1)$$

где $x: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — искомая и заданная вектор функции соответственно, $A: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и $K: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ — заданные матрицы-функции, Δ — компакт вида

$$\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq t\}.$$

Предполагается, что все матрицы и векторы представлены в стандартном базисе Гамеля $\{e_i\}_{i=1}^n$ в \mathbb{R}^n . Символ $\mathbb{R}^{n \times n}$ означает векторное пространство $(n \times n)$ -матриц (квадратных матриц порядка n) с операторной нормой

$$\|A\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} = \sup \left\{ |Ax|_{\mathbb{R}^n} : |x|_{\mathbb{R}^n} = 1 \right\},$$

где $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ — евклидова норма в \mathbb{R}^n . Матрицы-функции $A: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $K: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и вектор-функция $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ являются по крайней мере *сильно* непрерывными (т.е. непрерывными по нормам в $\mathbb{R}^{n \times n}$ и \mathbb{R}^n соответственно) на множествах, где они определены. Более тонкие топологические свойства этих функций будут уточнены позже. Сильную непрерывность $A: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $K: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ будем обозначать $A(t) \in C([0; 1]; \mathbb{R}^{n \times n})$, $K(t, s) \in C(\Delta; \mathbb{R}^{n \times n})$ и $f(t) \in C([0; 1]; \mathbb{R}^n)$. Предположим, что

$$A(t) \neq \mathbb{O}_n, \quad \det A(t) = 0$$

для всех $t \in [0, 1]$, где \mathbb{O}_n — нулевая матрица порядка n . Тогда абстрактное уравнение вида (1) задает систему, в которую входят интегральные уравнения типа Вольтерра первого и второго рода, а также алгебраические уравнения, и называется *интегро-алгебраическим уравнением* (ИАУ). Удачную терминологию для обозначения особенностей ядра на прямых $s = 0$ и $s = t$ ввели М. Колк и А. Педас в [16], называя их *граничной* и *диагональной* особенностями ядра соответственно. Будем предполагать, что $a, b \in (0, 1)$, т.е. граничная и диагональная степенные особенности ядра ИАУ (1) являются слабыми (интегрируемыми). Заметим, что для любой $x(t) \in C([0; 1]; \mathbb{R}^n)$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\int_0^t s^{-a}(t-s)^{-b}|K(t,s)x(s)|_{\mathbb{R}^n}ds \sim B(1-a, 1-b) \cdot |K(0,0)x(0)|_{\mathbb{R}^n} \cdot t^{1-a-b}, \quad t \rightarrow 0,$$

из которого следует, что интегральное слагаемое ИАУ (1) является ограниченным в точке $t = 0$, если $a + b < 1$. Это объясняется тем, что в точке $(0, 0) \in \Delta$ прямые $s = 0$ и $s = t$ пересекаются, т.е. два типа особенностей ядра, накладываясь, влияют друг на друга.

Определение 1. Любую вектор-функцию $x = x(t)$, сильно непрерывную на отрезке $[0; 1]$ и обращающую в тождество ИАУ (1), назовем решением рассматриваемого ИАУ.

Хорошо известно, что ИАУ имеют непрерывные решения не при любых входных данных (матрице в главной части, ядре интегрального оператора, свободной функции). Проблема разрешимости является естественной для всех классов ИАУ. Таким образом, одной из задач нашего исследования является поиск условий, при которых имеет место однозначная разрешимость рассматриваемого ИАУ (1).

3. Теорема существования и единственности непрерывного решения. Эта часть исследования выполнена на основе подходов и терминологии, разработанных В. Ф. Чистяковым (см. [7, 8]). Приведем одно из основополагающих понятий.

Определение 2. Пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию ранг-степень на отрезке $[0, 1]$ (имеет индекс 1, имеет простую структуру), если выполняются следующие условия:

- (i) $\max_{t \in [0, 1]} \text{rank } A(t) = m$;
- (ii) $\det(\lambda A(t) + B(t)) = a_0(t)\lambda^m + a_1(t)\lambda^{m-1} + \dots + a_m(t)$, где $a_0(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, 1]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $a, b \in (0; 1)$ таковы, что $a + b < 1$, и выполнены следующие условия:

- (i) $\text{rank}(A(0)|f(0)) = \text{rank } A(0) = m < n$;
- (ii) $A(t) \in C^1([0; 1]; \mathbb{R}^{n \times n})$; $K(t, s), \partial_t K(t, s) \in C(\Delta; \mathbb{R}^{n \times n})$;
- (iii) $f(t) \in C^1([0; 1]; \mathbb{R}^n)$;
- (iv) пучок матриц $\lambda A(t) + K(t, t)$ удовлетворяет критерию ранг-степень.

Тогда ИАУ (1) имеет единственное непрерывное на отрезке $[0; 1]$ решение.

Доказательство утверждения основано на лемме о постоянстве ранга матрицы $A(t)$ и блочном разложении пучка матриц $\lambda A(t) + K(t, t)$ (см. [7, 8]), которые следуют из условия (iv), и проводится сведением изучаемого ИАУ (1) к нормальной форме, т.е. к ИАУ вида (1) с $A(t) = \mathbb{E}_n$ при всех $t \in [0; 1]$, где \mathbb{E}_n — единичная матрица порядка n . Далее приведем примеры, характеризующие роль критерия ранг-степень.

Пример 1. Рассмотрим систему интегральных уравнений вида (1) с компонентами

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K(t, s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ 0 \\ t \end{pmatrix},$$

где $a: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ и $b: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — заданные функции. Здесь $A(t) \neq \mathbb{O}_3$ и $\det A(t) = 0$ при всех $t \in [0, 1]$. Заметим, что $\text{rank } A(t) = 1$ в тех точках $t \in [0, 1]$, где $a(t) = 0$, и $\text{rank } A(t) = 2$ в тех точках $t \in [0, 1]$, где $a(t) \neq 0$, т.е.

$$\max_{t \in [0, 1]} \text{rank } A(t) = 2,$$

причем

$$\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = a(t)\lambda^2 - (a(t) + 1)\lambda + 1.$$

По определению 2 критерий ранг-степень не выполняется в точках $t \in [0, 1]$, где $a(t) = 0$. Это может привести к неединственности решения. Если $a(t) = b(1 - a, 1 - b) \cdot t^{1-a-b}$ и $b(t) = t$ при всех $t \in [0, 1]$, то рассматриваемое ИАУ имеет семейство непрерывных решений

$$x(t) = C, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = \frac{\sin \pi b}{\pi b} t^{a+b}.$$

Для функции

$$a(t) = \begin{cases} (\alpha - t)^{-\lambda} \left(\alpha^\lambda B(1 - a, 1 - b) \cdot t^{1-a-b} \cdot {}_2F_1 \left(-\lambda, 1 - a; 2 - a - b; \frac{t}{\alpha} \right) + b(t) \right), & 0 \leq t \leq \alpha, \\ \alpha^{-a} B(\lambda + 1, 1 - b) \cdot (t - \alpha)^{1-b} \cdot {}_2F_1 \left(a, \lambda + 1; 2 - b + \lambda; \frac{\alpha - t}{\alpha} \right), & \alpha < t \leq 1, \end{cases}$$

критерий ранг-степень нарушается в точке $t = \alpha$; если

$$b(t) = \begin{cases} -\alpha^{1-a-b+\lambda} B(1 - a, 1 - b + \lambda), & 0 \leq t \leq \alpha, \\ -\alpha^{1-a+\lambda} B(1 - a, \lambda + 1) \cdot t^{-b} \cdot {}_2F_1 \left(b, 1 - a; 2 - a + \lambda; \frac{\alpha}{t} \right), & \alpha < t \leq 1, \end{cases}$$

то ИАУ имеет множество непрерывных решений вида

$$x(t) = \begin{cases} (\alpha - t)^\lambda, & 0 \leq t \leq \alpha; \\ C(t - \alpha)^\lambda, & \alpha < t \leq 1; \end{cases} \quad y(t) = 0, \quad z(t) = \frac{\sin \pi b}{\pi b} t^{a+b}.$$

На отрезке $[0, \alpha]$ решение единственно, а в точке $t = \alpha$ имеет место *ветвление* решения. В приведенных выше формулах используются обозначения для произвольной постоянной $C \in \mathbb{R}$, фиксированного числа $\lambda \in (0; 1)$, *бета-функции Эйлера*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

и *гипергеометрической функции Гаусса* в интегральной форме

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad a < c - b, \quad |z| \leq 1.$$

Пример 2. Рассмотрим систему интегральных уравнений вида (1) с компонентами

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K(t, s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},$$

Здесь $A(t) \neq \mathbb{O}_3$ и $\det A(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, 1]$. В предыдущем примере отмечено, что

$$\max_{t \in [0, 1]} \text{rank } A(t) = 2.$$

Многочлен $\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = \lambda - 1$ имеет первую степень при всех $t \in [0, 1]$, значит, критерий ранг-степень нарушается всюду на отрезке $[0, 1]$. Тем не менее, рассматриваемое ИАУ имеет единственное непрерывное решение вида

$$x(t) = \frac{\sin \pi b}{\pi b} t^{a+b}, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = \frac{\sin \pi b}{\pi b B(1 - b, a + 2b + 1)} t^{2a+2b}.$$

Примеры 1 и 2 показывают, что условие (iv) теоремы 1 носит достаточный характер. Если матричный пучок $\lambda A(t) + K(t, t)$ не удовлетворяет критерию ранг-степень, то исследование сопряжено с большими трудностями, так как ИАУ (1) может иметь множество решений.

4. Численный метод. Для построения численных методов решения интегральных уравнений с особенностями эффективным является подход, основанный на введении весовой функции и применении метода интегрирования произведений (см. [18]). В данной работе для ИАУ (1) модифицированы явные методы Адамса, описание которых можно найти в [2, 6, 17]. Выбор именно этих методов обусловлен их устойчивостью при численном решении интегральных уравнений Вольтерра первого рода с ядром, отличным от нуля на диагонали $s = t$.

Пусть на отрезке $[0; 1]$ определена равномерная сетка

$$t_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N};$$

Таблица 1. Значения коэффициентов α_j

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	2	-1	—	—	—	—
2	3	-3	1	—	—	—
3	4	-6	4	-1	—	—
4	5	-10	10	-5	1	—
5	6	-15	20	-15	6	-1

тогда для заданной на отрезке $[0; 1]$ функции g с известными значениями $g_i = g(t_i)$ в узлах сетки и весовой функции $p(t, s) = s^{-a}(t-s)^{-b}$, где $a, b \in (0; 1)$, запишем квадратурную формулу на основе явного метода Адамса

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_{i+1}} \tau^{-a}(t_{i+1}-\tau)^{-b}g(\tau)d\tau &= \int_0^{t_{k+1}} \tau^{-a}(t_{i+1}-\tau)^{-b}g(\tau)d\tau + \sum_{j=k+1}^i \int_{t_j}^{t_{j+1}} \tau^{-a}(t_{i+1}-\tau)^{-b}g(\tau)d\tau \approx \\
&\approx \int_0^{t_{k+1}} \tau^{-a}(t_{i+1}-\tau)^{-b}L_{k+1}^0(g_0, g_1, \dots, g_k, \tau)d\tau + \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^i \int_{t_j}^{t_{j+1}} \tau^{-a}(t_{i+1}-\tau)^{-b}L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, \dots, g_j, \tau)d\tau = \\
&= \sum_{l=0}^k d_l(i+1)g_l + \sum_{j=k+1}^i \sum_{l=0}^k b_l(i+1, j)g_{j-l} = \sum_{j=0}^i \omega_{i+1, j}g_j,
\end{aligned}$$

где $L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, \dots, g_j, t)$ — интерполяционный полином степени k , проходящий через точки $(g_{j-k}, t_{j-k}), (g_{j-k+1}, t_{j-k+1}), \dots, (g_j, t_j)$, где $j = k+1, k+2, \dots, i$.

Вернемся к ИАУ (1) и предположим, что начальные значения x_0, x_1, \dots, x_{k-1} в первых k узлах сетки заранее вычислены с достаточной точностью. Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения $A_i = A(t_i)$, $K_{i,j} = K(t_i, t_j)$ и $x_j \approx x(t_j)$, $j = k, \dots, i$. Согласно идее работы [2], в силу вырожденности матрицы $A(t)$ главную часть ИАУ (1) в точке $t = t_{i+1}$ будем вычислять следующим образом:

$$A_{i+1}x_{i+1} \approx A_{i+1}L_{k+1}^i(x_{i-k}, x_{i-k+1}, \dots, x_i, t_{i+1}) = A_{i+1} \sum_{l=0}^k \alpha_j x_{i-l},$$

где $L_{k+1}^i(x_{i-k}, x_{i-k+1}, \dots, x_i, t)$ — интерполяционный полином степени k , проходящий через точки $(x_{i-k}, t_{i-k}), (x_{i-k+1}, t_{i-k+1}), \dots, (x_i, t_i)$. С учетом всех рассуждений, изложенных выше, предлагаемые k -шаговые методы имеют вид

$$A_{i+1} \sum_{l=0}^k \alpha_j x_{i-l} + \sum_{j=0}^i \omega_{i+1, j} K_{i+1, j} x_j = f_{i+1}, \quad i = k, k+1, \dots, N-1.$$

Коэффициенты α_j для различных $k = 1, 2, 3, 4, 5$ представлены в таблице 1.

Далее выпишем многошаговые алгоритмы при $k = 0, 1, 2$. При $k = 0$ получим метод

$$A_{i+1}x_i + \sum_{j=0}^i \omega_{i+1, j} K_{i+1, j} x_j = f_{i+1},$$

Здесь приняты обозначения

$$d_0(i) = t_{i+1}^{1-a-b} \int_0^{\frac{3}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du - \frac{3}{2h} t_{i+1}^{2-a-b} \int_0^{\frac{3}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b} du + \frac{1}{2h^2} t_{i+1}^{3-a-b} \int_0^{\frac{3}{i+1}} u^{2-a}(1-u)^{-b} du,$$

$$d_1(i) = \frac{2}{h} t_{i+1}^{2-a-b} \int_0^{\frac{3}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b} du - \frac{1}{h^2} t_{i+1}^{3-a-b} \int_0^{\frac{3}{i+1}} u^{2-a}(1-u)^{-b} du,$$

$$d_2(i) = \frac{1}{2h^2} t_{i+1}^{3-a-b} \int_0^{\frac{3}{i+1}} u^{2-a}(1-u)^{-b} du - \frac{1}{2h} t_{i+1}^{2-a-b} \int_0^{\frac{3}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b} du,$$

$$b_2(i, j) = \frac{j(j-1)}{2} t_{i+1}^{1-a-b} \int_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du - \\ - \frac{2j-1}{2h} t_{i+1}^{2-a-b} \int_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b} du + \frac{1}{2h^2} t_{i+1}^{3-a-b} \int_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du,$$

$$b_1(i, j) = -j(j-2) t_{i+1}^{1-a-b} \int_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du + \\ + \frac{2j-2}{h} t_{i+1}^{2-a-b} \int_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b} du - \frac{1}{h^2} t_{i+1}^{3-a-b} \int_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du,$$

$$b_0(i, j) = \frac{(j-1)(j-2)}{2} t_{i+1}^{1-a-b} \int_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du - \\ - \frac{2j-3}{2h} t_{i+1}^{2-a-b} \int_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b} du + \frac{1}{2h^2} t_{i+1}^{3-a-b} \int_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du.$$

Весы для $k = 3, 4, 5$ не приведены из-за громоздкости формул.

5. Численные эксперименты. Численные расчеты проводились на нескольких тестовых ИАУ. Введем обозначения err для погрешности вычислений по евклидовой норме и p для порядка метода, определяемого по формуле

$$p = \log_2 \frac{\text{err}_h}{\text{err}_{\frac{h}{2}}}.$$

Пример 3. Интегро-алгебраическое уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \frac{\Gamma(3-a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(2-a)} \int_0^t s^{-a}(t-s)^{-b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(s) ds = \begin{pmatrix} t + t^{2-a-b} \\ t^{2-a-b} \end{pmatrix}$$

имеет точное решение $x(t) = (t, t)^T$. Результаты расчетов для $k = 0, 1, 2$ приведены в таблицах 2, 3 и 4.

Таблица 2. Результаты численных расчетов при $k = 0$ в примере 3

$0 < a + b < 1$	$a = 0,1$ $b = 0,1$		$a = 0,2$ $b = 0,75$		$a = 0,8$ $b = 0,15$		$a = 0,001$ $b = 0,99$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0,16444	0,90	0,17392	1,00	0,09799	0,92	0,19901	1,00
0,1	0,08797	0,93	0,08716	1,00	0,05165	0,95	0,09951	1,00
0,05	0,04615	0,95	0,04368	1,00	0,02673	0,97	0,04975	1,00
0,025	0,02382	0,97	0,02189	1,00	0,01366	0,98	0,01244	1,00
$a + b = 1$	$a = 0,3$ $b = 0,7$		$a = 0,7$ $b = 0,3$		$a = 0,5$ $b = 0,5$		$a = 0,9$ $b = 0,1$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0,16471	1,00	0,11219	0,96	0,13333	1,00	0,09427	0,96
0,1	0,08235	1,00	0,05781	0,97	0,06667	1,00	0,04839	0,94
0,05	0,04118	1,00	0,02953	0,98	0,03333	1,00	0,02523	0,95
0,025	0,02059	1,00	0,01498	0,99	0,01667	1,00	0,01303	0,97
$1 < a + b < 2$	$a = 0,9$ $b = 0,9$		$a = 0,99$ $b = 0,9$		$a = 0,99$ $b = 0,99$		$a = 0,999$ $b = 0,999$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0,14739	1,00	0,09924	0,94	0,15012	1,00	0,15038	1,00
0,1	0,07367	1,00	0,05175	0,96	0,07493	1,00	0,07504	1,00
0,05	0,03686	1,00	0,02661	0,97	0,03745	1,00	0,03750	1,00
0,025	0,01844	1,00	0,01357	0,98	0,01872	1,00	0,01878	1,00

Таблица 3. Результаты численных расчетов при $k = 1$ в примере 3

$0 < a + b < 2$	$a = 0,9$ $b = 0,9$		$a = 0,9$ $b = 0,96$		$a = 0,001$ $b = 0,961$		$a = 0,961$ $b = 0,1$		$a = 0,015$ $b = 0,99$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0	2	0	2	*	—	*	—	*	—
0,1	0	2	0	2	*	—	*	—	*	—
0,05	0	2	0	2	*	—	*	—	*	—
0,025	0	2	0	2	*	—	*	—	*	—

Пример 4. Интегро-алгебраическое уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} x(t) + \frac{\Gamma(2-a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)} \int_0^t s^{-a}(t-s)^{-b} \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ -2e^{-s} & e^{t+s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(1+t^{1-a-b}) + te^{-t} \\ e^t(t+t^{1-a-b}) + t^2e^{-t} - 2t^{1-a-b} \end{pmatrix}$$

имеет точное решение $x(t) = (e^t, e^{-t})^T$. Результаты расчетов для $k = 1, 2$ приведены в табл. 5 и 6.

Таблица 4. Результаты численных расчетов при $k = 2$ в примере 3

$1 < a + b < 2$	$a = 0,1$ $b = 0,961$		$a = 0,99$ $b = 0,99$		$a = 0,999$ $b = 0,999$	
	err	p	err	p	err	p
h	0	3	0	3	0	3
0,2	0	3	0	3	0	3
0,1	0	3	0	3	0	3
0,05	0	3	0	3	0	3

Таблица 5. Результаты численных расчетов при $k = 1$ примере 4

$0 < a + b < 1$	$a = 0,1$ $b = 0,1$		$a = 0,2$ $b = 0,75$		$a = 0,8$ $b = 0,15$		$a = 0,001$ $b = 0,961$	
	err	p	err	p	err	p	err	p
h	0,04561	1,99	0,04915	1,92	0,06440	2,00	*	—
0,2	0,01146	2,02	0,01303	1,97	0,01614	2,05	*	—
0,1	0,00282	2,01	0,00334	1,98	0,00390	2,06	*	—
0,05	0,00070	2,01	0,00084	1,99	0,00094	2,06	*	—

$a + b = 1$	$a = 0,3$ $b = 0,7$		$a = 0,7$ $b = 0,3$		$a = 0,5$ $b = 0,5$		$a = 0,9$ $b = 0,1$	
	err	p	err	p	err	p	err	p
h	0,05001	1,92	0,05921	1,99	0,05310	1,96	0,07174	1,97
0,2	0,01318	1,97	0,01492	2,03	0,01367	1,99	0,01827	2,03
0,1	0,00336	1,98	0,00366	2,03	0,00343	2,00	0,00447	2,05
0,05	0,00085	1,99	0,00089	2,03	0,00086	2,00	0,00108	2,06

$1 < a + b < 2$	$a = 0,9$ $b = 0,9$		$a = 0,9$ $b = 0,96$		$a = 0,961$ $b = 0,1$		$a = 0,015$ $b = 0,99$	
	err	p	err	p	err	p	err	p
h	0,06015	1,91	0,05422	1,90	*	—	*	—
0,2	0,01603	1,96	0,01454	1,95	*	—	*	—
0,1	0,00413	1,98	0,00376	1,97	*	—	*	—
0,05	0,00105	1,99	0,00096	1,99	*	—	*	—

Таблица 6. Результаты численных расчетов при $k = 2$ в примере 4

$1 < a + b < 2$	$a = 0,7$ $b = 0,5$		$a = 0,1$ $b = 0,961$		$a = 0,99$ $b = 0,99$		$a = 0,999$ $b = 0,999$	
	err	p	err	p	err	p	err	p
h	0,00775	2,82	0,00559	2,69	0,00706	2,67	0,00705	2,67
0,2	0,00110	2,93	0,00087	2,85	0,00111	2,85	0,00111	2,85
0,1	0,00014	2,99	0,00012	2,93	0,00015	2,93	0,00015	2,93

Анализируя результаты численных расчетов, можно сделать вывод, что предлагаемый нульшаговый метод имеет первый порядок сходимости. Для случая $k = 1$ приведены лишь некоторые результаты расчетов, демонстрирующие его очевидные преимущества — второй порядок точности. Численные эксперименты выявили интересный факт потери устойчивости метода, если хотя бы одно из значений параметров a или b превосходит значение 0,96. В таблицах значения параметров a , b и h , при которых одношаговый метод неустойчив, указаны символом *. Тестирование двухшагового метода не выявило случаев неустойчивости алгоритма и подтверждает третий порядок точности. Увеличение порядка точности влечет за собой значительное рост времени, затраченного на вычисления. Это чрезвычайно затрудняет использование трехшагового метода и практически не позволяет использовать алгоритмы при $k = 4$ и $k = 5$.

6. Заключение. В представленной работе в терминах матричных пучков сформулированы достаточные условия однозначной разрешимости в классе непрерывных функций рассматриваемого ИАУ и разработаны многошаговые методы его приближенного решения. Выполненные численные расчеты разработанными k -шаговыми алгоритмами демонстрируют порядок $k+1$ сходимости к точному решению. Дальнейшим направлением работы предполагается исследование зависимости границ устойчивости предложенных алгоритмов от параметров a , b и h . В качественной теории особое внимание планируется уделить случаю $a + b \geq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумов С. Б., Булатов М. В., Ли М. Г., Чистяков В. Ф. Дифференциально-алгебраические уравнения и их приложения// Тр. Средневолж. мат. о-ва. — 2007. — 9, № 1. — С. 62–69.
2. Будникова О. С., Булатов М. В. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — 52, № 5. — С. 829–839.
3. Булатов М. В., Будникова О. С. Об устойчивых алгоритмах численного решения интегро-алгебраических уравнений// Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Матем. модел. программ. — 2013. — 6, № 4. — С. 5–14.
4. Булатов М. В., Будникова О. С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в ядре k -шаговыми методами// Изв. Иркут. ун-та. Сер. Мат. — 2015. — 13. — С. 3–15..
5. Николаев В. В., Черевко А. А., Чупахин А. П. Моделирование гемодинамики в сети сосудов, основанных на дифференциально-алгебраических уравнениях, построенных по клиническим данным// в кн.: Тез. докл. Всеросс. конф. «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение». — Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2014. — С. 106.
6. Тен Мен Ян. Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода/ дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Иркутск, 1985.
7. Чистяков В. Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах// в кн.: Функции Ляпунова и их применения. — Новосибирск: Наука, 1987. — С. 231–239.
8. Чистяков В. Ф. О разрешимости линейных интегро-алгебраических уравнений и численных методах их решения// Сиб. мат. ж. — 2013. — 54, № 4. — С. 932–946.
9. Auzinger W., Lehner H., Weinmüller E. An efficient asymptotically correct error estimator for collocation solutions to singular index-1 DAEs// BIT Numer. Math. — 2011. — 51, № 1. — P. 43–65.
10. Brunner H. Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.
11. Brunner H., Bulatov M. V. On singular systems of integral equations with weakly singular kernels// Proc. 11 Baikal Int. School-Seminar “Optimization Methods and Their Applications”. — Irkutsk, 1998. — P. 64–67.
12. Bulatov M. V., Hadizadeh M., Chistyakova E. V. Construction of implicit multistep methods for solving integral algebraic equations// Вестн. С.-Перербургр. ун-та. Сер. 10. Прикл. мат. Информ. Проц. упр. — 2019. — 15, № 3. — С. 310–322.
13. Bulatov M. V., Lima P. M., Weinmüller E. B. Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations// Central Eur. J. Math. — 2014. — 12, № 2. — P. 308–321.

14. *Chistyakova E. V., Chistyakov V. F., Levin A. A.* Linearization of differential algebraic equations with integral terms and their application to the thermal energy modelling// Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Мат. модел. програм. — 2018. — 11, № 4. — С. 94–109.
15. *Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S.* Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index 2// Appl. Numer. Math. — 2011. — 61, № 1. — P. 131–148.
16. *Kolk M., Pedas A.* Numerical solution of Volterra integral equations with weakly singular kernels which may have a boundary singularity// Math. Model. Anal. — 2009. — 14, № 1. — P. 79–89.
17. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. — Philadelphia: SIAM, 1985.
18. *Weiss R., Anderssen R. S.* A product integration methods for a class of singular first kind Volterra equations// Numer. Math. — 1972. — 18, № 5. — P. 442–456.

Орлов Сергей Сергеевич
Иркутский государственный университет
E-mail: orlov_sergey@inbox.ru

Будникова Ольга Сергеевна
Иркутский государственный университет
E-mail: osbud@mail.ru

Ботороева Мария Николаевна
Иркутский государственный университет
E-mail: masha88888@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 115–123
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-115-123

УДК 517.957.7

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ
УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ
И ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТЕ В ДИФФУЗИОННЫХ МОДЕЛЯХ
ОНКОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

© 2022 г. М. В. ПОЛОВИНКИНА, И. П. ПОЛОВИНКИН

Аннотация. Установлены достаточные условия устойчивости стационарного решения в популяционной диффузионной модели роста опухоли и в модели иммунного ответа. Выявлен эффект, присущий лишь диффузионной модели, в отличие от точечной: тривиальное решение может оказаться устойчивым в зависимости от размеров рассматриваемой области.

Ключевые слова: система с распределенными параметрами, популяционная диффузионная модель роста опухоли, модель иммунного ответа, устойчивость стационарного решения.

ON SUFFICIENT CONDITIONS
FOR THE STABILITY OF A STATIONARY SOLUTION
AND ON ONE EFFECT IN DIFFUSION MODELS
OF ONCOLOGICAL PROCESSES

© 2022 M. V. POLOVINKINA, I. P. POLOVINKIN

ABSTRACT. Sufficient conditions for the stability of the stationary solution in the population diffusion model of tumor growth and in the model of the immune response are established. An effect is revealed that is inherent only in the diffusion model, in contrast to the point model: the trivial solution may turn out to be stable depending on the size of the domain considered.

Keywords and phrases: system with distributed parameters, population diffusion model of tumor growth, immune response model, stability of stationary solution.

AMS Subject Classification: 35Q92, 35B40, 92C50, 35J15

1. Введение. В настоящее время существует внушительное количество математических моделей роста опухоли, отображаемого обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных (см. [9]). Были разработаны точные и численные методы для решения начальных и начально-краевых задач, порождаемых этими моделями, а также методы изучения качественных свойств таких моделей. Последние, в свою очередь, в частности, включают исследования по устойчивости стационарного состояния. Настоящая работа посвящена устойчивости стационарного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующей рост опухоли.

2. Постановка задачи. В задачу данной работы не входит выявление каких-либо новых фактов на стадии моделирования; цель состоит в изучении математической модели онкологических

процессов, ранее предложенной признанными в области моделирования специалистами. Приводимое ниже описание рассматриваемой модели почерпнуто из работы [1], в которой можно познакомиться с весьма представительным обзором литературы по теме математического моделирования в онкологии. Статья [1] цитируется для описания модели как объекта нашего исследования.

Пусть u_1 — линейная плотность делящихся клеток, u_2 — нормальных и u_3 — погибших. Рост опухоли рассматривается на отрезке длиной l . С учетом введенных обозначений система дифференциальных уравнений, описывающая динамику трех типов клеток, имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu_1 u_1 - \mu_1 u_1 u_3 - \gamma_1 u_1 u_3, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \mu_2 u_2 (1 - u_2) - \mu_2 u_2 u_3 - \gamma_2 u_1 u_2, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= (\gamma_2 u_1 u_2 + \gamma_1 u_1 u_3 + \gamma_3 u_2 u_3)(1 - u_3).\end{aligned}\quad (1)$$

В первом уравнении $\mu_1 u_1$ — скорость «собственного» роста делящихся клеток, $\gamma_1 u_1 u_3$ — скорость ингибирования погибшими клетками делящихся, $\mu_1 u_1 u_3$ — скорость вытеснения делящихся клеток погибшими. Слагаемое $\mu_2 u_2 (1 - u_2)$ во втором уравнении — скорость изменения численности нормальных клеток, $\gamma_2 u_1 u_2$ — скорость ингибирования делящимися клетками нормальных, $\mu_2 u_2 u_3$ — скорость ингибирования нормальных клеток погибшими, $\mu_2 u_2 u_3$ — скорость вытеснения нормальных клеток погибшими. Скорость увеличения плотности погибших клеток в третьем уравнении пропорциональна $(\gamma_2 u_1 u_2 + \gamma_1 u_1 u_3 + \gamma_3 u_2 u_3)(1 - u_3)$, множитель $(1 - u_3)$ отражает тот факт, что заполнение функционального пространства, занимаемого мертвыми клетками, происходит тем медленнее, чем больше его наполнение. Положительные константы μ_1 , μ_2 , γ_1 , γ_2 , γ_3 характеризуют скорости реакций, D_1 и D_2 — коэффициенты диффузии делящихся клеток и нормальных соответственно. В качестве граничных условий принимаются следующие:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_3}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_3}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (3)$$

Они означают, что на границах отрезка происходит свободный рост численности клеток.

На начальном этапе роста делящихся клеток иммунная система при некоторых видах опухолей распознает делящиеся клетки и лимфоциты начинают уничтожать их. Пусть $q = q(x, t)$ — линейная плотность лимфоцитов. Тогда математическая модель, описывающая взаимодействие делящихся клеток и лимфоцитов, в предположении об отсутствии их взаимодействия с нормальными и погибшими клетками, имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu_1 u_1 - \gamma_{12} u_1 q, \quad (4)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D_4 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - v \frac{\partial q}{\partial x} - \gamma_{21} u_1 q. \quad (5)$$

Здесь $\gamma_{12} u_1 q$ в первом уравнении — скорость уничтожения делящихся клеток лимфоцитами, а во втором $\gamma_{21} u_1 q$ — скорость гибели лимфоцитов при контакте с делящимися клетками, D_1 — коэффициент диффузии делящихся клеток, D_4 — лимфоцитов, γ_{12} , γ_{21} — константы, характеризующие взаимодействие делящихся клеток и лимфоцитов, v — скорость поступления лимфоцитов в область скопления делящихся клеток.

Предполагается, что в отсутствие делящихся клеток система находится в положении равновесия с концентрацией лимфоцитов, равной q^0 . Делящиеся клетки возникают в точке $x = x_0$. При этих предположениях в качестве начальных условий берутся следующие:

$$u_1(x, 0) = u_1^0 \delta(x - x_0), \quad q(x, 0) = q^0.$$

Перейдем от модели с точечным возникновением делящихся клеток к модели, в которой предполагается некоторое их гладкое распределение в начальный момент времени. Тогда будем иметь

начальные условия вида

$$u_1(x, 0) = u_1^0(x) \in C^\infty([0, l]), \quad q(x, 0) = q^0. \quad (6)$$

При выборе граничных условий предполагается, что

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad q|_{x=0} = q^0, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad q|_{x=l} = q^0. \quad (8)$$

3. Исследование устойчивости стационарного решения в модели иммунного ответа. В настоящей работе будем интересоваться устойчивостью стационарного решения системы (4)–(8), т.е. решения (w_1, w_2) системы

$$\begin{aligned} D_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu_1 w_1 - \gamma_{12} w_1 w_2 &= 0, \\ D_4 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - v \frac{\partial w_2}{\partial x} - \gamma_{21} w_1 w_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad w_2|_{x=0} = q^0, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad w_2|_{x=l} = q^0. \quad (11)$$

Пусть $w = (w_1, w_2)$ – стационарное решение системы (4)–(8), т.е. решение системы (9)–(11). Пусть $z_1 = u_1 - w_1$, $z_2 = q - w_2$. Выведем уравнения для каждого из отклонений z_j , полученное равенство умножим на z_j и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$.

Из первого уравнения системы (4) имеем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial z_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 (w_1 + z_1)}{\partial x^2} + \mu_1 (w_1 + z_1) - \gamma_{12} (w_1 + z_1)(w_2 + z_2).$$

Раскрывая скобки, получим

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \mu_1 z_1 - \gamma_{12} w_2 z_1 - \gamma_{12} w_1 z_2 - \gamma_{12} z_1 z_2 + D_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu_1 w_1 - \mu_1 w_1 w_2 - \gamma_{12} w_1 w_2.$$

В силу того, что $w = (w_1, w_2)$ является решением системы (9), сумма последних четырех слагаемых в правой части последнего равенства равна нулю. Поэтому получим

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \mu_1 z_1 - \gamma_{12} w_2 z_1 - \gamma_{12} w_1 z_2 - \gamma_{12} z_1 z_2. \quad (12)$$

Умножим равенство (12) на z_1 , после чего получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (z_1^2) = D_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} z_1 + \mu_1 z_1^2 - \gamma_{12} w_2 z_1^2 - \gamma_{12} w_1 z_1 z_2.$$

Считая отклонения z_j достаточно малыми, после умножения равенств на z_j будем отбрасывать одночлены переменных (z_1, z_2) , имеющие степень выше второй. Последнее равенство после этого будет преобразовано к виду

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (z_1^2) = D_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} z_1 + \mu_1 z_1^2 - \gamma_{12} w_2 z_1^2 - \gamma_{12} w_1 z_1 z_2.$$

Проинтегрируем полученное равенство по отрезку $[0, l]$ и получим

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (z_1^2) dx = D_1 \int_0^l \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} z_1 dx + \mu_1 \int_0^l z_1^2 dx - \gamma_{12} \int_0^l w_2 z_1^2 dx - \gamma_{12} \int_0^l w_1 z_1 z_2 dx.$$

К первому интегралу в правой части последнего равенства применим формулу интегрирования по частям. Учитывая граничные условия, получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l z_1^2 dx = -D_1 \int_0^l \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right)^2 dx + \mu_1 \int_0^l z_1^2 dx - \gamma_{12} \int_0^l w_2 z_1^2 dx - \gamma_{12} \int_0^l w_1 z_1 z_2 dx. \quad (13)$$

Аналогичным образом после подстановки $q = w_2 + z_2$, получим из второго уравнения:

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} = D_4 \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} - v \frac{\partial z_2}{\partial x} - \gamma_{21} w_2 z_1 - \gamma_{21} w_1 z_2 - \gamma_{21} z_1 z_2. \quad (14)$$

На сей раз наличие слагаемого $-v \partial z / \partial x$ заставляет нас проделать дополнительные преобразования. Сначала перепишем равенство (14) в виде

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} = D_4 \exp(\sigma x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp(-\sigma x) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right) - \gamma_{21} w_2 z_1 - \gamma_{21} w_1 z_2 - \gamma_{21} z_1 z_2, \quad (15)$$

где $\sigma = v/D_4$. Умножим равенство (15) на $\exp(-\sigma x) z_2$ и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$. Отбрасывая опять одночлен третьей степени переменных z_1, z_2 , получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \exp(-\sigma x) z_2^2 dx = D_4 \int_0^l z_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp(-\sigma x) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right) dx - \int_0^l \exp(-\sigma x) (\gamma_{21} w_2 z_1^2 - \gamma_{21} w_1 z_1 z_2) dx,$$

или, после интегрирования по частям, с учетом краевых условий,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \exp(-\sigma x) z_2^2 dx = -D_4 \int_0^l \exp(-\sigma x) \left(\frac{\partial z_2}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^l \exp(-\sigma x) (\gamma_{21} w_2 z_1 z_2 - \gamma_{21} w_1 z_2^2) dx. \quad (16)$$

Сложив равенства (13) и (16), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l (z_1^2 + \exp(-\sigma x) z_2^2) dx = \\ = -D_1 \int_0^l \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right)^2 dx - D_4 \int_0^l \exp(-\sigma x) \left(\frac{\partial z_2}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^l (\beta_{11} z_1^2 + 2\beta_{12} z_1 z_2 + \beta_{22} z_2^2) dx, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \mu_1 - \gamma_{12} w_2, \\ \beta_{12} &= \beta_{21} = -\frac{1}{2} (\gamma_{12} w_1 + \gamma_{21} w_2 \exp(-\sigma x)), \\ \beta_{22} &= -\exp(-\sigma x) \gamma_{21} w_1. \end{aligned}$$

Нас интересует знак выражения, определенного формулой (17). Более точно, мы хотим установить достаточные условия для того, чтобы это выражение было отрицательным. Безусловно, отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \beta_{kj} \xi_k \xi_j$$

будет таким достаточным условием. Однако еще есть резерв для уточнения достаточных условий. Воспользуемся методом, примененным в [3]. К интегралам от квадратов производных в правой части равенства (17) применим одномерный вариант равенства Стеклова—Пуанкаре—Фридрихса (см. [2, 4, 5, 7]). Воспроизведем вывод этого неравенства с целью уточнения мультипликативной «постоянной», которая не зависит от функции, входящей в неравенство, но зависит от длины

отрезка l , что может оказаться важным. Итак, используя неравенство Коши—Буняковского—Шварца, имеем

$$\int_0^l y^2 dx = \int_0^l \left(\int_0^x 1 \cdot \frac{dy}{ds} ds \right)^2 dx \leq \int_0^l \left(\int_0^x 1^2 ds \cdot \int_0^x \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 ds \right) dx.$$

Далее, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\int_0^x 1^2 ds \cdot \int_0^x \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 ds \right) dx &= \int_0^l \left(x \cdot \int_0^x \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 ds \right) dx \leq \\ &\leq \int_0^l x dx \int_0^l \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 ds = \frac{l^2}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Итак, окончательно имеем

$$\int_0^l y^2 dx \leq \frac{l^2}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (18)$$

Это и есть одномерное неравенство Стеклова—Пуанкаре—Фридрихса. С его помощью оценим первое слагаемое в (17).

Для оценки второго слагаемого в (17) придется вывести еще одно неравенство — «весовое неравенство Стеклова—Пуанкаре—Фридрихса». Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^l y^2 dx &= \int_0^l \left(\int_0^x \exp(-\sigma s/2) \cdot \exp(\sigma s/2) \cdot \frac{dy}{ds} ds \right)^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^l \left(\int_0^x \exp(\sigma s) ds \cdot \int_0^x \exp(-\sigma s) \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 ds \right) dx. \end{aligned}$$

Далее, очевидно,

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\int_0^x \exp(\sigma s) ds \cdot \int_0^x \exp(-\sigma s) \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 ds \right) dx &= \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_0^l \left((\exp(\sigma x) - 1) \cdot \int_0^x \exp(-\sigma s) \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 ds \right) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\sigma} \int_0^l (\exp(\sigma x) - 1) dx \int_0^l \exp(-\sigma s) \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 ds = \frac{\exp(\sigma l) - 1 - l\sigma}{\sigma^2} \int_0^l \exp(-\sigma x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Итак, окончательно получаем

$$\int_0^l y^2 dx \leq \frac{\exp(\sigma l) - 1 - l\sigma}{\sigma^2} \int_0^l \exp(-\sigma x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (19)$$

С учетом неравенств (18), (19) из равенства (17) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l (z_1^2 + \exp(-\sigma x) z_2^2) dx \leq \int_0^l (\alpha_{11} z_1^2 + 2\alpha_{12} z_1 z_2 + \alpha_{22} z_2^2) dx,$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \beta_{11} - 2D_1/l^2 = \mu_1 - \gamma_{12}w_2 - 2D_1/l^2, \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21} = -\frac{1}{2}(\gamma_{12}w_1 + \gamma_{21}w_2 \exp(-\sigma x)), \\ \alpha_{22} &= \beta_{22} - \frac{\sigma^2 D_4}{\exp(\sigma l) - 1 - l\sigma} = -\exp(-\sigma x)\gamma_{21}w_1 - \frac{\sigma^2 D_4}{\exp(\sigma l) - 1 - l\sigma}.\end{aligned}$$

Уточненное достаточное условие асимптотической устойчивости стационарного решения состоит в том, чтобы квадратичная форма

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_{kj} \xi_k \xi_j$$

была отрицательно определенной. Это условие равносильно следующей системе двух условий:

$$\mu_1 - \gamma_{12}w_2 - 2D_1/l^2 < 0, \quad (20)$$

$$4\left(\mu_1 - \gamma_{12}w_2 - \frac{2D_1}{l^2}\right)\left(-\exp(-\sigma x)\gamma_{21}w_1 - \frac{\sigma^2 D_4}{\exp(\sigma l) - 1 - l\sigma}\right) - (\gamma_{12}w_1 + \exp(\sigma l)\gamma_{21}w_2)^2 > 0. \quad (21)$$

Отметим одно важное обстоятельство, отличающее рассматриваемую диффузионную модель иммунного ответа от ее точечного аналога. Если формально перейти к точечной модели от модели (4), отбрасывая диффузионные и конвективные члены, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_1}{dt} = \mu_1 u_1 - \gamma_{12} u_1 q, \quad \frac{dq}{dt} = -\gamma_{21} u_1 q. \quad (22)$$

Очевидно, что векторная функция с координатами $u_1 = 0$, $q = 0$ является неустойчивым стационарным решением системы (22). Однако для системы (4) эта же векторная функция может оказаться и устойчивым стационарным решением при выполнении условия

$$\mu_1 - \frac{2D_1}{l^2} < 0. \quad (23)$$

Условие (21) для нулевого решения оказывается излишним, так как оно становится следствием условия (23).

4. Модель без делящихся и погибших клеток. Приведем более простой пример применения описанного выше приема. В отсутствие делящихся и погибших клеток количество нормальных клеток растет по логистическому закону, что выражается уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu_2 p(1 - p). \quad (24)$$

В этой модели предполагается, что p — линейная плотность нормальных клеток, скорость их рождения равна $\mu_2 p$, а гибель происходит со скоростью $\mu_2 p^2$.

Пусть p_0 — стационарное решение уравнения (24), т.е. решение уравнения

$$D_2 \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} + \mu_2 p_0(1 - p_0) = 0. \quad (25)$$

Следуя уже отработанному выше плану, подставим представление $z_0 = p - p_0$ в уравнение (24). В результате получим следующее равенство:

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \mu_2 z_0(1 - 2p_0) - \mu_2 z_0^2 + D_2 \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} + \mu_2 p_0(1 - p_0)$$

или, учитывая (25),

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \mu_2 z_0(1 - 2p_0) - \mu_2 z_0^2.$$

Умножим это равенство на z_0 и проинтегрируем полученное равенство по отрезку $[0, l]$. Получим после интегрирования по частям

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l z_0^2 dx = -D_2 \int_0^l \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 dx + \mu_2 \int_0^l (1 - 2p_0) z_0^2 dx - \mu_2 \int_0^l z_0^3 dx.$$

Применяя неравенство Стеклова—Пуанкаре—Фридрихса (18), получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l z_0^2 dx \leq \int_0^l \left(\mu_2(1 - 2p_0) - \frac{2D_2}{l^2} \right) z_0^2 dx - \mu_2 \int_0^l z_0^3 dx. \quad (26)$$

Пользуясь тем, что в отличие от общего случая выкладки здесь будут не очень громоздкими, покажем, на каком основании можно отбросить интеграл от z_0^3 . Действительно, если отклонение z_0 достаточно мало, будет выполняться неравенство

$$\left| \mu_2 \int_0^l z_0^3 dx \right| < \frac{1}{2} \left| \int_0^l \left(\mu_2(1 - 2p_0) - \frac{2D_2}{l^2} \right) z_0^2 dx \right|,$$

а поэтому для таких отклонений знак правой части неравенства (26) совпадает со знаком первого слагаемого. Отсюда сразу следует, что неравенство

$$\mu_2(1 - 2p_0) - \frac{2D_2}{l^2} < 0 \quad (27)$$

является достаточным условием для асимптотической устойчивости стационарного решения уравнения (24).

При граничных условиях

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$$

уравнению (24) удовлетворяют решения $p_0 = 0$ и $p_0 = 1$. В [1] указывается, что первое решение будет неустойчивым, а второе устойчивым. Учитывая условие (27), можем несколько уточнить этот тезис. Решение $p_0 = 0$ может оказаться и устойчивым при выполнении условия

$$\mu_2 - \frac{2D_2}{l^2} < 0.$$

Это снова эффект перехода от точечной модели к диффузионной. Другими словами, мы наблюдаем эффект перехода к модели в виде системы с распределенными параметрами от модели с сосредоточенными параметрами.

Уравнение (24) известно давно: его предложил Г. Хотеллинг в 1921 г. как модель роста популяции и ее пространственного распространения. Рост моделировался на основе принципов Мальтуса и Ферхюльста как логистический процесс, тогда как источником построения миграционных процессов в пространстве послужила теория Фурье распространения тепла. Вводилось понятие насыщенной плотности популяции, и если реальная плотность была выше, популяция уменьшалась, если ниже, то увеличивалась. Обоснование пространственной диффузии строилось на том, что при увеличении популяции (рабочей силы) сокращается выпуск продукции на душу населения, при этом происходит уменьшение доходов, и люди движутся из более населенных мест к менее населенным областям. Обозначая популяцию через $p = p(x, y, t)$, а коэффициент ее плотности через s , получаем уравнение (см. [6]):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(s - p)p + B\Delta p, \quad (28)$$

где A и B две постоянные, представляющие соответственно темпы роста и распространения. Время обозначается буквой t , x , y — пространственные координаты.

Отметим также, что приведенные выше выкладки являются развитием метода, изложенного в [3], а настоящий раздел просто пересказывает эту работу, в которой условие вида (27) ослабляет условие вида

$$s - 2p_0 < 0,$$

достаточность которого для устойчивости стационарного решения уравнения (28) доказана Т. Пу (см. [6]); в нашем случае из-за перехода к безразмерным переменным $s = 1$. Кстати, условию Т. Пу нулевое решение не удовлетворяет. Однако мы видели, что это еще не означает его неустойчивость. Можно ли еще ослабить достаточное условие устойчивости стационарного решения, неизвестно.

Отметим также, что к уравнению (24) можно прийти и отправляясь от модели глиомы, описанной в [8].

5. Устойчивость стационарного решения в базовой модели. Остановимся вкратце на проблеме устойчивости стационарного решения системы (1)–(3), т.е. решения (v_1, v_2, v_3) системы

$$\begin{aligned} D_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \mu_1 v_1 - \mu_1 v_1 v_3 - \gamma_1 v_1 v_3 &= 0, \\ D_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \mu_2 v_2 (1 - v_2) - \mu_2 v_2 v_3 - \gamma_2 v_1 v_2 &= 0, \\ (\gamma_2 v_1 v_2 + \gamma_1 v_1 v_3 + \gamma_3 v_2 v_3)(1 - v_3) &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_3}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_3}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (31)$$

Пусть $v = (v_1, v_2, v_3)$ — стационарное решение системы (1)–(3), т.е. решение системы (29)–(31). Пусть $z_j = u_j - v_j$, $j = 1, 2, 3$. Положим

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mu_1 + \mu_1 v_3 - \gamma_1 v_3 - \frac{2D_1}{l^2}, \\ a_{12} &= a_{21} = -\frac{1}{2} \gamma_2 v_2, \\ a_{13} &= a_{31} = \frac{1}{2} (\gamma_2 v_2 + \gamma_1 v_3 - \gamma_2 v_2 v_3 - \gamma_1 v_3^2 - \mu_1 v_1 - \gamma_1 v_1), \\ a_{23} &= a_{32} = \frac{1}{2} (\gamma_2 v_1 + \gamma_3 v_3 - \gamma_2 v_1 v_3 - \gamma_3 v_3^2 - \mu_2 v_2), \\ a_{22} &= \mu_2 - 2\mu_2 v_2 - 2\mu_2 v_3 - \gamma_2 v_1 - \frac{2D_2}{l^2}, \\ a_{33} &= \gamma_1 v_1 + \gamma_3 v_2 - \gamma_2 v_1 v_2 - 2\gamma_1 v_1 v_3 - 2\gamma_3 v_2 v_3. \end{aligned}$$

Действуя по тому же плану, что и выше, без труда установим, что уточненное достаточное условие асимптотической устойчивости стационарного решения системы (1)–(3), состоит в том, чтобы квадратичная форма

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{kj} \xi_k \xi_j \quad (32)$$

была отрицательно определенной. Безусловно, проверка этого условия хотя и несколько громоздка, все же вполне реализуема, особенно с помощью компьютера.

На сей раз нетрудно проверить, что тривиальное решение $(0, 0, 0)$ системы (1)–(3) не удовлетворяет достаточному условию устойчивости: в точке $(0, 0, 0)$ квадратичная форма (32) не является отрицательно определенной. Но здесь следует также отметить, что третье уравнение системы не содержит диффузионного члена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жукова И. В., Колпак Е. П.* Математические модели злокачественной опухоли// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. мат. Информ. Проц. упр. — 2014. — № 3. — С. 5–18.
2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
3. *Мешков В. З., Половинкин И. П., Семенов М. Е.* Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга// Обозр. прикл. промышл. мат. — 2002. — 9, № 1. — С. 226 – 227.
4. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
5. *Friedrichs K. O.* Spectral Theory of Operators in Hilbert Space. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1973.
6. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — Springer-Verlag, 1997.
7. *Rektorys K.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. — Springer Science+Business Media, 2012.
8. *Swanson K. R., Rostomily R. C., Alword E. C.* A mathematical modeling tool for predicting survival of individual patients following resection of glioblastoma: a proof of principle// British J. Cancer. — 2008. — 98, № 1. — P. 113–119.
9. *Yin A. Moes D. J., Van Hasselt C., Swen J. Guchelaar H.-J.* A review of mathematical models for tumor dynamics and treatment resistance evolution of solid tumors// CPT: Pharmacometrics & Systems Pharmacology. — 2019. — 8. — P. 720–737.

Половинкина Марина Васильевна
Воронежский государственный университет инженерных технологий
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Половинкин Игорь Петрович
Воронежский государственный университет
E-mail: polovinkin@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 124–134
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-124-134

УДК 517.958, 517.927.25

РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С РАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ
ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОЛНОТЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2022 г. В. С. РЫХЛОВ

Аннотация. Рассматривается смешанная задача для гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и смешанной производной. Предполагается, что краевые условия являются распадающимися (одно в левом конце основного интервала, другое в правом конце), корни характеристического уравнения простые и лежат на положительном луче. На коэффициенты уравнения и краевых условий наложены такие условия, что отсутствует двукратная полнота собственных функций соответствующей спектральной задачи для дифференциального квадратичного пучка. Методом контурного интеграла Пуанкаре–Коши получены достаточные условия разрешимости данной задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, гиперболическое уравнение, существование решения, разрешимость смешанной задачи, распадающиеся краевые условия, постоянные коэффициенты, собственные функции, двукратная неполнота, двукратное разложение, нерегулярный операторный пучок, дифференциальный пучок, метод контурного интеграла, метод Пуанкаре–Коши.

SOLVABILITY OF A MIXED PROBLEM FOR A HYPERBOLIC
EQUATION WITH SPLITTING BOUNDARY CONDITIONS
IN THE CASE OF INCOMPLETE SYSTEM
OF EIGENFUNCTIONS

© 2022 V. S. RYKHLOV

ABSTRACT. In this paper, we consider a mixed problem for a second-order hyperbolic equation with constant coefficients and a mixed partial derivative. We assume that the boundary conditions are splitted (i.e., one condition is posed at the left endpoint of the main interval and the other at the right endpoint) and the roots of the characteristic equation are simple and lie on the positive half-line. The coefficients of the equation and the boundary conditions are constrained by conditions that guarantee the absence of the two-fold completeness of eigenfunctions of the corresponding spectral problem for the differential quadratic pencil. Using the Poincaré–Cauchy contour integral method, we to obtain sufficient conditions for the solvability of this problem.

Keywords and phrases: mixed problem, hyperbolic equation, existence of solutions, solvability of mixed problem, splitting boundary conditions, constant coefficients, eigenfunctions, two-fold incompleteness, two-fold expansion, irregular operator pencil, differential pencil, contour integral method, Poincaré–Cauchy method.

AMS Subject Classification: 35L20, 35P10

1. Постановка смешанной задачи. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, +\infty), \quad (1)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \alpha_0 \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = 0, \quad \beta_1 \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial u(1, t)}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f_1(x), \quad (3)$$

где $p_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbb{C}$. Условие гиперболичности уравнения (1) означает, что

$$p_1^2 - 4p_2 > 0. \quad (4)$$

В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1 \omega + p_2 = 0.$$

вещественны.

Помимо предположения (4), будем накладывать условие

$$0 < \omega_1 < \omega_2 \iff p_1 < 0, \quad p_2 > 0. \quad (5)$$

Это условие, наряду со специфическим видом краевых условий (2), требуется для того, чтобы выделить такой класс смешанных задач (1)–(3), для которого соответствующая спектральная задача не обладала бы двукратной полнотой системы ее собственных функций. Соответствующие предположения будут сделаны немного ниже (см. (10)).

При сделанных предположениях требуется найти *классическое решение* задачи (1)–(3), т.е. найти такую функцию $u(x, t)$, которая в области $Q = \{(x, t) \mid x \in [0, 1], t \in [0, +\infty)\}$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, удовлетворяет краевым условиям (2) и начальным условиям (3).

Для нахождения классического решения задачи (1)–(3) будем использовать метод контурного интеграла («вычетный метод») Пуанкаре–Коши. (см., например, [1, 2, 6–8, 20–22]). Следует отметить, что в последние годы большой вклад в обоснование этого метода, но для классических смешанных задач, уравнение которых не содержит смешанных частных производных, но допускающих наличие младших и свободного членов при самых общих предположениях и новых подходах внесли А. П. Хромов и его ученики (см. [16, 17]).

2. Преобразование к спектральной задаче и формальное представление решения.

Будем искать решение задачи (1)–(2) в виде $u(x, t) = e^{\lambda t} y(x, \lambda)$. Приходим к спектральной задаче

$$L(\lambda)y = 0 \quad (6)$$

для квадратичного пучка $L(\lambda)$, определенного формулами

$$\ell(y, \lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y, \quad (7)$$

$$U_1(y, \lambda) := \alpha_1 y'(0) + \lambda \alpha_0 y(0) = 0, \quad U_2(y, \lambda) := \beta_1 y'(1) + \lambda \beta_0 y(1) = 0. \quad (8)$$

Фундаментальную систему решений уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ образуют функции

$$y_1(x, \lambda) := e^{\lambda \omega_1 x}, \quad y_2(x, \lambda) = e^{\lambda \omega_2 x}.$$

Далее считаем для определенности, что $\alpha_1 \neq 0$ и $\beta_1 \neq 0$. В остальных случаях тоже можно получить соответствующие результаты, только обозначения будут другими.

Введем обозначения

$$v_j = \alpha_1 \omega_j + \alpha_0, \quad w_j = \beta_1 \omega_j + \beta_0, \quad V_j = \begin{pmatrix} v_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} 0 \\ w_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2;$$

$$a_{sk} = \det(W_s, W_k), \quad a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k), \quad a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k), \quad a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k), \quad s, k = 1, 2.$$

Характеристический определитель пучка $L(\lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det \left(U_i(y_j, \lambda) \right)_{i,j=1}^2 = \lambda^2 \left| V_1 + e^{\lambda\omega_1} W_1; V_2 + e^{\lambda\omega_2} W_2 \right| = \\ &= \lambda^2 \left(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} a_{12} \right) = \lambda^2 \left(e^{\lambda\omega_1} a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2} \right) = \lambda^2 \Delta_0(\lambda), \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_{1\bar{2}} = -v_2 w_1$, $a_{\bar{1}2} = v_1 w_2$, а коэффициенты $a_{\bar{1}\bar{2}}$ и a_{12} в рассматриваемом случае, очевидно, равны нулю, ввиду специфики краевых условий.

Если $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$ и $a_{12} \neq 0$ в (9), то пучок $L(\lambda)$ регулярен по Биркгофу и его функция Грина имеет оценку $O(1/|\lambda|)$ вне кружков фиксированного достаточно малого радиуса около собственных значений (см. [5, 14, 19, 23]).

Если же $a_{12} = 0$ или $a_{12} = a_{\bar{1}2} = 0$ в (9) (или $a_{\bar{1}\bar{2}} = 0$ или $a_{\bar{1}\bar{2}} = a_{\bar{1}2} = 0$ в симметричном случае), то функция Грина этого пучка имеет экспоненциальный рост при $|\lambda| \rightarrow \infty$ и $\arg \lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$. Такие пучки, как известно, относятся к классу нерегулярных пучков (см., например, [12, 18]).

Пусть далее выполняются условия

$$v_1 \neq 0, \quad v_2 \neq 0, \quad w_1 \neq 0, \quad w_2 \neq 0. \quad (10)$$

В этом случае пучок $L(\lambda)$ не является вырожденным, т.е. существует счетное число собственных значений и собственных функций. В то же время $L(\lambda)$ не является регулярным по Биркгофу.

Порождающей функцией (см. [12]) для системы собственных функций пучка $L(\lambda)$ будет функция (при $\lambda \neq 0$)

$$\gamma(z, \lambda) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ e^{\lambda\omega_1 x} & e^{\lambda\omega_2 x} \end{vmatrix} = -v_2 e^{\lambda\omega_1 x} + v_1 e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Как показано в [9] (см. также [10]) система $\{\gamma(x, \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$, а следовательно, и система собственных функций пучка $L(\lambda)$, определяемого формулами (7)–(8), двукратно не полна в $L_2[0, 1]$ и имеет бесконечный дефект относительно двукратной полноты.

Насколько известно автору, условия разрешимости смешанной задачи (1)–(3) при таких предположениях ранее не были получены.

Из (9)–(10) следует, что корни уравнения $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеют вид

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i + d_0}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

где $d_0 := \ln_0 c_0$, $c_0 = -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{\bar{1}2} = (v_2 w_1)/(v_1 w_2)$ (\ln_0 есть фиксированная ветвь натурального логарифма, удовлетворяющая условию $\ln_0 1 = 0$).

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Хорошо известно, что $\Lambda \setminus \{0\}$ — множество ненулевых собственных значений пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть собственным значением, а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$. Это требует дополнительного исследования, но для наших целей это не принципиально.

Линеаризуем пучок $L(\lambda)$ так, как это делается в [18]: положим $z_0 = y$, $z_1 = \lambda z_0$. Задача (6) тогда перейдет в следующую задачу на собственные значения в пространстве вектор-функций для оператора \hat{L} :

$$\hat{L}z = \lambda z, \quad z \in D_{\hat{L}}, \quad (12)$$

где $z = (z_0, z_1)^T$ и при обозначении $d_x = d/dx$

$$\begin{aligned} \hat{L}z &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2} d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2} d_x \end{pmatrix} z, \quad D_{\hat{L}} = \left\{ z \mid z'_0, z_1 \in L_1[0, 1], U_i(z) = 0, i = 1, 2 \right\}, \\ U_1(z) &:= \alpha_1 z'_0(0) + \alpha_0 z_1(0), \quad U_2(z) := \beta_1 z'_0(1) + \beta_0 z_1(1). \end{aligned}$$

Как показано в [18], собственные значения пучка $L(\lambda)$ и оператора \hat{L} совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ совпадает с системой собственных вектор-функций \hat{L} .

Пусть $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda \hat{E})^{-1}$ есть резольвента оператора \hat{L} или задачи (12) и $f = (f_0, f_1)^T$. Известно, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f d\lambda, \tag{13}$$

где γ_ν есть простой замкнутый контур, окружающий только одну точку λ_ν , есть разложение вектор-функции f в биортогональный ряд Фурье по собственным вектор-функциям оператора \hat{L} или, что одно и то же, производным цепочкам пучка $L(\lambda)$, построенным по системе его собственных функций.

Введем обозначение

$$\hat{R}_\lambda f = (z_0(x, \lambda; f), z_1(x, \lambda; f))^T,$$

где $z_1(x, \lambda; f) = \lambda z_0(x, \lambda; f) + f_0(x)$. Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\nu} e^{\lambda t} z_0(x, \lambda; f) d\lambda, \tag{14}$$

которая является формальным решением задачи (1)–(2), если не заботиться о сходимости ряда (14). Далее будут найдены условия на функции f_0 и f_1 , при которых ряд (14), а также ряд, продифференцированный почленно дважды по x и t , сходится равномерно в области $Q_T = \{(x, t) \mid x \in [0, 1], t \in [0, T]\}$, где $T > 0$ — произвольное фиксированное число. В этом случае функция $u(x, t)$ будет удовлетворять уравнению (1) и краевым условиям (2) всюду в Q .

Положим $t = 0$ в ряде (14) и в почленно продифференцированном ряде по t . Учитывая равномерную сходимость полученных рядов, получим, что для того, чтобы выполнялись начальные условия (3), достаточно выполнения следующих равенств при $x \in [0, 1]$

$$u(x, 0) = f_0(x) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\nu} z_0(x, \lambda; f) d\lambda, \tag{15}$$

$$u'_t(x, 0) = f_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\nu} \lambda z_0(x, \lambda; f) d\lambda \equiv -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{\gamma_\nu} z_1(x, \lambda; f) d\lambda. \tag{16}$$

С учетом (13) это приводит к необходимости нахождения условий разложимости вектор-функции $(f_0, f_1)^T$ по собственным вектор-функциям оператора \hat{L} или, что то же самое, нахождение условий двукратного разложения вектор-функции $(f_0, f_1)^T$ по собственным функциям пучка $L(\lambda)$. То, что этот пучок является нерегулярным и отсутствует двукратная полнота собственных функций, существенно усложняет дело.

3. Теорема о двукратном разложении по собственным функциям. Рассмотрим задачу нахождения условий на параметры пучка $L(\lambda)$, определяемого формулами (7)–(8), и на вектор-функцию $f = (f_0, f_1)^T$, при которых имеет место двукратная разложимость f в биортогональный ряд Фурье по собственным функциям этого пучка, т.е. имеют место формулы (15)–(16).

Эта задача представляет интерес только для нерегулярного пучка $L(\lambda)$, так как в регулярном случае задача о разложении решается без проблем (например, аналогично [5, с. 124–129]).

Задачи о разложении для простейших нерегулярных дифференциальных операторов первого и второго порядка со знакопеременной весовой функцией были решены в [3]. В случае оператора первого порядка на разлагаемую функцию накладывались условия непрерывности, ограниченности вариации и выполнения двух простых функциональных соотношений. В случае же дифференциального оператора второго порядка на разлагаемую функцию, помимо условий гладкости на основном отрезке, накладывались условия аналитической продолжимости в некоторые треугольники и выполнения там функциональных соотношений.

В случае простейшего нерегулярного дифференциального оператора третьего порядка, когда корни $\omega_j, j = \overline{1, 3}$, характеристического уравнения лежат в вершинах правильного треугольника, задача о разложении решена в [15]. При этом на разлагаемую функцию накладывались условия

аналитичности в некоторых многоугольниках комплексной плоскости и выполнения там некоторых функциональных соотношений. Обобщение этого результата на случай дифференциального оператора произвольного порядка $n = 4k + 1$, где $k \in \mathbb{N}$, было сделано в [4].

В случае пучка $L(\lambda)$, определяемого дифференциальным выражением (7) и краевыми условиями

$$\alpha_{i1}y'(0) + \lambda\alpha_{i0}y(0) + \beta_{i1}y'(1) + \lambda\beta_{i0}y(1) = 0, \quad i = 1, 2,$$

где коэффициенты краевых форм удовлетворяют условиям

$$a_{\bar{1}2} \neq 0, \quad a_{1\bar{2}} \neq 0, \quad a_{12} = a_{\bar{1}\bar{2}} = 0,$$

и выполняется условие (5), что обеспечивает нерегулярность пучка $L(\lambda)$, теорема о разложении доказана в [11].

В случае пучка $L(\lambda)$, определяемого формулами (7)–(8), возникшего при рассмотрении задачи (1)–(3) при условиях (5), (10) теорема о разложении анонсирована в [13]. Приведем без доказательства некоторые факты, которые позволили получить результат из [13] и которые необходимы для дальнейшего изложения. Введем для краткости обозначение $\theta = 1/(\omega_2 - \omega_1)$.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Если $f'_0, f_1 \in L_1[0, 1]$,

$$\tilde{f}(x) := -p_2f_1(x) - p_1f'_0(x), \quad f_\lambda(x) := \tilde{f}(x) - \lambda p_2f_0(x), \quad (17)$$

$$f_0(0) = f_0(1) = f'_0(0) = f'_0(1) = f_1(0) = f_1(1) = 0, \quad (18)$$

то

$$\begin{aligned} z_0(x, \lambda; f) &= \\ &= \frac{\theta}{\lambda\Delta_0(\lambda)} \int_0^1 \left(a_{1\bar{2}}e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} - a_{2\bar{2}}e^{\lambda(\omega_1x+\omega_2(1-\xi))} + a_{\bar{1}1}e^{\lambda(\omega_1(1-\xi)+\omega_2x)} - a_{\bar{1}2}e^{\lambda\omega_2(x+1-\xi)} \right) f_\lambda(\xi) d\xi + \\ &\quad + \frac{\theta}{\lambda} \int_0^x \left(-e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} + e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} \right) f_\lambda(\xi) d\xi =: A(x, \lambda; f_\lambda) + a(x, \lambda; f_\lambda), \quad (19) \end{aligned}$$

где $z_1(x, \lambda; f) = \lambda z_0(x, \lambda; f) + f_0(x)$.

Пусть $K_\delta(\lambda)$ — круг радиуса $\delta > 0$ с центром в точке λ и

$$\mathbb{C}_\delta = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\delta(\lambda) \right).$$

Обозначим через \mathbb{C}_δ^+ и \mathbb{C}_δ^- части множества \mathbb{C}_δ , лежащие в правой и левой полуплоскости соответственно.

Лемма 2. Существует такая положительная константа C_δ , что

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}_\delta^- : |\Delta_0(\lambda)| \geq C_\delta |e^{\lambda\omega_1}|; \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_\delta^+ : |\Delta_0(\lambda)| \geq C_\delta |e^{\lambda\omega_2}|. \quad (20)$$

Для формулировки теоремы о двукратном разложении по собственным функциям пучка $L(\lambda)$, определяемого формулами (7)–(8), введем необходимые обозначения:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{v_1}{v_2}, \quad e_2 = \frac{w_2}{w_1}, \quad d_1 = e_1e_2, \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \\ \alpha_x &= 1 - \frac{1-x}{\tau}, \quad \beta_x = \tau x, \quad \gamma_x = x + 1 - \frac{1}{\tau}, \\ \tilde{\alpha}_x &= 1 - \tau(1-x), \quad \tilde{\beta}_x = \frac{x}{\tau}, \quad \tilde{\gamma}_x = x - 1 + \frac{1}{\tau}, \\ I_{j\nu} &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\nu} z_j(x, \lambda; f) d\lambda, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

Пусть

$$F_1(x) := \int_0^x f_1(t) dt.$$

Положим

$$H_1(x, F_1) := -2F_1(x) + e_2 F_1(\alpha_x) - e_1 F_1(\beta_x) + d_1 F_1(\gamma_x) + \frac{1}{e_2} F_1(\tilde{\alpha}_x) - \frac{1}{e_1} F_1(\tilde{\beta}_x) + \frac{1}{d_1} F_1(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_2(x, f_0) := 2\omega_1 f_0(x) - e_2 \omega_2 f_0(\alpha_x) + e_1 \omega_1 f_0(\beta_x) - d_1 \omega_2 f_0(\gamma_x) - \frac{\omega_1}{e_2} f_0(\tilde{\alpha}_x) + \frac{\omega_2}{e_1} f_0(\tilde{\beta}_x) - \frac{\omega_2}{d_1} f_0(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_3(x, f_1) := -\frac{2}{\omega_1} f_1(x) + \frac{e_2}{\omega_2} f_1(\alpha_x) - \frac{e_1}{\omega_1} f_1(\beta_x) + \frac{d_1}{\omega_2} f_1(\gamma_x) + \\ + \frac{1}{\omega_1 e_2} f_1(\tilde{\alpha}_x) - \frac{1}{\omega_2 e_1} f_1(\tilde{\beta}_x) + \frac{1}{\omega_2 d_1} f_1(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_4(x, f'_0) := 2f'_0(x) - e_2 f'_0(\alpha_x) + e_1 f'_0(\beta_x) - d_1 f'_0(\gamma_x) - \frac{1}{e_2} f'_0(\tilde{\alpha}_x) + \frac{1}{e_1} f'_0(\tilde{\beta}_x) - \frac{1}{d_1} f'_0(\tilde{\gamma}_x).$$

Имеет место следующая теорема о разложении для нерегулярного пучка $L(\lambda)$.

Теорема 1. Если $f''_0, f'_1 \in L_p[0, 1]$, $p > 1$, а также выполняются условия (5), (10), (18),

$$F_1(1) = 0 \tag{21}$$

и

$$2\omega_1 < \omega_2, \tag{22}$$

то имеет место равномерная сходимость по $x \in [0, 1]$

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f d\lambda = f(x) + h(x, f), \tag{23}$$

где $h(x, f) = (h_0(x, f), h_1(x, f))^T$,

$$h_0(x, f) := p_2 \theta H_1(x, F_1) + \theta H_2(x, f_0) \tag{24}$$

$$h_1(x, f) := p_2 \theta H_3(x, f_1) + \theta H_4(x, f'_0), \tag{25}$$

В формулах (24)–(25) функции полагаются продолженными нулем, если их аргументы выходят за отрезок $[0, 1]$.

Наличие слагаемого $h(x, f)$ в (23) объясняется нерегулярностью пучка (7)–(8) и, как следствие, отсутствием двукратной полноты системы его собственных функций.

Важным для дальнейшего изложения является следствие из теоремы 1.

Следствие 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Для того, чтобы имели место равномерная по $x \in [0, 1]$ сходимость

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f d\lambda = f(x), \tag{26}$$

необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(x)$ удовлетворяла уравнению $h(x, f) \equiv 0$.

4. Теорема о разрешимости смешанной задачи. Справедлива следующая основная теорема настоящей статьи.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (5), (10), (21), (22),

$$f_0^{(4)}, f_1^{(3)} \in L_1[0, 1], \quad f_j^{(s)}(0) = f_j^{(s)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \quad s = \overline{0, 3-j}, \quad (27)$$

и, кроме того, функция $f = (f_0, f_1)^T$ удовлетворяет соотношению $h(x, f) = 0$ при $x \in [0, 1]$, где компоненты $h(x, f)$ определяются формулами (24)–(25) (в этих соотношениях функции полагаются продолженными нулем, если их аргументы выходят за отрезок $[0, 1]$). Тогда в области Q существует классическое решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3), определяемое формулой (14). Ряд в (14), а также почленно продифференцированный ряд в (14) до второго порядка включительно по x и t являются равномерно сходящимися во всякой области Q_T .

Доказательство. Из формул для собственных значений (11) следует, что в плоскости \mathbb{C} существуют такие контуры Γ_ν , которые отстоят от λ_k на расстояние не меньшее некоторого фиксированного достаточно малого числа $\delta > 0$, а между соседними контурами лежит ровно одно λ_k . В качестве таких контуров удобно взять, например, контуры $\widehat{A_\nu B_\nu C_\nu D_\nu A_\nu}$ (обход контура начинается с нижней левой угловой точки и проводится против часовой стрелки), где $\widehat{B_\nu C_\nu}$ и $\widehat{D_\nu A_\nu}$ есть отрезки прямых $\operatorname{Re} \lambda = \pm H$ ($H > 0$ достаточно большое число), а дуги $\widehat{A_\nu B_\nu}$ и $\widehat{C_\nu D_\nu}$ лежат вне δ -окрестностей собственных значений, являются дугами окружностей радиусов r'_ν, r''_ν , соответственно, с центрами в начале координат, причем такими, что $c'_1 \nu < r'_\nu < c'_2 \nu$, $c''_1 \nu < r''_\nu < c''_2 \nu$, где $c'_1, c''_1, c'_2, c''_2 > 0$ фиксированные константы, и скользят по прямым $\operatorname{Re} \lambda = \pm H$. Обозначим через E_ν и F_ν точки пересечения дуг $\widehat{A_\nu B_\nu}$ и $\widehat{C_\nu D_\nu}$ с мнимой осью. Пусть Γ_ν^+ и Γ_ν^- части контура Γ_ν , лежащие в правой и левой комплексной полуплоскости соответственно. Таким образом, $\Gamma_\nu^+ = \widehat{F_\nu D_\nu A_\nu E_\nu}$, а $\Gamma_\nu^- = \widehat{E_\nu B_\nu C_\nu F_\nu}$.

Из теоремы Коши для аналитических функций следует, что для того, чтобы доказать равномерную сходимость ряда (14) в области Q_T , достаточно доказать равномерную сходимость в этой области последовательности $I_\nu(f)$ при $\nu \rightarrow \infty$, где

$$I_\nu(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} z_0(x, \lambda; f) d\lambda.$$

Воспользуемся формулой (19) из леммы 1, условия которой при сделанных предположениях выполнены. С учетом (18) получим представление

$$z_0(x, \lambda; f) = A(x, \lambda; \tilde{f}) + a(x, \lambda; \tilde{f}) - \lambda p_2 A(x, \lambda; f_0) - \lambda p_2 a(x, \lambda; f_0).$$

Здесь $\lambda p_2 a(x, \lambda; f_0)$ есть целая аналитическая функция, а $a(x, \lambda; \tilde{f})$ есть аналитическая функция во всей комплексной плоскости за исключением точки $\lambda = 0$, в которой она имеет формально полюс первого порядка, а вычет равен нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} I_\nu(f) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} A(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} a(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} \lambda p_2 A(x, \lambda; f_0) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} \lambda p_2 a(x, \lambda; f_0) d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} A(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} \lambda p_2 A(x, \lambda; f_0) d\lambda. \quad (28) \end{aligned}$$

Для доказательства существования решения исходной задачи достаточно доказать, что выражения справа в (28) и выражения, получаемые из них почленным дифференцированием по x и t до второго порядка включительно, сходятся равномерно в Q_T при $\nu \rightarrow \infty$.

Учитывая (28), представим $I_\nu(f)$ следующим образом:

$$I_\nu(f) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_\nu^+} + \int_{\Gamma_\nu^-} \right] e^{\lambda t} A(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_\nu^+} + \int_{\Gamma_\nu^-} \right] e^{\lambda t} \lambda p_2 A(x, \lambda; f_0) d\lambda =: \sum_{j=1}^4 I_\nu^j(f) \quad (29)$$

Покажем, что каждое из этих четырех слагаемых равномерно сходится в Q_T при $\nu \rightarrow \infty$. С учетом наличия множителя λ в слагаемых $I_\nu^j(f)$ при $j = 3, 4$, рассуждения при рассмотрении первых двух слагаемых в (29) и последних двух слагаемых будут отличаться.

Рассмотрим сначала первые два слагаемых в (29). Рассуждения для них аналогичны. Для примера рассмотрим $I_\nu^1(f)$. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} I_\nu^1(f) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+} e^{\lambda t} A(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+} e^{\lambda t} \frac{\theta}{\lambda \Delta_0(\lambda)} \int_0^1 (a_{1\bar{2}} e^{\lambda \omega_1(x+1-\xi)} - a_{2\bar{2}} e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} + a_{1\bar{1}} e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2 x)} - \\ &\quad - a_{\bar{1}2} e^{\lambda \omega_2(x+1-\xi)}) \tilde{f}(\xi) d\xi d\lambda =: \sum_{s=1}^4 I_{\nu s}^1(f). \end{aligned} \quad (30)$$

Дальнейшие рассуждения для каждого слагаемого аналогичны. Рассмотрим для примера слагаемое $I_{\nu 1}^1(f)$. Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{I_{\nu 1}^1(f)\}_{\nu=1}^\infty$ в области Q_T воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим при $\mu < \nu$ разность:

$$I_{\mu 1}^1(f) - I_{\nu 1}^1(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{F_\nu C_\nu C_\mu F_\mu}} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{E_\mu B_\mu B_\nu E_\nu}} := I_{\mu\nu 1}^1(f) + I_{\mu\nu 2}^1(f). \quad (31)$$

Рассуждения для этих двух слагаемых аналогичны. Для примера рассмотрим $I_{\mu\nu 1}^1(f)$. Проведем в этом интеграле один раз интегрирование по частям по ξ . Получим

$$I_{\mu\nu 1}^1(f) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\widehat{F_\nu C_\nu}} + \int_{\widehat{C_\nu C_\mu}} + \int_{\widehat{C_\mu F_\mu}} \right) \frac{e^{\lambda t} \theta a_{1\bar{2}}}{\lambda^2 \omega_1 \Delta_0(\lambda)} \int_0^1 e^{\lambda \omega_1(x+1-\xi)} \tilde{f}'(\xi) d\xi d\lambda =: K_\nu(f) + M_{\nu\mu}(f) + N_\mu(f). \quad (32)$$

С учетом леммы 2 получим оценку

$$\begin{aligned} |K_\nu(f)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\widehat{F_\nu C_\nu}} \frac{|e^{\lambda t} \theta| |a_{1\bar{2}}|}{|\lambda|^2 |\omega_2| C_\delta \omega_1} \int_0^1 |e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)}| |\tilde{f}'(\xi)| |d\xi| |d\lambda| \right| \leq \\ &\leq C(\delta) e^{H(T+2\omega_1-\omega_2)} \|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]} \left| \int_{\widehat{F_\nu C_\nu}} \frac{1}{|\lambda|^2} |d\lambda| \right| \leq C(H, T, \delta) \|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]} \frac{1}{(r_\nu'')^2} \text{дл.} \widehat{F_\nu C_\nu} \leq \\ &\leq C(H, T, \delta) \|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]} \frac{\pi r_\nu''}{(r_\nu'')^2} \leq C(H, T, \delta) \|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]} \frac{1}{r_\nu''} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (33)$$

равномерно по $(x, t) \in Q_T$. Здесь и далее через $C(\cdot, \cdot, \dots)$ обозначаются различные константы, возможно зависящие от аргументов в круглых скобках.

Аналогично доказывается, что

$$|N_\mu(f)| \leq C(H, T, \delta) \|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]} \frac{1}{r_\mu''} \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (34)$$

равномерно по $(x, t) \in Q_T$.

Оценим оставшееся слагаемое $M_{\nu\mu}(f)$ в (32). После интегрирования по частям интеграла по ξ получим оценку

$$|M_{\nu\mu}(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\widehat{C_\nu C_\mu}} \frac{|e^{\lambda t} \theta| |a_{1\bar{2}}|}{|\lambda|^2 |\omega_2| C_\delta \omega_1} \int_0^1 |e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi)-\omega_2)} \tilde{f}'(\xi)| |d\xi| |d\lambda| \right| \leq \\ \leq C(\delta) e^{H(T+2\omega_1-\omega_2)} \|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]} \left| \int_{\widehat{C_\nu}} \frac{1}{|\lambda|^2} |d\lambda| \right|.$$

Делая замену $\lambda = H + iy$ в интеграле, получим

$$|M_{\nu\mu}(f)| \leq C(H, T, \delta) \|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]} \int_{\sqrt{(r''_\mu)^2 - H^2}}^{\sqrt{(r''_\mu)^2 - H^2}} \frac{dy}{H^2 + y^2} \leq \\ \leq C(H, T, \delta) \|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]} \int_{r''_\nu/2}^{r''_\mu} \frac{dy}{H^2 + y^2} = C(H, T, \delta) \|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]} \frac{2}{H} \left(\arctg \frac{y}{H} \right) \Big|_{r''_\nu/2}^{r''_\mu} = \\ = C(H, T, \delta) \|\tilde{f}'\|_{L_1[0,1]} \left(\arctg \frac{r''_\mu}{H} - \arctg \frac{r''_\nu}{2H} \right) \rightarrow 0, \quad \nu, \mu \rightarrow \infty, \quad (35)$$

равномерно по $(x, t) \in Q_T$.

На основании (32)–(35) получим, что

$$I_{\mu\nu 1}^1(f) \rightarrow 0, \quad \mu, \nu \rightarrow \infty, \quad (36)$$

равномерно по $(x, t) \in Q_T$. Аналогичные рассуждения показывают, что

$$I_{\mu\nu 2}^1(f) \rightarrow 0, \quad \mu, \nu \rightarrow \infty, \quad (37)$$

равномерно по $(x, t) \in Q_T$.

Таким образом, из (31), (36), (37) получим

$$I_{\mu 1}^1(f) - I_{\nu 1}^1(f) \rightarrow 0, \quad \mu, \nu \rightarrow \infty, \quad (38)$$

равномерно по $(x, t) \in Q_T$, а следовательно, по критерию Коши последовательность $\{I_{\nu 1}^1(f)\}$ при $\nu \rightarrow \infty$ сходится равномерно по $(x, t) \in Q_T$. Аналогично устанавливается, что и последовательность $\{I_{\nu s}^1(f)\}$ при $\nu \rightarrow \infty$ сходится равномерно по $(x, t) \in Q_T$ для $s = 2, 3, 4$.

Следовательно, из вышеизложенного получим, что последовательность $\{I_\nu^1(f)\}$ при $\nu \rightarrow \infty$ сходится равномерно по $(x, t) \in Q_T$. Аналогичные рассуждения приводят к справедливости этого утверждения для последовательности $\{I_\nu^2(f)\}$: последовательность $\{I_\nu^2(f)\}$ при $\nu \rightarrow \infty$ сходится равномерно по $(x, t) \in Q_T$.

Для доказательства равномерной сходимости последовательностей $\{I_\nu^j(f)\}$ при $j = 3, 4$ нужно предварительно провести в этих слагаемых дважды интегрирование по частям интегралов по переменной ξ (чтобы получить в знаменателях слагаемых множитель λ^2), воспользоваться предположением (27) и провести рассуждения аналогичные тем, что были проведены выше. В результате установим, что последовательности $\{I_\nu^j(f)\}$ при $\nu \rightarrow \infty$ сходится равномерно по $(x, t) \in Q_T$ для $j = 3, 4$.

Из полученных результатов и представления (29) следует равномерная по $(x, t) \in Q_T$ сходимость последовательности $\{I_\nu(f)\}$ при $\nu \rightarrow \infty$. А из этой равномерной сходимости, как было отмечено ранее, следует выполнение для предельной функции $u(x, t)$, т.е. решения уравнения (1), граничных условий (2) и начальных условий (3). Теорема 2 полностью доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вагабов А. И. Условия корректности одномерных смешанных задач для гиперболических систем// Докл. АН СССР. — 1964. — 155, № 6. — С. 1247–1249.
2. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1994.
3. Гуревич А. П., Хромов А. П. Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией// Мат. заметки. — 1994. — 56, № 1. — С. 3–15.
4. Дмитриев О. Ю. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n -го порядка с нерегулярными краевыми условиями// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2007. — 7, № 2. — С. 10–14.
5. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
6. Расулов М. Л. Исследование вычетного метода решения некоторых смешанных задач для дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1952. — 30 (72), № 3. — С. 509–528.
7. Расулов М. Л. Вычетный метод решения смешанных задач для дифференциальных уравнений и формула разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром// Мат. сб. — 1959. — 48 (90), № 3. — С. 277–310.
8. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964.
9. Рыхлов В. С. О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов// Изв. вузов. Мат. — 1992. — № 3. — С. 35–44.
10. Рыхлов В. С. О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов// в кн.: Математика. Механика. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. — Т. 3. — С. 114–117.
11. Рыхлов В. С. Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2013. — 13, № 1. — С. 21–26.
12. Рыхлов В. С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами// Таврич. вестн. информ. мат. — 2015. — № 1 (26). — С. 69–86.
13. Рыхлов В. С. О разрешимости смешанной задачи для некоторых гиперболических уравнений при отсутствии полноты собственных функций// Мат. Всеросс. конф. «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXXI. Современные методы теории краевых задач» (4–7 мая 2020 г., Воронеж). — Воронеж: ВГУ, 2020. — С. 184–187.
14. Тамаркин Я. В. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложении произвольных функций в ряды. — Петроград, 1917.
15. Хромов А. П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка// в кн.: Исследования по теории операторов. — Уфа: Изд-во БНЦ УрО АН СССР, 1988. — С. 182–193.
16. Хромов А. П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2019. — 19, № 3. — С. 280–288.
17. Хромов А. П., Корнев В. В. Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// Докл. РАН. — 2019. — 484, № 1. — С. 18–20.
18. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 1983. — 9. — С. 190–229.
19. Birkhoff G. D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1908. — 9. — P. 373–395.
20. Cauchy A. L. Mémoire sur l'application du calcul des résidus a la solution des problèmes de physique mathématique. — Paris, 1827.
21. Cauchy A. L. Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy (II Sér.). Tome VII. — Paris, 1827.
22. Poincaré M. H. Sur les équations de la physique mathématique// Rend. Circ. Mat. — 1894. — 8. — P. 57–155.

23. *Tamarkin J. D.* Some general problems of theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions// *Math. Z.* — 1927. — 27. — P. 1–54.

Рыхлов Виктор Сергеевич

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: rykhlovvs@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 135–145
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-135-145

УДК 517.956.4

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2022 г. С. И. САХАРОВ

Аннотация. Рассмотрена контактная задача для параболических уравнений второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в полосе, разделенной негладкой кривой на две области. Доказано существование и единственность регулярного решения этой задачи.

Ключевые слова: параболическая контактная задача, параболическое уравнение с разрывными коэффициентами, метод граничных интегральных уравнений, потенциал простого слоя.

CONTACT PROBLEM FOR A SECOND-ORDER PARABOLIC EQUATION WITH DINI-CONTINUOUS COEFFICIENTS

© 2022 S. I. SAKHAROV

ABSTRACT. We consider a contact problem for second-order parabolic equations with Dini-continuous coefficients in a strip divided by a nonsmooth curve into two domains. The existence and uniqueness of a regular solution to this problem is proved.

Keywords and phrases: parabolic contact problem, parabolic equation with discontinuous coefficients, method of boundary integral equations, simple layer potential.

AMS Subject Classification: 35A01

Теория решения краевых задач в областях с негладкими боковыми границами для параболических уравнений в пространствах Гельдера построена в работах [1–7, 13, 16, 20]. В [14] исследована однозначная разрешимость в классе Дини контактной задачи в плоской полосе для параболического уравнения с коэффициентами, разрывными на границе раздела сред из класса Дини–Гельдера. В [21, 22] аналогичный результат получен в классах Гельдера в случае многомерного по пространственной x параболического уравнения.

В настоящей работе получена однозначная разрешимость в классе $C^{1,0}$ контактной задачи для двух одномерных (по x) параболических уравнений второго порядка при ослабленных (по сравнению с [14]) условиях на гладкость коэффициентов и правых частей в условиях сопряжения. В частности, от правой части в условии сопряжения первого рода требуется лишь существование непрерывной дробной производной порядка $1/2$, а от правой части в условии сопряжения второго рода – лишь непрерывность. Применяется метод интегральных уравнений, разработанный в [8, 9].

Статья состоит из четырех разделов. В разделе 1 вводятся используемые в работе обозначения и функциональные пространства, ставится контактная задача и приводятся необходимые сведения о фундаментальном решении параболического уравнения. В разделе 2 формулируется основная теорема существования и единственности регулярного решения поставленной задачи.

В разделе 3 устанавливается однозначная разрешимость системы интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода, к которой редуцируется исходная задача. В разделе 4 доказывается основная теорема.

1. Постановка задачи. Пусть $0 < T < +\infty$ фиксировано. Обозначим через $C[0, T]$ пространство непрерывных (вектор-) функций $\psi: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m = 1, 2$, с нормой

$$\|\psi; [0, T]\|^0 = \max_{[0, T]} |\psi|$$

и рассмотрим подпространство $C_0[0, T] = \{\psi \in C[0, T] : \psi(0) = 0\}$. Здесь и далее для любого вектора b под $|b|$ понимаем максимум из модулей компонент b . Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2}\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \psi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

— оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя [8, 9], рассмотрим пространства

$$C^{1/2}[0, T] = \{\psi \in C[0, T] : \partial^{1/2}\psi \in C[0, T]\}$$

с нормой

$$\|\psi; [0, T]\|^{1/2} = \max_{[0, T]} |\psi| + \max_{[0, T]} |\partial^{1/2}\psi|;$$

и

$$C_0^{1/2}[0, T] = \{\psi \in C^{1/2}[0, T] : \psi(0) = 0, \partial^{1/2}\psi(0) = 0\}.$$

Пусть $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, Ω — некоторая область в D . Обозначим через $C^0(\overline{\Omega})$ пространство непрерывных и ограниченных функций $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|u; \overline{\Omega}\|^0 = \sup_{(x,t) \in \Omega} |u(x, t)|;$$

введем также пространства

$$C_0(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : u(x, 0) = 0\}; \quad C_0^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C_0(\overline{\Omega}) : \partial_x u \in C_0(\overline{\Omega})\}$$

с нормой

$$\|u; \overline{\Omega}\|^{1,0} = \sum_{l=0}^1 \|\partial_x^l u; \overline{\Omega}\|^0.$$

Под значениями функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения изнутри Ω .

Функция $\nu(z)$, $z \geq 0$, называется *почти убывающей*, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $\nu(z_1) \leq C\nu(z_2)$ при $z_1 \geq z_2 \geq 0$. Следуя [10, с. 147], модулем непрерывности называем такую непрерывную, неубывающую, полуаддитивную на $[0, +\infty)$ функцию ω , что $\omega(0) = 0$. Из известных свойств модуля непрерывности отметим неравенство

$$\omega(\lambda z) \leq (\lambda + 1)\omega(z), \quad \lambda \geq 0, \quad z \geq 0,$$

и тот факт, что функция $\omega(z)/z$, $z > 0$, почти убывает. Кроме того (см. [12]), справедлива оценка

$$\omega(|x|) \exp\left\{-\frac{|x|^2}{t}\right\} \leq C\omega(t^{1/2}) \exp\left\{-\frac{c|x|^2}{t}\right\}$$

для некоторых $C, c > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$. Модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Дини, если

$$\tilde{\omega}(z) = \int_0^z \omega(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0. \quad (1)$$

Если модуль непрерывности ω удовлетворяет условию (1), то $\tilde{\omega}$ — также модуль непрерывности, причем $\omega(z) \leq 2\tilde{\omega}(z)$, $z \geq 0$. Кроме того, функция $\omega^*(z) = \omega(z^{1/2})$ также является модулем непрерывности, при этом, если ω удовлетворяет условию (1), то ω^* также удовлетворяет условию (1) и при $z \geq 0$ имеет место равенство $\tilde{\omega}^*(z) = 2\tilde{\omega}(z^{1/2})$.

Пусть ω — модуль непрерывности. Пространство функций $\psi \in C_0[0, T]$, для которых

$$\|\psi; [0, T]\|^{1/2+\omega} = \|\psi; [0, T]\|^0 + \sup_{(0, T)} \left\{ \frac{|\psi(t + \Delta t) - \psi(t)|}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty,$$

обозначим через $H_0^{1/2+\omega}[0, T]$. Введем также пространство $H_0^\omega[0, T]$ функций $\psi \in C_0[0, T]$, для которых

$$\|\psi; [0, T]\|^\omega = \|\psi; [0, T]\|^0 + \sup_{(0, T)} \left\{ \frac{|\psi(t + \Delta t) - \psi(t)|}{\omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty.$$

Замечание 1. Если $\psi \in H_0^{1/2+\omega}[0, T]$, где ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (1), то $\psi \in C_0^{1/2}[0, T]$ (см. [12]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [9]).

В полосе D рассмотрим равномерно параболические операторы

$$L^{(s)}u = \partial_t u - \sum_{k=0}^2 a_k^{(s)}(x, t) \partial_x^k u, \quad s = 1, 2,$$

где $a_k^{(s)}$ — вещественные функции, определенные в \bar{D} и удовлетворяющие следующим условиям:

- (i) $a_2^{(s)}(x, t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x, t) \in \bar{D}$, $s = 1, 2$;
- (ii) $a_k^{(s)} \in C^0(\bar{D})$, $|\Delta_{x,t} a_k^{(s)}(x, t)| \leq \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$, $k = 0, 1, 2$, $s = 1, 2$;

здесь ω_0 — такой модуль непрерывности, что

$$\tilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0,$$

и для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ функция $\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z > 0$, почти убывает.

Полоса D разделяется на области

$$\Omega^{(1)} = \{(x, t) \in D : x < g(t)\}, \quad \Omega^{(2)} = \{(x, t) \in D : x > g(t)\}$$

кривой $\Sigma = \{(x, t) \in \bar{D} : x = g(t)\}$ (вообще говоря, негладкой), где g удовлетворяет условию

$$|\Delta_t g(t)| \leq |\Delta t|^{1/2} \omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t + \Delta t \in [0, T], \quad (2)$$

ω_1 — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (1), и для некоторого $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ функция $\omega_1(z)z^{-\varepsilon_1}$, $z > 0$, почти убывает.

Ставится задача отыскания функций $u^{(s)}$, $s = 1, 2$, являющихся регулярными решениями уравнений

$$L^{(s)}u^{(s)}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega^{(s)}, \quad s = 1, 2, \quad (3)$$

с начальными условиями

$$u^{(1)}(x, 0) = 0, \quad x \leq g(0); \quad u^{(2)}(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad (4)$$

и условиями сопряжения на границе Σ

$$\partial_x^k (u^{(1)} - u^{(2)})(g(t), t) = \psi_{k+1}(t), \quad k = 0, 1, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где $\psi_1 \in C_0^{1/2}[0, T]$, $\psi_2 \in C_0[0, T]$.

Известно (см. [11]), что при условиях (i), (ii) существуют фундаментальные решения уравнений $L^{(s)}u^{(s)} = 0$, $s = 1, 2$, причем они имеют вид

$$\Gamma^{(s)}(x, t; \xi, \tau) = Z(x - \xi, t - \tau; a_2^{(s)}(\xi, \tau)) + W^{(s)}(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in \bar{D} \times \bar{D}, \quad t > \tau, \quad (6)$$

где $Z(x - \xi, t - \tau; a_2^{(s)}(\xi, \tau))$ — фундаментальные решения уравнений

$$\partial_t u^{(s)} - a_2^{(s)}(\xi, \tau) \partial_x^2 u^{(s)} = 0$$

с коэффициентами, «замороженными» в точке (ξ, τ) , $\xi \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < T$,

$$W^{(s)}(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} Z(x - y, t - \eta; a_2^{(s)}(y, \eta)) \mu^{(s)}(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (7)$$

плотности $\mu^{(s)}$ в (7) находятся из условия, что $\Gamma^{(s)}(x, t; \xi, \tau)$ при любых фиксированных (ξ, τ) , $\xi \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < T$, удовлетворяют по переменным (x, t) уравнениям $L^{(s)}u = 0$ в слое $\mathbb{R} \times (\tau, T)$. Функции Z из (6) имеют вид [19, с. 297]

$$Z(x, t; a_2^{(s)}(\xi, \tau)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a_2^{(s)}(\xi, \tau)t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a_2^{(s)}(\xi, \tau)t}\right\}, \quad t > 0, \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad x, \xi \in \mathbb{R}.$$

Имеют место следующие оценки (см. [11]):

$$\begin{aligned} \left| \partial_t^k \partial_x^l \Gamma^{(s)}(x, t; \xi, \tau) \right| &\leq C(t - \tau)^{-(2k+l+1)/2} \exp\left\{-c\frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right\}, \\ \left| \partial_t^k \partial_x^l W^{(s)}(x, t; \xi, \tau) \right| &\leq C\tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-(2k+l+1)/2} \exp\left\{-c\frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $2k + l \leq 2$, $x, \xi \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < t \leq T$;

$$\begin{aligned} \left| \partial_t^k \partial_x^l Z(x, t; a_2^{(s)}(\xi, \tau)) \right| &\leq C(k, l)t^{-(2k+l+1)/2} \exp\left\{-c\frac{x^2}{t}\right\} \left| \Delta_{\xi, \tau} \partial_t^k \partial_x^l Z(x, t; a_2^{(s)}(\xi, \tau)) \right| \leq \\ &\leq C(k, l)\omega_0(|\Delta\xi| + |\Delta\tau|^{1/2})t^{-(2k+l+1)/2} \exp\left\{-c\frac{x^2}{t}\right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $k, l \geq 0$, $x, \xi, \xi + \Delta\xi \in \mathbb{R}$, $\tau, \tau + \Delta\tau \in [0, T]$, $t > 0$;

$$\left| \Delta_t \partial_x^l W^{(s)}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(\Delta t)^{1-l/2} \tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-3/2} \exp\left\{-c\frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right\}, \quad (10)$$

где $l = 0, 1$, $x, \xi \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < t < t + \Delta t \leq T$, $\Delta t \leq t - \tau$. Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от δ, T , коэффициентов операторов $L^{(s)}$ и кривой Σ .

2. Формулировка основного результата. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть коэффициенты операторов $L^{(s)}$ удовлетворяют условиям (i), (ii), а функция g , задающая кривую Σ , удовлетворяет условию (2). Тогда для любых $\psi_1 \in C_0^{1/2}[0, T]$ и $\psi_2 \in C_0[0, T]$ единственным решением $u^{(s)} \in C_0^{1,0}(\bar{\Omega}^{(s)})$, $s = 1, 2$, задачи (3)–(5) являются потенциалы простого слоя

$$u^{(s)}(x, t) = \int_0^t \Gamma^{(s)}(x, t; g(\tau), \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}^{(s)}, \quad (11)$$

где $\{\varphi^{(s)} \in C_0[0, T], s = 1, 2\}$ – единственное в $C[0, T]$ решение системы интегральных уравнений

$$\sum_{s=1}^2 (-1)^{(s+1)} \int_0^t \Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau = \psi_1(t); \quad (12)$$

$$\sum_{s=1}^2 \left[\frac{\varphi^{(s)}(t)}{2a_2^{(s)}(g(t), t)} + (-1)^{s+1} \int_0^t \partial_x \Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau \right] = \psi_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (13)$$

и выполнена оценка

$$\|u^{(s)}; \Omega^{(s)}\|^{1,0} \leq C \left[\|\psi_1; [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_2; [0, T]\| \right]. \quad (14)$$

Замечание 2. Если модуль непрерывности ω_0 коэффициентов уравнений дополнительно удовлетворяет условию

$$\tilde{\omega}_0(z) = \int_0^z x^{-1} dx \int_0^x y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0,$$

и для правых частей в условиях сопряжения выполнено

$$\psi_1 \in C_0^{1/2, \omega_2}[0, T], \quad \psi_2 \in C_0^{\omega_2}[0, T], \quad \tilde{\omega}_2(z) = \int_0^z \omega_2(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0,$$

то утверждение теоремы следует из [14] с соответствующей оценкой корректности.

3. Система интегральных уравнений. Следуя методу, изложенному в [8, 9], докажем, что для любых $\psi_1 \in C_0^{1/2}[0, T]$ и $\psi_2 \in C_0[0, T]$ существует единственное решение $\varphi^{(s)} \in C_0[0, T]$, $s = 1, 2$, системы (12), (13). Пусть $\bar{a}^{(s)}(\tau) = a_2^{(s)}(g(\tau), \tau)$, $s = 1, 2$. Используя представление (6), положим

$$\Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau) = Z(0, t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) + N_1^{(s)}(t, \tau),$$

где

$$N_1^{(s)}(t, \tau) = \left[Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) - Z(0, t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) \right] + W^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau).$$

Введем обозначение $N_2^{(s)}(t, \tau) = \partial_x \Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau)$. Тогда систему (12), (13), учитывая формулу «скачка» для пространственной производной потенциала простого слоя [12], можно записать в виде

$$\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} \left\{ \int_0^t Z(0, t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau + \int_0^t N_1^{(s)}(t, \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau \right\} = \psi_1(t); \quad (15)$$

$$\sum_{s=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} (\bar{a}^{(s)})^{-1}(t) \varphi^{(s)}(t) + (-1)^{s+1} \int_0^t N_2^{(s)}(t, \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau \right\} = \psi_2(t), \quad t \in [0, T]. \quad (16)$$

Пусть

$$I^{1/2} \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

— оператор дробного интегрирования порядка 1/2. Тогда уравнение (15) может быть переписано в виде

$$\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} \left\{ \frac{1}{2} I^{1/2} ((\bar{a}^{(s)})^{-1/2} \varphi^{(s)})(t) + \int_0^t N_1^{(s)}(t, \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau \right\} = \psi_1(t), \quad t \in [0, T].$$

Положим

$$H_k^{(s)} \varphi^{(s)}(t) = \int_0^t N_k^{(s)}(t, \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau, \quad s = 1, 2, \quad k = 1, 2, \quad t \in [0, T],$$

и перепишем систему (15), (16) в операторном виде

$$\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} \left\{ \frac{1}{2} I^{1/2} ((\bar{a}^{(s)})^{-1/2} \varphi^{(s)}) + H_1^{(s)} \varphi^{(s)} \right\} = \psi_1; \quad (17)$$

$$\sum_{s=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} (\bar{a}^{(s)})^{-1} \varphi^{(s)} + (-1)^{s+1} H_2^{(s)} \varphi^{(s)} \right\} = \psi_2. \quad (18)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда операторы $H_1^{(s)}$, $s = 1, 2$, являются ограниченными операторами из $C[0, T]$ в $H_0^{1/2+\omega}[0, T]$, $\omega = \tilde{\omega}_0 + \omega_1$.

Доказательство. Достаточно доказать оценки

$$|H_1^{(s)}\varphi(t)| \leq C\|\varphi\|^0 t^{1/2}\omega(t^{1/2}), \quad (19)$$

$$|\Delta_t H_1^{(s)}\varphi(t)| \leq C\|\varphi\|^0 (\Delta t)^{1/2}\omega((\Delta t)^{1/2}), \quad (20)$$

где $t, t + \Delta t \in [0, T]$, $\Delta t > 0$, $s = 1, 2$, $\|\varphi\|^0 = \|\varphi; [0, T]\|^0$.

Докажем (19). В силу (2), (9)

$$\left| Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) - Z(0, t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) \right| \leq C(t - \tau)^{-1/2}\omega_1((t - \tau)^{1/2}),$$

откуда с учетом (8)

$$|N_1^{(s)}(t, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-1/2}\omega((t - \tau)^{1/2}), \quad (21)$$

и, следовательно,

$$|H_1^{(s)}\varphi(t)| \leq C\|\varphi\|^0 \int_0^t (t - \tau)^{-1/2}\omega((t - \tau)^{1/2})d\tau \leq C\|\varphi\|^0 t^{1/2}\omega(t^{1/2}), \quad s = 1, 2.$$

Неравенство (20) в силу (19) достаточно доказать в случае $0 < \Delta t < t$. Положим

$$\begin{aligned} \Delta_t H_k^{(s)}\varphi(t) &= \sum_{j=0}^1 (-1)^{j+1} \int_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t} N_k^{(s)}(t + j\Delta t, \tau)\varphi(\tau)d\tau + \int_0^{t-\Delta t} [\Delta_t N_k^{(s)}(t, \tau)]\varphi(\tau)d\tau = \\ &= R_{k,1}^{(s)}(t) - R_{k,0}^{(s)}(t) + R_{k,2}^{(s)}(t), \quad k = 1, 2, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (21) получаем оценку $R_{1,j}^{(s)}(t)$ при $j = 0, 1$:

$$|R_{1,j}^{(s)}(t)| \leq C\|\varphi\|^0 \int_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t} (t + j\Delta t - \tau)^{-1/2}\omega((t + j\Delta t - \tau)^{1/2})d\tau \leq C\|\varphi\|^0 (\Delta t)^{1/2}\omega((\Delta t)^{1/2}), \quad s = 1, 2.$$

Рассмотрим $R_{1,2}^{(s)}(t)$. Из представления

$$\partial_x Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) = -\frac{g(t) - g(\tau)}{2(t - \tau)} (\bar{a}^{(s)})^{-1}(\tau) Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) \quad (23)$$

(см. [17]), теоремы о среднем и (2), (9) имеем:

$$\begin{aligned} \left| \Delta_t \left[Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) - Z(0, t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) \right] \right| &\leq \\ &\leq C\omega_1((t - \tau)^{1/2}) \left[(\Delta t)^{1/2}(t - \tau)^{-1}\omega_1((\Delta t)^{1/2}) + \Delta t(t - \tau)^{-3/2} \right], \quad \Delta t \leq t - \tau. \end{aligned}$$

Отсюда и из (10) следует, что

$$\begin{aligned} |\Delta_t N_1^{(s)}(t, \tau)| &\leq C \left\{ (\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t - \tau)^{-1}\omega_1((t - \tau)^{1/2}) + \Delta t(t - \tau)^{-3/2}\omega((t - \tau)^{1/2}) \right\}, \\ &\Delta t \leq t - \tau, \end{aligned} \quad (24)$$

откуда получаем

$$|R_{1,2}^{(s)}(t)| \leq C \left\{ (\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) \tilde{\omega}_1(T^{1/2}) + (\Delta t)^{1-\varepsilon_0/2} \tilde{\omega}_0((\Delta t)^{1/2}) \int_0^{t-\Delta t} (t-\tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2} d\tau + \right. \\ \left. + (\Delta t)^{1-\varepsilon_1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) \int_0^{t-\Delta t} (t-\tau)^{-(3-\varepsilon_1)/2} d\tau \right\} \|\varphi\|^0 \leq C \|\varphi\|^0 (\Delta t)^{1/2} \omega((\Delta t)^{1/2}), \quad s = 1, 2. \quad \square$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда операторы $H_2^{(s)}$, $s = 1, 2$, — ограниченные операторы из $C[0, T]$ в $H_0^{\tilde{\omega}}[0, T]$, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из оценок

$$|H_2^{(s)} \varphi(t)| \leq C \|\varphi\|^0 \tilde{\omega}(t^{1/2}); \quad (25)$$

$$|\Delta_t H_2^{(s)} \varphi(t)| \leq C \|\varphi\|^0 \tilde{\omega}((\Delta t)^{1/2}), \quad (26)$$

где $t, t + \Delta t \in [0, T]$, $s = 1, 2$, $\Delta t > 0$.

Докажем оценку (25). В силу представления (6), имеем

$$N_2^{(s)}(t, \tau) = \partial_x Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) + \partial_x W^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau), \quad s = 1, 2.$$

Из (2), (9), (23) следует, что

$$\left| \partial_x Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) \right| \leq C \omega_1((t - \tau)^{1/2}) (t - \tau)^{-1}.$$

Вместе с неравенством (8) это дает оценку

$$|N_2^{(s)}(t, \tau)| \leq C \omega((t - \tau)^{1/2}) (t - \tau)^{-1}, \quad s = 1, 2, \quad (27)$$

и, следовательно,

$$|H_2^{(s)} \varphi(t)| \leq C \|\varphi\|^0 \int_0^t \omega((t - \tau)^{1/2}) (t - \tau)^{-1} d\tau \leq C \|\varphi\|^0 \tilde{\omega}(t^{1/2}), \quad s = 1, 2.$$

Оценку (26) для $s = 1, 2$ доказываем с помощью представления (22). При этом в силу (25) можно считать, что $0 < \Delta t < t$. Из (27) получаем оценку для $R_{2,j}^{(s)}(t)$, $s = 1, 2$, $j = 0, 1$,

$$|R_{2,j}^{(s)}(t)| \leq C \|\varphi\|^0 \int_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t} \omega((t + j\Delta t - \tau)^{1/2}) (t + j\Delta t - \tau)^{-1} d\tau \leq C \|\varphi\|^0 \tilde{\omega}((\Delta t)^{1/2}).$$

Рассмотрим $R_{2,2}^{(s)}(t)$. Используя соотношения (2), (9) и (23), имеем

$$\left| \Delta_t \partial_x Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \bar{a}^{(s)}(\tau)) \right| \leq \\ \leq C \left[(\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) (t - \tau)^{-3/2} + (\Delta t) \omega_1((t - \tau)^{1/2}) (t - \tau)^{-2} \right] \leq \\ \leq C (\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) (t - \tau)^{-3/2}, \quad 0 < \Delta t < t - \tau, \quad s = 1, 2.$$

Вместе с неравенством (10) это дает оценку

$$|R_{2,2}^{(s)}(t)| \leq C \|\varphi\|^0 \{(\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) \int_0^{t-\Delta t} (t-\tau)^{-3/2} d\tau + \\ + (\Delta t)^{(1-\varepsilon_0)/2} \tilde{\omega}_0((\Delta t)^{1/2}) \int_0^{t-\Delta t} (t-\tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2} d\tau\} \leq C \|\varphi\|^0 \omega((\Delta t)^{1/2}), \quad s = 1, 2. \quad \square$$

Приведем известные результаты для дальнейшего исследования полученной системы интегральных уравнений.

Лемма 3 (см. [12]). Пусть ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (1). Тогда оператор $\partial^{1/2}$ является ограниченным оператором из $H_0^{1/2+\omega}[0, T]$ в $H_0^{\tilde{\omega}}[0, T]$.

Следуя А. Н. Тихонову (см. [18]), назовем оператор $K: C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ вольтерровым, если для любого $t \in [0, T]$ из равенства $\varphi_1 = \varphi_2$ на $[0, t]$ следует, что $K\varphi_1 = K\varphi_2$ на $[0, t]$.

Лемма 4 (см. [9]). Пусть ω — модуль непрерывности, $K: C[0, T] \rightarrow H_0^\omega[0, T]$ — линейный ограниченный вольтерров оператор. Тогда уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ имеет в $C[0, T]$ только решение $\varphi \equiv 0$.

Заметим, что если $K: C[0, T] \rightarrow H_0^\omega[0, T]$ — линейный ограниченный оператор, $J: H_0^\omega[0, T] \rightarrow C[0, T]$ — оператор вложения, то оператор $K_1 = J \cdot K: C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ является компактным в силу теоремы Арцела—Асколи. Поэтому из леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть ω — модуль непрерывности, $K: C[0, T] \rightarrow H_0^\omega[0, T]$ — линейный ограниченный вольтерров оператор. Тогда для любой функции $\psi \in C[0, T]$ уравнение $\varphi + K\varphi = \psi$ имеет единственное решение $\varphi \in C[0, T]$ и справедлива оценка

$$\|\varphi; [0, T]\|^0 \leq C \|\psi; [0, T]\|^0$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для любых $\psi_1 \in C_0^{1/2}[0, T]$, $\psi_2 \in C_0[0, T]$ система (12), (13) имеет единственное решение $\{\varphi^{(s)} \in C_0[0, T], s = 1, 2\}$ и справедливы оценки

$$\|\varphi^{(s)}; [0, T]\|^0 \leq C \left(\|\psi_1; [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_2; [0, T]\|^0 \right), \quad s = 1, 2. \quad (28)$$

Доказательство. Как показано выше, система (12), (13) может быть записана в виде (17), (18). Применяя к обеим частям уравнения (17) оператор дробного дифференцирования $\partial^{1/2}$, получим в силу лемм 1–3 и равенств

$$\partial^{1/2} I^{1/2} \varphi = \varphi, \quad I^{1/2} \partial^{1/2} \psi = \psi,$$

справедливых для любых $\varphi \in C[0, T]$, $\psi \in C^{1/2}[0, T]$, соответственно, следующую систему интегральных уравнений Вольтеры второго рода, эквивалентную (17), (18) для $\varphi^{(s)} \in C[0, T]$:

$$\sum_{s=1}^2 \left[(-1)^{s+1} (\bar{a}^{(s)})^{-1/2} \varphi^{(s)} + K_1^{(s)} \varphi^{(s)} \right] = 2\partial^{1/2} \psi_1; \quad (29)$$

$$\sum_{s=1}^2 \left\{ (\bar{a}^{(s)})^{-1} \varphi^{(s)} + K_2^{(s)} \varphi^{(s)} \right\} = 2\psi_2, \quad (30)$$

где $K_1^{(s)} = 2\partial^{1/2} H_1^{(s)}$, $K_2^{(s)} = (-1)^{s+1} 2H_2^{(s)}$, $s = 1, 2$. Введем обозначения

$$A(t) = \begin{pmatrix} (\bar{a}^{(1)})^{-1/2} & -(\bar{a}^{(2)})^{-1/2} \\ (\bar{a}^{(1)})^{-1} & (\bar{a}^{(2)})^{-1} \end{pmatrix} (t), \quad K = \begin{pmatrix} K_1^{(1)} & K_1^{(2)} \\ K_2^{(1)} & K_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ \varphi^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

В силу условий (i)—(ii) имеем $\delta_1 \leq \det A(t) \leq \delta'_1$ для некоторых $\delta_1, \delta'_1 > 0$. Перепишем систему (29), (30) в виде векторного уравнения

$$\varphi + \hat{K}\varphi = \hat{\psi}, \quad (31)$$

где оператор \hat{K} задается формулой

$$(\hat{K}\varphi)(t) = A^{-1}(t)(K\varphi)(t), \quad \varphi \in C[0, T], \quad \hat{\psi}(t) = A^{-1}(t)\psi(t), \quad t \in [0, T].$$

В силу лемм 1—3 $\hat{K}: C[0, T] \rightarrow H_0^{\tilde{\omega}}[0, T]$ — линейный ограниченный вольтерров оператор, и по лемме 5 уравнение (31) имеет единственное решение $\varphi \in C[0, T]$, причем выполнена оценка

$$\|\varphi; [0, T]\|^0 \leq C\|\psi; [0, T]\|^0.$$

Следовательно, справедлива оценка (28). Кроме того, из вида уравнений (29), (30), условий на ψ_1, ψ_2 и лемм 1—3 следует, что $\varphi^{(s)}(0) = 0$. \square

4. Доказательство теоремы 1. Решение задачи (3)—(5) ищем в виде потенциалов простого слоя (11), где плотности $\varphi^{(s)} \in C_0[0, T]$, $s = 1, 2$, подлежат определению. Для любых $\varphi^{(s)} \in C[0, T]$, $s = 1, 2$, функции $u^{(s)}$, $s = 1, 2$, являются регулярными решениями уравнений (3) и удовлетворяют начальным условиям (4). Подставляя (11) в условия сопряжения (5), получаем систему интегральных уравнений Вольтерры (12), (13) для отыскания неизвестных плотностей $\varphi^{(s)}$, $s = 1, 2$. Из леммы 6 следует, что система (12), (13) имеет единственное решение $\varphi^{(s)} \in C_0[0, T]$, $s = 1, 2$. Поэтому существует решение задачи (3)—(5), которое имеет вид (11), где $\varphi^{(s)}$, $s = 1, 2$, — решение системы (12), (13).

Докажем единственность регулярного решения задачи (3)—(5). Пусть $v^{(s)} \in C_0^{1,0}(\bar{\Omega}^{(s)})$, $s = 1, 2$, — решение контактной задачи с однородными условиями сопряжения

$$\begin{aligned} L^{(s)}v^{(s)}(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega^{(s)}, \quad s = 1, 2; \\ v^{(1)}(x, 0) &= 0, \quad x \leq g(0); \quad v^{(2)}(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0); \\ \partial_x^k(u^{(1)} - u^{(2)})(g(t), t) &= 0, \quad k = 0, 1, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (32)$$

Одновременно каждая из функций $v^{(s)}$, $s = 1, 2$, является регулярным решением соответствующей второй начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} L^{(s)}v^{(s)} &= 0, \quad (x, t) \in \Omega^{(s)}, \quad s = 1, 2; \\ v^{(s)}(x, 0) &= 0, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}^{(s)} \cap \{t = 0\}; \\ \partial_x v^{(s)}(g(t), t) &= \bar{\psi}(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

где $\bar{\psi} \in C_0[0, T]$. Эти решения однозначно определяются в виде потенциалов простого слоя

$$v^{(s)}(x, t) = \int_0^t \Gamma^{(s)}(x, t; g(\tau), \tau) \bar{\varphi}^{(s)}(\tau) d\tau, \quad s = 1, 2 \quad (33)$$

(см. [14, 15]), где $\bar{\varphi}^{(s)} \in C_0[0, T]$, $s = 1, 2$, являются единственными решениями интегральных уравнений Вольтерры второго рода

$$(-1)^{s+1} \frac{\bar{\varphi}^{(s)}(t)}{2a_2^{(s)}(g(t), t)} + \int_0^t \partial_x \Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau) \bar{\varphi}^{(s)}(\tau) d\tau = \bar{\psi}(t), \quad s = 1, 2.$$

Подставляя потенциалы (33) в условия сопряжения (32), получим, что одновременно в силу леммы 6 пара функций $\overline{\varphi}^{(s)}$, $s = 1, 2$, является единственным решением системы интегральных уравнений

$$\sum_{s=1}^2 (-1)^{(s+1)} \int_0^t \Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau) \overline{\varphi}^{(s)}(\tau) d\tau = 0;$$

$$\sum_{s=1}^2 \left[\frac{\overline{\varphi}^{(s)}(t)}{2a_2^{(s)}(g(t), t)} + (-1)^{(s+1)} \int_0^t \partial_x \Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau) \overline{\varphi}^{(s)}(\tau) d\tau \right] = 0, \quad t \in [0, T].$$

Отсюда следует, что $\overline{\varphi}^{(s)} = 0$, $s = 1, 2$. Следовательно, $v^{(s)} = 0$, $s = 1, 2$.

Из результатов работы [23] о свойствах потенциала простого слоя и оценок (28) следует, что найденное решение принадлежит классу $C_0^{1,0}(\overline{\Omega}^s)$ и выполнены оценки (14). Теорема доказана.

Благодарность. Автор выражает глубокую признательность профессору Е. А. Бадерко за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бадерко Е. А. Краевые задачи для параболического уравнения и граничные интегральные уравнения // Диффер. уравн. — 1992. — 28, № 1. — С. 17–23.
2. Бадерко Е. А. Метод теории потенциала в краевых задачах для $2m$ -параболических уравнений в полуограниченной области с негладкой боковой границей // Диффер. уравн. — 1988. — 24, № 1. — С. 3–9.
3. Бадерко Е. А. О параболической краевой задаче в области простого вида // Диффер. уравн. — 1991. — 27, № 1. — С. 17–29.
4. Бадерко Е. А. О «почти» модельной краевой задаче для параболического уравнения высокого порядка // Диффер. уравн. — 1987. — 23, № 1. — С. 22–29.
5. Бадерко Е. А. О разрешимости граничных задач для параболических уравнений высокого порядка в областях с криволинейными боковыми границами // Диффер. уравн. — 1976. — 12, № 10. — С. 1781–1792.
6. Бадерко Е. А. О решении первой краевой задачи для параболических уравнений с помощью потенциала простого слоя // Докл. АН СССР. — 1985. — 283, № 1. — С. 11–13.
7. Бадерко Е. А. Решение задачи с косою производной для параболического уравнения методом граничных интегральных уравнений // Диффер. уравн. — 1989. — 25, № 1. — С. 14–20.
8. Бадерко Е. А., Черепова М. Ф. Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. — 2014. — 458, № 4. — С. 379–381.
9. Бадерко Е. А., Черепова М. Ф. Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 2. — С. 198–208.
10. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — Наука, 1977.
11. Зейнеддин М. Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНТИ РАН. — 16.04.92. — № 1294-B92..
12. Камынин Л. И. Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гельдера // Сиб. мат. ж. — 1970. — 11, № 5. — С. 1017–1045.
13. Камынин Л. И. К теории Жевре для параболических потенциалов, VI // Диффер. уравн. — 1972. — 8, № 6. — С. 1015–1025.
14. Камынин Л. И. О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. ж. — 15, № 4. — С. 806–834.
15. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. ж. — 1973. — 14, № 1. — С. 86–110.
16. Камынин Л. И. Приложение параболических потенциалов Паньи к краевым задачам математической физики // Диффер. уравн. — 1990. — 26, № 5. — С. 829–841.
17. Тверитинов В. А. Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка // Деп. ВИНТИ АН СССР. — 02.09.88. — № 6850-B88..

18. *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики// Бюлл. МГУ. Сек. А. — 1938. — 1, № 8. — С. 1–25.
19. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
20. *Черепова М. Ф.* О задаче Бицадзе–Самарского для параболического уравнения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1986. — № 4. — С. 74–76.
21. *Шевелева В. Н.* Об одной задаче контактной теплопроводности// Диффер. уравн. — 1991. — 27, № 1. — С. 172–174.
22. *Шевелева В. Н.* Об одной задаче контактной теплопроводности, II// Диффер. уравн. — 1992. — 28, № 4. — С. 729–730.
23. *Baderko E. A., Cherepova M. F.* Bitsadze–Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients// Compl. Var. Ellipt. Equ. — 2019. — 64, № 5. — P. 753–765.

Сахаров Сергей Игоревич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

E-mail: ser341516@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 146–159
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-146-159

УДК 517.956.4

О ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 2022 г. К. Д. ФЕДОРОВ

Аннотация. Рассмотрена первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в ограниченной области Ω с криволинейными боковыми границами. Доказано существование решения этой задачи в классе $C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})$ с помощью метода граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: первая начально-краевая задача, параболическое уравнение, негладкая боковая граница, метод граничных интегральных уравнений.

ON THE FIRST INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF HEAT CONDUCTION IN A DOMAIN WITH CURVILINEAR LATERAL BOUNDARIES

© 2022 K. D. FEDOROV

ABSTRACT. We consider the first initial-boundary-value problem for the heat equation in a bounded domain Ω with curvilinear lateral boundaries. Using the method of boundary integral equations, we prove the existence of a solution to this problem in the class $C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})$.

Keywords and phrases: first initial-boundary-value problem, parabolic equation, nonsmooth lateral boundary, method of boundary integral equations.

AMS Subject Classification: 35A01

Предметом исследования является первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с непрерывным коэффициентом, зависящим от времени t , в плоской области с криволинейными боковыми границами. Условия на коэффициент в уравнении и на боковые границы области не позволяют воспользоваться известными до сих пор результатами о классической разрешимости параболических задач как в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ (в областях с негладкими боковыми границами, см. [1, 4, 8]), так и в пространствах $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$ (в областях с гладкими боковыми границами, см. [5, с. 361–368], [7]).

Несмотря на достаточно слабое условие на коэффициент уравнения и на характер гладкости боковых границ, в работе устанавливается разрешимость задачи в классе $C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})$.

Статья состоит из четырех пунктов. В пункте 1 вводятся необходимые определения и формулируется основной результат. В разделе 2 рассматривается специальный параболический потенциал и доказываются его свойства. В разделе 3 устанавливается однозначная разрешимость системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода, к которой редуцируются граничные условия поставленной задачи. В разделе 4 доказывается основная теорема.

1. Предварительные сведения и формулировка основного результата. Пусть $T > 0$ фиксировано. Обозначим через $C[0, T]$ пространство непрерывных функций $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|\psi; [0, T]\|^0 := \max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|$$

и рассмотрим подпространство $C_0[0, T] = \{\psi \in C[0, T] : \psi(0) = 0\}$. Введем также пространство

$$C^1[0, T] = \{\psi \in C[0, T] : \psi' \in C[0, T]\}$$

с нормой

$$\|\psi; [0, T]\|^1 := \max_{t \in [0, T]} |\psi(t)| + \max_{t \in [0, T]} |\psi'(t)|$$

и подпространство

$$C_0^1[0, T] = \{\psi \in C^1[0, T] : \psi(0) = \psi'(0) = 0\}.$$

На плоскости \mathbb{R}^2 переменных x и t рассмотрим полосу

$$D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, 0 < t < T\}.$$

Пусть Ω — произвольная ограниченная область из D . Через $C_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega})$ обозначим пространство функций u , непрерывных вместе со своими первыми по x , t и второй производной по x в $\overline{\Omega}$, с нормой

$$\|u; \Omega\|^{2,1} := \|u\|^0 + \|u_x\|^0 + \|u_{xx}\|^0 + \|u_t\|^0.$$

Положим

$$C_0^{2,1}(\overline{\Omega}) = \{u \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega}) : u(x, 0) = u_x(x, 0) = u_{xx}(x, 0) = u_t(x, 0) = 0\}.$$

Под значениями функций и их производных на границе области понимаем их предельные значения изнутри области. Рассмотрим область Ω следующего вида:

$$\Omega := \{(x, t) \in D \mid g_1(t) < x < g_2(t)\}$$

с боковыми границами

$$\Sigma_k := \{(x, t) \in \overline{D} : x = g_k(t)\},$$

где

$$g_k \in C[0, T] \cap C^1(0, T), \quad |g'_k(t)| \leq \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}}, \quad 0 < t \leq T, \quad k = 1, 2; \quad (1)$$

здесь ω — некоторый модуль непрерывности, и

$$|g_1(t) - g_2(t)| \geq d > 0. \quad (2)$$

Модулем непрерывности согласно [2, с. 150] будем называть функцию $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, обладающую следующими свойствами:

- (i) $\omega(0) = 0$;
- (ii) ω не убывает на $[0, +\infty)$;
- (iii) ω непрерывна на $[0, +\infty)$;
- (iv) ω полуаддитивна, а именно, $\omega(z_1 + z_2) \leq \omega(z_1) + \omega(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in [0, +\infty)$.

Напомним следующие известные свойства модуля непрерывности (см. [2, с. 152–154]).

А. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $\omega(nz) \leq n\omega(z)$, где $z > 0$.

В. Отношение $\omega(z)/z$, $z > 0$, почти убывает, а именно,

$$\frac{\omega(z_2)}{z_2} \leq 2 \frac{\omega(z_1)}{z_1},$$

если $z_2 \geq z_1 > 0$.

С. Для любого $c > 0$ существует такое $C > 0$, что

$$\omega(x) \exp\left\{-\frac{cx^2}{t}\right\} \leq C\omega(t^{\frac{1}{2}}) \exp\left\{-\frac{cx^2}{2t}\right\}$$

для $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Рассмотрим оператор теплопроводности

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где a — вещественная и непрерывная на $[0, T]$ функция, удовлетворяющая условию $a(t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $t \in [0, T]$.

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$Lu = 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad g_1(0) \leq x \leq g_2(0), \quad (4)$$

$$u|_{\Sigma_k} = \psi_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2. \quad (5)$$

Пусть

$$Y(x, t; \tau) := \int_0^\infty Z(x+r, t; \tau) dr, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t, \quad (6)$$

где

$$Z(x, t; \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \int_\tau^t a(z) dz}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4 \int_\tau^t a(z) dz} \right\}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия (1), (2). Тогда для любых $\psi_1, \psi_2 \in C_0^1[0, T]$ (единственным) решением задачи (3)–(5) является сумма потенциалов:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^2 \int_0^t Y(x - g_k(\tau), t; \tau) \varphi_k(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0[0, T]$ — единственное в $C[0, T]$ решение системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода:

$$\sum_{k=1}^2 \int_0^t Y(g_l(t) - g_k(\tau), t; \tau) \varphi_k(\tau) d\tau = \psi_l(t), \quad l = 1, 2, \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

При этом $u \in C_0^{2,1}(\bar{\Omega})$ и справедлива оценка

$$\|u; \Omega\|^{2,1} \leq C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1).$$

Здесь и далее через C , c обозначаем положительные постоянные, зависящие от T , a , Σ_k , конкретный вид которых нас не интересует.

Замечания.

1. Единственность решения задачи (4)–(6) следует из принципа максимума (см., например, [3]).
2. Пусть ω_0 — модуль непрерывности коэффициента a на $[0, T]$. Если

$$\omega_0(t) \leq Ct^{\frac{\alpha}{2}}, \quad g_k \in H^{1+\alpha/2}[0, T], \quad k = 1, 2, \quad 0 < \alpha < 1,$$

то для любых $\psi_k \in H_0^{1+\alpha/2}[0, T]$, $k = 1, 2$, хорошо известна разрешимость задачи (3)–(5) в классе $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$ (см. [5, с. 361–368], [7]).

3. Если ω_0 удовлетворяет двойному условию Дини

$$\tilde{\omega}_0(x) = \int_0^x \frac{d\tau}{\tau} \int_0^\tau \frac{\omega_0(z)}{z} dz < \infty, \quad x > 0,$$

и $g_k \in H^{1/2+\omega_1}[0, T]$, $k = 1, 2$, т.е.

$$|\Delta_t g_k(t)| \leq |\Delta t|^{1/2} \omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t + \Delta t \in [0, T], \quad (9)$$

где ω_1 удовлетворяет условию Дини

$$\tilde{\omega}_1(x) = \int_0^x \frac{\omega_1(t)}{t} dt < \infty, \quad x > 0,$$

то хорошо известно, что для любых $\psi_k \in H_0^{1/2+\omega_1}[0, T]$ существует единственное решение задачи (3)–(5) в классе $H^{1+\omega_2, 1/2+\omega_2}(\bar{\Omega})$, где $\omega_2 = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1$ (см. [4, 8]).

4. Если в условии (1) дополнительно предположить, что ω удовлетворяет условию Дини, то g_k удовлетворяют условию Дини–Гёльдера (9).

2. Специальный параболический потенциал. Пусть

$$\Sigma := \{(x, t) \in \bar{D} : x = g(t)\},$$

где

$$g \in C[0, T] \cap C^1(0, T), \quad |g'(t)| \leq \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}}, \quad 0 < t \leq T. \quad (10)$$

Замечания.

1. Из (10) следует неравенство:

$$|g(t + \Delta t) - g(t)| \leq 2|\Delta t|^{1/2} \omega((|\Delta t|)^{1/2}), \quad 0 \leq t < t + \Delta t \leq T. \quad (11)$$

2. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$(a - b)^2 \geq \frac{a^2}{2} - 2b^2. \quad (12)$$

В самом деле, если $ab < 0$, то

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 > a^2 + b^2 > \frac{a^2}{2} - 2b^2.$$

Если $ab \geq 0$, то:

$$a^2 - 2ab + b^2 - \frac{a^2}{2} + 2b^2 = \frac{a^2}{2} + 3b^2 - 2ab = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{3}b\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 2\right)ab \geq 0.$$

3. Из (11), (12) вытекает оценка

$$\exp\left\{-c \frac{(r + (g(t) - g(\tau)))^2}{t - \tau}\right\} \leq C \exp\left\{-\frac{c}{2} \frac{r^2}{(t - \tau)}\right\}, \quad (13)$$

при любом $r \geq 0$, $0 \leq \tau < t \leq T$.

4. При $x > 0$ справедливо равенство:

$$I := \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\tau^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\tau}\right\} d\tau = \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Следуя [6], определим для плотности $\varphi \in C[0, T]$ специальный параболический потенциал $S\varphi$ формулой:

$$S\varphi(x, t) := \int_0^t Y(x - g(\tau), t; \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \bar{D},$$

где функция $Y(x, t; \tau)$ определена формулой (3).

Лемма 1. Пусть $\varphi, g \in C[0, T]$. Тогда для $t \in (0, T]$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow g(t)+0} \left(- \int_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(t), t; \tau) \varphi(\tau) d\tau \right) = \frac{\varphi(t)}{2a(t)},$$

причем сходимость равномерна на $[t_1, T]$ для любого $t_1 \in (0, T)$.

Замечание. Утверждение леммы хорошо известно (см., например, [4]), если модуль непрерывности ω_0 для функции a дополнительно удовлетворяет условию Дини.

Доказательство. Пусть $0 < t_1 < T$ произвольно. Достаточно доказать, что

$$- \int_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(x, t; \tau) \varphi(\tau) d\tau \rightarrow \frac{\varphi(t)}{2a(t)} \text{ при } x \rightarrow +0,$$

равномерно по $t \in [t_1, T]$. Имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{\left(\int_{\tau}^t a(z) dz \right)^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{x^2}{4 \left(\int_{\tau}^t a(z) dz \right)} \right\} \varphi(\tau) d\tau = \\ & = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(a(t)(t-\tau))^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{x^2}{4a(t)(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau + \\ & \quad + \left\{ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{\left(\int_{\tau}^t a(z) dz \right)^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{x^2}{4 \left(\int_{\tau}^t a(z) dz \right)} \right\} \varphi(\tau) d\tau - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(a(t)(t-\tau))^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{x^2}{4a(t)(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau \right\} = \\ & = I_1(x, t) + \int_0^t \frac{1}{4\sqrt{\pi}} K(x, t; \tau) \varphi(\tau) d\tau = I_1(x, t) + I_2(x, t). \end{aligned}$$

Согласно [4]

$$I_1(x, t) \rightarrow \frac{\varphi(t)}{2a(t)} \text{ при } x \rightarrow +0,$$

причем сходимость равномерна на $[t_1, T]$. Рассмотрим $I_2(x, t)$. Из представления

$$\int_{\tau}^t a(z) dz - a(t)(t-\tau) = \int_{\tau}^t (a(z) - a(t)) dz$$

вытекает оценка

$$|K(x, t; \tau)| \leq C \exp \left\{ -c \frac{x^2}{(t-\tau)} \right\} \frac{x\omega_0(t-\tau)}{(t-\tau)^{3/2}},$$

где ω_0 — модуль непрерывности функции a на $[0, T]$. Поэтому (не ограничивая общности, считаем, что $0 < x < t_1$)

$$|I_2(x, t)| \leq C \left(\int_0^{t-x} + \int_{t-x}^t \right) \exp \left\{ -c \frac{x^2}{(t-\tau)} \right\} \frac{x\omega_0(t-\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \varphi(\tau) d\tau = I_{21}(x, t) + I_{22}(x, t).$$

Оценим $I_{21}(x, t)$:

$$|I_{21}(x, t)| \leq C_\varphi \omega_0(x) \int_0^{t-x} \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \leq C_\varphi \omega_0(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +0,$$

где $C_\varphi = C \|\varphi\|^0$. Оценим $I_{22}(x, t)$:

$$|I_{22}(x, t)| \leq C_\varphi \omega_0(x) \int_0^{+\infty} \exp\{-y^2\} dy \leq C_\varphi \omega_0(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +0.$$

Лемма доказана. □

Заметим, что для любых $\varphi, g \in C[0, T]$ имеем

$$S\varphi \in C^{2,1}(D \setminus \Sigma), \quad L(S\varphi) = 0 \text{ в } D \setminus \Sigma. \quad (15)$$

Определим области

$$D_+ := \{(x, t) \in D : x > g(t)\}, \quad D_- := \{(x, t) \in D : x < g(t)\}.$$

Докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для любых $\varphi, g \in C[0, T]$ справедливы следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^k S\varphi}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq C \|\varphi\|^0, \quad (x, t) \in \overline{D}, \quad k = 0, 1, \quad (16)$$

$$\left| \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq C \|\varphi\|^0, \quad (x, t) \in D_\pm. \quad (17)$$

Доказательство. Оценка (16) сразу следует из определения потенциала (6). Докажем (17). Без ограничения общности предположим, что $(x, t) \in D_+$, тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x, t) &= \int_0^t \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x - g(\tau), t; \tau) \varphi(\tau) d\tau - \int_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(\tau), t; \tau) \varphi(\tau) d\tau = \\ &= - \int_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(t), t; \tau) \varphi(\tau) d\tau - \int_0^t \left(\frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(\tau), t; \tau) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(t), t; \tau) \right) \varphi(\tau) d\tau = \\ &= I_1(x, t) + I_2(x, t). \end{aligned} \quad (18)$$

Имеем в силу (14)

$$|I_1(x, t)| \leq C \|\varphi\|^0,$$

и, кроме того,

$$|I_2(x, t)| \leq C \|\varphi\|^0 \int_0^t \frac{|g(t) - g(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}} \leq C \|\varphi\|^0 \int_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{(t-\tau)^{1/2} \tau^{1/2}} = C \|\varphi\|^0.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2. Пусть $\varphi \in C_0[0, T]$, g удовлетворяет условию (10). Тогда для любого $t^0 \in [0, T]$ имеет место соотношение

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (g(t^0), t^0)} \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x, t) = \pm \frac{\varphi(t^0)}{2a(t^0)} + \int_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(g(t^0) - g(\tau), t^0; \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in D_{\pm}. \quad (19)$$

Без ограничения общности формулу (19) докажем для области D_+ . Доказательство основано на следующих леммах 2–5.

Лемма 2. Пусть $\varphi \in C[0, T]$, g удовлетворяет условию (10), а $t_1 \in (0, T)$ произвольно. Тогда для любого $t \in [t_1, T]$

$$\lim_{x \rightarrow g(t)+0} \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\varphi(t)}{2a(t)} + \int_0^t \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(g(t) - g(\tau), t; \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (20)$$

причем сходимость равномерна на $[t_1, T]$.

Доказательство. Воспользуемся представлением (18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x, t) &= - \int_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(t), t; \tau) \varphi(\tau) d\tau - \\ &\quad - \int_0^t \left(\frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(\tau), t; \tau) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(t), t; \tau) \right) \varphi(\tau) d\tau = I_1(x, t) + I_2(x, t). \end{aligned}$$

В силу леммы 1

$$\lim_{x \rightarrow g(t)+0} I_1(x, t) = \frac{\varphi(t)}{2a(t)},$$

причем сходимость равномерна на $[t_1, T]$. Рассмотрим $I_2(x, t)$. Положим

$$\begin{aligned} h(t, \tau) &= \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t) - g(\tau), t; \tau), \quad 0 \leq \tau < t, \\ f(x, t, \tau) &= \left\{ \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(\tau), t; \tau) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(t), t; \tau) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что имеют место оценки

$$\begin{aligned} |h(t, \tau)| &\leq C \frac{|g(t) - g(\tau)|}{(t - \tau)^{3/2}} \leq C \frac{|g'(\tau + \theta(t - \tau))|}{(t - \tau)^{1/2}} \leq \\ &\leq \frac{\omega((\tau + \theta(t - \tau))^{1/2})}{(\tau + \theta(t - \tau))^{1/2} (t - \tau)^{1/2}} \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2} (t - \tau)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Интеграл

$$\int_0^t f(x, t, \tau) d\tau$$

сходится равномерно по $x \in \mathbb{R}$, так как в силу условия (10) справедливы оценки

$$|f(x, t, \tau)| \leq C \frac{|g(t) - g(\tau)|}{(t - \tau)^{3/2}} \leq C \frac{|t - \tau| |g'(\tau + \theta(t - \tau))|}{(t - \tau)^{3/2}} \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{(t - \tau)^{1/2} \tau^{1/2}}.$$

Кроме того, $f(x, t, \tau) \rightarrow h(t, \tau)$ при $x \rightarrow g(t) + 0$ равномерно по τ в каждом промежутке $[0, t - \varepsilon]$ в силу неравенств

$$|f(x, t, \tau) - h(t, \tau)| \leq \left| \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(\tau), t; \tau) - \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t) - g(\tau), t; \tau) \right| + \left| \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(t), t; \tau) \right| \leq C \frac{|x - g(t)|}{(t - \tau)^{3/2}}.$$

Таким образом, все условия для перехода к пределу под знаком интеграла выполнены и, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow g(t)+0} I_2(x, t) = - \int_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t) - g(\tau), t; \tau) \varphi(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Докажем, что сходимость в (23) равномерна по $t \in [t_1, T]$. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ фиксировано произвольно. Выберем такое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon < t_1/2$; тогда $t - \varepsilon > t/2$. Положим

$$\int_0^t (f(x, t, \tau) - h(t, \tau)) d\tau = \left(\int_{t-\varepsilon}^t + \int_0^{t-\varepsilon} \right) (f(x, t, \tau) - h(t, \tau)) d\tau = J_1(x, t) + J_2(x, t).$$

Оценим $J_1(x, t)$:

$$|J_1(x, t)| \leq C \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}} \int_{t-\varepsilon}^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = C \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}} \varepsilon^{1/2} \leq C \frac{\omega(T^{1/2})}{t_1^{1/2}} \varepsilon^{1/2}.$$

Выбирая ε достаточно малым, получим

$$|J_1(x, t)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

для любых $x \geq g(t)$, $t \in [t_1, T]$. Оценим $J_2(x, t)$. Пусть

$$D_{t_1} = \{(x, t) \in D : t \geq t_1\}, \quad \Sigma_{t_1} = \{(x, t) \in \Sigma : t \geq t_1\}.$$

В силу непрерывности подынтегральной функции по x, t, τ собственный интеграл $J_2(x, t)$ непрерывен по своим аргументам и, следовательно, равномерно непрерывен на любом двумерном компакте, содержащем Σ_{t_1} . Поэтому существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, \varepsilon_0) > 0$, что

$$|J_2(x, t)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

при $|x - g(t)| < \delta$ для любых $t \in [t_1, T]$. Лемма доказана. \square

Определим оператор $A: C[0, T] \rightarrow C[0, T]$, действующий на функции $\varphi \in C[0, T]$ по формуле

$$A\varphi(t) = \int_0^t h(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (24)$$

где функция h определена равенством (21).

Лемма 3. Пусть для g выполнено условие (10). Тогда для любой функции $\varphi \in C[0, T]$ справедливы оценки

$$|A\varphi(t)| \leq C \|\varphi\|^0 \omega(t^{1/2}), \quad (25)$$

$$|\Delta_t A\varphi| = |A\varphi(t + \Delta t) - A\varphi(t)| \leq C \|\varphi\|^0 \omega((\Delta t)^{1/2}), \quad (26)$$

где $0 \leq t < t + \Delta t \leq T$.

Доказательство. Докажем (25). Из оценки (22) следует, что

$$|A\varphi(t)| \leq C \int_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} |\varphi(\tau)| d\tau \leq C \|\varphi\|^0 \omega(t^{1/2}).$$

Докажем (26). В случае $t \leq \Delta t$ эта оценка сразу следует из (25). Пусть $t > \Delta t$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_t A\varphi &= \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} K(t+\Delta t, \tau)\varphi(\tau)d\tau - \int_{t-\Delta t}^t K(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau + \\ &+ \int_0^{t-\Delta t} \left\{ K(t+\Delta t, \tau) - K(t, \tau) \right\} \varphi(\tau)d\tau = I_1(t, \Delta t) + I_2(t, \Delta t) + I_3(t, \Delta t). \end{aligned}$$

Интегралы $I_1(t, \Delta t)$ и $I_2(t, \Delta t)$ оцениваются аналогично. Оценим, например, $I_1(t, \Delta t)$:

$$|I_1(t, \Delta t)| \leq \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t+\Delta t-\tau)^{1/2}} |\varphi(\tau)| d\tau \leq C \|\varphi\|^0 \omega((\Delta t)^{1/2}).$$

Оценим $I_3(t, \Delta t)$. Имеем

$$\begin{aligned} |\Delta_t h(t, \tau)| &\leq \left| Z_x(g(t+\Delta t) - g(\tau), t+\Delta t; \tau) - Z_x(g(t) - g(\tau), t+\Delta t; \tau) \right| + \\ &+ \left| Z_x(g(t) - g(\tau), t+\Delta t; \tau) - Z_x(g(t) - g(\tau), t; \tau) \right| \leq \\ &\leq C \left\{ \frac{\omega((\Delta t)^{1/2})(\Delta t)^{1/2}}{(t-\tau)^{3/2}} + |\Delta t| \frac{\omega((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^2} \right\} \leq C \frac{\omega((\Delta t)^{1/2})(\Delta t)^{1/2}}{(t-\tau)^{3/2}}, \end{aligned}$$

если $t - \tau \geq \Delta t$. Поэтому

$$|I_3(t, \Delta t)| \leq C \|\varphi\|^0 \omega((\Delta t)^{1/2}).$$

Лемма доказана. \square

Лемма 4. Пусть $\varphi \in C[0, T]$, а g удовлетворяет условию (10). Тогда для всех $t^0 > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (g(t^0), t^0)} \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\varphi(t^0)}{2a(t^0)} + \int_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(g(t^0) - g(\tau), t^0; \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in D_+. \quad (27)$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\varphi(t^0)}{2a(t^0)} - \int_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(g(t^0) - g(\tau), t^0; \tau) \varphi(\tau) d\tau \right| &\leq \\ &\leq \left| \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\varphi(t)}{2a(t)} - \int_0^t \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(g(t) - g(\tau), t; \tau) \varphi(\tau) d\tau \right| + \\ &+ |A\varphi(t) - A\varphi(t^0)| + \left| \frac{\varphi(t^0)}{2a(t^0)} - \frac{\varphi(t)}{2a(t)} \right|, \end{aligned}$$

лемм 2, 3 и непрерывности функций φ , a на $[0, T]$. \square

Из лемм 2–4 следует утверждение теоремы 2 для $t^0 > 0$. Справедливость этого утверждения для $t^0 = 0$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 5. Для любой функции $\varphi \in C_0[0, T]$ имеем

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (g(0), 0)} \frac{\partial^2 S\varphi}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in D_+. \quad (28)$$

Доказательство. Пусть ω_φ — модуль непрерывности функции φ на $[0, T]$. Утверждение леммы вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x - g(\tau), t; \tau) \varphi(\tau) d\tau \right| \leq \\ & \leq \int_0^t \left| \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x - g(\tau), t; \tau) (\varphi(\tau) - \varphi(0)) \right| d\tau \leq C \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{|x - g(\tau)|}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left\{ -c \frac{(x - g(\tau))^2}{(t - \tau)} \right\} \omega_\varphi(\tau) d\tau \leq \\ & \leq C \omega_\varphi(t) \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{|x - g(\tau)|}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left\{ -c \frac{(x - g(\tau))^2}{(t - \tau)} \right\} d\tau \leq C \omega_\varphi(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$

Из теорем 1, 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (10). Тогда для любой функции $\varphi \in C_0[0, T]$ потенциал $\varphi \in C_0^{2,1}(\bar{D}_\pm)$ и имеет место оценка

$$\|S\varphi; D_\pm\|^{2,1} \leq C \|\varphi; [0, T]\|^0. \quad (29)$$

3. Система граничных интегральных уравнений.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1), (2). Тогда для любых $\psi_1, \psi_2 \in C_0^1[0, T]$ система интегральных уравнений Вольтерры первого рода

$$\sum_{k=1}^2 \int_0^t Y(g_l(t) - g_k(\tau), t; \tau) \varphi_k(\tau) d\tau = \psi_l(t), \quad l = 1, 2, \quad t \in [0, T], \quad (30)$$

имеет единственное в $C[0, T]$ решение $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0[0, T]$, и справедливы оценки

$$\|\varphi_l\|^0 \leq C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1), \quad l = 1, 2. \quad (31)$$

Доказательство. Учитывая определение (6), применим к обеим частям первого уравнения системы (30) оператор дифференцирования по t :

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow t-0} \varphi_1(t) \int_0^{+\infty} Z(g_1(t) - g_1(\tau) + r, t; \tau) dr + \\ & + \int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \left(Z_x(g_1(t) - g_1(\tau) + r, t; \tau) g_1'(t) + Z_t(g_1(t) - g_1(\tau) + r, t; \tau) \right) dr + \\ & + \lim_{\tau \rightarrow t-0} \varphi_2(t) \int_0^{+\infty} Z(g_1(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau) dr + \\ & + \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \left(Z_x(g_1(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau) g_1'(t) + Z_t(g_1(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau) \right) dr = \psi_1'(t), \end{aligned}$$

где $0 \leq t \leq T$. Заметим, что

$$\int_0^{+\infty} Z(r, t; \tau) dr = \frac{1}{2},$$

и в силу (11), (13)

$$\left| \int_0^{+\infty} \left\{ Z(g_1(t) - g_1(\tau) + r, t; \tau) - Z(r, t; \tau) \right\} dr \right| \leq C\omega((t - \tau)^{1/2}) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow t - 0.$$

Кроме того, в силу условия (2) и оценок (11), (13)

$$\begin{aligned} & \left| Z(g_1(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau) \right| \leq \\ & \leq \left| Z(g_1(t) - g_2(t) + r, t; \tau) \right| + \left| Z(g_1(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau) - Z(g_1(t) - g_2(t) + r, t; \tau) \right| \leq \\ & \leq C \left(1 + \frac{|g_2(t) - g_2(\tau)|}{t - \tau} \right) \exp \left\{ -c \frac{r^2}{t - \tau} \right\} \leq C \frac{\omega((t - \tau)^{1/2})}{(t - \tau)^{1/2}} \exp \left\{ -c \frac{r^2}{t - \tau} \right\}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\left| \int_0^{+\infty} Z(g_1(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau) dr \right| \leq C\omega((t - \tau)^{1/2}) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow t - 0.$$

В результате после дифференцирования первое уравнение системы (30) приобретает вид

$$\varphi_1(t) + 2 \sum_{j=1}^2 \int_0^t K_{1j}(t, \tau) \varphi_j(\tau) d\tau = 2\psi_1'(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$\begin{aligned} K_{11}(t, \tau) &= \int_0^{+\infty} \left(Z_x(g_1(t) - g_1(\tau) + r, t; \tau) g_1'(t) + Z_t(g_1(t) - g_1(\tau) + r, t; \tau) \right) dr = I_1(t, \tau) + I_2(t, \tau), \\ K_{12}(t, \tau) &= \int_0^{+\infty} \left(Z_x(g_1(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau) g_1'(t) + Z_t(g_1(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau) \right) dr = I_3(t, \tau) + I_4(t, \tau). \end{aligned}$$

Для ядер $K_{1j}(t, \tau)$, $j = 1, 2$, справедливы оценки

$$\left| K_{1j}(t, \tau) \right| \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad j = 1, 2.$$

Действительно, оценим $I_1(t, \tau)$:

$$\left| I_1(t, \tau) \right| = \left| Z(g_1(t) - g_1(\tau), t; \tau) |g_1'(t)| \right| \leq C \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}(t - \tau)^{1/2}} \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}}.$$

Оценим $I_2(t, \tau)$:

$$\left| I_2(t, \tau) \right| = \left| a(t) Z_x(g_1(t) - g_1(\tau), t; \tau) \right| \leq C \frac{|g_1(t) - g_1(\tau)|}{(t - \tau)^{3/2}} \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}}.$$

Оценим $I_3(t, \tau)$:

$$\left| I_3(t, \tau) \right| = \left| Z(g_1(t) - g_2(\tau), t; \tau) |g_1'(t)| \right| \leq C \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}(t - \tau)^{1/2}} \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}}.$$

Оценим $I_4(t, \tau)$:

$$\begin{aligned} \left| I_4(t, \tau) \right| &= \left| a(t) Z_x(g_1(t) - g_2(\tau), t; \tau) \right| \leq C \left\{ \frac{|g_1(t) - g_1(\tau)|}{(t - \tau)^{3/2}} + \frac{|g_1(\tau) - g_2(\tau)|}{(t - \tau)^{3/2}} \right\} \leq \\ & \leq C \left\{ \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}} + \frac{C}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{t - \tau} \right\} \right\} \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Аналогично, дифференцируя обе части второго уравнения системы (30), получаем:

$$\varphi_2(t) + 2 \sum_{j=1}^2 \int_0^t K_{2j}(t, \tau) \varphi_j(\tau) d\tau = 2\psi_2'(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$K_{21}(t, \tau) = \int_0^{+\infty} \left(Z_x(g_2(t) - g_1(\tau) + r, t; \tau) g_2'(t) + Z_t(g_2(t) - g_1(\tau) + r, t; \tau) \right) dr,$$

$$K_{22}(t, \tau) = \int_0^{+\infty} \left(Z_x(g_2(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau) g_2'(t) + Z_t(g_2(t) - g_2(\tau) + r, t; \tau) \right) dr,$$

причем справедливы оценки

$$|K_{2j}(t, \tau)| \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad j = 1, 2.$$

В результате в силу условия $\psi_1, \psi_2 \in C_0^1[0, T]$ получаем эквивалентную систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода:

$$\varphi_l(t) + 2 \sum_{j=1}^2 \int_0^t K_{lj}(t, \tau) \varphi_j(\tau) d\tau = 2\psi_l'(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad l = 1, 2. \quad (32)$$

При этом для ядер интегральных операторов имеет место оценка

$$|K_{ij}(t, \tau)| \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}, \quad i, j = 1, 2, \quad 0 \leq \tau < t \leq T. \quad (33)$$

Умножая каждое из уравнений системы (32) на $e^{-\lambda t}$, где $\lambda > 0$ будет выбрано ниже, получаем эквивалентную систему:

$$\varphi_l^*(t) + \sum_{j=1}^2 \int_0^t K_{lj}^*(t, \tau) \varphi_j^*(\tau) d\tau = \psi_l^*(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad l = 1, 2,$$

где $\varphi_i^*(t) := \varphi_i(t)e^{-\lambda t}$, $\psi_i^*(t) := 2\psi_i'(t)e^{-\lambda t}$, $K_{ij}^*(t, \tau) = 2K_{ij}(t, \tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$. Введем обозначения

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* \\ B_{21}^* & B_{22}^* \end{pmatrix}, \quad \varphi^* = \begin{pmatrix} \varphi_1^* \\ \varphi_2^* \end{pmatrix}, \quad \psi^* = \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix},$$

где

$$B_{ij}^* \varphi_i^*(t) = \int_0^t K_{ij}^*(t, \tau) \varphi_i^*(\tau) d\tau.$$

Пользуясь данными обозначениями, запишем систему (32) в операторном виде:

$$\varphi^* + B_\lambda \varphi^* = \psi^*. \quad (34)$$

Покажем, что $\lambda > 0$ можно выбрать достаточно большим, так что оператор $B_\lambda: \tilde{C}[0, T] \rightarrow \tilde{C}[0, T]$ будет сжимающим. Под $\tilde{C}[0, T]$ понимаем пространство вектор-функций, каждая компонента которой является элементом пространства $C[0, T]$, с нормой $\|\varphi^*\|^0 = \max \{ \|\varphi_1^*\|^0, \|\varphi_2^*\|^0 \}$.

Если $0 < t \leq \varepsilon^2$, то в силу (33)

$$|B_\lambda \varphi^*(t)| \leq C \|\varphi^*\|^0 \int_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} d\tau \leq C\omega(\varepsilon) \|\varphi^*\|^0 \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} \leq C\omega(\varepsilon) \|\varphi^*\|^0.$$

Выбираем $\varepsilon > 0$ так, что

$$C\omega(\varepsilon) < \frac{1}{4}. \quad (35)$$

Если $t > \varepsilon^2$, то

$$\begin{aligned} |B_\lambda \varphi^*(t)| &\leq C \|\varphi^*\|^0 \int_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \leq \\ &\leq C \|\varphi^*\|^0 \left\{ \int_0^{\varepsilon^2} \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} d\tau + \int_{\varepsilon^2}^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \right\} \leq \\ &\leq C \|\varphi^*\|^0 (I_1(t) + I_2(t, \lambda)). \end{aligned}$$

В силу (35)

$$|I_1(t)| \leq C\omega(\varepsilon) < \frac{1}{4}.$$

Оценим $I_2(t, \lambda)$:

$$|I_2(t, \lambda)| \leq C \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} \int_0^t \frac{e^{-\lambda(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \leq C \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{1}{\lambda^{1/2}}.$$

Выберем $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ так, что $C\omega(\varepsilon) < 1/2$. В итоге для выбранного λ получаем

$$\|B_\lambda\| \leq \frac{3}{4}.$$

Следовательно, уравнение (34) имеет единственное решение $\varphi_1^*, \varphi_2^* \in C[0, T]$ и справедливы оценки

$$\|\varphi_i^*\|^0 \leq C(\|\psi_1^*\|^1 + \|\psi_2^*\|^1), \quad i = 1, 2.$$

Наконец, из вида системы (32) и условий $\psi_1, \psi_2 \in C_0^1[0, T]$ делаем вывод, что $\varphi_1^*, \varphi_2^* \in C_0[0, T]$. Возвращаясь к первоначальным функциям φ_1, φ_2 окончательно получаем утверждение теоремы. Теорема доказана. \square

4. Доказательство основной теоремы. Решение задачи (3)–(5) ищем в виде суммы потенциалов (7). Для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in C[0, T]$ функция u удовлетворяет уравнению (3) и начальному условию (4). Подставляя (7) в граничные условия (5), получаем систему интегральных уравнений Вольтерры первого рода (8) для определения неизвестных плотностей $\varphi_k, k = 1, 2$. Из теоремы 4 следует, что система (8) имеет единственное решение $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0[0, T]$, и справедливы оценки

$$\|\varphi_l\|^0 \leq C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1), \quad l = 1, 2. \quad (36)$$

Подставляя найденные плотности φ_1, φ_2 в сумму потенциалов (7), получаем, что функция u из (7) является решением задачи (3)–(5). Кроме того, из теоремы 3 и неравенства (36) делаем вывод, что найденное решение $u \in C_0^{2,1}(\bar{\Omega})$, и верна оценка

$$\|u; \Omega\|^{2,1} \leq C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1).$$

Теорема доказана.

Благодарность. Автор выражает глубокую признательность профессору Е. А. Бадерко за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бадерко Е. А., Черепова М. Ф. Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 2. — С. 198–208.
2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977.
3. Ильин А. М., Калашиников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Усп. мат. наук. — 1962. — 17, № 3 (105). — С. 3–146.
4. Камынин Л. И. О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка// 4 — 1974. — 15. — С. 806–834.
5. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
6. Семаан Х. О решении второй краевой задачи для параболических систем в областях на плоскости с негладкой боковой границей Деп. ВИНТИ РАН. — 26.02.99. №567–В99..
7. Солонников В. А. Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа// Тр. Мат. ин-та РАН им. В. А. Стеклова. — 1964. — 70. — С. 133–212.
8. Baderko E. A., Cherepova M. F. Bitsadze–Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients// Compl. Var. Ellipt. Equ. — 2019. — 64, № 5. — P. 753–765.

Федоров Константин Дмитриевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

E-mail: konstantin-dubna@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 160–169
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-160-169

УДК 519.24

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ НЕЧЕТКО-СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

© 2022 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

Аннотация. В работе установлены экстремальные свойства нечетких ожиданий и ожиданий нечетко-случайных величин. Введена новая средняя характеристика — скалярная случайная величина, характеризующая данную нечетко-случайную величину, и доказаны ее экстремальные свойства. Изучены линейные регрессии нечетко-случайных величин, получена формула для оптимальной линейной нечеткой регрессии и показана максимальность ее корреляции с прогнозируемой величиной.

Ключевые слова: нечетко-случайная величина, среднее значение, экстремальное свойство.

EXTREMAL PROPERTIES OF MEANS OF FUZZY RANDOM VARIABLES

© 2022 V. L. KHATSKEVICH

ABSTRACT. In this paper, we examine extremal properties of fuzzy expectations and expectations of fuzzy random variables. We introduce a new mean characteristic—a scalar random variable that characterizes a given fuzzy random variable—and prove its extremal properties. Also, we study linear regressions of fuzzy random variables, obtain a formula for the optimal linear fuzzy regression, and prove that its correlation with the predicted value is maximal.

Keywords and phrases: fuzzy random variable, mean value, extremal property.

AMS Subject Classification: 60K10

1. Введение. Нечетко случайные величины возникли как раздел нечеткой математики в [16, 17, 19]. Они находят широкое применение в финансовой математике, прогнозировании, теории принятия решений и др.. В частности, математическая модель случайного эксперимента с нечеткими исходами интерпретируется как нечетко-случайная величина. Современное состояние теории нечетко-случайных величин отражено в [7, 13, 20] и др. (см. также [8, гл. 6]).

В настоящей работе исследуются экстремальные свойства средних нечетко-случайных величин.

Как известно, математическое ожидание EX случайной величины X минимизирует среднеквадратическое отклонение $(E(X - a)^2)^{1/2}$ по всем действительным $a \in \mathbb{R}$, т.е. является решением задачи

$$E(X - a)^2 \rightarrow \min (\forall a \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

(см., например, [11, гл. 5, § 30]).

В литературе изучаются два вида средних нечетко-случайных величин: ожидание и нечеткое ожидание (см., например, [7, 13], [8, гл. 6]). Однако их экстремальные свойства не устанавливаются.

Настоящая работа заполняет этот пробел. А именно, в данной статье рассматриваются нечетко-случайные величины \tilde{X} , для которых областью возможных значений являются нечеткие числа

(строгие определения дадим ниже). Устанавливаются экстремальные свойства вида (1) для ожиданий и нечетких ожиданий нечетко-случайных величин при специально подобранном определении расстояния между нечеткими числами. Кроме того, показывается экстремальная взаимосвязь между ожиданиями и нечеткими ожиданиями нечетко-случайных величин. Вводится новое понятие усредненной (скалярной) случайной величины, характеризующей данную нечетко-случайную величину, и обсуждаются ее экстремальные свойства. Рассматриваются также средние систем нечетко-случайных величин, и обсуждаются их экстремальные свойства.

2. Нечетко-случайные величины и их средние. Ниже, под нечетким множеством A , заданном на универсальном пространстве X , будем понимать совокупность упорядоченных пар $(x, \mu_A(x))$, где функция принадлежности $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$, определяет степень принадлежности $\forall x \in X$ множеству A .

Будем использовать следующее определение нечеткого числа (см., например, [6, гл. 2, 3], [1]). *Нечетким числом* A называется нечеткое множество, универсальным множеством которого является множество действительных чисел, и которое дополнительно удовлетворяет следующим условиям:

- (i) носитель нечеткого числа — замкнутое и ограниченное (компактное) множество действительных чисел: $\text{Supp}(A) \subset \mathbb{R}$;
- (ii) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ выпукла;
- (iii) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ нормальна, т.е. $\sup_x \mu_A(x) = 1$;
- (iv) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ полунепрерывна сверху.

Мы будем использовать интервальное представление нечетких чисел. А именно, каждому нечеткому числу поставим в соответствие совокупность его α -интервалов.

Как известно, множество α -уровня нечеткого числа A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ определяется соотношением

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (\alpha \in (0, 1]), \quad A_0 = \text{supp}(A).$$

Согласно предположениям (i)–(iv) все α -уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую (нижнюю) границу интервала $a^-(\alpha)$, а правую (верхнюю) — $a^+(\alpha)$, т. о. $A_\alpha = [a^-(\alpha), a^+(\alpha)]$. Иногда $a^-(\alpha)$ и $a^+(\alpha)$ называют левым и правым индексами нечеткого числа соответственно.

Обозначим через J_0 множество нечетких чисел, в интервальном представлении которых функции $a^-(\alpha)$ и $a^+(\alpha)$ квадратично суммируемы на $[0, 1]$.

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. При интервальном подходе часто используют расстояние Хаусдорфа между множествами α -уровня нечетких чисел (см., например, [8, гл. 2, § 2.5]). Рассматриваются и некоторые другие расстояния (см. [1, 13]). Однако хотелось бы рассмотреть такое определение расстояния, чтобы рассматриваемое среднее минимизировало некоторую среднеквадратическую ошибку. В качестве такого расстояния на множестве J_0 удобно рассмотреть следующее.

Пусть \tilde{z} и \tilde{u} два нечетких числа из J_0 . Расстояние $\rho(\tilde{z}, \tilde{u})$ между ними зададим формулой

$$\rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = \left(\int_0^1 (z^-(\alpha) - u^-(\alpha))^2 + (z^+(\alpha) - u^+(\alpha))^2 d\alpha \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Здесь $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ — интервалы α -уровней нечетких чисел \tilde{z} и \tilde{u} , соответственно. Такого рода расстояние ранее использовалось, например, в [2, 9] по нечетким регрессиям.

Пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство, где Ω — множество элементарных событий, Σ — σ -алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω , P — вероятностная мера. Измеримое отображение $\tilde{X}: \Omega \rightarrow J_0$ будем называть *нечетко-случайной величиной*, если при любом $\omega \in \Omega$ множество $\tilde{X}(\omega)$ является нечетким числом из J_0 .

Рассмотрим интервалы α -уровней нечетко-случайной величины \tilde{X} при фиксированном ω . А именно, $X_\alpha(\omega) = \{t \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{X}(\omega)}(t) \geq \alpha\}$, где $\mu_{\tilde{X}(\omega)}$ — функция принадлежности нечеткого числа

$\tilde{X}(\omega)$, а $\alpha \in (0, 1]$. Интервал $X_\alpha(\omega)$ представим в виде $X_\alpha(\omega) = [X^-(\omega, \alpha), X^+(\omega, \alpha)]$, где границы $X^-(\omega, \alpha)$ и $X^+(\omega, \alpha)$ — случайные величины. Они называются соответственно левым и правым индексом нечетко-случайной величины \tilde{X} .

В дальнейшем будем рассматривать класс \mathfrak{X} нечетко-случайных величин \tilde{X} , для которых выполнено следующее условие.

Условие 1. Для каждой нечетко-случайной величины $\tilde{X} \in \mathfrak{X}$ индексы $X^-(\omega, \alpha)$ и $X^+(\omega, \alpha)$ являются квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0, 1]$ функциями.

Положим

$$x^-(\alpha) = \int_{\Omega} X^-(\omega, \alpha) dP, \quad x^+(\alpha) = \int_{\Omega} X^+(\omega, \alpha) dP. \quad (3)$$

Нечеткое число \tilde{x} с индексами, определяемыми формулой (3), называется нечетким ожиданием нечетко-случайной величины \tilde{X} .

Ожиданием $E(\tilde{X})$ нечетко-случайной величины \tilde{X} называется число, определяемое формулой

$$E(\tilde{X}) = 0,5 \int_0^1 \int_{\Omega} (X^-(\omega, r) + X^+(\omega, r)) dP dr. \quad (4)$$

Определим расстояние между случайными величинами \tilde{X} и \tilde{Y} из класса \mathfrak{X} формулой

$$d(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \left(\int_0^1 \int_{\Omega} \left([X^-(\omega, \alpha) - Y^-(\omega, \alpha)]^2 + [X^+(\omega, \alpha) - Y^+(\omega, \alpha)]^2 \right) dP d\alpha \right)^{1/2}. \quad (5)$$

3. Экстремальные свойства ожиданий и нечетких ожиданий. Рассмотрим экстремальные свойства ожиданий и нечетких ожиданий нечетко-случайных величин.

Утверждение 1. Для заданной нечетко-случайной величины \tilde{X} с индексами $X^-(\omega, \alpha)$, $X^+(\omega, \alpha)$ ее ожидание $E(\tilde{X})$ является решением, причем единственным, экстремальной задачи

$$d(\tilde{X}, y) \rightarrow \min(y \in \mathbb{R}), \quad (6)$$

где расстояние $d(\tilde{X}, y)$ определяется формулой (5).

Доказательство. Действительно, фиксируем $y \in \mathbb{R}$ и положим

$$\Delta(y) = d^2(\tilde{X}, y) = \int_0^1 \int_{\Omega} \left([X^-(\omega, \alpha) - y]^2 + [X^+(\omega, \alpha) - y]^2 \right) dP d\alpha.$$

Рассмотрим производную

$$\begin{aligned} \Delta'(y) &= \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{d}{dy} \left([X^-(\omega, \alpha) - y]^2 + [X^+(\omega, \alpha) - y]^2 \right) dP d\alpha = \\ &= -2 \int_0^1 \int_{\Omega} \left((X^-(\omega, \alpha) - y) + (X^+(\omega, \alpha) - y) \right) dP d\alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Такое представление законно, поскольку $\tilde{X} \in \mathfrak{X}$. Выражение (7) обращается в нуль при

$$y_* = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} B(X^-(\omega, \alpha) + X^+(\omega, \alpha)) dP d\alpha.$$

Таким образом, в соответствии с (4), $y_* = E(\tilde{X})$. При этом $\Delta''(y) = 4$; поэтому в точке y_* выполнено достаточное условие минимума. Единственность обеспечивается сильной выпуклостью функции $\Delta(y)$. \square

Рассмотрим нечетко-случайную величину \tilde{X} и пусть \tilde{x} — ее нечеткое ожидание, с интервалами α -уровня $[x^-(\alpha), x^+(\alpha)]$, где $x^-(\alpha)$ и $x^+(\alpha)$ определяются формулами (3).

Утверждение 2. *Ожидание $E(\tilde{X})$ является решением, причем единственным, следующей экстремальной задачи:*

$$\rho(\tilde{x}, y) \rightarrow \min (\forall y \in \mathbb{R}). \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим величину

$$\delta(y) = \rho^2(\tilde{x}, y) = \int_0^1 \left((x^-(\alpha) - y)^2 + (x^+(\alpha) - y)^2 \right) d\alpha.$$

Производная $\delta'(y)$ равна

$$\delta'_y = -2 \int_0^1 \left(x^-(\alpha) + x^+(\alpha) - 2y \right) d\alpha.$$

Она обращается в нуль при y_* , когда

$$y_* = \int_0^1 \frac{x^-(\alpha) + x^+(\alpha)}{2} d\alpha.$$

Согласно (3) это дает $y_* = E(\tilde{X})$; при этом $\delta''(y) = 4$. Отсюда следует утверждение теоремы. Единственность обеспечивается сильной выпуклостью функции $\delta(y)$. \square

Отметим, что доказательства утверждений 1 и 2 элементарны, однако имеют специфику, связанную с определением ожиданий и нечетких ожиданий нечетко-случайных величин.

Основным утверждением в этом разделе, на наш взгляд, является следующая теорема.

Теорема 1. *Нечеткое ожидание \tilde{x} нечетко-случайной величины \tilde{X} является решением следующей экстремальной задачи:*

$$d(\tilde{X}, \tilde{y}) \rightarrow \min (\forall \tilde{y} \in J_0).$$

Доказательство. Пусть \tilde{y} — произвольное нечеткое число из J_0 . Имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} d^2(\tilde{X}, \tilde{y}) &= \int_0^1 \int_{\Omega} \left((X^-(\omega, \alpha) - y^-(\alpha))^2 + (X^+(\omega, \alpha) - y^+(\alpha))^2 \right) dP d\alpha = \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega} \left((X^-(\omega, \alpha) - x^-(\alpha) + x^-(\alpha) - y^-(\alpha))^2 + (X^+(\omega, \alpha) - x^+(\alpha) + x^+(\alpha) - y^+(\alpha))^2 \right) dP d\alpha = \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega} \left((X^-(\omega, \alpha) - x^-(\alpha))^2 + (x^-(\alpha) - y^-(\alpha))^2 \right) dP d\alpha + \\ &\quad + \int_0^1 \int_{\Omega} \left((X^+(\omega, \alpha) - x^+(\alpha))^2 + (x^+(\alpha) - y^+(\alpha))^2 \right) dP d\alpha + \\ &+ 2 \int_0^1 \int_{\Omega} (X^-(\omega, \alpha) - x^-(\alpha))(x^-(\alpha) - y^-(\alpha)) dP d\alpha + 2 \int_0^1 \int_{\Omega} (X^+(\omega, \alpha) - x^+(\alpha))(x^+(\alpha) - y^+(\alpha)) dP d\alpha. \end{aligned}$$

Представим последний интеграл в виде повторного

$$\int_0^1 \left(\int_{\Omega} (X^+(\omega, \alpha) - x^+(\alpha)) dP \right) (x^+(\alpha) - y^+(\alpha)) d\alpha$$

и заметим, что внутренний интеграл обращается в нуль согласно определению $x^+(\alpha)$ (3). Аналогично, обращается в нуль предпоследний интеграл. Тогда

$$d^2(\tilde{X}, \tilde{y}) = d^2(\tilde{X}, \tilde{x}) + \rho^2(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

откуда следует высказанное утверждение. \square

Рассмотрим теперь другой подход. Будем аппроксимировать нечетко-случайную величину специально подобранной вещественной случайной величиной. Пусть \tilde{X} — нечетко-случайная величина с левым и правым индексами $X^-(\omega, \alpha)$ и $X^+(\omega, \alpha)$. Введем в рассмотрение усредненную случайную величину

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^1 (X^-(\omega, \alpha) + X^+(\omega, \alpha)) d\alpha. \quad (9)$$

Заметим, что при фиксированном ω число $\hat{x}(\omega)$ является средним соответствующего нечеткого числа с индексами $x^-(\alpha)$ и $x^+(\alpha)$, определяемыми формулами (3).

Кроме того, при выполнении условия 1 функция $\hat{x}(\omega)$ корректно определена и является квадратично суммируемой на Ω .

Утверждение 3. Пусть для нечетко-случайной величины \tilde{X} выполнено условие 1. Тогда математическое ожидание усредненной случайной величины $\hat{x}(\omega)$, определяемой формулой (9), совпадает с ожиданием $E(\tilde{X})$ нечетко-случайной величины \tilde{X} .

Доказательство. Действительно, математическое ожидание для $\hat{x}(\omega)$ имеет вид

$$E(\hat{x}(\omega)) = \int_{\Omega} \hat{x}(\omega) dP = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 (X^-(\omega, \alpha) + X^+(\omega, \alpha)) d\alpha dP.$$

Поменяв здесь порядок интегрирования на основании теоремы Фубини (см., например, [5, гл. V, § 6]), получим $E(\tilde{X})$ (см. формулу (4)). \square

Утверждение 4. Для нечетко-случайной величины \tilde{X} , удовлетворяющей условию 1, ожидание $E(\tilde{X})$ является решением экстремальной задачи

$$E|\hat{x}(\omega) - y|^2 \rightarrow \min (\forall y \in \mathbb{R}),$$

причем единственным.

Это следует из утверждения 3 и известного экстремального свойства математического ожидания для (скалярных) случайных величин (ср. с (1)).

Ниже удобно для (скалярных) случайных величин x и y ввести обозначение скалярного произведения $(x, y) = Exy$ и нормы $\|x\|_0^2 = (x, x)^{1/2}$. При этом будем предполагать, что рассматриваемые случайные величины принадлежат гильбертову пространству \mathfrak{H} случайных величин с конечным вторым моментом.

Приведем теперь характеристическое свойство усредненной (скалярной) случайной величины $\hat{x}(\omega)$ как оценки для нечетко-случайной величины \tilde{X} .

Теорема 2. Для заданной нечетко-случайной величины \tilde{X} задача

$$d(\tilde{X}, y) \rightarrow \min (\forall y \in \mathfrak{H}) \quad (10)$$

имеет решение, определяемое формулой (9), причем единственное.

Доказательство. Действительно, фиксируем $y \in \mathfrak{H}$ и рассмотрим величину

$$d^2(\tilde{X}, y) = \int_0^1 \int_{\Omega} \left((X^-(\omega, \alpha) - y(\omega))^2 + (X^+(\omega, \alpha) - y(\omega))^2 \right) dP d\alpha.$$

Преобразуем подынтегральное выражение, используя представление

$$\begin{aligned} (X^-(\omega, \alpha) - y(\omega))^2 &= (X^-(\omega, \alpha) - \hat{x}(\omega) + \hat{x}(\omega) - y(\omega))^2 = \\ &= (X^-(\omega, \alpha) - \hat{x}(\omega))^2 + (\hat{x}(\omega) - y(\omega))^2 + 2(X^-(\omega, \alpha) - \hat{x}(\omega))(\hat{x}(\omega) - y(\omega)). \end{aligned}$$

Тогда с учетом аналогичного представления для второго слагаемого под интегралом получим

$$\begin{aligned} d^2(\tilde{X}, y) &= \int_0^1 \int_{\Omega} \left((X^-(\omega, \alpha) - \hat{x}(\omega))^2 + (X^+(\omega, \alpha) - \hat{x}(\omega))^2 \right) dP d\alpha + \\ &+ 2 \int_0^1 \int_{\Omega} (\hat{x}(\omega) - y(\omega))^2 dP d\alpha + 2 \int_0^1 \int_{\Omega} (X^-(\omega, \alpha) + X^+(\omega, \alpha) - 2\hat{x}(\omega))(\hat{x}(\omega) - y(\omega)) dP d\alpha. \end{aligned}$$

Заметим, что второе слагаемое равно $2\|\hat{x}(\omega) - y(\omega)\|_0^2$, где $\|\cdot\|_0$ — норма в пространстве \mathfrak{H} . Третье слагаемое, меняя порядок интегрирования, можно представить в виде повторного интеграла

$$2 \int_{\Omega} (\hat{x}(\omega) - y(\omega)) \int_0^1 (X^-(\omega, \alpha) + X^+(\omega, \alpha) - 2\hat{x}(\omega)) d\alpha dP.$$

При этом внутренний интеграл по α обращается в нуль в силу определения (9). Таким образом, выражение в (10) имеет вид

$$d^2(\tilde{X}, y) = d^2(\tilde{X}, \hat{x}) + 2\|\hat{x} - y\|_0^2,$$

откуда и следует требуемый факт. \square

4. Средние систем нечетко-случайных величин. Рассмотрим нечетко-случайную выборку $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$, которая является математической моделью набора нечетких наблюдений. В ряде работ (см., например, [13, 18, 21]) в качестве оценки неизвестной средней нечетко-случайной выборки предлагается среднее арифметическое

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_n). \quad (11)$$

Нами установлено следующее предложение.

Теорема 3. Пусть $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$ — нечетко-случайные величины, удовлетворяющие условию 1. Тогда среднее \bar{X}_n , определяемое формулой (11), является решением экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^n d^2(\tilde{X}_i, \tilde{Y}) \rightarrow \min (\tilde{Y} \in \mathfrak{X}). \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}$. По определению

$$\sum_{i=1}^n d^2(\tilde{X}_i, \tilde{Y}) = \int_0^1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left((X_i^-(\omega, \alpha) - Y^-(\omega, \alpha))^2 + (X_i^+(\omega, \alpha) - Y^+(\omega, \alpha))^2 \right) dP d\alpha. \quad (13)$$

Фиксируем номер i и рассмотрим

$$d^2(\tilde{X}_i, \tilde{Y}) = \int_0^1 \int_{\Omega} \left((X_i^-(\omega, \alpha) - Y^-(\omega, \alpha))^2 + (X_i^+(\omega, \alpha) - Y^+(\omega, \alpha))^2 \right) dP d\alpha. \quad (14)$$

Представим первое подынтегральное слагаемое в правой части (14) (опуская аргументы ω и α) в виде

$$(X_i^- - \bar{X}_n^-)^2 + (\bar{X}_n^- - Y^-)^2 + 2(X_i^- - \bar{X}_n^-)(\bar{X}_n^- - Y^-),$$

где \bar{X}_n^- и \bar{X}_n^+ — левый и правый индексы среднего \bar{X}_n . Аналогично поступим и для второго слагаемого.

Суммируя преобразованное подынтегральное выражение в (14) по i от 1 до n , получим под интегралом в правой части (13) выражение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i^- - \bar{X}_n^-)^2 + \sum_{i=1}^n (X_i^+ - \bar{X}_n^+)^2 + n((\bar{X}_n^- - Y^-)^2 + (\bar{X}_n^+ - Y^+)^2) + \\ + 2(\bar{X}_n^- - Y^-) \sum_{i=1}^n (X_i^- - \bar{X}_n^-) + 2(\bar{X}_n^+ - Y^+) \sum_{i=1}^n (X_i^+ - \bar{X}_n^+). \end{aligned} \quad (15)$$

По определению и согласно правилам интервального сложения и умножения на число среднее \bar{X}_n имеет левый и правый индексы

$$\bar{X}_n^- = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^-, \quad \bar{X}_n^+ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^+$$

соответственно, поэтому обращаются в нуль суммы

$$\sum_{i=1}^n (X_i^- - \bar{X}_n^-) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (X_i^+ - \bar{X}_n^+) = 0.$$

Таким образом, подынтегральное выражение в правой части (13) содержит только первые три слагаемых из формулы (15). Следовательно, равенство (13) имеет вид

$$\sum_{i=1}^n d^2(\tilde{X}_i, \tilde{Y}) = \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{X}_i, \bar{X}_n) + nd^2(\bar{X}_n, \tilde{Y}),$$

откуда и следует высказанное утверждение. \square

Рассмотрим нечеткое ожидание \bar{x}_n среднего \bar{X}_n , определяемого формулой (11). В силу линейности нечеткого ожидания оно представимо в виде

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i,$$

где \tilde{x}_i — нечеткие средние нечетко-случайных величин \tilde{X}_i . На основании этого имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5. *Нечеткое ожидание \bar{x}_n среднего (11) является единственным решением экстремальной задачи*

$$\sum_{i=1}^n \rho^2(\tilde{x}_i, \tilde{y}) \rightarrow \min (\tilde{y} \in J_0).$$

Доказательство почти дословно повторяет рассуждения теоремы 3, с заменой заглавных букв

\tilde{X}_i, \tilde{Y} на строчные и двойного интеграла $\int_0^1 \int_{\Omega}$ на \int_0^1 .

Теорема 3 и утверждение 5 суть аналоги характеристического экстремального свойства числовых средних арифметических (см. [4, гл. I, § 5]) для нечеткого случая.

Замечание 1. Ожидание $E(\bar{X}_n)$ среднего \bar{X}_n является решением, причем единственным, следующей экстремальной задачи:

$$\sum_{i=1}^n |E(\tilde{X}_i) - y|^2 \rightarrow \min (\forall y \in \mathbb{R}).$$

Действительно, по определению и в силу линейности ожидания имеем

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\tilde{X}_i).$$

Поэтому требуемый результат следует из соответствующего экстремального свойства для числовых средних (см., например, [4, гл. I, § 5]).

Рассмотрим взвешенное среднее

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{X}_i, \tag{16}$$

где числовые коэффициенты удовлетворяют условиям $\beta_i \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 1.$$

Такого рода суммы возникают, например, при нечетком портфельном инвестировании. Аналогично теореме 3 можно доказать, что взвешенная сумма (16) является единственным решением экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^n \beta_i d^2(\tilde{X}_i, \tilde{Y}) \rightarrow \min (\tilde{Y} \in \mathfrak{X}).$$

Рассмотрим опять нечетко-случайную выборку $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$. Определим усредненные случайные величины $\hat{x}_i(\omega)$ для каждой нечетко-случайной величины \tilde{X}_i по формуле (12) и рассмотрим среднюю арифметическую

$$\bar{x}_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{x}_i(\omega). \tag{17}$$

Утверждение 6. *Предположим, все нечетко-случайные величины \tilde{X}_i ($i = 1, \dots, n$) удовлетворяют условию 1 и имеют одинаковые ожидания $E\tilde{X}_i = m$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда случайная величина $\bar{x}_n(\omega)$, определенная формулой (17), есть несмещенная оценка для m .*

Доказательство. Действительно, согласно нашим предположениям и в силу утверждения 3 математическое ожидание $E\hat{x}_i = m$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда согласно свойствам математического ожидания $E\hat{x}_n = m$, что и требовалось доказать. \square

Утверждение 7. *Пусть все случайные величины $\hat{x}_i(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots$) попарно независимы и одинаково распределены, причем $E\hat{x}_i(\omega) = m$ ($i = 1, 2, \dots$). Тогда $\bar{x}_n(\omega)$ — состоятельная оценка для m .*

Утверждение 7 есть следствие закона больших чисел (см., например, [11, гл. 6, § 34]).

Отметим, что выражение вида (17) привлекалось в [7] для оценки математических ожиданий нечетко-случайных величин. Однако усредненные случайные величины вида (9) не выделялись и их свойства не рассматривались.

5. Заключение. Подчеркнем, что важность средних для приложений состоит в том, что они выражают тенденции соответствующих процессов. Средние нечетких чисел и их систем достаточно хорошо изучены (см., например, [7, 12, 14, 18]). Однако даже для них экстремальные свойства не обсуждаются в литературе. Средние нечетко-случайных величин с точки зрения экстремального подхода тем более ранее не обсуждались. Основным моментом нашего успеха в этом направлении является удачный (с этой точки зрения) выбор расстояния между нечеткими числами.

Утверждения 1–4 и 6, 7 элементарны. Мы их привели для полноты изложения. Основными результатами статьи следует считать теоремы 1–3.

Отметим возможные направления развития рассматриваемой тематики: экстремальные свойства нелинейных средних и медиан. Поясним сказанное.

Пусть $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — заданная непрерывная строго монотонная функция. Тогда можно определить нелинейное среднее нечетко-случайной величины равенством

$$E_{\phi}(\tilde{X}) = \phi^{-1} \left(\int_0^1 \int_{\Omega} \phi \left(\frac{X^-(\omega, r) + X^+(\omega, r)}{2} \right) dP dr \right).$$

Аналогично работе автора [15] можно показать, что $E_{\phi}(\tilde{X})$ является решением следующей экстремальной задачи

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \phi \left(\frac{X^-(\omega, r) + X^+(\omega, r)}{2} - y \right)^2 dP dr \rightarrow \min (\forall y \in \mathbb{R}).$$

Используя принцип сохранения формальных свойств, естественно определить квазимедиану как решение следующей экстремальной задачи

$$\int_0^1 \int_{\Omega} (|X^-(\omega, \alpha) - y| + |X^+(\omega, \alpha) - y|) dP d\alpha \rightarrow \min (\forall y \in \mathbb{R})$$

(см., например, [4, гл. I, § 5] для чисел). Другие определения нечетких медиан, не опирающиеся на экстремальные свойства, рассматриваются, например, в [18, гл. 7], [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов В. В., Федулов А. С., Зернов М. М. Основы нечеткой арифметики. — М.: Горячая линия-Телеком, 2019.
2. Вельдяков В. Н., Шведов А. С. О методе наименьших квадратов при регрессии с нечеткими данными // Экон. ж. ВШЭ. — 2014. — № 2. — С. 328–344.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Книжный дом Либроком, 2011.
4. Джини К. Средние величины. — М.: Статистика, 1970.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: УРСС, 2019.
6. Пегат А. Нечеткое математическое моделирование и управление. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.
7. Шведов А. С. Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // Прикл. эконометрика. — 2016. — 42. — С. 121–138.
8. Язенин А. В. Основные понятия теории возможностей: математический аппарат для принятия решений в условиях гибридной неопределенности. — М.: Физматлит, 2016.
9. Bargiela A., Pedrycz W., Nakashima T. Multiple regression with fuzzy data // Fuzzy Sets Syst. — 2007. — 158. — P. 2169–2188.
10. Calvo T., Mesiar R. Generalized median // Fuzzy Sets Syst. — 2001. — 124. — P. 59–61.
11. Colubi A. Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applica analysis of fuzzy-and real-valued data // Fuzzy Sets Syst. — 2009. — 160. — P. 344–356.
12. Dubois D., Prade H. The mean value of fuzzy number // Fuzzy Sets Syst. — 1987. — 24, № 3. — P. 279–300.
13. Feng Y., Hu L., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variables // Fuzzy Sets Syst. — 2001. — 120, № 3. — P. 487–497.
14. Fuller R., Majlender P. On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers // Fuzzy Sets Syst. — 2003. — 136. — P. 363–374.
15. Khatskevich V. L. On some class of nonlinear mean random values // J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — 1479. — 012087.
16. Kwakernaak H. Fuzzy random variables. I. Definitions and theorems // Inform. Sci. — 1978. — 15, № 1. — P. 1–29.
17. Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets Syst. — 1978. — 1. — P. 97–110.
18. Nguyen H. T., Wu B. Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.
19. Puri M. L., Ralesku D. A. Fuzzy random variables // J. Math. Anal. Appl. — 1986. — 114. — P. 409–422.
20. Shapiro A. F. Fuzzy random variables // Insur. Math. Econ. — 2009. — 44, № 2. — P. 307–314.

21. *Wang D.* A note on consistency and unbiasedness of point estimation with fuzzy data// *Metrika. Int. J. Theor. Appl. Stat.* — 60, № 1. — P. 93–104.

Хацкевич Владимир Львович

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил

«Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж

E-mail: vlkhats@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 170–184
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-170-184

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РАСЩЕПЛЯЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2022 г. О. Б. ЦЕХАН, Ч. А. НАЛИГАМА

Аннотация. Расщепляющее преобразование, обобщающее известное преобразование типа Chang для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы со многими запаздываниями в медленных переменных состояния и приводящее исходную двухтемповую систему к двум независимым подсистемам меньшей размерности с различным темпом изменения переменных, приводит к решению уравнений Риккати и Сильвестра относительно функциональных матриц, которые могут быть найдены в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра. В этой работе доказано, что асимптотические приближения любого порядка точности на основе этих рядов могут быть представлены в виде конечных сумм по степени λ . Приведены примеры, демонстрирующие сравнение решений систем, полученных на основе построенных аппроксимаций, с точными решениями.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, запаздывание, расщепляющее преобразование, асимптотическое приближение, декомпозиция.

ASYMPTOTICS OF THE SPLITTING TRANSFORMATION FOR A LINEAR STATIONARY SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH DELAY

© 2022 O. B. TSEKHAN, C. A. NALIGAMA

ABSTRACT. The splitting transformation is a generalization of the well-known Chang transformation for linear, stationary, singularly perturbed system with many delays in slow-state variables; it reduces the original two-speed system to two independent subsystems of smaller dimensions with different rates of change of variables. The splitting transformation leads us to Riccati and Sylvester equations for functional matrices, which can be found in the form of asymptotic series in powers of the small parameter. In this work, we prove that asymptotic approximations of any order of accuracy based on these series can be represented as finite sums in powers of λ . We compare exact solutions with approximations obtained by the method proposed.

Keywords and phrases: singularly perturbed system, delay, splitting transformation, asymptotic approximation, decomposition.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K08

Работа О. Б. Цехан выполнена при частичной поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020» (шифр задания 1.3.02).

1. Введение. Сингулярно возмущенные системы (СВС), впервые подробно изученные А. Н. Тихоновым (1948, 1952), широко исследуются в современной математике. СВС, моделирующие процессы с многотемповой динамикой, актуальны также в приложениях, в моделях которых производные высшего порядка умножаются на малые физические величины. При этом, если положить малый параметр равным нулю, то порядок модели уменьшается и теряется непрерывность некоторых решений (см. [2, 9]). Динамические модели, относящиеся к сингулярно возмущенным управляемым системам, обычно встречаются в квантовой механике, физике, теории автоматического управления, теории нелинейных колебаний, гидродинамике, кинетике химии, биологии и т. д. (см., например, ссылки в [1, 2, 19, 27, 27]).

В технике, экономике, технологиях, биологии, экологии, социальной сфере и т. п. (см., например, ссылки в [21]) запаздывание сопровождается различными процессами, связанные с передачей массы, энергии, информации и т. п. Запаздывания могут быть вызваны внутренними задержками в компонентах систем или искусственным/преднамеренным введением запаздывания в системах для целей управления (см. [7]): задержка связи между датчиком и контроллером, задержка вычислений контроллера, задержка связи между контроллером и приводом (см. [20, 23]).

Область интересов данной статьи представляют линейные стационарные сингулярно возмущенные системы с немалыми соизмеримыми запаздываниями в медленных переменных состоянии, которые являются моделями двухтемповых динамических систем управления. Для таких систем возможна асимптотическая декомпозиция СВС на подсистемы меньшей размерности с разделенными по темпам переменными, которую можно реализовать с помощью невырожденной замены переменных. Впервые невырожденное линейное преобразование для нестационарной линейной СВС без запаздывания с малым параметром при старших производных части переменных предложено в [8] и применено для полного расщепления исходной системы с быстрыми и медленными переменными на две независимые подсистемы в [15, 16]. Матрицы, участвующие в формировании преобразования Chang, являются решениями алгебраических уравнений Риккати и Сильвестра. Их нахождение является ключевым шагом в построении этого преобразования. В [16] построена аппроксимация первого порядка решения соответствующего уравнения Риккати с помощью ряда Маклорена. Там же отмечается, что получение аппроксимации более высокого порядка является механическим повторением случая аппроксимации первого порядка.

Обобщение преобразования Chang для декомпозиции линейных сингулярно возмущенных медленно изменяющихся во времени систем предложено в [25, 26]. В [26] доказана теорема о разложении в ряды Маклорена матричных компонент линейного преобразования и об итерационном нахождении элементов k -го порядка аппроксимации этих рядов. Основываясь на итерационном решении, предложено понятие аппроксимации k -го порядка преобразования Chang, а также расщепленной системы, быстрой и медленной подсистем. Расщепляющее преобразование Chang изложено в [11], там же имеются ссылки на некоторые обобщения этого преобразования, указывается важная роль расщепляющих преобразований в теории управления и предложены основанные на декомпозиции параллельные алгоритмы оптимального управления крупномасштабными процессами для линейных и билинейных систем. Обобщение преобразования Chang на системы со многими временными масштабами представлено в [4, 22].

Для СВС с запаздыванием расщепляющие преобразования типа Chang строились в [3, 6, 10, 17, 24]. В [17] доказывалось существование непрерывного по малому параметру линейного преобразования координат для частичной декомпозиции СВС с распределенным и сосредоточенным запаздыванием, в результате которого в преобразованной системе связь между быстрыми и медленными переменными имеется только через переменные с запаздыванием. Замена переменных типа Chang для линейных стационарных СВС управления с постоянным (не малым) запаздыванием в состоянии, построенное в [3], осуществляется линейным оператором с конечным числом операторов запаздывания. В [10] построена замена переменных, обобщающая преобразование Chang на линейные стационарные СВС функционально-дифференциальные уравнения с малым сосредоточенным и распределенным запаздыванием в быстрых переменных. Замена расщепляет

исходную систему на медленную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и быстрые функциональные уравнения. Доказано, что преобразование можно найти в виде асимптотического разложения. В [6] построено невырожденное расщепляющее преобразование, которое обобщает преобразование Chang на линейные стационарные сингулярно возмущенные системы с одним конечным запаздыванием в медленной переменной и выполняет полное расщепление системы. Доказывается оценка для значений малого параметра, при которых справедлива аппроксимация расщепляющего преобразования.

В [24] построено невырожденное преобразование для полного расщепления линейной стационарной сингулярно возмущенной систем с множественными соразмерными немалыми запаздываниями. Доказано, что расщепляющее преобразование может быть построено в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра, указана итерационная схема нахождения элементов расщепляющего преобразования.

Настоящая работа развивает [24]. Доказывается, что асимптотическое приближение любого порядка точности на основе этих рядов может быть представлено в виде конечных сумм по степени λ . Следствием этого является то, что, хотя получающиеся в результате расщепленные подсистемы являются системами с бесконечным запаздыванием, для любого фиксированного $k \geq 0$ они аппроксимируются с точностью $O(\mu^k)$ системами с конечными запаздываниями. Приведены примеры, демонстрирующие сравнение решений систем, полученных на основе построенных аппроксимаций, с точными решениями. Симуляция выполнена средствами Wolfram Mathematica.

В статье приняты следующие основные обозначения: \mathbb{C} — множество комплексных чисел; \mathbb{Z} — множество целых чисел; \mathbb{Z}_+ — множество неотрицательных целых чисел; $p \triangleq d/dt$ — оператор дифференцирования; e^{-ph} — оператор запаздывания: $e^{-ph}z(t) \triangleq z(t-h)$.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведена постановка задачи для рассматриваемой системы и определены цели исследования. В разделе 3 описаны декомпозиция рассматриваемой двухшкальной системы на медленную и быструю подсистемы и асимптотика расщепляющего преобразования. Далее для системы разработаны асимптотические приближения. В разделе 4 с помощью результатов, приведенных в разделах 3 и 4, построены аппроксимации для двух иллюстративных примеров; проведено сравнение результатов в программной среде Wolfram Mathematica. Раздел 5 содержит выводы проведенного исследования.

2. Постановка задачи. Рассматривается линейная стационарная сингулярно возмущенная система управления со многими соизмеримыми запаздыванием в медленных переменных состоянии:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^l A_{1j}x(t-jh) + A_2y(t) + B_1u(t), \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad (1)$$

$$\mu \dot{y}(t) = \sum_{j=0}^l A_{3j}x(t-jh) + A_4y(t) + B_2u(t), \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) = x_0, \quad y_0(0) = y_0, \quad x(\theta) = \varphi(\theta), \\ \theta \in [-h, 0), \quad x(\theta) = 0, \quad \theta < -h, \quad y(\theta) = \psi(\theta) \equiv 0, \quad \theta < 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $0 < h$ — заданная константа, $l \in \mathbb{Z}_+$, u — функция управления, $u(t) \in U$, U — множество кусочно непрерывных при $t \geq 0$ вектор-функций, μ — малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, A_{ij} , $i = 1, 3$, $j = \overline{0, l}$, A_k , $k = 2, 4$, B_j , $j = 1, 2$, — постоянные матрицы подходящих размерностей, $\phi(\theta)$, $\theta \in [-lh, 0)$, — кусочно непрерывная n_1 -вектор-функция, $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Предположим, что $\det A_4 \neq 0$.

Наличие малого параметра μ как множителя при производных части переменных определяет разнотемповый характер изменения фазовых координат x и y в окрестности точки $\mu = 0$: x — медленная переменная, y — быстрая переменная.

Целью данной работы является обоснование для двухшкальной системы (1)–(2) асимптотических приближений расщепленных двухтемповых систем в форме систем с конечным запаздыванием на основе построения итерационных схем для вычисления асимптотических приближений любого порядка для невырожденного расщепляющего преобразования (см. [8]) с иллюстрацией полученных результатов в программном обеспечении Wolfram Mathematica.

3. Декомпозиция системы и ее асимптотика.

3.1. *Вырожденная система и система пограничного слоя.* С (n_1+n_2) -мерной системой (1)–(2) связаны вырожденная система (медленная подсистема) и система пограничного слоя (быстрая подсистема) меньшей размерности.

Вырожденная система (медленная подсистема) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= \sum_{j=0}^l A_{sj}x_s(t-jh) + B_s u_s(t), \quad x_s \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t \geq 0, \\ x_s(0) &= x_0, \quad x_s(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-lh, 0), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$A_{sj} \triangleq A_{1j} - A_2 A_4^{-1} A_{3j}, \quad j = \overline{0, l}, \quad B_s \triangleq B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2, \quad (5)$$

и $u_s(t) \in \mathbb{R}^r$ является функцией управления.

Вырожденная система (4) является n_1 -мерной системой со множественными запаздываниями в состоянии и формально получается из системы (1)–(2), если в ней положить $\mu = 0$, из (2) при условии $\det A_4 \neq 0$ выразить

$$y_s(t) = -A_4^{-1} \left[\sum_{j=0}^l A_{1j}x_s(t-jh) + B_2 u_s(t) \right]$$

и подставить в (1).

Система пограничного слоя (быстрая подсистема, ПС), соответствующая (1)–(3), получается путем «растяжения» временной шкалы: $t = \mu\tau$, $y(\mu\tau) = y_f(\tau)$, $u(\mu\tau) = u_f(\tau)$ и «замораживания» в уравнении (2) для быстрых переменных y медленных переменных x :

$$\begin{aligned} \frac{dy_f(\tau)}{d\tau} &= A_4 y_f(\tau) + B_2 u_f(\tau), \quad y_f \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \tau = \frac{t}{\mu} \geq 0, \\ y_f(0) &= y_0 + A_4^{-1} [A_{30}\phi(0) + A_{31}\phi(-h)] \end{aligned} \quad (6)$$

и является системой размерности n_2 без запаздываний.

3.2. *Расщепляющее преобразование системы и ее асимптотическое представление.* Чтобы ввести невырожденное преобразование (см. [24]) для системы (1)–(2), представим ее в операторной форме.

Пусть $(C[a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных функций, отображающих $[a, b]$ в \mathbb{R}^n с топологией равномерной сходимости. Для $x \in T \rightarrow \mathbb{R}^n$ через $x_t: [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ обозначим определенную для $s \in [-h, 0]$ функцию $x_t(s) = x(t+s)$. Обозначим через p оператор дифференцирования, а через e^{-ph} оператор сдвига (чистого запаздывания): $e^{-ph}x(t) = x(t-h)$, $e^{-jph}x(t) = x(t-jh)$. Для фиксированного $h \in (0, +\infty)$ обозначим через $A_i(e^{-ph})$, $i = 1, 3$, непрерывные слева в 0 ограниченные операторы $A_i(e^{-ph}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$A_i(e^{-ph}) \triangleq j=0 A_{ij} e^{-jph}, \quad p \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 3. \quad (7)$$

Тогда можно систему (1)–(2) представить в операторной форме:

$$px(t) = A_1(e^{-ph})x(t) + A_2y(t) + B_1u(t), \quad (8)$$

$$\mu py(t) = A_3(e^{-ph})x(t) + A_4y(t) + B_2u(t). \quad (9)$$

В [24] для расщепления системы (8)–(9) введено следующее невырожденное преобразование:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = T(\mu, e^{-ph}) \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{C}, \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \eta(t) \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in T, \quad (10)$$

где

$$T(\mu, e^{-ph}) = \begin{bmatrix} E_{n_1} & \mu H(\mu, e^{-ph}) \\ -L(\mu, e^{-ph}) & E_{n_2} - \mu L(\mu, e^{-ph})H(\mu, e^{-ph}) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$L(\mu, e^{-ph})$, $H(\mu, e^{-ph})$ — матричные операторы, зависящие от параметра μ . Они являются решениями следующих матричных функциональных уравнений: алгебраического уравнения Риккати и уравнения Сильвестра

$$A_3 - A_4L + \mu LA_1 - \mu LA_2L = 0, \quad (12)$$

$$(\mu A_1 - A_2L)H - H(A_4 + \mu LA_2) + A_2 = 0. \quad (13)$$

С целью сокращения записей здесь и далее, где это не приводит к неоднозначному пониманию, аргументы у матричных операторов $A_i(e^{-ph})$, $i = 1, 3$, $H(\mu, e^{-ph})$, $L(\mu, e^{-ph})$ будем опускать.

Отметим, что $\det T(\mu, e^{-ph}) \equiv 1$; следовательно, преобразование (11) обратимо, причем

$$T^{-1}(\mu, e^{-ph}) = \begin{bmatrix} E_{n_1} - \mu L(\mu, e^{-ph})H(\mu, e^{-ph}) & -\mu H(\mu, e^{-ph}) \\ L(\mu, e^{-ph}) & E_{n_2} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

и

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Лемма 1 (о решениях матричных уравнений). *Если $\det A_4 \neq 0$, то найдется такое $\mu^* > 0$, что для любого $\mu \in [0, \mu^*]$ существуют непрерывно зависящие от μ решения $L(\mu, e^{-ph})$, $H(\mu, e^{-ph})$ уравнений (12), (13), которые могут быть представлены в виде асимптотических рядов:*

$$L(\mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m L^m(e^{-ph}), \quad (16)$$

$$H(\mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m H^m(e^{-ph}), \quad (17)$$

члены которых можно найти по итеративной схеме

$$L^{k+1}(e^{-ph}) = A_4^{-1} \left(L^k A_1(e^{-ph}) - \sum_{j=0}^k L^{k-j} A_2 L^j \right), \quad (18)$$

$$H^{k+1}(e^{-ph}) = A_4^{-1} \left(A_1(e^{-ph}) H^k - \sum_{i=0}^k (A_2 L^i H^{k-i} + H^i L^{k-i} A_2) \right), \quad (19)$$

с начальными условиями

$$L^0(e^{-ph}) = A_4^{-1} A_3(e^{-ph}), \quad (20)$$

$$H^0(e^{-ph}) = A_2 A_4^{-1}. \quad (21)$$

Асимптотические приближения

$$L(\mu, e^{-ph}) = \sum_{i=0}^k \mu^i L^i(e^{-ph}) + O(\mu^{k+1}), \quad H(\mu, e^{-ph}) = \sum_{i=0}^k \mu^i H^i(e^{-ph}) + O(\mu^k) \quad (22)$$

имеет место для всех $\mu \in [0, \mu^*)$, где

$$\mu^* = \frac{1}{\|A_4^{-1}\| \left(a + bd + 2b\sqrt{\frac{ad}{b}} \right)} \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} a &\triangleq \|A_1(e^{-ph})\| + \|A_2\| \cdot \|A_4^{-1}(e^{-ph})\| \cdot \|A_3(e^{-ph})\|, \\ d &\triangleq \|A_4^{-1}(e^{-ph})\| \cdot \|A_3(e^{-ph})\|, \quad b \triangleq \|A_2\|. \end{aligned}$$

Доказательство проводится по схеме из [16, с. 52]. По теореме о неявной функции решения уравнений (12)–(13) можно искать в виде разложений по целым неотрицательным степеням μ . Доказательство представлений (18)–(21) несложно провести, подставляя разложения (16)–(17) в (12), (13) и приравнивая в полученных уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях μ . Непрерывная зависимость от μ доказывается аналогично [17]. Доказательство оценки аналогично [16, с. 52], с учетом (7). \square

Лемма 2. Пусть $\det A_4 \neq 0$. Для любого целого $k \geq 0$ матричные функции $L^k(e^{-ph})$, $H^k(e^{-ph})$, удовлетворяющие (18), (19), могут быть представлены в виде конечных сумм:

$$L^k(e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{(k+1)l} L_j^k e^{-jph}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

$$H^k(e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{kl} H_j^k e^{-jph}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Здесь матрицы L_j^k , H_j^k , $j, k \in \mathbb{Z}_+$, можно найти по следующим рекуррентным формулам:

$$L_j^k = A_4^{-1} \sum_{s=j-kl}^j \left(L_s^{k-1} A_{1,j-s} - \sum_{i=0}^{k-1} L_s^{k-1-i} A_2 L_{j-s}^i \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = \overline{0, (k+1)l}, \quad (26)$$

$$H_j^{k+1} = A_4^{-1} \left[\sum_{s=j-l}^j A_{1,j-s} H_s^k - \sum_{i=0}^k \left(\sum_{s=j-(k+1)l}^j A_2 L_{j-s}^i H_s^{k-i} + \sum_{s=j-kl}^j H_{j-s}^i L_s^{k-i} A_2 \right) \right], \quad (27)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = \overline{0, kl}, \quad (28)$$

с начальными условиями

$$L_j^0 = A_4^{-1} A_{3j}, \quad j = \overline{0, l}, \quad L_j^k = 0 \quad \text{если} \quad j < 0 \vee j > (k+1)l, \quad (29)$$

$$H_0^0 = A_2 A_4^{-1}, \quad H_j^k = 0 \quad \text{если} \quad j < 0 \vee j > kl. \quad (30)$$

Доказательство. Докажем (24) и (26). Отметим прежде всего, что из (7), (18), (26) следует представление $L^0(e^{-ph})$ в форме (24) для $k = 0$.

Представление (24), (26) докажем методом математической индукции. Предположим, что (24), (26) верны для всех $k \leq R$. Тогда для $k = R + 1$ из (7), (18) и (24) следует

$$L^{R+1}(e^{-ph}) = A_4^{-1} \left(\sum_{j=0}^{(R+1)l} \sum_{s=0}^l L_j^R A_{1s} e^{-(j+s)ph} - \sum_{i=0}^R \sum_{j=0}^{(R-i+1)l} \sum_{r=0}^{(i+1)l} L_j^{R-i} A_2 L_r^i e^{-(r+j)ph} \right).$$

Изменяя порядок суммирования, производя сдвиг индексов суммирования и учитывая (29), а именно: $L_s^{k-j} = 0$ для $s < 0$, $L_{i-s}^j = 0$ для $i - s > (j+1)l$, имеем:

$$\begin{aligned} L^{R+1}(e^{-ph}) &= \\ &= \sum_{j=0}^{((R+1)+1)l} A_4^{-1} \left[\sum_{s'=(R+1)l}^j \left[L_{s'}^{((R+1)-1)} A_{1,j-s'} - \sum_{i=0}^{(R+1)-1} L_{s'}^{((R+1)-(1+i))} A_2 L_{j-s'}^i \right] e^{-jph} \right]. \quad (31) \end{aligned}$$

Тогда согласно (26) и (31) получаем

$$L^{R+1}(e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{((R+1)+1)l} L_j^{R+1} e^{-jph}. \quad (32)$$

Из (32) можно заключить, что (24) верно для $k = R + 1$, и по схеме метода математической индукции (24) справедливо для $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Докажем (25) и (27). Прежде всего отметим, что из (7), (25) и (27) следует представление $H^0(e^{-ph})$ в виде (25) для $k = 0$. Представления (25) и (27) докажем методом математической индукции. Предположим, что (24) и (26) справедливы для всех $k \leq R$. Тогда при $k = R + 1$ из (19) в соответствии с (7), (19) и (25) следует

$$H^{R+1}(e^{-ph}) = A_4^{-1} \left(\sum_{s=0}^l A_{1s} e^{-sph} \sum_{r=0}^{Rl} H_r^R e^{-rph} - A_2 \sum_{i=0}^R \sum_{j'=0}^{(i+1)l} L_{j'}^i e^{-j'ph} \sum_{r'=0}^{(R-i)l} H_{r'}^{R-i} e^{-r'ph} - \sum_{i=0}^R \sum_{r'=0}^{il} H_{r'}^i e^{-r'ph} \sum_{j'=0}^{(R-i+1)l} L_{j'}^{R-i} A_2 e^{-j'ph} \right).$$

Изменяя порядок суммирования, производя сдвиг индексов суммирования и учитывая (30), имеем:

$$H^{R+1}(e^{-ph}) = A_4^{-1} \left(\sum_{s'=0}^{(R+1)l} \sum_{r=s'-l}^{s'} A_{1,s'-r} H_r^R (e^{-s'ph}) - \sum_{s''=0}^{(R+1)l} \sum_{r'=s''-(R+1)l}^{s''} \sum_{i=0}^R A_2 L_{s''-r'}^i H_{r'}^{R-i} (e^{-s''ph}) - \sum_{s'''=0}^{(R+1)l} \sum_{j'=s'''-Rl}^{s'''} \sum_{i=0}^R H_{s'''-j'}^i L_{j'}^{R-i} A_2 (e^{-s'''ph}) \right).$$

Отсюда и из (27) следует

$$H^{R+1}(e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{(R+1)l} H_j^{R+1} e^{-jph}.$$

Таким образом, заключаем, что (25) верно для $k = R + 1$, а значит, (25) и (27) верно $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, и $k \geq 0$. Лемма 4 доказана. \square

Зная асимптотику (16)–(17) и представление (18)–(19), можно записать асимптотику преобразования (10), (11).

Следствие 1. Пусть $\det A_4 \neq 0$. Тогда существует такое $\mu^* > 0$, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ расщепляющее преобразование (10), (11) можно представить в виде асимптотического ряда

$$T(\mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m T^m(e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^l \mu^m T_j^m e^{-jph}, \quad (33)$$

где $T_j^m \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $j \geq 0$, $m \geq 0$ – постоянные матрицы, которые легко выразить через L_j^m , H_j^m .

Теорема 1 (о расщеплении системы). Если $\det A_4 \neq 0$, то найдется такое $\mu^* > 0$, что в результате замены переменных (10), (11) для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ система (1)–(2), (3) преобразуется в эквивалентную систему с разделенными движениями

$$\dot{\xi}(t) = A_{\xi}(\mu, e^{-ph})\xi(t) + B_{\xi}(\mu, e^{-ph})u(t), \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad (34)$$

$$\mu \dot{\eta}(t) = A_{\eta}(\mu, e^{-ph})\eta(t) + B_{\eta}(\mu, e^{-ph})u(t), \quad \eta(t) \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t > 0, \quad (35)$$

с начальными условиями

$$\xi(0) = x_0 - \mu L(e^{-ph})H(e^{-ph})x_0 - \mu H(e^{-ph})y_0, \quad \xi(\theta) = \varphi(\theta) - \mu L(e^{-ph})H(e^{-ph})\varphi(\theta), \quad \theta < 0, \quad (36)$$

$$\eta(0) = (e^{-ph})Lx_0 - y_0, \quad y(\theta) = L(e^{-ph})\varphi(\theta), \quad \theta < 0, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} A_\xi(\mu, e^{-ph}) &\triangleq A_1(e^{-ph}) - A_2L(\mu, e^{-ph}), \\ B_\xi(\mu, e^{-ph}) &\triangleq B_1(e^{-ph}) - H(\mu, e^{-ph})B_2 - \mu H(\mu, e^{-ph})L(\mu, e^{-ph})B_1, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} A_\eta(\mu, e^{-ph}) &\triangleq A_4 - \mu L(\mu, e^{-ph})A_2, \\ B_\eta(\mu, e^{-ph}) &\triangleq B_2 + \mu L(\mu, e^{-ph})B_1, \end{aligned}$$

$$e^{-ph}x_0 \triangleq \varphi(-h),$$

$$e^{-jph}x_0 \triangleq 0, \quad j > 1, \quad (39)$$

$$e^{-jph}y_0 \triangleq 0, \quad j > 0.$$

Доказательство. Для обоснования декомпозиции применим преобразование (10), (11), (14) к системе (8)–(9) и умножим преобразованное уравнение слева на $\text{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}T^{-1}(\mu, e^{-ph})$:

$$p \cdot \text{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}\zeta(t) = A_{\xi\eta}(\mu, p)\zeta(t) + B_{\xi\eta}(\mu, p)u(t),$$

где $\zeta(t) = \{\xi(t), \eta(t)\}'$,

$$\begin{aligned} A_{\xi\eta}(\mu, p) &= T^{-1}(\mu, p)A(\mu, p)T(\mu, p) = \begin{pmatrix} A_\xi(\mu, p) & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & A_\eta(\mu, p) \end{pmatrix}, \\ B_{\xi\eta}(\mu, p) &= T^{-1}(\mu, p)B(\mu) = \begin{pmatrix} B_\xi(\mu, p) \\ B_\eta(\mu, p) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В результате получим эквивалентную (8)–(9) систему

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= [A_1 - A_2L]\xi(t) + [B_1 - \mu HLB_1 - HB_2]u(t), \\ \mu\dot{\eta}(t) &= [A_4 + \mu LA_2]\eta(t) + [B_2 + \mu LB_1]u(t), \end{aligned}$$

что в силу (38) равносильно (34)–(35).

Применяя преобразование (10), (11), (14) к начальным условиям (3), получаем начальные условия для расщепленной системы:

$$\begin{aligned} \xi_\theta &= (E_{n_1} - \mu H(e^{-ph})L(e^{-ph}))x_\theta - \mu H(e^{-ph})y_\theta, \\ \eta_\theta &= L(e^{-ph})x_\theta + y_\theta, \quad \theta \leq 0, \end{aligned}$$

что с учетом (3) совпадает с (36). □

Лемма 3. *Расщепленная система (34), (35) имеет асимптотическое представление:*

$$\dot{\xi}(t) = (A_\xi^0 + \mu A_\xi^1(e^{-ph}) + \mu^2 A_\xi^2(e^{-ph}) + \dots)\xi(t) + (B_\xi^0 + \mu B_\xi^1(e^{-ph}) + \dots)u(t), \quad (40)$$

$$\mu\dot{\eta}(t) = (A_\eta^0 + \mu A_\eta^1(e^{-ph}) + \mu^2 A_\eta^2(e^{-ph}) + \dots)\eta(t) + (B_\eta^0 + \mu B_\eta^1(e^{-ph}) + \dots)u(t), \quad (41)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \xi(0) &= \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \dots, \quad \xi(\theta) = \varphi_0(\theta) + \mu\varphi_1(\theta) + \dots, \quad \theta < 0, \\ \eta(0) &= \eta_0 + \mu\eta_1 + \mu^2\eta_2 + \dots, \quad \eta(\theta) = \eta_0(\theta) + \mu\eta_1(\theta) + \dots, \quad \theta < 0, \end{aligned} \quad (42)$$

где для всех $t \in \mathbb{Z}_+$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_\xi^m(e^{-ph}) &= \sum_{j=0}^{(m+1)l} A_{\xi j}^m e^{-jph}, \quad A_{\xi j}^0 = A_1 j - A_2 L_j^0, \quad m = 0, \quad j = \overline{0, l}; \\ & \quad A_{\xi j}^m = -A_2 L_j^m, \quad m \geq 1, \quad j = \overline{0, (m+1)l}, \\ B_\xi^m(e^{-ph}) &= \sum_{j=0}^{ml} B_{\xi j}^m e^{-jph}, \quad B_{\xi j}^0 = B_1 - H_j^0 B_2, \quad m = 0, \quad j = \overline{0, l}; \\ B_{\xi j}^m &= - \left(H_j^m B_2 + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=j+(m-i)l}^{il} H_k^i L_{j-k}^{m-i-1} B_1 \right), \quad m \geq 1, \quad j = \overline{0, ml}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\eta}^m(e^{-ph}) &= \sum_{j=0}^{ml} A_{\eta j}^m e^{-jph}, & A_{\eta 0}^0 &= A_4 m = 0; & A_{\eta j}^0 &= 0, & j &\neq 0, \\
& & A_{\eta j}^m &= -L_j^{m-1} A_2, & m &\geq 1, & j &= \overline{0, ml}, \\
B_{\eta}^m(e^{-ph}) &= \sum_{j=0}^{ml} B_{\eta j}^m e^{-jph}, & B_{\eta 0}^0 &= B_2 m = 0; & B_{\eta j}^0 &= 0, & j &\neq 0, \\
& & B_{\eta j}^m &= L_j^{m-1} B_1, & m &\geq 1, & j &= \overline{0, ml}, \\
\xi_0 &= \varphi(0) - \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m \varphi_m(0), & \varphi_m(0) &= \sum_{n=0}^{m-1} H^n L^{m-n-1} \varphi(0) - H^{m-1} y_0, & m &\geq 1, \\
\xi_m &= \varphi(\theta) - \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m \varphi_m(\theta), & m &\geq 1, & \varphi_0(\theta) &= \varphi(\theta), \\
\varphi_m(\theta) &= \sum_{n=0}^{m-1} H^n L^{m-n-1} \varphi(\theta), & m &\geq 1, \\
\eta_0 &= y_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m L^m \varphi(0), & m &\geq 0, \\
\eta_m(\theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m L^m \varphi(\theta), & m &\geq 0.
\end{aligned}$$

Доказательство. Из (34), (14), (24) и (25) получаем

$$\begin{aligned}
A_{\xi}(e^{-ph}) &= A_1(e^{-ph}) - A_2 L(\mu, e^{-ph}), \\
A_{\xi}(e^{-ph}) &= \sum_{j=0}^l A_{1j} e^{-jph} - A_2 \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^{(m+1)l} L_j^m e^{-jph}.
\end{aligned}$$

Из (34) и (14) имеем

$$\begin{aligned}
A_{\xi}(e^{-ph}) &= \mu^0 \sum_{j=0}^l (A_1 j - A_2 L_j^0) e^{-jph} - \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m A_2 \sum_{j=0}^{(m+1)l} L_j^m e^{-jph}, \\
A_{\xi}(e^{-ph}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m A_{\xi}^m(e^{-ph}).
\end{aligned}$$

Из (35) находим

$$B_{\xi}(e^{-ph}) = B_1 - H(\mu, e^{-ph}) B_2 - \mu H(\mu, e^{-ph}) L(\mu, e^{-ph}) B_1.$$

Из (14) и (40) следуют соотношения

$$B_{\xi} = B_1 - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\mu^i \sum_{j=0}^{il} H_j^i e^{-jph} \right) B_2 - \mu \sum_{i'=0}^{\infty} \mu^{i'} \sum_{j'=0}^{i'l} H_{j'}^{i'} e^{-j'ph} \sum_{i''=0}^{\infty} \mu^{i''} \sum_{j''=0}^{(i''+1)l} L_{j''}^{i''} e^{-j''ph} B_1,$$

и

$$\begin{aligned}
B_{\xi}(e^{-ph}) &= \mu^0 (B_1 - H_0^0 B_2) - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu^i \sum_{j=0}^{il} H_j^i e^{-jph} \right) B_2 - \\
& - \sum_{i'=0}^{\infty} \sum_{i''=0}^{\infty} \mu^{(i'+i''+1)} \sum_{j'=0}^{i'l} \sum_{j''=0}^{(i''+1)l} H_{j'}^{i'} L_{j''}^{i''} e^{-(j'+j'')ph} B_1.
\end{aligned}$$

Изменяя порядок суммирования и используя сдвиг индексов, получаем:

$$B_{\xi}(e^{-ph}) = \mu^0(B_1 - H_0^0 B_2) - \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^{ml} \left(H_j^m B_2 + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=j+(m-i)l}^{il} H_k^i L_{j-k}^{m-i-1} B_1 \right) e^{-jph}.$$

Таким образом,

$$B_{\xi}(e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m B_{\xi}^m(e^{-ph}).$$

Аналогично доказываются формулы (16), (17), (40) и (41); для $A_{\eta}(e^{-ph})$ имеем:

$$A_{\eta}(e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m A_{\eta}^m(e^{-ph}),$$

Из (40) и (41), для $B_{\eta}(e^{-ph})$ получаем

$$B_{\eta}(e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m B_{\eta}^m(e^{-ph}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m A_{\xi}^m(e^{-ph}) \right] \xi(t) + \left[\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m B_{\xi}^m(e^{-ph}) \right] u(t), \\ \mu \dot{\eta}(t) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m A_{\eta}^m(e^{-ph}) \right] \eta(t) + \left[\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m B_{\eta}^m(e^{-ph}) \right] u(t), \end{aligned}$$

что является представлением (40), (35). Доказательство остальных формул выполняется аналогично с использованием (39) с (16), (17), (24), (25). Лемма 3 доказана. \square

Обозначим через $O(\mu)$ (« O большое от μ ») вектор-функцию $f(t, \mu)$ на интервале $[t_1, t_2]$, компоненты $f_i(t, \mu)$ которой удовлетворяют следующему условию: существуют такие постоянные $\mu^* > 0$, $c > 0$, что евклидова норма $|f(t, \mu)|$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t, \mu)| \leq c\mu$$

для всех $\mu \in (0, \mu^*)$ и всех $t \in [t_1, t_2]$. Размерность вектор-функции $f(t, \mu)$ следует из контекста.

Основываясь на аппроксимации k -го порядка ($k = 0, 1, \dots$) из (22), несложно по (33) определить аппроксимацию преобразования $T(\mu, e^{-ph})$ k -го порядка, а также аппроксимацию k -го порядка быстрой и медленной подсистем расщепленной системы (40), (41).

Из лемм 4 и 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4 (об аппроксимации матриц преобразования). Пусть $\det A_4 \neq 0$. Для достаточно малых $\mu > 0$ зависящие от параметра функциональные матрицы $L(\mu, e^{-ph})$, $H(\mu, e^{-ph})$, являющиеся решением (12), (13), имеют асимптотическое приближение вида

$$\begin{aligned} L(\mu, e^{-ph}) &= \sum_{m=0}^k \mu^m \sum_{j=0}^{(m+1)l} L_j^m e^{-jph} + O(\mu^{k+1}), \\ H(\mu, e^{-ph}) &= \sum_{m=0}^k \mu^m \sum_{j=0}^{ml} H_j^m e^{-jph} + O(\mu^k), \end{aligned}$$

где L_j^m , H_j^m , $m = 0, 1, 2, \dots$ можно найти согласно итеративной схеме (26), (27), (29), (30).

Из леммы 3 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5 (об аппроксимации системы). Пусть $\det A_4 \neq 0$. Для достаточно малых $\mu > 0$ расщепленная система (34), (35) асимптотически аппроксимируется для любого $k, k = 0, 1, 2, \dots$, системой

$$\dot{\xi}(t) = \left[\sum_{m=0}^k \mu^m A_{\xi}^m(e^{-ph}) + O(\mu^k) \right] \xi(t) + \left[\sum_{m=0}^k \mu^m B_{\xi}^m(e^{-ph}) + O(\mu^k) \right] u(t), \quad (43)$$

$$\mu \dot{\eta}(t) = \left[\sum_{m=0}^k \mu^m A_{\eta}^m(e^{-ph}) + O(\mu^k) \right] \eta(t) + \left[\sum_{m=0}^k \mu^m B_{\eta}^m(e^{-ph}) + O(\mu^k) \right] u(t), \quad (44)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \xi(0) &= \xi_0 + \dots + \mu^k \xi_k + O(\mu^k), & \xi(\theta) &= \varphi_0(\theta) + \dots + \mu^k \varphi_k(\theta) + O(\mu^k), & \theta < 0, \\ \eta(0) &= \eta_0 + \dots + \mu^k \eta_k + O(\mu^k), & \eta(\theta) &= \eta_0(\theta) + \dots + \mu^k \eta_k(\theta) + O(\mu^k), & \theta < 0, \end{aligned} \quad (45)$$

где компоненты (43)–(42) вычисляются по формулам леммы 3.

Относительно вырожденной системы (4) и системы погранслоя (6) имеют место следующие аппроксимации.

Следствие 2. Пусть $\det A_4 \neq 0$. Для достаточно малых $\mu > 0$ расщепленная система (34), (35) является $O(\mu)$ -близкой к вырожденной системе (4) и системе погранслоя (6).

Доказательство. Из (4), (5) и формул леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} A_{\xi}(\mu, e^{-ph}) &= A_s + O(\mu), & B_{\xi}(\mu, e^{-ph}) &= B_s + O(\mu), \\ A_{\eta}(\mu, e^{-ph}) &= A_4 + O(\mu), & B_{\eta}(\mu, e^{-ph}) &= B_2 + O(\mu). \end{aligned}$$

Далее доказательство следует из леммы 5. \square

Таким образом, мы обосновали, что вырожденная система (4) и система погранслоя (6) представляют из себя асимптотическую декомпозицию исходной системы (1)–(2).

В качестве следствия из леммы 5 получаем, что хотя результирующая расщепленная система (34)–(35) является в общем случае системой с бесконечным запаздыванием, для любого фиксированного $k, k = 0, 1, 2, \dots$ она аппроксимируется с точностью $O(\mu^k)$ системой с конечным запаздыванием (43), (44).

4. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим иллюстративный пример:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) - x_2(t-1) - y(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + x_1(t-1) - x_2(t-1), \\ \mu \dot{y}(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) - x_2(t-1) - y(t) + u(t), \end{aligned} \quad (46)$$

$h = 1, l = 1$, с начальными условиями

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \theta \in [-1, 0], \quad y_0 = 0, \quad u(t) \equiv 1, \quad t \geq 0, \quad u(t) \equiv 0, \quad t < 0.$$

Система (46) является частным случаем системы (1)–(2) с параметрами

$$\begin{aligned} A_{10} &= (-1, 21, 2), & A_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & B_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ A_{30} &= (-1, 2), & A_{31} &= (0, -1), & A_4 &= -1, & B_2 &= 1. \end{aligned}$$

Выпишем первые члены асимптотических разложений (16)–(17), рассчитанные по формулам (18)–(19).

При $\lambda = e^{-ph}$ из (18), (20) имеем:

$$\begin{aligned} L^0 &= [1, \lambda - 2], & L^1 &= [-(\lambda - 1)(\lambda - 2), (\lambda - 2)^2], \\ L^2 &= [(\lambda - 1)(\lambda - 2) - (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2, (\lambda - 2)^3 - (\lambda - 2)^2]. \end{aligned}$$

Согласно (19), (21) получаем

$$H^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \lambda \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 2(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 1 \\ 2\lambda - (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 2 \end{pmatrix}.$$

Для аппроксимаций до 2-го порядка расщепленной системы по (59), (60) получаем:

$$A_\xi^0(\lambda) = A_1 - A_2 L^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda - 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}, \quad A_\xi^1(\lambda) = -A_2 L^1 = \begin{bmatrix} -(\lambda - 1)(\lambda - 2) & +(\lambda - 2)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_\xi^2(\lambda) = -A_2 L^2 = \begin{bmatrix} -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 + (\lambda - 1)(\lambda - 2) & -(\lambda - 2)^2 + (\lambda - 2)^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_\xi^0(\lambda) = B_1 - H^0 B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_\xi^1(\lambda) = -H^1 B_2 - H^0 L^0 B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \lambda \end{bmatrix},$$

$$B_\xi^2(\lambda) = H^2 B_2 + H^0 L^1 + H^1 L^0 = \begin{bmatrix} (\lambda - 1)(\lambda - 2) & 2(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda + (\lambda - 2)^2 + 3 \\ \lambda - (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 1 & 2\lambda - 2(\lambda - 1)(\lambda - 2) - 2 \end{bmatrix},$$

$$A_\eta^0(\lambda) = A_4 = [-1], \quad A_\eta^1(\lambda) = -L^0 A_2 = [1], \quad A_\eta^2(\lambda) = -L^1 A_2 = [-(\lambda - 1)(\lambda - 2)],$$

$$B_\eta^0(\lambda) = B_2 = [1], \quad B_\eta^1(\lambda) = L^0 B_1 = [0], \quad B_\eta^2(\lambda) = L^1 B_1 = [0].$$

Расщепленная систем нулевого порядка аппроксимации

$$\xi_1^0(t) = -u(t),$$

$$\xi_2^0(t) = -\xi_1^0(t) + 2\xi_2^0(t) + \xi_1^0(t - 1) - \xi_2^0(t - 1),$$

$$\xi_1^0(0) = 1, \quad \xi_2^0(0) = 0, \quad \xi_1^0(\theta) = 1, \quad \xi_2^0(\theta) = 0, \quad \theta \in [-1, 0),$$

$$\frac{d}{d\tau} \eta^0(\tau) = -\eta^0(\tau) + u(\tau), \quad \eta^0(0) = 1.$$

для системы (46) совпадает с ее вырожденной системой (4)

$$\dot{x}_1(t) = -u(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + x_1(t - 1) - x_2(t - 1)$$

и системой погранслоя (6):

$$\frac{d}{d\tau} y(\tau) = -y(\tau) + u(\tau).$$

Система асимптотического приближения первого порядка расщепленной системы имеет следующий вид:

$$\xi_1^1(t) = (\mu - 1)\xi_1^1(t) + \xi_1^1(t - 1) - \mu\xi_1^1(t - 2) + 2(1 - \mu)\xi_2^1(t) + (\mu - 1)\xi_2^1(t - 1) - (1 + \mu)u(t) + 2\mu u(t - 1),$$

$$\xi_2^1(t) = -\xi_1^1(t) + 2\xi_2^1(t) + \xi_1^1(t - 1) - \xi_2^1(t - 1) - \mu(u(t) - u(t - 1)),$$

$$\xi_1^1(0) = 1 - \mu, \quad \xi_2^1(0) = 0, \quad \xi_1^1(\theta) = 1 - \mu, \quad \xi_2^1(\theta) = 0, \quad \theta \in [-2, 0),$$

$$\frac{d}{d\tau} \eta^1(\tau) = -(1 + \mu)\eta^1(\tau) + u(\tau), \quad \eta^1(0) = \mu,$$

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = -x(t) - y(t),$$

$$\mu \dot{y}(t) = -x(t - 2) - y(t) + u(t),$$

(47)

$h = 2$, $l = 2$, с начальными условиями

$$x_0 = 1, \quad \varphi(\theta) = 1, \quad \theta \in [-2, 0], \quad y_0 = 2.$$

Параметры системы в виде (1)–(2):

$$A_{10} = (-1), \quad A_{11} = (0), \quad A_2 = (-1), \quad B_1 = (0),$$

$$A_{30} = (0), \quad A_{31} = (-1), \quad A_4 = (-1), \quad B_2 = (1).$$

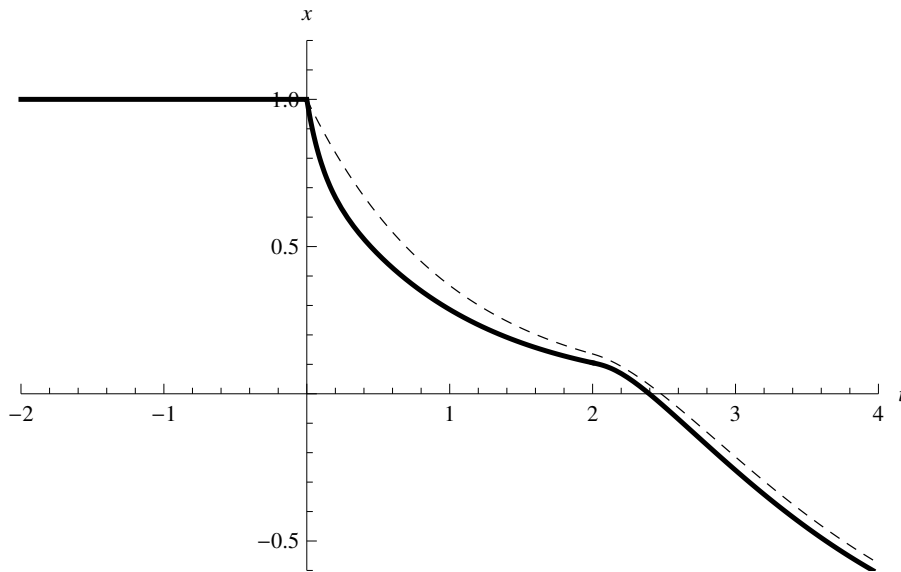


Рис. 1. x -Компонента точного решения (сплошная жирная линия) и ее асимптотические приближения нулевого (пунктирная линия) и 1-го порядка (сплошная тонкая линия) при $\mu = 0,1$

Аппроксимация нулевого порядка расщепленной системы (47) имеет вид

$$\begin{aligned}\xi^0(t) &= -\xi^0(t) + \xi^0(t-2) - u(t), \quad t \in [0, 4], \\ \frac{d}{d\tau}\eta^0(\tau) &= -\eta^0(\tau) + u(\tau), \quad \tau \in [0, 4/\mu], \\ \xi^0(\theta) &= 1, \quad \theta \in [-2, 0], \quad \eta^0(0) = 3,\end{aligned}$$

и совпадает с вырожденной системой и системой погранслоя для (47). Система асимптотического приближения первого порядка расщепленной системы (43), (44) для (47) имеет вид

$$\begin{aligned}\xi^1(t) &= -\xi^1(t) + (1 + \mu)\xi^1(t-2) - \mu\xi^1(t-4) + (-1 + \mu)u(t) + 2\mu u(t-2), \quad t \in [0, 4], \\ \frac{d}{d\tau}\eta^1(\tau) &= -\eta^1(\tau) + \mu\eta^1\left(\tau - \frac{2}{\mu}\right) + u(\tau), \quad \tau \in [0, 4/\mu], \\ \xi^1(0) &= 1 - 3\mu, \quad \xi^1(\theta) = 1, \quad \theta \in [-2, 0], \\ \xi^1(\theta) &= 0, \quad \theta < -2, \\ \eta^1(\theta) &= 3 + \mu, \quad \theta \in [-2, 0].\end{aligned}$$

Сравнение точного решения с решениями, полученными на основе аппроксимаций 0-го и 1-го порядков, при $u(t) \equiv 1, t \geq 0, \varphi(\theta) \equiv 0, u(t) \equiv 0, t < 0, \mu = 0,1$ представлено на рис. 1–2.

5. Заключение. В статье для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы управления с соизмеримыми запаздываниями в медленных переменных состояния исследуется невырожденного преобразования типа Chang, которое разделяет исходную сингулярно возмущенную систему на две несвязанные регулярно зависящие от малого параметра подсистемы: медленную и быструю подсистемы меньших размеров, чем исходные, в общем случае с бесконечным запаздыванием с исчезающей памятью. Получены выражения для асимптотических приближений произвольного порядка как невырожденного расщепляющего преобразования, так и получающихся в результате преобразования исходной системы двух несвязанных подсистем. Установлено, что асимптотическое приближение любого порядка расщепленной системы представляет собой систему с конечным кратным запаздыванием в состоянии и управлении. В соответствии с формулами (18), (19) построение асимптотических аппроксимаций может быть реализовано в виде программ для систем компьютерной алгебры.

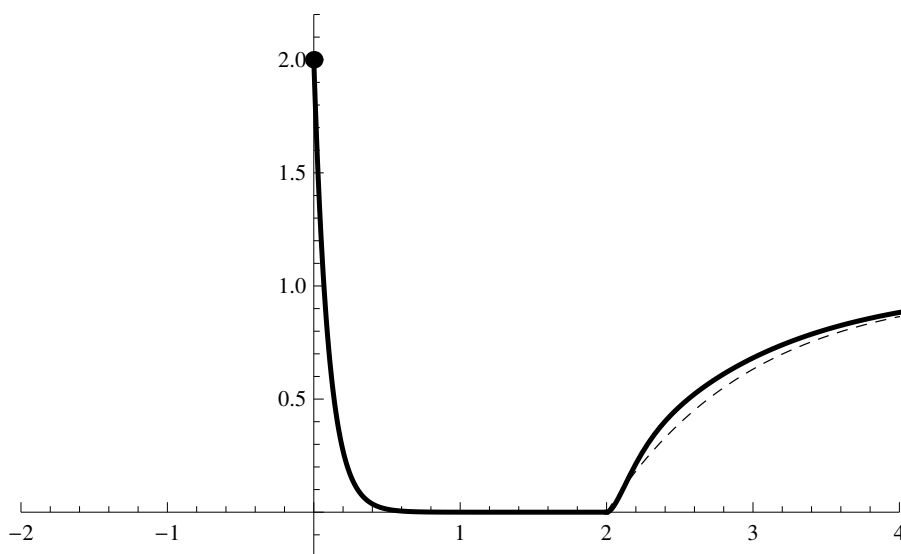


Рис. 2. y -Компонента точного решения (сплошная жирная линия) и ее асимптотические приближения нулевого (пунктирная линия) и первого порядка (сплошная тонкая линия) при $\mu = 0,1$

Использование в расщепленной системе (34), (35) аппроксимаций (22) позволяет получать последовательность асимптотических приближений системы уравнений с разделенными движениями, регулярно зависящих от малого параметра, обеспечить вычисление собственных значений системы, решений $x(t)$, $y(t)$ системы (1)–(2) с любой степенью точности (асимптотически). Применение построенных асимптотических аппроксимаций расщепляющего преобразования позволяет свести решение ряда задач устойчивости, управления и оценивания для больших систем с сингулярными возмущениями и запаздыванием к системам меньшей размерности, не зависящим или регулярно зависящими от малого параметра.

Для анализа точности асимптотического приближения решения выполнено моделирование средствами Wolfram Mathematica. Продемонстрировано, что построенные аппроксимации более высокого порядка позволяют получать асимптотически более высокую точность решения системы.

Полученные результаты можно использовать для решения задач анализа и синтеза линейных стационарных сингулярно возмущенных систем управления запаздывающего типа, построения асимптотических композитных наблюдателей и регуляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1982. — 20. — С. 3–77.
2. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автомат. телемех. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
3. Копейкина Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Диффер. уравн. — 1989. — С. 1508–1518.
4. Курина Г. А. О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем // Мат. заметки. — 1992. — 52, № 4. — С. 56–61.
5. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
6. Цехан О. Б. Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром // Весн. Грозд. ун-та. Сер. 2. Мат. — 2017. — 7, № 1. — С. 50–61.
7. Bellman R., Cooke K. Differential Difference Equations. — New York: Academic Press, 1963.
8. Chang K. Singular perturbations of a general boundary-value problem // SIAM J. Math. Anal. — 1972. — 3, № 3. — P. 520–526.

9. *Chen X., Heidarinejad M., Liu J., Christofides P. D.* Composite fast-slow MPC design for nonlinear singularly perturbed systems// *AIChe J.* — 2012. — 58, № 6. — P. 1802–1811.
10. *Fridman E.* Decoupling transformation of singularly perturbed systems with small delays and its applications// *Z. Angew. Math. Mech.* — 1996. — 76, № 2. — P. 201–204.
11. *Gajic Z., Shen X.* *Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems.* — London: Springer Verlag, 1993.
12. *Glizer V. Ya.* L_2 -Stabilizability conditions for a class of nonstandard singularly perturbed functional-differential systems// *Dynam. Contin. Discr. Impulsive Syst. Ser. B: Appl. Algorithms.* — 2009. — 16. — P. 181–213.
13. *Glizer V. Ya.* Approximate state-space controllability of linear singularly perturbed systems with two scales of state delays// *Asympt. Anal.* — 2018. — 107, № 1-2. — P. 73–114.
14. *Johnson R.* *Singular Perturbation Theory: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering.* — Springer-Verlag, 2005.
15. *Kokotovic P. V., Haddad A. H.* Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes// *IEEE Trans. Automat. Control.* — 1975. — 20, № 1. — P. 111–113.
16. *Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.* *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design.* — New York: Academic Press, 1986.
17. *Magalhaes L. T.* Exponential estimates for singularly perturbed linear functional differential equations// *J. Math. Anal. Appl.* — 1984. — 103. — P. 443–460.
18. *Manitius A. Z., Olbrot A. W.* Finite spectrum assignment problem for systems with delays// *IEEE Trans. Automat. Control.* — 1979. — 24. — P. 541–553.
19. *Michiels W., Niculescu S. I.* *Stability and Stabilization of Time Delay Systems: An Eigenvalue Based Approach.* — Philadelphia: SIAM, 2007.
20. *Niculescu S. I.* *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach.* — New York: Springer, 2001.
21. *Pekar L., Gao Q.* Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: A literature overview of some recent results// *IEEE Access.* — 2018. — 6. — P. 35457–35491.
22. *Prljaca N., Gajic Z.* General transformation for block diagonalization of multitime-scale singularly perturbed linear systems// *IEEE Trans. Automat. Control.* — 2008. — 53, № 5. — P. 1303–1305.
23. *Seuret A., Özbay H., Bonnet C. Mounier H. (eds.).* *Low-Complexity Controllers for Time-Delay Systems.* — Cham: Springer, 2014.
24. *Tsekhan O.* Complete controllability conditions for linear singularly perturbed time-invariant systems with multiple delays via Chang-type transformation// *Axioms.* — 2019. — 8, № 2. — 71.
25. *Yang X., Zhu J. J.* A generalization of Chang transformation for linear time-varying systems// *Proc. 49 IEEE Conf. on Decision and Control (Atlanta, GA), 2010.* — P. 6863–6869.
26. *Yang X., Zhu J. J.* Chang transformation for decoupling of singularly perturbed linear slowly time-varying systems// *Proc. 51 IEEE Conf. on Decision and Control (Maui, Hawaii, USA), 2012.* — P. 5755–5760.
27. *Zhang Y., Naidu D. S., Cai C., et al.* Singular perturbations and time scales in control theories and applications: An overview 2002–2012// *Int. J. Inf. Syst. Sci.* — 2014. — 9, № 1. — P. 1–36.

Цехан Ольга Борисовна

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь
E-mail: tsekhan@grsu.by

Налигама Чамила Анурадха

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь
E-mail: chammme@gmail.com

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)	Зеликин Михаил Ильич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, МГУ им. М. В. Ломоносова)
Акбаров Сергей Саидмузафарович, д.ф.-м.-н., профессор (НИУ «Высшая школа экономики»)	Корпусов Максим Олегович, д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Архипова Наталия Александровна, к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)	Маслов Виктор Павлович, академик РАН, профессор (НИУ «Высшая школа экономики»)
Асеев Сергей Миронович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)	Орлов Дмитрий Олегович, академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)
Букжалёв Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)	Пентус Мати Рейнович, д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Бухштабер Виктор Матвеевич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, МГУ им. М. В. Ломоносова)	Попов Владимир Леонидович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, НИУ «Высшая школа экономики»)
Воблый Виталий Антониевич, д.ф.-м.-н. (ВИНИТИ РАН)	Сарычев Андрей Васильевич, д.ф.-м.-н., профессор (Университет Флоренции)
Гусева Надежда Ивановна, к.ф.-м.-н., профессор (МПГУ, ВИНИТИ РАН)	Степанов Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет при Правительстве РФ, ВИНИТИ РАН)
Дудин Евгений Борисович, к.т.н. (ВИНИТИ РАН)	Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович	Попов Владимир Леонидович
Акбаров Сергей Саидмузафарович	Степанов Сергей Евгеньевич
Кругова Елена Павловна	Шамолин Максим Владимирович
Овчинников Алексей Витальевич	Юлдашев Турсун Камалдинович