ISSN 0233-6723

ВИНИТИ

# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

## СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 203

Москва 2021

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

## СЕРИЯ
## СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
## И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

## ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

## Том 203

### ГЕОМЕТРИЯ

Москва 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 203 (2021). С. 3–10
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-203-3-10

УДК 514.76

# О ГРАССМАНОПОДОБНОМ МНОГООБРАЗИИ И АНАЛОГЕ СВЯЗНОСТИ НЕЙФЕЛЬДА

© 2021 г. **О. О. БЕЛОВА**

Аннотация. Инвариантный аналитический метод Картана—Лаптева применен к исследованию грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей в проективном пространстве. Над указанным многообразием построено главное расслоение, в котором задан аналог связности Нейфельда. Показано, что аналог сильной нормализации Нордена индуцирует аналог связности Нейфельда. Проанализированы объекты кривизны-кручения данной связности, указаны особенности и отличия этих объектов от аналогичных объектов, рассмотренных при исследованиях многообразий Грассмана и пространства центрированных плоскостей.

***Ключевые слова***: метод Картана—Лаптева, грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, связность Нейфельда, кривизна, кручение.

# ON A GRASSMANN-LIKE MANIFOLD AND AN ANALOG OF THE NEUFELD CONNECTION

© 2021 **O. O. BELOVA**

Abstract. The invariant analytic Cartan–Laptev method is applied to the study of a Grassmann-like manifold of centered planes in the projective space. In a principal bundle over this manifold, an analog of the Neufeld connection is constructed. We prove that an analog of the strong Norden normalization induces an analog of the Neufeld connection. The curvature and torsion objects of this connection are analyzed and compared with similar objects for Grassmann manifolds and the space of centered planes.

***Keywords and phrases***: Cartan–Laptev method, Grassmann-like manifold of centered planes, Neufeld connection, curvature, torsion.

***AMS Subject Classification***: 53A20, 53A99, 53B15

**1. Введение.** В ходе исследований будем применять метод Картана—Лаптева (см. [24]). Метод Э. Картана обобщает метод внешних форм и подвижного репера и хорошо приспосабливается к исследованию исходной структуры (см. [17,33]), а метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева основан на инвариантном дифференциально-алгебраическом аппарате структурных дифференциальных форм рассматриваемых расслоений (см. [15,25]).

Грассмановы многообразия были введены в XIX веке и исследовались Г. Грассманом и Г. Шубертом с точки зрения формальной алгебры. В XX веке грассманианы стали одним из основных инструментов в теории линейных расслоений и теории характеристических классов многообразий. В [13] А. А. Борисенко и Ю. А. Николаевского дан обзор основных результатов по геометрии многообразий Грассмана, полученных до 1989 года. В указанной статье и некоторых других статьях под многообразием Грассмана понимается множество плоскостей одной размерности в евклидовом пространстве. Эти плоскости проходят через фиксированную точку (начало координат). Позднее расширилось понимание самого объекта. В частности, многообразие Грассмана

 

$Gr(1, n+1)$ является $n$-мерным проективным пространством. Многообразие Грассмана также рассматривается как множество всех плоскостей одной размерности в проективном пространстве (см., например, [2,10,12,14,28]). Многообразия плоскостей и центрированных плоскостей до сих пор вызывают большой интерес у геометров (см. [14,16,34]). Выявляются новые приложения грассманова многообразия. В настоящее время многообразие Грассмана широко и успешно используется в компьютерных науках при изучении нейронных сетей (см. [31,35]), в машинном обучении (см. [32]).

Термин «связность Нейфельда» был введен А. П. Норденом (см. [23]). В [21] Э. Г. Нейфельд показал, что заданием дифференцируемого соответствия между $m$-плоскостями многообразия Грассмана $Gr(m, n)$ в проективном пространстве $P_n$ и плоскостями дополнительной размерности $n-m-1$ определяется аффинная связность. Данная связность была изучена для различных многообразий плоскостей в работах автора [4,28,29]. В данной работе мы укажем некоторые особенности и отличия связности Нейфельда для грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей от аналогичных связностей для многообразий Грассмана и пространства центрированных плоскостей.

**2. Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей.** Отнесем $n$-мерное проективное пространство $P_n$ к подвижному реперу $\{A, A_I\}$, $I, \ldots = 1, \ldots, n$, с инфинитезимальными перемещениями, определяемыми формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A. \tag{1}$$

Здесь 1-форма $\theta$ играет роль множителя пропорциональности, а формы Пфаффа $\omega^I$, $\omega_J^I$, $\omega_I$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\begin{aligned} &D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \\ &D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \\ &D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J \end{aligned} \tag{2}$$

проективной группы $GP(n)$, действующей эффективно в пространстве $P_n$.

**Замечание 1.** Проективное пространство $P_n$ можно представить как факторпространство $L_{n+1}/\sim$ линейного пространства $L_{n+1}$ по отношению эквивалентности (коллинеарности) $\sim$ ненулевых векторов (см. [26]). Таким образом, аналитическая точка $\bar{A} \in L_{n+1} \backslash \{\bar{0}\}$ используется в формулах, но черточка опускается для упрощения записи, а геометрическая точка $A = \{\lambda \bar{A}\} \in P_n$, $\lambda \in R \setminus 0$, — в рассуждениях. Уравнения (1) описывают инфинитезимальный закон перемещения сопутствующего репера из проективного слоя вдоль рассматриваемого многообразия. Во многие геометрических и физических исследованиях используются уравнения инфинитезимальных перемещений реперов (см., например, [1, 18]). Первые слагаемые в (1) не существенны, так как коллинеарным аналитическим точкам соответствует одна геометрическая точка, т.е. $\theta$ не влияет на смещение $dA$. 1-формы Пфаффа $\omega^I$, $\omega_J^I$, $\omega_I$ содержат параметры, от которых зависит семейство реперов, и их дифференциалы: $\omega = \omega(u, du)$ (см. [27]).

**Замечание 2.** В данной работе, как и в [10], применяется неоднородный аналитический аппарат с деривационными формулами (1) и структурными уравнениями (2) (см. [20, 26]).

**Определение 1.** *Грассманоподобным многообразием $Gr^*(m, n)$ центрированных плоскостей* называется многообразие $m$-мерных плоскостей $P_m^0$ $n$-мерного проективного пространства $P_n$, проходящих через фиксированную точку $A$, где $P_m^0$ — центрированная $m$-плоскость (см. [10]). Данное многообразие задается уравнениями

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha, \tag{3}$$

где $\Lambda_\alpha^a$, $\Lambda_\alpha^{ab}$ — функции, являющиеся компонентами фундаментального объекта (см. [3, 19]) $(a, \ldots = 1, \ldots, m;\ \alpha, \ldots = m+1, \ldots, n)$, и имеет размерность, равную размерности грассманова многообразия $Gr(m, n)$ (см. [2]).

Уравнения (3) получаются при специализации подвижного репера (вершины $A$, $A_a$ — на плоскости $P_m$, а центр $A$ фиксирован). При этом формы $\omega^\alpha$, $\omega_a^\alpha$, $\omega^a$ являются главными (их обнуление фиксирует центрированную плоскость $P_m^0$), формы $\omega^\alpha$, $\omega_a^\alpha$ — базисные, а остальные формы — слоевые.

Помимо грассманоподобного многообразия $Gr^*(m,n)$ в статье используются следующие понятия: многообразие Грассмана (см. [2]), центрированное многообразие Грассмана (см. [4]) и многообразие центрированных плоскостей (см. [2,30]). Все эти многообразия являются многообразиями плоскостей одной размерности и рассматриваются в проективном пространстве $P_n$. Грассманово многообразие $Gr(m,n)$ состоит из всех $m$-мерных плоскостей (формы $\omega_a^\alpha$ — базисные), центрированное многообразие Грассмана $Gr^0(m,n)$ — это семейство $m$-мерных плоскостей, проходящих через одну точку (формы $\omega_a^\alpha$ — базисные, кроме того, имеет место условие $\omega^I = 0$). Многообразие $\Pi$ центрированных плоскостей содержит в качестве элементов все центрированные $m$-плоскости (формы $\omega_a^\alpha$, $\omega^\alpha$, $\omega^a$ — базисные). Из всех перечисленных многообразий только многообразие Грассмана состоит из нецентрированных плоскостей, и только $Gr^*(m,n)$ имеет уравнения (остальные многообразия выделяются только путем специализации репера).

Фундаментальный объект 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab}\}$ является квазитензором, поскольку его компоненты удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta\Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab}\omega_b + \omega_\alpha^a \equiv 0, \quad \Delta\Lambda_\alpha^{ab} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^\alpha,\ \omega_a^\alpha),$$

причем дифференциальный тензорный оператор $\Delta$ действует по закону

$$\Delta\Lambda_\alpha^{ab} = d\Lambda_\alpha^{ab} + \Lambda_\alpha^{cb}\omega_c^a + \Lambda_\alpha^{ac}\omega_c^b - \Lambda_\beta^{ab}\omega_\alpha^\beta.$$

**Замечание 3.** Квазитензор $\Lambda$ содержит подтензор $\Lambda_\alpha^{ab}$. Условие $\Lambda_\alpha^{ab} = 0$ задает многообразие, когда центр $A$ описывает $(n-m)$-поверхность $\omega^a = \Lambda_\alpha^a\omega^\alpha$.

Базисные формы $\omega^\alpha$, $\omega_a^\alpha$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана (2), т.е.

$$\begin{aligned} D\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega_a^\alpha \wedge (-\Lambda_\beta^a\omega^\beta - \Lambda_\beta^{ab}\omega_b^\beta), \\ D\omega_a^\alpha &= \omega_b^\beta \wedge (\delta_a^b\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha\omega_a^b) + \omega^\alpha \wedge (-\omega_a). \end{aligned} \tag{4}$$

При введении форм

$$\Omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha, \quad \Omega_{\beta a}^{\alpha b} = \delta_a^b\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha\omega_a^b, \quad \Omega_{\beta a}^\alpha = -\delta_\beta^\alpha\omega_a$$

структурные уравнения (4) базисных форм могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} D\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \Omega_\beta^\alpha + \omega_a^\alpha \wedge (-\Lambda_\beta^a\omega^\beta - \Lambda_\beta^{ab}\omega_b^\beta), \\ D\omega_a^\alpha &= \omega_b^\beta \wedge \Omega_{\beta a}^{\alpha b} + \omega^\beta \wedge \Omega_{\beta a}^\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

Также имеем

$$\begin{aligned} D\Omega_\beta^\alpha &= \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge \Omega_{\beta\gamma}^\alpha + \omega_a^\gamma \wedge \Omega_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \\ D\Omega_{\beta a}^{\alpha b} &= \Omega_{\beta c}^{\gamma b} \wedge \Omega_{\gamma a}^{\alpha c} + \omega^\gamma \wedge \Omega_{\beta a\gamma}^{\alpha b} + \omega_c^\gamma \wedge \Omega_{\beta a\gamma}^{\alpha bc}, \\ D\Omega_{\beta a}^\alpha &= \Omega_{\beta b}^\gamma \wedge \Omega_{\gamma a}^{\alpha b} + \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_{\gamma a}^\alpha + \omega_a^\gamma \wedge \Theta_{\beta\gamma}^\alpha, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\Omega_{\beta\gamma}^\alpha = \Lambda_\gamma^a\Omega_{\beta a}^\alpha - \delta_\beta^\alpha\omega_\gamma - \delta_\gamma^\alpha\omega_\beta, \quad \Omega_{\beta\gamma}^{\alpha a} = \Lambda_\gamma^{ba}\Omega_{\beta b}^\alpha - \delta_\gamma^\alpha\omega_\beta^a, \quad \Omega_{\beta a\gamma}^{\alpha b} = -\Lambda_\gamma^b\Omega_{\beta a}^\alpha - \delta_a^b\delta_\gamma^\alpha\omega_\beta,$$
$$\Omega_{\beta a\gamma}^{\alpha bc} = -\Lambda_\gamma^{bc}\Omega_{\beta a}^\alpha - \delta_a^b\delta_\gamma^\alpha\omega_\beta^c - \delta_a^c\delta_\beta^\alpha\omega_\gamma^b, \quad \Theta_{\beta\gamma}^\alpha = -\delta_\beta^\alpha\omega_\gamma.$$

**3. Аналог связности Нейфельда.** Над грассманоподобным многообразием $Gr^*(m,n)$ центрированных плоскостей возникает главное расслоение $\mathcal{L}(Gr^*)$ со структурными уравнениями (5) и (6) (см. [5]), типовым слоем которого является группа Ли $\mathcal{L}$, $\dim\mathcal{L} = (n-m)^2 \cdot (m^2+m+1)$, действующая в касательном пространстве к рассматриваемому многообразию $Gr^*(m,n)$.

**Замечание 4.** Следует отметить, что для рассмотренных многообразий плоскостей соответствующие группы Ли имеют следующие размерности:

(i) $\dim\mathcal{L}_{Gr} = (n-m)^2 \cdot (m+1)^2$;
(ii) $\dim\mathcal{L}_{Gr^0} = (n-m)^2 \cdot m^2$;

(iii) $\dim \mathcal{L}_\Pi = (n-m)^2 \cdot m^2 + n^2 + m$ (для расслоения с двухиндексными базисно-слоевыми формами);

(iv) $\dim \mathcal{L}_\Pi = (n-m)^2 \cdot m^2 + (n-m)n + m(m+2)$ (для расслоения с одноиндексными базисно-слоевыми формами).

Применяя метод Лаптева—Лумисте, в расслоении $\mathcal{L}(Gr^*)$ зададим связность Нейфельда, вводя формы

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^\alpha_\beta &= \Omega^\alpha_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma - L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\gamma_a, \\ \tilde{\Omega}^{\alpha b}_{\beta a} &= \Omega^{\alpha b}_{\beta a} - \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^\gamma - L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}\omega^\gamma_c, \\ \tilde{\Omega}^\alpha_{\beta a} &= \Omega^\alpha_{\beta a} - \Pi^\alpha_{\beta a\gamma}\omega^\gamma - G^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^\gamma_b. \end{aligned} \tag{7}$$

**Замечание 5.** Для пространства центрированных плоскостей аналог связности Нейфельда возможно задать в двух расслоениях (с двухиндексными и одноиндексными базисно-слоевыми формами; см. [9, 11]). Аналог связности Нейфельда многообразия Грассмана (см. [28]) и центрированного многообразия Грассмана (см. [4]) задается с помощью одного типа форм связности.

Дифференцируя (7) внешним образом и применяя теорему Картана—Лаптева, находим дифференциальные уравнения на базе $Gr^*(m,n)$, которым удовлетворяют компоненты объекта связности $\Gamma$

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - L^{\alpha a}_{\beta\mu}\Omega^\mu_{\gamma a} + \Omega^\alpha_{\beta\gamma} &= \Gamma^\alpha_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu_a, \\ \Delta L^{\alpha a}_{\beta\gamma} + \Omega^{\alpha a}_{\beta\gamma} &= L^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu + L^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu_b, \\ \Delta\Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma} - L^{\alpha bc}_{\beta a\mu}\Omega^\mu_{\gamma c} + \Omega^{\alpha b}_{\beta a\gamma} &= \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu + \Gamma^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu_c, \\ \Delta L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} + \Omega^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} &= L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu + L^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu_e, \\ \Delta\Pi^\alpha_{\beta a\gamma} - G^{\alpha b}_{\beta a\mu}\Omega^\mu_{\gamma b} - \Gamma^{\alpha b}_{\mu a\gamma}\Omega^\mu_{\beta b} + \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Omega^\alpha_{\mu a} &= \Pi^\alpha_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu + \Pi^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu_b, \\ \Delta G^{\alpha b}_{\beta a\gamma} - L^{\alpha cb}_{\mu a\gamma}\Omega^\mu_{\beta c} + L^{\mu b}_{\beta\gamma}\Omega^\alpha_{\mu a} + \delta^b_a\Theta^\alpha_{\beta\gamma} &= G^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu + G^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu_c. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, связность в расслоении $\mathcal{L}(Gr^*)$ задается на базе $Gr^*(m,n)$ с помощью поля объекта связности $\Gamma = \{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, L^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma}, L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}, \Pi^\alpha_{\beta a\gamma}, G^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\}$ с дифференциальными уравнениями (8). В правых частях этих уравнений при базисных формах стоят пфаффовы производные.

Осуществим аналог сильной нормализации Нордена (см. [22]) данного многообразия полями следующих геометрических образов: $(n-m-1)$-плоскостью $P_{n-m-1}$, не имеющей общих точек с плоскостью $P^0_m$, и $(m-1)$-плоскостью $P_{m-1}$, принадлежащей плоскости $P^0_m$ и не проходящей через ее центр.

**Теорема 1.** *Аналог сильной нормализации Нордена грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей $Gr^*(m,n)$ индуцирует аналог связности Нейфельда в ассоциированном расслоении $\mathcal{L}(Gr^*)$.*

*Доказательство.* Зададим плоскость $P_{n-m-1}$ совокупностью точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A$, а плоскость $P_{m-1}$ — точками $B_a = A_a + \lambda_a A$. Находя дифференциалы базисных точек оснащающих плоскостей и требуя относительную инвариантность этих плоскостей, получим, что компоненты квазитензора $\lambda = \{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda_a\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta\lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha \equiv 0, \quad \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha \equiv 0, \quad \Delta\lambda_a + \omega_a \equiv 0 \pmod{\omega^\alpha,\ \omega^\alpha_a}. \tag{9}$$

Учитывая уравнения (8) и сравнения (9), получаем выражения компонент объекта связности $\Gamma$ через компоненты оснащающего квазитензора $\lambda$ и фундаментального объекта $\Lambda$:

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= -\delta^\alpha_\gamma\lambda_\beta - \delta^\alpha_\beta\eta_\gamma, \quad L^{\alpha a}_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\gamma\lambda^a_\beta - \delta^\alpha_\beta\Lambda^{ba}_\gamma\lambda_b, \\ \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma} &= \delta^\alpha_\beta\mu^b_\gamma\lambda_a - \delta^b_a\delta^\alpha_\gamma\lambda_\beta, \quad L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} = \delta^\alpha_\beta\Lambda^{bc}_\gamma\lambda_a - \delta^b_a\delta^\alpha_\gamma\lambda^c_\beta - \delta^\alpha_\beta\delta^c_a\lambda^b_\gamma, \\ \Pi^\alpha_{\beta a\gamma} &= \delta^\alpha_\beta\mu^b_\gamma\lambda_a\lambda_b, \quad G^{\alpha b}_{\beta a\gamma} = \delta^\alpha_\beta\Lambda^{cb}_\gamma\lambda_a\lambda_c - \delta^\alpha_\beta\delta^b_a\lambda_\gamma, \end{aligned}$$

где для компактности записи были введены обозначения $\mu^a_\alpha = \Lambda^a_\alpha - \lambda^a_\alpha$, $\eta_\alpha = \lambda_\alpha + \mu^a_\alpha\lambda_a$. □

**Замечание 6.** Следует отметить важное геометрическое свойство: подобъект $\overset{0}{\Gamma}_1 = \{\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}, \overset{0}{L}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$ связности $\Gamma$ участвует в проектировании плоскости, которая является смежной с $P_{n-m-1}$, на исходную плоскость $P_{n-m-1}$. Центром такого проектирования является центрированная плоскость $P^0_m$, т.е.

$$\overset{0}{\Gamma}_1 \colon P_{n-m-1} + dP_{n-m-1} \xrightarrow{P^0_m} P_{n-m-1}.$$

**4. Тензор кривизны.** Подставляя дифференциальные уравнения (8) компонент объекта $\Gamma$ в выражения внешних дифференциалов форм (7), получим структурные уравнения форм связности

$$D\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta} = \tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta} \wedge \tilde{\Omega}^{\alpha}_{\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu} + R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu}_{a} + R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma}_{a} \wedge \omega^{\mu}_{b},$$
$$D\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{\beta a} = \tilde{\Omega}^{\gamma b}_{\beta c} \wedge \tilde{\Omega}^{\alpha c}_{\gamma a} + R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu} + R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu}_{c} + R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma}_{c} \wedge \omega^{\mu}_{e},$$
$$D\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta a} = \tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta b} \wedge \tilde{\Omega}^{\alpha b}_{\gamma a} + \tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta} \wedge \tilde{\Omega}^{\alpha}_{\gamma a} + R^{\alpha}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu} + K^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu}_{b} + K^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\gamma}_{b} \wedge \omega^{\mu}_{c},$$

где компоненты $R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}$, $R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}$, $R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}$, $R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}$, $R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}$, $R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu}$, $R^{\alpha}_{\beta a\gamma\mu}$, $K^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}$, $K^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}$ объекта кривизны $R$ связности Нейфельда выражаются по формулам

$$\begin{aligned}
R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} &= \Gamma^{\alpha}_{\beta[\gamma\mu]} + \Gamma^{\alpha}_{\eta[\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\mu]},\\
R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} &= \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} - L^{\alpha a}_{\beta\mu\gamma} + L^{\eta a}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}L^{\alpha a}_{\eta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Lambda^{a}_{\gamma},\\
R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} &= L^{\alpha}_{\beta}\left[{}^{ab}_{\gamma\mu}\right] + L^{\alpha}_{\eta}\left[{}^{a}_{\gamma}L^{\eta b}_{\beta\mu}\right] + \Gamma^{\alpha}_{\beta\lfloor\gamma}\Lambda^{\lceil ab}_{\mu}\Big],\\
R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} &= \Gamma^{\alpha b}_{\beta a[\gamma\mu]} + \Gamma^{\alpha c}_{\eta a[\gamma}\Gamma^{\eta b}_{\beta c\mu]},\\
R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} &= \Gamma^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} - L^{\alpha bc}_{\beta a\mu\gamma} + L^{\eta bc}_{\beta e\mu}\Gamma^{\alpha e}_{\eta a\gamma} - \Gamma^{\eta b}_{\beta e\gamma}L^{\alpha ec}_{\eta a\mu} - \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\mu}\Lambda^{c}_{\gamma},\\
R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu} &= L^{\alpha b}_{\beta a}\left[{}^{ce}_{\gamma\mu}\right] + L^{\alpha d}_{\eta a}\left[{}^{c}_{\gamma}L^{\eta be}_{\beta d\mu}\right] + \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\lfloor\gamma}\Lambda^{\lceil ce}_{\mu}\Big],\\
R^{\alpha}_{\beta a\gamma\mu} &= \Pi^{\alpha}_{\beta a[\gamma\mu]} + \Gamma^{\alpha b}_{\eta a[\gamma}\Pi^{\eta}_{\beta b\mu]} + \Pi^{\alpha}_{\eta a[\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\mu]},\\
K^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} &= \Pi^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} - G^{\alpha b}_{\beta a\mu\gamma} + G^{\eta b}_{\beta c\mu}\Gamma^{\alpha c}_{\eta a\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}G^{\alpha b}_{\eta a\mu} + L^{\eta b}_{\beta\mu}\Pi^{\alpha}_{\eta a\gamma} - \Pi^{\eta}_{\beta c\gamma}L^{\alpha cb}_{\eta a\mu} - \Pi^{\alpha}_{\beta a\mu}\Lambda^{b}_{\gamma},\\
K^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} &= G^{\alpha}_{\beta a}\left[{}^{bc}_{\gamma\mu}\right] + L^{\alpha e}_{\eta a}\left[{}^{b}_{\gamma}G^{\eta c}_{\beta e\mu}\right] - L^{\eta}_{\beta}\left[{}^{b}_{\gamma}G^{\alpha c}_{\eta a\mu}\right] + \Pi^{\alpha}_{\beta a\lfloor\gamma}\Lambda^{\lceil bc}_{\mu}\Big].
\end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам и парам индексов, т.е.

$$\Pi^{\alpha}_{\beta a\lfloor\gamma}\Lambda^{\lceil bc}_{\mu}\Big] = \frac{1}{2}(\Pi^{\alpha}_{\beta a\gamma}\Lambda^{bc}_{\mu} - \Pi^{\alpha}_{\beta a\mu}\Lambda^{cb}_{\gamma}).$$

В [6] было показано, что при дифференцировании уравнений (3) грассманоподобного многообразия $Gr^*(m,n)$ центрированных плоскостей получается равенство, слагаемые которого можно группировать различными способами. Всего существует четыре различных способа такой группировки:

(i) $(\Delta\Lambda^{a}_{\alpha} + \Lambda^{ab}_{\alpha}\omega_{b} + \omega^{a}_{\alpha} - \Lambda^{a}_{\beta}\Lambda^{b}_{\alpha}\omega^{\beta}_{b}) \wedge \omega^{\alpha} + (\Delta\Lambda^{ab}_{\alpha} + \Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{bc}_{\beta}\omega^{\beta}_{c}) \wedge \omega^{\alpha}_{b} = 0,$

(ii) $(\Delta\Lambda^{a}_{\alpha} + \Lambda^{ab}_{\alpha}\omega_{b} + \omega^{a}_{\alpha}) \wedge \omega^{\alpha} + (\Delta\Lambda^{ab}_{\alpha} + \Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{b}_{\beta}\omega^{\beta} + \Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{bc}_{\beta}\omega^{\beta}_{c}) \wedge \omega^{\alpha}_{b} = 0,$

(iii) $(\Delta\Lambda^{a}_{\alpha} + \Lambda^{ab}_{\alpha}\omega_{b} + \omega^{a}_{\alpha} - \Lambda^{a}_{\beta}\Lambda^{b}_{\alpha}\omega^{\beta}_{b}) \wedge \omega^{\alpha} + (\Delta\Lambda^{ab}_{\alpha} - \Lambda^{a}_{\beta}\Lambda^{cb}_{\alpha}\omega^{\beta}_{c}) \wedge \omega^{\alpha}_{b} = 0,$

(iv) $(\Delta\Lambda^{a}_{\alpha} + \Lambda^{ab}_{\alpha}\omega_{b} + \omega^{a}_{\alpha}) \wedge \omega^{\alpha} + (\Delta\Lambda^{ab}_{\alpha} + \Lambda^{a}_{\alpha}\Lambda^{b}_{\beta}\omega^{\beta} - \Lambda^{a}_{\beta}\Lambda^{cb}_{\alpha}\omega^{\beta}_{c}) \wedge \omega^{\alpha}_{b} = 0.$

**Замечание 7.** Случаи (i) и (iii) получаются друг из друга путем изменения порядка следования базисных форм в последних слагаемых (при этом $\alpha$ заменяем на $\beta$, а $b$ — на $c$). Аналогичное можно сказать также про случаи (ii) и (iv). Кроме того, важно отметить, что во всех этих случаях выполняются условия симметрии

$$\Lambda I^{a}_{[\alpha\beta]} = 0, \quad \Lambda I^{ab}_{\alpha\beta} - \overline{\Lambda} I^{ab}_{\beta\alpha} = 0, \quad \Lambda I^{a\lceil bc}_{\lfloor\alpha\beta}\Big] = 0,$$

здесь через $\Lambda I$ обозначены пфаффовы производные компонент фундаментального объекта 1-го порядка, $I = 1, \ldots, 4$.

Но, несмотря на различия продолжений уравнений компонент объекта связности Γ и фундаментального объекта 1-го порядка Λ, дифференциальные сравнения компонент объекта кривизны в любом из четырех случаев имеют вид

$$\begin{gathered}\Delta R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} + R^{\alpha a}_{\beta[\gamma\mu]}\omega_a \equiv 0, \quad \Delta R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} + 2R^{\alpha ba}_{\beta\gamma\mu}\omega_b \equiv 0, \quad \Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} \equiv 0,\\ \Delta R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} + R^{\alpha bc}_{\beta a[\gamma\mu]}\omega_c \equiv 0, \quad \Delta R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} + 2R^{\alpha bec}_{\beta a\gamma\mu}\omega_e \equiv 0, \quad \Delta R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu} \equiv 0,\\ \Delta R^{\alpha}_{\beta a\gamma\mu} + (K^{\alpha b}_{\beta a[\gamma\mu]} + R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} - \delta^b_a R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu})\omega_b \equiv 0,\\ \Delta K^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu} + (2K^{\alpha cb}_{\beta a\gamma\mu} + R^{\alpha cb}_{\beta a\gamma\mu} - \delta^c_a R^{\alpha b}_{\beta\gamma\mu})\omega_c \equiv 0,\\ \Delta K^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} + (R^{\alpha ebc}_{\beta a\gamma\mu} - \delta^e_a R^{\alpha bc}_{\beta\gamma\mu})\omega_e \equiv 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Все записанные сравнения берутся по модулю базисных форм $\omega^\alpha$, $\omega^\alpha_a$. Из данных сравнений вытекает следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Объект кривизны $R$ связности Нейфельда на грассманоподобном многообразии $Gr^*(m,n)$ является тензором, содержащим подтензоры*

$$\{R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\},\ \{R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu}\},\ \{R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu},\ R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\},\ \{R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu},\ R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu},\ R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\}, \{R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu},\ R^{\alpha bec}_{\beta a\gamma\mu}\},\ \{R^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu},\ R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu},\ R^{\alpha bec}_{\beta a\gamma\mu}\}.$$

Для обобщающего случая, при котором все базисные формы переносятся в правую часть, т.е. когда

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha\omega_b + \omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b, \quad \Delta\Lambda^{ab}_\alpha = \overline{\Lambda}^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c,$$

где только $\Lambda^a_{[\alpha\beta]} = 0$, часть дифференциальных сравнений компонент объекта кривизны принимает более общий вид:

$$\begin{gathered}\Delta R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} + (2R^{\alpha ba}_{\beta\gamma\mu} - \delta^\alpha_\beta M^{ba}_{\gamma\mu})\omega_b \equiv 0, \quad \Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} - \delta^\alpha_\beta M^{cab}_{\gamma\mu}\omega_c \equiv 0,\\ \Delta R^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu} + (2R^{\alpha bec}_{\beta a\gamma\mu} + \delta^\alpha_\beta\delta^b_a M^{bc}_{\gamma\mu})\omega_b \equiv 0, \quad \Delta R^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu} + \delta^\alpha_\beta M^{bce}_{\gamma\mu}\omega_a \equiv 0, \quad (\mathrm{mod}\ \omega^\alpha,\ \omega^\alpha_a),\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$M^{ab}_{\alpha\beta} = \Lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \bar{\Lambda}^{ab}_{\beta\alpha} - \Lambda^a_\beta\Lambda^b_\alpha, \quad M^{abc}_{\alpha\beta} = \Lambda^{a\lceil bc\rceil}_{\lfloor\alpha\beta\rfloor} + \Lambda^a_{\lfloor\alpha}\Lambda^{\lceil bc\rceil}_{\beta\rfloor}.$$

Компоненты виртуального тензора $M = \{M^{ab}_{\alpha\beta}, M^{abc}_{\alpha\beta}\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta M^{ab}_{\alpha\beta} - 2M^{abc}_{\beta\alpha}\omega_c \equiv 0, \quad \Delta M^{abc}_{\alpha\beta} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega^\alpha,\ \omega^\alpha_a).$$

В каждом из четырех рассмотренных случаев тензор $M$ обращается в нуль, при этом дифференциальные сравнения (11) превращаются в соответствующие сравнения из системы (10).

**Замечание 8.** При обращении в нуль компонент $M^{ab}_{\alpha\beta}$ и $M^{abc}_{\alpha\beta}$ тензора $M$ получим равенства

$$\bar{\Lambda}^{ab}_{\beta\alpha} = \Lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \Lambda^a_\beta\Lambda^b_\alpha, \quad \Lambda^{a\lceil bc\rceil}_{\lfloor\alpha\beta\rfloor} = -\Lambda^a_{\lfloor\alpha}\Lambda^{\lceil bc\rceil}_{\beta\rfloor}.$$

**5. Тензор кручения.** Подставляя в структурные уравнения (5) базисных форм многообразия $Gr^*(m,n)$ формы связности (7), приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}D\omega^\alpha = \omega^\beta\wedge\tilde{\Omega}^\alpha_\beta + S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma + S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma_a + S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\omega^\beta_a\wedge\omega^\gamma_b,\\ D\omega^\alpha_a = \omega^\beta_b\wedge\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{a\beta} + \omega^\beta\wedge\tilde{\Omega}^\alpha_{a\beta} + S^\alpha_{a\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma + S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma_b + S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\omega^\beta_b\wedge\omega^\gamma_c,\end{gathered}$$

где компоненты объекта $S$ выражаются по формулам (см. [7])

$$\begin{gathered}S^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{[\beta\gamma]}, \quad S^{\alpha a}_{\beta\gamma} = L^{\alpha a}_{\beta\gamma} + \delta^\alpha_\gamma\Lambda^a_\beta, \quad S^{\alpha ab}_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_{\lfloor\beta}\Lambda^{\lceil ab}_{\gamma}],\\ S^\alpha_{a\beta\gamma} = \Pi^\alpha_{a[\beta\gamma]}, \quad S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} = G^{\alpha b}_{a\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha b}_{a\gamma\beta}, \quad S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = L^{\alpha}_{a}{}^{[bc}_{\beta\gamma]}.\end{gathered}$$

Учитывая дифференциальные сравнения на компоненты фундаментального объекта Λ и компоненты объекта связности Γ, приходим к следующим сравнениям по модулю базисных форм $\omega^\alpha$, $\omega^\alpha_a$

$$\begin{gathered}\Delta S^\alpha_{\beta\gamma} + S^{\alpha a}_{[\beta\gamma]}\omega_a \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma} + 2S^{\alpha ba}_{\beta\gamma}\omega_b \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha ab}_{\beta\gamma} \equiv 0,\\ \Delta S^\alpha_{a\beta\gamma} + S^{\alpha b}_{a[\beta\gamma]}\omega_b - S^\alpha_{\beta\gamma}\omega_a \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha b}_{a\beta\gamma} + 2S^{\alpha cb}_{a\beta\gamma}\omega_c - S^{\alpha b}_{\beta\gamma}\omega_a \equiv 0, \quad \Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} - S^{\alpha cb}_{\beta\gamma}\omega_a \equiv 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Из сравнений (12) вытекает следующая теорема.

**Теорема 3.** *Объект кручения $S$ индуцированной связности Нейфельда грассманоподобного многообразия $Gr^*(m,n)$ центрированных плоскостей является тензором, содержащим пять подтензоров*

$$S_0 = \{S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\}, \quad S_1 = \{S^{\alpha a}_{\beta\gamma},\ S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\}, \quad S_2 = \{S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma},\ S^{\alpha bc}_{\beta\gamma}\},$$
$$S_3 = \{S^{\alpha}_{\beta\gamma},\ S^{\alpha a}_{\beta\gamma},\ S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\}, \quad S_4 = \{S^{\alpha b}_{a\beta\gamma},\ S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma},\ S^{\alpha b}_{\beta\gamma},\ S^{\alpha bc}_{\beta\gamma}\},$$

*причем имеет место следующая схема включения:*

$$\begin{array}{ccccccc} S_4 & \supset & S_1 & \supset & S_0 & \subset & S_2 \\ & & \cap & & & & \cap \\ & & S_3 & \subset & S & \supset & S_4 \end{array}$$

**Замечание 9.** Кручение аналога связности Нейфельда многообразия Грассмана $Gr(m,n)$ и центрированного многообразия Грассмана $Gr^0(m,n)$ является тензором, компоненты которого образуют простейший тензор (см. [26]). В [8] было показано, что связность Нейфельда в расслоении над пространством $\Pi$ центрированных плоскостей всегда с кручением, поскольку объект кручения содержит в качестве подобъекта ненулевой тензор $S^{\alpha a}_{\beta b} = \delta^\alpha_\beta \delta^a_b$, который не обращается в нуль.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Аль-Хассани М. А., Молдованова Е. А.* Отображение аффинного пространства в многообразие нуль-пар проективного пространства// Изв. Томск. политех. ун-та. — 2013. — *322*, № 2. — С. 24–28.
2. *Белова О. О.* Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 2. — С. 29–67.
3. *Белова О. О.* Тензор неабсолютных перенесений на грассманоподобном многообразии центрированных плоскостей// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 2. — С. 3–5.
4. *Белова О. О.* Индуцированная связность Нейфельда на центрированном многообразии Грассмана// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2013. — № 44. — С. 15–19.
5. *Белова О. О.* Индуцирование аналога связности Нейфельда на грассманоподобном многообразии центрированных плоскостей// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2014. — № 45. — С. 23–29.
6. *Белова О. О.* Тензор кривизны аналога связности Нейфельда на грассманоподобном многообразии центрированных плоскостей// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2015. — № 46. — С. 45–53.
7. *Белова О. О.* Тензор кручения аналога связности Нейфельда на грассманоподобном многообразии центрированных плоскостей// Вестн. Балт. федер. ун-та им. И. Канта. — 2015. — № 4. — С. 103–105.
8. *Белова О. О.* О кручении аналога связности Нейфельда в пространстве центрированных плоскостей// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2017. — № 48. — С. 25–32.
9. *Белова О. О.* Об аналоге связности Нейфельда в пространстве центрированных плоскостей с двухиндексными базисно-слоевыми формами// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2018. — № 49. — С. 29–35.
10. *Белова О. О.* Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 6. — С. 812–822.
11. *Белова Е. Е., Белова О. О.* Об аналоге связности Нейфельда в пространстве центрированных плоскостей с одноиндексными базисно-слоевыми формами// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2019. — № 50. — С. 41–47.
12. *Близникене И. В.* О геометрии полунеголономной конгруэнции первого рода// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1971. — *3*. — С. 125–148.
13. *Борисенко А. А., Николаевский Ю. А.* Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий// Усп. мат. наук. — 1991. — *46*, № 2. — С. 41–83.
14. *Бубякин И. В.* О строении комплексов $m$-мерных плоскостей проективного пространства $P^n$, содержащих конечное число торсов// Мат. заметки Сев.-Вост. федер. ун-та. — 2017. — *24*, № 4. — С. 3–16.
15. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1979. — *9*. — С. 5–246.

16. *Ивлев Е. Т., Молдованова Е. А.* О дифференцируемых отображениях аффинных пространств в многообразия $m$-плоскостей в многомерном евклидовом пространстве// Изв. вузов. Мат. — 2009. — № 11. — С. 24–42.
17. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: МПГУ, 2003.
18. *Кривоносов Л. Н., Лукьянов В. А.* Уравнения Эйнштейна на четырехмерном многообразии конформной связности без кручения// Ж. Сиб. федер. ун-та. Сер. Мат. физ. — 2012. — *5*, № 3. — С. 393–408.
19. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1953. — *2*. — С. 275–382.
20. *Лумисте Ю. Г.* Проективные связности в канонических расслоениях многообразий плоскостей// Мат. сб. — 1973. — *91 (133)*, № 2 (6). — С. 211–233.
21. *Нейфельд Э. Г.* Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства// Изв. вузов. Мат. — 1976. — № 11. — С. 48–55.
22. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
23. *Норден А. П.* Проективные метрики на грассмановых многообразиях// Изв. вузов. Мат. — 1981. — № 11. — С. 80–83.
24. *Остиану Н. М.* Метод Картана—Лаптева в исследовании $G$-структур на многообразиях// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2002. — *30*. — С. 5–124.
25. *Полякова К. В.* Тангенциальнозначные формы 2-го порядка// Мат. заметки. — 2019. — *105*, № 1. — С. 84–94.
26. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. — Калининград: КГУ, 2000.
27. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* A conformal differential invariant and the conformal regidity of hypersurfaces// Proc. Am. Math. Soc. — 1997. — *125*, № 8. — P. 2415–2424.
28. *Belova O.* Neifeld's connection induced on the Grassmann manifold// Acta Univ. Palacki. Olomouc. Fac. rer. nat. Math. — 2016. — № 55. — P. 11–14.
29. *Belova O.* An analog of Neifeld's connection induced on the space of centerd planes// Miskolc Math. Notes. — 2018. — *19*, № 2. — P. 749–754.
30. *Belova O.* Reduction of bundles, connection, curvature, and torsion of the centered planes space at normalization// Mathematics. — 2019. — *7*, № 10. — 901.
31. *Huang Z., Wu J., Gool L. V.* Building deep networks on Grassmann manifolds// 32 AAAI Conf. on Artificial Intelligence (AAAI-18) (New Orleans, Louisiana, USA, February 2–7, 2018), 2018. — P. 3279–3286.
32. *Mishra B., Kasai H., Jawanpuria P., Saroop A.* A Riemannian gossip approach to subspace learning on Grassmann manifold// Machine Learning. — 2019. — *108*. — P. 1783–1803.
33. *Polyakova K. V.* Prolongations generated by horizontal vectors// J. Geom. — 2019. — *110*. — 53.
34. *Tsukada K.* Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of 2-planes// Differ. Geom. Appl. — 2016. — *44*. — P. 30–51.
35. *Zhang J., Zhu G., Heath R.W., Huang K.* Grassmannian learning: embedding geometry awareness in shallow and deep learning/ `arXiv: 1808.02229v2 [cs.LG]`.

Белова Ольга Олеговна
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград
E-mail: `olgaobelova@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 203 (2021). С. 11–16
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-203-11-16

УДК 514.1

# ГЕОМЕТРИЯ КУБИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

© 2021 г. **Н. И. ГУСЕВА**

Аннотация. В работе рассмотрен пример построения геометрии на основе группового подхода, согласно которому наряду с множеством фигур для построения геометрии вводится группа преобразований («движений»), определяющих содержание геометрии. Именно, конструируемая геометрия изучает свойства фигур, инвариантных относительно действий своей группы. Для задания группы преобразований, как правило, выбирают совокупность действий, сохраняющих некоторый «фундаментальный объект». Например, для построения евклидовой геометрии используется группа движений — преобразований, сохраняющих расстояние между точками, для аффинной геометрии — группа аффинных преобразований — преобразований, сохраняющих простое отношение трех точек, для проективной геометрии — группа проективных преобразований — преобразований, сохраняющих двойное (или сложное) отношение четырех точек и так далее. В предлагаемой статье в качестве «фундаментального объекта» группы «движений» выбирается некоторая кубическая форма.

***Ключевые слова***: инвариант, фундаментальная форма, квадратичная форма, кубическая форма, линейное пространство, циклическая длина, циклический угол.

# GEOMETRY OF A CUBIC FORM

© 2021 **N. I. GUSEVA**

Abstract. In this paper, we construct a geometric scheme based on a group approach. According to this approach, in addition to a set of figures, a certain group of transformations (“motions”) is introduced; this group determines the content of the geometry. Namely, within the framework of the corresponding geometric scheme, properties of figures that are invariant under the actions of the group are examined. To specify the transformation group, as a rule, a set of transformation that preserves some “fundamental object” is chosen. For example, the group of motions (i.e., transformations that preserve the distance between points) is used for constructing Euclidean geometry, the group of affine transformations (i.e., transformations that preserve the simple relation of three points) is used for affine geometry, the group of projective transformations (i.e., transformations that preserve the double (or complex) ratio of four points) is used for projective geometry, and so on. In this paper, a certain cubic form serves as the “fundamental object” of the “motion group.”

***Keywords and phrases***: invariant, fundamental form, quadratic form, cubic form, linear space, cyclic length, cyclic angle.

***AMS Subject Classification***: 51N25

Принципы, провозглашенные Феликсом Клейном в его «Эрлангенской программе», не только дали возможность классификации известных в то время геометрий (проективной, аффинной, евклидовой), но и постулировали общее определение геометрических структур. Согласно представлениям Клейна, геометрией называется множество с некоторой фиксированной подгруппой группы преобразований данного множества. И тогда геометрический смысл приобретают те объекты и утверждения, которые «инвариантны» относительно преобразований из фиксированной подгруппы. Эти преобразования называются движениями в заданной так геометрической структуре.

 

Вообще говоря, в качестве группы движений той или иной геометрии можно взять любую подгруппу полной группы преобразований данного множества. Однако на практике в качестве группы движений обыкновенно выбирают подгруппу, преобразования из которой сохраняют заранее выбранный «фундаментальный объект».

Множества, на которых строятся геометрические структуры, могут так же быть какими угодно: конечными или бесконечными, наделенными той или иной топологией, или представляющими какие-либо алгебраические системы. Так появляются конечные и дискретные геометрии, геометрии на группах и кольцах, и так далее. При этом, если базовое множество какой-либо геометрии представляет собой некоторую алгебраическую систему, то движения в такой геометрии должны быть автоморфизмами данной алгебраической системы. И в этом случае говорят о геометрии согласованной с выбранной алгебраической системой.

Важнейшим примером геометрии, согласованной с алгебраической системой, является геометрия линейного пространства, движениями которой будут всевозможные линейные преобразования. Именно на линейных пространствах и ассоциированных с ними аффинных пространствах строятся классические евклидовы и псевдоевклидовы геометрии, фундаментальными объектами для которых являются квадратичные формы.

Естественным обобщением этих геометрий будут линейные (и аффинные) пространства, фундаментальными объектами для которых служат формы различных степеней. Трудность изучения таких *почти евклидовых геометрий*, заключается в том, что, во-первых, не существует единой и простой классификации форм, степень которых больше двух, а во-вторых, трудно найти линейные преобразования, сохраняющие те или иные формы, степень которых больше двух. Этими двумя факторами объясняется то обстоятельство, что геометры редко обращаются к изучению геометрий с неквадратичными фундаментальными формами. Среди отечественных математиков, занимавшихся геометрией пространств с фундаментальной кубической формой, можно назвать А. П. Нордена [5], Н. П. Соколова [7], Г. И. Гарасько [4] и некоторых других.

Указанные выше трудности дают основание, отказавшись от чрезмерной общности, изучать геометрию пространств со специально выбранной фундаментальной формой, для которой достаточно просто можно найти группу линейных преобразований, сохраняющих данную форму. Эта работа посвящена исследованию геометрии трехмерного линейного (и аффинного) пространства с кубической формой следующего вида (см. [2]):

$$g(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3. \tag{1}$$

Чем характерна такая кубическая форма? Во-первых, она обладает *композиционным свойством*, т.е. существуют такие билинейные формы $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ и $z_3(x,y)$ от переменных $x_1$, $x_2$,$x_3$ и $y_1$, $y_2$, $y_3$, для которых выполняется композиционное тождество:

$$\begin{multline}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3)(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 3y_1y_2y_3) = \\ = (z_1(x,y))^3 + (z_2(x,y))^3 + (z_3(x,y))^3 - 3z_1(x,y)z_2(x,y)z_3(x,y). \tag{2}\end{multline}$$

Чтобы найти билинейные формы $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ и $z_3(x,y)$, входящие в композиционное тождество (2), заметим, что фундаментальную форму (1) можно записать в виде циркулянта (см. [6]), т.е.

$$g(x) = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно также видеть, что произведение циркулянтов будет снова циркулянтом. Действительно,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_3 \\ y_3 & y_2 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1y_1 + x_3y_2 + x_2y_3 & x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 & x_1y_2 + x_3y_3 + x_2y_1 \\ x_1y_2 + x_3y_3 + x_2y_1 & x_1y_1 + x_3y_2 + x_2y_3 & x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 \\ x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 & x_1y_2 + x_3y_3 + x_2y_1 & x_1y_1 + x_3y_2 + x_2y_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда из мультипликативного свойства определителей видно, что

$$\begin{cases} z_1(x,y) = x_1y_1 + x_3y_2 + x_2y_3 \\ z_2(x,y) = x_1y_2 + x_3y_3 + x_2y_1 \\ z_3(x,y) = x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 \end{cases} \tag{3}$$

т.е. имеет место тождество

$$\begin{aligned}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3)(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 3y_1y_2y_3) = \\ = (x_1y_1 + x_3y_2 + x_2y_3)^3 + (x_1y_2 + x_3y_3 + x_2y_1)^3 + (x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2)^3 - \\ - 3(x_1y_1 + x_3y_2 + x_2y_3)(x_1y_2 + x_3y_3 + x_2y_1)(x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2).\end{aligned}$$

Теперь, чтобы сконструировать однопараметрические преобразования, сохраняющие фундаментальную кубическую форму (1), нам достаточно найти тройку функций $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$, для которых

$$\begin{vmatrix} A(t) & C(t) & B(t) \\ B(t) & A(t) & C(t) \\ C(t) & B(t) & A(t) \end{vmatrix} = 1. \tag{4}$$

Тогда (однопараметрическими) преобразованиями, сохраняющими фундаментальную кубическую форму (1), в силу (2) и (3) будут такие линейные преобразования:

$$\begin{cases} x_1' = A(t)x_1 + C(t)x_2 + B(t)x_3 \\ x_2' = B(t)x_1 + A(t)x_2 + C(t)x_3 \\ x_3' = C(t)x_1 + B(t)x_2 + A(t)x_3 \end{cases} \tag{5}$$

Для того чтобы найти функции, удовлетворяющие тождеству (4), заметим, что фундаментальную форму (1) можно представить следующим произведением линейных форм:

$$g(x) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \alpha_3x_2 + \alpha_3^2x_3)(x_1 + \alpha_3^2x_2 + \alpha_3x_3), \tag{6}$$

где

$$\alpha_3 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \sqrt[3]{1}.$$

Рассмотрим следующие функции (см. [2]):

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{(3n)!}, \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n+1}}{(3n+1)!}, \quad C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n+2}}{(3n+2)!}.$$

Эти функции определены для всех вещественных чисел, так как задающие их ряды мажорируются экспоненциальным рядом. Тот факт, что указанные функции удовлетворяют тождеству (4), следует из (6):

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} A(t) & C(t) & B(t) \\ B(t) & A(t) & C(t) \\ C(t) & B(t) & A(t) \end{vmatrix} &= (A(t) + B(t) + C(t))(A(t) + \alpha_3B(t) + \alpha_3^2C(t))(A(t) + \alpha_3^2B(t) + \alpha_3C(t)) = \\ &= (\exp t)(\exp \alpha_3t)(\exp \alpha_3^2t) = \exp(1 + \alpha_3 + \alpha_3^2)t = 1.\end{aligned}$$

Таким образом, преобразования (5) сохраняют кубическую форму (1), т.е. представляют собой движения в геометрии трехмерного пространства с кубической фундаментальной формой $g(x)$. Аналогично можно показать, что линейные преобразования вида

$$\begin{cases} x_1' = A(t)x_1 + B(t)x_2 + C(t)x_3 \\ x_2' = C(t)x_1 + A(t)x_2 + B(t)x_3 \\ x_3' = B(t)x_1 + C(t)x_2 + A(t)x_3 \end{cases} \tag{7}$$

так же будут движениями трехмерного пространства с кубической фундаментальной формой $g(x)$. И, комбинируя любые преобразования вида (5) и (7), мы получим двухпараметрическую группу движений трехмерного пространства с кубической фундаментальной формой $g(x)$.

Какие геометрические величины можно определить при помощи кубической фундаментальной формы $g(x)$? По аналогии с евклидовой и псевдоевклидовой геометрией можно ввести в рассмотрение *циклическую длину* векторов трехмерного линейного пространства $\mathbb{L}_3(\mathbb{R})$ полагая, что для вектора $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \in \mathbb{L}_3(\mathbb{R})$ (см. [2, 3]):

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3}. \tag{8}$$

Термин *длина* в названии этой величины обусловлен аналогией с евклидовой и псевдоевклидовой длиной векторов и «физической размерностью» длины, которая характеризуется тем, что при умножении вектора $\mathbf{x}$ на число, величина $\|\mathbf{x}\|$ умножается на это же число. С учетом циклической длины векторов в трехмерном линейном пространстве с фундаментальной формой (1) определяется циклическое расстояние между точками $X(x_1, x_2, x_3)$ и $Y(y_1, y_2, y_3)$ трехмерного аффинного пространства:

$$\|XY\| = \sqrt[3]{(y_1 - x_1)^3 + (y_2 - x_2)^3 + (y_3 - x_3)^3 - 3(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)(y_3 - x_3)}.$$

Из (8) видно, что циклическая длина векторов может быть любым вещественным числом. При этом для некоторых ненулевых векторов их циклическая длина может быть равной нулю — такие векторы называются *изотропными*. Чтобы понять расположение векторов с отрицательными, положительными и нулевыми длинами, мы в центроаффинном пространстве, ассоциированным с линейным векторным пространством, введем в рассмотрение циклический сфероид (см. [2, 3]), т.е. поверхность, точки которой удалены на одинаковое циклическое расстояние $r$ от начала координат. Уравнение такой поверхности можно записать так:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = r^3. \tag{9}$$

Посмотрим сначала, как в трехмерном центроаффинном пространстве расположены изотропные векторы. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3) = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)\frac{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}{2}, \end{aligned}$$

т.е. все точки, у которых радиус-векторы изотропные, располагаются на плоскости $x_1+x_2+x_3 = 0$ и на прямой $x_1 = x_2 = x_3$. Иначе говоря, изотропный сфероид представляет собой объединение изотропной плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и изотропной прямой $x_1 = x_2 = x_3$.

Для того чтобы представить себе форму неизотропных сфероидов, удобно перейти в систему координат, в которой одна ось совпадает с изотропной прямой, а две другие оси лежат в изотропной плоскости. Переход к такой системе координат дается уравнениями

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}} \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \quad y_3 = \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{\sqrt{6}},$$

а обратный переход — уравнениями

$$x_1 = \frac{y_1}{\sqrt{3}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}} + \frac{y_3}{\sqrt{6}} \quad x_2 = \frac{y_1}{\sqrt{3}} - \frac{y_2}{\sqrt{2}} + \frac{y_3}{\sqrt{6}} \quad x_3 = \frac{y_1}{\sqrt{3}} - \frac{2y_3}{\sqrt{6}}.$$

Тогда

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)\frac{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}{2} = 3\sqrt{3}y_1(y_2^2 + y_3^2),$$

т.е. в новой системе координат уравнение неизотропного циклического сфероида будет иметь вид

$$3\sqrt{3}y_1(y_2^2 + y_3^2) = r \quad \text{или} \quad y_1 = \frac{r}{3\sqrt{3}(y_2^2 + y_3^2)}. \tag{10}$$

Таким образом, циклический сфероид (10), изображенный в евклидовом пространстве, представляет собой поверхность вращения квадратичной гиперболы

$$y_1 = \frac{r}{3\sqrt{3}}y_2^2.$$

Конечно, евклидова форма поверхности, изображающей циклический сфероид, не отражает его свойств, присущих ему как объекту трехмерного пространства с фундаментальной кубической формой. (Подобно тому как гиперболоид, изображающий в евклидовом пространстве псевдоевклидову сферу, не отражает метрических свойств, присущих ему как объекту псевдоевклидовой геометрии.) Однако, поскольку и евклидова геометрия трехмерного пространства, и геометрия трехмерного пространства с фундаментальной кубической формой $g(x)$ имеют своей базой трехмерное линейное или центроаффинное пространство, то аффинные свойства поверхности с уравнением (10) будут одинаковы, как для евклидова пространства, так и для пространства с фундаментальной кубической формой $g(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$.

В частности, из формы поверхности (10) в евклидовом пространстве можно видеть, что циклический сфероид имеет две полости, разделенные плоскостью, входящей в изотропный сфероид. На одной полости лежат точки, радиус-векторы для которых имеют положительную циклическую длину, а циклическая длина радиус-векторов точек на другой полости будет отрицательной. При этом плоскость, входящая в изотропный сфероид, является асимптотической плоскостью для любых неизотропных сфероидов. Асимптотой для любых неизотропных сфероидов будет и прямая, входящая в изотропный сфероид.

Говоря о поверхности, заданной уравнением (9), любопытно отметить еще, что ее сечения плоскостями $x_k = r$ будут *декартовыми листами*. Например, взяв $x_3 = r$, мы получим следующее уравнение линии сечения: $x_1^3 + x_2^3 = 3rx_1x_2$; это и есть уравнение линии, которую называют декартов лист.

В евклидовой и псевдоевклидовой геометриях важнейшей геометрической величиной является угол между двумя векторами. В геометрии с кубической фундаментальной формой можно тоже определить величину, которую можно назвать *циклическим углом* между двумя неизотропными векторами, если эти векторы оба имеют положительную или отрицательную циклическую длину. Проще всего это сделать, поставив во взаимно однозначное соответствие векторам линейного трехмерного пространства с фундаментальной кубической формой (1) элементы циклической алгебры третьего порядка (см. [1,3]).

Это соответствие определяется следующим образом: в некотором фиксированном базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ трехмерного линейного пространства с кубической формой (1) полагают, что $\mathbf{e}_1 = \mathbf{1}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^2$, где $\mathbf{e}$ — образующий элемент циклической алгебры третьего порядка $\mathbb{R}_3(\mathbf{e})$, так что $\mathbf{e}^3 = \mathbf{1}$, при этом единицу алгебры $\mathbf{1} \in \mathbb{R}_3(\mathbf{e})$ отождествляют с единицей поля вещественных чисел, над которым определена алгебра $\mathbb{R}_3(\mathbf{e})$.

Тогда фундаментальную форму $g(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$ можно записать в виде произведения элемента $\mathbf{x} = x_1 + x_2\mathbf{e} + x_3\mathbf{e}^2$ и сопряженного ему элемента $\bar{\mathbf{x}} = (x_1^2 - x_2x_3) + (x_3^2 - x_1x_2)\mathbf{e} + (x_2^2 - x_1x_3)\mathbf{e}^2$, что проверяется непосредственным вычислением. При этом нетрудно видеть, что если

$$\mathbf{c} = \exp(t_1\mathbf{e} + t_2\mathbf{e}^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_1\mathbf{e} + t_2\mathbf{e}^2)^n}{n!},$$

то $\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}} = 1$, так как

$$\exp t\mathbf{e} = A(t) + B(t)\mathbf{e} + C(t)\mathbf{e}^2, \quad \exp t\mathbf{e}^2 = A(t) + B(t)\mathbf{e}^2 + C(t)\mathbf{e}.$$

Поэтому любое движение в пространстве с кубической формой (1) можно представить линейной функцией вида

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \exp(t_1\mathbf{e} + t_2\mathbf{e}^2). \tag{11}$$

Представление любых движений линейной функцией вида (11) дает основание для того, чтобы ввести в рассмотрение *экспоненциальную форму записи* для элементов циклической алгебры третьего порядка:

$$\mathbf{x} = r\exp(\varphi_1\mathbf{e} + \varphi_2\mathbf{e}^2),$$

где $\varphi_1\varphi_2 \in (-\infty; +\infty)$ и называются *аргументами* элемента $\mathbf{x}$, а $r = \|\mathbf{x}\|$ называется *модулем* элемента $\mathbf{x}$ и может быть любым вещественным числом. При этом для изотропных элементов аргумент не определен. Такая запись аналогична экспоненциальной форме записи комплексных и двойных вещественных чисел, кватернионов и антикватернионов. Она полезна во многих отношениях. В частности, при произведении любых элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_3(\mathbf{e})$ их модули перемножаются, а аргументы складываются.

С помощью экспоненциальной записи элементов циклической алгебры третьего порядка определяется *циклический угол* между неизотропными векторами трехмерного пространства с фундаментальной формой (1), при условии, что векторы, для которых вводится циклический угол, имеют одинаковую по знаку циклическую длину. С этой целью произвольные векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{L}_3(\mathbb{R})$, имеющие одинаковую по знаку циклическую длину, представим элементами циклической алгебры третьего порядка, записанными в экспоненциальной форме:

$$\mathbf{x} = p\exp(\varphi_1\mathbf{e} + \varphi_2\mathbf{e}^2) \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = q\exp(\psi_1\mathbf{e} + \psi_2\mathbf{e}^2).$$

Тогда в качестве циклического угла между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{L}_3(\mathbb{R})$, можно принять элемент $(\psi_1 - \varphi_1)\mathbf{e} + (\psi_2 - \varphi_2)\mathbf{e}^2 \in \mathbb{R}_3(\mathbf{e})$.

При этом, циклический угол инвариантен относительно движений в трехмерном пространстве с фундаментальной формой (1), так как если движение в этом пространстве представить линейной алгебраической функцией $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \exp(t_1\mathbf{e} + t_2\mathbf{e}^2)$, то

$$\mathbf{x}' = p\exp((\varphi_1 + t_1)\mathbf{e} + (\varphi_2 + t_2)\mathbf{e}^2) \quad \text{и} \quad \mathbf{y}' = q\exp((\psi_1 + t_1)\mathbf{e} + (\psi_2 - t_2)\mathbf{e}^2),$$

откуда и следует инвариантность элемента $(\psi_1 - \varphi_1)\mathbf{e} + (\psi_2 - \varphi_2)\mathbf{e}^2 \in \mathbb{R}_3(\mathbf{e})$ при движениях в пространстве с фундаментальной формой (1).

В заключение заметим, что в пространствах размерности $3n$ можно определить геометрию с фундаментальной формой

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n}(x_{3k}^3 + x_{3k+1}^3 + x_{3k+2}^3 - 3x_{3k}x_{3k+1}x_{3k+2}).$$

В таких пространствах в трехмерных гиперплоскостях индуцируется геометрия, рассмотренная выше.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлаков И. М., Бурлаков М. П.* Геометрические структуры линейных алгебр. — Lambert Academic Publishing, 2017.
2. *Бурлаков М. П.* Гамильтоновы алгебры. Элементарный очерк. — М.: Граф Пресс, 2006.
3. *Бурлаков М. П., Бурлаков И. М., Гусева Н. И.* Очерки об алгебрах циклических чисел. — М.: Ким, 2020.
4. *Гарасько Г. И.* Начала финслеровой геометрии для физиков. — М.: ТЕТРУ, 2009.
5. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
6. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1967.
7. *Соколов Н. П.* Пространственные матрицы и их приложения. — М.: Физматгиз, 1960.

Гусева Надежда Ивановна
Московский педагогический государственный университет;
Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва
E-mail: ngus12@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 203 (2021). С. 17–38
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-203-17-38

УДК 514.7

# ПОЛНЫЕ ЛОРЕНЦЕВЫ СЛОЕНИЯ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 НА ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2021 г. **Н. И. ЖУКОВА, Н. Г. ЧЕБОЧКО**

Аннотация. Целью работы является описание структуры полных лоренцевых слоений $(M, F)$ коразмерности 2 на $n$-мерных замкнутых многообразиях. Доказано, что $(M, F)$ либо риманово, либо имеет постоянную трансверсальную кривизну, и описана его структура. Для таких слоений $(M, F)$ получен критерий, сводящий проблему хаоса в $(M, F)$ как к проблеме хаотичности гладкого действия группы $O(1, 1)$ на ассоциированном локально симметрическом 3-многообразии, так и к проблеме хаотичности его глобальной группы голономии, представляющей собой конечно порожденную подгруппу группы изометрий плоскости с полной метрикой постоянной кривизны.

***Ключевые слова***: слоение, лоренцево слоение, глобальная группа голономии, хаос, связность Эресмана.

# COMPLETE LORENTZIAN FOLIATIONS OF CODIMENSION 2 ON CLOSED MANIFOLDS

© 2021 **N. I. ZHUKOVA, N. G. CHEBOCHKO**

Abstract. In this work, we describe the structure of a complete Lorentzian foliation $(M, F)$ of codimension 2 on an $n$-dimensional closed manifold. We prove that either $(M, F)$ is a Riemannian foliation or it has constant transverse curvature. We also describe the structure of such foliations obtain a criterion that reduces the problem of chaos in $(M, F)$ to the problem of chaos of the smooth action of the group $O(1, 1)$ on the associated, locally symmetric 3-manifold or to the problem of chaos of its global holonomy group, which is a finitely generated subgroup of the isometry group of the plane with a complete metric of constant curvature.

***Keywords and phrases***: foliation, Lorentzian foliation, global holonomy group, chaos, Ehresmann connection.

***AMS Subject Classification***: 53C12, 57R30, 37D45

**1. Введение. Основные результаты.** Псевдориманова и, в частности, лоренцева геометрия коренным образом отличается от римановой геометрии. Лоренцева геометрия находит широкое применение в теоретической и математической физике, в том числе в теории относительности (см., например, [25]). В данной работе мы исследуем полные лоренцевы слоения $(M, F)$ коразмерности 2 на $n$-мерных замкнутых многообразиях $M$ и показываем, что они существенно отличаются не только от римановых слоений, но и от лоренцевых слоений большей коразмерности. Особое внимание уделено хаотичности исследуемого класса слоений.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01041) и лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931).

 

*1.1. Критерий римановости.* В настоящее время римановы слоения образуют наиболее глубоко изученный класс слоений (П. Молино [24], А. Хефлигер [22], Ф. Тондеур [28] и др.). Р. Волак [29] поставил вопрос о нахождении условий, при которых слоение является римановым и доказал, что полное $G$-слоение, все слои которого компактны, является римановым. Критерии и другие достаточные условия римановости слоений, все слои которого компактны, найдены в [30].

Следующая теорема, доказанная в [2], дает ответ на этот вопрос для произвольных полных лоренцевых слоений коразмерности 2.

**Теорема 1.** *Полное лоренцево слоение $(M, F)$ коразмерности 2 на $n$-мерном многообразии является римановым тогда и только тогда, когда группа голономии каждого его слоя конечна и либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Как показывает пример 1 (см. раздел 1), конечность всех групп голономии не является достаточным условием для того, чтобы лоренцево слоение коразмерности $q \geqslant 3$ было римановым, а теорема 1 отражает специфику лоренцева слоения коразмерности 2.

*1.2. Альтернатива: римановость или трансверсальная однородность.* Пусть $\mathbb{S}^q$ — стандартная $q$-мерная сфера, а $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^q)$ — это группа Ли всех ее конформных преобразований. С. Таркини (см. [27]), а затем С. Таркини и Ш. Франц (см. [20]) поставили вопрос о том, является ли любое конформное слоение коразмерности $q \geqslant 3$ на компактном многообразии либо римановым, либо $(\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^q), \mathbb{S}^q)$-слоением, и положительно ответили на него при некоторых дополнительных предположениях. Полный положительный ответ на данный вопрос представлен Н. И. Жуковой в [4, теорема 2]. Заметим, что конформное слоение коразмерности $q \geqslant 3$ есть $(\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^q), \mathbb{S}^q)$-слоение тогда и только тогда, когда оно имеет нулевую конформную кривизну или, эквивалентно, является трансверсально однородным слоением. Для полных конформных слоений $(M, F)$ коразмерности $q \geqslant 3$ без предположения компактности многообразия $M$ аналогичное утверждение доказано в [5], а для более широкого класса параболических слоений ранга 1 — в [6].

Предположим, что лоренцево слоение $(M, F)$ коразмерности 2 задано $(N, g^N)$-коциклом $\eta = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$. Обозначим через $K = K(y)$, $y \in N$, функцию гауссовой кривизны двумерного лоренцева многообразия $(N, g^N)$. Для любой точки $x \in M$ существует такая субмерсия $f_i \colon U_i \to V_i$ из коцикла $\eta$, что $x \in U_i$. Поскольку гауссова кривизна поверхности $(N, g^N)$ инвариантна относительно любых локальных изометрий, из определения $(N, g^N)$-коцикла вытекает, что равенство

$$\mathcal{K}(x) = K(f_i(x))$$

корректно определяет функцию $\mathcal{K} \colon M \to \mathbb{R}$, которая называется *трансверсальной гауссовой кривизной лоренцева слоения* $(M, F)$. Поскольку гауссова кривизна двумерного лоренцева многообразия совпадает с его секционной кривизной, пространства постоянной гауссовой кривизны являются пространствами постоянной кривизны. Трансверсальную гауссову кривизну лоренцева слоения $(M, F)$ мы будем называть также просто *трансверсальной кривизной.*

Подчеркнем, что из этого определения вытекает, что $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$ — базисная функция, т.е. постоянная на слоях слоения $(M, F)$.

Следующая теорема является одним из основных результатов данной работы. Напомним, что замкнутым многообразием называется компактное многообразие без края.

**Теорема 2.** *Пусть $(M, F)$ — полное лоренцево слоение коразмерности 2 на $n$-мерном замкнутом многообразии $M$. Тогда либо $(M, F)$ — риманово слоение, либо $(M, F)$ — трансверсально однородное лоренцево слоение постоянной трансверсальной кривизны. Более точно, во втором случае $(M, F)$ является $(G, G/H)$-слоением, где $H = O(1, 1)$, а $G = H \ltimes \mathbb{R}^2$, если трансверсальная гауссова кривизна равна нулю, в противном случае $G = O(2, 1)$.*

Согласно теореме 1, группа голономии любого лоренцева слоения коразмерности 2, являющегося римановым, либо тривиальна, либо изоморфна группе $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, поэтому замыкания всех слоев этого слоения имеют одинаковую размерность, и утверждение следующей теоремы доказывается на основании результатов П. Молино (см. [24]).

**Теорема 3.** *Пусть $(M, F)$ — лоренцево слоение коразмерности 2 на замкнутом многообразии $M$, являющееся римановым. Тогда замыкание каждого слоя образует минимальное множество и является гладким вложенным подмногообразием в $M$, а множество замыканий всех слоев образует гладкое (регулярное) слоение $(M, \overline{F})$, удовлетворяющее одному из следующих трех условий:*

(i) *каждый слой слоения $(M, F)$ замкнут, т.е. $\overline{F} = F$, а пространство слоев естественным образом наделяется структурой гладкого компактного 2-орбифолда $\mathcal{N}$, причем проекция на пространство слоев $M \to \mathcal{N} = M/F$ является субмерсией на $\mathcal{N}$;*

(ii) *слоение $(M, \overline{F})$ имеет коразмерность 1 и образовано слоями субмерсии $M \to \mathcal{N} = M/\overline{F}$ на компактный гладкий одномерный орбифолд $\mathcal{N}$;*

(iii) *каждый слой слоения $(M, F)$ всюду плотен в $M$.*

Определения полноты лоренцева слоения и связности Эресмана слоения даны в разделах 2.2 и 4, соответственно.

Следующая теорема вытекает из теоремы 2 и [5, теорема 2].

**Теорема 4.** *Пусть $(M, F)$ — полное лоренцево слоение коразмерности 2 на замкнутом $n$-мерном многообразии, не являющееся римановым. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *существует регулярное накрывающее отображение $\kappa\colon L_0 \times B \to M$, где $B$ — полное лоренцево многообразие постоянной гауссовой кривизны, диффеоморфное плоскости $\mathbb{R}^2$, $L_0$ — многообразие, диффеоморфное любому слою без голономии, а индуцированное слоение $\widetilde{F} = \kappa^* F$ образовано слоями проекции на второй сомножитель $\mathrm{pr}\colon \widetilde{M} = L_0 \times B \to B$;*

(2) *существует гомоморфизм $\chi\colon \pi_1(M) \to \mathfrak{Iso}(B)$ фундаментальной группы $\pi_1(M)$ в группу Ли изометрий $\mathfrak{Iso}(B)$ лоренцева многообразия $B$, причем группа $\Psi = \chi(\pi_1(M))$ изоморфна группе накрывающих преобразований регулярного накрытия $\kappa\colon \widetilde{M} \to M$;*

(3) *для $(M, F)$ существует связность Эресмана $\mathfrak{M}$;*

(4) *стационарная подгруппа $\Psi_b$ в произвольной точке $b \in B$ изоморфна группе накрывающих преобразований регулярного накрытия $\kappa|_{L_0 \times \{b\}}\colon L_0 \times \{b\} \to L$ на слой $L = L(x)$, где $x \in \kappa(\mathrm{pr}^{-1}(b))$, а также ростковой группе голономии $\Gamma(L, x)$ и группе $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ слоя $L$, проходящего через $x$.*

**Замечание 1.** Напомним, что счетное пересечение открытых множеств в $M$ называется $G_\delta$-множеством. Как известно (см. [18]), объединение всех слоев слоения $(M, F)$ с тривиальной группой голономии образует всюду плотное $G_\delta$-подмножество в $M$. Таким образом, существует плотное $G_\delta$-подмножество в $M$, образованное слоями, диффеоморфными $L_0$.

**Определение 1.** Группа $\Psi$, определенная в теореме 4, называется *глобальной группой голономии слоения* $(M, F)$.

**Определение 2.** Пусть $(M, F)$ — произвольное гладкое слоение коразмерности $q$ на $n$-мерном многообразии $M$, $n > q$. Говорят, что $q$-мерное гладкое подмногообразие $\Sigma$ трансверсально слоению $(M, F)$ в точке $x \in \Sigma$, если $T_xM = T_x\Sigma \oplus T_xF$ — прямая сумма векторных подпространств. Замкнутое $q$-мерное подмногообразие $\Sigma$ называется замкнутой трансверсалью к $(M, F)$, если оно трансверсально слоению в каждой своей точке.

Следующая теорема содержит достаточное условие для того, чтобы $(M, F)$ было слоением нулевой трансверсальной кривизны.

**Теорема 5.** *Пусть $(M, F)$ — полное нериманово лоренцево слоение коразмерности 2 на компактном $n$-мерном многообразии $M$, где $n \geqslant 3$. Если существует замкнутая трансверсаль для $(M, F)$, то $(M, F)$ — трансверсально плоское лоренцево слоение.*

*1.3. Хаос в лоренцевых слоениях коразмерности* 2. Далее мы исследуем проблему существования хаотического поведения для слоений изучаемого класса. В отличие от параболических слоений ранга 1 (см. [6]), они не имеют аттракторов.

Напомним, что слой $L$ слоения $(M, F)$ называется замкнутым, если $L$ — замкнутое подмножество в $M$.

**Определение 3.** Гладкое слоение $(M, F)$ на компактном многообразии $M$ называется хаотическим (или имеет хаотическое поведение; см. [23]), если оно обладает следующими двумя свойствами:

(1) существует всюду плотный слой (топологическая транзитивность);
(2) объединение всех компактных слоев всюду плотно в $M$ (плотность компактных слоев).

Непрерывные хаотические действия счетных групп вводятся в [13] аналогично определению 3, в котором слои заменяются орбитами, а компактные слои заменяются конечными орбитами. Далее мы будем использовать следующее определение гладкого хаотического действия групп Ли.

**Определение 4.** Гладкое действие группы Ли $G$ (возможно дискретной) на многообразии $M$ называется хаотическим, если оно обладает следующими двумя свойствами:

(1) существует всюду плотная орбита;
(2) объединение всех замкнутых орбит всюду плотно в $M$.

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}\times M \to M$ — гладкий поток на многообразии $M$ и $\varphi^t = \varphi|_{\{t\}\times M}$, $t\in\mathbb{R}$. Напомним, что поток $\varphi$ называется *аносовским* (см. [1]), если существует разложение касательного расслоения $TM = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^\varphi \oplus \mathbb{E}^u$, инвариантное относительно дифференциала $D\varphi^t$, и такие положительные константы $a$, $b$, что

(1) распределение $\mathbb{E}^\varphi$ — касательное к орбитам потока;
(2) неравенство
$$\|D\varphi^t(v)\| \leqslant b\cdot e^{-at}\|v\|$$
выполняется для всех $v\in\mathbb{E}^s$ и $t>0$;
(3) неравенство
$$\|D\varphi^{-t}(v)\| \leqslant b\cdot e^{-at}\|v\|$$
выполняется для всех $v\in\mathbb{E}^u$ и $t>0$, где $\|\cdot\|$ — длина вектора в некоторой полной римановой метрике на $M$.

Будем называть аносовский поток *хаотическим*, если его орбиты образуют хаотическое слоение. Как известно (см., например, [10]), даже на компактных трехмерных многообразиях существуют нетранзитивные, следовательно, нехаотические аносовские потоки.

Обозначим через $\mathfrak{Fol}$ категорию гладких слоений, в которой морфизмами являются гладкие отображения, переводящие слои одного слоения в слои другого, а композиция морфизмов совпадает с композицией отображений.

В [12, теорема 4.1] доказано, что, с точностью до конечнолистных накрытий, любое полное лоренцево слоение коразмерности 2 на компактном трехмерном многообразии либо риманово, либо изоморфно в категории $\mathfrak{Fol}$ слоению, образованному алгебраическим аносовским потоком. Используя этот результат, учитывая, что любое лоренцево слоение допускает инвариантную трансверсальную меру, и применяя [1, теоремы 3-4], получаем следующее утверждение.

**Теорема 6.** *Полное лоренцево слоение коразмерности* 2 *на замкнутом трехмерном многообразии либо риманово, либо хаотическое.*

Построено полное лоренцево слоение коразмерности 3 на 4-мерном компактном многообразии, все группы голономии которого тривиальны, не являющееся ни римановым, ни хаотическим (пример 1 в разделе 1). Примеры 2—4 (разделы 2—4) показывают, что для $n>3$ существуют $n$-мерные компактные многообразия с лоренцевыми слоениями коразмерности 2, не являющиеся ни римановыми, ни хаотическими. Таким образом, в теореме 6 указано уникальное свойство полных лоренцевых слоений коразмерности 2 на компактных трехмерных многообразиях.

Напомним понятие слоеного расслоения. Пусть $(M, F)$ — полное нериманово лоренцево слоение коразмерности 2. Согласно теореме 2 оно является $(G, G/H)$-слоением, где $H = O(1,1)$, а $G = H\ltimes\mathbb{R}^2$, если трансверсальная кривизна рана нулю, и $G = O(2,1)$ в противном случае.

Такое слоение $(M, F)$ можно рассматривать как картаново слоение типа $(G, H)$ (см. [7]). Поэтому для $(M, F)$ определено слоеное расслоение (см. [7, предложение 2]). Это означает, что определены: главное $H$-расслоение с проекцией $\pi\colon \mathcal{R} \to M$, поднятое $e$-слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, невырожденная $H$-эквивариантная $\mathfrak{g}$-значная 1-форма $\omega$ на $\mathcal{R}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли $G$, такие, что $L_X\omega = 0$ для любого векторного поля $X$, касательного к слоению $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$.

Для полных лоренцевых слоений, не являющихся римановыми, замыкания слоев слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ образуют локально тривиальное расслоение $\pi_b\colon \mathcal{R} \to W$, на базе $W$ которого индуцируется гладкое действие группы $H = O(1,1)$ (см. [7]). Будем называть это действие *индуцированным*, а $W$ — *базовым многообразием.*

В случае, когда поднятое слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ образовано слоями субмерсии $\pi_b\colon \mathcal{R} \to W$, на многообразии $W$ индуцируется локально свободное действие группы Ли $O(1,1)$ (см. раздел 3.1).

Нами доказан следующий критерий хаотичности лоренцевых слоений коразмерности 2.

**Теорема 7.** *Пусть $(M, F)$ — полное нериманово лоренцево слоение коразмерности 2. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(i) *слоение $(M, F)$ хаотическое;*

(ii) *индуцированное действие группы $O(1,1)$ на трехмерном локально симметрическом базовом многообразии $W$ является локально свободным и хаотическим;*

(iii) *глобальная группа голономии слоения $(M, F)$ является конечнопорожденной дискретной подгруппой группы Ли всех изометрий $\mathfrak{Iso}(\mathbb{R}^2, g)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ с полной лоренцевой метрикой $g$ постоянной кривизны, хаотически действующей на $\mathbb{R}^2$.*

*Предположения.* Все многообразия и субмерсии предполагаются гладкими класса $C^\infty$, хаусдорфовыми, со счетной базой топологии, если не оговорено противное. Окрестности предполагаются открытыми.

*Обозначения.* Пусть $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ — сюръективная субмерсия и $\mathfrak{M}$ — распределение на $M$. Тогда на $\widetilde{M}$ индуцировано распределение $\widetilde{\mathfrak{M}} = \pi^*\mathfrak{M}$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}_v = \{Y \in T_v\widetilde{M} \mid \pi_{*v}(Y) \in \mathfrak{M}_{\pi(v)}\}$, $v \in \widetilde{M}$.

Через $\mathfrak{X}(M)$ обозначается алгебра Ли векторных полей на многообразии $M$. Если $\mathfrak{M}$ — распределение на $M$, то через $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ обозначается множество векторных полей, касательных к $\mathfrak{M}$, а в случае, когда $\mathfrak{M}$ образовано касательными пространствами к слоению $(M, F)$, пишем $\mathfrak{X}_F(M)$.

## 2. Основные понятия.

*2.1. Лоренцевы слоения.* Пусть $N$ — $q$-мерное многообразие, топологическое пространство которого может быть несвязным. Рассмотрим $n$-мерное многообразие $M$, где $n > q$. Говорят, что задан $N$-коцикл $\eta = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$, если

(1) задано открытое покрытие $\{U_i \mid i \in J\}$ многообразия $M$ и субмерсии со связными слоями $f_i\colon U_i \to N$ на открытые подмножества $V_i = f_i(U_i)$;

(2) в случае, когда $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, существует диффеоморфизм $\gamma_{ij}\colon f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$, удовлетворяющий равенству $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на пересечении $U_i \cap U_j$;

(3) для любого $x \in f_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$ имеет место равенство $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$, где $i, j, k \in J$.

Предполагается, что семейство $\eta$ максимально по включению и

$$N = \bigcup_{i\in J} V_i.$$

Множество слоев субмерсий $\{f_i^{-1}(x) \mid x \in N,\ i \in J\}$ образует базу слоевой топологии $\Upsilon$ в $M$. Компоненты связности топологического пространства $(M, \Upsilon)$ образуют разбиение $F = \{L_\alpha \mid \alpha \in A\}$ многообразия $M$. Это разбиение называется *слоением коразмерности $q$, заданным $N$-коциклом* $\eta$, и обозначается через $(M, F)$. Подмногообразия $L_\alpha$ называются слоями этого слоения.

Пусть $(M, F)$ — слоение, заданное $N$-коциклом $\eta = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$. Если на $N$ существует лоренцева метрика $g^N$ такая, что каждый элемент $\gamma_{ij}$ из коцикла $\eta$ является изометрией лоренцевых (соответственно, римановых) подмногообразий, индуцированных на открытых подмножествах $f_j(U_i \cap U_j)$ и $f_i(U_i \cap U_j)$, тогда $(M, F)$ называется *лоренцевым слоением* (соответственно, *римановым*). При этом говорят, что $(M, F)$ моделируется на лоренцевом (римановом) многообразии $(N, g^N)$ посредством $(N, g^N)$ коцикла $\eta$.

Пусть слоение $(M,F)$ задано $N$-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$. Если $N$ — лоренцево однородное пространство $G/H$, а $\gamma_{ij}$ — ограничения на открытые подмножества сдвигов пространства $G/H$ элементами группы Ли $G$, то $(M,F)$ называется *трансверсально однородным* лоренцевым слоением или $(G, G/H)$-слоением.

*2.2. Полнота лоренцева слоения.* Пусть $(M,F)$ — лоренцево слоение коразмерности $q$ и $\mathfrak{M}$ — трансверсальное $q$-мерное распределение на $M$. Это означает, что для каждой точки $x \in M$ выполняется равенство $T_xM = \mathfrak{M}_x \oplus T_xF$, где $T_xM$ — касательное векторное пространство к $M$, $T_xF$ — касательное пространство к слою слоения $(M,F)$, а $\mathfrak{M}_x$ — значение распределения в точке $x$. Подчеркнем, что любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ однозначно представимо в виде $X = X^F + X^{\mathfrak{M}}$, где $X^F \in \mathfrak{X}_F(M)$, $X^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$. Предположим, что лоренцево слоение $(M,F)$ задано $(N, g^N)$-коциклом $\eta = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$. Пусть $g^M$ — произвольная риманова метрика на $M$. Для любой точки $x \in M$ существует субмерсия $f\colon U \to V$ из коцикла $\eta$, для которой $x \in U$. Определим новую лоренцеву метрику $g$ на $M$, полагая

$$g(X,Y)|_x = g^M(X^F, Y^F)|_x + g^N(f_{*x}X^{\mathfrak{M}}, f_{*x}Y^{\mathfrak{M}})|_{f(x)}.$$

Из определения $(N, g^N)$-коцикла вытекает корректность определения метрики $g$ на $M$, т.е. независимость от выбора субмерсии $f\colon U \to V$, для которой $x \in U$. Кроме того, нетрудно проверить, что $g$ — трансверсально проектируемая метрика относительно $(M,F)$, т.е. производная Ли $L_X g$ вдоль любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}_F(M)$, касательного к слоению, равна нулю. Будем называть такую метрику $\mathfrak{M}$-*ассоциированной* с лоренцевым слоением $(M,F)$.

Согласно [17, теорема 1], для лоренцевой метрики $g$, $\mathfrak{M}$-*ассоциированной* с лоренцевым слоением $(M,F)$, и связности Леви-Чивиты $\nabla^g$ многообразия $(M,g)$ распределение $\mathfrak{M}$ является ортогональным слоению и вполне геодезическим. Последнее свойство означает, что любая геодезическая лоренцева многообразия $(M,g)$, ортогональная слоению в одной точке, остается ортогональной ему в каждой своей точке.

Лоренцево слоение $(M,F)$ коразмерности $q$ называется *полным*, если существуют трансверсальное $q$-мерное распределение $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$-ассоциированная лоренцева метрика $g$ на $M$ такие, что любая максимальная геодезическая, ортогональная слоению, определена на всей числовой прямой.

Подчеркнем, что полнота $\mathfrak{M}$-ассоциированной лоренцевой метрики $g$ на $M$ эквивалентна полноте векторных полей $Z$ на $\mathcal{R}$, касательных к распределению $\widetilde{\mathfrak{M}} = \pi^*\mathfrak{M}$, для которых $\omega(Z) = \mathrm{const}$, т.е. полноте $(M,F)$ как картанова слоения в смысле [7].

**Замечание 2.** Отображения $f_i\colon U_i \to V_i$ индуцированных лоренцевых многообразий $(U_i, g|_{U_i})$ и $(V_i, g^N|_{V_i})$ являются псевдоримановыми субмерсиями, которые введены и исследуются в монографии О'Нейла [25]. Отметим, что псевдоримановы многообразия и субмерсии называются в [25] полуримановыми (semi-Riemannian).

## 3. Структурная алгебра Ли лоренцева слоения.

*3.1. Слоеное расслоение.* Пусть $O(1,1)$ — псевдоортогональная группа матриц. Как известно, $O(1,1)$ — 1-мерная группа Ли, имеющая четыре компоненты связности. Компонента единицы $O_e(1,1)$ образована матрицами вида

$$A_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

и изоморфна группе целых чисел.

Во введении мы напомнили понятие слоеного расслоения над трансверсально однородным лоренцевым слоением. Сейчас мы рассмотрим слоеное расслоение для произвольного лоренцева слоения коразмерности 2. Пусть $H = O(1,1)$, $G = H \ltimes \mathbb{R}^2$ — полупрямое произведение групп Ли, а $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ — алгебры Ли групп $H$ и $G$, соответственно. Задание лоренцева слоения $(M,F)$ коразмерности $q$, моделируемого на лоренцевой геометрии $(N, g^N)$, эквивалентно заданию главного $H$-расслоения $\pi\colon \mathcal{R} \to M$, $H$-инвариантного слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ и $\mathfrak{g}$-значной $H$-эквивариантной 1-формы $\omega$ на $\mathcal{R}$, обладающих следующими свойствами:

(1) $\omega(A^*) = A$ для фундаментального векторного поля $A^*$, соответствующего произвольному элементу $A \in \mathfrak{h}$;
(2) отображение $\omega_u \colon T_u\mathcal{R} \to \mathfrak{g}$ для всякого $u \in \mathcal{R}$ сюръективно, причем $\ker\omega_u = T_u\mathcal{F}$, где $T\mathcal{F}$ — распределение, касательное к слоению $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$;
(3) производная Ли $L_X\omega$ равна нулю для каждого векторного поля $X$, касательного к слоям слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$.

Главное $H$-расслоение $\pi\colon \mathcal{R} \to M$ называется *слоеным расслоением*, а $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ называется *поднятым слоением* для слоения $(M, F)$.

Если пространство $\mathcal{R}$ несвязно, то оно имеет либо четыре компоненты связности, либо две, и мы будем рассматривать его компоненту связности, обозначая ее по-прежнему через $\mathcal{R}$, а его структурную группу через $H$. Обозначим через $H_e$ компоненту связности единицы группы Ли $H$. Заметим, что $H_e = O_e(1,1)$. Так как группа $H$ свободно действует на $\mathcal{R}$, то на $\mathcal{R}$ определено свободное действие нормальной подгруппы $H_e$. Пусть $K = H/H_e$. Определено фактормногообразие $\widetilde{M} = \mathcal{R}/H_e$ и факторотображение $\widetilde{\pi}\colon \mathcal{R} \to \widetilde{M}$. При этом на $\widetilde{M}$ определено свободное действие факторгруппы $K$, а проекция на пространство орбит $\mu\colon \widetilde{M} \to M = \widetilde{M}/K$ является регулярным накрывающим отображением с группой накрывающих преобразований, изоморфной $K$. Если группа $K$ не тривиальна, то она равна либо $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, либо $\mathbb{Z}_2$, и коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \arrow[rr, "\widetilde{\pi}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \widetilde{M} \arrow[dl, "\mu"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Если $H = H_e$, то $K = \{E\}$, $\widetilde{M} = M$ и $\mu = \mathrm{id}_M$ — тождественное отображение.

Согласно [7] группы голономии накрытия $(M, F)$ можно рассматривать как подгруппы структурной группы $H$ слоеного расслоения. Учитывая этот факт и то, что группа $H = O(1,1)$ не имеет конечных подгрупп, мы получаем следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Для любого лоренцева слоения $(M, F)$ коразмерности 2 существует конечнолистное регулярное накрывающее отображение $\mu\colon \widetilde{M} \to M$, удовлетворяющее коммутативной диаграмме (1) такое, что индуцированное слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ не имеет конечных групп голономии.*

Таким образом, с точностью до конечных накрытий, слоеное расслоение над $(M, F)$ является $H$-расслоением, где $H = O_e(1,1)$ — одномерная группа, изоморфная $\mathbb{R}^1$.

Поскольку свойство слоения $(M, F)$ иметь постоянную трансверсальную кривизну сохраняется при накрытиях, далее, не нарушая общности, мы предполагаем, что все группы голономии являются подгруппами группы $O_e(1,1)$.

*3.2. Слоеные и трансверсальные векторные поля.* Здесь мы напоминаем понятия и обозначения, используемые в [24]. Пусть $(M, F)$ — гладкое слоение коразмерности $q$ на $n$-мерном многообразии $M$. Векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ называется *слоеным*, если для любого $Y \in \mathfrak{X}_F(M)$ векторное поле $[X, Y]$ принадлежит $\mathfrak{X}_F(M)$. Множество слоеных векторных полей обозначается через $L(M, F)$. Поскольку $L(M, F)$ — нормализатор алгебры Ли $\mathfrak{X}_F(M)$ в $\mathfrak{X}(M)$, $L(M, F)$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{X}(M)$. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое фиксированное $q$-мерное распределение на $M$, трансверсальное $(M, F)$. Обозначим через $\mathrm{pr}\colon T_xM = T_xF \oplus \mathfrak{M}_x \to \mathfrak{M}_x$ каноническую проекцию. Тогда для любого слоеного векторного поля $X$ определена проекция $\overline{X}$, где $\overline{X}_x = \mathrm{pr}(X_x)$, $x \in M$. Векторное поле $\overline{X}$ называется *трансверсальным векторным полем, ассоциированным с* $X$. Обозначим через $l(M, F)$ множество трансверсальных векторных полей. Введем скобки Ли в $l(M, F)$, полагая $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$ для любых $X, Y \in L(M, F)$. Ядро проекции $L(M, F) \to l(M, F)$, отображающей $X$ в $\overline{X}$, совпадает с $\mathfrak{X}_F(M)$. Следовательно, $\mathfrak{X}_F(M)$ — идеал в $L(M, F)$ и имеет место точная последовательность алгебр Ли:

$$0 \to \mathfrak{X}_F(M) \to L(M, F) \to l(M, F) \to 0. \tag{2}$$

*3.3. Структурная алгебра Ли полного лоренцева слоения.* Пусть $(M,F)$ — полное лоренцево слоение коразмерности 2, не являющееся римановым на замкнутом многообразии $M$. Согласно теореме 2, $(M,F)$ — трансверсально однородное слоение, точнее $(G,G/H)$ — слоение, где $H = O(1,1)$, а $G = O(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$ для трансверсально плоских слоений и $G = O(2,1)$, если трансверсальная гауссова кривизна отлична от нуля. Напомним, что трансверсальная картанова кривизна любого трансверсально однородного слоения равна нулю. Поэтому $(M,F)$ — картаново слоение нулевой трансверсальной кривизны. В этом случае поднятое $e$-слоение $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ является слоением Ли. Замыкания слоев полного слоения Ли образуют локально тривиальное расслоение $\pi_b : \mathcal{R} \to W$ над некоторым гладким многообразием $W$, называемым базовым. На замыкании $\overline{\mathcal{L}}$ каждого слоя $\mathcal{L}$ индуцировано слоение Ли $(\overline{\mathcal{L}},\mathcal{F}|_{\overline{\mathcal{L}}})$ со всюду плотными слоями. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ слоения $(\overline{\mathcal{L}},\mathcal{F}|_{\overline{\mathcal{L}}})$ называется *структурной алгеброй Ли* как слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$, так и слоения $(M,F)$ (см. [7]).

П. Молино в [24, раздел 4] интерпретировал структурную алгебру $\mathfrak{g}_0$ следующим образом. Предположим, что $(M,F)$ — $\mathfrak{M}$-полное, и $\widetilde{\mathfrak{M}} = \pi^*\mathfrak{M}$. Тогда $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — распределение на $\mathcal{R}$, трансверсальное поднятому $e$-слоению $(\mathcal{R},\mathcal{F})$. Обозначим через $L(\mathcal{R},\mathcal{F})$ и $l(\mathcal{R},\mathcal{F})$ алгебры Ли слоеных и трансверсальных векторных полей слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$. Пусть $u$ — произвольная точка из $\mathcal{R}$ и $U \subset \mathcal{R}$ окрестность точки $u$, расслоенная как относительно слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$, так и относительно слоения, образованного компонентами связности слоев субмерсии $\pi\colon \mathcal{R} \to M$. Пусть $Z_U \in l(U,\mathcal{F}_U)$ — трансверсальное векторное поле в окрестности $U$, коммутирующее со всеми трансверсальными векторными полями из алгебры $l(U,\mathcal{F}_U)$. Такие векторные поля $Z_U$ называются локальными коммутирующими векторными полями. Через $C_u(\mathcal{R},\mathcal{F})$ обозначается алгебра Ли ростков коммутирующих векторных полей в точке $u$. Напомним, что противоположные алгебры Ли образуют одно и то же векторное пространство, а их скобки Ли отличаются знаком. П. Молино доказал (см. [24, предложение 4.4]), что алгебра, противоположная алгебре Ли $C_u(\mathcal{R},\mathcal{F})$, совпадает со структурной алгеброй $e$-слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$, обозначенной через $\mathfrak{g}_0$.

Таким образом, благодаря [24], мы можем интерпретировать структурную алгебру Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M,F)$ слоения $(M,F)$ как противоположную алгебре Ли $C_u(\mathcal{R},\mathcal{F})$ ростков коммутирующих векторных полей в точке $u \in \mathcal{R}$.

## 4. Связность Эресмана для слоений.

*4.1. Определение связности Эресмана.* Понятие связности Эресмана введено Р. А. Блюменталем и Дж. Хебдой (см. [11]). Напомним терминологию и обозначения, используемые в [7]. Пусть $(M,F)$ гладкое слоение коразмерности $q \geqslant 1$ и $\mathfrak{M}$ — $q$-мерное трансверсальное распределение.

Все рассматриваемые кривые предполагаются кусочно гладкими. Кривая называется вертикальной, если она лежит в одном слое слоения $(M,F)$. Кривая называется горизонтальной, если все ее касательные векторы принадлежат распределению $\mathfrak{M}$. Другими словами, кусочно гладкая кривая является горизонтальной, если каждый ее гладкий кусок — интегральная кривая распределения $\mathfrak{M}$.

Вертикально-горизонтальной гомотопией (кратко вгг) называется кусочно гладкое отображение $H\colon I_1 \times I_2 \to M$, где $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$, для которого сужение $H|_{I_1\times\{t\}}$ при любом $t \in I_2$ является горизонтальной кривой, а сужение $H|_{\{s\}\times I_2}$ при любом $s \in I_1$ — вертикальной кривой. Пара путей $(H|_{I_1\times\{0\}}, H|_{\{0\}\times I_2})$ называется *базой* вгг $H$. Пара путей $(\sigma,h)$ с общим началом $\sigma(0) = h(0)$, где $\sigma\colon I_1 \to M$ — горизонтальная, а $h\colon I_2 \to M$ — вертикальная кривая, называется допустимой для вгг.

Распределение $\mathfrak{M}$ называется *связностью Эресмана для слоения* $(M,F)$, если для любой допустимой пары путей $(\sigma,h)$ существует вертикально-горизонтальная гомотопия с базой $(\sigma,h)$. Отметим, что из теории обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает, что существует не более одной вгг $H$ с данной базой $(\sigma,h)$.

Пусть $H$ — вгг с базой $(\sigma,h)$. Тогда $\widetilde{\sigma} = H|_{I_1\times\{1\}}$ называется *переносом* пути $\sigma$ вдоль $h$ и обозначается через $\sigma \overset{h}{\to}> \widetilde{\sigma}$. Аналогично, путь $\widetilde{h} = H|_{\{1\}\times I_2}$ называется переносом пути $h$ вдоль $\sigma$ и обозначается через

$$h \overset{\sigma}{\to}> \widetilde{h}$$

.

Если распределение $\mathfrak{M}$ интегрируемо, то связность Эресмана $\mathfrak{M}$ для слоения $(M, F)$ называется *интегрируемой.*

Известно (см. [7, предложение 3]), что для любого лоренцева слоения $(M, F)$, полного относительно распределения $\mathfrak{M}$, это распределение является связностью Эресмана для слоения $(M, F)$.

*4.2. Группы $\mathfrak{M}$-голономии.* Пусть $(M, F)$ — слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\Omega_x$ множество горизонтальных кривых с началом в точке $x$. Тогда отображение $\Phi_x\colon \Omega_x \times \pi_1(L, x) \to \Omega_x\colon (\sigma, [h]) \mapsto \tilde{\sigma}$, где $\sigma \in \Omega_x$, $[h] \in \pi_1(L, x)$, $H$ — вертикально-горизонтальная гомотопия с базой $(\sigma, h)$, и $\tilde{\sigma}(s) = H(s, 1)$, $s \in I_1$, определяет правое действие фундаментальной группы $\pi_1(L, x)$ слоя $L = L(x)$ на множестве $\Omega_x$.

Так как ядро этого действия $K_{\mathfrak{M}}(L, x) = \{[h] \in \pi_1(L, x) \mid \Phi_x(\sigma, [h]) = \sigma \ \forall \sigma \in \Omega_x\} = \ker \Phi_x$ является нормальной подгруппой группы $\pi_1(L, x)$, то определена факторгруппа $H_{\mathfrak{M}}(L, x) = \pi_1(L, x)/\ker \Phi_x$, которая называется *группой $\mathfrak{M}$-голономии слоя* $L$ слоения $(M, F)$ со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$ (см. [11]).

Известно, что существует естественный эпиморфизм групп $\delta\colon H_{\mathfrak{M}}(L, x) \to \Gamma(L, x)$ на ростковую группу голономии $\Gamma(L, x)$ слоя $L = L(x)$, удовлетворяющий равенству

$$\alpha = \delta \circ \nu,$$

где $\nu\colon \pi_1(L, x) \to H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ и $\alpha\colon \pi_1(L, x) \to \Gamma(L, x)$ — соответствующие факторотображения.

*4.3. Эквивалентные подходы к понятию группы голономии лоренцева слоения.*

**Замечание 3.** Пусть $(M, F)$ — лоренцево слоение произвольной коразмерности на $n$-мерном многообразии $M$. Так как лоренцева метрика определяет $G$-структуру первого порядка, то существует изоморфизм $\theta\colon \Gamma(L, x) \to D\Gamma(L, x)$ ростковой группы голономии $\Gamma(L, x)$ слоя $L$ на линейную группу голономии $D\Gamma(L, x)$, образованную дифференциалами локальных голономных диффеоморфизмов в точке $x \in M$.

Так как лоренцева геометрия относится к жестким геометриям, то из [31, теорема 4] с учетом замечания 3 мы получаем следующее утверждение.

**Теорема 8.** *Пусть $(M, F)$ — $\mathfrak{M}$-полное лоренцево слоение произвольной коразмерности на $n$-мерном многообразии $M$, заданное $(N, g^N)$-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, и $\pi\colon \mathcal{R} \to M$ — проекция его слоеного $H$-расслоения, где $H = O(1, n-1)$. Пусть $L = L(x)$, $x \in M$, — произвольный слой этого слоения и $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u)$, $u \in \pi^{-1}(x)$, — слой поднятого слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Тогда ростковая группа голономии $\Gamma(L, x)$ слоя $L$ изоморфна каждой из следующих шести групп*:

(1) *группе $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$;*
(2) *группе $\Gamma_v$, образованной ростками локальных изометрий из стационарной подпсевдогруппы $\mathcal{H}_v$ псевдогруппы голономии $\mathcal{H} = \mathcal{H}(M, F)$ локальных изометрий лоренцева многообразия $(N, g^N)$ в точке $v = f_i(x)$, где $x \in U_i$;*
(3) *группе $D\mathcal{H}_v$, образованной дифференциалами локальных голономных изометрий из $\mathcal{H}_v$;*
(4) *группе накрывающих преобразований регулярного накрытия $\pi|_{\mathcal{L}}\colon \mathcal{L} \to L$;*
(5) *подгруппе $H(\mathcal{L}) = \{a \in H \mid R_a(\mathcal{L}) = \mathcal{L}\}$ группы Ли $H$;*
(6) *группе голономии $\Phi(u)$ интегрируемой связности $T(\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(L)})$ главного $H$-расслоения с проекцией $\pi|_{\pi^{-1}(L)}\colon \pi^{-1}(L) \to L$.*

**Следствие 1.** *Для лоренцева слоения со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$ существует изоморфизм $\delta\colon H_{\mathfrak{M}}(L, x) \to \Gamma(L, x)$ группы $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ и ростковой группы голономии $\Gamma(L, x)$ слоя $L$, удовлетворяющий коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(L,x) \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "\tau"] & \\ H_{\mathfrak{M}}(L,x) \arrow[r, "\delta"] & \Gamma(L,x) \arrow[r, "\theta"] & D\Gamma(L,x), \end{tikzcd}$$

*где* $\theta\colon \Gamma(L,x) \to D\Gamma(L,x)$ — *изоморфизм групп, а* $\tau\colon \pi_1(L,x) \to D\Gamma(L,x)$ — *индуцированный эпиморфизм групп.*

## 5. Альтернатива: римановость или трансверсальная однородность.

*5.1. Доказательство теоремы* 1. Для полноты изложения приведем доказательство теоремы 1 (см. [2, теорема 1]). Согласно лемме 1, существует конечнолистное регулярное накрывающее отображение $\mu\colon \widetilde{M} \to M$ такое, что индуцированное слоение $(\widetilde{M},\widetilde{F})$ не имеет конечных групп голономии. Заметим, что слоение $(M,F)$ является римановым тогда и только тогда, когда слоение $(\widetilde{M},\widetilde{F})$ риманово. Таким образом, в теореме 1 конечность групп голономии можно заменить условием, согласно которому $(M,F)$ — слоение без голономии.

Пусть $(M,F)$ — полное лоренцево слоение коразмерности 2 на $n$-мерном многообразии, заданное $N$-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$. Предположим, что $(M,F)$ риманово, имеющее слой с бесконечной группой голономии. Тогда на многообразии $N$ существует риманова метрика $g^N$, относительно которой каждый локальный диффеоморфизм $\gamma_{ij}$ из псевдогруппы голономии $\mathcal{H}(M,F)$ является изометрией $(f_j(U_i\cap U_j), g^N)$ на $(f_i(U_i\cap U_j), g^N)$. Согласно теореме 8, группа голономии $\Gamma(L,x)$ изоморфна группе ростков $\Gamma_v$ в точке $v$ локальных диффеоморфизмов из псевдогруппы $\mathcal{H}_v = \{\gamma\in\mathcal{H} \mid \gamma(v)=v\}$. По теореме 8 группа $\Gamma(L,x)$ изоморфна также линейной группе голономии $D\mathcal{H}_v$, образованной дифференциалами в точке $v$ преобразований $\gamma\in\mathcal{H}_v$. Поскольку группа $D\mathcal{H}_v$ образована автоморфизмами псевдоевклидова векторного пространства $(\mathbb{E}^2_1, g^N_v) = (T_vN, g^N_v)$, то $D\mathcal{H}_v$ изоморфна подгруппе псевдоортогональной группы $O(1,1)$. Заметим, что любая бесконечная подгруппа группы $D\mathcal{H}_v$ содержит циклическую подгруппу с образующей

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t\\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t\end{pmatrix} \in O_e(1,1),$$

где $O_e(1,1)$ — компонента единицы группы $O(1,1)$, $t$ — некоторое фиксированное число, отличное от нуля. Собственными значениями матрицы $A$ являются $\lambda_1 = e^{-t}$, $\lambda_2 = e^t$. По предположению, $(M,F)$ — риманово слоение, следовательно, $A$ — ортогональное преобразование евклидова векторного пространства $(T_vN, g^N_v)$. Так как $|\lambda_i|\neq 1$, то $A$ не является ортогональным преобразованием векторного пространства $T_vN$. Получили противоречие с предположением о том, что слоение риманово.

Предположим обратное. Пусть все группы голономии лоренцева слоения $(M,F)$ коразмерности 2 тривиальны. Покажем, что слоение $(M,F)$ риманово. Рассмотрим слоеное расслоение с проекцией $\pi\colon \mathcal{R}\to M$ и структурной группой $H = O_e(1,1)$. Пусть и $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ — поднятое $H$-инвариантное слоение (см. раздел 3.1). Как известно, для любого слоя $\mathcal{L}\in\mathcal{F}$ сужение $\pi|_{\mathcal{L}}\colon \mathcal{L}\to L=\pi(\mathcal{L})$ — регулярное накрытие с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе голономии слоя $L$. Поскольку все группы голономии слоения $(M,F)$ тривиальны, то сужение $\pi|_{\mathcal{L}}$ является диффеоморфизмом слоя $\mathcal{L}$ на слой $L$. В этом случае, согласно [5, предложение 4] существует такое сечение $\sigma\colon M\to\mathcal{R}$ расслоения $\pi\colon\mathcal{R}\to M$, что $\widehat{M}=\sigma(M)$ есть $\mathcal{F}$-насыщенное подмногообразие в $\mathcal{R}$. Поскольку главное $H$-расслоение $\mathcal{R}(M,H)$ имеет сечение, то оно тривиально, т.е. $\mathcal{R}=M\times H$ и действие $R_a$ элемента $a\in H$ на $\mathcal{R}$ определено равенством $R_a(x,b)=(x,ba)$ $\forall (x,b)\in M\times H$. Подчеркнем, что $\widehat{M}=\sigma(M)\cong M\times\{e\}$ — замкнутое вложенное подмногообразие в $\mathcal{R}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ связность Эресмана для слоения $(M,F)$. Тогда $\widetilde{\mathfrak{M}} = \pi^*\mathfrak{M}$ — связность Эресмана для поднятого слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$. По определению полноты картанова слоения $(M,F)$, слоение $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ является $\widetilde{\mathfrak{M}}$-полным. Следовательно, замыкания слоев $e$-слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$ образуют новое слоение $(\mathcal{R},\overline{\mathcal{F}})$ со связностью Эресмана (см. [7, теорема 1]).

Для любой точки $u\in\widehat{M}$ обозначим через $\mathcal{L}=\mathcal{L}(u)$ слой слоения $(\widehat{M},\widehat{F})$, проходящий через $u$, где $\widehat{F}=\mathcal{F}|_{\widehat{M}}$. Обозначим через $\overline{\mathcal{L}}$ замыкание слоя $\mathcal{L}$ в $\mathcal{R}$. Поскольку $\widehat{M}$ — замкнутое подмножество в $\mathcal{R}$, то $\overline{\mathcal{L}}\subset\widehat{M}$. Таким образом, согласно сказанному выше, замыкания слоев слоения $(\widehat{M},\widehat{F})$ образуют новое слоение $(\widehat{M}, cl(\widehat{F}))$, слои которого являются слоями локально тривиального расслоения $\widehat{\pi}_b\colon \widehat{M}\to\widehat{W}$ над гладким многообразием $\widehat{W}$ (см. [7, теорема 1]). При этом $(\widehat{M}, cl(\widehat{F})) = (\widehat{M},\widehat{F})$

тогда и только тогда, когда все слои слоения $(M,F)$ замкнуты. В произвольной точке $z\in\widehat{W}$ существует окрестность $U$ и диффеоморфизм $f_U\colon \widehat{\pi}_b^{-1}(U)\to U\times\overline{\mathcal{L}}$, удовлетворяющий равенству $\widehat{\pi}_b=\mathrm{pr}_1\circ f_U$, где $\mathrm{pr}_1\colon U\times\overline{\mathcal{L}}\to U$ — проекция на первый сомножитель. Заметим, что $(\overline{\mathcal{L}},\mathcal{F}|_{\overline{\mathcal{L}}})$ — слоение Ли с всюду плотными слоями. Оно является $(G_0,G_0)$-слоением, где $G_0$ — односвязная группа Ли, алгебра Ли которой является структурной алгеброй слоения Ли $(\overline{\mathcal{L}},\mathcal{F}|_{\overline{\mathcal{L}}})$. Подчеркнем, что $G_0=\{e\}$ тогда и только тогда, когда $(\widehat{M},cl(\widehat{F}))=(\widehat{M},\widehat{F})$. Так как $\widetilde{\mathfrak{M}}|_{\overline{\mathcal{L}}}$ — связность Эресмана для слоения $(\overline{\mathcal{L}},\mathcal{F}|_{\overline{\mathcal{L}}})$, то из [5, теорема 2] вытекает, что оно накрыто локально тривиальным расслоением с базой $G_0$. Следовательно, на $\overline{\mathcal{L}}$ существует трансверсально проектируемая риманова метрика $\widehat{d}$. Зафиксируем риманову метрику $\widehat{g}$ на $\widehat{W}$. Тогда на $U\times\overline{\mathcal{L}}$ определена метрика $\widehat{g}|_U\oplus\widehat{d}$. Диффеоморфизм $f_U\colon\widehat{\pi}_b^{-1}(U)\to U\times\overline{\mathcal{L}}$ определяет риманову метрику $\widehat{h}=f_U^*(\widehat{g}|_U\oplus\widehat{d})$ на $\widehat{\pi}_b^{-1}(U)$. Подчеркнем, что риманова метрика $\widehat{h}$ на $\widehat{\pi}_b^{-1}(U)$ является трансверсально проектируемой относительно слоения $(\widehat{\pi}_b^{-1}(U),\widehat{\mathcal{F}}|_{\widehat{\pi}_b^{-1}(U)})$.

Пусть $\Xi=\{U_i\mid i\in\mathfrak{J}\}$ — открытое покрытие $\widehat{W}$ стягиваемыми окрестностями, в которых расслоение $\widehat{\pi}_b\colon\widehat{M}\to\widehat{W}$ тривиализуемо и $\widehat{h}_i$ — риманова метрика на $\widehat{U}_i=\widehat{\pi}_b^{-1}(U_i)$, определенная указанным выше образом, являющаяся трансверсально проектируемой относительно слоения $(\widehat{U}_i,\widehat{\mathcal{F}}|_{\widehat{U}_i})$. Обозначим через $\{\theta_i\mid i\in\mathfrak{J}\}$ — разбиение единицы на $\widehat{W}$, подчиненное покрытию $\Xi$. Пусть $\widehat{\theta}_i=\widehat{\pi}_b^*\theta_i$, при этом $\widehat{\theta}_i|_{\overline{\mathcal{L}}}=\mathrm{const}\ \forall\mathcal{L}\in\mathcal{F}$. Тогда

$$g=\sum_{i\in\mathfrak{J}}\widehat{\theta}_i\widehat{h}_i$$

— риманова метрика на $\widehat{M}$, трансверсально проектируемая относительно слоения $(\widehat{M},\widehat{F})$. Таким образом, слоение $(\widehat{M},\widehat{F})$ римановo. Так как $\pi|_{\widehat{M}}\colon\widehat{M}\to M$ — изоморфизм слоений $(\widehat{M},\widehat{F})$ и $(M,F)$ в категории слоений, то $(M,F)$ также римановo слоение. □

*5.2. Леммы.*

**Лемма 2.** *Пусть $(\mathbb{R}^2,g)$ — двумерное псевдоевклидово векторное пространство. Отождествим группу его изометрий с группой Ли $O(1,1)$. Пусть $A$ — любая матрица из $O_e(1,1)$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ — ее собственные значения, $l_i$, $i=1,2$, — подпространство собственных векторов в $\mathbb{R}^2$, соответствующее собственному значению $\lambda_i$. Тогда для любого ненулевого вектора $X\in\mathbb{R}^2$ существует такой вектор $Z\in l_1\cup l_2$, что $(A^n(X)-A^n(Z))\to 0$ при $n\to\infty$.*

*Доказательство.* В $\mathbb{R}^2$ введем координаты, в которых метрика $g$ имеет канонический вид, тогда

$$A=A_t=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}t & \operatorname{sh}t\\ \operatorname{sh}t & \operatorname{ch}t\end{pmatrix}\in O_e(1,1)$$

— изометрия. Матрица $A=A_t$ имеет собственные значения $\lambda_1=e^t$ и $\lambda_2=e^{-t}$. При этом пространства собственных векторов равны

$$l_1=\left\{\begin{pmatrix}y^1\\ y^1\end{pmatrix}: y^1\in\mathbb{R}^1\right\},\quad l_2=\left\{\begin{pmatrix}y^1\\ -y^1\end{pmatrix}: y^1\in\mathbb{R}^1\right\},$$

соответственно. Пусть $X=(x^1,x^2)^T$ — произвольный вектор из $\mathbb{R}^2$.
Случай 1. $t>0$. Тогда $e^{-nt}\to 0$ при $n\to\infty$. Вычисления показывают, что

$$A^n(X)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}nt & \operatorname{sh}nt\\ \operatorname{sh}nt & \operatorname{ch}nt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{nt}(x^1+x^2)/2+e^{-nt}(x^1-x^2)/2\\ e^{nt}(x^1+x^2)/2+e^{-nt}(x^2-x^1)/2\end{pmatrix}.$$

Для собственного вектора

$$Z=\begin{pmatrix}(x^1+x^2)/2\\ (x^1+x^2)/2\end{pmatrix}\in l_1$$

выполняется равенство

$$A^n(Z)=\begin{pmatrix}e^{nt}(x^1+x^2)/2\\ e^{nt}(x^1+x^2)/2\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^n(X) - A^n(Z) = \frac{e^{-nt}}{2}\begin{pmatrix} x^1 - x^2 \\ x^2 - x^1 \end{pmatrix} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Случай 2. $t < 0$. Тогда $e^{nt} \to 0$ при $n \to \infty$. Для

$$Z = \begin{pmatrix} (x^1 - x^2)/2 \\ (x^2 - x^1)/2 \end{pmatrix} \in l_2$$

получаем

$$A^n(X) - A^n(Z) = \frac{e^{nt}}{2}\begin{pmatrix} x^1 + x^2 \\ x^1 + x^2 \end{pmatrix} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \qquad \square$$

Локальная изометрия $h$ лоренцева многообразия $(N, g^N)$ называется *несущественной*, если на $N$ найдется риманова метрика, относительно которой $h$ изометрия. В противном случае $h$ называется *существенной*. В соответствии с теоремой 8, будем рассматривать группу голономии $\Gamma(L, x)$ лоренцева слоения $(M, F)$ как группу ростков локальных диффеоморфизмов из стационарной псевдогруппы голономии $\mathcal{H}_v(M, F)$ в соответствующей точке $v \in N$.

**Определение 5.** Группа голономии $\Gamma(L, x)$ называется *существенной*, если не существует римановой метрики $g^N$ на $N$, относительно которой преобразования, порождающие стационарную псевдогруппу голономии $\mathcal{H}_v(M, F)$ в соответствующей точке $v \in N$, являются несущественными. В противном случае $\Gamma(L, x)$ называется *несущественной*

**Лемма 3.** *Пусть $(M, F)$ — полное лоренцево слоение коразмерности 2 и $L = L(x)$ — слой с существенной группой голономии. Пусть $\exp_x : T_x \to M$ — экспоненциальное отображение в точке $x$ лоренцева многообразия $(M, g)$, где $g$ — ассоциированная лоренцева метрика. Тогда на насыщении $\mathcal{N}(\exp_x \mathfrak{M}_x)$ множества $\exp_x \mathfrak{M}_x$ трансверсальная гауссова кривизна постоянна и равна $K_0 = \mathcal{K}(L)$.*

*Доказательство.* Пусть $h\colon [0, 1] \to L$ — петля в точке $x = h(0) = h(1) \in M$, порождающая существенный элемент как в ростковой группе голономии $\Gamma(L, x)$, так и в группах $D\Gamma(L, x)$ и $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$. Существует окрестность $V_0$ нуля в векторном пространстве $\mathfrak{M}_x$ такая, что сужение $\exp_x|_{V_0}\colon V_0 \to V$ — диффеоморфизм на $q$-мерное вложенное трансверсальное подмногообразие $V$ в $M$. Возьмем $V$ в качестве 2-мерного трансверсального диска в точке $x$. Обозначим через $\varphi = \varphi(h)\colon V_1 \to V_2$ локальный голономный диффеоморфизм некоторой окрестности точки $x$ $V_1 \subset V$ на, вообще говоря, другую окрестность $V_2 \subset V$ этой точки, причем $\varphi(x) = x$. В силу выбора $h$, дифференциал $\varphi_{*x}$ определяет существенную линейную изометрию псевдоевклидова пространства $(\mathfrak{M}_x, g_x)$, заданную матрицей $B$. Пусть $\lambda_1$, $\lambda_2$ — собственные значения матрицы $B$, $l_i$, $i = 1, 2,$ — подпространство собственных векторов в $\mathfrak{M}_x$, соответствующее собственному значению $\lambda_i$. Введем обозначение $\widetilde{l_i} = \exp_x l_i$.

Покажем, что функция трансверсальной кривизны постоянна на $\mathcal{N}(\widetilde{l_1} \cup \widetilde{l_2})$ и равна $K_0 = \mathcal{K}(L)$. Так как $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, то предположим, что $\lambda_1 \in (0, 1)$. Возьмем любую точку $z \in \widetilde{l_1}$, существует вектор $Z \in l_i$ такой, что $z = \exp_x Z$. Согласно [17, теорема 1], распределение $\mathfrak{M}$ ортогонально слоению $(M, F)$ и является вполне геодезическим на лоренцевом многообразии $(M, g)$. Поэтому геодезическая $\sigma(s) = \exp_x sZ$, $s \in [0, 1]$, является интегральной кривой распределения $\mathfrak{M}$. Так как $(\sigma, h^n)$ — допустимая пара путей для вгг, то существует перенос $\sigma \xrightarrow{h^n}> \sigma_n$, $\mathbb{N}$, относительно связности Эресмана $\mathfrak{M}$, причем $\sigma_n$ — геодезическая с началом в $x$ и направляющим вектором

$$Z_n = \frac{d\sigma_n(0)}{ds} = B^n(Z) = \lambda_1^n \cdot Z.$$

Так как $\lambda_1 \in (0, 1)$, то $Z_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $z_n = \sigma_n(1) \to x$ при $n \to \infty$. Из определения вгг вытекает, что все точки последовательности $\{z_n\}$ при $\mathbb{N}$ принадлежат одному слою $L(z)$, поэтому имеет место включение $L \subset \overline{L(z)}$. Отсюда, в силу непрерывности базисной функции трансверсальной гауссовой кривизны, вытекает равенство $\mathcal{K}(z) = \mathcal{K}(x) = K_0$. Таким образом, $\mathcal{K}|_{l_1} = K_0$.

Заменяя петлю $h$ на обратную петлю $h^{-1}$, мы заменяем $\varphi_{*x}$ на обратное преобразование с матрицей $B^{-1}$, при этом собственное значение $\lambda_2$ заменяется на $1/\lambda_2 \in (0,1)$. Благодаря этому, аналогично предыдущему мы доказываем, что $\mathcal{K}|_{l_2} = K_0$.

Покажем теперь, что на насыщении $\mathcal{N}(\exp_x \mathfrak{M}_x)$ функция $\mathcal{K}$ равна $K_0$. Возьмем в качестве вспомогательной метрики риманову метрику $g^M$ на $M$. Компактность $M$ гарантирует полноту римановой метрики $g^M$. Обозначим через $d$ функцию расстояния в $(M, g^M)$. По теореме Хопфа—Ринова метрическое пространство $(M, d)$ полное, причем метрическая топология совпадает с исходной топологией многообразия $M$.

Рассмотрим произвольный вектор $X \in \mathfrak{M}_x$. Согласно лемме 2, существует вектор $Z \in l_1 \cup l_2$ такой, что $(B^n X - B^n Z) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим через $\exp_x \colon T_x \to M$ экспоненциальное отображение риманова многообразия $(M, g^M)$ со связностью Леви-Чивиты. Положим $x_n = \exp_x B^n X$ и $z_n = \exp_x B^n Z$. Поскольку экспоненциальное отображение непрерывно, $d(x_n, z_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Используя изоморфность групп голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x)$ и $D\Gamma(L, x)$, так же, как и выше, мы показываем, что последовательность $\{x_n\}$ принадлежит слою $L(x)$. В силу компактности $M$, существует сходящаяся подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ последовательности $\{z_n\}$. Обозначим ее предел через $a \in M$. Тогда $x_{n_k} \to a$ при $k \to \infty$. Это влечет включения $L(a) \subset \overline{L(x)}$ и $L(a) \subset \overline{L(z)}$. Следовательно, в силу непрерывности $\mathcal{K}$ из доказанного выше соотношения $\mathcal{K}(L(z)) = K_0$, мы получаем цепочку равенств $\mathcal{K}(L(x)) = \mathcal{K}(L(a)) = \mathcal{K}(L(z)) = K_0$, что завершает доказательство леммы. □

*5.3. Доказательство теоремы* 2. Предположим, что $(M, F)$ — полное лоренцево слоение, не являющееся римановым. Тогда из доказательства теоремы 1 вытекает существование слоя с существенной группой голономии, поэтому объединение $S = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} L_\beta$ всех слоев с существенными группами голономии не пусто.

Возьмем $x_\beta \in L_\beta$. Пусть $g$ — $\mathfrak{M}$-ассоциированная лоренцева метрика относительно $(M, F)$, определенная в разделе 2.1. Будем рассматривать связность Леви–Чивита на $M$, определенную метрикой $g$, и обозначать через $\exp_x : T_x M \to M$ экспоненциальное отображение лоренцева многообразия $(M, g)$. Согласно теореме Уайтхеда (см. [8, гл. III, теорема 8.7]), в точке $x_\beta$ существует нормальная выпуклая окрестность $U$ и окрестность $U_0$ нуля в $T_x M$, для которой $\exp_x : U_0 \to U$ — диффеоморфизм. Кроме того, каждая точка $y \in U$ имеет нормальную выпуклую окрестность $U_y$, удовлетворяющую включению $U_y \supset U$. Будем называть такую окрестность $U$ *окрестностью Уайтхеда.* Пусть $V_0 = U_0 \cap \mathfrak{M}_x$ и $V = \exp_x V_0$. Поскольку метрика $g$ трансверсально проектируемая, не нарушая общности можно считать, что насыщения множеств $V$ и $U$ совпадают, т.е. $\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(U)$. Как известно (см. [26, теорема 4.10]), насыщение любого открытого подмножества открыто, поэтому $\mathcal{N}(V)$ также открыто. Будем называть $V$ нормальной выпуклой $\mathfrak{M}$-*окрестностью* точки $x_\beta$. Обозначим через $U_\beta$ объединение всех нормальных выпуклых окрестностей в точке $x_\beta$, а через $V_\beta$ — объединение всех нормальных выпуклых $\mathfrak{M}$-окрестностей в этой же точке. Так как операции насыщения и объединения подмножеств многообразия со слоением перестановочны, то $W_\beta = \mathcal{N}(V_\beta) = \mathcal{N}(U_\beta)$ — открытое подмножество в $M$. Следовательно, объединение $W = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} W_\beta$ является открытой насыщенной окрестностью подмножества $S$ в $M$.

Если $W = M$, то $\xi = \{W_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ — открытое покрытие связного многообразия $M$. Поэтому любые две точки $x$ и $y$ из $M$ можно соединить конечной цепочкой подмножеств из $\xi$, которую обозначим $W_1, \ldots, W_i, W_{i+1}, \ldots, W_{m+1}$, где $W_i \cap W_{i+1} \neq \varnothing$ для $i = 1, \ldots, m$. Из постоянства функции трансверсальной кривизны $\mathcal{K}$ на объединении $\bigcup_{i=1}^{m} W_i$ следует постоянство $\mathcal{K}$ на $M$, и теорема 2 доказана.

Предположим, что $W \neq M$, тогда граница $\partial W$ множества $W$ представляет собой непустое компактное (в силу компактности $M$) насыщенное подмножество.

В каждой точке $z \in \partial W$ существует нормальная выпуклая окрестность Уайтхеда $U_z$. Покажем, что $U_z$ не пересекает $S$. В противном случае существует $x_m \in U_z \cap S$, поэтому слой $L_\beta$, содержащий $x_m$ имеет существенную группу голономии. По свойству окрестности Уайтхеда $U_z$, существует нормальная выпуклая окрестность $U = U(x_m)$, содержащая $U_z$, следовательно, $U_z \subset W_\beta \subset W$, где $W_\beta$ — насыщенная окрестность слоя $L_\beta = L_\beta(x_m)$. Это противоречит тому, что $z \in \partial W$.

Согласно доказанному, $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{z \in \partial W} U_z$ — открытая окрестность $\partial W$, не пересекающая $S$, поэтому $M_0 = \mathcal{N}(\mathcal{U})$ — насыщенная открытая окрестность $\partial W$, не содержащая слоев с существенной группой голономии. Согласно теореме 1, индуцированное слоение $(M_0, F_0)$, где $F_0 = F|_{M_0}$, является римановым. Благодаря этому существует риманова метрика $g_0$ на $M_0$, трансверсально проектируемая относительно $(M_0, F_0)$, для которой распределение $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}|_{M_0}$ ортогонально слоям. Как известно, в этом случае $\mathfrak{M}_0$ — вполне геодезическое распределение на римановом многообразии $(M_0, g_0)$.

В каждой точке $x \in \partial W$ существует окрестность $U_x$ в слое $L = L(x)$, замыкание которой в $M$ компактно. Найдется такое число $\varepsilon_x > 0$, что трубчатая окрестность $V_x$ в $M$ подмножества $U_x$ радиуса $\varepsilon_x$, принадлежащая $M_0$ вместе с замыканием (см. [24, лемма 3.7]). В силу компактности $\partial W$ покрытие $\eta = \{V_x \mid x \in \partial W\}$ имеет конечное подпокрытие $\eta_0 = \{V_1, \ldots, V_m\}$, причем объединение $V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$ имеет компактное замыкание $\overline{V} = \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_m$ в $M$, принадлежащее $M_0$. Граница $\partial V$ множества $V$ в $M$ замкнута и, следовательно, компактна. Кроме того, $\partial V \subset M_0$.

Обозначим через $d_0$ функцию расстояния в $M_0$, индуцированную римановой метрикой $g_0$. Поскольку $\overline{V}$ компактно, то метрическое пространство $(\overline{V}, d_0|_{\overline{V}})$ — полное. Пусть $\mu = d_0(\partial V, \partial W)$, тогда $\mu > 0$ как расстояние между двумя непересекающимися компактными подмножествами метрического пространства $(M_0, d_0)$. Возьмем числа $\delta$ и $\varepsilon$, удовлетворяющие неравенствам $0 < \delta < \varepsilon < \mu$. Обозначим через $\mathcal{V}_\delta$ и $\mathcal{V}_\varepsilon$ окрестности $\partial W$ радиусов $\delta$ и $\varepsilon$, соответственно. При этом выполняются включения $\partial W \subset \mathcal{V}_\delta$, $\overline{\mathcal{V}_\delta} \subset \mathcal{V}_\varepsilon$ и $\overline{\mathcal{V}_\varepsilon} \subset \overline{V} \subset M_0$.

Покажем, что $\mathcal{V}_\delta$ — насыщенная окрестность. Пусть $y \in \mathcal{V}_\delta$, а $z$ — любая точка слоя $L(y)$. Соединим $y$ с $z$ путем $h$ в $L$. Существует горизонтальная геодезическая $\sigma$ риманова многообразия $(M_0, d_0)$, соединяющая $y$ с некоторой точкой $y_0 \in \partial W$ длины $l(\sigma) < \delta$. Пусть $\sigma \overset{h}{\to}> \widetilde{\sigma}$ — перенос горизонтальной геодезической $\sigma$ вдоль вертикального пути $h$ относительно связности Эресмана $\mathfrak{M}$. Подчеркнем, что $\widetilde{\sigma}$ — горизонтальная геодезическая в $M_0$. Тогда $y_1 = \widetilde{\sigma}(1) \in \partial W$. По свойству риманова слоения $(M_0, F_0)$, $l(\widetilde{\sigma}) = l(\sigma) < \delta$, следовательно, $d_0(z, \partial W) \leqslant l(\widetilde{\sigma}) < \delta$. Таким образом, $L(y) \subset \mathcal{V}_\delta$. Аналогично проверяется, что $\mathcal{V}_\varepsilon$ — насыщенная окрестность.

Так как $z \in \partial W$ — граничная точка множества $W$, то в любой ее окрестности есть точки из $W$, поэтому найдется $y \in \mathcal{V}_\delta \cap W$. Тогда существует слой $L_\beta$, окрестность $W_\beta$ которого содержит $L(y)$, поэтому в силу насыщенности окрестности $\mathcal{V}_\delta$ выполняется включение $L(y) \subset W_\beta \cap \mathcal{V}_\delta$.

При доказательстве леммы 3 установлено, что для $L(y) \subset W_\beta$ существуют два слоя $L \subset W_\beta$ и $L(a)$, удовлетворяющие включениям $L(a) \subset \overline{L(y)}$ и $L(a) \cup L_\beta \subset \overline{L}$. Поскольку $\overline{L(y)} \subset \overline{\mathcal{V}}_\delta \subset \mathcal{V}_\varepsilon$, первое включение влечет $L(a) \subset \mathcal{V}_\varepsilon$. Благодаря этому, из второго включения вытекает $L \cap \mathcal{V}_\varepsilon \neq \varnothing$, следовательно, $L \subset X\mathcal{V}_\varepsilon$, откуда $L_\beta \subset \overline{L} \subset \overline{X}\mathcal{V}_\varepsilon \subset \overline{V} \subset M_0$. Таким образом, мы показали, что $L_\beta \subset M_0$, что противоречит отсутствию в $M_0$ слоев с существенной группой голономии.

Итак, $\partial W = \varnothing$, поэтому функция трансверсальной гауссовой кривизны на $M$ постоянна. Это означает, что трансверсальная картанова кривизна слоения $(M, F)$ равна нулю. При этом трансверсальное двумерное многообразие $(N, g^N)$ имеет нулевую картанову кривизну и является локально однородным многообразием. Другими словами, $(N, g^N)$ есть $(G, G/H)$-многообразие, где $H = O(1, 1)$. Если гауссова кривизна $(N, g^N)$ равна нулю, то $G = H \ltimes \mathbb{R}^2$. Если гауссова кривизна $(N, g^N)$ отлична от нуля, то $G = O(2, 1)$. Таким образом, $(M, F)$ — трансверсально однородное или $(G, G/H)$-слоение. $\square$

## 6. Доказательства теорем 3—5.

*6.1. Доказательство теоремы* 3. Предположим, что $(M, F)$ — лоренцево слоение коразмерности 2, являющееся римановым, на замкнутом $n$-мерном многообразии $M$. Поскольку любое компактное риманово многообразие полное, слоение $(M, F)$ является полным римановым слоением. По теореме 2 все группы голономии конечны и либо тривиальны, либо изоморфны $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Предположим сначала, что существует компактный слой $L$ слоения $(M, F)$. Поскольку все слои слоения имеют конечные группы голономии, то компактный слой $L$ имеет конечную группу голономии, поэтому согласно теореме о глобальной стабильности компактного слоя с конечной группой голономии для полного риманова слоения (см. [30]), все слои этого слоения компактны и локально стабильны. Согласно [24, раздел 3.6] (см. также [30]) пространство слоев $M/F$ естественным образом наделяется структурой компактного гладкого двумерного орбифолда, а проекция на пространство орбит является субмерсией, т.е. выполняется условие (i).

Осталось рассмотреть слоения $(M, F)$ без компактных слоев. Предположим, что существует всюду плотный слой. Так как замыкание каждого слоя образует минимальное множество (см. [24, теорема 5.1], [7, теорема 5]), то в этом случае каждый слой этого слоения всюду плотен в $M$. Следовательно, выполняется (iii).

По свойству полного риманова слоения, замыкание слоев слоения $(M, F)$ образуют новое полное риманово слоение $(M, \overline{F})$, вообще говоря, с особенностями (см. [24, теорема 5.1]). Допустим, что $(M, F)$ не удовлетворяет (i) и (iii). Тогда $(M, F)$ не имеет ни всюду плотных слоев, ни замкнутых слоев, поэтому замыкание каждого слоя образует гладкое подмногообразие коразмерности 1. Следовательно, $(M, \overline{F})$ — риманово слоение без особенностей коразмерности 1, причем замыкание $\overline{L_\alpha}$ каждого слоя $L_\alpha$ — компактно и является минимальным множеством для $(M, F)$. Так как $(M, \overline{F})$ — риманово слоение на компактном многообразии, все слои которого компактны, то пространство его слоев — одномерный гладкий орбифолд, а проекция на пространство орбит $M/\overline{F}$ является субмерсией, поэтому выполняется утверждение (ii). $\square$

*6.2. Доказательство теоремы* 4. Пусть $(M, F)$ — полное нериманово лоренцево слоение коразмерности 2 на $n$-мерном компактном многообразии $M$. Согласно теореме 2 $(M, F)$ — трансверсально однородное или $(G, G/H)$-слоение, где $H = O(1, 1)$, а $G = H \ltimes \mathbb{R}^2$, если трансверсальная гауссова кривизна равна нулю, в противном случае $G = O(2, 1)$. Предположим, что $(M, F)$ — полное относительно двумерного трансверсального распределения $\mathfrak{M}$. Тогда согласно [7, предложение 2] $\mathfrak{M}$ — связность Эресмана для слоения $(M, F)$. Благодаря этому применима [5, теорема 2], из которой вытекает существование такого регулярного накрытия $\kappa\colon \widetilde{M} \to M$, что индуцированное слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ образовано слоями субмерсии $\mathrm{pr}\colon \widetilde{M} \to B$ на $(G, G/H)$-многообразие $B$, образующей локально тривиальное расслоение. Кроме того, определен эпиморфизм $\chi\colon \pi_1(M, x) \to \Psi$ фундаментальной группы $\pi_1(M, x)$ на счетную подгруппу $\Psi$ группы автоморфизмов $(G, G/H)$-многообразия $B$. При этом группа накрывающих преобразований накрытия $\kappa\colon \widetilde{M} \to M$ изоморфна группе $\Psi$, называемой глобальной группой голономии слоения $(M, F)$. Следовательно, $B$ — двумерное односвязное лоренцево многообразие постоянной гауссовой кривизны. Как известно (см. [3, следствие 2.25]), двумерное односвязное лоренцево многообразие диффеоморфно плоскости, поэтому $B \cong \mathbb{R}^2$. Таким образом, $\mathrm{pr}\colon \widetilde{M} \to B$ — локально тривиальное расслоение над стягиваемым многообразием $B$, поэтому существует многообразие $L_0$ такое, что $\widetilde{M} = L_0 \times B$. Из [5, теорема 2] вытекает также, что для любых $y \in M$ и $z = (v, b) \in \kappa^{-1}(y) \subset L_0 \times \mathbb{R}^2$ сужение $\kappa|_{L_0 \times \{b\}}\colon L_0 \times \{b\} \to L_\alpha$ — регулярное накрывающее отображение на соответствующий слой $L_\alpha$ слоения $(M, F)$, причем группа накрывающих преобразований этого накрытия изоморфна группе голономии $\Gamma(L_\alpha, y)$ слоя $L_\alpha$. Отсюда вытекает, что многообразие $L_0$ диффеоморфно любому слою слоения $(M, F)$ с тривиальной группой голономии. $\square$

*6.3. Доказательство теоремы* 5. Предположим, что существует замкнутая трансверсаль $\Sigma$ к слоению $(M, F)$. Пусть

$$A := \Big\{ \bigcup L_\alpha \;\Big|\; L_\alpha \cap \Sigma \neq \varnothing,\ L_\alpha \in F \Big\}.$$

Для любой точки $x \in A$ существует точка $y \in L(x) \cap \Sigma$. Так как в точке $y \in \Sigma$ подмногообразие $\Sigma$ трансверсально слоению, то существует окрестность $V_y$ точки $y$ в $\Sigma$, в каждой точке которой $\Sigma$ трансверсально слоению. Поэтому найдется расслоенная окрестность $U$ точки $y$ в $M$ такая, что любой слой, пересекающий $U$, трансверсально пересекает $\Sigma$ в окрестности $V_y$. Как известно (см. [26, теорема 4.10]), множество $\mathcal{U} := \Big\{ \bigcup L_\alpha \;\Big|\; L_\alpha \cap U \neq \varnothing,\ L_\alpha \in F \Big\}$ открыто. Следовательно, $A$ также открыто в $M$.

Каждая точка $z \in \Sigma$ принадлежит некоторому открытому подмножеству $U_i$ из $(N, g^N)$-коцикла $\xi$, задающего слоение $(M, F)$. Пусть $f_i\colon U_i \to V_i$ — субмерсия из $\xi$ и $v = f_i(z) \in V_i$. Тогда дифференциал субмерсии в выбранной точке $(f_i)_{*z}\colon T_z\Sigma \to T_vV_i$ — изоморфизм векторных пространств, он индуцирует лоренцеву метрику $g_z$ на $T_z\Sigma$. Из определения $(N, g^N)$-коцикла $\xi$ вытекает корректность определения $g_z$, т.е. независимость от выбора $U_i$. Поскольку $z$ — любая точка из $\Sigma$, то таким образом на $\Sigma$ индуцирована лоренцева метрика $g$.

Подчеркнем, что по теореме 1 трансверсальная кривизна слоения $(M, F)$ постоянна. Отсюда вытекает, что замкнутая лоренцева поверхность $\Sigma$ имеет постоянную кривизну. Известно, что эйлерова характеристика компактной лоренцевой поверхности равна нулю. Используя этот факт и формулу Гаусса—Бонне, мы получаем, что кривизна поверхности $\Sigma$ равна нулю. Это влечет равенство нулю трансверсальной кривизны слоения $(A, F|_A)$. Так как трансверсальная кривизна слоения $(M, F)$ постоянна, то она также равна нулю. $\square$

## 7. Хаос в лоренцевых слоениях коразмерности 2.

*7.1. Доказательство теоремы 6.*

**Лемма 4.** *Пусть $(M, F)$ — произвольное гладкое слоение и $p\colon \widehat{M} \to M$ — накрывающее отображение. Тогда на $\widehat{M}$ индуцируется слоение $(\widehat{M}, \widehat{F})$, а сужение $p|_{\widehat{L}}\colon \widehat{L} \to L$ на любой слой $\widehat{L}$ слоения $(\widehat{M}, \widehat{F})$ является накрывающим отображением на соответствующий слой $L$ слоения $(M, F)$.*

*Доказательство.* Пусть $y$ — любая точка из $\widehat{M}$ и $x = p(y) \in M$. В точке $x$ существует окрестность $U$, правильно накрытая отображением $p\colon \widehat{M} \to M$. Это означает, что прообраз $p^{-1}(U)$ представляет собой несвязную сумму $\bigsqcup W_k$ окрестностей в $\widehat{M}$, для которых $p|_{W_k}\colon W_k \to U_i$ — диффеоморфизм. Не нарушая общности, можно считать, что $U$ — открытое множество из коцикла $\eta = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$, задающего слоение $(M, F)$, и $f\colon U \to V$ — субмерсия из $\eta$. Тогда $p_k = f \circ p|_{W_k}\colon W_k \to V \subset N$ — субмерсия и семейство $\widehat{\eta} = \{W_k, p_k, \{\gamma_{ks}\}\}_{k,s}$ определяет слоение $(\widehat{M}, \widehat{F})$. Рассмотрим сужение $p|_{\widehat{L}}\colon \widehat{L} \to M$ на любой слой $\widehat{L}$ слоения $(\widehat{M}, \widehat{F})$. Покажем, что $X = p(\widehat{L})$ — слой слоения $(M, F)$. Будем считать, что слои наделены слоевой топологией. Тогда $p|_{\widehat{L}}\colon \widehat{L} \to X$ — локальный диффеоморфизм. Кроме того, если $y \in \widehat{L}$ и $x = p(y)$, то $x \subset L = L(x)$. При этом $X$ — открытое линейно связное подмножество слоя $L$, содержащее $x$. Пусть $x'$ — любая точка из $L$. Соединим $x$ с $x'$ путем $h\colon [0,1] \to L$ в $L$, где $x = h(0)$, $x' = h(1)$. Так как $p\colon \widehat{M} \to M$ — накрывающее отображение, существует накрывающий путь $\widehat{h}\colon [0,1] \to \widehat{M}$ для $h$ с началом в точке $y = \widehat{h}(0)$. Покрывая компакт $\widehat{h}([0,1])$ конечной цепочкой окрестностей из коцикла $\widehat{\eta}$, нетрудно заметить, что $\widehat{h}([0,1]) \subset \widehat{L}$. Отсюда вытекает, что $p|_{\widehat{L}}\colon \widehat{L} \to L$ сюръективно.

Пусть $U$ — правильно накрытая окрестность из $N$-коцикла $\eta$, причем $x \in U \cap L$. Тогда $p^{-1}(U) = \bigsqcup W_k$. Обозначим через $V$ компоненту связности пересечения $U \cap L$, содержащую $x$. Заметим, что

$$p^{-1}|_{\widehat{L}}(V) = \bigsqcup_{k,m} K_m(W_k \cap \widehat{L}),$$

где $K_m(W_k \cap \widehat{L})$ — компонента связности пересечения $W_k \cap \widehat{L}$. Следовательно, открытое множество $V \subset L$ правильно накрыто отображением $p|_{\widehat{L}}\colon \widehat{L} \to L$. Поскольку $x$ — любая точка из $L$, то отсюда следует, что $p|_{\widehat{L}}\colon \widehat{L} \to L$ — накрывающее отображение. $\square$

**Лемма 5.** *Пусть $(M, F)$ — гладкое слоение на компактном многообразии $M$ и $p\colon \widehat{M} \to M$ — накрывающее отображение. Если индуцированное слоение $(\widehat{M}, \widehat{F})$ хаотическое, то слоение $(M, F)$ также хаотическое.*

*Доказательство.* Пусть выполняются условия леммы. Так как $(\widehat{M}, \widehat{F})$ хаотическое слоение, то оно имеет всюду всюду плотный слой $L'$. Согласно лемме 4 $L = p(L')$ — слой слоения $(M, F)$. Покажем, что $L$ всюду плотный слой в $M$, т.е. $L$ пересекает любое открытое множество $V$ в $M$.

Поскольку правильно накрытые окрестности образуют базу окрестностей в любой точке из $M$, найдется правильно накрытая окрестность $U \subset V$. Благодаря непрерывности $p\colon \widehat{M} \to M$, прообраз $p^{-1}(U)$ — открытое подмножество в $\widehat{M}$. Так как $\overline{L'} = \widehat{M}$, то $L' \cap p^{-1}(U) \neq \varnothing$. Отсюда вытекает, что $L \cap U \neq \varnothing$. Таким образом, $\overline{L} = M$, следовательно, слоение $(M, F)$ транзитивно.

Так как $p\colon \widehat{M} \to M$ — конечнолистное накрывающее отображение, то в силу компактности $M$ многообразие $\widehat{M}$ также компактно. Кроме того, любой компактный слой слоения $(M, F)$ накрыт компактным слоем индуцированного слоения $(\widehat{M}, \widehat{F})$. Пусть $V$ — любое открытое подмножество в $M$. Тогда согласно условию 2 определения 3 хаотичности слоения $(\widehat{M}, \widehat{F})$, существует компактный слой $\widehat{L}_\alpha$ этого слоения, пересекающий открытое подмножество $p^{-1}(V) \subset \widehat{M}$. Так как согласно лемме 4 $L_\alpha = p(\widehat{L}_\alpha)$ — слой слоения $(M, F)$, причем он компактен, то $L_\alpha \cap V \neq \varnothing$. Это означает, что объединение компактных слоев слоения $(M, F)$ всюду плотно в $M$.

Таким образом, $(M, F)$ — хаотическое слоение. □

Докажем теперь теорему 6. Пусть $(M, F)$ — одномерное лоренцево слоение, не являющееся римановым, на замкнутом 3-многообразии $M$. Если оно не ориентируемое, то, существует двулистное накрытие, на котором индуцируется ориентируемое слоение. Поэтому далее считаем, что $(M, F)$ ориентируемое слоение, образованное орбитами некоторого потока. Пусть $\pi\colon \mathcal{R} \to M$ проекция слоеного расслоения. Мы рассматриваем компоненту связности $\mathcal{R}$, которую по-прежнему обозначаем $\mathcal{R}$. При этом $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ — поднятое слоение (см. раздел 3.1). Заметим, что $\mathcal{R}(M, H)$ — главное $H$-расслоение над $M$, где группа $H$ удовлетворяет одному из следующих трех условий:

(i) $H = O(1, 1)$, если $\mathcal{R}$ было связно;
(ii) $H = O_e(1, 1) \sqcup (-E)O_e(1, 1)$, если первоначально пространство $\mathcal{R}$ имело две компоненты связности;
(iii) $H = O_e(1, 1)$, если первоначально $\mathcal{R}$ состояло из четырех компонент.

Предположим, что выполняются случаи (i) или (ii). Так как группа Ли $H$ гладко и свободно действует на $\mathcal{R}$ и пространство орбит есть $M$, то ее компонента единицы $H_e = O_e(1, 1)$ также гладко и свободно действует на $\mathcal{R}$. Обозначим через $\widetilde{M}$ многообразие орбит $\mathcal{R}/O_e(1, 1)$, а через $\widetilde{\pi}\colon \mathcal{R} \to \widetilde{M}$ — фактороотображение. При этом определено регулярное накрывающее отображение $\mu\colon \widetilde{M} \to M$, удовлетворяющее коммутативной диаграмме (1).

Накрывающее отображение $\mu\colon \widetilde{M} \to M$ индуцирует слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$. Согласно [12, теорема 4.1] индуцированное слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ образовано орбитами аносовского потока $\varphi^t$, гладко эквивалентного алгебраическому аносовскому потоку $\varphi_t$.

Напомним, что любое лоренцево слоение допускает инвариантную трансверсальную меру, индуцированную трансверсальной лоренцевой метрикой. Следовательно, аносовский поток $\varphi_t$ обладает интегральным инвариантом в смысле [1], поэтому, согласно [1, теоремы 3-4], поток $\varphi_t$ на замкнутом 3-многообразии $M$ имеет всюду плотную орбиту, и множество, образованное компактными орбитами, всюду плотно в $M$, т.е. он хаотичен. Таким образом, слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ хаотичное. Поскольку накрытие $\mu\colon \widetilde{M} \to M$ конечнолистно, то из леммы 5 вытекает хаотичность слоения $(M, F)$. □

*7.2. Доказательство теоремы* 7. Предположим, что полное лоренцево слоение $(M, F)$ коразмерности 2 на $n$-мерном компактном многообразии является хаотическим, т.е. выполняется условие (1). Покажем, что его структурная алгебра Ли равна нулю. Сохраним обозначения предыдущего раздела. Пусть, как и выше, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп Ли $G$ и $H$, соответственно. Обозначим через $M_1$ объединение компактных слоев слоения $(M, F)$. По определению хаотического слоения, $\overline{M_1} = M$. Возьмем любое $x \in M_1$ и $u \in \pi^{-1}(x) \subset \mathcal{R}$. Обозначим через $Z_U \in l(U, \mathcal{F}_U)$ локальное трансверсальное коммутирующее векторное поле в окрестности $U \subset \mathcal{R}$, а через $Z_u$ — его значение в точке $u \in U$. Так как $L = L(x) \subset M_1$ — компактный слой, то в силу непрерывности $\pi\colon \mathcal{R} \to M$ прообраз $\pi^{-1}(L)$ — замкнутое подмножество в $\mathcal{R}$. Следовательно, для любого слоя $\mathcal{L}$ поднятого слоения, лежащего над $L$, замыкание $\overline{\mathcal{L}}$ также принадлежит $\pi^{-1}(L)$. Согласно [24, лемма 4.7] $Z_u \in T_u\overline{\mathcal{L}}$. Пусть $\mathcal{T}$ — распределение, касательное к слоям проекции $\pi\colon \mathcal{R} \to M$. Так как

$T_u\overline{\mathcal{L}} \subset T_u\mathcal{F}\oplus\mathcal{T}_u$, то $Z_u \in T_u\mathcal{F}\oplus\mathcal{T}_u$. Поскольку $Z_u \in l(U, \mathcal{F}_U) \subset \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(U)$, то $Z_u \in (T_u\mathcal{F}\oplus\mathcal{T}_u)\cap\widetilde{\mathfrak{M}}_u = \mathcal{T}_u$. Условие $\overline{M_1} = M$ означает, что $\{u \in U \mid Z_u \in \mathcal{T}_u\}$ всюду плотно в $U$. В силу непрерывности векторного поля $Z_U$ необходимо, чтобы $Z_U \in \mathfrak{X}_{\mathcal{T}}(U)$. Следовательно, $\omega_u(Z_u) \in \mathfrak{h}$. Из свойств $\mathfrak{g}$-значной 1-формы $\omega$ вытекает, что

$$\omega[X, Z] = [\omega(Z), \omega(X)]_{\mathfrak{g}} \quad \forall Z \in \mathfrak{X}_{\mathcal{T}}(U),\ \forall X \in \mathfrak{X}(U). \tag{3}$$

Отсюда, учитывая, что $Z_U$ — коммутирующее векторное поле, для любой точки $u \in U$ мы получаем

$$\omega[X_u, Z_u] = [\omega(X_u), \omega(Z_u)]_{\mathfrak{g}} = 0 \tag{4}$$

для любых $X \in l(U, \mathcal{F}_U)$ и, следовательно, для любых элементов $\omega(X_u) \in \mathfrak{g}$. Выполнение (4) эквивалентно тому, что $\mathfrak{o}(1,1)$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Поскольку подалгебра $\mathfrak{o}(1,1)$ не является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ни для группы $G = O(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$, ни для группы $G = O(2,1)$, то $Z_u = 0$ и алгебра Ли $C_u(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ равна нулю. Следовательно, равна нулю и противоположная ей алгебра $\mathfrak{g}_0$. Таким образом, структурная алгебра Ли слоений $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ и $(M, F)$ равна нулю. Это означает, что слоение Ли $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ простое и образовано слоями субмерсии $\pi_b\colon \mathcal{R} \to W$ на параллелизуемое многообразие $W$, а на $W$ индуцировано локально свободное действие $\Phi^W$ группы Ли $H$ (см. [7, предложение 4]) по формуле

$$\Phi^W\colon W \times H \to W\colon (w, a) \mapsto \pi_b(R_a(u))\ \forall (w, a) \in W \times H, \quad u \in \pi_b^{-1}(w).$$

Компоненты связности орбит этого действия образуют регулярное слоение на $W$. Известно (см. [7, предложение 4]), что на $W$ индуцирована невырожденная $\mathfrak{g}$-значная 1-форма $\beta$ такая, что $\pi_b^*\beta = \omega$, где $\omega$ обладает свойствами, указанными во введении в разделе 1.3. Пусть $\{E_i,\ i = 1, 2, 3\}$ — базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда векторные поля $X_i$, $\beta(X_i|_w) = E_i$, образуют параллелизацию многообразия $W$. Согласно теореме 2 слоение $(M, F)$ трансверсально однородное, т.е. его трансверсальная картанова кривизна равна нулю (см. [14]). Отсюда следует, что скобка Ли $[X_i, X_j]$ векторных полей на многообразии $M$ удовлетворяет равенству

$$\beta([X_i, X_j]) = [\beta(X_i), \beta(X_j)]_{\mathfrak{g}} = C_{ij}^k\beta(X_j),$$

где $C_{ij}^k$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, следовательно, $W$ — локально симметрическое многообразие.

Наблюдение показывает, что пространство слоев $M/F$ слоения $(M, F)$ совпадает с пространством орбит $W/H$ индуцированного действия $\Phi^W$ группы Ли $H$ на $W$. Используя тот факт, что субмерсия $\pi_b\colon \mathcal{R} \to W$ и проекции $r\colon M \to M/F$ и $r_b\colon W \to W/H$ — непрерывные и открытые отображения, покажем, что хаотичность слоения $(M, F)$ эквивалентна хаотичности действия $\Phi^W$ группы $H$ на $W$. Пусть $V$ — любое открытое подмножество в $W$. Тогда $U = \pi(\pi_b^{-1}(V))$ — открытое множество в $M$. В силу хаотичности $(M, F)$ существует компактный, следовательно, замкнутый слой $L_\alpha$, пересекающий $U$. В этом случае $\pi_b(\pi^{-1}(L_\alpha))$ — замкнутая орбита группы $H$, пересекающая $V$. Таким образом, объединение замкнутых орбит группы $H$ всюду плотно в $W$. По определению хаотичности $(M, F)$, существует всюду плотный слой $L$. Подчеркнем, что $\overline{L} = M$ тогда и только тогда, когда $L$ пересекает любое открытое подмножество $M$. Используя это, нетрудно показать, что $\pi_b(\pi^{-1}(L))$ — замкнутая всюду плотная орбита индуцированного действия $\Phi^W$ группы $H$ на $W$. Аналогично доказывается, что хаотичность действия $\Phi^W$ влечет хаотичность слоения $(M, F)$. Таким образом, (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

Предположим, что полное лоренцево слоение $(M, F)$ коразмерности 2 на $n$-мерном многообразии $M$ удовлетворяет условию (i). Как доказано выше, структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$ равна нулю. По теореме 4 для $(M, F)$ существует регулярное накрытие $\kappa\colon \widetilde{M} \to M$ такое, что $\widetilde{M} = L_0 \times B$ и $(M, F)$ накрыто тривиальным расслоением $\mathrm{pr}\colon \widetilde{M} = L_0 \times B \to B$, причем на $B$ индуцирована лоренцева метрика постоянной гауссовой кривизны, и глобальная группа голономии $\Psi$ — подгруппа группы Ли $\mathfrak{Iso}(B)$. Кроме того, существует эпиморфизм групп

$$\chi\colon \pi_1(M, x) \to \Psi.$$

Так как фундаментальная группа любого компактного многообразия является конечнопорожденной, то отсюда вытекает, что $\Psi$ также имеет конечное число образующих.

Так как алгебра Ли подгруппы Ли $\overline{\Psi}$, равной замыканию группы $\Psi$ в $\mathfrak{Iso}(B)$, изоморфна $\mathfrak{g}_0$, то она равна нулю, поэтому $\Psi$ — дискретная подгруппа в $\mathfrak{Iso}(B)$. Обозначим через $s\colon B \to B/\Psi$ проекцию на пространство слоев. Мы замечаем, что $M/F = B/\Psi$, причем из определения индуцированного действия группы $\Psi$ на $B$ вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[d, "\kappa"'] & B \arrow[d, "s"] \\ M \arrow[r, "r"'] & M/F = B/\Psi \end{tikzcd}$$

где отображения pr, $s$, $\kappa$, $r$ непрерывны и открыты. Используя это, аналогично предыдущему мы доказываем, что (i) $\Longleftrightarrow$ (iii). $\square$

**8. Примеры.** Напомним конструкцию надстройки над гомоморфизмом групп, широко используемую в теории слоений для построения примеров. Пусть $B$ и $T$ — гладкие связные многообразия, $G = \pi_1(B, b)$ и $\rho\colon G \to Diff(T)$ — гомоморфизм групп. Положим $\Phi = \rho(G)$. Пусть $\widehat{p}\colon \widehat{B} \to B$ универсальное накрывающее отображение. Зададим правое действие группы $G$ на произведении многообразий $\widehat{B} \times T$:

$$\Theta\colon \widehat{B} \times T \times G \to \widehat{B} \times T\colon (x, t, g) \to (x \cdot g, \rho(g^{-1})(t)),$$

где $\widehat{B} \to \widehat{B}\colon x \to x \cdot g$ — накрывающее преобразование, индуцированное элементом $g \in G$.

Отображение $p\colon M = (\widehat{B} \times T)/G \to B = \widehat{B}/G$ определяет локально тривиальное расслоение над $B$ со стандартным слоем $T$, ассоциированное с главным расслоением $\widehat{p}\colon \widehat{B} \to B$ со структурной группой $G$. Пусть $\Theta_g = \Theta|_{\widehat{B} \times \{t\} \times \{g\}}$. Так как при любом фиксированном $t \in T$ выполняется равенство $\Theta_g(\widehat{B} \times \{t\}) = \widehat{B} \times \rho(g^{-1})(t)$, то действие дискретной группы $G$ сохраняет тривиальное слоение $\widehat{F} = \{\widehat{B} \times \{t\} \mid t \in T\}$ произведения $\widehat{B} \times T$. Поэтому факторотображение $f_0\colon \widehat{B} \times T \to (\widehat{B} \times T)/G = M$ индуцирует гладкое слоение $(M, F)$, слои которого трансверсальны слоям расслоения $p\colon M \to B$. Пара $(M, F)$ называется *надстроечным слоением* и обозначается через $Sus(T, B, \rho)$. Расслоение $p\colon M \to B$ называется трансверсальным, а $T$ — трансверсальным многообразием. Группа диффеоморфизмов $\Phi = \rho(G)$ многообразия $T$ называется *структурной группой* надстроечного слоения $(M, \mathcal{F})$.

**Пример 1.** Как известно, дискретная подгруппа $\Gamma$ группы Ли $G$ называется кокомпактной решеткой, если пространство орбит $G/\Gamma$ является компактным многообразием. Напомним, что матрица $A$ называется унипотентной, если $(A - E)^n = 0$ для некоторого натурального $n$. Как известно (см. [9, гл. IV], [21]), в простой группе Ли $G = SL(2, \mathbb{R})$ существует кокомпактная решетка $\Gamma$, не содержащая унипотентных элементов, отличных от единичной матрицы $E$.

Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы $G$. Пусть $x$ — любой элемент из $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}_x\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_x(z) = [x, z]$ $\forall z \in \mathfrak{g}$. Как известно, на простой алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ определена невырожденная форма Киллинга $B$, где $B(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}$. При этом на группе $G$ определено биинвариантное поле форм, в единице совпадающее с $B$. Это поле индуцирует псевдориманову метрику $g^T$ на многообразии орбит $T = G/\Gamma$. Поскольку $\dim T = \dim G = 3$, то эта метрика лоренцева. Группа $G$ действует на однородном пространстве $T$ левыми сдвигами, причем $g^T$ инвариантна относительно этого действия, следовательно, $G$ можно рассматривать как группу изометрий лоренцева многообразия $(T, g^T)$.

Положим

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда группа $\Phi = \langle \varphi \rangle$, порожденная матрицей $\varphi$, является унипотентной подгруппой группы $G$, следовательно, $\Phi \cap \Gamma = \{E\}$. Покажем, что подгруппа $\Phi$ действует свободно на $T = G/\Gamma$. Обозначим через $f\colon G \to T$ факторотображение. Стационарная подгруппа группы $G$ в произвольной точке $v = f(h\Gamma)$, $h \in G$, равна подгруппе $G_v = h\Gamma h^{-1}$, сопряженной с $\Gamma$ и, следовательно, $G_v$ не содержит унипотентных элементов, отличных от единичного. Так как группа $\Phi \cong \mathbb{Z}$ абелева, то стационарная подгруппа $\Phi_v$ равна $\Phi$, поэтому $\Phi_v$ унипотентна. Следовательно, $G_v \cap \Phi_v = \{E\}$. Это означает, что группа $\Phi$ изометрий лоренцева многообразия $(T, g^T)$ действует на $T$ свободно.

Рассмотрим надстроечное слоение $(M, F) = Sus(T, \mathbb{S}^1, \rho)$, где изоморфизм групп

$$\rho\colon \pi_1(\mathbb{S}^1, b) \to \Phi$$

задан на образующей $\alpha$ группы $\pi_1(\mathbb{S}^1, b) \cong \mathbb{Z}$ равенством $\rho(\alpha) = \varphi$. По свойству надстроечного слоения, определено локально тривиальное расслоение с проекцией $p\colon M \to B = \mathbb{S}^1$ и компактным стандартным слоем $T$, поэтому многообразие $M$ компактно. Согласно [16] любое компактное лоренцево многообразие полно. Следовательно, любая ассоциированная лоренцева метрика на $M$ полная, отсюда вытекает полнота лоренцева слоения $(M, F)$. Благодаря свободному действию группы $\Phi$ на $T$, все группы голономии этого слоения тривиальны. Предположим, что слоение $(M, F)$ — риманово. Тогда на $T$ существует риманова метрика $d$, относительно которой группа $\Phi$ является группой изометрий. Предположим, что $\Phi$ не замкнута в группе Ли $\mathfrak{Iso}(T, d)$ всех изометрий риманова многообразия $(T, d)$. Тогда замыкание $\overline{\Phi}$ — тор в $\mathfrak{Iso}(T, d)$. Как известно (см. [19]), топология как в $\mathfrak{Iso}(T, d)$, так и в группе изометрий $\mathfrak{Iso}(T, g^T)$ совпадает с компактно-открытой, причем обе эти группы замкнуты в группе гомеоморфизмов $Homeo(T)$ многообразия $T$. Поэтому включение $\Phi \subset \mathfrak{Iso}(T, d) \cap \mathfrak{Iso}(T, g^T)$ влечет включение $\overline{\Phi} \subset \mathfrak{Iso}(T, d) \cap \mathfrak{Iso}(T, g^T)$. Так как $G \subset \mathfrak{Iso}(T, g^T)$ и является связной простой группой с конечным центром, то $G$ замкнута в $\mathfrak{Iso}(T, g^T)$ (см. [21, лемма 2.1]), поэтому дискретная и, следовательно, замкнутая подгруппа $\Phi$ группы $G$, является замкнутой подгруппой в $\mathfrak{Iso}(T, g^T)$. Откуда $\overline{\Phi} = \Phi$ и в компактной группе изометрий $\mathfrak{Iso}(T, d)$. В этом случае замкнутая дискретная подгруппа $\Phi$ должна быть конечной, что противоречит определению $\Phi$. Следовательно, не существует римановой метрики на $T$, относительно которой $\Phi$ — группа изометрий, поэтому нет аналога теоремы 1 для лоренцевых слоений коразмерности $q \geqslant 3$.

Так как группа $\Phi$ дискретна, то структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ слоения $(M, F)$ равна нулю.

Из теоремы Бэра о полном метрическом пространстве вытекает дискретность любой замкнутой орбиты произвольной счетной группы на таком пространстве. Поэтому группа $\Phi$ не имеет замкнутых орбит на компактном многообразии $T$. В противном случае, в силу компактности $T$, замкнутая дискретная орбита является конечной, что противоречит свободному действию бесконечной группы $\Phi$. Следовательно, слоение $(M, F)$ не имеет замкнутых слоев, поэтому не является хаотическим.

Таким образом, $(M, F)$ — полное лоренцево слоение коразмерности 3 на 4-мерном компактном лоренцевом многообразии, не являющееся ни римановы, ни хаотическим. Это доказывает уникальность теоремы 6, выполняющейся для полных лоренцевых слоений коразмерности 2 3-мерных компактных многообразиях.

**Пример 2.** Рассмотрим двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ и стандартный базис

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

касательного векторного пространства $T_x\mathbb{T}^2$, $x \in \mathbb{T}^2$. Через $k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ обозначим фактороотображение, являющееся универсальным накрытием тора. Пусть $g$ — лоренцева метрика на торе $\mathbb{T}^2$, которая в стандартном базисе задана матрицей

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аносовский автоморфизм тора $\mathbb{T}^2$, заданный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

обозначим через $f_A$. Нетрудно проверить, что $f_A$ — изометрия лоренцева тора $(\mathbb{T}^2, g)$. Определим гомоморфизм групп $\rho\colon \pi_1(\mathbb{S}^1, b) \to \mathfrak{Iso}(\mathbb{T}^2)$, положив $\rho(\alpha) = f_A$, где $\alpha$ — образующая группы

$\pi_1(\mathbb{S}^1, b)$. Тогда определено надстроечное слоение $(M, F) = Sus(\mathbb{T}^2, \mathbb{S}^1, \rho)$ на компактном 3-многообразии $M$. Так как $\Phi = \langle f_A \rangle$ — группа изометрий лоренцева тора $(\mathbb{T}^2, g)$, имеющая хаотическое поведение, то $(M, F)$ — хаотическое лоренцево слоение. Поскольку группа $\Phi$ — существенная, слоение не риманово. Так как группа $\Phi$ дискретна, то структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(M, F)$ равна нулю.

**Пример 3.** Пусть $\mathbb{S}^2_2$ — сфера с двумя ручками, или крендель. Как известно, фундаментальная группа $\mathbb{S}^2_2$ может быть записана в виде

$$\pi_1(\mathbb{S}^2_2, b) = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \rangle.$$

Используем обозначения, введенные в примере 2. Факторотображение $k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ является универсальным накрывающим отображением. Пусть $\psi$ — сдвиг плоскости $\mathbb{R}^2$ на вектор $\bar{a} = (\sqrt{2}; 0)^T$. Обозначим через $\varphi$ преобразование тора $\mathbb{T}^2$, индуцированное $\psi$. Определим гомоморфизм групп

$$\rho\colon \pi_1(\mathbb{S}^1, b) \to \mathfrak{Iso}(\mathbb{T}^2, g),$$

задав его на образующих. Положим $\rho(a_1) = f_A$, $\rho(a_2) = \varphi$ и $\rho(b_i) = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^2}$ — тождественное отображение тора $\mathbb{T}^2$ при $i = 1, 2$. Тогда определено надстроечное слоение $(M, F) = Sus(\mathbb{T}^2, \mathbb{S}^2_2, \rho)$ на 4-мерном компактном многообразии $M$, которое является полным лоренцевым слоение коразмерности 2. Так как замыкание $\overline{\Phi}$ подгруппы $\Phi = \rho(G)$ в группе Ли $\mathfrak{Iso}(\mathbb{T}^2, g)$ одномерно, то структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(M, F)$ также одномерна. Отметим, что слоение $(M, F)$ транзитивно, но не каждый слой $M$ всюду плотен в $M$.

Слоение $(M, F)$ не имеет замкнутых слоев, поэтому нехаотическое. Так как подгруппа $\langle f_A \rangle$ имеет всюду плотную орбиту, то существует всюду плотная орбита группы $\Phi$. Этой орбите соответствует всюду плотный слой слоения $(M, F)$, т.е. это слоение транзитивно. Из [24] вытекает, что риманово слоение на компактном многообразии транзитивно тогда и только тогда, когда каждый его слой всюду плотен в $M$, т.е. когда $M$ — минимальное множество. Таким образом, слоение $(M, F)$ не риманово.

**Пример 4.** Сохраним обозначения из примеров 2—3. Пусть $B$ — гладкое компактное 3-многообразие, гомеоморфное связной сумме $\#_{i=1}^3 (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)_i$ трех экземпляров произведения $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ окружности и двумерной стандартной сферы. Фундаментальная группа $G = \pi_1(B, b) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ есть свободная группа ранга 3.

Пусть $\vartheta$ — сдвиг плоскости на вектор $\bar{c} = (0; \sqrt{3})^T$. Обозначим через $\theta$ преобразование тора $\mathbb{T}^2$, индуцированное $\vartheta$. Зададим гомоморфизм групп $\rho\colon \pi_1(B, b) \to \mathfrak{Iso}(\mathbb{T}^2, g)$ равенствами $\rho(\alpha_1) = f_A$, $\rho(\alpha_2) = \varphi$, $\rho(\alpha_2) = \theta$. Тогда определено надстроечное слоение $(M, F) = Sus(\mathbb{T}^2, \mathbb{S}^2_2, \rho)$ на 5-мерном компактном многообразии $M$, которое является полным лоренцевым слоением коразмерности 2. Каждый слой слоения $(M, F)$ всюду плотен в $M$, поэтому слоение нехаотическое. Так как замыкание $\overline{\Phi}$ подгруппы $\Phi = \rho(G)$ в группе Ли $\mathfrak{Iso}(\mathbb{T}^2, g)$ двумерное, то структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(M, F)$ также двумерная. Поскольку $f_A$ имеет неподвижную точку, существует стационарная подгруппа $\Phi_z$ группы изометрий $\mathfrak{Iso}(\mathbb{T}^2, g)$, содержащая $f_A$. Следовательно, группа $\Phi$ существенная, поэтому слоение $(M, F)$ не является римановым.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1967. — *90.* — С. 3–210.
2. *Багаев А. В., Жукова Н. И.* Трансверсально аналитические лоренцевы слоения коразмерности два// Изв. вузов. Поволж. рег. Физ.-мат. науки. — 2017. — *44*, № 4. — С. 35–47.
3. *Бим Дж., Эрлих П.* Глобальная лоренцева геометрия. — М.: Мир, 1985.
4. *Жукова Н. И.* Аттракторы и аналог гипотезы Лихнеровича для конформных слоений// Сиб. мат. ж. — 2011. — *52*, № 3. — С. 436–450.
5. *Жукова Н. И.* Глобальные аттракторы конформных слоений// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 3. — С. 79–106.
6. *Жукова Н. И.* Аттракторы слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один// Мат. заметки. — 2013. — *93*, № 5-6. — С. 436–450.

7. *Жукова Н. И.* Минимальные множества картановых слоений// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2007. — *256*, № 1. — С. 115–147.
8. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. I. — М.: Наука, 1981.
9. *Рагунатан М.* Дискретные подгруппы групп Ли. — М.: Мир, 1977.
10. *Beguin F., Bonatti C., Yu B.* Building Anosov flows on 3-manifolds// Geom. Topol. — 2017. — *21*, № 3. — P. 1837–1930.
11. *Blumenthal R. A., Hebda J. J.* Ehresmann connections for foliations// Indiana Univ. Math. J. — 1984. — *33*, № 4. — P. 597–611.
12. *Boubel C., Mounoud P., Tarquini C.* Lorentzian foliations on 3-manifolds// Ergodic Theory Dynam. Syst. — 2006. — *26*, № 5. — P. 1339–1362.
13. *Cairns G., Davis G., Elton D., Kolganova A., Perversi P.* Chaotic group actions// L'Ens. Math. — 1995. — *41*. — P. 123–133.
14. *Cap A., Slovak J.* Parabolic Geometries. I. Background and General Theory. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2009.
15. *Frances C., Melnick K.* Topology of automorphism groups of parabolic geometries// Geom. Topol. — 2019. — *23*, № 1. — P. 135–169.
16. *Carrière Y.* Author de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines// Invent. Math. — 1989. — *95*, № 3. — P. 615–628.
17. *Dolgonosova A. Yu., Zhukova N. I.* Pseudo-Riemannian foliations and their graphs// Lobachevskii J. Math. — 2018. — *39*, № 1. — P. 54–64.
18. *Epstein D. B. A., Millett K. C., Tischler D.* Leaves without holonomy// J. London Math. Soc. — 1977. — *16*, № 3. — P. 548–552.
19. *Frances C., Melnick K.* Topology of automorphism groups of parabolic geometries// Geom. Topol. — 2019. — *23*, № 1. — P. 135–169.
20. *Frances C., Tarquini C.* Autour du théorème de Ferrand–Obata// Ann. Global Anal. Geom. — 2007. — *21*, № 1. — P. 51–62.
21. *Gutschera K. R.* Invariant metrics for groups of conformal transformations, 1993.
22. *Haefliger A. Leaf closures in Riemannian foliations* in: A fête of topology. — Boston: Academic Press, 1988. — P. 3–32.
23. *Hobill D., Burd A., Coley A.* Deterministic chaos in general relativity. — New York: Springer, 1994.
24. *Molino P.* Riemannian foliations. — Boston: Birkhäuser, 1988.
25. *O'Neil B.* Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. — New York–London: Academic Press, 1983.
26. *Tamura I.* Topology of foliations: An introduction. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1992.
27. *Tarquini C.* Feuilletages conformes// Ann. Inst. Fourier. — 2004. — *52*, № 2. — P. 453–480.
28. *Tondeur P.* Geometry of foliations. — Basel: Birkhäuser, 1997.
29. *Wolak R. A.* Leaves of foliations with a transverse geometric structures of finite type// Publ. Math. — 1989. — *33*, № 1. — P. 153–162.
30. *Zhukova N. I.* Local and global stability of compact leaves and foliations// Ж. мат. физ. анал. геом. — 2013. — *9*, № 3. — С. 400–420.
31. *Zhukova N. I.* Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms// Вестн. РУДН. Сер. Мат. Физ. Информ. — 2009. — *2*. — С. 14–35.

Жукова Нина Ивановна
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород
E-mail: `nzhukova@hse.ru`

Чебочко Наталья Георгиевна
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород
E-mail: `nchebochko@hse.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 203 (2021). С. 39–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-203-39-49

УДК 517.929

# О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СЦЕНАРИЯ ЛАНДАУ—ХОПФА ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ «МУЛЬТИПЛИКАТОР-АКСЕЛЕРАТОР»

© 2021 г. **А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ**

Аннотация. Рассматриваются две краевые задачи для модели мультипликатор-акселератор с учетом пространственных эффектов. В работе показано, что при соответствующем выборе управляющего параметра в обоих краевых задачах возникают инвариантные торы возрастающих размерностей и при этом устойчивым является инвариантный тор наибольшей размерности. Обоснование результатов базируется на таких методах теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством, как метод интегральных многообразий и метод нормальных форм Пуанкаре, а также план Ф. Такенса реализации сценария Ландау—Хопфа как каскада бифуркаций Андронова—Хопфа. Для решений, принадлежащих инвариантным торам, получены асимптотические формулы.

***Ключевые слова***: сценарий Ландау—Хопфа, устойчивый инвариантный тор, каскад бифуркаций, нормальная форма, мультипликатор-акселератор, краевая задача.

# ON THE POSSIBILITY OF IMPLEMENTING THE LANDAU–HOPF SCENARIO OF TRANSITION TO TURBULENCE IN THE GENERALIZED MODEL “MULTIPLIER-ACCELERATOR”

© 2021 **A. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV**

Abstract. In this paper, we consider two boundary-value problems for the multiplier-accelerator model taking into account spatial effects. We show that, under an appropriate choice of the control parameter, invariant tori of increasing dimensions arise in both boundary-value problems and the invariant torus of the highest dimension is stable. Our results are based on such methods of the theory of dynamical systems with infinite-dimensional phase spaces as the method of integral manifolds, the Poincaré method of normal forms, and F. Takens' plan for implementing the Landau—Hopf scenario as a cascade of Andronov—Hopf bifurcations. For solutions that belong to invariant tori, we obtain asymptotic formulas.

***Keywords and phrases***: Landau–Hopf scenario, stable invariant torus, cascade of bifurcations, normal form, multiplier-accelerator, boundary-value problem.

***AMS Subject Classification***: 35L10, 35L30, 37N40

**1. Введение.** Рассматриваемая в работе математическая модель основана на идеях, изложенных в монографиях [17,19] и представляет собой обобщенную модель макроэкономики, известную под названием мультипликатор-акселератор. По сравнению с классическим ее вариантом в ней

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00672).

 

учтены пространственные эффекты. Фиксируем некоторый экономический регион, представляющий собой ограниченную область $D \subset \mathbb{R}^p$ $(p = 1, 2)$ с кусочно-гладкой границей $\partial D$. Считаем, что $x = (x_1, x_2)$ при $p = 2$ или $x = x_1$ в случае $p = 1$.

Пусть сначала $p = 2$. Обозначим далее через $Y = Y(t, x)$, $I = I(t, x)$ и $G = G(t, x)$, $x \in D$, соответственно национальный доход, индуцированные инвестиции и активное торговое сальдо. Скорости изменения этих величин определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} Y_t = I - aY + G + d_1 \Delta Y, \\ I_t = bY_t + G - I + F, \\ G_t = d_2 \Delta Y - G. \end{cases}$$

Здесь

$$Y_t = \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad \Delta Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}$$

в случае двух переменных и $\Delta Y = Y_{xx}$ в одномерном случае,

$$I_t = \frac{\partial I}{\partial t}, \quad G_t = \frac{\partial G}{\partial t},$$

$a$, $b$, $d_1$, $d_2$ — положительные постоянные. Наконец,

$$F = F(Y) = -cY \iint\limits_D Y_t Y \, dx_1 dx_2, \quad c > 0.$$

В [2, 3] изучался иной вариант модели мультипликатор-акселератор с учетом пространственного взаимодействия. В принципе, изучалась та же система дифференциальных уравнений, но с иным выбором нелинейного слагаемого $F(Y)$. В работе [3] был рассмотрен вариант, когда

$$F(Y) = -cY_t^3.$$

При таком выборе нелинейного слагаемого сценарий Ландау—Хопфа не удается реализовать. В краевой задаче

$$u_{tt} + \varepsilon(1 - \nu u_{txx}) + u - \sigma^2 u_{xx} = -\varepsilon u_t^3, \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$$

все инвариантные торы размерности $\geqslant 2$ неустойчивы (см. [3]). Устойчивыми могут быть лишь циклы.

Для удобства анализа предложенной в качестве математической модели в системе дифференциальных уравнений целесообразно исключить $I(t, x)$ и $G(t, x)$. В результате получим уравнение с частными производными для определения $Y$

$$Y_{tt} + (a + 1 - b)Y_t + aY - d_1 \Delta Y_t - (d_1 + d_2)\Delta Y = -cY \iint\limits_D Y Y_t dx_1 dx_2,$$

если $Y = Y(t, x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in D$. Аналогичное уравнение в случае одной пространственной переменной $x = x_1$ приобретает следующий вид

$$Y_{tt} + (a + 1 - b)Y_t + aY - d_1 Y_{txx} - (d_1 + d_2)Y_{xx} = -cY \int\limits_0^l Y Y_t dx,$$

где $x \in [0, l]$, а $Y = Y(t, x)$.

В рамках данной работы ограничимся вторым более простым вариантом такого уравнения. Нормировка пространственной переменной $x$, функции $Y$ и предположение о малости коэффициентов $a+1-b$, $d_1$ позволяет переписать последнее уравнение в более удобном для дальнейшего анализа виде

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u - \varepsilon \nu u_{txx} - \sigma^2 u_{xx} = -\varepsilon u \int\limits_0^\pi u_t u \, dx, \tag{1}$$

где $u = u(t,x)$ — нормированный национальный доход, а $x \in [0,\pi]$, $\nu$, $\sigma$ — положительные постоянные. Наконец, будем считать, что $\varepsilon$ — малый неотрицательный (положительный) параметр. Уравнение (1) следует дополнить какими-либо содержательными краевыми условиями. В рамках данной работы ограничимся двумя видами таких условий:

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \tag{3}$$

и изучим, соответственно, две краевые задачи (1), (2) и (1), (3). Далее будет показано, что в обеих краевых задачах может быть реализован сценарий Ландау—Хопфа перехода к турбулентности. Отметим, что, конечно, краевые условия (2), (3) могут быть заменены на иные. Например, уравнение (1) можно рассмотреть вместе с краевыми условиями

$$u(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \quad \text{или} \quad u_x(t,0) = u(t,\pi) = 0.$$

В [6, 7, 11, 12] был предложен сценарий перехода к турбулентности как каскада бифуркаций инвариантных торов, при реализации которого появляются торы возрастающей размерности и устойчивым будет тор наибольшей размерности из возможных. Такой каскад осуществляется за счет изменения (увеличения или уменьшения) управляющего параметра. В гидродинамике это число Рейнольдса, увеличение величины которого согласно сценарию должно приводить к появлению торов возрастающей размерности. В [11] Ф. Такенс предложил план реализации такого сценария как каскада бифуркаций Андронова—Хопфа. Вскоре эти идеи были подвергнуты критике, и в том числе со стороны Ф. Такенса и Д. Рюэля (см. [11]) в связи с практической трудностью реализации такого плана при анализе бесконечномерных динамических систем эволюционных дифференциальных уравнений с частными производными.

В первой части работы более детально рассмотрим краевую задачу (1), (2). Конечно, краевая задача (1), (3) имеет определенные отличия, но методика ее анализа не изменяется существенным образом.

Сделаем два замечания. Если краевую задачу (1), (2) дополнить начальным условием

$$u(0,x) = f(x), \quad f(x) \in W^2_{2,D}[0,\pi],$$

то соответствующая смешанная (начально-краевая) задача будет локально корректно разрешима [8]. Через $W^2_{2,D}[0,\pi]$ обозначено линейное подпространство, состоящее из тех функций $f(x) \in W^2_2[0,\pi]$, для которых выполнены краевые условия $f(0) = f(\pi) = 0$. Наконец, $W^2_2[0,\pi]$ — пространство Соболева [9]. Пространство $W^2_{2,D}[0,\pi]$ естественно и целесообразно выбрать в качестве фазового пространства (пространства начальных условий) краевой задачи (1), (2).

В качестве фазового пространства краевой задачи (1), (3) можно выбрать пространство $W^2_{2,N}[0,\pi]$. Будем писать $f(x) \in W^2_{2,N}[0,\pi]$, если $f(x) \in W^2_2[0,\pi]$ и справедливы равенства $f'(0) = f'(\pi) = 0$. Напомним, что для любой функции $f(x) \in W^2_2[0,\pi]$ справедливо включение $f(x) \in C^1[0,\pi]$. Это вытекает из теорем вложения Соболева.

**2. Краевая задача в однородными условиями Дирихле.** В данном разделе рассматривается краевая задача (1), (2). Ее решения могут быть представлены в виде ряда

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) e_n(x), \tag{4}$$

где $e_n(x) = \sqrt{2/\pi}\sin nx$. Семейство функций $\{e_n(x)\}$ формирует полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,\pi)$. В частности,

$$u_n(t) = \int_0^{\pi} u(t,x) e_n(x)\,dx.$$

Подчеркнем, что при всех рассматриваемых $t$ (когда решение краевой задачи (1), (2) существует) сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2(t), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^4 u_n^2(t), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n^2(t), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \dot{u}_n^2(t),$$

что является следствием неравенства Бесселя (равенства Парсеваля) и выбора фазового пространства.

Для коэффициентов ряда Фурье (4) получаем бесконечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}_n - \varepsilon\nu_n\dot{u}_n + \sigma_n^2 u_n = -\varepsilon u_n V, \tag{5}$$

где $n = 1, 2, \ldots$, $u_n = u_n(t)$, $\nu_n = 1 - \nu n^2$,

$$V = V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(t) u_n(t),$$

$\sigma_n^2 = 1 + \sigma^2 n^2 > 0$. При $\varepsilon = 0$ система обыкновенных дифференциальных уравнений (5) превращается в систему линейных уравнений вида

$$\ddot{u}_n + \sigma_n^2 u_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Любое из уравнений (6) имеет решение

$$u_n(t) = \alpha_n \exp(i\sigma_n t) + \beta_n \exp(-i\sigma_n t), \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C};$$

$u_n(t) \in \mathbb{R}$, если $\beta_n = \overline{\alpha}_n$.

Будем искать решение системы (5) в виде

$$u_n(t, x, \varepsilon) = v_n(t, s) + \varepsilon w_n(t, s) + o(\varepsilon),$$

где $s = \varepsilon t$ — «медленное» время, $n = 1, 2, \ldots$,

$$v_n(t, \varepsilon) = z_n(s) \exp(i\sigma_n t) + \overline{z}_n(s) \exp(-i\sigma_n t).$$

Естественно, считаем априори функции $z_n(s)$ выбранными так, что сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n(s)|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |z_n(s)|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |z_n(s)|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |z_n'(s)|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |z_n'(s)|^2$$

при всех рассматриваемых $s$.

Достаточно гладкие по совокупности переменных функции $w_n(t, s)$ будем искать как почти периодические функции переменного $t$ из системы неоднородных дифференциальных уравнений

$$\ddot{w}_n + \sigma_n^2 w_n = F_n(t, s). \tag{7}$$

Здесь $w_n = w_n(t, s)$ и $s$ при анализе системы (7) играет роль параметра

$$F_n(t, s) = -2\frac{\partial^2 v_n}{\partial t \partial s} + \nu_n \frac{\partial v_n}{\partial t} - v_n(t, s) V(t, s),$$

$$V(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} i\sigma_k [z_k^2 \exp(2i\sigma_k t) - \overline{z}_k^2 \exp(-2i\sigma_k t)].$$

Нетрудно проверить, что, например,

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial t \partial s} = i\sigma_n [z_n'(s) \exp(i\sigma_n t) - \overline{z}_n'(s) \exp(-i\sigma_n t)],$$

где $z_n'(s) = dz_n(s)/ds$ (далее штрихом обозначается производная по переменной $s$).

Из условий разрешимости каждого из уравнений системы (7) в классе $t$ почти периодических функций с базисом частот $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ (см., например, [1]) с необходимостью получаем, что вспомогательные функции $z_n(s)$ удовлетворяют счетной системе уравнений

$$z_n' = \frac{z_n(\nu_n - |z_n|^2)}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

**Замечание.** Подчеркнем, что на самом деле мы получили систему из «несвязанных» осцилляторов практически в той же форме, которая приведена у Ф. Такенса в качестве «цели» при реализации сценария Ландау—Хопфа. Добавим, что в данной работе Ф. Такенса система (8) была бы записана в иной, но эквивалентной форме

$$\dot{y}_n = i\sigma_n y_n + \frac{\varepsilon}{2}(\nu_n - |y_n|^2)y_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad y_n = y_n(t).$$

Последнее уравнение можно свести к уравнению системы (8) с номером $n$ заменой

$$y_n(t) = z_n(s)\exp(i\sigma_n t), \quad s = \varepsilon t.$$

Рассмотрим теперь систему (8) более детально.

**Лемма 1.** *Уравнение с номером $m$ системы (8) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия*

$$z_m(s) = \rho_m \exp(i\varphi_m), \quad \rho_m = \sqrt{\nu_m}, \tag{9}$$

*если $\nu_m > 0$. Здесь $\varphi_m$ — произвольное действительное число. Нулевое решение в этом случае неустойчиво, а одномерное инвариантное многообразие $S_m$, определенное равенством (9), экспоненциальный аттрактор. При $\nu_m \leqslant 0$ уравнение с номером $m$ системы (8) имеет только один аттрактор $z_m(s) = 0$.*

Доказательство леммы 1 можно найти во многих учебниках, монографиях, статьях, где изучается вопрос о бифуркациях Андронова—Хопфа (см., например, [4, 16]). Подчеркнем, что справедливость формулы (9) проверяется непосредственной подстановкой. Для анализа устойчивости решений (9) можно в уравнении с номером $m$ системы (8) положить

$$z_m(s) = \rho_m \exp(i\varphi_m)(1 + w_m(s)).$$

В результате для $w_m(s)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами, у которого следует изучить устойчивость нулевого решения.

Анализ отдельного уравнения системы (8) позволяет заключить, что для самой системы дифференциальных уравнений (8) мы можем сделать следующее заключение. Пусть

$$\nu \in \left[\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k^2}\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда $\nu_1, \ldots, \nu_k > 0$, но $\nu_{k+1} \leqslant 0, \nu_{k+2} \leqslant 0, \ldots$ Следовательно,

$$\lim_{p\to\infty} z_p(s) = 0, \quad p = k+1, k+2, \ldots.$$

Действительно, уравнение для таких $p$ (см. уравнение (8)) может быть сведено к уравнению для $R_p = |z_p|$ следующего вида:

$$R_p' = \frac{1}{2}R_p(\nu_p - R_p^2),$$

где правая часть отрицательна и, следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} R_p(t) = 0, \quad p = k+1, k+2, \ldots$$

При $p = 1, \ldots, k$ уравнение с номером $p$ может иметь ненулевое состояние равновесия $S_p$. Поэтому вся система (8) может иметь состояние равновесия $E_{k,q}(\eta; 0, 0, \ldots, 0)$, где вектор $\eta$ имеет $k$ компонент ($\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$) и $\eta_j = 0$ или $\eta_j = \rho_j \exp(i\varphi_j)$, $\varphi_j \in \mathbb{R}$. При этом число $q$ указывает на число ненулевых компонент у вектора $\eta$ размерности $k$. Так, например, $E_{k,0} = (0, 0, \ldots, 0; 0, 0, \ldots)$, т.е. нулевое состояние равновесия. Иные примеры: $E_{k,1} = (\nu_1, 0, \ldots, 0; 0, 0, \ldots)$ — состояние равновесия с одной ненулевой компонентой, $E_{k,2} = (\nu_1, 0, \nu_3, 0, \ldots, 0; 0, 0, \ldots)$ состояние равновесия с двумя ненулевыми компонентами.

Нулевое состояние равновесия при

$$\nu \in \left[\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k^2}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

естественно, неустойчиво. Подчеркнем, что при $\nu \geqslant 1$ система (8) имеет единственное и асимптотически устойчивое состояние равновесия $E_0 = (0, 0, \dots, 0, \dots)$. Возвратимся к варианту, когда

$$\nu \in \left[\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k^2}\right).$$

В таком случае устойчивым будет лишь состояние равновесия с максимально возможным числом ненулевых компонент (т.е. $k$)

$$E_{k,k} = (\eta_1, \dots, \eta_k; 0, \dots, 0, \dots),$$

где $\eta_j = \rho_j \exp(i\varphi_j)$, $\rho_j = \sqrt{\nu_j}$, $j = 1, 2, \dots, k, \varphi_j \in \mathbb{R}$. Состояния равновесия с меньшим, чем $k$ числом ненулевых компонент неустойчивы.

Из результатов работ [13, 14] вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех*

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \nu \in \left[\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k}\right)$$

*каждому состоянию равновесия $E_{k,q}$ системы* (8) *соответствует инвариантный тор $T_q(\varepsilon)$ ($\dim T_q(\varepsilon) = q$) краевой задачи* (1), (2) *с сохранением свойств устойчивости.*

*Для решений на торе справедливы асимптотические формулы*

$$u(t, x, s) = \sum_{j=1}^{k} \Big[\eta_j \exp(i\sigma_j t) + \overline{\eta}_j \exp(-i\sigma_j t)\Big] e_j(x) + O(\varepsilon), \tag{10}$$

*где $\eta_j = 0$ или $\rho_j \exp(i\varphi_j)$, $\varphi_j \in \mathbb{R}$, $\rho_j = \sqrt{\nu_j}$. При этом число отличных от нуля координат $\eta_j$ равно $q$ — размерности тора $T_q(\varepsilon)$.*

Формулу (10) можно записать в форме

$$u(t, x, s) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{q} \rho_{m_j} \cos(\sigma_{m_j} t + \varphi_{m_j}) \sin(m_j x) + O(\varepsilon),$$

где $m_j$ — одно из натуральных чисел набора целых чисел от 1 до $k$.

**Пример.** Пусть $\nu \in [1/16, 1/9)$, т.е. краевая задача (1), (2) имеет кроме нулевого состояния равновесия три тора размерности 1 (три цикла), три тора размерности 2 и один тор размерности 3. Локальным аттрактором будет последний тор $T_3(\varepsilon)$, а остальные торы $T_q(\varepsilon)$ будут седловыми.

Перейдем к основному следствию из теоремы 1. Пусть сначала

$$\nu \in \left[\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k^2}\right);$$

тогда краевая задача (1), (2) имеет притягивающий тор $T_k(\varepsilon)$ ($\dim T_k(s) = k$), остальные торы $T_q(\varepsilon)$, где $q < k$, т.е. меньшей размерности, неустойчивы. Пусть $\nu$ убывает и переходит в полуинтервал

$$\nu \in \left[\frac{1}{(k+2)^2}, \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

Тогда появляется тор $T_{k+1}(\varepsilon)$ ($\dim T_{k+1}(\varepsilon) = k+1$) и именно он будет притягивающим, а остальные — неустойчивы, в том числе тор $T_k(\varepsilon)$ теряет устойчивость при переходе в следующий полуинтервал для $\nu$. Итак, при убывании основного бифуркационного (управляющего) параметра $\nu$ получаем каскад бифуркаций торов, размерность которых растет

$$T_0(\varepsilon) \to T_1(\varepsilon) \to T_2(\varepsilon) \to \dots \to T_k(\varepsilon) \to \dots,$$

где $\dim T_k(s) = k$, тор $T_0(\varepsilon)$ — нулевое состояние равновесия, $T_1(\varepsilon)$ — цикл («тор» размерности 1), $T_2(\varepsilon)$ — тор размерности 2 и т. д. Подчеркнем, что притягивающий тор $T_k(\varepsilon)$ один. Если $k > 1$, то существует $2^k - 2$ седловых торов.

**3. Краевая задача с однородными краевыми условиями Неймана.** В этом разделе изучим аналогичные вопросы для краевой задачи (1), (3). Различия задач (1), (2) и (1), (3) не слишком существенны с технической точки зрения и поэтому ограничимся более кратким изложением.

Решения задачи (1), (3) можно и целесообразно записать в виде

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) h_n(x), \tag{11}$$

где

$$h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad h_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Хорошо известно, что семейство функций $h_n(x)$ формирует полную ортонормированную систему функций и, в частности,

$$u_n(t) = \int_0^{\pi} u(t,x) h_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для коэффициентов ряда Фурье (11) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}_n - \varepsilon \nu_n \dot{u}_n + \sigma_n^2 u_n = -\varepsilon u_n V, \tag{12}$$

где $\nu_n = 1 - \nu n^2$, $n = 0, 1, 2, 3 \dots$, $\sigma_n^2 = 1 + \sigma^2 n^2$,

$$V = V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \dot{u}_n.$$

Применяя аналогичный алгоритм, получаем практически ту же самую нормальную форму

$$\dot{z}_n = \frac{1}{2} z_n (\nu_n - |z_n|^2), \quad n = 0, 1, 2 \dots \tag{13}$$

В п. 3 в отличие от п. 2 индекс $n$ имеет в качестве первого значения 0, а не 1. Добавим, что при $n = 0$ справедливо равенство $\nu_0 > 0$ при любом $\nu$ ($\nu_0 = 1$). Следовательно, при анализе системы (13) нулевое решение неустойчиво при всех $\nu \in \mathbb{R}_+$, а уравнение с $n = 0$ имеет семейство состояний равновесия $z_0 = \exp(i\varphi_0)$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, которые формируют одномерное инвариантное многообразие. Сама система (13) имеет состояние равновесия $z_0(t) = \exp(i\varphi_0)$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, $z_k(t) \equiv 0$ ($k = 1, 2 \dots$). Это состояние равновесия устойчиво, если $\nu \geqslant 1$ и теряет устойчивость при $\nu < 1$. При $\nu \in [1/4, 1)$ появляются еще два ненулевых состояния равновесия :

$$\begin{aligned} &z_0 \equiv 0, && z_1(t) = \rho_1 \exp(i\varphi_1), \quad z_j \equiv 0, \quad j = 2, 3 \dots, \\ &z_0 = \exp(i\varphi_0), && z_1(t) = \rho_1 \exp(i\varphi_1), \quad z_j \equiv 0, \quad j = 2, 3 \dots, \end{aligned}$$

но устойчивым будет лишь последнее. При $\nu \in [1/9, 1/4)$ имеем уже $2^3 - 1$ ненулевых состояния равновесия и т. д. Следовательно, реализовался аналогичный каскад, как и в предыдущем разделе.

Для краевой задачи (1), (3) справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть*

$$\nu \in \left[\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k^2}\right),$$

*где* $k = 1, 2, 3 \dots$, *а* $I_0 = [1, \infty)$. *Тогда существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *краевая задача* (1), (3) *имеет инвариантный тор* $T_q(\varepsilon)$, *размерность которого* $q+1$, $q = 0, 1, \dots, k$. *Притягивающим будет тор* $T_k(\varepsilon)$ *— наибольшей размерности из возможных, а остальные торы — седловые. Для решений, принадлежащих тору* $T_q(\varepsilon)$, *справедлива асимптотическая формула*

$$u(t,x,s) = 2 \sum_{j=0}^{q} \rho_{m_j} \cos(\sigma_{m_j} t + \varphi_{m_j}) h_{m_j}(x) + O(\varepsilon),$$

*где* $\rho_k = \sqrt{\nu_k}$, $m_1, m_2, \dots, m_q$ *один из возможных наборов индексов от* 0 *до* $k$.

Итак, и в случае краевой задачи (1), (3) при убывании параметра $\nu$ получаем каскад бифуркаций торов

$$T_0(\varepsilon) \to T_1(\varepsilon) \to T_2(\varepsilon) \to \ldots \to T_m(\varepsilon) \to \ldots$$

При этом $\dim T_0(\varepsilon) = 1$ (т.е. цикл), который устойчив при $\nu \in I_0 = [1, \infty]$. Далее при переходе $\nu$ в полуинтервал $[1/4, 1)$ появляется устойчивый тор $T_1(\varepsilon)$ ($\dim T_1(\varepsilon) = 2$) и т. д. Напомним, что в п. 3 нулевое состояние равновесия всегда неустойчиво и каскад начинается с цикла $T_0(\varepsilon)$, а $\dim T_m(\varepsilon) = m + 1$.

В п. 3, как и в предыдущем пункте, не рассмотрен предельный переход при $\nu \to 0$. Его обсуждение последует в следующем разделе.

**4. Комментарии.** В п. 2, п. 3 были изучены две краевые задачи (1), (2) и (1), (3), в которых показана возможность реализации сценария Ландау—Хопфа за счет уменьшения параметра $\nu$, но не был рассмотрен предельный переход $\nu \to 0$.

Разберем его на примере краевой задачи (1), (3). Рассмотрим ее при $\nu = 0$

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u - \sigma^2 u_{xx} = -\varepsilon u \int_0^\pi u_t u dx, \tag{14}$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \tag{15}$$

Как и ранее, решение краевой задачи (14), (15) можно представить в виде

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) h_n(x). \tag{16}$$

Коэффициенты ряда (16), т.е. функции $u_n(t)$ следует искать как решения системы

$$\ddot{u}_n - \varepsilon \dot{u}_n + \sigma_n^2 u_n = -\varepsilon u_n \sum_{k=0}^{\infty} u_k \dot{u}_k, \tag{17}$$

которая практически не отличается от системы дифференциальных уравнений (12), но $\nu_n$ в последнем случае всегда 1, а $\sigma_n^2 = 1 + \sigma^2 n^2$ как и в предыдущем разделе.

Решения системы (17), как и ранее, следует искать в виде

$$u_n(t, \varepsilon) = v_n(t, s) + \varepsilon w_n(t, s) + o(\varepsilon), \tag{18}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $s = \varepsilon t$, а

$$v_n(t, s) = z_n(s) \exp(i\sigma_n t) + \overline{z}_n(s) \exp(-i\sigma_n t).$$

В итоге для $z_n(s)$ получаем нормальную форму аналогичную (13). Для этого, как и в предыдущих разделах, следует подставить суммы (18) в систему дифференциальных уравнений (17). После выделения слагаемых, пропорциональных $\varepsilon$ для $w_n(t, s)$ получим систему неоднородных дифференциальных уравнений. Из условий ее разрешимости в классе квазипериодических функций относительно $t$ получаем систему для определения $z_n(s)$ — нормальную форму. В данном случае получаем, что укороченный вариант нормальной формы приобретает следующий вид

$$z_n' = \frac{1}{2} z_n (1 - |z_n|^2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (z_n = z_n(s)). \tag{19}$$

Нормальная форма (19) имеет состояния равновесия трех типов.

1. $E_q : z_{m_j}(s) = \exp(i\varphi_{m_j})$, $j = 0, 1, 2, \ldots, q$, $z_p = 0$, если $p \neq m_j$, т.е. с конечным числом компонент, отличных от 0. Эти состояния равновесия неустойчивы. Им соответствуют седловые инвариантные торы $T_q(\varepsilon)$ краевой задачи (14), (15).
2. $E_p : z_{m_j}(s) = \exp(i\varphi_{m_j})$, $j = 0, 1, 2, \ldots, \varphi_{m_j} \in \mathbb{R}$, т.е. $m_j$ бесконечная подпоследовательность последовательности $(0, 1, 2, 3 \ldots)$, $z_p = 0$, если $p \neq m_j$.
3. $E_c : z_j(s) = \exp(i\varphi_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, \varphi_j \in \mathbb{R}$, т.е. ненулевыми являются все компоненты.

С формальной точки зрения все состояния равновесия $E_q$, $E_p$ неустойчивы как решения системы (19), а $E_c$, напротив, аттрактор, но им не соответствуют решения основной краевой задачи (14), (15). Действительно, решение (16) можно записать в виде

$$u(t,x) = v(t,x) + o(\varepsilon),$$

где

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (z_n \exp(i\sigma_n t) + \overline{z}_n \exp(-i\sigma_n t)) h_n(x)$$

Но в нашем случае получаем для функции $v(t,x)$ следующую формулу

$$v(t,x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\sigma_n t + \varphi_n) h_n(x),$$

где $\varphi_n \in \mathbb{R}$. В результате получили расходящийся ряд Фурье и данная функция даже не принадлежит $L_2(0,\pi)$ как функция $x$.

Последнее замечание можно изложить в иной форме. Если краевую задачу (1), (3) дополнить начальным условием

$$u(0,x) = f(x), \tag{20}$$

то смешанная задача (1), (3), (20) корректно разрешима, если $f(x) \in W^2_{2,N}[0,\pi]$. Из последнего замечания вытекает, что с необходимостью последовательность $z(s) = (z_0(s), z_1(s), \dots)$ при всех рассматриваемых $s$ должна принадлежать $l_2 : z(s) \in l_2$, если

$$\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2 < \infty.$$

Последнее включение не имеет места для координат состояний равновесия $E_p$ и $E_c$. Отметим также, что при $\nu = 0$ уравнение (1) не может быть включено в класс абстрактных параболических уравнений, рассмотренный в статье [8]. В этом случае (при $\nu = 0$) его уже следует интерпретировать как уравнение гиперболического типа. Разрешимость (существование решений) для таких уравнений была изучена в работах [10, 18].

Возвратимся теперь к краевой задаче (1), (3) в случае $\nu \neq 0$. Возьмем какой-либо тор конечной размерности $k+1$, у которого первые $k+1$ компоненты отличны от нуля. Для решения справедлива асимптотическая формула (см. формулировку теоремы 2), которая в данном случае приобретает вид

$$u(t,x) = 2\sum_{n=0}^{k} \rho_n \cos(\sigma_n t + \varphi_n) h_n(x) + O(\varepsilon),$$

где $\rho_n = \sqrt{1-\nu n^2}$. Норма главной части этого решения в $L_2(0,\pi)$ как функции $x$ зависит от $t$, и ее квадрат

$$\psi(t,\nu) = \|u\|^2_{L_2[0;\pi]} = 4\sum_{n=0}^{k} (1-\nu n^2)\cos^2(\sigma_n t + \varphi_n), \quad \varphi_n \in \mathbb{R}.$$

Пусть выбран какой-либо момент времени $t = t_0$ и набор $\varphi_n = -\sigma_n t_0$, также выберем

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\right), \quad \text{т.е.} \quad \nu \in \left[\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{k^2}\right),$$

и тор $T_k(\varepsilon)$ устойчив. Но соответствующее такому набору $\varphi_k$, $t_0$, $\nu$ решение краевой задачи (1), (3) таково, что

$$\psi(t_0, \nu_k) \geqslant \frac{4}{3}k,$$

и норма решений в пространстве $L_2(0,\pi)$ при выбранных значениях $t$ и параметров растет. Естественно, аналогичный факт справедлив и для кинетической энергии, т.е. растет величина $\Phi(t_0,\nu)$, если выбрать $t_0$, а

$$\Phi(t,\nu)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L_2(0,\pi)}=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi u_t^2dx=2\sum_{n=0}^k(1-\nu n^2)\sigma_n^2\cos^2(\sigma_n t+\varphi_n).$$

Подобное замечание справедливо и для краевой задачи (1), (2).

В заключение отметим, что аналогичный вариант анализа сценария перехода к турбулентности можно найти в работах [5,15], где были рассмотрены иные краевые задачи, для иных уравнений. Например, в [15] рассмотрена краевая задача из теории упругой устойчивости и изучены колебания трубы под воздействием потока жидкости. В этой работе было показано, что при возрастании скорости потока, протекающей в трубе жидкости, возникают торы возрастающей размерности. При этом, как и в данной статье, притягивающим будет тор наибольшей размерности.

Полученные результаты могут быть обобщены на случай, когда $u=u(t,x,y)$, т.е. функция $u$ зависит от двух пространственных переменных. Рассмотрим, например, краевую задачу

$$Y_{tt}+(a+1-b)Y_t+aY-d_1\Delta Y_t-(d_1+d_2)\Delta Y=-cY\iint\limits_D YY_tdx_1dx_2,\quad Y|_{\partial D}=0.$$

Пусть область $D$ с границей $\partial D$ такова, что линейный дифференциальный оператор

$$\Delta v(v=v(x,y)),\quad v|_{\partial D}=0$$

имеет простые собственные значения. Тогда также можно показать возможность реализации сценария Ландау—Хопфа.

Поясним последнее замечание несколько подробнее. Пусть $Y=Y(t,x,y)$. После перенормировок получаем краевую задачу

$$u_{tt}+\varepsilon(u_t-\nu\Delta u_t)+u-\sigma^2\Delta u=-\varepsilon\Delta u\iint\limits_D uu_tdxdy \tag{21}$$

$$u|_{\partial D}=0. \tag{22}$$

Здесь $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, $u=u(t,x,y)$, $D$ — некоторая ограниченная область из $\mathbb{R}^2$ с гладкой (кусочно гладкой) границей $\partial D$, $0<\varepsilon\ll 1$. Пусть линейный дифференциальный оператор

$$Av=-\Delta v,\quad v|_{\partial D}=0$$

имеет простые собственные значения $\lambda_k$, которые занумерованы в порядке возрастания:

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots,\quad \lim_{k\to\infty}\lambda_k=\infty.$$

Повторив предыдущие построения, анализ окрестности нулевого решения краевой задачи (21), (22) можно свести к изучению бесконечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$z_k'=\frac{1}{2}(1-\nu\lambda_k)z_k-\frac{1}{2}z_k|z_k|^2,\quad k=1,2,\ldots, \tag{23}$$

где $z_k=z_k(s)$, $s=\varepsilon t$. Различие системы (23) от нормальной формы (19) минимальны: в системе (19) $\lambda_k=k^2$. Поэтому анализ краевой задачи (21), (22) позволяет заключить, что в ней также может реализоваться сценарий Ландау—Хопфа, если $\nu\to 0$.

Аналогичный вывод можно получить, если краевые условия Дирихле заменены на однородные краевые условия Неймана, т.е.

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial n}\right|_{\partial D}=0,$$

где $\partial Y/\partial n$ — производная по нормали.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
2. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Развитие турбулентности по Ландау в модели мультипликатор-акселератор// Докл. РАН. — 2008. — *420*, № 6. — С. 739–743.
3. *Косарева Е. С., Куликов А. Н.* Об одной нелинейной краевой задаче, моделирующей экономические процессы// Модел. анал. информ. систем. — 2003. — *10*, № 2. — С. 18–21.
4. *Куликов А. Н.* Применение метода инвариантных многообразий в локальных задачах устойчивости и теории колебаний. — Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1983.
5. *Куликов А. Н.* Аттракторы двух краевых задач для модифицированного нелинейного телеграфного уравнения// Нелин. динам. — 2008. — *4*, № 1. — С. 57–68.
6. *Ландау Л. Д.* К проблемам турбулентности// Докл. АН СССР. — 1944. — *44*, № 8. — С. 339–342.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физики. Т. 6. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.
8. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — *10*. — С. 297–370.
9. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека. — М.: Наука, 1972.
10. *Якубов С. Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1970. — *23*. — С. 37–60.
11. *Broer H. W., Dumortier F., van Strien S. J., Takens F.* Structure in Dynamics. — Elsevier, 1991.
12. *Hopf E.* A mathematical example displaying the features of turbulence// Commun. Pure. Appl. Math. — 1948. — *1*. — P. 303–322.
13. *Kolesov A. Yu, Kulikov A. N., Rosov N. Kh.* Invariant tori of a class of point mappings: the annulus principle// Differ. Equations. — 2003. — *39*, № 5. — P. 614–639.
14. *Kolesov A. Yu, Kulikov A. N., Rosov N. Kh.* Invariant tori of a class of point transformations: preservation of an invariant torus under perturbations// Differ. Equations. — 2003. — *39*, № 6. — P. 775–790.
15. *Kulikov A. N.* Landau–Hopf scenario of passage to turbulence in some problems of elastic stability theory// Differ. Equations. — 2012. — *48*, № 9. — P. 1278–1291.
16. *Marsden J. E., McCraken M.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. — New-York: Springer-Verlag, 1976.
17. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
18. *Segal I.* Nonlinear semigroups// Ann. Math. — 1963. — *78*, № 2. — P. 339–364.
19. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

Куликов Анатолий Николаевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 203 (2021). С. 50–61
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-203-50-61

УДК 514.76

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ЭЙНШТЕЙНА

© 2021 г. Й. МИКЕШ, С. ФОРМЕЛЛА, И. ГИНТЕРЛЕЙТНЕР, Н. И. ГУСЕВА

Аннотация. В статье изложены некоторые результаты, полученные в теории геодезических отображений пространств Эйнштейна.

***Ключевые слова:*** геодезическое отображение, риманово пространство, псевдориманово пространство, пространство Эйнштейна.

# SOME QUESTIONS OF GEODESIC MAPPINGS OF EINSTEIN SPACES

© 2021 J. MIKEŠ, S. FORMELLA, I. HINTERLEITNER, N. I. GUSEVA

Abstract. In this paper, some results obtained in the theory of geodesic mappings of Einstein spaces are presented.

***Keywords and phrases:*** geodesic mapping, Riemannian space, pseudo-Riemannian space, Einstein space.

***AMS Subject Classification:*** 53B05, 53B20, 53B22

**1. Введение.** В настоящей работе приведены основные результаты теории геодезических отображений пространств Эйнштейна.

Геодезические и конформные отображения играют очень важную роль в теории поверхностей, римановых и псевдоримановых многообразий. Известные из античных времен гномоническая и стереографическая проекции являются их примерами. *Гномоническая проекция* является проекцией полусферы из ее центра на плоскость, касающуюся ее, была известна уже в VI веке до н. э. Фалесу Милетскому. *Стереографическая проекция* является проекцией сферы из ее полюса на плоскость, касающуюся второго полюса. Ее первое упоминание на четыре века позже встречается, например, в работах греческого астронома Птолемея. С 1569 г. Меркатор использует конформные проекции для решения картографических задач. Математическое обоснование указанных проекций дано в 1779 г. Лагранжем (см. [68]).

Общая теория конформных и геодезических отображений (псевдо-) римановых многообразий, а также пространств аффинной связности, изложена во многих монографиях и обзорных статьях (см., например, [1, 2, 4, 5, 18, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 31–37, 56, 59–61, 69, 73–75, 79–81, 89, 90]). В работах Гинтерлейтнер и Микеша [62–64] доказано, что геодезические отображения сохраняют класс гладкости метрик (псевдо-) римановых многообразий. Это свойство естественным образом обобщено для более общего случая [65]. Различным задачам теории геодезических отображений посвящено много статей (см., например, [3, 6–14, 16, 17, 19, 21, 24–30, 32, 38, 40–67, 70–83, 87–91]). Интересные факты о геодезических линиях изложены в [15, 36, 84–86].

Работа выполнена при поддержке гранта Университета им. Ф. Палацкого (проект № 2020014) и гранта Технического университета в Брно (проект № FAST-S-20-6294).

 

В настоящей работе резюмируем некоторые результаты геодезической отображений пространств Эйнштейна.

А. З. Петров (см. [19]) изучал геодезические отображения четырехмерных пространств Эйнштейна с метрикой сигнатуры Минковского на пространства того же типа и доказал, что либо эти пространства имеют постоянную кривизну, либо геодезическое отображение является аффинным. В связи с этим результатом может возникнуть вопрос: существуют ли пространства Эйнштейна, помимо пространств постоянной кривизны, допускающие нетривиальные геодезические отображения?

Оказывается, что положительный ответ на этот вопрос был фактически построен раньше исследований Петрова, что оставалось долгое время не замеченным. Пространства, построенные в 1925 г. Бринкманном (см. [35]) при исследовании конформных отображений [80, с. 180, теорема 4.18], являются эквидистантными пространствами Эйнштейна основного класса с непостоянной кривизной; как известно (см. [21]), такие пространства допускают нетривиальные геодезические отображения. Явным образом пример нетривиального геодезического отображения пространств Эйнштейна приведен в [11].

Геодезические отображения пространств Эйнштейна исследовались Микешем (см. [6, 11, 17]), Формеллой (см. [40–43, 50, 52, 53]), а пространств Эйнштейна—Финслера — Шеном (см. [87]). Задачи «в целом» рассмотрены в [16, 66]. В работе Формеллы и Микеша [51] построены метрики геодезически соответствующих римановых пространств. Детально эти вопросы изложены ниже.

**2. Геодезические отображения.** Напомним основные понятия геодезических отображений (псевдо-) римановых пространств (см. [18, 20, 23, 31, 69, 73, 79, 81]).

Пусть $V_n = (M, g)$ и $\bar{V}_n = (M, \bar{g})$ — два $n$-мерных (псевдо-) римановых многообразия. Диффеоморфизм $f\colon V_n \to \bar{V}_n$ называют *геодезическим отображением*, если любая геодезическая линия пространства $V_n$ отображается на геодезическую пространства $\bar{V}_n$. Тогда их метрики называют геодезически соответствующими.

Диффеоморфизм $f\colon V_n \to \bar{V}_n$ является геодезическим отображением тогда и только тогда, когда выполняется одно из приведенных ниже уравнений:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X \cdot \nabla_Y \Psi + Y \cdot \nabla_X \Psi, \tag{1}$$

$$(\nabla_X \overline{g})(Y, Z) = 2\psi(x)\overline{g}(Y, Z) + \psi(Y)\overline{g}(X, Z) + \psi(Z)\overline{g}(X, Y) \tag{2}$$

$$(\nabla_X a)(Y, Z) = \lambda(Y)g(X, Z) + \lambda(Z)g(X, Y), \tag{3}$$

где $X, Y, Z$ — касательные векторные поля, $a$ — невырожденная симметрическая билинейная форма, $\nabla$ и $\bar{\nabla}$ — связности Леви-Чивиты пространств $V_n$ и $\bar{V}_n$ относительно метрик $g$ и $\bar{g}$ на $M$.

В карте $(U, x)$ на $M$ локальные компоненты $g$, $\bar{g}$, $a$, $X\psi$ и $X\lambda$ имеют вид

$$g_{ij} = g(X_i, X_j), \quad \bar{g}_{ij} = \bar{g}(X_i, X_j), \quad a_{ij} = a(X_i, X_j), \quad \psi_i = X_i\Psi, \quad \lambda_i = X_i\Lambda,$$

и удовлетворяют условиям

$$a_{ij} = \exp(2\Psi)\bar{g}^{\alpha\beta} g_{i\alpha} g_{j\beta}, \tag{4}$$

$$\lambda_i = -\exp(2\Psi)\bar{g}^{\alpha\beta} g_{i\alpha}\psi_\beta, \quad \psi_i = \frac{1}{2(n+1)} X_i \left(\log\left|\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right|\right), \tag{5}$$

где $X_i = \partial/\partial x^i$ и $\bar{g}^{ij}$ — компоненты $(\bar{g}_{ij})^{-1}$.

Напомним, что (1) и (2) — уравнения Леви-Чивиты и (3) — уравнения Синюкова для геодезического отображения $f\colon V_n \to \bar{V}_n$ (см. [23, 31, 73, 79–81]).

Локально уравнения (1), (2) и (3) имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^h_{ij}(x) &= \Gamma^h_{ij}(x) + \delta^h_i \psi_j(x) + \delta^h_j \psi_i(x), \\ g_{ij,k} &= 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik}, \\ a_{ij,k} &= \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}, \end{aligned}$$

где $\delta^h_i$ — символы Кронекера, $\Gamma^h_{ij}(x)$ и $\bar{\Gamma}^h_{ij}(x)$ — символы Кристоффеля $V_n$ и $\bar{V}_n$; здесь и далее запятая обозначает ковариантную производную по связности $\nabla$.

Н. С. Синюков доказал (см. [22], [23, p. 126]), что если $(M,g)$ допускает геодезическое отображение на $(M,\overline{g})$, то $(M,a)$ допускает геодезическое отображение на $(M,\tilde{a}=\exp(2\Psi)g)$ с той же 1-формой $\Psi(X)$. Для лучшего понимания многообразий и отображений между ними введем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & (M,g) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\textit{конф. отобр.}"] & (M,\overline{g}) \\
 (M,\tilde{a}=\exp(2\psi)g) & & (M,a) \arrow[ll, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Этот процесс можно бесконечно продолжать. Таким образом, получаем бесконечную последовательность римановых многообразий, допускающих геодезические отображения.

Из (1) вытекает, что тензоры Римана и Риччи пространств $V_n$ и $\bar{V}_n$ связаны следующими соотношениями:

$$\bar{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + P(X,Z)Y - P(Y,Z)X, \tag{6}$$

$$\overline{\mathrm{Ric}}(X,Y) = \mathrm{Ric}(X,Y) + (n-1)P(X,Y), \tag{7}$$

$$P(X,Y) = H_\Psi(X,Y) - (X\Psi)(Y\Psi), \tag{8}$$

где $H_\Psi$ — гессиан функции $\Psi$. Локально уравнения (6), (7) и (8) имеют вид

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k\psi_{ij} - \delta^h_j\psi_{ik},$$
$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} - (n-1)\psi_{ij},$$
$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i\psi_j,$$

где $R^h_{ijk}$ и $R_{ij}$ (соответственно, $\bar{R}^h_{ijk}$ и $\bar{R}_{ij}$) — компоненты тензоров Римана и Риччи пространства $V_n$ (соответственно, пространства $\bar{V}_n$). Формулы (1)—(5) справедливы, когда пространства $V_n$ и $\bar{V}_n$ имеют класс дифференцируемости $C^1$, т.е. $g_{ij}\in C^1$ и $\bar{g}_{ij}\in C^1$. Формулы (6)—(8) справедливы, когда пространства $V_n$ и $\bar{V}_n$ имеют класс дифференцируемости $C^2$.

Н. С. Синюков нашел критерий существования геодезических отображений в виде системы дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно неизвестных тензоров $a_{ij}$, $\lambda_i$ и $\mu$ (см. [23]):

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik},$$
$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} - a_{i\alpha}R^\alpha_j - a_{\alpha\beta}R^\alpha{}_{ij}{}^\beta,$$
$$(n-1)\mu_{,i} = 2(n+1)\lambda_\alpha R^\alpha_i + a_{\alpha\beta}(2R^\alpha{}_{i,}{}^\beta - R^{\alpha\beta}{}_{,i}),$$

где

$$R^\alpha_j = g^{i\alpha}R_{ij},\quad R^{\alpha\beta} = R^\alpha_j g^{j\beta},\quad R^\alpha{}_{i,}{}^\beta = R^\alpha{}_{i,j}g^{j\beta},\quad R^\alpha{}_{ij}{}^\beta = R^\alpha{}_{ijk}g^{k\beta}.$$

Элементарно из этих уравнений при $V_n\in C^r$, $r\geqslant 3$ и $\bar{V}_n\in C^3$ вытекает, что $\bar{V}_n\in C^r$. Не исключаем случай, когда функции бесконечно дифференцируемы ($r=\infty$) или аналитичны ($r=\omega$).

Детальным анализом более общих уравнений И. Гинтерлейтнер и Й. Микеш доказали следующее утверждение.

**Теорема 1** (см. [65]). *Если $V_n\in C^r$, $r\geqslant 3$, допускает геодезическое отображение на $\bar{V}_n\in C^1$, то $\bar{V}_n\in C^r$.*

В этом случае в общей по отображению системе координат $x$

$$g_{ij}, \bar{g}_{ij}, a_{ij}, \Psi \in C^r,\quad \psi_i, \lambda_i \in C^{r-1},\quad \mu\in C^{r-2}.$$

**3. Геодезические отображения пространств Эйнштейна.** Многообразие $V_n=(M,g)$ называют *пространством Эйнштейна*, если его тензор Риччи пропорционален метрическому тензору $g$, т.е.

$$\mathrm{Ric} = \rho\cdot g,\quad \rho = \mathrm{const}. \tag{9}$$

Различным вопросам геометрии пространств Эйнштейна посвящена монография А. Бессе [2].

*3.1. Пространства Эйнштейна замкнуты относительно геодезических отображений.* Известно, что римановы пространства постоянной кривизны образуют замкнутый класс относительно геодезических отображений (см. [31]). Примечательно, что для пространств Эйнштейна существует аналогичное свойство. Существует более общая теорема, обобщающая теорему Э. Бельтрами.

**Теорема 2.** *Если пространство Эйнштейна $V_n$ допускает нетривиальное геодезическое отображение на риманово пространство $\bar{V}_n \in C^1$, $n > 2$, то $\bar{V}_n$ является пространством Эйнштейна.*

*Доказательство.* Пусть пространство Эйнштейна $V_n$, $n > 2$, допускает нетривиальное геодезическое отображение на $\bar{V}_n \in C^1$. В 1981 г. Каждан и Детурк доказали (см. [2, 39]), что в пространствах Эйнштейна локально существует аналитическая система координат $x$, т.е. $V_n \in C^\omega$ а из теоремы 1 (см. [65]) следует, что $\bar{V}_n \in C^\omega$ и при геодезическом отображении в координатах $x$

$$g_{ij},\ \bar{g}_{ij},\ a_{ij},\ \Psi,\ \psi_i,\ \lambda_i,\ \mu \in C^\omega.$$

Отсюда вытекает, что ненулевые векторное поля $\psi_i$ и $\lambda_i$ на $V_n$ могут обращаться в нуль только на множестве точек нулевой меры. Это значит, что в окрестности любой точки оно ненулевое и, следовательно, отображение нетривиальное. Поэтому этот результат «в целом» тривиально вытекает из «локального» результата, доказанного в 1978 г. Микешем (см. [9, 11, 73]). □

**Теорема 3.** *Если пространство Эйнштейна $V_n$ допускает нетривиальное геодезическое отображение на риманово пространство $\bar{V}_n$, $n > 2$, то $\bar{V}_n$ является пространством Эйнштейна.*

*Доказательство.* Напомним, что пространство Эйнштейна $V_n$ характеризуется уравнением (9). В [11] естественным образом неявно предполагается, что $V_n, \bar{V}_n \in C^3$, а следовательно при геодезическом отображении

$$g_{ij},\ \bar{g}_{ij},\ a_{ij},\ \Psi \in C^3, \quad \psi_i,\ \lambda_i \in C^2, \quad \mu \in C^1.$$

Тогда, как хорошо известно, относительно геодезического отображения уравнения Леви-Чивиты (1) и (2) выполняются в любой локальной системе координат. С другой стороны, (1) эквивалентно существованию решения в $V_n$ системы уравнений Синюкова (3) относительно тензора $a_{ij}$ $(= a_{ji})$ и вектора $\lambda_i$ $(\lambda_i \neq 0)$. Если (3) имеет решение, то $V_n$, допускающее нетривиальное геодезическое отображение на $\bar{V}_n$, определяется с помощью соотношений (4) и (5).

Условия интегрируемости для (3) имеют вид

$$a_{\alpha i} R^\alpha_{jkl} + a_{\alpha j} R^\alpha_{ikl} = g_{ik}\lambda_{j,l} + g_{jk}\lambda_{i,l} - g_{il}\lambda_{j,k} - g_{jl}\lambda_{i,k}. \tag{10}$$

Принимая во внимание (3), дифференцируем (10) относительно $x^m$, свертываем результат с $g^{lm}$, а затем альтернирируем относительно $i$ и $k$. На основании (9) получаем

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{ijk} = g_{ij}\xi_k - g_{ik}\xi_j,$$

где $\xi_i$ — некоторый ковектор, $[j, k]$ обозначает альтернирирование. Свертывая последнее с $g_{ij}$ и используя (9), видим, что $\xi_i = B\lambda_i$, т.е.

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{ijk} = B(g_{ij}\lambda_k - g_{ik}\lambda_j). \tag{11}$$

Свернем (10) с $\lambda^l$. Учитывая (11), получим

$$g_{ki}\Lambda_{j\alpha}\lambda^\alpha + g_{kj}\Lambda_{i\alpha}\lambda^\alpha - \lambda_i\Lambda_{jk} - \lambda_j\Lambda_{ik} = 0, \tag{12}$$

где $\Lambda_{ij} = \lambda_{i,j} - Ba_{ij}$. Легко показать, что $\lambda^\alpha\Lambda_{\alpha i} = \mu\lambda_i$, где $\mu$ — некоторая функция. При $\lambda_i \neq 0$, получим из (11) соотношение

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + Ba_{ij}. \tag{13}$$

Дифференцируя (5) и учитывая (3), (6) и (13), легко получить следующее уравнение:

$$\psi_{ij} = \bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij}, \tag{14}$$

где $\bar{B}$ — некоторая функция. В силу последнего соотношения и с учетом (7) и (9) мы получаем, что $\bar{R}_{ij} = (n-1)\bar{B}\bar{g}_{ij}$. Следовательно, $\bar{V}_n$ — пространство Эйнштейна. Теорема доказана. □

**Замечание.** Из выше сказанного вытекает, что «локальный» результат, сформулированный в теореме 3, справедлив «в целом» — теорема 2. Это касается и формул (13) и (14). На основании (7) формулы (14) эквивалентны условию сохранения эйнштейновости пространств. В диссертации [9] (см. также [73, 79]) доказана эквивалентность формул (13) и (14).

Таким образом, тривиальны выкладки, проведенные в этом отношении в [66].

С помощью теоремы 3 в [17] были получены «локальные» результаты для 4-мерных пространств Эйнштейна (см. [73]). Учитывая сказанное выше, легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Если 4-мерное пространство Эйнштейна $V_4$ допускает нетривиальное геодезическое отображение на риманово пространство $\bar{V}_4 \in C^1$, то $V_4$ и $\bar{V}_4$ являются пространствами постоянной кривизны.*

*3.2. Пространства Эйнштейна, допускающие проективные преобразования.* Сравнив условия интегрируемости уравнений (13) с формулами (10), найдем $\mu_{,i} = 2K\lambda_i$. Продифференцируем (13). На основании предыдущего соотношения, формул (3) и (10) получим, что

$$\lambda_{i,jk} = \lambda^\alpha R_{ijk\alpha} + 2K\lambda_i g_{jk} + 2K\lambda_j g_{ik}.$$

Это равенство означает (см. [23, с. 275]), что $V_n$ допускает нетривиальное проективное преобразование, если $K \neq 0$. В случае, когда $K = 0$, вектор $\lambda_i$ определяет аффинное преобразование. Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 5** (см. [11])**.** *Если пространство Эйнштейна, кривизна которого отлична от нуля, допускает нетривиальное геодезическое отображение, то оно допускает нетривиальное проективное преобразование.*

*Если пространство Эйнштейна, кривизна которого обращается в нуль, допускает нетривиальное геодезическое отображение, то оно допускает аффинное преобразование.*

*3.3. Метрики многообразий Эйнштейна, допускающие геодезические отображения.* В следующих двух разделах изложим результаты о геодезических отображениях пространств Эйнштейна, полученных С. Формеллой и Й. Микешем [51].

Пусть $a$ — дифференцируемая симметричная билинейная форма на $U_a \subseteq M$, удовлетворяющая уравнениям (3) и имеющая $t$ различных собственных значений $\overset{1}{\Lambda}, \dots, \overset{t}{\Lambda}$. Из определения вытекает, что в каждой точке $p \in U_a$ они совпадают с собственными значениями эндоморфизма $A_p$ касательного пространства $T_p(M)$, соответствующего $a$, т.е. $g(AX, Y) = a(X, Y)$ для всех $X, Y \in \mathfrak{X}(U_a)$.

Пусть $(U, x)$ — такая карта на $M$, что $U \subseteq U_a$. Предположим, что $\overset{\alpha}{\nu}$ является собственным вектором матрицы $a_{ij}$, соответствующим собственному значению $\overset{\alpha}{\Lambda}$, $\alpha = 1, \dots, t$, т.е. удовлетворяющее условию

$$(a_{ij} - \overset{\alpha}{\Lambda} g_{ij})\overset{\alpha}{\nu}{}^j = 0. \tag{15}$$

Определяем обобщенные собственные векторы $\overset{r}{u}$, соответствующие $\overset{\alpha}{\Lambda}$, следующим образом:

$$(a_{ij} - \overset{\alpha}{\Lambda} g_{ij})\overset{1}{u}{}^j = \overset{\alpha}{\nu}_i, \quad (a_{ij} - \overset{\alpha}{\Lambda} g_{ij})\overset{r}{u}{}^j = \overset{r-1}{u}_i, \quad r = 2, 3, \dots, l. \tag{16}$$

Дифференцируя ковариантно (15) и (16) относительно $x^k$ и используя (3), имеем

$$\begin{aligned}
&\lambda_i \overset{\alpha}{\nu}_k + \lambda_j \overset{\alpha}{\nu}{}^j g_{ik} - \overset{\alpha}{\Lambda}_k \overset{\alpha}{\nu}_i + (a_{ij} - \overset{\alpha}{\Lambda} g_{ij})\overset{\alpha}{\nu}{}^j_{,k} = 0,\\
&\lambda_i \overset{1}{u}_k + \lambda_j \overset{1}{u}{}^j g_{ik} - \overset{\alpha}{\Lambda}_k \overset{1}{u}_i + (a_{ij} - \overset{\alpha}{\Lambda} g_{ij})\overset{1}{u}{}^j_{,k} = \overset{\alpha}{\nu}_{i,k},\\
&\lambda_i \overset{r}{u}_k + \lambda_j \overset{r}{u}{}^j g_{ik} - \overset{\alpha}{\Lambda}_k \overset{r}{u}_i + (a_{ij} - \overset{\alpha}{\Lambda} g_{ij})\overset{r}{u}{}^j_{,k} = \overset{r-1}{\nu}{}_{i,k},
\end{aligned} \tag{17}$$

запятая обозначает ковариантное дифференцирование в $V_n = (M, g)$. Из приведенных выше соотношений можно получить (см. [47])

$$\lambda_i \overset{\alpha}{\nu}{}^i \overset{l}{u}_k + \lambda_i \overset{1}{u}{}^i \overset{l-1}{u}_k + \lambda_i \overset{2}{u}{}^i \overset{l-2}{u}_k + \dots + \lambda_i \overset{l-2}{u}{}^i \overset{2}{u}_k + \lambda_i \overset{l-1}{u}{}^i \overset{1}{u}_k + \lambda_i \overset{l}{u}{}^i \overset{\alpha}{\nu}_k - \frac{l+1}{2} \overset{\alpha}{\Lambda}_k u_i \overset{\alpha}{\nu}{}^i = 0. \tag{18}$$

Если многообразие $V_n$ допускает нетривиальные геодезические отображения, определяемые $\overset{\alpha}{\Lambda} \neq \mathrm{const}$, то в силу (18) имеем $\overset{\alpha}{\nu}{}^i \overset{l}{u}_i \neq 0$. С другой стороны, соотношение (16) приводит к соотношению $\overset{\alpha}{\nu}{}^i \overset{r}{u}_i = 0$ для $r = 1, \dots, l-1$. Свертывание второго уравнения из $l+1$ соотношений (17) с помощью $\overset{l-2}{u}{}^i$ и $l$-е уравнение с $\overset{\alpha}{\nu}{}^i$, аналогично (18), получим

$$\lambda_i \overset{\alpha}{\nu}{}^i \overset{l-1}{u}_k + \lambda_i \overset{1}{u}{}^i \overset{l-2}{u}_k + \lambda_i \overset{2}{u}{}^i \overset{l-3}{u}_k + \ldots + \lambda_i \overset{l-2}{u}{}^i \overset{1}{u}_k + \lambda_i \overset{l-1}{u}{}^i \overset{\alpha}{\nu}_k - \frac{l}{2} \overset{\alpha}{\Lambda}_k \overset{l-1}{u}_i \overset{\alpha}{\nu}{}^i = 0. \tag{19}$$

Следовательно, поскольку векторы $\overset{\alpha}{\nu}$, $\overset{r}{u}$ линейно независимы и выполняются условия $\overset{l-1}{u}_i \overset{\alpha}{\nu}{}^i = 0$, получим:

$$\lambda_i \overset{\alpha}{\nu}{}^i = 0, \quad \lambda_i \overset{r}{u}{}^i = 0, \quad r = 1, \dots, l-1.$$

Так как

$$2\lambda = \sum_{\alpha=1}^{t} \tau_\alpha \overset{\alpha}{\Lambda},$$

где $\tau_\alpha$ обозначает алгебраическую кратность $\overset{\alpha}{\Lambda}$ и

$$\overset{\alpha}{\Lambda} = \overset{\alpha}{\Lambda}(x^{n_\alpha + \tau_\alpha}), \quad n_1 = 0, \quad n_\beta = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{\beta-1}, \quad \beta = 2, \dots, t$$

(см. [40, 47]), из (18) вытекает

$$\overset{\alpha}{\nu}_{i_\alpha} = \overset{\alpha}{A} \lambda_{i_\alpha}, \quad \overset{\alpha}{\nu}_j = 0 \quad \text{для} \quad j \neq i_\alpha, \tag{20}$$

где $i_\alpha = n_\alpha + 1, \dots, n_\alpha + \tau_\alpha$, $\overset{\alpha}{A}$ — функции на $U$.

**Теорема 6.** *На многообразии Эйнштейна $V_n = (M, g)$ с $B \neq 0$ все собственные векторы тензора $a_{ij}(p)$, $p \in U_\alpha$, являются неизотропными.*

*Доказательство.* Предположим, что на многообразии Эйнштейна с $B \neq 0$ собственные векторы $\overset{\alpha}{\nu}$, соответствующие собственным значениям $\overset{\alpha}{\Lambda}$ матрицы $a_{ij}(p)$, изотропны. Ковариантно дифференцируя (20) относительно $x^k$ и затем свертывая полученное уравнение с $\overset{\alpha}{\nu}{}^i$ и применяя соотношения $\lambda_{j,i_\alpha} = 0$ если $j \neq j_\alpha$, получим $\lambda_{t,k} \overset{\alpha}{\nu}{}^t = 0$. Поэтому из (13) и (15) будем иметь

$$B \overset{\alpha}{\Lambda} + \mu = 0. \tag{21}$$

Более того, дифференцируя (20) ковариантно относительно $x^k$, с учетом (3), (8) и (9) мы имеем

$$\mu = -\bar{B} \exp(2\psi) + \lambda^t \psi_t, \quad \lambda^t = \lambda_s g^{st}.$$

Дифференцируя приведенное уравнение еще раз, легко получим $\mu_k = 2B\lambda_k$, откуда

$$\mu = C + B \cdot \sum_{\alpha=1}^{t} \tau_\alpha \overset{\alpha}{\Lambda},$$

где $C = \mathrm{const}$. Следовательно, из (21) следует либо $B = 0$ (и $C = 0$), либо многообразие $(M, g)$ допускает тривиальные геодезические отображения, что противоречит предположению. Это завершает доказательство. □

Из приведенной теоремы вытекает следующий факт.

**Лемма 1.** *Если многообразие Эйнштейна с ненулевой скалярной кривизной допускает геодезическое отображение, то матрица $a_{ij}(p)$, $p \in U_\alpha$, является недефективной, т.е. для каждого собственного значения ее геометрическая кратность равна единице.*

*3.4. Теорема о локальной структуре.* Предположим, что на многообразии $(M,g)$ форма $a$ является недефективной и предположим, что она имеет $k$ различных собственных значений кратности 1 и $t-k$ различных собственных значений с кратностью $>1$. В рассматриваемом случае из [40, 47] и результатов предыдущего раздела получаем следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Пусть $a$ — форма, удовлетворяющая уравнению (3). Предположим, что для каждого $p\in U_a\subseteq M$ ее матрица $a_{ij}(p)$ является недефективной, тогда в некоторой окрестности точки $p$ существует система координат, в которой метрические тензоры $g$ и $\bar g$ принимают вид*

$$g=\sum_{\mu=1}^{k}e_\mu\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\mu}}^{t}(f_\beta-f_\mu)^{\tau_\beta}(dx^\mu)^2+\sum_{\rho=k+1}^{t}\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\mu}}^{t}(f_\rho-f_\beta)^{\tau_\beta}\overset{\rho}{g}_{i_\rho j_\rho}dx^{i_\rho}dx^{j_\rho},$$

$$\bar g=\prod_{\beta=1}^{t}(f_\beta)^{-\tau_\beta}\left\{\sum_{\mu=1}^{k}e_\mu(f_\mu)^{-1}\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\mu}}^{t}(f_\beta-f_\mu)^{\tau_\beta}(dx^\mu)^2+\sum_{\rho=k+1}^{t}(f_\rho)^{-1}\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\mu}}^{t}(f_\rho-f_\beta)^{\tau_\beta}\overset{\rho}{g}_{i_\rho j_\rho}dx^{i_\rho}dx^{j_\rho}\right\},\tag{22}$$

*где $f_\mu=f_\mu(x^\mu)$, $f_\rho=\mathrm{const}\neq0$; $e_\mu=\pm1$; $\mu=1,\dots,k$, $\rho=k+1,\dots,t$; $\tau_1=\ldots=\tau_k=1$, $\tau_\rho>1$; $i_\rho,j_\rho=n_\rho+1,n_\rho+2,\dots,n_\rho+\tau_\rho$, $n_1=0,\dots,n_\gamma=\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{\gamma-1}$, $\gamma=2,3,\dots,t$, и $\overset{\rho}{g}_{i_\rho j_\rho}(x^{n_\rho+1},\dots,x^{n_\rho+\tau_\rho})$ — метрические тензоры $\tau_\rho$-мерных подмногообразий $\overset{\rho}{V}$.*

Из (22) следует, что $M$ локально приводимо. Предположим теперь, что $M$ является локально почти приводимым многообразием. Пусть $p\in M$ и $U_1$ — такая окрестность $p$, что $U_1=V_0\times_{\sigma_1}V_1\times\ldots\times_{\sigma_m}V_m$, $\sigma_\rho\in\mathfrak{F}(V_0)$ и $V_0\times_{\sigma_1}R^1\times\ldots\times_{\sigma_m}R^1$ — пространство постоянной кривизны $K$. Такое разложение $U_1$ называется $K$-разложением, а риманово многообразие $V_n=(M,g)$ называется пространством $V(K)$ (см. [25, 26]).

Как известно, $V_n=(M,g)$, $n\geqslant3$, имеет постоянную кривизну тогда и только тогда, когда тензор проективной кривизны Вейля $W$ тождественно обращается в нуль на $M$. Многообразие $V_n$ является эйнштейновым тогда и только тогда, когда

$$g(W(X,Y)U,V)+g(W(X,Y)V,U)=0.$$

Если многообразие Эйнштейна $V_n$ допускает геодезическое отображение на $\bar V_n=(M,\bar g)$, то выполняется условие

$$\bar g(W(X,Y)U,V)+\bar g(W(X,Y)V,U)=0,\quad X,Y,U,V\in\chi(M).\tag{23}$$

Рассматривая (23) в такой системе координат, в которой метрики $g$ и $\tilde g$ принимают формы (22), в силу [26, 70] и сделанных соображений выше легко получаем следующую теорему.

**Теорема 7.** *Многообразие Эйнштейна $V_n$ допускает геодезические отображения на многообразие Эйнштейна $\bar V_n$ тогда и только тогда, когда:*

(i) *многообразия $V_n$ и $\bar V_n$ типов $V(K)$, $K=-B$, и $V(\bar K)$, $\bar K=-\bar B$, соответственно;*

(ii) *для всех $p\in M$ существуют окрестности*

$$U_1=V_0\times_{\sigma_1}V_1\times\ldots\times_{\sigma_m}V_m,\quad U_2=\bar V_0\times_{\bar\sigma_1}V_1\times\ldots\times_{\bar\sigma_m}V_m,\quad \bar\sigma_\rho\in F(V_0),$$

*так что $V_0$ и $\bar V_0$ геодезически соответствующие $k$-мерные пространства постоянных кривизн $K$ и $\bar K$, соответственно;*

(iii) *$(V_\rho,\overset{\rho}{g})$, $\rho=1,2,\dots,m$, — $n_\rho$-мерные пространства Эйнштейна со скалярной кривизной $R_\rho=n_\rho(n_\rho-1)K_\rho$, где*

$$K_\rho=-\frac{\sigma_{\rho,a}\sigma_{\rho,b}\overset{o}{g}{}^{ab}}{4\sigma_\rho}+B\sigma_\rho=-\frac{\bar\sigma_{\rho,a}\bar\sigma_{\rho,b}\overset{o}{\bar g}{}^{ab}}{4\bar\sigma_\rho}+\bar B\bar\sigma_\rho=\mathrm{const},$$

*$\sigma_{\rho,a}=X_a(\sigma_\rho)$, $\overset{o}{g}{}^{ab}=(\overset{o}{g}{}^{ab})^{-1}$, $a,b=1,\dots,k$, $\overset{o}{g}$ и $\overset{o}{\bar g}$, будучи метрическими тензорами на $V_0$ и $\bar V_0$, соответственно;*

(iv) *выполняется условие* $\overset{o}{g}{}^{ab}\sigma_{\rho,b} = \overset{o}{\bar{g}}{}^{ab}\bar{\sigma}_{\rho,b}$.

Если многообразие Эйнштейна $V_n$ допускает геодезическое отображение на многообразие Эйнштейна $\bar{V}_n$, то функции $f_\alpha$ из (22) должны удовлетворять системе (14). Итак, в силу теоремы 1 и результатов [23, с. 156—162], элементарным вычислением получаем следующее утверждение.

**Теорема 8.** *Если многообразие Эйнштейна* $V_n$ *с* $\mathrm{Ric} = (n-1)Bg$, $B \neq 0$, *допускает геодезическое отображение на многообразие Эйнштейна* $\bar{V}_n$ *с* $\overline{\mathrm{Ric}} = (n-1)\bar{B}\bar{g}$ *и* $\psi_i \neq 0$ *в точке* $p \in M$, *то в некоторой окрестности* $p$ *существует такая система координат, что метрические формы* $g$ *и* $\bar{g}$ *принимают один из следующих видов*:

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{4(c_1 - x^1)(c_2 - Bx^1)}(dx^1)^2 + (c_1 - x^1)h_{i_1 j_1}dx^{i_1}dx^{j_1}, \\ \bar{g} &= \frac{1}{(x^1)^2(c_1)^{n-1}}g_{11}(dx^1)^2 + \frac{1}{x^1(c_1)^n}g_{i_1 j_1}dx^{i_1}dx^{j_1}, \end{aligned} \tag{24}$$

*где* $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, $h = h(x^2, \dots, x^n)$ — *такая* $(n-1)$*-мерная метрика Эйнштейна, что тензор Риччи* $\overset{1}{R}_{i_1 j_1} = (n-2)(c_1 B - c_2)h_{i_1 j_1}$, $\bar{B} = (c_1)^n c_2$,

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{4(c_1 - x^1)(c_2 - Bx^1)}(dx^1)^2 + (c_1 - x^1)(c_1 - c^2)^{\tau_2}\overset{1}{h}_{i_1 j_1}dx^{i_1}dx^{j_1} + \\ &\quad + (c_2 - x^1)(c_2 - c^1)^{\tau_1}\overset{2}{h}_{i_2 j_2}dx^{i_2}dx^{j_2}, \\ \bar{g} &= \frac{1}{(x^1)^2(c_1)^{\tau_1}(c_2)^{\tau_2}}g_{11}(dx^1)^2 + \frac{1}{x^1(c_1)^{\tau_1+1}(c_2)^{\tau_2}}g_{i_1 j_1}dx^{i_1}dx^{j_1} + \\ &\quad + \frac{1}{x^1(c_1)^{\tau_1}(c_2)^{\tau_2+1}}g_{i_2 j_2}dx^{i_2}dx^{j_2}, \end{aligned} \tag{25}$$

*где* $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, $\overset{1}{h} = \overset{1}{h}(x^2, \dots, x^{\tau_1+1})$ — *такая* $\tau_1$*-мерная метрика Эйнштейна, что*

$$\overset{1}{R}_{i_1 j_1} = (\tau_1 - 1)B(c_1 - c_2)^{\tau_2+1}\overset{1}{h}_{i_1 j_1},$$

$\overset{2}{h} = \overset{2}{h}(x^{\tau_1+2}, \dots, x^n)$ — *такая* $\tau_2$*-мерная метрика Эйнштейна, что*

$$\overset{2}{R}_{i_2 j_2} = (\tau_2 - 1)B(c_2 - c_1)^{\tau_1+1}\overset{2}{h}_{i_2 j_2},$$

$i_1, j_1 = 2, \dots, \tau_1 + 1$; $i_2, j_2 = \tau_1 + 2, \dots, n$; $1 + \tau_1 + \tau_2 = n$, $\bar{B} = B(c_1)^{\tau_1+1}(c_2)^{\tau_2+1}$,

$$\begin{aligned} g &= \sum_{\mu=1}^{k}\prod_{\nu=1,\nu\neq\mu}^{k}\frac{(x^\nu - x^\mu)}{Q(x^\mu)}(dx^\mu)^2 + \sum_{\rho=k+1}^{t}\prod_{\mu=1}^{k}(f_\rho - x^\mu)A_\rho \overset{\rho}{g}_{i_\rho j_\rho}dx^{i_\rho}dx^{j_\rho}, \\ \bar{g} &= \frac{1}{x^1 \dots x^k}\prod_{\rho=k+1}^{t}(f_\rho) - \tau_\rho\Bigg\{\sum_{\mu=1}^{k}(x^\mu)^{-1}\prod_{\nu 1,\nu\neq\mu}^{k}\frac{(x^\nu - x^\mu)}{Q(x^\mu)}(dx^\mu)^2 + \\ &\quad + \sum_{\rho=k+1}^{t}(f_\rho)^{-1}\prod_{\mu=1}^{k}(f_\rho - x^\mu)A_\rho \overset{\rho}{g}_{i_\rho j_\rho}dx^{i_\rho}dx^{j_\rho}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{26}$$

*где*

$$A_\rho = \prod_{\omega=k+1,\omega\neq\rho}^{t}(f_\rho - f_\omega)^{\tau\omega},$$

$f_\rho, f_\omega = \mathrm{const} \neq 0$, $\rho, \omega = k+1, \dots, t$; $Q(z)$ *является полиномом вида*

$$Q(z) = (-1)^{k+1}4Bz^{k+1} + Cz^k + A_{k-1}z^{k-1} + \dots + A_1 z + 4C_1;$$

*здесь*

$$C_1 = \bar{B} \prod_{\rho=k+1}^{t} (f_\rho)^{-\tau_\rho},$$

$C, A_1, \ldots, A_{k-1} = \mathrm{const}$, *$f_\rho$ для всех $\rho$ являются корнями многочлена $Q(z)$, $k > 1$, $t \leqslant 2k+1$, $\overset{\rho}{g}$ — метрические тензоры $\tau_\rho$-мерные многообразия Эйнштейна, для которых*

$$\overset{\rho}{R}_{i_\rho j_\rho} = (\tau_\rho - 1) K_\rho \overset{\rho}{g}_{i_\rho j_\rho}, \quad K_\rho = \frac{1}{4}(-1)^{k+1} A_\rho Q'(f_\rho),$$

$i_\rho, j_\rho = n_\rho + 1, \ldots, n_\rho + \tau_\rho$, $n_1 = 0$, $n_\gamma = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{\gamma-1}$, $\gamma = 2, \ldots, t, \tau_\rho > 1$. *Функция $\Psi$ определяется следующим образом*:

$$\exp(-2\Psi) = x^1 \ldots x^k \prod_{\rho=k+1}^{t} (f_\rho)^{\tau_\rho}.$$

**Замечание.** В случае $B = 0$ локальная структура многообразий Эйнштейна, допускающая геодезические отображения, может быть легко получена на основе результатов [20].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Березовский В. Е., Ковалев Л. Е., Микеш Й.* О сохранении тензора Римана относительно некоторых отображений пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 2018. — № 9. — С. 3–10.
2. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. — М.: Мир, 1990.
3. *Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И., Микеш Й.* О геодезической определенности точками подобия// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *182*. — С. 19–27.
4. *Евтушик Л. Е., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И., Микеш Й.* Конформные отображения на пространства Эйнштейна// Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 10. — С. 8–13.
5. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947-1948..
6. *Киосак В. А., Микеш Й.* О геодезических отображениях пространств Эйнштейна// Изв. вузов. Мат. — 2003. — № 11. — С. 36—41.
7. *Микеш Й.* Геодезические отображения полусимметрических римановых пространств. — Деп. в ВИНИТИ № 3924-76. — 1976..
8. *Микеш Й.* О некоторых классах римановых пространств, замкнутых относительно геодезических отображений// Тез. VII Всесоюзн. конф. по совр. дифференциальной геометрии (Минск, 1979.). — Минск, 1979. — С. 126.
9. *Микеш Й.* Геодезические и голоморфно проективные отображения специальных римановых пространств/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Одесса, 1979.
10. *Микеш Й.* О геодезических отображениях Риччи 2-симметрических римановых пространств// Мат. заметки. — 1980. — *28*, № 2. — С. 313–317.
11. *Микеш Й.* О геодезических отображениях пространств Эйнштейна// Мат. заметки. — 1980. — *28*, № 6. — С. 935—938.
12. *Микеш Й.* Об эквидистантных келеровых пространствах// Мат. заметки. — 1985. — *38*, № 4. — С. 627—633.
13. *Микеш Й.* О сасакиевых и эквидистантных келеровых пространствах// Докл. АН СССР. — 1986. — *291*, № 1. — С. 33—36.
14. *Микеш Й.* О существовании $n$-мерных компактных римановых пространств, допускающих нетривиальные проективные преобразования «в целом»// Докл. АН СССР. — 1989. — *305*, № 3. — С. 534—536.
15. *Микеш Й., Гинтерлейтнер И.* Об одном вариационном свойстве геодезических в римановых и финслеровых пространствах// Вестн. Твер. ун-та. Сер. Прикл. мат. — 2008. — *8*. — С. 59–63.
16. *Микеш Й., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И.* Геодезические отображения «в целом» Риччи-плоских пространств с $n$ полными геодезическими линиями// Мат. заметки. — 2020. — *108*, № 2. — С. 306–310.
17. *Микеш Й., Киосак В. А.* О геодезических отображениях четырехмерных пространств Эйнштейна. — Деп. в ВИНИТИ № 1678-82. — 1982..
18. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.

19. *Петров А. З.* О геодезическом отображении пространств Эйнштейна// Изв. вузов. Мат. — 1961. — № 2. — С. 130–136.
20. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966.
21. *Синюков Н. С.* Эквидистантные римановы пространства// в кн.: Науч. ежегодник Одесск. ун-та. — Одесса, 1957. — С. 133–135.
22. *Синюков Н. С.* Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 6. — С. 1312–1314.
23. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
24. *Синюкова Е. Н.* О геодезических отображениях некоторых специальных римановых пространств// Мат. заметки. — 1981. — *30*, № 6. — С. 889–894.
25. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*, № 4 (70). — С. 45–116.
26. *Солодовников А. С.* Геометрическое описание всех возможных представлений римановой метрики в форме Леви-Чивиты// Тр. семин. вектор. тензор. анал. — 1963. — № 12. — С. 131–173.
27. *Степанов С. Е.* К глобальной теории проективных отображений// Мат. заметки. — 1995. — *58*, № 1. — С. 111–118.
28. *Степанов С. Е.* О некоторых конформных и проективных скалярных инвариантах риманова многообразия// Мат. заметки. — 2006. — *80*, № 6. — С. 902–907.
29. *Фоменко В. Т.* Об определенности замкнутых поверхностей// Докл. РАН. — 2006. — *407*, № 4. — С. 453–456.
30. *Широков П. А.* Избранные работы по геометрии. — Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1966.
31. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
32. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти. — М.: ИЛ, 1957.
33. *Alexandrova I. A., Mikeš J., Stepanov S. E., Tsyganok I. I.* Theorems of Liouville types in theory mappings of the complete Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2017. — *221*, № 6. — P. 737–744.
34. *Aminova A. V.* On geodesic mappings of the Riemannian spaces// Tensor (N.S.). — 1987. — *46.* — P. 179–186.
35. *Brinkmann H. W.* Einstein spaces which are mapped conformally on each other// Math. Ann. — 1925. — *94.* — P. 119—-145.
36. *Chudá H., Mikeš J.* First quadratic integral of geodesics with certain initial conditions// Proc. 6 Int. Conf. on Applied Mathematics APLIMAT (Bratislava, Slovak Republic, February 6-9, 2007). — Bratislava, 2007. — P. 85–88.
37. *Chudá H., Mikeš J.* Conformally geodesic mappings satisfying a certain initial condition// Arch. Math. (Brno). — 2011. — *47.* — P. 389–394.
38. *Ćirić M., Zlatanović M., Stanković M., Velimirović Lj.* On geodesic mappings of equidistant generalized Riemannian spaces// Appl. Math. Comput. — 2012. — *218.* — P. 6648–6655.
39. *DeTurck D. M., Kazdan J. L.* Some regularity theorems in Riemannian geometry// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4). — 1981. — *14*, № 3. — P. 249–260.
40. *Formella S.* Geodesic mappings of Riemannian manifolds onto Einstein manifolds// Tensor (N.S.). — 1982. — *39.* — P. 141–147.
41. *Formella S.* Geodesic mappings between Einstein manifolds// Pr. Nauk. Politech. Szczec. Inst. Mat. — 1987. — *323*, № 9. — P. 41–47.
42. *Formella S.* On geodesic mappings in some Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds// Tensor (N.S.). — 1987. — *46.* — P. 311–315.
43. *Formella S.* On geodesic mappings in Einstein manifolds// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. — 1988. — *46.* — P. 483–492.
44. *Formella S.* Generalized Einstein manifolds// Rend. Circ. Mat. Palermo (2). Suppl. — 1990. — *22.* — P. 49–58.
45. *Formella S.* On generalized Ricci-recurrent Riemannian manifolds// Pr. Nauk. Politech. Szczec. Inst. Mat. — 1991. — *411*, № 12. — P. 15–23.
46. *Formella S.* Projective structures in Sinyukov manifolds// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. — 1992. — *56.* — P. 263–271.
47. *Formella S.* Geodesic mappings of pseudo-Riemannian manifolds// Demonstr. Math. — 1994. — *27*, № 2. — P. 449–460.

48. *Formella S.* On some class of nearly conformally symmetric manifolds// Colloq. Math. — 1995. — *68*, № 1. — P. 149–164.
49. *Formella S.* A note on geodesic and almost geodesic mappings of homogeneous Riemannian manifolds// Opusc. Math. — 2005. — *25*, № 2. — P. 181–187.
50. *Formella S., Makowski J.* On a class of projectively Ricci-flat Riemannian manifolds// Pr. Nauk. Politech. Szczec. Inst. Mat. — 1987. — *326*, № 10. — P. 91–95.
51. *Formella S., Mikeš J.* Geodesic mappings of Einstein spaces// Ann. Sci. Stetin. — 1994. — *9*. — P. 31–40.
52. *Formella S., Policht J.* On geodesic Ricci-flat Riemannian manifolds// Pr. Nauk. Politech. Szczec. Inst. Mat. — 1987. — *323*, № 9. — P. 49–55.
53. *Formella S., Policht J.* On Riemannian manifolds admitting conformal and geodesic mappings// Pr. Nauk. Politech. Szczec. Inst. Mat. — 1987. — *326*, № 10. — P. 97–102.
54. *Hall G.* Projective structure in space-times// Proc. Int. Conf. "Advances in Lorentzian Geometry" (Berlin, November 18–21, 2009). — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2011. — P. 71–79.
55. *Hinterleitner I.* Conformally-projective harmonic diffeomorphisms of equidistant manifolds// Proc. XV Int. Workshop on Geometry and Physics (Puerto de la Cruz, Spain, September 11–16, 2006). — Madrid: Real Sociedad Matemática Española, 2007. — P. 298–303.
56. *Hinterleitner I.* Special mappings of equidistant spaces// J. Appl. Math. — 2008. — *2*. — P. 31–36.
57. *Hinterleitner I.* On global geodesic mappings of ellipsoids// AIP Conf. Proc. — 2012. — *1460*. — P. 180–184.
58. *Hinterleitner I.* Geodesic mappings on compact Riemannian manifolds with conditions on sectional curvature// Publ. Inst. Math. — 2013. — *94 (108)*. — P. 125–130.
59. *Hinterleitner I., Mikeš J.* On the equations of conformally-projective harmonic mappings// AIP Conf. Proc. — 2007. — *956*. — P. 141–148.
60. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Projective equivalence and spaces with equi-affine connection// J. Math. Sci. — 2011. — *177*. — P. 546–550.
61. *Hinterleiner I., Mikeš J.* Fundamental equations of geodesic mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 2011. — *174*. — P. 537–554.
62. *Hinterleiner I., Mikeš J.* Geodesic mappings of (pseudo-) Riemannian manifolds preserve class of differentiability// Miskolc Math. Notes. — 2013. — *14*. — P. 89–96.
63. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Geodesic mappings and Einstein spaces// in: Geometric Methods in Physics. — Basel: Birkhäuser, 2013. — P. 331–335.
64. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Geodesic mappings and differentiability of metrics, affine and projective connections// Filomat. — 2015. — *29*. — P. 1245–1249.
65. *Hinterleiner I., Mikeš J.* Geodesic mappings onto Riemannian manifolds and differentiability// Proc. 18 Int. Conf. on Geometry, Integrability, and Quantization (Varna, Bulgaria, June 3–8, 2016). — Sofia: Avangard Prima, 2017. — P. 183–190.
66. *Kiosak V., Matveev V. S.* Complete Einstein metrics are geodesically rigid// Commun. Math. Phys. — 2009. — *289*, № 1. — P. 383–400.
67. *Kuzmina I., Mikeš J.* On pseudoconformal models of fibrations determined by the algebra of antiquaternions and projectivization of them// Ann. Math. Inform. — 2013. — *42*. — P. 57–64.
68. *Lagrange J. L.* Sur la construction des cartes géographiques// Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin. — 1779. — № 4. — P. 637–692.
69. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni dello equazioni dinamiche// Ann. Mat. Milano. — 1896. — *24*. — P. 255–300.
70. *Mikeš J.* Geodesic mappings of special Riemannian spaces// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. — 1988. — *46*. — P. 793–813.
71. *Mikeš J.* On existence of nontrivial global geodesic mappings on $n$-dimensional compact surfaces of revolution// Proc. Int. Conf. "Differential Geometry and Its Applications" (Brno, Czechoslovakia, August 27 – September 2, 1989). — Singapore: World Scientific, 1990. — P. 129–137.
72. *Mikeš J.* Global geodesic mappings and their generalizations for compact Riemannian spaces// Silesian Univ. Math. Publ. Opava. — 1993. — *1*. — P. 143–149.
73. *Mikeš J.* Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces// J. Math. Sci. — 1996. — *78*. — P. 311–333.
74. *Mikeš J., Berezovski V.* Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. — 1992. — *56*. — P. 491–494.

75. *Mikeš J., Berezovski V., Stepanova E., Chudá H.* Geodesic mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 2016. — *217*, № 5. — P. 607–623.
76. *Mikeš J., Chudá H.* On geodesic mappings with certain initial conditions// Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. — 2010. — *26.* — P. 337–341.
77. *Mikeš J., Chudá H., Hinterleitner I.* Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition// Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. — 2014. — *11*, № 5. — 1450044.
78. *Mikeš J., Hinterleitner I., Guseva N.* There are no conformal Einstein rescalings of pseudo-Riemannian Einstein spaces with $n$ complete light-like geodesics// Mathematics. — 2019. — *7*, № 9. — 801.
79. *Mikeš J., Stepanova E., Vanžurová A.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015.
80. *Mikeš J., Stepanova E., Vanžurová A.* Differential Geometry of Special Mappings. 2nd ed.. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2019.
81. *Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I.* Geodesic Mappings and Some Generalizations. — Olomouc, Czech Republic: Palacky Univ. Press, 2009.
82. *Najdanović M., Zlatanović M., Hinterleitner I.* Conformal and geodesic mappings of generalized equidistant spaces// Publ. Inst. Math. Beograd (N.S.). — 2015. — *98 (112).* — P. 71–84.
83. *Rýparová L., Mikeš J.* On global geodesic mappings of quadrics of revolution// Proc. 16 Int. Conf. on Applied Mathematics APLIMAT (Bratislava, Slovak Republic, January 31 -– February 2, 2017). — Bratislava, 2017. — P. 1342–1348.
84. *Rýparová L., Mikeš J.* On geodesic bifurcations// Proc. 18 Int. Conf. on Geometry, Integrability, and Quantization (Varna, Bulgaria, June 3–8, 2016). — Sofia: Avangard Prima, 2017. — P. 217–224.
85. *Rýparová L., Mikeš J.* Bifurcation of closed geodesics// Proc. 19 Int. Conf. on Geometry, Integrability, and Quantization (Varna, Bulgaria, June 2–7, 2017). — Sofia: Avangard Prima, 2018. — P. 188–192.
86. *Rýparová L., Mikeš J.* On geodesic bifurcations of product spaces// J. Math. Sci. — 2019. — *239*, № 1. — P. 86–91.
87. *Shen Z.* On projectively related Einstein metrics in Riemann–Finsler geometry// Math. Ann. — 2001. — *320*, № 4. — P. 625–647.
88. *Stanković M., Mincić S., Velimirović Lj., Zlatanović M.* On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 2010. — *124.* — P. 77–90.
89. *Stepanov S.* Vanishing theorems in affine, Riemannian, and Lorenz geometries// J. Math. Sci. — 2007. — *141*, № 1. — P. 929–964.
90. *Stepanov S., Shandra I., Mikeš J.* Harmonic and projective diffeomorphisms// J. Math. Sci. — 2015. — *207.* — P. 658–668.
91. *Venzi P.* Klassifikation der geodaetischen Abbildungen $\overline{\mathrm{Ric}} - \mathrm{Ric} = J \cdot g$// Tensor (N.S.). — 1982. — *37.* — P. 137–147.

Mikeš Josef
Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия
E-mail: `Josef.Mikes@upol.cz`

Formella Stanisław
Западно-Поморский технологический университет, Щецин, Польша
E-mail: `Stanislaw.Formella@zut.edu.pl`

Hinterleitner Irena
Технический университет в Брно, Чехия
E-mail: `Hinterleitner.I@fce.vutbr.cz`

Гусева Надежда Ивановна
Московский педагогический государственный университет;
Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва
E-mail: `ngus12@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 203 (2021). С. 62–70
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-203-62-70

УДК 514.763

# ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И СВЯЗНОСТИ НА ГРУППОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ТЕРСТОНА

© 2021 г. **В. И. ПАНЬЖЕНСКИЙ, О. П. СУРИНА**

Аннотация. В работе представлен обзор результатов, касающихся вопроса существования левоинвариантных контактных метрических структур и связностей на групповых многообразиях Терстона $Nil$ и $Sol$. Введено понятие линейной связности, согласованной с распределением.

***Ключевые слова***: контактная структура, метрика, связность, группа Ли.

# LEFT-INVARIANT CONTACT METRIC STRUCTURES AND CONNECTIONS ON THURSTON GROUP MANIFOLDS

© 2021 **V. I. PANZHENSKII, O. P. SURINA**

Abstract. This paper is a review of results concerning the existence of left-invariant contact metric structures and connections on the Thurston group manifolds $Nil$ and $Sol$. The concept of a linear connection consistent with a distribution is introduced.

***Keywords and phrases***: contact structure, metric, connection, Lie group.

***AMS Subject Classification***: 53B21

**1. Введение.** В настоящее время большое число исследований посвящено различным структурам на группах Ли (см. [13, 15, 17–20, 22]). К таким структурам, в частности, можно отнести и контактные метрические структуры. В данной работе представлен обзор результатов, касающихся вопроса существования левоинвариантных контактных метрических структур и связностей на групповых многообразиях Терстона $Nil$ и $Sol$. Трехмерные группы Ли $Nil$ и $Sol$ входят в известный список восьми трехмерных модельных геометрий Терстона. Напомним, что известный американский математик Уильям Терстон, исследуя проблему геометризации трехмерных многообразий, доказал, что существует лишь восемь модельных трехмерных геометрий. Модельная геометрия определяется парой $(M, G)$, где $M$ — гладкое односвязное трехмерное многообразие, $G$ — максимальная группа диффеоморфизмов с компактным стабилизатором, транзитивно действующая на $M$. Кроме того, требуется существование дискретной подгруппы группы $G$, действующей на $M$ как группа накрытия, такой, что фактор-многообразие по этому действию компактно. Указанные требования обеспечивают существование на $M$ полной римановой метрики, для которой группа $G$ является группой изометрий (см. [12, 24]).

Заметим также, что группы Ли широко используются в качестве примеров в теории динамических систем, теории оптимального управления, субримановой геометрии (см. [1–4, 10, 11, 14]).

В разделе 2 приводятся определения основных понятий, используемых в работе, а также вводится понятие линейной связности, согласованной с распределением.

В разделе 3 представлен обзор результатов работ [6, 7] по геометрии сасакиевой структуры группы Гейзенберга, включая многомерный случай. Сформулирована теорема о существовании и единственности контактной метрической связности с кососимметрическим кручением. Доказано, что данная связность является связностью, согласованной с контактным распределением, а ее контактные геодезические совпадают с геодезическими усеченной связности. Установлено, что полусимметрическая связность, определенная контактной формой и метрикой, не имеет контактных геодезических и, следовательно, не согласована с контактным распределением.

В разделе 4 изложены результаты работ [8,9] по геометрии контактной метрической структуры на группе Ли $Sol$. На ориентированном многообразии $Sol$ существует единственная левоинвариантная контактная метрическая структура. Найдены все левоинвариантные контактные метрические связности. Доказано, что геодезические усеченной связности совпадают с контактными геодезическими плоской связности. Получена оценка секционной кривизны многообразия $Sol$.

**2. Контактная метрическая структура и контактная метрическая связность.** Пусть $M$ — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$. Контактной формой на $M$ называется дифференциальная 1-форма $\eta$, удовлетворяющая условию

$$\eta \wedge (d\eta)^m \neq 0,$$

где $\wedge$ — внешнее произведение, $d$ — внешний дифференциал. Контактная форма $\eta$ определяет вполне неголономное $2m$-мерное распределение $H = \ker \eta$, которое называется контактной структурой на $M$. Гладкое многообразие, наделенное контактной структурой, называется контактным многообразием. Контактное распределение $H$ называется первым фундаментальным распределением, или горизонтальным, а 1-мерное распределение $V = \ker d\eta$ — вторым фундаментальным распределением, или вертикальным. В каждой точке $p \in M$ касательное пространство $T_pM$ распадается в прямую сумму дополняющих друг друга подпространств $H_p$ и $V_p$: $T_pM = H_p \oplus V_p$. Существует единственное векторное поле $\xi \in V$, удовлетворяющее условию $\eta(\xi) = 1$. Поле $\xi$ называется характеристическим или вектором Риба (см. [5, 16]).

Контактной метрической структурой на многообразии $M$ называется четверка тензорных полей $(\eta, \xi, \varphi, g)$, где $\eta$ — дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой, $\xi$ — характеристическое векторное поле, $\varphi$ — структурный эндоморфизм модуля векторных полей на $M$, $g$ — риманова метрика. При этом требуется выполнение следующих условий (см. [5, 16]):

$$\eta(\xi) = 1, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \varphi^2 = -id + \eta \otimes \xi,$$
$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad d\eta = g(X, \varphi Y).$$

Контактная метрическая структура называется $k$-контактной, если контактная форма $\eta$ является формой Киллинга, т.е.

$$\nabla_X(\eta)Y + \nabla_Y(\eta)X = 0,$$

где $\nabla$ — связность Леви-Чивиты метрики $g$. Контактная метрическая структура называется сасакиевой, если она является нормальной, т.е. выполняется условие

$$\nabla_X(\varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X.$$

Диффеоморфизм $\varphi\colon M \to M$ называется автоморфизмом контактной метрической структуры, если он сохраняет форму $\eta$ и метрику $g$. Размерность группы Ли автоморфизмов контактной или почти контактной метрической структуры не превосходит $(m+1)^2$ (см. [23]).

Линейная связность $\widetilde{\nabla}$ называется контактной метрической связностью, если в этой связности контактная форма $\eta$ и метрический тензор $g$ ковариантно постоянны: $\widetilde{\nabla}\eta = 0$, $\widetilde{\nabla}g = 0$. Такая связность необходимо имеет кручение, а ковариантный тензор деформации $T$ кососимметричен по последним двум аргументам. Если тензор $T$ кососимметричен по всем аргументам, то $T = \frac{1}{2}S$, где $S$ — ковариантный тензор кручения связности $\widetilde{\nabla}$.

Если на многообразии $M$ заданы неголономное распределение $H$, линейная связность и риманова метрика, то ортогональная проекция связности на распределение определяет усеченную связность (см. [2, 3]). В неголономной механике считается, что механическая система с неголономным распределением на конфигурационном пространстве движется по траектории, которая, вообще говоря, не является решением вариационной задачи на минимум. В [3] доказано, что траектория движения такой механической системы с квадратичным лагранжианом является геодезической усеченной связности.

Пусть $M$ — гладкое $n$-мерное многообразие и $H$ — распределение на $M$ размерности $r < n$, т.е. семейство $r$-мерных подпространств $\{H_p\}$ касательных пространств $T_pM$, гладко зависящих от точки $p \in M$. Линейную связность $\nabla$ на $M$ назовем *согласованной с распределением* $H$, если через каждую точку $p \in M$ в каждом направлении $v_p \in H_p$ проходит единственная геодезическая, касающаяся распределения $H$ (поле ее касательных векторов принадлежит $H$). Геодезические связности $\nabla$, касающиеся распределения $H$, назовем *контактными геодезическими связности* $\nabla$.

**3. Контактная метрическая связность на многообразии** $Nil$**.** Среди групповых трехмерных многообразий Терстона наиболее известной является нильпотентная группа Ли вещественных матриц вида

$$Nil = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Данную группу также называют группой Гейзенберга. На этой группе имеется левоинвариантная полная риманова метрика $g$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - ydx)^2$$

и контактная форма

$$\eta = dz - ydx,$$

которые определяют на $Nil$ сасакиеву структуру $(\eta, \xi, \varphi, g)$.

Группа изометрий римановой метрики $g$ является четырехмерной группой Ли, базисные операторы которой имеют вид

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2 + x\partial_3, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_4 = y\partial_1 - x\partial_2 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)\partial_3$$

(см. [6]), где $\partial_1 = \partial/\partial x$, $\partial_2 = \partial/\partial y$, $\partial_3 = \partial/\partial z$ — естественный базис векторных полей на $Nil$. Первые три оператора являются левоинвариантными векторными полями, а четвертый — оператор вращения. Нетрудно убедиться, что контактная форма $\eta$ инвариантна относительно группы изометрий. В [6] доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *На группе Гейзенберга с инвариантной сасакиевой структурой существует единственная контактная метрическая связность* $\widetilde{\nabla}$ *с кососимметрическим кручением, инвариантная относительно группы изометрий. Связность* $\widetilde{\nabla}$ *определяется следующим равенством*

$$g(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2} d\eta(X, Y) \wedge \eta(Z).$$

Коэффициенты $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ связности $\widetilde{\nabla}$ вычисляются по формуле

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kp}[\partial_i g_{pj} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij} + (d\eta \wedge \eta)_{ijp}],$$

где $g_{ij}$ и $g^{ij}$ ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора $g$.

Доказано (см. [7]), что данная теорема справедлива и для многомерной группы Гейзенберга, а связность $\widetilde{\nabla}$ является контактной метрической связностью для любой сасакиевой структуры. Имеет место также следующее утверждение.

**Теорема 2** (см. [7])**.** *Секционная кривизна* $\widetilde{k}$ *многомерной группы Гейзенберга с контактной метрической связностью* $\widetilde{\nabla}$ *принадлежит числовому отрезку* $[-1, 0]$*, а тензоры кручения и кривизны ковариантно постоянны.*

Вполне неголономное контактное распределение $H = \ker \eta$ вместе с ограничением метрики на это распределение

$$ds^2|_H = dx^2 + dy^2$$

определяет на группе Гейзенберга субриманову структуру. Горизонтальную кривую $\gamma$: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ ($\dot\gamma \in H$, $s$ — естественный параметр) назовем субримановой геодезической, если она является геодезической относительно усеченной связности $\overline{\nabla}$: $\overline{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, где $\overline{\nabla}$ — ортогональная проекция связности $\nabla$ (или $\widetilde{\nabla}$) на распределении $H$. Используя неголономное ортонормированное поле реперов $\{p, E_1, E_2, E_3\}$:

$$E_1 = \partial_1 + y\partial_3, \quad E_2 = \partial_2, \quad E_3 = \partial_3,$$

где $E_1$ и $E_2$ принадлежат контактному распределению $H$, а $E_3 = \xi \in V$ и вычисляя неголономные коэффициенты связностей $\nabla$ и $\widetilde{\nabla}$, находим, что

$$\nabla_{E_i}E_j = \widetilde{\nabla}_{E_i}E_j = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Поэтому проекции контактной метрической связности $\widetilde{\nabla}$ и связности Леви-Чивиты $\nabla$ совпадают и, следовательно, определяют одну и ту же усеченную связность $\overline{\nabla}$: $\overline{\nabla}_{E_i}E_j = 0$, $i, j = 1, 2$. Переходя от неголономных координат к естественным, находим дифференциальные уравнения субримановых геодезических:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}.$$

Интегрируя полученные уравнения, получаем общее решение

$$x = a_1s + b_1, \quad y = a_2s + b_2, \quad z = \frac{1}{2}a_1a_2s^2 + a_1b_2s + b_3.$$

При исследовании строения геодезических, в силу левоинвариантности субримановой структуры можно ограничится геодезическими, выходящими из единицы группы

$$x = a_1s, \quad y = a_2s, \quad z = \frac{1}{2}a_1a_2s^2.$$

Так как $s$ — естественный параметр, то $a_1^2 + a_2^2 = 1$.

Отождествив группу Гейзенберга с $\mathbb{R}^3$, а репер $\{p, E_1, E_2, E_3\}$ в единице группы с ортонормированным репером $\{O, i, j, k\}$, $O(0,0,0)$, $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$ относительно стандартной евклидовой метрики $p_E$ в $\mathbb{R}^3$, мы можем исследовать строение геодезических, используя геометрию евклидова пространства $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, p_E)$. Контактная плоскость в единице группы отождествляется с координатной плоскостью $Oxy$. Вектор $a(a_1, a_2)$ в этой плоскости определяет направление геодезической. Каждая такая геодезическая является либо параболой, если $a_1 \cdot a_2 \neq 0$, либо прямой $Ox(a_2 = 0)$, либо прямой $Oy(a_1 = 0)$ (см. [10]).

Так как контактная метрическая связность $\widetilde{\nabla}$ имеет кососимметрическое кручение, то ее геодезические совпадают с геодезическими связности Леви-Чивиты $\nabla$. Дифференциальные уравнения этих геодезических имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{ds^2} + y\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} &= 0,\\
\frac{d^2y}{ds^2} - y\Big(\frac{dx}{ds}\Big)^2 + \frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds} &= 0,\\
\frac{d^2z}{ds^2} + y^2\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds} - y\frac{dz}{ds}\frac{dy}{ds} &= 0.
\end{aligned}$$

Для контактных геодезических должно выполняться условие их горизонтальности

$$\frac{dz}{ds} = y\frac{dx}{ds}.$$

Учитывая это условие, заключаем, что дифференциальные уравнения контактных геодезических совпадают с геодезическими усеченной связности. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Контактная метрическая связность $\widetilde{\nabla}$, как и связность Леви-Чивиты $\nabla$, являются связностями, согласованными с контактным распределением $H$, причем контактные геодезические этих связностей совпадают с субримановыми геодезическими, т.е. геодезическими усеченной связности $\overline{\nabla}$.*

Заметим, что $\widetilde{\nabla}\eta = 0$, а $\nabla\eta \neq 0$, но обе связности согласованы с распределением $H = \ker\eta$.

На группе Гейзенберга имеется полусимметрическая связность, определенная метрикой и контактной формой. Компоненты ковариантного тензора деформации вычисляются по известной формуле

$$T_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik}\eta_j - g_{ij}\eta_k).$$

Система дифференциальных уравнений контактных геодезических полусимметрической связности имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{2}y\Big(\frac{dy}{ds}\Big)^2 &= 0,\\ \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds} &= 0,\\ \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds} - \frac{1}{2}\Big(\frac{dx}{ds}\Big)^2 + \frac{1}{2}y^2\Big(\frac{dy}{ds}\Big)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя условие горизонтальности, находим

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds} + y\frac{d^2x}{ds^2}.$$

Учитывая первое уравнение системы, имеем

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds} - \frac{1}{2}y^2\Big(\frac{dy}{ds}\Big)^2.$$

Сравнивая это уравнение с третьим уравнением системы, заключаем, что $dx/ds = 0$ и, следовательно, $dy/ds = 0$, $dz/ds = 0$. Это означает, что полусимметрическая связность не имеет контактных геодезических. Заметим, что полусимметрическая связность является метрической, но, как легко проверить, не является контактной.

**4. Левоинвариантная контактная метрическая структура на многообразии $Sol$.** Многообразие $Sol$ — это трехмерная группа Ли всех вещественных матриц вида

$$Sol = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x\\ 0 & e^{z} & y\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Левые сдвиги на $Sol$ определяются формулами

$$\bar{x} = e^{-c_3}x + c_1, \quad \bar{y} = e^{c_3}y + c_2, \quad \bar{z} = z + c_3.$$

Дифференцируя по параметрам $c_1$, $c_2$, $c_3$, находим левоинвариантные векторные поля — базис алгебры Ли группы Ли $Sol$

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = -x\partial_1 + y\partial_2 + \partial_3.$$

Сдвигая евклидову метрику в касательном пространстве единицы группы в произвольную точку, получаем левоинвариантную риманову метрику $g$ на многообразии $Sol$

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2.$$

Так как левые сдвиги образуют максимальную транзитивную группу Ли изометрий, то метрика $g$ является полной. Для метрики $g$ коэффициенты связности Леви-Чивиты, компоненты тензора кривизны и тензора Риччи образуют следующие матрицы:

$$\Gamma^1_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^3_{ij} = \begin{pmatrix} -e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^e_{12k} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-2z} & 0 \\ e^{-2z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^e_{13k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{2z} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^e_{23k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2z} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Кривизна Риччи не превосходит нуля:

$$\varphi = R_{ij}v^i v^j \leqslant 0,$$

а скалярная кривизна постоянна и отрицательна:

$$R = g^{jk} R_{jk} = -2.$$

Кроме того, справедлива следующая оценка секционной кривизны.

**Теорема 4** (см. [8])**.** *Секционная кривизна $k$ левоинвариантной римановой метрики $g$ многообразия $Sol$ удовлетворяет неравенству $-1 \leqslant k \leqslant 1$.*

Пусть $\varphi_t = \exp(tx)$ — однопараметрическая подгруппа группы левых сдвигов, порожденная произвольным векторным полем $X$. Тогда производная Ли от любой левоинвариантной 1-формы $\omega$ вдоль $X$ необходимо равна нулю: $L_X\omega = 0$, т.е.

$$X^p \partial_p \omega_j + \partial_j X^p \omega_p = 0,$$

где $X^i$ и $\omega_j$ — компоненты векторного поля $X$ и формы $\omega$ соответственно. Интегрируя эти уравнения для базисных левоинвариантных векторных полей, находим общее решение

$$\omega = a_1 e^z dx + a_2 e^{-z} dy + a_3 dz,$$

где $a_1$, $a_2$, $a_3$ — произвольные постоянные. Нетрудно теперь убедиться, что формы являются левоинвариантными.

Среди форм имеется форма, которая вместе с метрикой определяют на $Sol$ контактную метрическую структуру $(\eta, \xi, \varphi, g)$. В [9] доказано следующее утверждение.

**Теорема 5.** *На ориентированном многообразии $Sol$ существует единственная левоинвариантная контактная форма $\eta$, которая вместе с левоинвариантной метрикой $g$ определяет на $Sol$ контактную метрическую структуру. Эта форма имеет вид*

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} e^z dx + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-z} dy.$$

Справедлива также следующая теорема.

**Теорема 6** (см. [9])**.** *На многообразии $Sol$ существует трехпараметрическое семейство левоинвариантных контактных метрических связностей.*

Компоненты $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ таких связностей образуют следующие матрицы:

$$\widetilde{\Gamma}^1_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - c_{113} \\ 0 & 0 & -c_{213}e^{-2z} \\ 1 & 0 & c_{331}e^{-z} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}^2_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_{123}e^{2z} \\ 0 & 0 & -1 - c_{223} \\ 0 & -1 & c_{332}e^{z} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\Gamma}^3_{ij} = \begin{pmatrix} (c_{113} - 1)e^{2z} & c_{123} & 0 \\ c_{213} & (c_{223} + 1)e^{-2z} & 0 \\ -c_{331}e^{z} & -c_{332}e^{-z} & 0 \end{pmatrix},$$

где постоянные $c_{ijk}$ удовлетворяют условиям

$$1 - c_{113} - c_{123} = 0, \quad 1 + c_{213} + c_{223} = 0, \quad c_{331} + c_{332} = 0.$$

Среди указанных связностей имеется однопараметрическое семейство плоских связностей

$$\widetilde{\Gamma}^1_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ce^{-z} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}^2_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -ce^{z} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}^3_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -ce^{z} & ce^{-z} & 0 \end{pmatrix},$$

где $c = \mathrm{const}$. Нетрудно доказать, что среди трехпараметрического семейства контактных метрических связностей нет кососимметрических и полусимметрических связностей.

Напомним, что ковариантный тензор деформаций $T$ любой метрической связности является гладким сечением расслоения $T^*M \otimes \wedge^2 M$, для которого имеет место поточечно неприводимое разложение (см. [21])

$$T^*M \otimes \wedge^2 M \cong F_1(M) \oplus F_2(M) \oplus F_3(M).$$

Если тензор $T$ является сечением расслоения $F_1(M)$, то $T(X, Y, Z)$ кососимметричен по своим аргументам, и мы имеем связности с кососимметрическим кручением, если $T$ есть сечение расслоения $F_2(M)$, то связность является полусимметрической, все остальные связности принадлежат третьему классу. Таким образом, левоинвариантные контактные метрические связности принадлежат третьему классу $F_3(M)$.

На многообразии $Sol$ имеется неголономное поле ортонормированных реперов $\{p, E_i\}$, адаптированное к структуре почти произведения $H \oplus V$

$$E_1 = \partial_3, \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-z}\partial_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{z}\partial_2, \quad E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-z}\partial_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{z}\partial_2,$$

где векторные поля $E_1$ и $E_2$ принадлежат контактному распределению $H$: $\eta(E_1) = 0$, $\eta(E_2) = 0$, а $E_3 = \xi \in V$.

Разложения коммутаторов координатных векторных полей

$$[E_i, E_j] = \Omega^k_{ij} E_k$$

являются структурными уравнениями поля реперов $\{p, E_i\}$, а коэффициенты $\Omega^k_{ij}$ определяют объект неголономности.

Для рассматриваемого поля реперов имеем

$$[E_1, E_2] = -E_3, \quad [E_1, E_3] = -E_2, \quad [E_2, E_3] = 0.$$

Вычисляя неголономные коэффициенты связности Леви-Чивиты $\nabla$, находим ортогональную проекцию $\overline{\nabla}$ связности $\nabla$ на контактное распределение $H$:

$$\overline{\nabla}_{E_i} E_j = 0 \quad i, j = 1, 2.$$

Переходя к естественным координатам, получаем дифференциальные уравнения геодезических усеченной связности

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

которые легко интегрируются. Общее решение системы имеют вид

$$x = -\frac{a_1}{a_3} e^{-a_3 s} + b_1, \quad y = \frac{a_2}{a_3} e^{a_3 s} + b_2, \quad z = a_3 s + b_3, \quad a_3 \neq 0,$$

где $a_i$, $b_i$ — постоянные. При исследовании строения геодезических, в силу левоинвариантности контактного распределения можно ограничиться геодезическими, выходящими из единицы группы. В этом случае при $s = 0$, $x = y = z = 0$, учитывая еще и горизонтальность поля касательных векторов геодезических, имеем параметрические уравнения геодезических усеченной связности $\overline{\nabla}$, выходящих из единицы

$$x = b(1 - e^{-as}), \quad y = b(1 - e^{as}), \quad z = as,$$

а так как $s$ — естественный параметр, то постоянные $a$ и $b$ должны удовлетворять условию

$$a^2 + 2a^2b^2 = 1.$$

Нетрудно убедиться, что плоская связность с ненулевыми коэффициентами $\widetilde{\Gamma}_{31}^{1} = 1$, $\widetilde{\Gamma}_{32}^{2} = -1$ является связностью, согласованной с контактным распределением $H$, а ее контактные геодезические совпадают с геодезическими усеченной связности $\overline{\nabla}$.

Пусть на многообразии $M$ задана линейная связность $\nabla$ и распределение $H$. Естественно возникает следующая задача: *найти необходимые и достаточные условия согласованности связности $\nabla$ с распределением $H$*. Из перечисленных выше примеров связностей, согласованных с контактным распределением, следует, что такие связности не обязательно должны быть контактными ($\nabla\eta = 0$). Для связностей, согласованных с распределением, возникают классические задачи по геодезическим отображениям. Пусть дано многообразие $M$, наделенное распределением $H$ и согласованной с этим распределением связностью $\nabla$. Возникает, например, следующий вопрос: *допускает ли многообразие $M$ геодезические отображения, при которых контактные геодезические отображаются на контактные геодезические некоторого многообразия $M'$, наделенного распределением $H'$ и связностью $\nabla'$, согласованной с распределением $H'$*?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Аграчев А. А.* Некоторые вопросы субримановой геометрии// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 6. — С. 3–36.
2. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. напр. — 1987. — *16*. — С. 5–85.
3. *Вершик А. М., Фадеев Л. Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении// в кн.: Проблемы теоретической физики. — Л: Изд-во ЛГУ, 1975. — С. 129–141.
4. *Горбацевич В. В.* Субримановы геометрии на компактных однородных пространствах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2014. — *78*, № 3. — С. 35–52.
5. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: Печатный Дом, 2013.
6. *Паньженский В. И., Климова Т. Р.* Контактная метрическая связность на группе Гейзенберга// Изв. вузов. Мат. — 2018. — № 11. — С. 51–59.
7. *Паньженский В. И., Климова Т. Р.* Контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением// Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 11. — С. 54–63.
8. *Паньженский В. И., Новичкова А. С.* Оценка секционной кривизны многообразия Sol// Мат. Всерос. науч. конф. «Педагогический институт им. В. Г. Белинского: традиции и инновации» (Пенза, 12 декабря 2019 г.). — Пенза, 2019. — С. 231–234.
9. *Паньженский В. И., Растрепина А. О.* Левоинвариантная контактная метрическая структура на многообразии Sol// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — *162*, № 1. — С. 77–90.
10. *Паньженский В. И., Сурина О. П.* Субримановы геодезические на многомерной группе Гейзенберга// Итоги науки и техники. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *180*. — С. 74–84.
11. *Сачков Ю. Л.* Теория управления на группах Ли// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *26*. — С. 5–59.
12. *Скотт П.* Геометрии на трехмерных многообразиях. — М.: Мир, 1986.
13. *Смоленцев Н. К.* Левоинвариантные пара-сасакиевы струткуры на группах Ли// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2019. — *62*, № 3. — С. 27–37.
14. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian Geometry. — Trieste, Italy: SISSA, 2012.
15. *Binz E., Pods S.* The Geometry of Heisenberg Group. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2008.
16. *Blair D. E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1976.
17. *Boyer C. P.* The Sasakian geometry of the Heisenberg group// Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie. — 2009. — *52*, № 3. — P. 251–262.
18. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups// Diff. Geom. Appl. — 2008. — *26*. — P. 544–552.
19. *Gallier J., Quaintance J.* Differential Geometry and Lie Groups: a Second Course: Geometry and Computing. — Springer Nature, 2020.
20. *Gonzalez J. C., Chinea D.* Quasi-Sasakian homogeneous structures on the generalized Heisenberg group $H(p,1)$// Proc. Am. Math. Soc. — 1989. — *105*, № 1. — P. 173–184.
21. *Gordeeva I. A., Pan'zhenskii V. I., Stepanov S. E.* Riemann–Cartan manifolds// J. Math. Sci. — 2010. — *169*, № 3. — P. 342–361.

22. *Goze M., Remm E.* Contact and Frobeniusian forms on Lie groups// Differ. Geom. Appl. — 2014. — *35*. — P. 74–94.
23. *Tanno S.* The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds// Tôhoku Math. J. (2). — 1969. — *21*, № 1. — P. 21–38.
24. *Thurston W. P.* The Geometry and Topology of Three-Manifold. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1997.

Паньженский Владимир Иванович
Пензенский государственный университет
E-mail: kaf-geom@yandex.ru

Сурина Ольга Петровна
Пензенский государственный университет
E-mail: o.surina2013@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 203 (2021). С. 71–83
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-203-71-83

УДК 514.76

# КАНОНИЧЕСКИЕ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

© 2021 г. **К. В. ПОЛЯКОВА**

Аннотация. Рассматриваются аффинные связности в расслоении реперов первого и второго порядков над $m$-мерным гладким многообразием с использованием канонических форм этих расслоений. Построены компоненты объектов аффинных связностей первого и второго порядков, определяемые нулевыми ковариантными производными слоевых координат гладкого многообразия. Эти связности являются каноническими плоскими аффинными связностями. Исследуются объекты деформации от произвольных аффинных связностей первого и второго порядков к каноническим связностям соответствующих порядков. Касательные векторы к гладкому многообразию являются горизонтальными векторами первого порядка для канонической связности первого и второго порядков; эти векторы названы каноническими векторами первого порядка. Построены горизонтальные операторы, переводящие канонические векторы первого порядка в горизонтальные векторы различных порядков для аффинных связностей первого и второго порядков. Горизонтальные векторы представлены в виде суммы горизонтальных векторов канонической связности и вертикальных векторов с коэффициентами — компонентами тензора деформации от канонической связности к данной.

***Ключевые слова***: расслоение реперов, базисные координаты, слоевые координаты, аффинная связность, ковариантная производная, горизонтальный вектор.

# CANONICAL AFFINE CONNECTIONS OF THE FIRST AND SECOND ORDERS

© 2021 **K. V. POLYAKOVA**

Abstract. We examine affine connections in the bundle of frames of the first and second orders over an $m$-dimensional smooth manifold using the canonical forms of these bundles. We construct the components of the objects of affine connections of the first and second orders determined by zero covariant derivatives of the fiber coordinates of a smooth manifold. These connections are canonical flat affine connections. We examine the objects of deformation from arbitrary affine connections of the first and second orders to the canonical connections of the corresponding orders. Tangent vectors to a smooth manifold are horizontal vectors of the first order for the canonical connections of the first and second orders; these vectors are called first-order canonical vectors. We construct horizontal operators that transform first-order canonical vectors into horizontal vectors of various orders for affine connections of the first and second order. Horizontal vectors are represented as the sums of horizontal vectors of the canonical connection and vertical vectors with the coefficients equal to the components of the deformation tensor from the canonical connection to the given connection.

***Keywords and phrases***: frame bundle, basic coordinates, layer coordinates, affine connection, covariant derivative, horizontal vector.

***AMS Subject Classification***: 53B05, 58A10

**1. Введение.** При добавлении к точечным координатам $x^i$ на $m$-мерном многообразии $X_m$ координат $x^i_j, x^i_{jk}, \ldots$ голономных $r$-реперов ($r = 1, 2, \ldots$) возникает последовательность симметричных по нижним индексам структурных форм $\omega^i, \omega^i_j, \omega^i_{jk}, \ldots$, где $\omega^i$ — главные формы, а все остальные формы — вторичные (см. [5, 7, 13]). Локальные слоевые координаты $x^i_{jk}, x^i_{jkl}, \ldots$ по существу являются локальными симметричными компонентами объектов связностей высших порядков в специализированной системе (см. [7]). Для того чтобы избежать такой специализации, вводят новые формы $\widetilde{\omega}^i_{j_1\ldots j_r} = \omega^i_{j_1\ldots j_r} - \Gamma^i_{j_1\ldots j_r k}\omega^k$, т.е. инвариантные слоевые формы дифференциального продолжения порядка $r$ подвергают преобразованию, сохраняющему их слоевую структуру (см. [7]).

Слоевые координаты $x^i_{jk}, x^i_{jkl}, \ldots$ и их комбинации являются компонентами объектов канонических связностей высших порядков, что реализуется приравниванием нулю ковариантных производных этих слоевых координат. Горизонтальные векторы второго порядка и, соответственно, формы второго порядка для аффинной связности первого порядка используются в геометрии (второго порядка) Л. Шварца, имеющей приложения в стохастическом исчисления на многообразии (см. [17, 18, 21]). Для аффинной связности второго порядка возможно построение горизонтальных векторов первого, второго и третьего порядков, реализующих эту связность в касательных пространствах соответствующих порядков к многообразию $X_m$, расслоениям реперов первого и второго порядков над $X_m$. Разложение горизонтальных векторов различных порядков через канонические и вертикальные векторы возможно с использованием объектов деформации (генераторов в терминологии А. К. Рыбникова; см. [13, 14]) от произвольных аффинных связностей различных порядков к каноническим связностям соответствующих порядков. В этой связи оказывается целесообразным использование координатного задания векторов и форм наряду со способом Г. Ф. Лаптева (см. [6, 7]) задания связности в главных расслоениях и разработанного им метода продолжений и охватов, который обобщает метод подвижного репера и внешних форм Э. Картана.

**2. Канонические формы.** Пусть в некоторой окрестности $m$-мерного гладкого многообразия $X_m$ текущая точка определяется локальными координатами $x^i$ ($i, j, k, \ldots = 1, \ldots, m$). Формы инвариантного корепера $\{\omega^i, \omega^i_j, \omega^i_{jk}\}$ относительно натурального корепера $\{dx^i, dx^i_j, dx^i_{jk}\}$ выражаются по формулам

$$\begin{aligned} &\omega^i = x^i_j dx^j, \\ &\omega^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - x^i_{jk}\omega^k, \\ &\omega^i_{jk} = dx^i_{jk} + x^l_{jk}\omega^i_l - x^i_{lk}\omega^l_j - x^i_{jl}\omega^l_k + (x^s_{jk}x^i_{sl} - x^i_{jkl})\omega^l. \end{aligned} \tag{1}$$

Структурные уравнения этих форм даны в [7]. Все слоевые координаты рассматриваются как независимые переменные, причем координаты $x^i_{jk}$, $x^i_{jkl}$ симметричны по нижним индексам, а для координат $x^i_j$ справедливы условия: $\det(x^i_j) \neq 0$, $x^i_k \overset{*}{x}{}^k_j = \delta^i_j$.

Система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку многообразия $X_m$, а значит, слой расслоения касательных линейных реперов над $X_m$. Следовательно, формы $\omega^i_j$, $\omega^i_{jk}$ превратятся в формы $\overline{\omega}^i_j = \omega^i_j|_{\omega^l=0}$, $\overline{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk}|_{\omega^l=0}$, зависящие лишь от слоевых координат. Формы $\overline{\omega}^i_j$ являются инвариантными формами дифференциальной группы первого порядка, т.е. линейной группы $GL(m)$, действующей в касательном пространстве $TX_m$; формы $\overline{\omega}^i_j$, $\overline{\omega}^i_{jk}$ — инвариантными формами дифференциальной группы второго порядка.

Пусть $L_r(X_m)$ — расслоение реперов порядка $r$ ($r = 0, 1, 2, \ldots$) над $m$-мерным многообразием $X_m$. Ограничимся тремя случаями $r = 0, 1, 2$, причем при $r = 0$ расслоением $L_0(X_m)$ является само многообразие $X_m$, т.е. $L_0(X_m) = X_m$. Каноническая форма (первого порядка) многообразия $L_r(X_m)$

$$\omega_{L_r(X_m)} = \omega^i \overset{r}{e}_i + \omega^i_j \overset{rj}{e}_i + \ldots + \omega^i_{j_1\ldots j_r} \overset{rj_1\ldots j_r}{e}_i$$

связывает касательное пространство $TL_r(X_m) = \operatorname{span}(\overset{r}{e}_i, \overset{rj}{e}_i, \ldots, \overset{rj_1\ldots j_r}{e}_i)$ и кокасательное пространство $T^*L_r(X_m) = \operatorname{span}(\omega^i, \omega^i_j, \ldots, \omega^i_{j_1\ldots j_r})$ к многообразию $L_r(X_m)$.

Каноническая форма на многообразии $X_m$ имеет вид

$$\omega_{X_m} = \omega^i \varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_i = \overset{0}{e}_i$. Базисные векторы $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j$ $(\partial_j = \partial/\partial x^j)$ касательного пространства $TX_m$ удовлетворяют уравнениям $d\varepsilon_i = \varepsilon_j \omega^j_i + \varepsilon_{ij}\omega^j$. На касательные векторы $\varepsilon_{ij} = \overset{*}{x}{}^k_i \overset{*}{x}{}^l_j \partial_{kl} + x^k_{ij}\overset{*}{x}{}^l_k \partial_l$ второго порядка натянуто *касательное пространство второго порядка* $T^2X_m = \operatorname{span}(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$.

Каноническая форма на многообразии $L_1(X_m)$ имеет вид

$$\omega_{L_1(X_m)} = \omega^i e_i + \omega^i_j e^j_i,$$

где $e = \overset{1}{e}$. Базисные векторы

$$e^i_j = -x^i_k \partial^k_j, \quad e_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j + x^k_{ji} e^j_k$$

$(\partial^k_j = \partial/\partial x^j_k)$ касательного пространства $TL_1(X_m)$ к расслоению $L_1(X_m)$ в его текущей точке удовлетворяют уравнениям (см. [10])

$$de^j_i = -e^k_i \omega^j_k + e^j_{ik}\omega^k + e^{jl}_{ik}\omega^k_l, \quad de_i = e_j\omega^j_i + e^j_k \omega^k_{ji} + e_{ij}\omega^j + e^k_{ij}\omega^j_k.$$

Касательное пространство $TL_1(X_m)$ содержит вертикальное пространство $VL_1(X_m) = \operatorname{span}(e^i_j)$.

Каноническая форма на многообразии $L_2(X_m)$ раскладывается следующим образом

$$\omega_{L_2(X_m)} = \omega^i E_i + \omega^i_j E^j_i + \omega^i_{jk} E^{jk}_i,$$

где $E = \overset{2}{e}$. Векторы

$$E^{jk}_i = \partial^{jk}_i, \quad E^j_i = -x^j_k \partial^k_i - x^j_{kl} E^{kl}_i + x^u_{it} E^{jt}_u + x^u_{ti} E^{tj}_u, \quad E_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j - \overset{c}{\Gamma}{}^j_{ik} E^k_j - \overset{c}{\Gamma}{}^l_{jki} E^{jk}_l$$

$(\partial^{jk}_i = \partial/\partial x^i_{jk})$ образуют репер $E = \{E_i, E^k_j, E^{st}_l\}$ касательного пространства $TL_2(X_m)$ к расслоению $L_2(X_m)$ в его текущей точке (см. [10]). Этот репер является двойственным к кореперу $\omega^i, \omega^j_k, \omega^l_{st}$, т.е. $\omega^i(E_j) = \delta^i_j$, $\omega^i_j(E^k_l) = \delta^i_l \delta^k_j$, $\omega^i_{jk}(E^{st}_l) = \delta^i_l \delta^s_j \delta^t_k$. Касательное пространство $TL_2(X_m)$ содержит вертикальное пространство $VL_2(X_m) = \operatorname{span}(E^k_j, E^{st}_l)$.

**3. Каноническая плоская аффинная связность первого порядка.** Аффинная связность в расслоении $L_1(X_m)$ касательных линейных реперов над многообразием $X_m$ задается способом Лаптева—Лумисте с помощью форм $\widetilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k$, причем компоненты объекта связности $\Gamma^i_{jk}$ удовлетворяют уравнениям (см. [6, с. 62], [3,16])

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk,l}\omega^l. \tag{2}$$

Функции $\Gamma^i_{jk,l}$ называются пфаффовыми (см. [6]), или обобщенными частными производными. Тензорный дифференциальный оператор $\Delta$ действует по закону (см. [1,3])

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^s_{jk}\omega^i_s - \Gamma^i_{sk}\omega^s_j - \Gamma^i_{js}\omega^s_k.$$

В уравнениях (2) раскроем действие тензорного дифференциального оператора $\Delta$, переходя к натуральному кореперу по формулам (1), учитывая, что $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^l, x^l_s, x^l_{sp})$ являются функциями базисных и слоевых координат, и приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах:

$$\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_{sp}} = -\delta^i_l \delta^s_j \delta^p_k,$$

$$\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_s} = \delta^i_l(\Gamma^p_{jk} + x^p_{jk})\overset{*}{x}{}^s_p - (\Gamma^i_{lk} + x^i_{lk})\overset{*}{x}{}^s_j - (\Gamma^i_{jl} + x^i_{jl})\overset{*}{x}{}^s_k, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} = ((\Gamma^p_{jk} + x^p_{jk})x^i_{ps} - (\Gamma^i_{pk} + x^i_{pk})x^p_{js} - (\Gamma^i_{jp} + x^i_{jp})x^p_{ks} + \Gamma^i_{jk,s} + x^i_{jks} - x^p_{jk}x^i_{ps})\overset{*}{x}{}^s_l. \tag{4}$$

Следовательно, для компонент объекта аффинной связности первого порядка справедливо разложение (ср. [14])

$$\Gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - x^i_{jk}, \tag{5}$$

в котором участвуют слоевые координаты $x^i_{jk}$ и некоторые функции $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^l, x^p_q)$. Тензор $\gamma^1 = \{\gamma^i_{jk}\}$ является *тензором деформации* (*генератором*; см. [14]) аффинной связности $\Gamma^i_{jk}$ к связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$ (см. [9]).

Уравнения (3) и (4) можно записать в виде

$$\frac{\partial\gamma^i_{jk}}{\partial x^l_s} = \delta^i_l\gamma^p_{jk}\overset{*}{x}{}^s_p - \gamma^i_{lk}\overset{*}{x}{}^s_j - \gamma^i_{jl}\overset{*}{x}{}^s_k, \quad \frac{\partial\gamma^i_{jk}}{\partial x^l} = (\gamma^p_{jk}x^i_{ps} - \gamma^i_{pk}x^p_{js} - \gamma^i_{jp}x^p_{ks} + \Gamma^i_{jk,s} + x^i_{jks} - x^p_{jk}x^i_{ps})x^s_l,$$

а для индуцированных (пфаффовых производных) компонент аффинной связности имеем выражение

$$\Gamma^i_{jk,l} = \frac{\partial\gamma^i_{jk}}{\partial x^p}\overset{*}{x}{}^p_l - \gamma^p_{jk}x^i_{pl} + \gamma^i_{pk}x^p_{jl} + \gamma^i_{jp}x^p_{kl} - x^i_{jkl} + x^p_{jk}x^i_{pl}.$$

Объекты кручения $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ и кривизны $R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[k,l]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{|s|l]}$ аффинной связности являются тензорами на базе $X_m$, т.е. удовлетворяют уравнениям

$$\Delta T^i_{jk} = T^i_{jk,l}\omega^l, \quad \Delta R^i_{jkl} = R^i_{jkl,s}\omega^s.$$

Квадратные скобки обозначают альтернирование. Учитывая разложение (5), эти тензоры выражаются по формулам

$$T^i_{jk} = \gamma^i_{[jk]}, \quad R^i_{jkl} = \frac{\partial\gamma^i_{j[k}}{\partial x^s}\overset{*}{x}{}^s_{l]} - \gamma^s_{j[k}\gamma^i_{sl]}. \tag{6}$$

**Утверждение 1.** *Объект $\Gamma^i_{jk}$ не зависит от базисных переменных $x^l$, если его пфаффовы производные имеют вид*

$$\Gamma^i_{jk,l} = -x^i_{jkl} - \gamma^p_{jk}x^i_{pl} + \gamma^i_{pk}x^p_{jl} + \gamma^i_{jp}x^p_{kl} + x^p_{jk}x^i_{pl}.$$

*При этом кривизна* (6) *с помощью тензора деформации выражается по формуле*

$$R^i_{jkl} = \gamma^s_{j[l}\gamma^i_{|s|k]}.$$

**Утверждение 2.** *Равенство нулю ковариантных производных координат $x^i_j$ выделяет единственную связность $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$, не зависящую от слоевых переменных $x^l_s$* (см. [2]). *Эта связность является симметрической и плоской.*

Действительно, ковариантные производные координат $x^i_j$ выражаются по формуле

$$\nabla_k x^i_j = -x^l_j(\Gamma^i_{lk} + x^i_{lk}).$$

При этом вертикальные векторы $e^j_i$ и горизонтальные формы $\omega^i$ абсолютно параллельны относительно канонической связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}$, так как $x^i_j$ — это координаты $e^j_i$ и $\omega^i$ в базисах $\{\partial^j_i\}$ и $\{dx^i\}$, соответственно. Пусть объект $\Gamma^i_{jk}$ не зависит от переменных $x^l_s$, т.е. из равенств (3) следует

$$\delta^i_l\gamma^q_{jk} - \delta^q_j\gamma^i_{lk} - \delta^q_j\gamma^i_{jl} = 0.$$

Тогда единственным решением является связность, определяемая равенством $\gamma^i_{jk} = 0$. В силу (5) и условия $\gamma^i_{jk} = 0$ получим

$$\overset{c}{T}{}^i_{jk} = 0, \quad \overset{c}{R}{}^i_{jkl} = 0.$$

Связность с объектом $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$ является *канонической плоской аффинной связностью расслоения линейных реперов $L_1(X_m)$.*

**Замечание 1.** Вертикальные формы $\overset{c}{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \omega^i_j - \overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}\omega^k$ связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}$ имеют вид $\overset{c}{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \bar{\omega}^i_j$. Поэтому структурные формы $\bar{\omega}^i_j = \omega^i_j|_{\omega^l=0}$ группы $L_1(X_m)$ можно трактовать как формы канонической плоской аффинной связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}$. Структурные формы $\omega^i_j \in T^*L_1(X_m)$ имеют вид $\omega^i_j = \overset{c}{\widetilde{\omega}}{}^i_j + \overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}\omega^k$. При этом формы произвольной связности можно представить в виде разности $\widetilde{\omega}^i_j = \overset{c}{\widetilde{\omega}}{}^i_j - \gamma^i_{jk}\omega^k$.

**4. Горизонтальные векторы для аффинной связности первого порядка.** Горизонтальные векторы для аффинной связности первого порядка можно строить в касательных пространствах $TL_1(X_m)$ и $T^2X_m$, исходя из канонических форм многообразий $L_1(X_m)$ и $X_m$.

Аффинная связность первого порядка позволяет построить:

(i) горизонтальные векторы первого порядка как ковариантные производные канонической формы $\omega_{L_1(X_m)}$ (см. [10])

$$\widetilde{e}_i = \nabla^1_i \omega_{L_1(X_m)} = e_i + \Gamma^k_{ji} e^j_k \in TL_1(X_m),$$

(ii) горизонтальные векторы второго порядка как ковариантные производные векторов первого порядка $\varepsilon_i$ (см. [11])

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \nabla^1_j \varepsilon_i = \varepsilon_{ij} + \Gamma^k_{ij}\varepsilon_k \in T^2X_m.$$

Горизонтальные векторы первого порядка $\widetilde{e}_k$ аннулируют формы первого порядка $\widetilde{\omega}^i_j$, т.е. $\widetilde{\omega}^i_j(\widetilde{e}_k) = 0$. При этом внешний дифференциал $D$ форм $\omega^i$ на паре горизонтальных векторов дает тензор кручения, т.е. $D\omega^i(\widetilde{e}_j, \widetilde{e}_k) = T^i_{jk}$. Горизонтальные векторы второго порядка $\widetilde{\varepsilon}_{jk}$ аннулируют горизонтальные формы второго порядка

$$^2\widetilde{\omega}^i = d\omega^i + \omega^j\omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^j\omega^k \in (T^2X_m)^*$$

в случае симметрической связности, т.е.

$$^2\widetilde{\omega}^i(\widetilde{\varepsilon}_{jk}) = T^i_{jk}$$

(см. [11]). Тензоры кручения $T^i_{kl}$ и кривизны $R^i_{jkl}$ являются горизонтальной и вертикальной составляющими альтернированных ковариантных производных (см. [4, с. 121]), т.е.

$$\nabla_{[l}\nabla_{k]}\omega_{L_1(X_m)} = T^i_{kl}\widetilde{e}_i + R^i_{jkl}e^j_i, \quad \nabla_{[k}\nabla_{j]}\varepsilon_i = T^l_{jk}\widetilde{\varepsilon}_{il} + R^l_{ijk}\varepsilon_l,$$

где справедливо $\nabla_{[l}\nabla_{k]}\omega_{L_1(X_m)} = [\widetilde{e}_l, \widetilde{e}_k]$.

Аффинная связность первого порядка допускает следующие разложения касательного пространства первого пространства $TL_1(X_m)$ и касательного пространства второго порядка $T^2X_m$ на вертикальные и горизонтальные подпространства:

$$TL_1(X_m) = VL_1(X_m) \oplus HL_1(X_m), \quad T^2X_m = VX_m \oplus H^2X_m,$$

где

$$VL_1(X_m) = \operatorname{span}(e^j_i), \quad HL_1(X_m) = \operatorname{span}(\widetilde{e}_k);$$
$$VX_m = TX_m = \operatorname{span}(\varepsilon_i), \quad H^2X_m = \operatorname{span}(\widetilde{\varepsilon}_{ij}).$$

Оператор $f^1$, переводящий векторы $\varepsilon_i \in TX_m$ в горизонтальные векторы аффинной связности $\Gamma^i_{jk}$, назовем *горизонтальным оператором первого порядка.*

**Теорема 1.** *Горизонтальный оператор первого порядка* $f^1_1 = \gamma^1 \circ \mathrm{id}$

$$f^1_1\colon \varepsilon_k \in TX_m \xrightarrow{\mathrm{id}} \overset{c}{\widetilde{e}}_k = \varepsilon_k \xrightarrow{\gamma^1} \widetilde{e}_k = \overset{c}{\widetilde{e}}_k + \gamma^i_{jk}e^j_i \in TL_1(X_m)$$

*переводит векторы* $\varepsilon_k$ *в горизонтальные векторы* $\widetilde{e}_k$ *касательного пространства* $TL_1(X_m)$ *первого порядка для аффинной связности* $\Gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - x^i_{jk}$ *с тензором деформации* $\gamma^1 = \{\gamma^i_{jk}\}$.

Действительно, горизонтальные векторы первого порядка $\widetilde{e}_i$ в связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}$ имеют вид $\varepsilon_i \in TX_m$, т.е. $\overset{c}{\widetilde{e}}_i = \varepsilon_i$. Значит, относительно канонической связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}$ горизонтальное подпространство $HL_1(X_m) = \operatorname{span}(\widetilde{e}_k)$ касательного пространства $TL_1(X_m)$ в каждой точке является касательным пространством $TX_m$ к базисному многообразию $X_m$. Относительно произвольной аффинной связности с тензором деформации $\gamma^1 = \{\gamma^i_{jk}\}$ для горизонтальных векторов $\widetilde{e}_i$ имеем следующее разложение:

$$\widetilde{e}_k = \overset{c}{\widetilde{e}}_k + \gamma^i_{jk} e^j_i.$$

Горизонтальная горизонтальнозначная форма ${}^h\widetilde{\omega} = \omega^i \widetilde{e}_i$ для канонической связности фактически является канонической формой $\omega_{X_m} = \omega^i \varepsilon_i$ (или $\omega_{X_m} = dx^i \partial_i$) многообразия $X_m$, т.е. ${}^h\overset{c}{\widetilde{\omega}} = \omega_{X_m}$. Вертикальная вертикальнозначная форма ${}^v\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}^i_j e^j_i$ для канонической связности — это форма ${}^v\widetilde{\omega} = dx^i_j \partial^j_i$. Каноническая форма $\omega_{L_1(X_m)} = \omega^i e_i + \omega^i_j e^j_i$ расслоения $L_1(X_m)$, записанная относительно координатного репера и корепера, принимает вид

$$\omega_{L_1(X_m)} = dx^i \partial_i + dx^i_j \partial^j_i.$$

Таким образом, каноническая форма расслоения $L_1(X_m)$ является суммой горизонтальной и вертикальной форм канонической аффинной связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}$ в этом расслоении.

**Теорема 2.** *Горизонтальный оператор первого порядка $f^1_2 = \gamma^1 \circ d\varepsilon_i$*

$$f^1_2 \colon \varepsilon_j \in TX_m \xrightarrow{d\varepsilon_i} \overset{c}{\widetilde{\varepsilon}}_{ij} \xrightarrow{\gamma^1} \widetilde{\varepsilon}_{ij} = \overset{c}{\widetilde{\varepsilon}}_{ij} + \gamma^k_{ij}\varepsilon_k \in T^2 X_m$$

*переводит векторы $\varepsilon_j$ в горизонтальные векторы $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ касательного пространства $T^2X_m$ второго порядка для аффинной связности $\Gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - x^i_{jk}$ с тензором деформации $\gamma^1 = \{\gamma^i_{jk}\}$.*

Горизонтальные векторы второго порядка $\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \Gamma^k_{ij}\varepsilon_k$ для канонической связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}$ имеют вид $\overset{c}{\widetilde{\varepsilon}}_{ij} = d\varepsilon_i(\varepsilon_j) \in T^2X_m$. Относительно аффинной связности с тензором деформации $\gamma^1 = \{\gamma^i_{jk}\}$ для горизонтальных векторов $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ справедливо разложение $\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \overset{c}{\widetilde{\varepsilon}}_{ij} + \gamma^k_{ij}\varepsilon_k$.

**5. Продолженные аффинные связности второго порядка.** Ковариантный способ задания аффинной связности второго порядка в расслоении $L_2(X_m)$ реперов второго порядка состоит в построении форм $\widetilde{\omega}^i_j$ и $\widetilde{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} - \Gamma^i_{jkl}\omega^l \in T^*L_2(X_m)$, причем функции $\Gamma^i_{jkl}$ удовлетворяют уравнениям (см. [7, 13, 15])

$$\Delta\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{sl}\omega^s_{jk} + \Gamma^s_{jl}\omega^i_{sk} + \Gamma^s_{kl}\omega^i_{js} + \omega^i_{jkl} = \Gamma^i_{jkl,s}\omega^s. \tag{7}$$

Объект аффинной связности второго порядка $\Gamma^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jkl}\}$ задает связность в расслоении реперов второго порядка $L_2(X_m)$. Компоненты $R^i_{jkls}$ объекта кривизны второго порядка $R^2 = \{R^i_{jkl}, R^i_{jkls}\}$ образуют тензор вместе с тензором $R^1 = \{R^i_{jkl}\}$ аффинной кривизны первого порядка (ср. [13]) и имеют вид

$$R^i_{jkls} = \Gamma^i_{jk[l,s]} - \Gamma^t_{jk[l}\Gamma^i_{ts]} + \Gamma^i_{tk[l}\Gamma^t_{js]} + \Gamma^i_{jt[l}\Gamma^t_{ks]}.$$

Аналогично сформулированному утверждению о разложении объекта связности первого порядка из уравнений (7) для компонент объекта связности второго порядка можно получить разложение $\Gamma^i_{jkl} = f^i_{jkl} - x^i_{jkl}$ с помощью слоевых координат $x^i_{jkl}$ и функций $f^i_{jkl} = f^i_{jkl}(x^p, x^q_r, x^s_{uv})$, зависящих от базисных координат $x^p$ и слоевых координат $x^q_r$, $x^s_{uv}$. Функции $f^i_{jkl}$ в расслоении второго порядка образуют тензор вместе с тензором деформации $\gamma^i_{sl}$ и координатами $x^s_{uv}$.

Ковариантные производные объекта связности $\Gamma^i_{jk}$ относительно аффинной связности второго порядка $\Gamma^2$ выражаются по формуле

$$\nabla^2_l \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk,l} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{js}\Gamma^s_{kl} - \Gamma^i_{jkl} \tag{8}$$

и образуют самостоятельный тензор на многообразии $X_m$. Альтернируя ковариантные производные (8) по индексам $k$ и $l$, получим

$$\nabla^2_{[l}\Gamma^i_{|j|k]} = R^i_{jkl} + \Gamma^i_{js}T^s_{kl} - T^i_{jkl}.$$

Объект $T^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^i_{s[k}\Gamma^s_{|j|l]}$ в совокупности с тензором кручения $T^i_{jk}$ аффинной связности первого порядка образует тензор кручения аффинной связности второго порядка $T^2 = \{T^i_{jk}, T^i_{jkl}\}$. В [19] показано, что если $T^2 = 0$, то форма кручения такой связности равна нулю.

**Замечание 2.** В [8] рассмотрены альтернированные ковариантные производные компонент индуцированной на поверхности $X_m$ проективного пространства $P_n$ связности трех типов. В индуцированной связности первого типа $\overset{1}{\Gamma}$ эти величины равны соответствующим компонентам индуцированного тензора кривизны, т.е. alt $\overset{1}{\nabla}\overset{1}{\Gamma} = \overset{1}{R}$; в связности третьего типа $\overset{3}{\Gamma}$ они равны нулю, т.е. alt $\overset{3}{\nabla}\overset{3}{\Gamma} = 0$; в связности второго типа $\overset{2}{\Gamma}$ они выражаются с помощью фундаментального тензора поверхности, нормальную связность и тензор деформации $\overset{23}{D} = \overset{2}{\Gamma} - \overset{3}{\Gamma}$ от связности второго типа к связности третьего типа.

Показано, что равенство нулю ковариантных производных слоевых координат первого порядка выделяет каноническую связность первого порядка. Вычислим ковариантные производные слоевых координат второго порядка для построения канонической аффинной связности второго порядка. Ковариантные производные слоевых координат $x^i_{jk}$ выражаются по формуле

$$\nabla_l x^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl} + x^i_{jkl} - x^s_{jk}x^i_{sl} - x^s_{jk}\Gamma^i_{sl} + x^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + x^i_{js}\Gamma^s_{kl}$$

и образуют тензор на многообразии $X_m$, т.е.

$$\Delta(\nabla_l x^i_{jk}) \equiv 0 \pmod{\omega^i},$$

поэтому их равенство нулю имеет инвариантный смысл. Обращая ковариантные производные в нуль, получим следующий охват для компонент $\Gamma^i_{jkl}$:

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jkl} = -x^i_{jkl} + x^s_{jk}x^i_{sl} + x^s_{jk}\Gamma^i_{sl} - x^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - x^i_{js}\Gamma^s_{kl}.$$

Связность $\overset{\circ}{\Gamma}{}^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jkl}\}$ назовем *продолженной связностью второго порядка* (см. [20]).

**Замечание 3.** В [14] канонической связностью второго порядка названа связность, в которой ковариантные производные (8) обращаются в нуль.

Кривизна и кручение продолженной связности выражаются по формулам

$$\overset{\circ}{R}{}^i_{jkls} = x^p_{jk}R^i_{pls} - x^i_{pk}R^p_{jls} - x^i_{jp}R^p_{kls}, \quad \overset{\circ}{T}{}^i_{jkl} = -x^i_{js}T^s_{kl} - \gamma^i_{s[k}\gamma^s_{|j|l]}.$$

Объект деформации аффинной связности второго порядка к продолженной связности $\overset{\circ}{\Gamma}{}^2$ имеет вид $D^i_{jkl} = \Gamma^i_{jkl} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jkl}$ и образует тензор, который также называется генератором связности второго порядка (см. [14]).

Каноническая связность первого порядка выделяет из продолженной связности второго порядка следующий объект:

$$\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jkl} = -x^i_{jkl} + x^i_{sk}x^s_{jl} + x^i_{js}x^s_{kl}.$$

Рассмотрим деформацию $\gamma^i_{jkl} = \Gamma^i_{jkl} - \overset{c}{\Gamma}{}^i_{jkl}$ от связности второго порядка $\Gamma^i_{jkl}$ к связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jkl}$. Этот объект является тензором вместе с тензором $\gamma^i_{jk}$, так как

$$\Delta\gamma^i_{jkl} - \gamma^i_{sl}\omega^s_{jk} + \gamma^s_{jl}\omega^i_{sk} + \gamma^s_{kl}\omega^i_{js} \equiv 0 \pmod{\omega^s}.$$

Выражения на компоненты кривизны $R^i_{jkls}$ и кручения $T^i_{jkl}$ аффинной связности второго порядка с помощью тензора деформации второго порядка $\gamma^2 = \{\gamma^i_{jk}, \gamma^i_{jkl}\}$ можно записать в виде

$$R^i_{jklt} = \frac{\partial \gamma^i_{jk[l}}{\partial x^p}\overset{*}{x}{}^p_{t]} + \gamma^i_{s[l}\gamma^s_{|jk|t]} - \gamma^s_{j[l}\gamma^i_{|sk|t]} - \gamma^s_{k[l}\gamma^i_{|js|t]}, \quad T^i_{jkl} = \gamma^i_{j[kl]} - \gamma^i_{s[k}(\gamma^s_{|j|l]} - x^s_{|j|l]}) + x^i_{s[k}\gamma^s_{|j|l]}.$$

**Утверждение 3.** *Равенство нулю ковариантных производных слоевых координат $x^i_j, x^i_{jk}$ выделяет единственную связность второго порядка $\overset{c}{\Gamma}{}^2$, не зависящую от переменных $x^i_j$. Кручение и кривизна этой связности равны нулю.*

Действительно, частные производные компонент $\Gamma^i_{jkl}$ находятся по формулам

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jkl}}{\partial x^p_q} = \gamma^s_{jkl}\overset{*}{x}{}^q_s\delta^i_p - \gamma^i_{pkl}\overset{*}{x}{}^q_j - \gamma^i_{jpl}\overset{*}{x}{}^q_k - \gamma^i_{jkp}\overset{*}{x}{}^q_l + \gamma^s_{kl}M^{iq}_{jsp} - \gamma^i_{sl}M^{sq}_{jkp} + \gamma^s_{jl}M^{iq}_{skp},$$

где

$$M^{ip}_{jkq} = (\delta^i_q x^t_{jk} - \delta^t_j x^i_{qk} - \delta^t_k x^i_{jq})\overset{*}{x}{}^p_t.$$

Пусть компоненты $\Gamma^i_{jk}$, $\Gamma^i_{jkl}$ объекта связности $\Gamma^2$ не зависят от переменных $x^l_s$; тогда

$$\gamma^i_{jk} = 0, \quad \gamma^t_{jkl}\delta^i_p - \gamma^i_{pkl}\delta^t_j - \gamma^i_{jpl}\delta^t_k - \gamma^i_{jkp}\delta^t_l = 0.$$

Последнее равенство имеет место только при $\gamma^i_{jkl} = 0$. При этом

$$\overset{c}{R}{}^i_{jkl} = 0, \quad \overset{c}{R}{}^i_{jkls} = 0; \quad \overset{c}{T}{}^i_{jk} = 0, \quad \overset{c}{T}{}^i_{jkl} = 0.$$

Связность $\overset{c}{\Gamma}{}^2 = \{\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{c}{\Gamma}{}^i_{jkl}\}$ назовем *канонической продолженной связностью второго порядка.*

**Замечание 4.** Структурные формы $\bar{\omega}^i_j, \bar{\omega}^i_{jk}$ дифференциальной группы второго порядка можно трактовать как формы канонической продолженной связности второго порядка $\overset{c}{\Gamma}{}^2$, так как $\overset{c}{\widetilde{\omega}}{}^i_{jk} = \bar{\omega}^i_{jk}$, где $\overset{c}{\widetilde{\omega}}{}^i_{jk} = \omega^i_{jk} - \Gamma^i_{jkl}\omega^l$ — это вертикальные формы канонической связности второго порядка. Формы $\omega^i_{jk} \in T^*L_2(X_m)$ имеют вид

$$\omega^i_{jk} = \overset{c}{\widetilde{\omega}}{}^i_{jk} + \overset{c}{\Gamma}{}^i_{jkl}\omega^l.$$

При этом для произвольных форм связности справедливо разложение

$$\widetilde{\omega}^i_{jk} = \overset{c}{\widetilde{\omega}}{}^i_{jk} - \gamma^i_{jkl}\omega^l.$$

**Замечание 5.** Для канонической связности второго порядка справедливо выражение (см. [19])

$$\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jkl} = \overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk,l} - \overset{c}{\Gamma}{}^s_{jk}\overset{c}{\Gamma}{}^i_{sl} + \overset{c}{\Gamma}{}^i_{sk}\overset{c}{\Gamma}{}^s_{jl} + \overset{c}{\Gamma}{}^i_{js}\overset{c}{\Gamma}{}^s_{kl},$$

поэтому каноническая связность второго порядка принадлежит классу связностей, порождаемых связностью первого порядка и ее пфаффовыми производными. Следует отметить, что продолженная связность $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jkl}$ не принадлежит классу связностей, порождаемых связностью первого порядка и ее пфаффовыми производными.

**Замечание 6.** Образы базисных касательных векторов $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i\partial_j \in TX_m$ к многообразию $X_m$ при отображениях, задаваемых линейными дифференциальными формами $\omega^i_j$, $\omega^i_{jk}$ дают объекты $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}$, $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jkl}$ канонической связности, т.е. $\omega^i_j(\varepsilon_k) = \overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk}$, $\omega^i_{jk}(\varepsilon_l) = \overset{c}{\Gamma}{}^i_{jkl}$.

**6. Горизонтальные векторы для аффинной связности второго порядка.** Горизонтальные векторы для аффинной связности второго порядка можно строить в касательных пространствах $TL_2(X_m)$, $T^2L_1(X_m)$ и $T^3X_m$, исходя из канонических форм многообразий $L_1(X_m)$ и $X_m$. Более того, при реализациях связности в $T^2L_1(X_m)$ и $T^3X_m$ формы связности принадлежат пространствам форм второго и третьего порядка, т.е. $(T^2L_1(X_m))^*$ и $(T^3X_m)^*$, соответственно.

Аффинная связность второго порядка позволяет построить следующие горизонтальные векторы:

(i) горизонтальные векторы первого порядка $\widetilde{E}_p$ как ковариантные производные канонической формы $\omega_{L_2(X_m)}$:

$$\widetilde{E}_l = \nabla^2_l \omega_{L_2(X_m)} = E_l + \Gamma^i_{jl}E^j_i + \Gamma^i_{jkl}E^{jk}_i \in TL_2(X_m);$$

(ii) горизонтальные векторы второго порядка $\widetilde{e}^i_{jk}$, $\widetilde{e}_{jk}$ как ковариантные производные векторов первого порядка $e^i_j$, $e_j$:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{e}^i_{jk} = \nabla^1_k e^i_j = e^i_{jk} - e^l_j\Gamma^i_{lk} + e^{is}_{jl}\Gamma^l_{sk},\\
&\widetilde{e}_{jk} = \nabla^2_k e_j = e_{jk} - e^s_{jl}\Gamma^l_{sk} + e_l\Gamma^l_{jk} + e^l_s\Gamma^s_{ljk} \in T^2L_1(X_m);
\end{aligned}$$

(iii) горизонтальные векторы третьего порядка $\widetilde{\varepsilon}_{ijk}$ как ковариантные производные векторов второго порядка $\varepsilon_{ij}$ (см. [10]):

$$\widetilde{\varepsilon}_{ijk} = \nabla^2_k \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ijk} + \Gamma^l_{ik}\varepsilon_{lj} + \Gamma^l_{jk}\varepsilon_{il} + \Gamma^l_{ijk}\varepsilon_l \in T^3X_m.$$

Аффинная связность второго порядка допускает следующие разложения касательных пространств $TL_2(X_m)$, $T^2L_1(X_m)$ и $T^3X_m$ на вертикальные и горизонтальные подпространства:

$$\begin{aligned}
TL_2(X_m) &= VL_2(X_m) \oplus HL_2(X_m),\\
T^2L_1(X_m) &= V^2L_1(X_m) \oplus H^2L_1(X_m),\\
T^3X_m &= VX_m \oplus H^3X_m,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&VL_2(X_m) = \mathrm{span}(E^j_i, E^{ls}_k), && HL_2(X_m) = \mathrm{span}(\widetilde{E}_k);\\
&V^2L_1(X_m) = \mathrm{span}(e^j_i, e_k, e^{jl}_{ik}), && H^2L_1(X_m) = \mathrm{span}(\widetilde{e}^i_{jk}, \widetilde{e}_{ij});\\
&VX_m = TX_m = \mathrm{span}(\varepsilon_i), && H^3X_m = \mathrm{span}(\widetilde{\varepsilon}_{ij}, \widetilde{\varepsilon}_{ijk}).
\end{aligned}$$

**Замечание 7.** Размерности расслоений $T(T^2X_m)$, $T^2(TX_m)$, $T^3X_m$ не равны между собой:

$$\dim T(T^2X_m) = m(m+5), \quad \dim T^2(TX_m) = m(m+5) + m^2, \quad \dim T^3X_m = \frac{1}{6}m(m^2+6m+17).$$

Оператор $f^2$, переводящий векторы $\varepsilon_i \in TX_m$ в горизонтальные векторы аффинной связности $\Gamma^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jkl}\}$ второго порядка, назовем *горизонтальным оператором второго порядка.*

В теоремах 3—5 определим действия трех горизонтальных операторов второго порядка:

$$\begin{aligned}
&f^2_1\colon \varepsilon_i \in TX_m \to \widetilde{E}_i \in TL_2(X_m),\\
&f^2_2\colon \varepsilon_k \in TX_m \to (\widetilde{e}^i_{jk}, \widetilde{e}_{jk}) \in T^2L_1(X_m),\\
&f^2_3\colon \varepsilon_k \in TX_m \to \widetilde{\varepsilon}_{ijk} \in T^3X_m.
\end{aligned}$$

**Теорема 3.** *Горизонтальный оператор второго порядка* $f^2_1 = \gamma^2 \circ \mathrm{id}$

$$f^2_1\colon \varepsilon_i \in TX_m \xrightarrow{\mathrm{id}} \overset{c}{\widetilde{E}}_i = \varepsilon_i \xrightarrow{\gamma^2} \widetilde{E}_i = \overset{c}{\widetilde{E}}_i + \gamma^k_{ji}E^j_k + \gamma^l_{jki}E^{jk}_l \in TL_2(X_m)$$

*переводит касательные векторы* $\varepsilon_i \in TX_m$ *в горизонтальные векторы* $\widetilde{E}_i$ *касательного пространства* $TL_2(X_m)$ *для аффинной связности второго порядка* $\Gamma^2 = \overset{c}{\Gamma}{}^2 + \gamma^2$ *с тензором деформации* $\gamma^2 = \{\gamma^i_{jk}, \gamma^i_{jkl}\}$.

Горизонтальные векторы

$$\widetilde{E}_i = E_i + \Gamma^k_{ji} E^j_k + \Gamma^l_{jki} E^{jk}_l = \varepsilon_i + \gamma^k_{ji} E^j_k + \gamma^l_{jki} E^{jk}_l \in TL_2(X_m)$$

(см. [10]) в канонической связности $\overset{c}{\Gamma}{}^2$ имеют вид $\varepsilon_i \in TX_m$, т.е. $\overset{c}{\widetilde{E}}_i = \varepsilon_i$. В связности $\overset{c}{\Gamma}{}^2$ горизонтальное подпространство в $TL_2(X_m)$ в каждой точке является касательным пространством $TX_m$ к базисному многообразию $X_m$. При этом внешние дифференциалы форм $\omega^i$, $\omega^i_j$ на парах горизонтальных векторов $\widetilde{E}_j$, $\widetilde{E}_k$ дают компоненты тензора кручения второго порядка, т.е.

$$D\omega^i(\widetilde{E}_j, \widetilde{E}_k) = T^i_{jk}, \quad D\omega^i_j(\widetilde{E}_k, \widetilde{E}_l) = T^i_{jkl}.$$

В частности, $D\omega^i_j(\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l) = \overset{\circ}{T}{}^i_{jkl}$ — это кручение продолженной связности. Горизонтальные векторы $\widetilde{E}_i$ аннулируют формы связности $\widetilde{\omega}^i_{jk}$, т.е. $\widetilde{\omega}^i_{jk}(\widetilde{E}_l) = 0$.

Каноническую форму расслоения реперов второго порядка $L_2(X_m)$ можно записать в виде

$$\omega_{L_2(X_m)} = \overset{v}{\widetilde{\omega}}{}^2 + \overset{h}{\widetilde{\omega}}{}^2,$$

где

$$\overset{v}{\widetilde{\omega}}{}^2 = \widetilde{\omega}^i_j E^j_i + \widetilde{\omega}^i_{jk} E^{jk}_i, \quad \overset{h}{\widetilde{\omega}}{}^2 = \omega^i \widetilde{E}_i$$

— это *вертикальная* и *горизонтальная формы первого порядка для связности второго порядка в расслоении* $L_2(X_m)$. Горизонтальная форма для канонической связности $\overset{h}{\widetilde{\omega}}{}^2$ — это фактически каноническая форма $\omega_{X_m} = \omega^i \varepsilon_i$, или $\omega_{X_m} = dx^i \partial_i$, многообразия $X_m$. Вертикальная форма для канонической связности $\overset{v}{\widetilde{\omega}}{}^2$ — это форма

$$\overset{v}{\widetilde{\omega}}{}^2 = dx^i_j \partial^j_i + dx^i_{jk} \partial^{jk}_i, \quad \partial^{jk}_i = \frac{\partial}{\partial x^i_{jk}}.$$

Каноническая форма $\omega_{L_2(X_m)}$ расслоения реперов второго порядка, записанная относительно координатных репера и корепера, преобразуется к виду

$$\omega_{L_2(X_m)} = dx^i \partial_i + dx^i_j \partial^j_i + dx^i_{jk} \partial^{jk}_i$$

и является суммой горизонтальной и вертикальной форм канонической связности второго порядка.

**Теорема 4.** *Горизонтальный оператор второго порядка* $f^2_2 = \gamma^2 \circ de$

$$f^2_2 \colon \varepsilon_k \in TX_m \xrightarrow{de=(de^i_j, de_j)} (\overset{c}{\widetilde{e}}{}^i_{jk}, \overset{c}{\widetilde{e}}_{jk}) \xrightarrow{\gamma^2} (\widetilde{e}^i_{jk}, \widetilde{e}_{jk}) \in T^2 L_1(X_m)$$

*переводит касательные векторы* $\varepsilon_k$ *в горизонтальные векторы* $(\widetilde{e}^i_{jk}, \widetilde{e}_{jk})$ *касательного пространства второго порядка* $T^2 L_1(X_m)$ *для аффинной связности* $\Gamma^2 = \overset{c}{\Gamma}{}^2 + \gamma^2$ *с тензором деформации* $\gamma^2 = \{\gamma^i_{jk}, \gamma^i_{jkl}\}$.

Действительно, отображения $de^i_j$, $de_j$ и тензор $\gamma^2$ позволяют построить горизонтальные векторы $\widetilde{e}^i_{jk}$, $\widetilde{e}_{jk}$ следующим образом:

$$f^2_{2'} \colon \varepsilon_k \xrightarrow{de^i_j} \overset{c}{\widetilde{e}}{}^i_{jk} \xrightarrow{\gamma^2} \widetilde{e}^i_{jk} = \overset{c}{\widetilde{e}}{}^i_{jk} + \gamma^l_{sk}(e^{is}_{jl} - \delta^i_l e^s_j),$$
$$f^2_{2''} \colon \varepsilon_k \xrightarrow{de_j} \overset{c}{\widetilde{e}}_{jk} \xrightarrow{\gamma^2} \widetilde{e}_{jk} = \overset{c}{\widetilde{e}}_{jk} + \gamma^i_{jk} e_i + \gamma^i_{ljk} e^l_i + \gamma^l_{ik} \widetilde{e}^i_{lj}.$$

Обычный дифференциал $d$ переводит каноническую форму $\omega_{L_2(X_m)}$ первого порядка в каноническую форму второго порядка, преобразованную к следующему виду:

$$d\omega_{L_2(X_m)} = {}^2\widetilde{\omega}^i e_i + {}^2\widetilde{\omega}^i_j e^j_i + {}^2\widetilde{\omega}^{ik}_{jl} e^{jl}_{ik} + (\omega^i \omega^j)\widetilde{e}_{ij} + 2(\omega^k \omega^i_j - \Gamma^i_{jl}\omega^k \omega^l)\widetilde{e}^j_{ik},$$

где *вертикальные формы второго порядка для связности второго порядка* ${}^2\widetilde{\omega}^i$, ${}^2\widetilde{\omega}^i_j$, ${}^2\widetilde{\omega}^{ik}_{jl}$ находятся по формулам

$$\begin{aligned}
{}^2\widetilde{\omega}^i &= d\omega^i + \omega^j\omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^j\omega^k,\\
{}^2\widetilde{\omega}^i_j &= d\omega^i_j - \omega^k_j\omega^i_k + \omega^k\omega^i_{jk} + 2\Gamma^l_{jk}\omega^k\omega^i_l - \Gamma^k_{jl}\Gamma^i_{ks}\omega^l\omega^s - \Gamma^i_{jkl}\omega^k\omega^l,\\
{}^2\widetilde{\omega}^{ik}_{jl} &= \omega^k_l\omega^i_j - 2\Gamma^k_{ls}\omega^s\omega^i_j + \Gamma^k_{ls}\Gamma^i_{jp}\omega^s\omega^p.
\end{aligned}$$

Формы связности ${}^2\widetilde{\omega}^i$, ${}^2\widetilde{\omega}^i_j$ являются вертикальными (т.е. аннулируются горизонтальными векторами), если кручение второго порядка равно нулю $T^i_{jk} = 0$, $T^i_{jkl} = 0$ (см. [10]).

Действительно,

$${}^2\widetilde{\omega}^i(\widetilde{e}_{jk}) = \Gamma^i_{[jk]} = \frac{1}{2}T^i_{jk}, \quad {}^2\widetilde{\omega}^i(\widetilde{e}^j_{kl}) = 0, \quad {}^2\widetilde{\omega}^i_j(\widetilde{e}_{kl}) = \frac{1}{2}T^i_{jkl}, \quad {}^2\widetilde{\omega}^i_j(\widetilde{e}^k_{ls}) = 0.$$

Для форм ${}^2\widetilde{\omega}^{ik}_{jl}$ имеем

$${}^2\widetilde{\omega}^{ik}_{jl}(\widetilde{e}_{pq}) = \Gamma^k_{l[q}\Gamma^i_{jp]}, \quad {}^2\widetilde{\omega}^{ik}_{jl}(\widetilde{e}^s_{pq}) = \delta^{[k}_p\delta^s_{[l}\Gamma^{i]}_{j]q},$$

однако

$${}^2\widetilde{\omega}^{ik}_{jl}(\widetilde{e}_{pq})e^{jl}_{ik} = \Gamma^k_{l[q}\Gamma^i_{jp]}e^{jl}_{ik} = 0, \quad {}^2\widetilde{\omega}^{ik}_{jl}(\widetilde{e}^s_{pq})e^{jl}_{ik} = \delta^{[k}_p\delta^s_{[l}\Gamma^{i]}_{j]q}e^{jl}_{ik} = 0.$$

Таким образом, ${}^2\widetilde{\omega}^{ik}_{jl}e^{jl}_{ik}$ — вертикальная вертикальнозначная форма.

**Замечание 8.** Нормальный лифт $de = (de^i_j, e_j)$ порождает горизонтальные векторы второго порядка для продолженной связности $\overset{\circ}{\Gamma}{}^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jkl}\}$, т.е.

$$de\colon \tilde{e} = \{\tilde{e}_k\} \in HL(X_m) \to {}^n\tilde{e} = \operatorname{span}(\tilde{e}^i_{jk}, \tilde{e}_{ij}) \in {}^nHL(X_m)$$

(см. [20]), причем

$$\tilde{e}^i_{jk} = de^i_j(\tilde{e}_k), \quad \tilde{e}_{jk} = de_j(\tilde{e}_k).$$

Отображение $de^i_j$ порождает вертикальное продолжение ${}^v\tilde{e} = \operatorname{span}(\tilde{e}^i_{jk})$ горизонтальных векторов первого порядка, т.е. пространство ${}^vHL(X_m)$. Отображение

$$d\widetilde{e}_k\colon \widetilde{e} = \{\widetilde{e}_l\} \in HL(X_m) \to {}^h\widetilde{e} = \operatorname{span}(\widetilde{\widetilde{e}}_{kl}) \in {}^hHL(X_m)$$

порождает горизонтальное продолжение ${}^h\widetilde{e} = \operatorname{span}(\widetilde{\widetilde{e}}_{kl})$ горизонтальных векторов первого порядка, где

$$\widetilde{\widetilde{e}}_{kl} = d\widetilde{e}_k(\widetilde{e}_l) = \widetilde{e}_{kl} + \Gamma^i_{jk}\widetilde{e}^j_{il} + \nabla_l\Gamma^i_{jk}e^j_i. \tag{9}$$

Горизонтальные векторы (9) относительно канонической связности второго порядка совпадают с векторами $\overset{c}{\widetilde{\varepsilon}}_{ij}$ для канонической связности первого порядка, т.е.

$$\overset{c}{\widetilde{\widetilde{e}}}_{ij} = \overset{c}{\widetilde{\varepsilon}}_{ij}.$$

Альтернирование векторов (9) представляется через кручение и кривизну первого порядка, т.е.

$$\widetilde{\widetilde{e}}_{[kl]} = R^i_{jkl}e^j_i + T^i_{kl}\widetilde{e}_i.$$

**Теорема 5.** *Горизонтальный оператор второго порядка* $f^2_3 = \gamma^2 \circ d\varepsilon_{ij}\colon TX_m \to T^3X_m$

$$f^2_3\colon \varepsilon_k \in TX_m \xrightarrow{d\varepsilon_{ij}} \overset{c}{\widetilde{\varepsilon}}_{ijk} \xrightarrow{\gamma^2} \widetilde{\varepsilon}_{ijk} = \overset{c}{\widetilde{\varepsilon}}_{ijk} + \gamma^l_{ik}\varepsilon_{lj} + \gamma^l_{jk}\varepsilon_{il} + \gamma^l_{ijk}\varepsilon_l \in T^3X_m$$

*переводит касательные векторы* $\varepsilon_k \in TX_m$ *в горизонтальные векторы* $\widetilde{\varepsilon}_{ijk}$ *касательного пространства третьего порядка* $T^3X_m$ *для аффинной связности* $\Gamma^2 = \overset{c}{\Gamma}{}^2 + \gamma^2$ *с тензором деформации* $\gamma^2 = \{\gamma^i_{jk}, \gamma^i_{jkl}\}$.

**Замечание 9.** Векторы $d\varepsilon_i(\varepsilon_j)$, $d\varepsilon_{ij}(\varepsilon_k)$ инвариантны в совокупности и определяют нормаль третьего порядка $N^3_1 = T^3X_m \setminus TX_m$ пространства $TX_m$ (см. [12]).

Касательные векторы $\varepsilon_i \in TX_m$ и $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \overset{*}{x}{}^k_i \overset{*}{x}{}^k_i \partial_{kl} \in TX_m$ будем называть *каноническими векторами первого и второго порядка*, имея в виду, что они являются горизонтальными векторами первого и второго порядка для канонической связности любого порядка.

Обобщая результаты теорем 1—5, получим действие оператора $f^s$ порядка $s$, переводящего векторы $\varepsilon_i \in TX_m$ в горизонтальные векторы связности $\Gamma^s = \overset{c}{\Gamma}{}^s + \gamma^s$ порядка $s$.

**Теорема 6.** *Горизонтальный оператор $f^s = \gamma^s \circ de$ порядка $s$*

$$f^s \colon \varepsilon_i \in TX_m \xrightarrow{de} \overset{c}{\widetilde{e}} \in T^p L_q(X_m) \xrightarrow{\gamma^s} \widetilde{e} \in T^p L_q(X_m) \quad (p = 1, \ldots, s+1;\ p+q = s+1)$$

*переводит касательные векторы $\varepsilon_i \in TX_m$ в горизонтальные векторы $\widetilde{e}$ касательного пространства $T^p L_q(X_m)$ порядка $p$ для аффинной связности $\Gamma^s = \overset{c}{\Gamma}{}^s + \gamma^s$ порядка $s$ с тензором деформации $\gamma^s$. Причем $e$ — базисные векторы пространства $T^{p-1} L_q(X_m)$; $\widetilde{e} = \nabla^s e$ — ковариантные производные в связности порядка $s$. При $p = 1$ имеем $de = \mathrm{id}$; $\widetilde{e} = \nabla^s \omega_{L_q X_m}$.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Акивис М. А.* Многомерная дифференциальная геометрия. — Калинин, 1977.
2. *Белова О. О.* Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 2. — С. 29–67.
3. *Белова О. О.* Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 6. — С. 812–822.
4. *Бишоп Р., Криттенден Р.* Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.
5. *Васильев А. М.* Дифференциальная алгебра// Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. — 1978. — *10*. — С. 5–23.
6. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. — 1979. — *9*. — С. 5–246.
7. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1966. — *1*. — С. 139–189.
8. *Полякова К. В.* Ковариантные дифференциалы и ковариантные производные, ассоциированные с поверхностью проективного пространства// Вестн. Балт. федер. ун-та им. И. Канта. — 2013. — № 10. — С. 60–63.
9. *Полякова К. В.* Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2015. — № 46. — С. 114–128.
10. *Полякова К. В.* О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2016. — № 47. — С. 108–125.
11. *Полякова К. В.* Тангенциальнозначные формы 2-го порядка// Мат. заметки. — 2019. — *105*, № 1. — С. 84–94.
12. *Полякова К. В.* Нормали на многообразии и порождающие их отображения// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2019. — № 50. — С. 110–125.
13. *Рыбников А. К.* Об аффинных связностях второго порядка// Мат. заметки. — 1981. — *29*, № 2. — С. 279–290.
14. *Рыбников А. К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка// Изв. вузов. Мат. — 1983. — № 1. — С. 73–80.
15. *Шевченко Ю. И.* Связность в продолжении главного расслоения// Диффер. геом. многообр. фигур. — 1991. — № 22. — С. 117–127.
16. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2006. — № 37. — С. 179–187.
17. *Catuogno P.* A geometric Itô formula// Mat. Contemp. — 2005. — *33*. — С. 85–99.
18. *Emery M.* An invitation to second-order stochastic differential geometry// https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145073.
19. *Janyska J., Kolář I.* On the connections naturally induced on the second order frame bundle// Arch. Math. — 1986. — *22*, № 1. — С. 21–28.
20. *Polyakova K. V.* Prolongations generated by horizontal vectors// J. Geom. — 2019. — *110*. — 53.

21. *Schwartz L.* Géométrie différentielle du 2ème ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle. — Berlin: Springer, 1982.

Полякова Катерина Валентиновна
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград
E-mail: polyakova_@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 203 (2021). С. 84–99
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-203-84-99

УДК 514.75

# ГИПЕРПОЛОСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

© 2021 г. **Ю. И. ПОПОВ**

Аннотация. Рассматривается специальный класс гиперполосных распределений — $\mathfrak{H}(L)$-распределения — с отношением инцидентности его элементов: $A \in L(A) \subset H(A)$. Теория $\mathfrak{H}(L)$-распределений применяется для изучения торсовых поверхностей, регулярных одномерных гиперполос, специальных классов гиперполос и гиперповерхностей аффинного пространства.

***Ключевые слова:*** гиперполосное распределение, аффинное пространство, фокальная точка, нормализация, нормализация Нордена, нормальная связность, аффинная связность, касательная связность, соприкасающиеся гиперквадрики.

# HYPERBAND DISTRIBUTIONS OF AFFINE SPACES

© 2021 **Yu. I. POPOV**

Abstract. We consider a special class of hyperband distributions, $\mathfrak{H}(L)$-distributions, with the incidence relation $A \in L(A) \subset H(A)$. The theory of $\mathfrak{H}(L)$-distributions is used for studying torso surfaces, regular one-dimensional hyperbands, special classes of hyperbands, and hypersurfaces of an affine space.

***Keywords and phrases:*** hyperband distribution, affine space, focal point, normalization, Norden normalization, normal connection, affine connection, tangent connection, touching hyperquadrics.

***AMS Subject Classification:*** 53B10

## 1. Задание гиперполосного $\mathfrak{H}(L)$-распределения аффинного пространства.

В работе используется следующая схема индексов:

$$I, J, K = \overline{1, n}; \quad i, j, k, s = \overline{1, n-1}; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{2, n-2}; \quad \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{2, n}.$$

*1.1.* Пусть дано $n$-мерное аффинное пространство $A_n$, отнесенное к подвижному реперу $\{A, \boldsymbol{e}_K\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$d\boldsymbol{A} = \omega^K \boldsymbol{e}_K, \quad d\boldsymbol{e}_K = \omega_K^L \boldsymbol{e}_L. \tag{1.1}$$

Инвариантные формы $\omega^K$ и $\omega_K^L$ аффинной группы преобразований удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства $A_n$:

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K, \quad d\omega_K^L = \omega_K^J \wedge \omega_J^L.$$

Рассмотрим $\mathfrak{H}(L)$-распределение аффинного пространства $A_n$. При этом распределение прямых $L(A)$ назовем базисным распределением (или $L$-подрасслоением), а распределение гиперплоскостей $H(A)$ — оснащающим распределением (или $H$-подрасслоением). $H(L)$-Распределение задается следующими уравнениями в репере $R^0$ $(\{\boldsymbol{e}_\alpha\} \subset H(A); \boldsymbol{e}_1 \| L)$:

$$\begin{gathered} \omega_1^n = \Lambda_{1K}^n \omega^K, \quad \omega_1^\alpha = \Lambda_{1K}^\alpha \omega^K, \quad \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha K}^n \omega^K, \\ \nabla \Lambda_{1K}^n = \Lambda_{1KL}^n \omega^L, \quad \nabla \Lambda_{1K}^\alpha + \Lambda_{1K}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{1KL}^\alpha \omega^L, \quad \nabla \Lambda_{\alpha K}^n - \Lambda_{1K}^n \omega_\alpha^1 = \Lambda_{\alpha KL}^n \omega^L. \end{gathered} \tag{1.2}$$

В дальнейшем мы рассматриваем регулярные гиперполосные распределения (см. [12, 17]), для которых главный фундаментальный тензор $\Lambda^n_{11}$ отличен от нуля, $\Lambda^n_{11} \neq 0$, что позволяет ввести в рассмотрение обратный фундаментальный тензор первого порядка $\Lambda^{11}_n$:

$$\Lambda^{11}_n \Lambda^n_{11} = 1, \quad \nabla\Lambda^{11}_n = \Lambda^{11}_{nK}\omega^K. \tag{1.3}$$

*1.2.* Для регулярного $\mathfrak{H}(L)$-распределения согласно лемме Н. М. Остиану (см. [10]) возможна частичная канонизация репера $R^0$, как это следует из дифференциальных уравнений

$$\nabla\Lambda^n_{\alpha 1} - \Lambda^n_{11}\omega^1_\alpha = \Lambda^n_{\alpha 1K}\omega^K. \tag{1.4}$$

Действительно, полагая

$$\Lambda^n_{\alpha 1} = 0$$

и учитывая (1.3), разрешим уравнения (1.4) относительно форм $\omega^1_\alpha$:

$$\omega^1_\alpha = \Lambda^1_{\alpha K}\omega^K.$$

Геометрический смысл такой канонизации заключается в том, что векторы $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ помещаются в характеристику $\chi_{n-2}(A)$ гиперплоскости $H(A)$, полученную при смещении центра $A$ вдоль кривых, принадлежащих $L$-подрасслоению. Выбранный таким образом репер $R^1$ является репером первого порядка $\mathfrak{H}(L)$-распределения. В дифференциальной окрестности второго порядка $\mathfrak{H}(L)$-распределение задается относительно репера $R^1$ уравнениями:

$$\omega^n_1 = \Lambda^n_{1K}\omega^K, \quad \omega^1_\alpha = \Lambda^1_{\alpha K}\omega^K, \quad \omega^\alpha_1 = \Lambda^\alpha_{1K}\omega^K, \quad \omega^n_\alpha = \Lambda^n_{\alpha\hat\beta}\omega^{\hat\beta}, \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}
\nabla\Lambda^n_{11} = \Lambda^n_{11K}\omega^K, \quad \nabla\Lambda^n_{1\alpha} = \Lambda^n_{1\alpha K}\omega^K, \quad \nabla\Lambda^\alpha_{11} + \Lambda^n_{11}\omega^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{11K}\omega^K,\\
\nabla\Lambda^n_{1n} - \Lambda^n_{11}\omega^1_n - \Lambda^n_{1\alpha}\omega^\alpha_n = \Lambda^n_{1nK}\omega^K, \quad \nabla\Lambda^n_{\alpha\beta} = \Lambda^n_{\alpha\beta K}\omega^K,\\
\nabla\Lambda^\alpha_{1n} - \Lambda^\alpha_{11}\omega^1_n - \Lambda^\alpha_{1\beta}\omega^\beta_n + \Lambda^n_{1n}\omega^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{1nK}\omega^K,\\
\nabla\Lambda^n_{\alpha n} - \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^\beta_n = \Lambda^n_{\alpha nK}\omega^K, \quad \nabla\Lambda^1_{\alpha 1} = \Lambda^1_{\alpha 1K}\omega^K,\\
\nabla\Lambda^1_{\alpha\beta} + \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^1_n = \Lambda^1_{\alpha\beta K}\omega^K, \quad \nabla\Lambda^\alpha_{1\beta} + \Lambda^n_{1\beta}\omega^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{1\beta K}\omega^K,\\
\nabla\Lambda^1_{\alpha n} - \Lambda^1_{\alpha 1}\omega^1_n - \Lambda^1_{\alpha\beta}\omega^\beta_n + \Lambda^n_{\alpha n}\omega^1_n = \Lambda^1_{\alpha nK}\omega^K,
\end{gathered} \tag{1.6}$$

где коэффициенты в правых частях уравнений (1.6) не симметричны по нижним индексам. Отметим, что геометрические объекты $\Gamma_1 = \{\Lambda^n_{1K}, \Lambda^\alpha_{1K}, \Lambda^n_{\alpha K}\}$, $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Lambda^1_{\alpha K}, \Lambda^n_{1KL}, \Lambda^\alpha_{1KL}, \Lambda^n_{\alpha KL}\}$ являются фундаментальными геометрическими объектами $\mathfrak{H}(L)$-распределения соответственно первого и второго порядка (см. [6]). В общем случае (при локальной постановке вопроса) определители $\chi_0 = \det\|\Lambda^n_{\alpha\beta}\|$, $H_0 = \det\|\Lambda^n_{ij}\|$ отличны от нуля. Компоненты определителя $H_0$ имеют следующее строение:

$$H_0 = \det\|\Lambda^n_{ij}\| = \det\begin{Vmatrix}\Lambda^n_{11} & \Lambda^n_{1\beta}\\ 0 & \Lambda^n_{\alpha\beta}\end{Vmatrix}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\Lambda^n_{ij} = \Lambda^n_{ijK}\omega^K.$$

Для невырожденных тензоров $\{\Lambda^n_{\alpha\beta}\}$ и $\{\Lambda^n_{ij}\}$ введем, вообще говоря, несимметрические обращенные тензоры первого порядка $\{\Lambda^{\alpha\beta}_n\}$ и $\{\Lambda^{ij}_n\}$, компоненты которых удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda^{\alpha\beta}_n\Lambda^n_{\beta\gamma} = \Lambda^{\beta\alpha}_n\Lambda^n_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\gamma, \quad \Lambda^{ij}_n\Lambda^n_{jk} = \Lambda^{ji}_n\Lambda^n_{kj} = \delta^i_k$$

(см. [6, 7]) и дифференциальным уравнениям

$$\nabla\Lambda^{\alpha\beta}_n = \Lambda^{\alpha\beta}_{nK}\omega^K, \quad \nabla\Lambda^{ij}_n = \Lambda^{ij}_{nK}\omega^K.$$

Тензоры $\{\Lambda^n_{\alpha\beta}\}$, $\{\Lambda^n_{ij}\}$ и $\{\Lambda^{\alpha\beta}_n\}$, $\{\Lambda^{ij}_n\}$ являются фундаментальными тензорами первого порядка и обращенными фундаментальными тензорами первого порядка соответственно $\chi$-подрасслоения (распределение характеристик $\mathfrak{H}(L)$-распределения) и $H$-подрасслоения (распределения $H$-плоскостей).

**2. Теорема существования распределения в аффинном пространстве.** Замыкание системы (1.5) можно представить в виде

$$\nabla\Lambda^n_{1K}\wedge\omega^K=0,\quad \nabla\Lambda^\alpha_{1K}\wedge\omega^K=0,\quad \nabla\Lambda^n_{\alpha K}\wedge\omega^K=0,\quad \nabla\Lambda^1_{\alpha K}\wedge\omega^K=0. \tag{2.1}$$

С системой (2.1) ассоциируется последовательность матриц $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. Определим характеры этой системы по формулам (см. [8])

$$S_1=\operatorname{rang} M_1,\quad S_1=\operatorname{rang} M_2-\operatorname{rang} M_1,\ldots\quad S_n=q-\operatorname{rang} M_{n-1},$$

где $q$ — число независимых функций, входящих в систему (2.1). Имеем: $S_1=3(n-2)+1=A$, $S_2=A$, …, $S_n=A$. Подсчитаем число Картана для этой системы (см. [18]):

$$Q=S_1+2S_2+\ldots+nS_n=(1+2+\ldots+n)(3(n-2)+1)=\frac{n(n+1)}{2}(3(n-2)+1).$$

Разрешим систему (2.1) по лемме Картана:

$$\nabla\Lambda^n_{1K}=\Lambda^n_{1KL}\omega^L,\quad \nabla\Lambda^\alpha_{1K}=\Lambda^\alpha_{1KL}\omega^L,\quad \nabla\Lambda^n_{\alpha K}=\Lambda^n_{\alpha KL}\omega^L,\quad \nabla\Lambda^1_{\alpha K}=\Lambda^1_{\alpha KL}\omega^L. \tag{2.2}$$

Найдем число линейно независимых функций, стоящих в правых частях системы (2.2). Их число будет равно $N=An(n+1)/2$. Итак, $Q=N$. Данная системы находится в инволюции (см. [18]). Решение этой системы существует и ее произвол определяется характером $S_n$.

**Теорема 2.1.** *В $n$-мерном аффинном пространстве $\mathfrak{H}(L)$-распределение существует и определяется с произволом $3(n-5)$ функций $n$ аргументов.*

**3. Соответствие Бомпьяни—Пантази.**

*3.1.* Следуя работам [2, 3], введем биекцию Бомпьяни—Пантази между нормалями первого и второго рода для $H$-, $L$-, $\chi$-подрасслоений, ассоциированных с $\mathfrak{H}(L)$-распределением.

**Определение 3.1.** Нормалью первого рода элемента $H$-подрасслоения (плоскости $H(A)$) называется инвариантная прямая $N_1(A)$, удовлетворяющая условию $N_1(A)\cap H(A)=A$, а нормалью второго рода — такая инвариантная плоскость $\mathfrak{N}_{n-2}(A)$, что $\mathfrak{N}_{n-2}(A)\subset H(A)$, $A\notin\mathfrak{N}_{n-2}(A)$.

Поля нормалей первого рода $N_1(A)$ и нормалей второго рода $\mathfrak{N}_{n-2}(A)$ задаются соответственно полями объектов $\{\nu^i_n\}$, $\{\nu_i\}$:

$$\nabla\nu^i_n+\omega^i_n=\nu^i_{nK}\omega^K,\quad \nabla\nu_i=\nu_{iK}\omega^K.$$

**Определение 3.2.** Будем говорить, что $H$-подрасслоение (соответственно $L$-подрасслоение, $\chi$-подрасслоение) нормализовано, если оно одновременно оснащено полями нормалей первого и второго рода Нордена (см. [9]), а саму нормализацию будем обозначать $(\nu^i_n,\nu_i)$ или $(N_1,\mathfrak{N}_{n-2})$ (соответственно символами $(\nu^1_n,\nu_1)$, $(\nu^\alpha_n,\nu_\alpha)$ или $(N_{n-1},\mathfrak{N}_0)$, $(N_2,\mathfrak{N}_{n-3})$.

*3.2.* Зададим точку $F\in H(A)$ следующим образом:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}+x^i\boldsymbol{e}_i,\quad x^n=0. \tag{3.1}$$

Потребуем, чтобы она не выходила из гиперплоскости $H(A)$ при смещении центра $A$ $\mathfrak{H}(L)$-распределения вдоль кривой $\omega^i=\nu^i_n\omega^n$, касающейся нормали $\nu_1=[A,\boldsymbol{\nu}]=[A,\nu^i\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_n]$ первого рода гиперплоскости $H(A)$, т.е.

$$d\boldsymbol{F}=\vartheta^i\boldsymbol{e}_i(x^n=0). \tag{3.2}$$

**Определение 3.3.** Точка $F$, удовлетворяющая условию (3.2), называется фокальной точкой гиперплоскости $H(A)$ (см. [3, 7]), а направление смещения точки $A$, соответствующее фокальной точке $F$ — фокальным направлением.

Из (3.2) в силу (1.1), (3.1) следует

$$\vartheta^i=dx^i+x^j\omega^i_j+\omega^i,\quad x^i\omega^n_i+\omega^n=0. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) определяет многообразие фокальных точек гиперплоскости $H(A)$, которые согласно (1.4)—(1.6) приведем к виду:

$$\nu_ix^i-1=0,\quad x^n=0. \tag{3.4}$$

где

$$\begin{gathered}\nu_i = -\Lambda^n_{ij}\nu^j_n - \mathfrak{A}_i, \quad \nabla\nu_i = \nu_{iK}\omega^K, \quad \mathfrak{A}_i = \Lambda^n_{in},\\ \nabla\mathfrak{A}_i + \Lambda^n_{ij}\omega^j_n = \mathfrak{A}_{iK}\omega^K, \quad \nabla\nu_{iK} \equiv \Lambda^n_{iK}\nu_j\omega^j_n.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Таким образом, уравнения (3.4) задают в локальном репере $R^1$ нормаль второго рода плоскости $H(A)$, а поле нормалей второго рода $H$-подрасслоения задается дифференциальными уравнениями (3.5). Разрешим уравнения (3.5) относительно $\nu^j_n$:

$$\nu^s_n = -\Lambda^{si}_n\nu_i + \mathfrak{A}^s_n, \quad \nabla\nu^s_n + \omega^s_n = \nu^s_{nK}\omega^K, \tag{3.6}$$

где

$$\mathfrak{A}^s_n \overset{\text{def}}{=} -\Lambda^{si}_n\mathfrak{A}_i, \quad \nabla\mathfrak{A}^s_n + \omega^s_n = \mathfrak{A}^s_{nK}\omega^K, \quad \nabla\nu^s_{nK} + \Lambda^n_{jK}\nu^j_n\omega^s_n + \Lambda^n_{jK}\nu^s_n\omega^j_n \equiv 0. \tag{3.7}$$

Итак, при помощи формул (3.5) и (3.6) устанавливается взаимно однозначное соответствие между нормалями первого и второго рода $H$-распределения. Это соответствие (биекция) является для оснащающего $H$-подрасслоения аналогом соответствия Бомпьяни—Пантази (см. [3, 7]).

Аналогично устанавливаем соответствие Бомпьяни—Пантази между нормалями первого рода $N_2(\nu^\alpha_n)$ и нормалями второго рода $\mathfrak{N}_{n-3}(\nu_\alpha)$ $\chi$-подрасслоения:

$$\nu_\alpha = -\Lambda^n_{\alpha\beta}\nu^\beta_n - \mathfrak{A}_\alpha, \quad \nabla\nu_\alpha = \nu_{\alpha K}\omega^K, \quad \nabla\nu_{\alpha K} \equiv \Lambda^n_{\alpha K}\nu_\beta\omega^\beta_n, \tag{3.8}$$

$$\nu^\alpha_n = -\Lambda^{\alpha\beta}_n\nu_\beta + \mathfrak{A}^\alpha_n, \quad \nabla\nu^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \nu^\alpha_{nK}\omega^K, \tag{3.9}$$

где

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}_\alpha \overset{\text{def}}{=} \Lambda^n_{\alpha n}, \quad \nabla\mathfrak{A}_\alpha = \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^\beta_n + \mathfrak{A}_{\alpha K}\omega^K, \quad \mathfrak{A}^\alpha_n \overset{\text{def}}{=} -\Lambda^{\alpha\beta}_n\mathfrak{A}_\beta, \quad \nabla\mathfrak{A}^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \mathfrak{A}^\alpha_{nK}\omega^K,\\ \nabla\nu^\alpha_{nK} - (\Lambda^\alpha_{1K} - \Lambda^n_{1K}\nu^\alpha_n)\omega^1_n + \Lambda^n_{\beta K}\nu^\beta_n\omega^\alpha_n + \Lambda^n_{\beta K}\nu^\alpha_n\omega^\beta_n \equiv 0.\end{gathered} \tag{3.10}$$

*3.3.* Из (3.7) следует, что компонента $\{\mathfrak{A}^1_n\}$ квазитензора $\{\mathfrak{A}^s_n\}$ имеет следующее строение

$$\mathfrak{A}^1_n \overset{\text{def}}{=} -\Lambda^{11}_n\Lambda^n_{1n} - \Lambda^{1\alpha}_n\Lambda^n_{\alpha n}$$

и является квазитензором первого порядка

$$\nabla\mathfrak{A}^1_n + \omega^1_n = \mathfrak{A}^1_{nK}\omega^K. \tag{3.11}$$

Будем искать соответствие Бомпьяни—Пантази между нормалями первого и второго рода $L$-подрасслоения в виде (3.6), (3.8)

$$\nu^1_n = -\Lambda^{11}_n\nu_1 + \mathfrak{A}^1_n, \quad \nabla\nu^1_n + \omega^1_n = \nu^1_{nK}\omega^K. \tag{3.12}$$

Разрешив уравнения (3.12) относительно величины $\{\nu_1\}$, получим

$$\nu_1 = -\Lambda^n_{11}\nu^1_n - \widetilde{\mathfrak{A}}_1, \quad \nabla\nu_1 = \nu_{1K}\omega^K, \tag{3.13}$$

где

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathfrak{A}}_1 \overset{\text{def}}{=} -\Lambda^n_{11}\mathfrak{A}^1_n, \quad \nabla\widetilde{\mathfrak{A}}_1 = \Lambda^n_{11}\omega^1_n,\\ \nabla\nu^1_{nK} - (\Lambda^1_{\alpha K} - \Lambda^n_{\alpha K}\nu^1_n)\omega^1_n + 2\Lambda^n_{1K}\nu^1_n\omega^1_n \equiv 0, \quad \nabla\nu_{1K} \equiv \Lambda^n_{1K}\nu_1\omega^1_n.\end{gathered}$$

*3.4.* Отметим, что поле квазитензора $\{\mathfrak{A}^i_n\}$ (см. (3.7)) для гиперплоскостного распределения аффинного пространства было введено Э. Д. Алшибая (см. [2, 3]) и дана его геометрическая интерпретация. В силу этого поле нормалей первого рода $N_1 \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{A}_1$ (поле нормалей $\boldsymbol{\mathfrak{A}}\{\mathfrak{A}^i_n\}$) оснащающего $H$-подрасслоения данного $\mathfrak{H}(L)$-распределения будем называть в дальнейшем полем нормалей Алшибая. Следуя работам [2, 3], аналогично можно показать, что свойства нормалей Алшибая $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ сохраняют силу и в случае $\mathfrak{H}(L)$-распределения:

(i) при смещении центра $A$ $\mathfrak{H}(L)$-распределения вдоль кривой, касающейся нормали Алшибая $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, гиперплоскостной элемент $H(A)$ смещается параллельно;

(ii) в биекции Бомпьяни—Пантази (3.6) нормали Алшибая $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ (см. (3.7)) соответствует бесконечно удаленная $(n-2)$-плоскость гиперплоскости $H(A)$ (в этом случае в уравнении (3.4) $\nu_i = 0$).

## 4. Фокальные образы.

*4.1.* Пусть задано поле нормалей первого рода $N_1 = [A, \boldsymbol{\nu}_n = \nu_n^i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_n]$ оснащенного $H$-подрасслоения

$$\nabla \nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i \omega^K. \tag{4.1}$$

Найдем фокальное многообразие $F(N_{n-1}; L)$ нормали первого рода $N_{n-1}(A) = [A, \boldsymbol{\nu}_n, \chi]$ прямой $L(A)$ при смещении центра $A$ распределения $\mathfrak{H}(L)$ вдоль кривых $(Z)$, принадлежащих $L$-подрасслоению:

$$(Z): \begin{cases} \omega^1 = \mu^1 \theta, \quad \nabla \mu^1 - \mu^1 \theta_1 = \mu_1^1 \theta, \quad d\theta = \theta \wedge \theta_1, \\ \omega^\alpha = 0, \quad \omega^n = 0. \end{cases}$$

Пусть $F$ — фокальная точка плоскости $N_{n-1}(A)$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} + y^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + y^v \boldsymbol{\nu}_n, \quad \boldsymbol{\nu}_n = \nu_n^i \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_n.$$

Из условия ее фокальности

$$d\boldsymbol{F} = \vartheta^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \vartheta^n (\nu_n^1 \boldsymbol{e}_1 + \nu_n^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \boldsymbol{e}_n)$$

с учетом (4.1) находим

$$\begin{gathered} \vartheta^n = dy^n + y^n \omega_n^n + y^n \nu_n^1 \omega_1^n, \quad \vartheta^\alpha = dy^\alpha + y^\beta \omega_\beta^\alpha + y^n (\nu_{n1}^\alpha + \nu_{11}^\alpha \nu_n^1) \omega^1, \\ \Big[\delta_1^1 + y^\alpha \Lambda_{\alpha 1}^1 + y^n (\nu_{n1}^1 - \Lambda_{11}^n \nu_n^1 \nu_n^1 + \nu_n^\alpha \Lambda_{\alpha 1}^1)\Big] = 0, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где

$$\nu_{11}^\alpha = \Lambda_{11}^\alpha - \Lambda_{11}^n \nu_n^\alpha, \quad \nabla \nu_{11}^\alpha \equiv 0.$$

Так как уравнение (4.2) выполняется тождественно, то

$$\lambda_\alpha y^\alpha + \nu_n y^n - 1 = 0,$$

где

$$\lambda_\alpha = -\Lambda_{\alpha 1}^1, \quad \nabla \lambda_\alpha = \lambda_{\alpha K} \omega^K, \quad \nu_n = -(\nu_{n1}^n - \Lambda_{11}^n \nu_n^1 \nu_n^1 + \nu_n^\alpha \Lambda_{\alpha 1}^1), \quad \nabla \nu_n = \nu_{nK} \omega^K.$$

Итак, фокальное многообразие $F(N_{n-1}; L)$, которое в локальном репере $R^1$ задается уравнениями

$$\lambda_\alpha y^\alpha + \nu_n y^n - 1 = 0, \quad y^1 = \nu_n^1 y^n, \tag{4.3}$$

есть плоскость $K_{n-2}(A) \subset N_{n-1}(A)$. Плоскость $K_{n-2}(A)$ (см. (4.3)) является аналогом плоскости Кенигса (см. [11, 17]) нормали $N_{n-1}(A)$ базисного $L$-подрасслоения. Точку пересечения нормали $\boldsymbol{\nu}_n$ с плоскостью $K_{n-2}(A)$, т.е. точку

$$K_n(\nu): y^n = \frac{1}{\lambda_\alpha \nu_n^\alpha + \nu_n}, \quad y^i = \frac{1}{\lambda_\alpha \nu_n^\alpha + \nu_n} \nu_n^i$$

назовем точкой Кенигса нормали $\boldsymbol{\nu}_n$, ассоциированной с $L$-подрасслоением или кратко $\nu L$-виртуальной точкой Кенигса.

Определим в каждом центре $A$ еще одну инвариантную плоскость $K_{n-3}(A) = X(A) \cap K_{n-2}(A)$:

$$y^1 = 0, \quad y^n = 0, \quad \lambda_\alpha y^\alpha - 1 = 0, \tag{4.4}$$

которая является нормалью второго рода плоскости $\chi(A)$. Итак, структура плоскости Кенигса $K_{n-2}(A)$ такова, что

$$K_{n-2}(\nu) = [K_{n-3}(A), K_n(\nu)].$$

Если задать другое поле инвариантных нормалей $\boldsymbol{\nu}_n^*$ $H$-подрасслоения, то в соответствующей точке $A$ плоскость Кенигса имеет вид:

$$K_{n-2}(\nu^*) = [K_{n-3}(A), K_n(\nu^*)],$$

т.е. плоскость Кенгса $K_{n-3}(A)$ есть ось оснащающих плоскостей Кенигса в нормалях первого рода $L$-подрасслоения в данном центре $A$. Следовательно, имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.1.** *Для пучка нормалей первого рода $N_{n-1}(A)$ прямой $L(A)$ в данном центре $A$ все плоскости Кенигса этих нормалей проходят через неподвижную (инвариантную) плоскость $K_{n-3}(A)$ (см. (4.4)) — ось пучка плоскостей Кенигса.*

*4.2.* Аналогично находим фокальное многообразие $F(N_2,\chi)$ нормали первого рода $N_2(A)$ плоскости $\chi(A)$ при смещениях центра $A$ вдоль кривых

$$(\chi):\begin{cases}\omega^\alpha=\mu^\alpha\theta, \quad \nabla\mu^\alpha-\mu^\alpha\theta_1=\mu_1^\alpha\theta_1, \quad d\theta=\theta\wedge\theta_1,\\ \omega^1=0, \quad \omega^n=0,\end{cases}$$

принадлежащих $\chi$-подрасслоению данного $\mathfrak{H}(L)$-распределения:

$$y^\alpha=\nu_n^\alpha y^n, \quad \det\left\|\delta_\beta^\alpha+y^1\nu_{1\beta}^\alpha+y^n(\nu_{n\beta}^\alpha+\nu_{1\beta}^\alpha\nu_n^1-\lambda_{\gamma\beta}^n\nu_n^\alpha\nu_n^\gamma)\right\|=0, \tag{4.5}$$

где

$$\nu_{1\beta}^\alpha=\Lambda_{1\beta}^\alpha-\Lambda_{1\beta}^n\nu_n^\alpha, \quad \nabla\nu_{1\beta}^n\equiv 0.$$

Линейная поляра центра $A$ относительно фокального многообразия $F(N_2;\chi)$ (см. (4.5))

$$y^\alpha=\nu_n^\alpha y^n, \quad \tilde\nu_1 y^1+\tilde\nu_n y^n-1=0, \tag{4.6}$$

где

$$\tilde\nu_1=-\frac{1}{n-2}\nu_{1\alpha}^\alpha, \qquad \nabla\tilde\nu_1=\tilde\nu_{1K}\omega^K, \tag{4.7}$$

$$\tilde\nu_n=-\frac{1}{n-2}(\nu_{n\alpha}^\alpha-\Lambda_{\gamma\alpha}^n\nu_n^\gamma\nu_n^\alpha+\nu_{1\alpha}^\alpha\nu_n^1), \quad \nabla\tilde\nu_n=\tilde\nu_{nK}\omega^K, \tag{4.8}$$

представляет собой прямую $K_1$, которую назовем $\nu\chi$-виртуальной прямой Кенигса (см. [15]) плоскости $N_2=[A,L,\boldsymbol{\nu}_n]$ в центре $A$. Поле прямых (4.6) задается полем квазитензора $\{\nu_n^\alpha\}$:

$$\nabla\nu_n^\alpha+\omega_n^\alpha=\nu_{nK}^\alpha\omega^K$$

и полями (4.7), (4.8) тензоров $\{\tilde\nu_1\}$, $\{\tilde\nu_n\}$.

Точку $\widetilde{C}_n$ пересечения нормали $N_1\{\nu_n^i\}$ с прямой $K_1(A)$ (см. (4.6))

$$\widetilde{C}_n(\nu): y^n=\frac{1}{\tilde\nu_1\nu_n^1+\tilde\nu_n}, \quad y^i=\frac{1}{\tilde\nu_1\nu_n^1+\tilde\nu_n}\nu_n^i,$$

назовем $\nu\chi$-виртуальной точкой Кенигса (см. [15]). Точку пересечения прямой $K_1(A)$ с прямой $L(A)$, т.е. точку

$$G_1: y^\alpha=0, \quad y^n=0, \quad \tilde\nu_1 y^1=0, \tag{4.9}$$

назовем $\nu$-виртуальной точкой Грина (см. [15]) прямой $L(A)$, так как она зависит от выбора нормали $\boldsymbol{\nu}_n$ плоскости $H(A)$.

Рассмотрим $(n-2)$-плоскость $q_{n-2}(A)=[K_{n-3}(A);G_1]$, заданную системой уравнений

$$y^n=0, \quad q_i y^i-1=0, \tag{4.10}$$

где $q_1=\tilde\nu_1$, $q_\alpha=\lambda_\alpha$. Следуя работам [9, 14, 16], плоскость $q_{n-2}(A)$ назовем $\nu H$-виртуальной плоскостью Грина $H$-подрасслоения данного $\mathfrak{H}(L)$-распределения.

В биекции Бомпьяни—Пантази (см. [14]) $\nu H$-виртуальной нормали второго рода Грина (4.10) соответствует $\nu H$-виртуальная нормаль первого рода $q_n^i$, где $q_n^i=-\Lambda_n^{ij}q_j+\mathfrak{A}_n^i$.

**Теорема 4.2.** *$\mathfrak{H}(L)$-Распределение внутренним инвариантным образом порождает $\nu H$-виртуальную нормализацию Грина $(q_n^i,q_i)$ в дифференциальной окрестности порядка $t$, где $t$ — порядок квазинормали $\{\nu_n^\alpha\}$ (или нормали $\boldsymbol{\nu}_n$ $H$-подрасслоения).*

*4.3.* Следуя работе [1], назовем фокальной гиперплоскостью базисного $L$-подрасслоения в центре $A$ данного $\mathfrak{H}(L)$-распределения всякую гиперплоскость $\xi(A)$, которая содержит две бесконечно близкие прямые $L$-подрасслоения при смещении центра $A$ вдоль некоторой интегральной кривой $L$-подрасслоения.

Так как $L(A)\subset\xi(A)$, то уравнение гиперплоскости $\xi(A)$ в локальном репере $R^1$ зададим в виде

$$\xi_\alpha x^\alpha+\xi_n x^n=0. \tag{4.11}$$

Имеем

$$d\boldsymbol{A}|_{\omega^{\tilde\alpha}=0}=\omega^1\boldsymbol{e}_1,\quad d\boldsymbol{e}_1|_{\omega^{\tilde\alpha}=0}=\omega_1^1\boldsymbol{e}_1+\Lambda_{11}^\alpha\omega^1\boldsymbol{e}_\alpha+\Lambda_{11}^n\omega^1\boldsymbol{e}_n. \tag{4.12}$$

Учитывая (4.11), (4.12) для искомых интегральных кривых $L$-подрасслоения, получим соотношения

$$\omega^\alpha=\omega^n=0,\quad (\xi_\alpha\Lambda_{11}^\alpha+\xi_n\Lambda_{11}^n)\omega^1=0. \tag{4.13}$$

Система (4.13) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(\xi_\alpha\lambda_{11}^\alpha+\xi_n\lambda_{11}^n)\omega^1=0. \tag{4.14}$$

Таким образом, уравнения (4.13) определяют геометрическое место фокальных гиперплоскостей — фокальный гиперконус класса 1 (см. [1]), вершина которого есть прямая $L(A)$.

Линейной полярой гиперплоскости $H(A)$ (см. [5]) относительно фокального гиперконуса (4.14) является связка гиперплоскостей, которую с учетом (4.11) представим в виде

$$(x^\alpha-\Lambda_{11}^\alpha\Lambda_n^{11}x^n)\xi_\alpha=0. \tag{4.15}$$

Все гиперплоскости связки (4.15) пересекаются по двумерной плоскости

$$\Phi_2(A)=[A,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_n+\Phi_n^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha], \tag{4.16}$$

которая и является линейной полярой гиперплоскости $H(A)$ (см. [3]) относительно фокального гиперконуса (4.14). В локальном репере $R^1$ плоскость $\Phi_2$ (см. (4.16)) задается уравнениями

$$x^\alpha-\Phi_n^\alpha x^n=0,$$

где

$$\Phi_n^\alpha=\Lambda_{11}^\alpha\Lambda_n^{11},\quad \nabla\Phi_n^\alpha+\omega_n^\alpha=\Phi_{nK}^\alpha\omega^K. \tag{4.17}$$

Поле квазитензора $\{\Phi_n^\alpha\}$ (см. (4.17)) первого порядка задает поле нормалей $\Phi_2$ первого рода $\chi$-подрасслоения.

*4.4.* Аналогичные построения проведем для $\chi$-подрасслоения данного $\mathfrak{H}(L)$-распределения. Уравнение искомой фокальной гиперплоскости $\eta(A)$ $\chi$-подрасслоения зададим следующим образом (в репере $R^1$):

$$\eta_1x^1+\eta_nx^n=0. \tag{4.18}$$

Геометрическое место фокальных гиперплоскостей $\eta(A)$ (см. (4.18)) $\chi$-подрасслоения — фокальный гиперконус класса $(n-2)$, вершиной которого служит плоскость $\chi(A)$, представим в виде

$$\det\left\|\eta_n\Lambda_{\alpha\beta}^n+\eta_1\Lambda_{\alpha\beta}^1\right\|=0. \tag{4.19}$$

Линейной полярой гиперплоскости $H(A)$ относительно гиперконуса (4.19) является связка гиперплоскостей

$$x^1-\frac{1}{n-2}\Lambda_{\alpha\beta}^1\Lambda_n^{\beta\alpha}x^n=0,$$

которая определяет $(n-1)$-плоскость

$$\Phi_{n-1}(A)=[A,\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{e}_n+\Phi_n^1\boldsymbol{e}_1], \tag{4.20}$$

где

$$\Phi_n^1=\frac{1}{n-2}\Lambda_{\alpha\beta}^1\Lambda_n^{\beta\alpha},\quad \nabla\Phi_n^1+\omega_n^1=\Phi_{nK}^1\omega^K. \tag{4.21}$$

Таким образом, поле квазитензора $\{\Phi_n^1\}$ (см. (4.21)) второго порядка задает поле плоскостей $\Phi_{n-1}$ (см. (4.20)) — поле нормалей первого рода $L$-подрасслоения.

Плоскости $\Phi_2$ (см. (4.16)) и $\Phi_{n-1}$ (см. (4.20)) пересекаются в каждом центре $A$ по прямой $\Phi_1 = [A, \boldsymbol{\Phi}_1(A)]$:

$$\Phi_1 = \Phi_2(A) \cap \Phi_{n-1}(A), \quad \boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{e}_n + \Phi^i_n \boldsymbol{e}_i, \tag{4.22}$$

где $\{\Phi^i_n\} = \{\Phi^\alpha_n; \Phi^1_n\}$, $\nabla\Phi^i_n + \omega^i_n = \Phi^i_{nK}\omega^K$.

Следуя работам [1, 4], прямую $\Phi_1(A)$ (см. (4.22)) назовем нормалью Фосса $\mathfrak{H}(L)$-распределения в центре $A$. Соответственно, плоскости $\Phi_2(A)$ (см. (4.16)) и $\Phi_{n-1}(A)$ (см. (4.20)) назовем нормалями Фосса первого рода в смысле Нордена (см. [9]) $\chi$-, $L$-подрасслоений данного $\mathfrak{H}(L)$-распределения.

В силу биекции Бомпьяни—Пантази (см. [14]) полям нормалей Фосса $\{\Phi^\alpha_n\}$, $\{\Phi^1_n\}$, $\{\Phi^i_n\}$ первого рода поставим в соответствие поля нормалей второго рода $\chi$-, $L$-, $H$-подрасслоений:

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha &= \Lambda^n_{\alpha\beta}\Phi^\beta_n - \mathfrak{A}_\alpha, & \nabla\Phi_\alpha &= \Phi_{\alpha K}\omega^K, \\ \Phi_1 &= -\Lambda^n_{11}\Phi^1_n - \widetilde{\mathfrak{A}}_1, & \nabla\Phi_1 &= \Phi_{1K}\omega^K, \\ \Phi_i &= -\Lambda^n_{ij}\Phi^j_n - \mathfrak{A}_i, & \nabla\Phi_i &= \Phi_{iK}\omega^K, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_\alpha &= \Lambda^n_{\alpha n}, & \nabla\mathfrak{A}_\alpha &\equiv \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^\beta_n; \\ \widetilde{\mathfrak{A}}_1 &= -\Lambda^n_{11}A^1_n, & \nabla\widetilde{\mathfrak{A}}_1 &\equiv \Lambda^n_{11}\omega^1_n; \\ \mathfrak{A}_i &= \Lambda^n_{in}, & \nabla\mathfrak{A}_\alpha &\equiv \Lambda^n_{ij}\omega^j_n. \end{aligned}$$

Заметим, что если задано поле нормалей Фосса $\{\Phi^i_n\}$ $H$-подрасслоения, то охват тензора $\tilde{\nu}_1$ (см. (4.5)) имеет вид

$$\tilde{\nu}_1 = -\frac{1}{n-2}(\Lambda^\alpha_{1\alpha} - \Lambda^n_{1\alpha}\Phi^\alpha_n) \overset{\mathrm{def}}{=} G_1 \tag{4.23}$$

в дифференциальной окрестности первого порядка. В этом случае, согласно работам [4, 9, 16], плоскость

$$y^n = 0, \quad G_i y^i - 1 = 0, \tag{4.24}$$

где $\tilde{\nu}_1 = G_1$, $G_\alpha = \lambda_\alpha$, назовем ребром Грина $G_{n-2}(A)$ $H$-подрасслоения.

В биекции Бомпьяни—Пантази нормали второго рода Грина $\{G_i\}$ соответствует нормаль первого рода $\{G^i_n\}$, где

$$G^i_n = -\Lambda^{ij}_n G_j + \mathfrak{A}^i_n, \tag{4.25}$$

которую назовем нормалью первого рода Грина $\{G_i\}$ $H$-подрасслоения.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 4.3.** *Нормаль Фосса $\Phi_1(A)$ $\mathfrak{H}(L)$-распределения в каждом центре $A$ есть пересечение линейных поляр гиперплоскости $H(A)$ относительно фокальных гиперконусов* (4.14) *и* (4.19) *соответственно $L$-, $\chi$-подрасслоений.*

*$\mathfrak{H}(L)$-Распределение внутренним инвариантным образом порождает нормализацию Фосса—Грина $(\Phi^i_n; G_i)$ и нормализацию Фосса $(\Phi^\alpha_n; \Phi_\alpha)$ $\chi$-подрасслоения в дифференциальной окрестности первого порядка и нормализации Фосса $(\Phi^1_n; \Phi_1)$, $(\Phi^i_n; \Phi_i)$ соответственно $L$-, $H$-подрасслоений в дифференциальной окрестности второго порядка.*

## 5. Поля нормализаций и пучки нормалей первого и второго рода Нордена основных структурных подрасслоений $\mathfrak{H}(L)$-распределения в дифференциальной окрестности первого порядка.

*5.1.* Согласно уравнениям (1.6), (1.3) убеждаемся, что функции

$$V^\alpha_n = -\Lambda^\alpha_{11}\Lambda^{11}_n, \quad \nabla V^\alpha_n + \omega^\alpha_n = V^\alpha_{nK}\omega^K \tag{5.1}$$

образуют квазитензор первого порядка и, следовательно, дифференциальные уравнения (5.1) задают поле нормалей первого рода $V_2$ $\chi$-подрасслоения. Используя биекцию (3.8), находим соответствующее поле нормалей второго рода $\chi$-подрасслоения:

$$V_\alpha = -\Lambda^n_{\alpha\beta}\nu^\beta_n - \mathfrak{A}_\alpha, \quad \nabla V_\alpha = V_{\alpha K}\omega^K.$$

Далее, с помощью квазитензора (5.1) и соотношения (4.7) (см. [16, с. 21]), построим тензоры

$$V^{\alpha}_{1\beta} = \Lambda^{\alpha}_{1\beta} - \Lambda^{n}_{1\beta} V^{\alpha}_{n}, \quad \nabla V^{\alpha}_{1\beta} \equiv 0; \quad V_1 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-2} V^{\alpha}_{1\alpha}, \quad \nabla V_1 = V_{1K}\omega^K. \tag{5.2}$$

Полю нормалей второго рода $\{V_1\}$ (см. (5.2)) в силу биекции (3.12) соответствует поле нормалей первого рода $\{V^1_n\}$ $L$-подрасслоения:

$$V^1_n = -\Lambda^{11}_n V_1 + \mathfrak{A}^1_n, \quad \nabla V^1_n + \omega^1_n = V^1_{nK}\omega^K.$$

В дифференциальной окрестности первого порядка введем функции

$$\{V^i_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{V^1_n; V^{\alpha}_n\}, \quad \{V_i\} \stackrel{\text{def}}{=} \{V_1; V_{\alpha}\}, \tag{5.3}$$

удовлетворяющие соответственно уравнениям

$$\nabla V^i_n + \omega^i_n = V^i_{nK}\omega^K, \quad \nabla V_i = V_{iK}\omega^K.$$

Заметим, что геометрические объекты (5.3) соответствуют друг другу в биекции Бомпьяни—Пантази (3.5) или (3.6).

*5.2.* Для $H$-подрасслоения гиперполосного $\mathfrak{H}(L)$-распределения справедливо предложение, доказанное Э. Д. Алшибая для гиперплоскостного распределения аффинного пространства $A_n$ (см. [17]).

**Теорема 5.1.** *Однопараметрическому пучку нормалей первого рода* $(\boldsymbol{V}(\varepsilon); \boldsymbol{A})$, *определенному в данном центре* $A$ $H$*-подрасслоения* ($\varepsilon$ — *параметр*), *в биекции Бомпьяни—Пантази соответствует однопараметрический пучок параллельных* $(n-2)$*-плоскостей* (*пучок нормалей второго рода*), *лежащих в плоскости* $H(A)$.

Покажем, что аналогичное предложение имеет место и для $\chi$-подрасслоения данного $\mathfrak{H}(L)$-распределения пространства $A_n$. Пусть в центре $A$ $\mathfrak{H}(L)$-распределения задан пучок нормалей первого рода $\{\nu^{\beta}_n(\sigma)\}$ $\chi$-подрасслоения в смысле Нордена

$$\nu^{\beta}_n(\sigma) = \mathfrak{A}^{\beta}_n + \sigma(\nu^{\beta}_n - \mathfrak{A}^{\beta}_n), \tag{5.4}$$

где объект $\{\nu^{\beta}_n\}$ задает произвольную инвариантную нормаль $N_2(A)$ плоскости $\chi(A)$. В силу формул (3.8) пучку (5.1) в биекции (3.8) соответствует пучок нормалей второго рода в смысле Нордена следующего вида:

$$\nu_{\alpha}(\sigma) = -\Lambda^n_{\alpha\beta}(\mathfrak{A}^{\beta}_n + \sigma(\nu^{\beta}_n - A^{\beta}_n)) - \mathfrak{A}_{\alpha} = -\Lambda^n_{\alpha\beta}\mathfrak{A}^{\beta}_n + \sigma\Lambda^n_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta\gamma}_n\nu_{\gamma} - \mathfrak{A}_{\alpha} = \sigma\nu_{\alpha},$$

т.е. пучок параллельных $(n-3)$-плоскостей, лежащих в плоскости $\chi_{n-2}(A)$.

Итак, справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.2.** *Однопараметрическому пучку нормалей первого рода* (5.1) $\chi$*-подрасслоения в биекции Бомпьяни—Пантази* (3.8) *соответствует однопараметрический пучок параллельных* $(n-3)$*-плоскостей — нормалей второго рода Нордена* $\chi$*-подрасслоения.*

Аналогичное утверждение имеет место и для $L$-подрасслоения.

**Теорема 5.3.** *Однопараметрическому пучку* $(\nu^1_n(\sigma); \mathfrak{A}^1_n)$ *нормалей первого рода Нордена* $L$*-подрасслоения, где*

$$\nu^1_n(\sigma) = \mathfrak{A}^1_n + \sigma(\nu^1_n - \mathfrak{A}^1_n),$$

*в биекции Бомпьяни—Пантази соответствует однопараметрическое семейство точек* $\nu_1(\sigma) = \sigma\nu_1$ *— нормалей второго рода в смысле Нордена* $L$*-подрасслоения.*

*5.3.* Квазитензоры $\{\mathfrak{A}_n^i\}$, $\{V_n^i\}$ в общем случае функционально независимы и поэтому определяют в дифференциальной окрестности первого порядка в каждом центре $A$ однопараметрический пучок нормалей первого рода $H$-подрасслоения:

$$H_n^i(\varepsilon) = V_n^i + \varepsilon(\mathfrak{A}_n^i - V_n^i), \tag{5.5}$$

которым в биекции (3.5) согласно теореме 5.2 соответствует пучок параллельных $(n-2)$-плоскостей (нормалей второго рода $H$-подрасслоения)

$$h_i(\varepsilon) = \varepsilon V_i, \tag{5.6}$$

где

$$h_i(\varepsilon) = V_i + \varepsilon(A_i - V_i), \quad \nabla h_i(\varepsilon) = h_{iK}\omega^K.$$

Пучки (5.5) и (5.6) порождают соответственно пучки нормалей первого и второго рода $\chi$-, $L$-подрасслоений в смысле Нордена

$$H_n^\alpha(\varepsilon) = V_n^\alpha + \varepsilon(\mathfrak{A}_n^\alpha - V_n^\alpha), \quad h_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon V_\alpha,$$
$$H_n^1(\varepsilon) = V_n^1 + \varepsilon(\mathfrak{A}_n^1 - V_n^1), \quad h_1(\varepsilon) = \varepsilon V_1,$$

где

$$h_\alpha(\varepsilon) = V_\alpha + \varepsilon(\mathfrak{A}_\alpha - V_\alpha), \quad \nabla h_\alpha(\varepsilon) = h_{\alpha K}\omega^K.$$
$$h_1(\varepsilon) = V_1 + \varepsilon(\mathfrak{A}_1 - V_1), \quad \nabla h_1(\varepsilon) = h_{1K}\omega^K.$$

В результате имеет место следующее утверждение.

**Теорема 5.4.** *$\mathfrak{H}(L)$-Распределение внутренним инвариантным образом порождает пучки нормалей первого рода $(\mathfrak{A}_n^i; V_n^i)$, $(\mathfrak{A}_n^\alpha; V_n^\alpha)$, $(\mathfrak{A}_n^1; V_n^1)$ и второго рода $(\mathfrak{A}_i; V_i)$, $(\mathfrak{A}_\alpha; V_\alpha)$, $(\mathfrak{A}_1; V_1)$ в смысле Нордена соответственно $H$-, $\chi$-, $L$-подрасслоений, а также их нормализации $(V_n^i; V_i)$, $(V_n^\alpha; V_\alpha)$, $(V_n^1; V_1)$ в дифференциальной окрестности первого порядка.*

## 6. Соприкасающиеся гиперквадрики.

*6.1.* Уравнение гиперквадрик относительно некоторого репера имеет вид

$$\gamma : A_{IJ}x^Ix^J + 2A_Ix^I + A = 0, \quad A_{IJ} = A_{JI}. \tag{6.1}$$

Найдем дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять коэффициенты $A_{IJ}$, $A_I$, $A$ гиперквадрики (при $\omega^K = 0$), инвариантно связанной с распределением. Относительно преобразованного при помощи вторичных параметров репера уравнение гиперквадрики (6.1) имеет вид

$$(A_{IJ} + \delta A_{IJ})(x^I - x^K\pi_K^I)(x^J - x^K\pi_K^J) + 2(A_I + \delta A_I)(x^I - x^K\pi_K^I) + A + \delta A = 0.$$

Требование инвариантности гиперквадрики приводит к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered} \delta A_{IJ} - A_{IK}\pi_J^K + A_{KL}\pi_I^K = \theta A_{IJ}, \\ \delta A_I - A_K\pi_I^K = \theta A_I, \quad \delta A = \theta A. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Требование того, чтобы гиперквадрика (6.1) проходила через центр и имела касание первого порядка с любой кривой, принадлежащей $\mathfrak{H}(L)$-распределению, приводит к следующим условиям:

$$A = 0, \quad A_i = 0. \tag{6.3}$$

Рассмотрим точку $M = A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2A_0$, лежащую на произвольной кривой, принадлежащей $\mathfrak{H}(L)$-распределению. Требование, чтобы гиперквадрика имела соприкосновение второго порядка с любой кривой, принадлежащей $\mathfrak{H}(L)$-распределению, т.е. точка $M$ принадлежала гиперквадрике с точностью до величин второго порядка малости, приводит к соотношению

$$A_{ij}\omega^i\omega^j + A_n\omega^i\omega_i^n = 0.$$

Учитывая, что $\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n\omega^K$, получаем

$$A_{ij}\omega^i\omega^j + A_n\Lambda_{ij}^n\omega^i\omega^j = 0. \tag{6.4}$$

Введем в рассмотрение симметричные величины (функции):

$$a^n_{ij} = \frac{1}{2}(\Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{ji}). \tag{6.5}$$

Придавая индексам $i$ и $j$ значения 1, $\alpha$, соответственно, получим соотношения

$$a^n_{11} = \Lambda^n_{11}, \quad a^n_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Lambda^n_{\alpha\beta} + \Lambda^n_{\beta\alpha}). \tag{6.6}$$

С учетом (6.5) равенство (6.4) примет вид:

$$(A_{ij} + A_n a_{ij})\omega^i\omega^j = 0$$

или

$$A_{ij} = -A_n a_{ij}. \tag{6.7}$$

Пронормировав коэффициенты так, чтобы $A = -1$, из дифференциальных уравнений (6.2) получим

$$\delta A_n - A_n \pi^n_n = \theta A_n, \quad \theta = \pi^n_n. \tag{6.8}$$

При такой нормировке условия (6.7) примут вид

$$A_{ij} = a_{ij}.$$

При указанном охвате коэффициентов $A_{ij}$ дифференциальные уравнения (6.2) выполняются. Следовательно, уравнение соприкасающейся гиперквадрики примет вид

$$a_{ij}x^i x^j + 2A_{in}x^i x^n + A_{nn}x^n x^n = 2x^n. \tag{6.9}$$

Будем искать такие соприкасающиеся гиперквадрики (6.9), относительно которых плоскость $\Lambda$ и прямая $L$ полярно сопряжены, т.е. $A_{1\alpha} = 0$. Тогда гиперквадрика (6.9) примет вид:

$$a_{11}x^1x^1 + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + A_{nn}x^n x^n + 2A_{1n}x^1x^n + 2A_{\alpha n}x^\alpha x^n = 2x^n. \tag{6.10}$$

*6.2.* Пусть $\boldsymbol{\nu}$ — любая из построенных нами аффинных нормалей $\mathfrak{H}(L)$-распределения. Рассмотрим объект

$$\nu_i = \nu^k a_{ki}, \tag{6.11}$$

который удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla\nu_k + a_{kl}\omega^l_n = \nu_{kJ}\omega^J, \tag{6.12}$$

где

$$\nu_{kJ}\omega^J = a_{ki}\nu^i_J + \nu^i\mu_{ikJ}. \tag{6.13}$$

Тогда свертка

$$\tilde{\nu} = \nu^i\nu_i \tag{6.14}$$

удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям

$$d\widetilde{\nu} - \widetilde{\nu}\omega^n_n + 2\nu_i\omega^i_n = \widetilde{\nu}_J\omega^J. \tag{6.15}$$

Система величин $A^i_j = \nu^i_j - \nu^i\nu^k\Lambda^n_{ik}$ образует абсолютный тензор, след которого

$$H = -\frac{1}{\sigma}A^i_i, \quad d\ln H + \omega^n_n = H_J\omega^J \tag{6.16}$$

является относительным инвариантом.

Объект $H$ определяет инвариантную точку на нормали $\boldsymbol{\nu}$:

$$x^i = \frac{\nu^i}{H}, \quad x^n = \frac{1}{H}. \tag{6.17}$$

Если положить

$$A_{in} = -\nu_i, \quad A_{nn} = \tilde{\nu} + \sigma H,$$

где $\nu_i$, $\tilde{\nu}$, $H$ — объекты (6.14)—(6.16), а $\sigma$ — любой абсолютный инвариант, то дифференциальные уравнения для $A_{in}$, $A_{nn}$ выполняются.

Таким образом, получаем однопараметрический пучок инвариантно присоединенных к распределению соприкасающихся гиперквадрик:

$$a^n_{ij}x^ix^j + 2\nu_ix^ix^n - 2x^n + (\tilde\nu + \sigma H)x^nx^n = 0. \tag{6.18}$$

Рассмотрим определитель $n$-мерного порядка, составленный из коэффициентов квадрики (6.18). Если $a_0 = |a_{ij}| \neq 0$, то все гиперквадрики пучка (6.18) не распадающиеся. Центры этих гиперквадрик определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} a^n_{ij}x^j + \nu_ix^n = 0, \\ \nu_ix^i - (\tilde\nu - \sigma H)x^n = -1. \end{cases} \tag{6.19}$$

Разрешая систему (6.19), получим:

$$x^i = \nu^ix^n, \quad x^n = \frac{1}{\sigma H},$$

т.е. центры всех соприкасающихся гиперквадрик пучка (6.18) лежат на аффинной нормали $\boldsymbol{\nu}$.

Поляра произвольной точки $(x^1_0, x^\alpha_0, x^n_0)$ относительно гиперквадрики (6.18) определяется уравнением

$$(a_{11}x^1_0 - \nu_1x^n_0)x^1 + (a_{\alpha\beta}x^\alpha_0 - \nu_\beta x^n_0)x^\beta_0 + ([\tilde\nu + \sigma H]x^n_0 - \nu_1x^1_0 - \nu_\beta x^\alpha_0 - 1)x^n - x^n_0 = 0.$$

Эта гиперплоскость пересекает гиперплоскостной элемент по $(n-2)$-мерной плоскости

$$\begin{cases} (a_{11}x^1_0 - \nu_1x^n_0)x^1 + (a_{\alpha\beta}x^\alpha_0 - \nu_\beta x^n_0)x^\beta_0 - x^n_0 = 0, \\ x^n = 0. \end{cases}$$

Полярой некоторой нормали

$$x^i = \tilde\nu^ix^n$$

относительно этого пучка будет $(n-2)$-мерная плоскость

$$(a_{11}\tilde\nu_1 - \nu_1)x^1 + (a_{\alpha\beta}\tilde\nu^\alpha - \nu_\beta)x^\beta - 1 = 0.$$

Гиперквадрики пучка (6.18) устанавливает поляритет между нормалями первого рода $(n-1)$-мерными плоскостями, принадлежащими гиперплоскостному элементу $H(A)$ и не проходящими через центр $\mathfrak{H}(L)$-распределения. В частности, нормали $\boldsymbol{\nu}$ в этом поляритете соответствует бесконечно удаленная $(n-1)$-мерная плоскость.

Если мы имеем гиперквадрику пучка (6.18), для которой $\sigma = 0$, т.е.

$$a_{ij}x^ix^j + 2\nu_ix^ix^n - 2x^n - \tilde\nu x^nx^n = 0,$$

то центр этой гиперквадрики — бесконечно удаленная точка нормали. Эта гиперквадрика будет $(n-1)$-мерным параболоидом. Его уравнение имеет вид

$$a_{ij}x^ix^j + 2\Lambda^n_ix^ix^n - 2x^n - \widetilde\Lambda x^nx^n = 0, \tag{6.20}$$

где

$$\Lambda^n_i = \Lambda^j_na^n_{ij}, \quad \widetilde\Lambda = a^n_{ik}\Lambda^i_n\Lambda^k_n.$$

Диаметром параболоида (6.20) является нормаль $\boldsymbol{\Lambda}$.

**7. Нормализация Трансона.** Для невырожденных тензоров $\Lambda^n_{\alpha\beta}$, $\Lambda^n_{11}$ введем обращенные им тензоры:

$$\Lambda^n_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta\gamma}_n = \delta^\gamma_\alpha, \quad \nabla\Lambda^{\alpha\beta}_n = \Lambda^{\alpha\beta}_{nK}\omega^K, \tag{7.1}$$

$$\Lambda^n_{11}\Lambda^{11}_n = 1, \quad \nabla\Lambda^{11}_n = \Lambda^{11}_{nK}\omega^K. \tag{7.2}$$

Замыкая уравнения (1.6), найдем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $\Lambda^n_{111}$ и $\Lambda^n_{\alpha\beta\gamma}$:

$$\nabla\Lambda^n_{\alpha\beta\gamma} - \Lambda^n_{(\alpha\beta}\Lambda^n_{\gamma)\xi}\omega^\xi_n = \Lambda^n_{\alpha\beta\gamma K}\omega^K, \tag{7.3}$$

$$\nabla\Lambda^n_{111} - \Lambda^n_{11}\Lambda^n_{11}\omega^1_n = \Lambda^n_{111K}\omega^K. \tag{7.4}$$

Введем в рассмотрение функции (см. [13])

$$T_n^\alpha = -\frac{1}{n}\Lambda_n^{\xi\beta}\Lambda_{\xi\beta\gamma}^n\Lambda_n^{\gamma\alpha}, \quad T_n^1 = -\frac{1}{n}\Lambda_n^{11}\Lambda_{111}^n\Lambda_n^{11},$$

которые согласно уравнениям (7.1)—(7.4) соответственно удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla T_n^\alpha + \omega_n^\alpha = T_{nK}^\alpha\omega^K, \quad \nabla T_n^1 + \omega_n^1 = T_{nK}^1\omega^K. \tag{7.5}$$

В силу уравнений (1.5) из (7.5) следует, что функции $T_n^i = \{T_n^\alpha, T_n^1\}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla T_n^i + \omega_n^i = T_{nK}^i\omega^K.$$

Следуя работе [13], введем следующие определения.

**Определение 7.1.** Нормалью Трансона первого рода $\Lambda$-плоскости в точке $A$ назовем 2-плоскость

$$T_2 = [A, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n + T_n^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha] = [A, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{T}_n].$$

**Определение 7.2.** Нормалью Трансона первого рода прямой $L(A)$ назовем гиперплоскость

$$T_{n-1} = [A, \boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_n + T_n^1\boldsymbol{e}_1] = [A, \boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{t}_n].$$

**Определение 7.3.** Нормалью Трансона первого рода гиперплоскости $H(A)$ в точке $A$ назовем прямую пересечения нормалей Трансона первого рода плоскостей $\Lambda(A)$, $L(A)$, т.е.

$$T_1(A) = T_2(A) \cap T_{n-1}(A).$$

Используя биекции (3.5), (3.8), (3.13), нормалям первого рода $T_1(T_n^1)$, $T_2(T_n^\alpha)$, $T_{n-1}(T_n^i)$ соответственно плоскостей $H(A)$, $\Lambda(A)$, $L(A)$ в каждом центре $A$ $\mathfrak{H}(L)$-распределения поставим в соответствие нормали второго рода этих плоскостей:

$$\aleph_{n-1}(A) : T_i = -\Lambda_{ij}^n T_n^j - \mathfrak{A}_i,$$
$$\aleph_{n-2}(A) : T_\alpha = -\Lambda_{\alpha\beta}^n T_n^\beta - \mathfrak{A}_\alpha,$$
$$\aleph_1(A) : T_1 = -\Lambda_{11}^n \nu_n^1 - \widetilde{\mathfrak{A}}_1.$$

**Теорема 7.1.** *В дифференциальной окрестности второго порядка внутренним образом присоединяются поля нормализаций соответственно $H$-, $\Lambda$-, $L$-подрасслоений в смысле Нордена полями нормалей первого и второго рода Трансона* $(T_i; T_n^i)$, $(T_\alpha; T_n^\alpha)$, $(T_1; T_n^1)$.

## 8. Задание нормальных и касательных аффинных связностей на оснащенном $\mathfrak{H}(L)$-распределении.

*8.1.* Адаптируем репер $R^1$ полю нормалей $N_1(A)$ первого рода $\mathfrak{H}(L)$-распределения, выбирая векторы $\boldsymbol{e}_n \parallel N_1(A)$. В этом случае

$$\omega_n^1 = \lambda_{nK}^1\omega^K, \quad \omega_n^\alpha = \lambda_{nK}^\alpha\omega^K, \tag{8.1}$$

где

$$\nabla\lambda_{nK}^1 = \lambda_{nKL}^1\omega^L, \quad \nabla\lambda_{nK}^\alpha = \lambda_{nKL}^\alpha\omega^L. \tag{8.2}$$

Таким образом, уравнения (1.5), (1.6), (8.1), (8.2) задают оснащенную полем нормалей первого рода $N_1(A)$ гиперполосное $\mathfrak{H}(L)$-распределение. При фиксации точки $A \overset{\text{def}}{=} x$ (центра $\mathfrak{H}(L)$-распределения) плоскости $N_1(x)$, $N_{n-1}(x)$, $N_2(x)$ и $T_{n-1}(x)$, $T_1(x)$, $T_{n-2}(x)$ остаются неподвижными. Следовательно, $\mathfrak{H}(L)$-распределение индуцирует (порождает) нормальные $N_1(A_n)$, $N_{n-1}(A_n)$, $N_2(A_n)$ и касательные $T_{n-1}(A_n)$, $T_1(A_n)$, $T_{n-2}(A_n)$ подрасслоения (см. [16]).

Структурные уравнения касательного расслоения $T_1(A_n)$ в силу формул (1.1)—(1.5), (8.1) имеют следующий вид:

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K, \quad d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta,$$
$$d\omega_1^1 = \Omega_1^1, \quad d\omega_\alpha^1 = \omega_\alpha^i \wedge \omega_i^1 + \Omega_\alpha^1, \quad d\omega_1^\alpha = \omega_1^i \wedge \omega_i^\alpha + \Omega_1^\alpha,$$

где

$$\Omega^\beta_\alpha = \omega^n_\alpha \wedge \omega^\beta_n + \omega^1_\alpha \wedge \omega^\beta_1 = \big(\Lambda^n_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|n|K]} + \Lambda^1_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|1|K]}\big)\omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2}R^\beta_{\alpha LK}\omega^L \wedge \omega^K, \tag{8.3}$$

$$\Omega^1_1 = (\Lambda^\alpha_{1[L}\Lambda^1_{|\alpha|K]} + \Lambda^n_{1[L}\lambda^1_{|n|K]})\omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2}R^1_{1LK}\omega^L \wedge \omega^K, \tag{8.4}$$

$$\Omega^1_\alpha = \Lambda^n_{\alpha[L}\lambda^1_{|n|K]}\omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2}R^1_{\alpha LK}\omega^L \wedge \omega^K, \tag{8.5}$$

$$\Omega^\alpha_1 = \Lambda^n_{1[L}\lambda^\alpha_{|n|K]}\omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2}R^\alpha_{1LK}\omega^L \wedge \omega^K, \tag{8.6}$$

$$R^\beta_{\alpha LK} = 2(\Lambda^n_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|n|K]} + \Lambda^1_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|1|K]}), \tag{8.7}$$

$$R^1_{1LK} = 2(\Lambda^\alpha_{1[L}\Lambda^1_{|\alpha|K]} + \Lambda^n_{1[L}\lambda^1_{|n|K]}), \tag{8.8}$$

$$R^1_{\alpha LK} = 2\Lambda^n_{\alpha[L}\lambda^1_{|n|K]}, \tag{8.9}$$

$$R^\alpha_{1LK} = 2\Lambda^n_{1[L}\lambda^\alpha_{|n|K]}. \tag{8.10}$$

Следуя работе [19], приходим к выводу, что в касательном расслоении $T_{n-1}(A_n)$ возникает аффинная связность $\gamma$ без кручения с формами связности $\{\omega^K, \omega^i_j\}$, которую назовем внутренней (касательной) аффинной связностью оснащенного гиперполосного $\mathfrak{H}(L)$-распределения.

**Теорема 8.1.** *В дифференциальной окрестности второго порядка оснащенное $\mathfrak{H}(L)$-распределение (полем нормалей первого рода $N_1(x)$) индуцирует внутреннюю связность $\gamma$ в касательном расслоении $T_{n-1}(A_n)$ с формами связности $\{\omega^K, \omega^i_j\}$ и 2-формами связности* (8.3)—(8.6). *Компоненты тензора кривизны $R^i_{jKL} = \{R^1_{1KL}, R^1_{\alpha KL}, R^\alpha_{1KL}, R^\beta_{\alpha KL}\}$ связности $\gamma$ имеют строение* (8.7)—(8.10).

*8.2.* Структурные уравнения нормального расслоения $N_1(A_n)$ с учетом уравнений (1.1), (1.3), (8.1) можно представить в виде

$$d\omega^n_n = \Omega^n_n,$$

где

$$\Omega^n_n = \omega^\alpha_n \wedge \omega^n_\alpha + \omega^1_n \wedge \omega^n_1 = (\lambda^\alpha_{n[L}\Lambda^n_{|\alpha|K]} + \lambda^1_{n[L}\Lambda^n_{|1|K]})\omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2}R^n_{nLK}\omega^L \wedge \omega^K, \tag{8.11}$$

$$R^n_{nLK} = 2(\lambda^\alpha_{n[L}\Lambda^n_{|\alpha|K]} + \lambda^1_{n[L}\Lambda^n_{|1|K]}). \tag{8.12}$$

Согласно работе [19] получаем, что в нормальном расслоении $N_1(A_n)$ возникает центроаффинная $\gamma^\perp$ связность с формами связности $\{\omega^n_n\}$ и 2-формами кривизны (8.11), которую назовем нормальной центроаффинной связностью оснащенного гиперполосного $\mathfrak{H}(L)$-распределения.

**Теорема 8.2.** *В дифференциальной окрестности второго порядка оснащенное $\mathfrak{H}(L)$-распределение индуцирует в расслоении $N_1(A_n)$ нормалей первого рода нормальную центроаффинную связность $\gamma^\perp$ с формами связности $\{\omega^n_n\}$ и 2-формами кривизны* (8.11). *Компоненты тензора кривизны $\{R^n_{nKL}\}$ связности $\gamma^\perp$ имеют строение* (8.12).

*8.3.* Аналогично можно построить нормальную аффинную связность $\eta^\perp$ в расслоении $N_{n-1}(A_n)$ нормалей первого рода базисного $L$-подрасслоения данного $\mathfrak{H}(L)$-распределения.

Структурные уравнения нормального расслоения $N_{n-1}(A_n)$ имеют следующее строение:

$$\begin{aligned}
&d\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + \Omega^\beta_\alpha,\\
&d\omega^n_\alpha = \omega^n_\alpha \wedge \omega^n_n + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^n_\beta + \omega^1_\alpha \wedge \omega^n_1 = \omega^a_\alpha \wedge \omega^n_a + \Omega^n_\alpha,\\
&d\omega^\alpha_n = \omega^a_n \wedge \omega^\alpha_a + \Omega^\alpha_n, \quad d\omega^n_n = \Omega^n_n,
\end{aligned}$$

где

$$\Omega_n^\alpha = \lambda_{n[L}^1 \Lambda_{|1|K]}^\alpha \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{nLK}^\alpha \omega^L \wedge \omega^K, \tag{8.13}$$

$$\Omega_\alpha^n = \lambda_{\alpha[L}^1 \Lambda_{|1|K]}^n \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{\alpha LK}^n \omega^L \wedge \omega^K, \tag{8.14}$$

$$R_{nLK}^\alpha = 2\lambda_{n[L}^1 \Lambda_{|1|K]}^\alpha, \tag{8.15}$$

$$R_{\alpha LK}^n = 2\lambda_{\alpha[L}^1 \Lambda_{|1|K]}^n, \tag{8.16}$$

а 2-формы кривизны $\{\Omega_\alpha^\beta\}$ и $\{\Omega_n^n\}$ имеют соответственно строение (8.3), (8.11), компоненты $\{R_{\alpha LK}^\beta\}$, $\{R_{nLK}^n\}$ выражаются по формулам (8.7), (8.12).

**Теорема 8.3.** *В дифференциальной окрестности второго порядка оснащенное $\mathfrak{H}(L)$-распределение индуцирует в расслоении $N_{n-1}(A_n)$ нормалей первого рода нормальную центроаффинную связность $\eta^\perp$ с формами связности $\{\omega_a^b\}$ и 2-формами кривизны* (8.3), (8.11), (8.13), (8.14). *Компоненты тензора кривизны $\{R_{bKL}^a\}$ связности $\eta^\perp$ имеют строение* (8.7), (8.12), (8.15), (8.16).

Связность $\eta^\perp$ назовем нормальной центроаффинной связностью $L$-подрасслоения.

*8.4.* Структурные уравнения соответствующего касательного расслоения $T_1(A_n)$ в силу формул (1.1)—(1.4), (8.1) имеют следующий вид:

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K, \quad d\omega_1^1 = \Omega_1^1,$$

где 2-формы кривизны $\{\Omega_1^1\}$ и компоненты $\{R_{1LK}^1\}$ определяются формулами (8.4) и (8.8) соответственно.

**Теорема 8.4.** *В дифференциальной окрестности второго порядка оснащенное $\mathfrak{H}(L)$-распределение* (*полем нормалей первого рода $N_1(x)$*) *индуцирует внутреннюю связность $\eta$ в касательном расслоении $T_1(A_n)$ с формами связности $\{\omega^K, \omega_1^1\}$ и 2-формами кривизны* (8.4). *Компоненты тензора кривизны $\{R_{1KL}^1\}$ связности $\eta$ имеют строение* (8.8).

*8.5.* Построим нормальную связность $\vartheta^\perp$ в расслоении $N_2(A_n)$ нормалей первого рода $\Lambda$-подрасслоения данного $\mathfrak{H}(L)$-распределения и связность $\vartheta$ в касательном расслоении $T_{n-2}(A_n)$.

Структурные уравнения нормального распределения $N_2(A_n)$ имеют следующий вид:

$$d\omega_1^1 = \Omega_1^1, \quad d\omega_1^n = \omega_1^1 \wedge \omega_1^n + \omega_1^\alpha \wedge \omega_\alpha^n + \omega_1^n \wedge \omega_n^n = \omega_1^\xi \wedge \omega_\xi^n + \Omega_1^n,$$
$$d\omega_n^1 = \omega_n^1 \wedge \omega_1^1 + \omega_n^\alpha \wedge \omega_\alpha^1 + \omega_n^n \wedge \omega_n^1 = \omega_n^\xi \wedge \omega_\xi^1 + \Omega_n^1, + \Omega_n^\alpha, \quad d\omega_n^n = \Omega_n^n,$$

где

$$\Omega_n^1 = \lambda_{n[L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K]}^1 \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{nLK}^1 \omega^L \wedge \omega^K, \tag{8.17}$$

$$\Omega_1^n = \lambda_{1[L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K]}^n \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{1LK}^n \omega^L \wedge \omega^K, \tag{8.18}$$

$$R_{nLK}^1 = 2\lambda_{n[L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K]}^1, \tag{8.19}$$

$$R_{1LK}^n = 2\lambda_{1[L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K]}^n, \tag{8.20}$$

2-формы кривизны $\{\Omega_1^1\}$ и $\{\Omega_n^n\}$ определяются (8.4), (8.11), компоненты $\{R_{1LK}^1\}$, $\{R_{nLK}^n\}$ задаются формулами (8.8), (8.12).

**Теорема 8.5.** *В дифференциальной окрестности второго порядка оснащенное $\mathfrak{H}(L)$-распределение индуцирует внутреннюю нормальную связность $\vartheta^\perp$ в расслоении $N_2(A_n)$ нормалей первого рода $\Lambda$-подрасслоения с формами связности $\{\omega_\eta^\xi\}$ и 2-формами кривизны $\{\Omega_\eta^\xi\}$ (см.* (8.4), (8.11), (8.17), (8.18)*), компоненты тензора кривизны $\{R_{\eta KL}^\xi\}$ которой имеют строение* (8.8), (8.12), (8.19), (8.20).

*8.6.* Структурные уравнения касательного расслоения $T_{n-2}(A_n)$ имеют следующий вид:

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega^K_L, \quad d\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + \Omega^\beta_\alpha,$$

где 2-формы кривизны $\{\Omega^\beta_\alpha\}$ и компоненты $\{R^\beta_{\alpha LK}\}$ задаются соответственно по формулам (8.3) и (8.7).

**Теорема 8.6.** *В дифференциальной окрестности второго порядка оснащенное* $\mathfrak{H}(L)$*-распределение индуцирует внутреннюю аффинную связность* $\vartheta$ *в касательном расслоении* $T_{n-2}(A_n)$ *с формами связности* $\{\omega^K, \omega^\beta_\alpha\}$ *и 2-формами кривизны* (8.3). *Компоненты тензора кривизны* $\{R^\beta_{\alpha KL}\}$ *связности* $\vartheta$ *имеют строение* (8.7).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Акивис М. А.* Фокальные образы поверхности ранга $r$// Изв. вузов. Мат. — 1959. — № 1. — С. 9–19.
2. *Алшибая Э. Д.* К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1974. — *5*. — С. 169–193.
3. *Алшибая Э. Д.* Геометрия распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве. — Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1999.
4. *Благонравов В. В.* Распределения на гиперповерхности аффинного пространства. — Деп. в ВИНИТИ. № 4552. — 1982..
5. *Ивлеев Е. Т., Лучинин А. А.* О полярном соответствии относительно алгебраической поверхности и его приложениях// Геом. сб. Томск. — 1968. — *7*. — С. 23–24.
6. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1953. — *2*. — С. 275–382.
7. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения $m$-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности, I// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1971. — *3*. — С. 49-–94.
8. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. — Калининград: Из-во Калининград. ун-та, 1978.
9. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
10. *Остиану Н. М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия// Rev. math. pures et appl. (RPR). — 1962. — *7*, № 2. — С. 231–240.
11. *Остиану Н. М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1973. — *4*. — С. 71-–120.
12. *Попов Ю. И.* Нормали гиперполосного распределения аффинного пространства// Диффер. геом. многообр. фигур. — 1988. — № 19. — С. 69–79.
13. *Попов Ю. И.* Нормализация Трансона гиперполосы $H_m$// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2007. — № 38. — С. 117–122.
14. *Попов Ю. И.* Введение в теорию регулярного гиперполосного распределения аффинного пространства// Вестн. Балт. федер. ун-та. — 2013. — № 10. — С. 49–56.
15. *Попов Ю. И.* Гиперполосное распределение $H(L)$ аффинного пространства// Естеств. мат. науки в совр. мире. — 2015. — № 9 (33). — С. 17–33.
16. *Попов Ю. И.* Нормализации Фосса и Грина гиперполосного распределения аффинного пространства// Вестн. Балт. федер. ун-та. — 2016. — № 4. — С. 5–17.
17. *Столяров А. В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения $m$-мерных линейных элементов// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Пробл. геом. — 1975. — *7*. — С. 117–151.
18. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. — М.-Л., 1948.
19. *Чакмазян А. В.* Нормальная связность геометрии многообразий. — Ереван, 1990.


Попов Юрий Иванович
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград
E-mail: baschaschina@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 203 (2021). С. 100–115
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-203-100-115

УДК 514.76

# КЛАССИФИКАЦИЯ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ПАРАСАСАКИЕВЫХ СТРУКТУР НА ПЯТИМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

© 2021 г. **Н. К. СМОЛЕНЦЕВ**

Аннотация. В статье дана классификация левоинвариантных парасасакиевых структур на пятимерных группах Ли.

***Ключевые слова***: паракомплексная структура, параконтактная структура, парасасакиева структура, пятимерная алгебра Ли, левоинвариантная структура на группе Ли.

# CLASSIFICATION OF LEFT-INVARIANT PARA-SASAKIAN STRUCTURES ON FIVE-DIMENSIONAL LIE GROUPS

© 2021 **N. K. SMOLENTSEV**

Abstract. In this paper, a classification of left-invariant para-Sasakian structures on five-dimensional Lie groups is given.

***Keywords and phrases***: paracomplex structure, paracontact structure, para-Sasakian structure, five-dimensional Lie algebra, left-invariant structure on a Lie group.

***AMS Subject Classification***: 53C15, 53C25, 53D10, 53C50

**1. Введение.** В настоящее время большой интерес вызывают паракомплексные аналоги почти комплексных, комплексных и контактных метрических структур (см. [1, 3, 4, 7–9, 11]). Если почти комплексная структура на $2n$-мерном многообразии $M$ задается полем эндоморфизмов $J$ касательного расслоения $TM$, таким, что $J^2 = -\operatorname{Id}$, то в паракомплексном случае поле эндоморфизмов $J$ обладает свойством $J^2 = \operatorname{Id}$. Тогда $J$ имеет действительные собственные числа $\pm 1$ и собственные распределения $T^+M$ и $T^-M$. Дополнительно требуется. чтобы ранги собственных распределений $T^{\pm}M \coloneqq \ker(\operatorname{Id} \mp J)$ были бы равны. Аналогично дается понятие параконтактного многообразия (см. [3, 9]).

Если в качестве многообразия берется группа Ли $G$, то естественно рассматривать левоинвариантные паракомплексные или параконтактные структуры. Такие структуры определяются их значениями на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$. Поэтому обычно говорят о почти паракомплексной $(\mathfrak{g}, J)$ или симплектической $(\mathfrak{g}, \omega)$ алгебре Ли, имея в виду левоинвариантные почти паракомплексную или симплектическую структуры на группе Ли $G$. Левоинвариантные паракомплексные или параконтактные структуры на группах Ли малых размерностей представляют особый интерес ввиду возможностей их классификации. В частности, четырехмерные комплексные алгебры Ли, четырехмерные симплектические и псевдокелеровы алгебры Ли были классифицированы в работах Овандо [15–17]. Инвариантные комплексные и кэлеровы структуры на однородных четырехмерных псевдоримановых многообразиях с нетривиальной изотропией вместе с их паракомплексными аналогами изучались в [8]. Комплексные и паракомплексные структуры на четырехмерных обобщенных симметрических пространств изучались в [6]. В работе Д. Калварузо [7] приведена полная классификация паракэлеровых структур на четырехмерных группах Ли. Она основывается на классификации структур произведения на четырехмерных алгебрах Ли (см. [4]). Для каждой заданной структуры произведения, используя классификацию Овандо четырехмерных симплектических алгебр Ли, Кальварузо нашел все возможные симплектические структуры $\omega$, согласованные с данной паракомплексной структурой $J$.

Парасасакиевы структуры на пятимерных алгебрах Ли рассмотрены в [9]. В ней указаны пятимерные алгебры Ли, допускающие парасасакиеву структуру. Однако для классификации парасасакиевых структур на пятимерных алгебрах Ли необходимо привести все возможные аффиноры $\varphi$ парасасакиевых структур. Именно этому вопросу посвящена данная работа. Для каждой пятимерной алгебры Ли, допускающей парасасакиеву структуру, мы находим для нее в явном виде все возможные парасасакиевы структуры.

**2. Паракомплексные и параконтактные структуры.** В этом разделе напомним основные факты паракомплексной и параконтактной геометрии. В [1] представлен обзор теории паракомплексных структур и инвариантных паракомплексных и паракэлеровых структур на однородных многообразиях. Обзор теории паракомплексных структур представлен также в [11].

*2.1. Паракомплексные структуры.* Пусть $J$ — поле эндоморфизмов касательного расслоения $TM$ многообразия $M$ размерности на $2n$, такое, что $J^2 = \mathrm{Id}$. В этом случае $J$ имеет действительные собственные числа $\pm 1$ и соответствующие собственные распределения $T^+M$ и $T^-M$. Если ранги собственных распределений $T^{\pm}M$ равны, то $J$ называется *почти паракомплексной* структурой на многообразии $M$.

Почти паракомплексная структура $J$ называется *интегрируемой*, если распределения $T^{\pm}M$ инволютивны. В этом случае $J$ называется *паракомплексной* структурой. Почти паракомплексная структура $J$ интегрируема тогда и только тогда, когда кручение Нейенхейса

$$N_J(X,Y) = [X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

обращается в нуль для всех векторных полей $X$, $Y$ на $M$. Псевдориманова метрика $g$ на $M$ называется *согласованной* с паракомплексной структурой $J$, если для любых векторных полей $X$, $Y$ на $M$ выполняется равенство

$$g(JX,JY) = -g(X,Y).$$

Такая метрика имеет сигнатуру $(n,n)$. Если на $M$ задана метрика, согласованная с паракомплексной структурой $J$, то $(M,J,g)$ называется *параэрмитовыми многообразием.* Если при этом фундаментальная форма $\omega(X,Y) = g(X,JY)$ замкнута, то $(M,J,g,\omega)$ называется *паракэлеровым* многообразием. Отметим, что симплектическая форма $\omega$ обладает свойством

$$\omega(JX,JY) = -\omega(X,Y).$$

Левоинвариантная паракэлерова структура на группе Ли $G$ — это тройка $(g,\omega,J)$, состоящая из левоинвариантной псевдоримановой метрики $g$, левоинвариантной симплектической формы $\omega$ и кососимметричной левоинвариантной паракомплексной структуры $J$, причем

$$\omega(X,Y) = g(X,JY)$$

для любых левоинвариантных векторных полей $X$ и $Y$ на $G$. Поскольку

$$g(X,Y) = \omega(X,JY),$$

то такую структуру на группе $G$ часто задают парой $(\omega,J)$, где $J$ — паракомплексная структура, а $\omega$ — симплектическая форма, согласованная с $J$, т.е. такая, что

$$\omega(JX,JY) = -\omega(X,Y).$$

Из левоинвариантности рассматриваемых объектов следует, что паракэлерова структура $(J,g,\omega)$ может быть задана значениями $\omega$, $J$ и $g$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $G$. Тогда $(\mathfrak{g},J,\omega,g)$ называется *паракэлеровой алгеброй Ли.* Отметим, что из разложения

$$TM = T^+M \oplus T^-M$$

Таблица 1. Четырехмерные симплектические алгебры Ли, допускающие паракэлерову структуру

| $\mathfrak{g}$ | Скобки Ли | Симплектическая структура |
|---|---|---|
| $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$ | $[e_1,e_2]=e_2, [e_3,e_4]=e_4$ | $\omega=e^1\wedge e^2+\lambda e^1\wedge e^3+e^3\wedge e^4, \lambda\geqslant 0$ |
| $\mathfrak{rh}_3$ | $[e_1,e_2]=e_3$ | $\omega=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^3$ |
| $\mathfrak{rr}_{3,0}$ | $[e_1,e_2]=e_2, [e_1,e_3]=0$ | $\omega=e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$ |
| $\mathfrak{rr}_{3,-1}$ | $[e_1,e_2]=e_2, [e_1,e_3]=-e_3$ | $\omega=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^3$ |
| $\mathfrak{r}'_2$ | $[e_1,e_3]=e_3, [e_1,e_4]=e_4, [e_2,e_3]=e_4,$ $[e_2,e_4]=-e_3$ | $\omega=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^3$ |
| $\mathfrak{r}_{4,0}$ | $[e_4,e_1]=e_1, [e_4,e_2]=0, [e_4,e_3]=e_2$ | $\omega_+=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^3,$ $\omega_-=e^1\wedge e^4-e^2\wedge e^3$ |
| $\mathfrak{r}_{4,-1}$ | $[e_4,e_1]=e_1, [e_4,e_2]=-e_2, [e_4,e_3]=e_2-e_3$ | $\omega=e^1\wedge e^3+e^2\wedge e^4$ |
| $\mathfrak{r}_{4,-1,\beta}$ | $[e_4,e_1]=e_1, [e_4,e_2]=-e_2, [e_4,e_3]=\beta e_3$ | $\omega=e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$, $-1<\beta<0$ |
| $\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$ | $[e_4,e_1]=e_1, [e_4,e_2]=-e_2, [e_4,e_3]=-e_3$ | $\omega=e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$ |
| $\mathfrak{r}_{4,-\alpha,\alpha}$ | $[e_4,e_1]=e_1, [e_4,e_2]=-\alpha e_2, [e_4,e_3]=\alpha e_3$ | $\omega=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^3$, $0<\alpha<1$ |
| $\mathfrak{d}_{4,1}$ | $[e_1,e_2]=e_3, [e_4,e_3]=e_3, [e_4,e_1]=e_1,$ $[e_4,e_2]=0$ | $\omega_1=e^1\wedge e^2-e^3\wedge e^4,$ $\omega_2=e^1\wedge e^2-e^3\wedge e^4+e^2\wedge e^4$ |
| $\mathfrak{d}_{4,2}$ | $[e_1,e_2]=e_3, [e_4,e_3]=e_3, [e_4,e_1]=2e_1,$ $[e_4,e_2]=-e_2$ | $\omega_1=e^1\wedge e^2-e^3\wedge e^4,$ $\omega_2=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^3,$ $\omega_3=e^1\wedge e^4-e^2\wedge e^3$ |
| $\mathfrak{d}_{4,\lambda}$ | $[e_1,e_2]=e_3, [e_4,e_3]=e_3, [e_4,e_1]=\lambda e_1,$ $[e_4,e_2]=(1-\lambda)e_2$ | $\omega=e^1\wedge e^2-e^3\wedge e^4$, $\lambda\geqslant\frac{1}{2}, \lambda\neq 1,2$ |
| $\mathfrak{h}_4$ | $[e_1,e_2]=e_3, [e_4,e_3]=e_3, [e_4,e_1]=\frac{1}{2}e_1,$ $[e_4,e_2]=e_1+\frac{1}{2}e_2$ | $\omega_+=e^1\wedge e^2-e^3\wedge e^4,$ $\omega_-=-e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$ |
| $\mathbb{R}^4$ | | $\omega=e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$ |

и свойства инволютивности собственных распределений $T^{\pm}M$ следует, что любая левоинвариантная паракомплексная структура $J$ приводит к разложению алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в прямую сумму (но не в прямое произведение) подалгебр одинаковой размерности:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{g}_-, \quad \text{где} \quad J|_{\mathfrak{g}_+}=\mathrm{Id}, \quad J|_{\mathfrak{g}_-}=-\mathrm{Id}\,.$$

В [16] найдены все четырехмерные симплектические группы Ли. Паракомплексные структуры на четырехмерных разрешимых алгебрах Ли получены в [4]. В [7] найдены все возможные симплектические структуры, согласованные с паракомплексной структурой на четырехмерных алгебрах Ли. Учитывая все эти результаты, получается список четырехмерных симплектических алгебр Ли, допускающих паракэлерову структуру, приведенный в таблице 1. В этой таблице представлены ненулевые скобки Ли алгебр в базисе $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ и симплектическая структура $\omega$ в дуальном базисе $e^1$, $e^2$, $e^3$, $e^4$.

Обозначения в этом списке: $\mathfrak{r}_2=\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ — алгебра Ли аффинных преобразований прямой $\mathbb{R}$; $\mathfrak{r}'_2$ — вещественная алгебра Ли, лежащая в основе комплексной алгебры Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$; $\mathfrak{rr}_{3,0}$, $\mathfrak{rr}_{3,-1}$ и $\mathfrak{rh}_3$ — тривиальные расширения алгебры Ли $\mathfrak{e}(2)$ группы движений $\mathbb{R}^2$, алгебры Ли $\mathfrak{e}(1,1)$ группы движений двумерного пространства Минковского и алгебры Ли Гейзенберга $\mathfrak{h}_3$, соответственно.

*2.2. Параконтактные структуры.* Дифференцируемое $(2n+1)$-мерное многообразие $M$ класса $C^\infty$ называется *контактным* многообразием, если на нем задана такая дифференциальная

1-форма $\eta$, что $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ всюду на $M$. Форма $\eta$ называется контактной. Она определяет на многообразии $M$ распределение $D = \{X \in TM \mid \eta(X) = 0\}$ ранга $2n$, которое называется *контактным распределением*. Контактное многообразие $M$ имеет всюду ненулевое векторное поле $\xi$, которое определяется свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$ для любого векторного поля $X$ на $M$. Поле $\xi$ называется *полем Риба* или *характеристическим векторным полем* контактной структуры. Легко видеть, что $L_\xi \eta = 0$.

**Определение 1.** Параконтактная структура на $(2n+1)$-мерном связном гладком многообразии $M$ определяется тройкой тензорных полей $(\eta, \xi, \varphi)$, где $\eta$ — контактная форма на $M$, $\xi$ — векторное поле Риба и $\varphi$ — это $(1,1)$-тензорное поле, таких, что

$$\varphi^2 = \mathrm{Id} - \eta \otimes \xi, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \eta(\xi) = 1. \tag{1}$$

Кроме того, ограничение $J$ аффинора $\varphi$ на распределение $D = \ker(\eta)$ является почти паракомплексной структурой, т.е. собственные подпространства $D^+$, $D^-$, соответствующие собственным значениям $1$, $-1$ оператора $J$ имеют одинаковую размерность, равную $n$.

Отметим, что $(1,1)$-тензорное поле $\varphi$ называют обычно аффинором контактной структуры $\eta$.

Псевдориманова метрика $g$ на $M$ называется *ассоциированной* с почти параконтактной структурой $(\varphi, \xi, \eta)$, если

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y). \tag{2}$$

Легко видеть, что любая параконтактная структура допускает ассоциированную метрику, которая имеет сигнатуру $(n+1, n)$. Если задана ассоциированная метрика, то мы получаем параконтактную метрическую структуру.

**Определение 2.** Параконтактной метрической структурой на контактном многообразии $(M, \eta)$ называется набор тензорных полей $(\varphi, \xi, \eta, g)$, обладающих следующими свойствами:

(i) $\varphi^2 = \mathrm{Id} - \eta \otimes \xi$,

(ii) $d\eta(X, Y) = g(\varphi X, Y)$,

(iii) $g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$.

Легко видеть, что ассоциированная метрика $g$ на параконтактном метрическом многообразии полностью определяется аффинором $\varphi$:

$$g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y). \tag{3}$$

Отметим также следующее свойство:

$$d\eta(\varphi X, \varphi Y) = -d\eta(X, Y), \quad \forall X, Y.$$

Условия определения 2 на аффинор $\varphi$ и псевдориманову метрику $g$ параконтактной метрической структуры являются достаточно слабыми. Поэтому на контактном многообразии $(M, \eta, \xi)$ всегда существует параконтактная метрическая структура $(\varphi, \xi, \eta, g)$.

Введем понятие парасасакиевой структуры по аналогии со структурой Сасаки классической контактной геометрии (см. [5]).

**Определение 3.** Рассмотрим прямое произведение многообразий $M \times \mathbb{R}$. Обозначим $(X, f\partial_t)$ произвольное векторное поле на $M \times \mathbb{R}$. Тогда формула

$$\mathcal{J}(X, f\partial_t) = (\varphi X - f\xi, -\eta(X)\partial_t)$$

определяет почти паракомплексную структуру на $M \times \mathbb{R}$. Если $\mathcal{J}$ интегрируема, то $(\varphi, \eta, \xi)$ называется *нормальной* параконтактной структурой.

Нормальная параконтактная метрическая структура $(\eta, \xi, \varphi, g)$ называется парасасакиевой.

В [3] показано, что параконтактная метрическая структура $(\eta, \xi, \varphi, g)$ является парасасакиевой тогда и только тогда, когда обращается в нуль следующий тензор:

$$N(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) - d\eta(X, Y)\xi,$$

где

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

— кручение Нейенхейса.

*2.3. Левоинвариантные параконтактные структуры на группах Ли.* Если мы имеем дело с группами Ли, то естественно рассматривать левоинвариантные структуры. Левоинвариантная параконтактная структура на группе Ли $G$ — это тройка $(\eta, \xi, \varphi)$, где контактная 1-форма $\eta$, поле Риба $\xi$ и аффинор $\varphi$ являются левоинвариантными. Поэтому они определяются своими значениями на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $G$. В этом смысле мы будем говорить о параконтактных структурах $(\eta, \xi, \varphi)$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и, соответственно, о параконтактных метрических структурах $(\eta, \xi, \varphi, g)$ и парасасакиевых структурах на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Левоинвариантные контактные структуры на группах Ли изучались в [12, 13]. В этих статьях показано, что контактные алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \eta)$ могут иметь не более чем одномерный центр. Если размерность центра равна 1, то контактная алгебра Ли $(\mathfrak{g}, \eta)$ является центральными расширением симплектической алгебры Ли $(\mathfrak{h},\ \omega)$ при помощи коцикла $\omega$. Поэтому классификация симплектических алгебр Ли автоматически приводит к классификация контактных алгебр Ли с нетривиальным центром. Согласно результатам работы [14] существует 6 пятимерных контактных алгебр Ли с нулевым центром и все они описаны в явном виде. В [16] получена классификация симплектических структур на четырехмерных алгебрах Ли. В [7] получена классификация паракэлеровых метрик на четырехмерных алгебрах Ли. В [9] изучались пятимерные параконтактные алгебры Ли.

*2.4. Центральные расширения симплектических алгебр Ли.* Поскольку пятимерные контактные алгебры Ли с ненулевым центром могут быть представлены в виде центральных расширений симплектических алгебр Ли, то в этом разделе мы напомним эту процедуру центрального расширения.

Если имеется симплектическая алгебра Ли $(\mathfrak{h}, \omega)$, то центральное расширение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R}$ есть прямое произведение $\mathfrak{h} \times \mathbb{R}$, на котором скобки Ли задаются следующим образом:

(i) $[X, \xi]_\mathfrak{g} = 0$,
(ii) $[X, Y]_\mathfrak{g} = [X, Y]_\mathfrak{h} + \omega(X, Y)\xi$,

где $X, Y \in \mathfrak{h}$ и $\xi = \partial_t$ — касательный вектор к $\mathbb{R}$.

Если мы на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R}$ возьмем в качестве контактной формы $\eta = \xi^*$, а в качестве поля Риба — вектор $\xi = \partial_t$, то получим контактную алгебру Ли $(\mathfrak{g}, \eta, \xi)$, которую и имеют в виду, когда говорят о центральном расширении алгебры Ли $\mathfrak{h}$.

Контактное распределение $D = \ker(\eta)$ есть подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Если $x = X + \lambda\xi$ и $y = Y + \mu\xi$, где $Y, Y \in \mathfrak{h}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то

$$d\eta(x, y) = -\eta([x, y]) = -\xi^*([X, Y]_\mathfrak{h} + \omega(X, Y)\xi) = -\omega(X, Y).$$

Аффинор $\varphi$ параконтактной структуры определен своим действием на контактном распределении $D = \mathfrak{h}$. Поэтому для определения аффинора $\varphi$ на $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R}$, мы можем использовать почти паракомплексную структуру $J$ на алгебре $\mathfrak{h}$ следующим образом: если $x = X + \lambda\xi$, где $X \in \mathfrak{h}$, то $\varphi(x) = JX$. Таким образом, аффинор $\varphi$ имеет блочный вид:

$$\varphi = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если почти паракомплексная структура $J$ на $\mathfrak{h}$ согласована с симплектической формой $\omega$, т.е. выполняется свойство $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$, то мы получаем параконтактную (псевдориманову) метрическую структуру $(\eta, \xi, \varphi, g)$ на $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R}$, где $g$ — ассоциированная метрика на $\mathfrak{g}$, определенная равенством

$$g(x, y) = -d\eta(x, \varphi y) + \eta(x)\eta(y). \tag{4}$$

Как известно (см. [3]), параконтактная метрическая структура $(\eta, \xi, \varphi, g)$ на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R}$ является парасасакиевой, если и только если симплектическая алгебра Ли $(\mathfrak{h}, \omega, J, g)$ является паракэлеровой. В [3] получены также формулы, которые связывают тензоры кривизны на алгебрах Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$.

**Теорема 1** (см. [3])**.** *Предположим, что $(\mathfrak{h}, \omega, J, h)$ — паракэлерова структура на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ и $(\eta, \xi, \varphi, g)$ — соответствующая парасасакиева структура на центральном расширении*

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R}$. *Тогда тензор кривизны $R$ на $\mathfrak{g}$ выражается через тензор кривизны $R_\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{h}$, паракомплексную структуру $J$ и метрику $h$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ следующим образом*:

$$R(X,Y)Z = R_\mathfrak{h}(X,Y)Z - \frac{1}{4}h(X,JZ)JY + \frac{1}{4}h(Y,JZ)JX - \frac{1}{2}h(X,JY)JZ,$$
$$R(X,Y)\xi = 0, \quad R(X,\xi)Z = \frac{1}{4}h(X,Z)\xi, \quad R(X,\xi)\xi = -\frac{1}{4}X$$

*для любых $X, Y \in \mathfrak{h}$.*

**Теорема 2** (см. [3])**.** *Предположим, что $(\omega, J, h)$ — паракэлерова структура на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ и $(\eta, \xi, \varphi, g)$ — соответствующая парасасакиева структура на центральном расширении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R}$. Тогда тензор Риччи* Ric *на $\mathfrak{g}$ выражается через тензор Риччи* $\mathrm{Ric}_\mathfrak{h}$ *на $\mathfrak{h}$ и метрику $h$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ следующим образом*:

$$\mathrm{Ric}(Y,Z) = \mathrm{Ric}_\mathfrak{h}(Y,Z) + \frac{1}{2}h(Y,Z), \quad \mathrm{Ric}(Y,\xi) = 0, \quad \mathrm{Ric}(\xi,\xi) = -\frac{n}{2}.$$

## 3. Классификация парасасакиевых структур на пятимерных алгебрах Ли.

**Теорема 3.** *Любая левоинвариантные парасасакиева структура $(\mathfrak{g}, \eta, \varphi, \xi, g)$ на пятимерной алгебре Ли изоморфна одной из перечисленных ниже в списке 3.1—3.18.*

*Доказательство.* Как известно, центр параконтактной структуры $(\mathfrak{g}, \eta, \varphi, \xi, g)$ не более, чем одномерен. Если размерность центра равна единице, то параконтактная структура является центральный расширением симплектической алгебры Ли. Поэтому в начале списка парасасакиевых структур мы приводим центральные расширения четырехмерных паракэлеровых алгебр Ли. В конце мы приводим парасасакиевы структуры с нулевым центром. Классификация четырехмерных паракэлеровых алгебр Ли получена в [7]. Согласно результатам работы [14] существует 6 пятимерных контактных алгебр Ли с нулевым центром и все они описаны в явном виде. Поэтому перечень возможных контактных алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \eta, \xi)$, на которых могут существовать паракэлеровы структуры $(\mathfrak{g}, \eta, \varphi, \xi, g)$, известен. Для полной классификации левоинвариантных парасасакиевых структур на пятимерных алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \eta, \xi)$ достаточно найти выражения аффиноров $\varphi$ и ассоциированных метрик $g$. Во всех возможных случаях на алгебре Ли существует базис $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$, $e_5$, к котором контактная форма $\eta$ имеет вид $\eta = e^5$, а контактное распределение $D$ — это подпространство с базисом $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$. Поэтому аффинор $\varphi$ и ассоциированная метрика $g$ имеют блочный вид:

$$\varphi = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $J$ — паракомплексная структура на пространстве $D$, согласованная с симплектической формой $\omega = -d\eta$ и $G$ — ассоциированная метрика на $D$, которая находится из условия $G(X,Y) = \omega(X,JY)$.

Таким образом, нужно найти матрицы $J^i_j$ и $\varphi^i_j$, обладающие следующими свойствами:

(i) $J^2 = \mathrm{Id}$, $J^i_k J^k_j = \delta^i_j$;

(ii) $\omega(JX,Y) + \omega(X,JY) = 0$, $J^k_i \omega_{k,j} + \omega_{i,s} J^s_j = 0$;

(iii) $N(X,Y) = [\varphi,\varphi](X,Y) - d\eta(X,Y)\xi$;

здесь

$$[\varphi,\varphi](X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

— кручение Нейенхейса. Поскольку $\xi = e_5$, то третье условие интегрируемости выражается в матричном виде двух условий:

$$N^k_{i,j} = \varphi^k_r \varphi^r_s C^s_{ij} + \varphi^l_i \varphi^m_j C^k_{lm} - \varphi^k_m \varphi^l_i C^m_{lj} - \varphi^k_m \varphi^l_j C^m_{il} = 0, \quad k = 1, \dots, 4,$$
$$N^5_{i,j} = \varphi^5_r \varphi^r_s C^s_{ij} + \varphi^l_i \varphi^m_j C^5_{lm} - \varphi^5_m \varphi^l_i C^m_{lj} - \varphi^5_m \varphi^l_j C^m_{il} - (d\eta)_{i,j} = 0,$$

где $C^k_{ij}$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Учитывая, что $\varphi^5_r = 0$, последнее условие принимает простой вид:

$$N^5_{i,j} = \varphi^l_i \varphi^m_j C^5_{lm} + \omega_{i,j} = 0.$$

После того как найдено выражение аффинора $\varphi^i_j$, ассоциированная метрика $g$ находится по формулам

$$g_{i,j} = \omega_{i,s}\varphi^s_j, \quad i,j = 1,\dots,4, \quad g_{5,5} = 1. \tag{6}$$

Напомним, что тензор кривизны $R$ определяется формулой $R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$, где $\nabla$ — связность Леви-Чивиты ассоциированной метрики $g$. Он вычисляется по обычным формулам левоинвариантной геометрии:

$$R^s_{ijk} = \Gamma^s_{ip}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^s_{jp}\Gamma^p_{ik} - C^p_{ij}\Gamma^s_{pk}, \tag{7}$$

$$\Gamma^n_{ij} = \frac{1}{2}g^{kn}(g_{pk}C^p_{ij} + g_{pj}C^p_{ki} + g_{ip}C^p_{kj}). \tag{8}$$

Тензор Риччи — это свертка тензора кривизны по первому и четвертому (верхнему) индексам, $\mathrm{Ric}_{ij} = R^k_{kij}$.

Результаты вычислений, представленные в классификационном списке, включают для каждой пятимерной контактной алгебры Ли явные выражения всех возможных аффиноров $\varphi$ парасасакиевых структур. Аффинор $\varphi$ определяется указанными выше условиями с точностью до знака, мы указываем один из $\pm\varphi$. Поскольку аффинор $\varphi$ имеет блочный вид (5), мы указываем для краткости только его основной блок $J$. Когда найден аффинор $\varphi$, ассоциированная метрика $g$ находится по формулам (6). В качестве характеристик кривизны мы представляем описание тензора Риччи ассоциированной метрики. Тензор Риччи мы рассматриваем здесь как $(1,1)$-тензор, т.е. как оператор $\mathrm{RIC} = g^{-1}\,\mathrm{Ric}$. Вычисления проведены в системе Maple. □

*3.1. Алгебра Ли* $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2 \times_\omega \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1,e_2] = e_2, \quad [e_3,e_4] = e_4, \quad [e_1,e_2] = e_5, \quad \lambda[e_1,e_3] = e_5, \quad [e_3,e_4] = e_5, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega = -d\eta = e^1\wedge e^2 + \lambda e^1 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Случаи $\lambda > 0$ и $\lambda = 0$ существенно отличаются.

**Случай 1** ($\lambda = 0$)**.** Существует 5 парасасакиевых структур, зависящих от нескольких параметров:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ -\frac{a^2-1}{b} & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -\frac{c^2-1}{d} \\ 0 & 0 & d & -c \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} a+1 & b & -1+c & b \\ -\frac{a(a+2)}{b} & -a-1 & -\frac{(-1+c)a}{b} & -a \\ a & b & c & b \\ -\frac{(-1+c)a}{b} & 1-c & -\frac{c^2-1}{b} & -c \end{bmatrix},$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -\frac{b^2-1}{c} \\ 0 & 0 & c & -b \end{bmatrix}, \quad J_4 = \begin{bmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ -\frac{a^2-1}{b} & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & b & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & -b & 1 \end{bmatrix}.$$

Первая парасасакиева структура имеет скалярную кривизну

$$S = -\frac{2bd - 2c^2 - d + 2}{d}$$

и является эйнштейновой при значения параметров $b = 3/2$ и $d = -2(c^2-1)/3$. Вторая парасасакиева структура скалярной кривизны $S = 1 - 6b$ является эйнштейновой при значения параметра $b = 1$. Третья парасасакиева структура имеет скалярную кривизну

$$S = \frac{2b^2 - 2 + c}{c}.$$

Четвертая парасасакиева структура скалярной кривизны $S = -2b - 2c + 1$, является эйнштейновой при $b = c = 3/2$. Пятая парасасакиева структура имеет скалярную кривизну $S = 1$. Ее оператор Риччи $\mathrm{RIC} = g^{-1}\,\mathrm{Ric}$ имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

**Случай 2** ($\lambda > 0$)**.** Существует три парасасакиевых структуры, зависящие от двух параметров $a$ и $b$:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & -2 & b & -1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & b & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & -b & -1 \end{bmatrix}.$$

Все три структуры имеет скалярную кривизну $S = 1$. Оператор Риччи $\mathrm{RIC} = g^{-1}\,\mathrm{Ric}$ имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

*3.2. Алгебра Ли* $\mathfrak{rh}_3 \times_\omega \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_3] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega = -d\eta = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3.$$

Существует две парасасакиевые структуры:

$$J_1 = \begin{bmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ \frac{a^2-1}{b} & -a & 0 & 0 \\ d & c & a & b \\ -\frac{ca^2+2dab-c}{b^2} & d & -\frac{a^2-1}{b} & -a \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & -b & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{bd}{2} & c & 1 & b \\ d & -\frac{bd}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Обе структуры имеет скалярную кривизну $S = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

*3.3. Алгебра Ли* $\mathfrak{rr}_{3,0} \times_\omega \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega = -d\eta = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4.$$

Существует две парасасакиевые структуры:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -a & c & 0 & 0 \\ -\frac{a^2-1}{c} & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -\frac{b^2-1}{d} \\ 0 & 0 & d & -b \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -\frac{b^2-1}{c} \\ 0 & 0 & c & -b \end{bmatrix}.$$

Первая ассоциированная метрика имеет скалярную кривизну $S = -2c + 1$. При $c = 0$ оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$. Вторая метрика имеет скалярную кривизну $S = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

*3.4. Алгебра Ли* $\mathfrak{rr}_{3,-1} \times_\omega \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = -e_3, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_3] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega = -d\eta = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3.$$

Существует три парасасакиевые структуры:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & -\frac{a^2-1}{b} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Все три метрики имеют скалярную кривизну $S = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

*3.5. Алгебра Ли* $\mathfrak{r}_2' \times_\omega \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_3] = e_3, \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_3] = e_4, \quad [e_2, e_4] = -e_3, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_3] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega = -d\eta = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3.$$

Существует три парасасакиевые структуры:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\frac{ab+c^2+2}{2} & -c & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{c(ab+c^2+4)}{2b} & a & 1 & c \\ -\frac{a^2b^2+2abc^2+c^4+4ab+4c^2}{4b} & -\frac{c(ab+c^2+4)}{2b} & 0 & \frac{ab+c^2+2}{2} \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} -a & b & c & -d \\ -b & -a & d & c \\ J_1^3 & J_2^3 & a & -b \\ J_1^4 & J_2^4 & b & a \end{bmatrix},$$

где

$$J_1^3 = J_2^4 = -\frac{2dab + c(a^2 - b^2 - 1)}{d^2 + c^2}, \quad J_2^3 = -J_1^4 = \frac{2cab - d(a^2 - b^2 - 1)}{d^2 + c^2}.$$

Ассоциированная метрика первой структуры имеет скалярную кривизну $S = 1 - 6b$, эйнштейнова при $b = 1$. Вторая метрика скалярной кривизны $S = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$. Третья метрика имеет скалярную кривизну $S = 8d + 1$.

*3.6. Алгебра Ли* $\mathfrak{r}_{4,0} \times_\omega \mathbb{R}$. Два варианта центрального расширения:

1. Алгебра Ли $\mathfrak{r}_{4,0} \times_{\omega_+} \mathbb{R}$. Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega_+ = -d\eta = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3.$$

Ненулевые скобки Ли:

$$[e_4, e_1] = e_1, \quad [e_4, e_3] = e_2, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_3] = e_5.$$

2. Алгебра Ли $\mathfrak{r}_{4,0} \times_{\omega_-} \mathbb{R}$. Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega_- = -d\eta = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3.$$

Ненулевые скобки Ли:

$$[e_4, e_1] = e_1, \quad [e_4, e_3] = e_2, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_3] = -e_5.$$

В каждом из этих случаев существует одна парасасакиева структура:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика имеет скалярную кривизну $S = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

*3.7. Алгебра Ли* $\mathfrak{r}_{4,-1} \times_\omega \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_4, e_1] = e_1, \quad [e_4, e_2] = -e_2, \quad [e_4, e_3] = e_2 - e_3, \quad [e_1, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_4] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega = -d\eta = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4.$$

Имеется одна парасасакиева структура. Ассоциированная метрика имеет скалярную кривизну $S = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$;

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

*3.8. Алгебра Ли* $\mathfrak{r}_{4,-1,\beta} \times_\omega \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_4, e_1] = e_1, \quad [e_4, e_2] = -e_2, \quad [e_4, e_3] = \beta e_3, \quad [e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega = -d\eta = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4, \quad -1 < \beta < 0.$$

Имеются три парасасакиевые структуры:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -\frac{a^2-1}{b} \\ 0 & 0 & b & -a \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика первой структуры имеет скалярную кривизну $S = 2\beta^2 b + 1$. Во втором и третьем случаях скалярная кривизна $S = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

*3.9. Алгебра Ли* $\mathfrak{r}_{4,-1,-1} \times_\omega \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_4, e_1] = e_1, \quad [e_4, e_2] = -e_2, \quad [e_4, e_3] = -e_3, \quad [e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega = -d\eta = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4.$$

Имеется пять парасасакиевых структур:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{a^2}{b} & a & -\frac{a(c-1)}{b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(c-1)}{b} & c & -\frac{c^2-1}{b} \\ 0 & -a & b & -c \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -\frac{a^2-1}{b} \\ c & -a & b & -d \\ d & -\frac{a^2-1}{b} & a & \frac{ca^2-2bda-c}{b^2} \\ b & 0 & 0 & -a \end{bmatrix},$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{2a}{b} \\ b & 1 & 0 & -a \\ a & \frac{2a}{b} & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика первой структуры имеет скалярную кривизну $S = 2b + 1$. Во всех остальных случаях скалярная кривизна $S = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

*3.10. Алгебра Ли* $\mathfrak{r}_{4,-\alpha,\alpha} \times_\omega \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_4, e_1] = e_1, \quad [e_4, e_2] = -\alpha e_2, \quad [e_4, e_3] = \alpha e_3, \quad [e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega = -d\eta = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Имеются три парасасакиевые структуры:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & -\frac{a^2-1}{b} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика первой структуры имеет скалярную кривизну $S = 2b + 1$. Во всех остальных случаях скалярная кривизна $S = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

*3.11. Алгебра Ли* $\mathfrak{d}_{4,1} \times_\omega \mathbb{R}$. Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,1}$ допускает две симплектические структуры

$$\omega_1 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4 \quad \text{и} \quad \omega_2 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4,$$

поэтому возможны два центральных расширения алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,1}$.

1. Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,1} \times_{\omega_1} \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_4, e_3] = e_3, \quad [e_4, e_1] = e_1, \quad [e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = -e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega_1 = -d\eta = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4.$$

Имеется пять парасасакиевых структур:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a^2}{b} & a & -\frac{a(c+1)}{b} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(c+1)}{b} & c & -\frac{c^2-1}{b} \\ 0 & a & b & -c \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & \frac{a^2-1}{b} \\ c & a & b & d \\ d & -\frac{a^2-1}{b} & -a & -\frac{ca^2+2abd-c}{b^2} \\ -b & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\frac{a}{b} \\ b & -1 & 0 & a \\ a & -2\frac{a}{b} & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_4 = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика первой структуры имеет скалярную кривизну $S = -6b+1$ и является эйнштейновой при $b = 1$. Вторая метрика скалярной кривизны $S = 1$. Остальные структуры $J_3$, $J_4$, $J_5$ имеют скалярную кривизну $S = 1$. Для них оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

2. Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,1} \times_{\omega_2} \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_4, e_3] = e_3, \quad [e_4, e_1] = 2e_1, \quad [e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = -e_5, \quad [e_2, e_4] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega_2 = -d\eta = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4.$$

Имеется одна парасасакиева структура скалярной кривизны $S = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$;

$$J = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*3.12. Алгебра Ли* $\mathfrak{d}_{4,2} \times_\omega \mathbb{R}$. Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,2}$ допускает три симплектических структуры

$$\omega_1 = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4, \quad \omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3, \quad \omega_3 = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3,$$

поэтому возможны три центральных расширения алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,2}$.

1. Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,2} \times_{\omega_1} \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_4, e_3] = e_3, \quad [e_4, e_1] = 2e_1, \quad [e_4, e_2] = -e_2, \quad [e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = -e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega_1 = -d\eta = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4.$$

Имеются три парасасакиевые структуры:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -\frac{a^2-1}{b} & -a \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика первой структуры имеет скалярную кривизну $S = (6a^2 + b - 6)/b$ и является эйнштейновой при $b = 1 - a^2$. Две другие структуры имеют скалярную кривизну $S = 1$. Их операторы Риччи имеют два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

2. Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,2} \times_{\omega_2} \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_4, e_3] = e_3, \quad [e_4, e_1] = 2e_1, \quad [e_4, e_2] = -e_2, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_3] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega_2 = -d\eta = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3.$$

Две парасасакиевые структуры:

$$J_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 2\frac{a^2-1}{b} \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & -\frac{a^2-1}{b} & a & 0 \\ -1/2b & 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & -b(a+1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & -1 & 0 \\ \frac{a-1}{b} & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика первой структуры имеет скалярную кривизну $S = 1 - 6b$, а для второй $S = (8(a-1) + b)/b$.

3. Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{4,2} \times_{\omega_3} \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_4, e_3] = e_3, \quad [e_4, e_1] = 2e_1, \quad [e_4, e_2] = -e_2, \quad [e_1, e_4] = e_5, \quad [e_2, e_3] = -e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega_3 = -d\eta = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3.$$

Девять парасасакиевых структур:

$$J_1=\begin{bmatrix}0&a&1&b\\0&0&0&-1\\1&b&0&a\\0&-1&0&0\end{bmatrix},\quad J_2=\begin{bmatrix}-a&0&0&2\frac{a^2-1}{b}\\0&a&b&0\\0&-\frac{a^2-1}{b}&-a&0\\-1/2b&0&0&a\end{bmatrix},$$

$$J_3=\begin{bmatrix}a&0&0&-ab-b\\0&-1&0&0\\0&b&1&0\\\frac{a-1}{b}&0&0&-a\end{bmatrix},\quad J_4=\begin{bmatrix}1&a&0&a\\0&1&0&0\\2&b&-1&a\\0&-2&0&-1\end{bmatrix},\quad J_5=\begin{bmatrix}1&a&0&-a\\0&1&0&0\\-2&b&-1&a\\0&2&0&-1\end{bmatrix},$$

$$J_6=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\a&1&a&0\\0&0&-1&0\\a&0&a&1\end{bmatrix},\quad J_7=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\a&1&-a&0\\0&0&-1&0\\-a&0&a&1\end{bmatrix},\quad J_8=\begin{bmatrix}a-1&b&a&-\frac{2b(a-2)}{a}\\\frac{a^2}{2b}&\frac{a+2}{2}&\frac{a^2}{2b}&-a\\-\frac{a}{2}&-\frac{ba+4b}{2a}&-\frac{a+2}{2}&b\\\frac{a^2}{2b}&\frac{a}{2}&\frac{a^2}{2b}&-a+1\end{bmatrix},$$

$$J_9=\begin{bmatrix}-a-1&b&a&2\frac{b(a+2)}{a}\\\frac{1}{2}\frac{a^2}{b}&-\frac{1}{2}a+1&-\frac{1}{2}\frac{a^2}{b}&-a\\-\frac{1}{2}a&-\frac{1}{2}\frac{-ba+4b}{a}&\frac{1}{2}a-1&b\\-\frac{1}{2}\frac{a^2}{b}&\frac{1}{2}a&\frac{1}{2}\frac{a^2}{b}&a+1\end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика первой структуры имеет скалярную кривизну $S_1=1$. Ее оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1=1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2=-1$ кратности 1, собственный вектор $\xi=e_5$. Остальные метрики имеют следующие скалярные кривизны:

$$S_2=1-6b,\quad S_3=\frac{8(a-1)+b}{b},\quad S_4=1,\quad S_5=1,$$
$$S_6=6a+1,\quad S_7=-6a+1,\quad S_8=\frac{3a^2+b}{b},\quad S_9=\frac{-3a^2+b}{b}.$$

*3.13. Алгебра Ли* $\mathfrak{d}_{4,\lambda}\times_\omega\mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_4,e_3]=e_3,$$
$$[e_4,e_1]=\lambda e_1,\quad [e_4,e_2]=(1-\lambda)e_2,\quad \lambda\geqslant\frac{1}{2},\quad \lambda\neq 1,2,$$
$$[e_1,e_2]=e_5,\quad [e_3,e_4]=-e_5.$$

Контактная форма

$$\eta=e^5,\quad \omega_2=-d\eta=e^1\wedge e^2-e^3\wedge e^4.$$

Три парасасакиевые структуры:

$$J_1=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&b\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad J_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\a&-1&0&0\\0&0&1&b\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\quad J_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&a&-\frac{a^2-1}{b}\\0&0&b&-a\end{bmatrix}.$$

Ассоциированные метрики первой и второй структур имеют скалярную кривизну $S_1=1$. Их операторы Риччи имеют два собственных значения: $\lambda_1=1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2=-1$ кратности 1, собственный вектор $\xi=e_5$. Третья метрика имеет скалярную кривизну $S=-6b+1$, эйнтейнова при $b=1$.

*3.14. Алгебра Ли* $\mathfrak{h}_4\times_\omega\mathbb{R}$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_4$ допускает две симплектических структуры

$$\omega=\pm(e^1\wedge e^2-e^3\wedge e^4),$$

поэтому возможны два центральных расширения алгебра Ли $\mathfrak{h}_4$.

1. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_4 \times_{\omega_+} \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_4, e_3] = e_3, \quad [e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1, \quad [e_4, e_2] = e_1 + \frac{1}{2}e_2, \quad [e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = -e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega_+ = -d\eta = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4.$$

2. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_4 \times_{\omega_-} \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_4, e_3] = e_3, \quad [e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1, \quad [e_4, e_2] = e_1 + \frac{1}{2}e_2, \quad [e_1, e_2] = -e_5, \quad [e_3, e_4] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega_- = -d\eta = -e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4.$$

В обоих случаях существует одна парасасакиева структура:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика имеет скалярную кривизну $S_1 = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

*3.15. Алгебра Ли* $\mathbb{R}^4 \times_\omega \mathbb{R}$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = e_5.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad \omega = -d\eta = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4.$$

Любая паракомплексная структура $J$ на $\mathbb{R}^4$, согласованная с формой $\omega$, определяет парасасакиеву структуру. Ассоциированная метрика каждой такой структуры имеет скалярную кривизну $S_1 = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

*3.16. Алгебра Ли* $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = ae_1 + be_2 + e_5, \quad [e_1, e_3] = ce_3, \quad [e_1, e_4] = -ce_4, \quad [e_2, e_3] = de_3, \quad [e_2, e_4] = -de_4,$$
$$[e_3, e_4] = e_5, \quad [e_3, e_5] = (ac + bd)e_3, \quad [e_4, e_5] = -(ac + bd)e_4, \quad ac + bd \neq 0.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad d\eta = -e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4.$$

Существует три парасасакиевые структуры:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -A & B & 0 & 0 \\ -\frac{A^2-1}{B} & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ B & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ B & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированные метрики имеют скалярные кривизны:

$$S_1 = -\frac{1}{B}\Big(2a^2A^2 - 4abBA + 2b^2B^2 - 2(ac + bd)B - 2a^2 - B\Big),$$
$$S_2 = 2a^2B + 4ba - 4ac - 2bd + 1, \quad S_3 = 2a^2B - 4ba - 2ac - 2bd + 1.$$

*3.17. Алгебра Ли* $\mathfrak{p}_2 = \mathbb{R}^2 \ltimes \mathfrak{h}_3$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = be_2 + e_5, \quad [e_1, e_3] = ce_3, \quad [e_1, e_4] = (b - c)e_4, \quad [e_2, e_3] = de_3,$$
$$[e_2, e_4] = -de_4, \quad [e_3, e_4] = be_2 + e_5, \quad [e_3, e_5] = bde_3, \quad [e_4, e_5] = -bde_4.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad d\eta = -e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4.$$

Существует три парасасакиевые структуры:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -A & B & 0 & 0 \\ -\frac{A^2-1}{B} & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика первой структуры имеет скалярную кривизну $S = -6b^2B + 1$ и является эйнштейновой при $b^2B = 1$. Во втором и третье случаях ассоциированная метрика имеет скалярную кривизну $S = 1$. Оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

*3.18. Алгебра Ли* $\mathfrak{p}_3 = \mathbb{R}^2 \ltimes \mathfrak{h}_3$. Ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = ae_1 + be_2 + e_5, \quad [e_1, e_3] = ce_3, \quad [e_1, e_4] = (b - c)e_4,$$
$$[e_2, e_3] = de_3, \quad [e_2, e_4] = -(a + d)e_4, \quad [e_3, e_4] = ae_1 + be_2 + e_5,$$
$$[e_3, e_5] = (ac + bd)e_3, \quad [e_4, e_5] = -(ac + bd)e_4, \quad ac + bd \neq 0.$$

Контактная форма

$$\eta = e^5, \quad d\eta = -e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4.$$

Существует три парасасакиевые структуры:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -A & B & 0 & 0 \\ -\frac{A^2-1}{B} & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика первой структуры имеет скалярную кривизну

$$S = -\frac{1}{B}\Big(6a^2A^2 - 12abBA + 6b^2B^2 - 6a^2 - B\Big)$$

и является эйнштейновой при $a^2A^2 - 2abBA + b^2B^2 - a^2 - B = 0$. Во втором и третьем случаях скалярная кривизна одинакова и равна $S = 6a^2B + 12ba + 1$. Обе метрики эйнштейновы при $3a^2B + 6ba = -3$.

**Замечание.** Согласно результатам Диатта (см. [12]) не существует $K$-контактных эйнштейновых и тем более сасаки-эйнштейновых левоинвариантных римановых структур на группах Ли размерности $\geqslant 5$. Для псевдоримановых метрик это не так: в классификационном списке 3.1—3.18 эйнштейновы метрики встречаются достаточно часто. В этом списке также часто встречаются метрики скалярной кривизны $S = 1$, у которых оператор Риччи имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 1/2$ кратности 4, собственное подпространство $D$, и $\lambda_2 = -1$ кратности 1, собственный вектор $\xi = e_5$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Алексеевский Д. В., Медори К., Томассини А.* Однородные паракэлеровы многообразия Эйнштейна// 2009. — *64*, № 1 (385). — С. 3-–50.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* JОсновы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1981.
3. *Смоленцев Н. К.* Левоинвариантные парасасакиевы структуры на группах Ли// Вестн. Томск. ун-та. Мат. мех. — 2019. — № 62. — С. 27–37.
4. *Andrada A., Barberis M. L., Dotti I. G., Ovando G.* Product structures on four-dimensional solvable Lie algebras// Homology Homotopy Appl. — 2005. — *7*. — P. 9–37.

5. *Blair D. E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1976.
6. *Calvaruso G.* Symplectic, complex and Kähler structures on four-dimensional generalized symmetric spaces// Differ. Geom. Appl. — 2011. — *29.* — P. 758–769.
7. *Calvaruso G.* A complete classification of four-dimensional para-Kähler Lie algebras// Complex Manifolds. — 2015. — *2*, № 1. — P. 733–748.
8. *Calvaruso G., Fino A.* Complex and paracomplex structures on homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds// Int. J. Math. — 2013. — *24.* — 1250130.
9. *Calvaruso G., Perrone A.* Five-dimensional paracontact Lie algebras// Differ. Geom. Appl. — 2016. — *45.* — P. 115–129.
10. *Conti D., Rossi F. A.* Einstein nilpotent Lie groups/ `arXiv: 1707.04454 [math.DG].`
11. *Cruceanu V., Fortuny P., Gadea P. M.* A survey on paracomplex geometry// Rocky Mount. J. Math. — 1996. — *26.* — P. 83–115.
12. *Diatta A.* Left-invariant contact structures on Lie groups// Differ. Geom. Appl. — 2008. — *26*, № 5. — P. 544–552.
13. *Goze M., Khakimdjanov Y., Medina A.* Symplectic or contact structures on Lie groups// Differ. Geom. Appl. — 2004. — *21*, № 1. — P. 41—54.
14. *Goze M., Remm E.* Contact and Frobeniusian forms on Lie groups// Differ. Geom. Appl. — 2014. — *35.* — P. 74—94.
15. *Ovando G.* Invariant complex structures on solvable real Lie groups// Manuscr. Math. — 2000. — *103.* — P. 19–30.
16. *Ovando G.* Four-dimensional symplectic Lie algebras// Beiträge Algebra Geom. — 2006. — *47*, № 2. — P. 419–434.
17. *Ovando G.* Invariant pseudo-Kähler metrics in dimension four// J. Lie Theory. — 2006. — *16.* — P. 371–391.

Смоленцев Николай Константинович
Кемеровский государственный университет
E-mail: `smolennk@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 203 (2021). С. 116–129
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-203-116-129

УДК 514.76

# ОБ АЛГЕБРАХ И РАССЛОЕНИЯХ ВЕЙЛЯ

© 2021 г. **А. Я. СУЛТАНОВ, Г. А. СУЛТАНОВА, О. А. МОНАХОВА**

Аннотация. В статье изучаются алгебры Вейля и их применение при построении расслоений Вейля. Выделяются фробениусовы алгебры, обсуждается гипотеза Вишневского и доказывается, что существуют фробениусовы алгебры Вейля, ширина которых больше единицы. Указаны другие свойства фробениусовых алгебр Вейля. Дан краткий обзор результатов, полученных за последние три года.

***Ключевые слова:*** алгебра Вейля, фробениусова алгебра, гладкое многообразие, линейная связность.

# ON WEIL ALGEBRAS AND WEIL BUNDLES

© 2021 **A. Ya. SULTANOV, G. A. SULTANOVA, O. A. MONAKHOVA**

Abstract. In this paper, we discuss Weil algebras and their application in the construction of Weil bundles. We also discuss Frobenius algebras and Vishnevsky's conjecture and prove that there exist Frobenius Weil algebras whose width is greater than one. Other properties of the Frobenius Weil algebras are indicated. A brief review of the results obtained over the past three years is given.

***Keywords and phrases:*** Weil algebra, Frobenius algebra, smooth manifold, linear connection.

***AMS Subject Classification:*** 53B15

**1. Определение алгебры Вейля. Примеры.** Алгебры Вейля лежат в основе определения расслоений Вейля, а также используются при построении лифтов геометрических объектов с базы в расслоение Вейля. Эти понятия были введены А. Вейлем в [15].

Мы приведем здесь определение алгебры Вейля над полем действительных чисел.

**Определение 1.** Линейная алгебра $\mathbb{A}$ конечного ранга над полем $\mathbb{R}$ называется алгеброй Вейля, если выполнены следующие условия:

(i) $\mathbb{A}$ — коммутативна, ассоциативна, обладает единицей;
(ii) существует идеал $\mathbb{I}$ такой, что $\mathbb{I}^p \neq \{0\}$, а $\mathbb{I}^{p+1} = \{0\}$;
(iii) факторалгебра $\mathbb{A}/\mathbb{I}$ изоморфна $\mathbb{R}$.

Число $p$ в условии (ii) называется высотой алгебры $\mathbb{A}$, а число $m$, равное размерности факторалгебры $\mathbb{I}/\mathbb{I}^2$, называется шириной алгебры $\mathbb{A}$. В идеале $\mathbb{I}$, который будем обозначать также символом $\overset{0}{\mathbb{A}}$, можно выбрать $m$ элементов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, порождающие этот идеал. Одномерная подалгебра, порожденная единицей $\delta$ алгебры $\mathbb{A}$, изоморфна $\mathbb{R}$. Отождествив $\delta$ с 1 поля действительных чисел $\mathbb{R}$, алгебру $\mathbb{A}$ можно представить в виде полупрямой суммы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{I}$: $\mathbb{A} = \mathbb{R} + \mathbb{I}$. Каждый элемент $a$ алгебры $\mathbb{A}$ единственным образом представим в виде $a_0 + a_1 = a$; число $a_0$ назовем вещественной частью и обозначим $\operatorname{Re} a$. Если $a_0 \neq 0$, то $a^k \neq 0$ при любом натуральном $k$. Отсюда следует, что все нильпотентные элементы алгебры $\mathbb{A}$ принадлежат идеалу $\mathbb{I}$. Идеал $\mathbb{I}$ называется радикалом и обозначается символом $\operatorname{Rd} \mathbb{A}$. Базис в алгебре $\mathbb{A}$ можно построить из элементов

$\varepsilon^0 = 1$ и $\varepsilon_1^{\alpha_1}\varepsilon_2^{\alpha_2}\ldots\varepsilon_m^{\alpha_m}$, где $\alpha_i$ — неотрицательные целые числа и $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m \neq 0$. Для обозначения базисных элементов удобно использовать мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ с неотрицательными целыми составляющими $\alpha_i$ и $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m \leqslant p$. Тогда $\varepsilon_1^{\alpha_1}\varepsilon_2^{\alpha_2}\ldots\varepsilon_m^{\alpha_m} = \varepsilon^\alpha$ мультииндекс $0 = (0,\ldots,0)$ соответствует 1. Количество всевозможных мультииндексов $\alpha$ таких, что $0 \leqslant |\alpha| \leqslant p$ равно $\binom{p+m}{m}$ — числу сочетаний из $p+m$ элементов по $m$ элементов. Если $|\alpha| > p$, то $\varepsilon^\alpha = 0$. Мультииндексы складываются как арифметические векторы. Ранг алгебры $\mathbb{A}$ не превосходит $\binom{p+m}{m}$. Если $\dim\ \mathbb{A} < \binom{p+m}{m}$, то не все мультииндексы будут соответствовать базисным элементам. Обозначим через $\Lambda$ множество мультииндексов, соответствующих базисным элементам алгебры $\mathbb{A}$, а через $\Lambda^*$ — множество всех остальных мультииндексов $\alpha$ таких, что $|\alpha| \leqslant p$. Для каждого $\mu^* \in \Lambda^*$ имеем

$$\varepsilon^{\mu^*} = a_\lambda^{\mu^*}\varepsilon^\lambda, \tag{1}$$

где $a_\lambda^{\mu^*} \in \mathbb{R}$, а по мультииндексу $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ ведется суммирование.

Соотношения (1) называются определяющими соотношениями алгебры Вейля $\mathbb{A}$.

Если $\dim\ \mathbb{A} = \binom{p+m}{m}$, то $\Lambda^* = \emptyset$. В этом случае алгебра $\mathbb{A}$ не имеет определяющих соотношений и называется свободной алгеброй Вейля.

В алгебре Вейля $\mathbb{A}$ можно выделить цепочку идеалов

$$\mathbb{A} \supset \mathbb{I} \supset \mathbb{I}^2 \supset \ldots \supset \mathbb{I}^p \supset \{0\}. \tag{2}$$

Будем считать, что описанный выше базис $(\varepsilon^0, \varepsilon^\alpha)$, $\alpha \neq 0$, удовлетворяет условию: набор $(\varepsilon^\tau)$ является базисом идеала $\mathbb{I}^r$ при $|\tau| \geqslant r$ [13]. Тогда каждый набор элементов вида $\varepsilon^\alpha$, где $|\alpha| < r$, не будет содержаться в $\mathbb{I}^r$. Такой базис будем называть подчиненным цепочке идеалов (2).

*1.1. Примеры алгебр Вейля.*

**Пример 1.** Самым простым примером алгебры Вейля является алгебра дуальных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon)$, представляющая собой линейную алгебру ранга 2, в которой можно выбрать базис $\varepsilon^0 = 1$, $\varepsilon^1 = \varepsilon$, в которой операция умножения определяется следующей таблицей умножения базисных элементов

| | $1$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $\varepsilon$ |
| $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $0$ |

Легко установить, что все требования определения алгебры Вейля для алгебры $\mathbb{R}(\varepsilon)$ выполняются. Радикалом этой алгебры является ее идеал $\mathbb{I} = \{a\varepsilon \mid a \in \mathbb{R}\}$, высота и ширина этой алгебры равны 1.

**Пример 2.** Обобщением алгебры дуальных чисел является алгебра плюральных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^m)$ — линейная алгебра ранга $m+1$, в которой существует базис $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^m$, что операция умножения в $\mathbb{R}(\varepsilon^m)$ определяется условиями

$$\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta = \varepsilon^{\alpha+\beta}, \quad \varepsilon^{m+1} = 0, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, m.$$

Обозначив через $\varepsilon$ элемент $\varepsilon^1$, получим, что $\varepsilon^\alpha$ является степенью $\varepsilon$. При этом $\varepsilon^0$, по определению, будет степенью элемента $\varepsilon$ с показателем 0. Коммутативность, ассоциативность, наличие в $\mathbb{R}(\varepsilon^m)$ единицы следуют из приведенного правила умножения базисных элементов. Обозначим через $\mathbb{I}$ идеал, элементы которого имеют вид $x_1\varepsilon^1 + x_2\varepsilon^2 + \ldots + x_m\varepsilon^m$, где $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{I}^2$ — линейная оболочка элементов $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^m$. Аналогично определяются $\mathbb{I}^3, \ldots, \mathbb{I}^k$. приходим к следующей цепочке идеалов:

$$\mathbb{R}(\varepsilon^m) \supset \mathbb{I} \supset \mathbb{I}^2 \supset \ldots \supset \mathbb{I}^m \neq \{0\}, \quad \mathbb{I}^{m+1} = \{0\}.$$

Кроме того, факторалгебра $\mathbb{R}(\varepsilon^m)/\mathbb{I}$ изоморфна $\mathbb{R}$. Отсюда заключаем, что $\mathbb{R}(\varepsilon^m)$ является алгеброй Вейля. Ширина ее равна 1, так как идеал $\mathbb{I}$ порождается элементами $\varepsilon^1, (\varepsilon^1)^2, \ldots, (\varepsilon^1)^m$. Это означает, что псевдобазис идеала $\mathbb{I}$ состоит из одного элемента $\varepsilon^1$. Высота алгебры $\mathbb{R}(\varepsilon^m)$ равна $m$ ($m \geqslant 1$).

**Пример 3.** Рассмотрим линейную алгебру $\mathbb{A}$ с базисом $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ со следующей таблицей умножения:

| | $1$ | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$ | $\varepsilon_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$ | $\varepsilon_3$ |
| $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_3$ | $0$ | $0$ |
| $\varepsilon_2$ | $\varepsilon_2$ | $0$ | $\varepsilon_3$ | $0$ |
| $\varepsilon_3$ | $\varepsilon_3$ | $0$ | $0$ | $0$ |

Операция умножения в $\mathbb{A}$, определенная этой таблицей умножения базисных элементов, является коммутативной и ассоциативной. Элемент $\varepsilon^0 = 1$ является единицей. Линейная оболочка $\mathbb{I}$ элементов $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ является идеалом. Квадрат $\mathbb{I}^2$ является линейной оболочкой элемента $\varepsilon_3$. Так как $\varepsilon_1\varepsilon_3 = \varepsilon_2\varepsilon_3 = \varepsilon_3^2 = 0$, то $\mathbb{I}^3 = \{0\}$. Таким образом, имеем следующую цепочку идеалов:

$$\mathbb{A} \supset \mathbb{I} \supset \mathbb{I}^2 \neq \{0\}, \quad \mathbb{I}^3 = \{0\}.$$

Кроме того, $\mathbb{A}/\mathbb{I} \cong \mathbb{R}$.

Таким образом, алгебра $\mathbb{A}$ является алгеброй Вейля. Высота ее равна 2. Чтобы определить ширину этой алгебры, заметим, что в идеале $\mathbb{I}$ элементы $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ образуют псевдобазис идеала $\mathbb{I}$, так как $\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_1$. Из приведенной таблицы видно, что $\varepsilon_1\varepsilon_1 = \varepsilon_2\varepsilon_3$. Это равенство является определяющим соотношением в $\mathbb{A}$. Из полученных выводов следует, что ширина алгебры $\mathbb{A}$ равна 2.

**2. Неприводимость алгебр Вейля.** Сначала введем некоторые понятия и факты. Пусть $\mathbb{A}$ — произвольная линейная алгебра над $\mathbb{R}$. Элемент $e \in \mathbb{A}$ называется идемпотентным, иначе идемпотентом, если $e^2 = e$. Во всякой унитальной алгебре имеются два идемпотента: $\delta$ и 0, называемые тривиальными.

**Предложение 1.** *В любой алгебре Вейля нет идемпотентов, отличных от* 1 *и* 0.

*Доказательство.* Пусть $a$ — произвольный идемпотент алгебры Вейля $\mathbb{A}$. Так как $a = a_0 + a_1$, где $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_1 \in \mathbb{I}$, то $(a_0 + a_1)^2 = a_0 + a_1$. Отсюда следует, что

$$a_0^2 = a_0, \tag{3}$$

$$2a_0a_1 + a_1^2 = a_1. \tag{4}$$

Из соотношений (3) следует, что $a_0 = 0$ или $a_0 = 1$. Если $a_0 = 0$, то из (4) следует, что $a_1^k = a_1$ для любого натурального числа $k \geqslant 2$. Если $k = p$ ($p$ — высота алгебры $\mathbb{A}$), то $a_1^k = 0$, значит, и $a_1 = 0$. Тогда $a = 0$.

Пусть $a_0 = 1$. Тогда из (4) получим, что $a_1^k = (-1)^{k-1}a_1$ для любого натурального числа $k \geqslant 2$. Поэтому $a_1 = 0$, значит, $a = 1$. Таким образом, любой идемпотент — тривиальный. □

Известна следующая теорема.

**Теорема 1** (см. [2]). *В конечномерной коммутативной ассоциативной алгебре с единицей имеется делитель нуля, не принадлежащий радикалу, то в ней имеется нетривиальный идемпотент.*

Из этого факта и предложения 1 вытекает следующий факт.

**Предложение 2.**

1. *В любой алгебре Вейля* $\mathbb{A}$ *каждый делитель нуля принадлежит радикалу алгебры* $\mathbb{A}$.
2. *Элемент* $a$ *алгебры Вейля* $\mathbb{A}$ *обратим тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Re} a \neq 0.$$

В силу свойства 1 этого предложения алгебру Вейля $\mathbb{A}$ называют локальной алгеброй.

Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — линейные алгебры над полем $\mathbb{R}$. Линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ называется гомоморфизмом, если для любых элементов $x$, $y$ алгебры $\mathbb{A}$ выполняется условие $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Биективный гомоморфизм называется изоморфизмом.

**Предложение 3.** *Если* $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ — *изоморфизм,* $\mathbb{A}$ — *унитальная алгебра с единицей* $\delta_{\mathbb{A}}$*, то* $\mathbb{B}$ *также унитальна и* $\varphi(\delta_{\mathbb{A}})$ — *ее единица.*

*Доказательство.* Для произвольного элемента $b \in \mathbb{B}$ существует элемент $a \in \mathbb{A}$ такой, что $\varphi(a) = b$. Тогда $\varphi(\delta_{\mathbb{A}})b = \varphi(\delta_{\mathbb{A}})\varphi(a) = \varphi(\delta_{\mathbb{A}}a) = \varphi(a) = b$. Аналогично устанавливается равенство $b\varphi(\delta_{\mathbb{A}}) = b$. Таким образом, $\varphi(\delta_{\mathbb{A}})$ — единица алгебры $\mathbb{B}$. Предложение доказано. □

Используя две линейные алгебры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ над полем $\mathbb{R}$, можно построить стандартным образом их прямую сумму $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$. Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — унитальные алгебры, $\delta_{\mathbb{A}}$, $\delta_{\mathbb{B}}$ — их единицы, соответственно, то $(\delta_{\mathbb{A}}, \delta_{\mathbb{B}})$ являются единицей прямой суммы $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$.

**Предложение 4.** *Если ассоциативная унитальная алгебра* $\mathbb{A}$ *изоморфна прямой сумме* $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ *алгебр* $\mathbb{B} \neq \{0_{\mathbb{B}}\}$, $\mathbb{C} \neq \{0_C\}$*, то каждая из них является ассоциативной и унитальной.*

*Доказательство.* При изоморфном отображении образ ассоциативной алгебры является ассоциативной, поэтому для любых $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{B}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ выполняется условие

$$(b_1, c_1)((b_2, c_2)(b_3, c_3)) = ((b_1, c_1)(b_2, c_2))(b_3, c_3).$$

Отсюда, из определения прямой суммы двух алгебр, следуют равенства

$$b_1(b_2b_3) = (b_1b_2)b_3, \quad c_1(c_2c_3) = (c_1c_2)c_3.$$

Эти соотношения означают ассоциативность алгебр $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$. Образом единицы $\delta_{\mathbb{A}}$ алгебры $\mathbb{A}$ является единица $(\delta_1, \delta_2)$ алгебры $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$. Поэтому для любого элемента $(b, c) \in \mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ имеют место равенства

$$(b, c)(\delta_1, \delta_2) = (b, c), \quad (\delta_1, \delta_2)(b, c) = (b, c).$$

Из этих соотношений получим $b\delta_1 = \delta_1 b = b$ и $c\delta_2 = \delta_2 c = c$; значит, $\delta_1$ — единица алгебры $\mathbb{B}$, $\delta_2$ — единица алгебры $\mathbb{C}$. □

**Определение 2.** Линейная алгебра $\mathbb{A}$, изоморфная прямой сумме $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ алгебр $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$, не сводящихся только к нулевому элементу, называется приводимой. В противном случае алгебра $\mathbb{A}$ называется неприводимой.

**Предложение 5.** *Любая алгебра Вейля является неприводимой алгеброй.*

*Доказательство.* Пусть алгебра Вейля $\mathbb{A}$ — приводимая алгебра и изоморфна $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$, причем $\mathbb{B} \neq \{0_{\mathbb{B}}\}$, $\mathbb{C} \neq \{0_{\mathbb{C}}\}$. Тогда в силу предложения 4 $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ — унитальные ассоциативные алгебры с единицами $\delta_{\mathbb{B}}$ и $\delta_{\mathbb{C}}$ соответственно. В силу нетривиальности алгебры $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ $\delta_{\mathbb{B}} \neq 0_{\mathbb{B}}$ и $\delta_{\mathbb{C}} \neq 0_{\mathbb{C}}$, поэтому элементы $\delta_1 = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})$ и $\delta_2 = (0_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}})$ отличны от единицы $(\delta_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}})$. Кроме того, эти элементы являются идемпотентами алгебры $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$, так как $\delta_1^2 = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})^2 = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}}) = \delta_1$, аналогично $\delta_2^2 = \delta_2$. Прообразы этих элементов при изоморфизме $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ являются идемпотентами алгебры $\mathbb{A}$. Действительно, если $\varphi$ — изоморфизм, то $\varphi^{-1}$ также является изоморфизмом, и тогда

$$(\varphi^{-1}(\delta_i))^2 = \varphi^{-1}(\delta_i)\varphi^{-1}(\delta_i) = \varphi^{-1}(\delta_i^2) = \varphi^{-1}(\delta_i) \quad (i = 1, 2).$$

На основании предложения 1 заключаем, что $\varphi^{-1}(\delta_1)$ равен $0_{\mathbb{A}}$ либо $1_{\mathbb{A}}$. Если $\varphi^{-1}(\delta_1) = 0_{\mathbb{A}}$, то $\delta_1 = (0_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})$, т.е. $\delta_{\mathbb{B}} = 0_{\mathbb{B}}$, чего быть не может.

Если $\varphi^{-1}(\delta_1) = 1_{\mathbb{A}}$, то $\varphi(1_{\mathbb{A}}) = \delta_1$, т.е. $(\delta_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}}) = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})$. Отсюда $\delta_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}}$. Противоречие. Таким образом, алгебра Вейля $\mathbb{A}$ не может быть приводимой. □

**Следствие.** *Прямая сумма двух алгебр Вейля не является алгеброй Вейля.*

**3. Сумма Уитни алгебр Вейля.** В прямой сумме $\mathbb{A}\oplus\mathbb{B}$ алгебр Вейля можно выделить подалгебру, которая является алгеброй Вейля, порожденной алгебрами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$. Опишем способ построения этой подалгебры.

В определении алгебры Вейля есть условие (iii) о существовании изоморфизма $\omega\colon \mathbb{A}/\mathbb{I}\to\mathbb{R}$. Будем обозначать элементы факторалгебры $\mathbb{A}/\mathbb{I}$ символами $\overline{a}$, где $a\in\mathbb{A}$. Тогда $\overline{a}=\overline{b}$ в том и только в том случае, когда $a\equiv b \pmod{\mathbb{I}}$. Определим отображение

$$\pi\colon \mathbb{A}\to\mathbb{R},\quad \pi(a)=\omega(\overline{a}).$$

Оно является эпиморфизмом. Действительно, для любого элемента $a_0\in\mathbb{R}$ имеем

$$\pi(a_0 1)=\omega(\overline{a_0 1})=a_0\omega(\overline{1})=a_0 1=a_0,$$

т.е. $\pi$ — сюръективно. Для любых $a,b\in\mathbb{A}$ и $t\in\mathbb{R}$ выполняются следующие равенства:

$$\pi(a+b)=\omega(\overline{a+b})=\omega(\overline{a}+\overline{b})=\omega(\overline{a})+\omega(\overline{b})=\pi(a)+\pi(b),$$

$$\pi(ta)=\omega(\overline{ta})=\omega(t\overline{a})=t\pi(a),\quad \pi(ab)=\omega(\overline{ab})=\omega(\overline{a}\overline{b})=\pi(a)\pi(b),$$

которые означают, что $\pi$ — гомоморфизм.

**Определение 3.** Эпиморфизм $\pi_{\mathbb{A}}\colon \mathbb{A}\to\mathbb{R}$, определенный условием $\pi_{\mathbb{A}}(a)=\omega_{\mathbb{A}}(\overline{a})$, называется канонической проекцией алгебры Вейля $\mathbb{A}$ на алгебру действительных чисел $\mathbb{R}$.

Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — алгебры Вейля над $\mathbb{R}$, единицы которых отождествлены с единицей поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{A}\oplus\mathbb{B}$ — прямая сумма этих алгебр. Рассмотрим подмножество $\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B}\subset\mathbb{A}\oplus\mathbb{B}$, состоящее из всевозможных пар $(a,b)\in\mathbb{A}\oplus\mathbb{B}$, удовлетворяющих условию $\pi_{\mathbb{A}}(a)=\pi_{\mathbb{B}}(b)$.

**Предложение 6.** *Подмножество $\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B}$, снабженное ограничениями основных операций алгебры $\mathbb{A}\oplus\mathbb{B}$, являются унитальной подалгеброй прямой суммы $\mathbb{A}\oplus\mathbb{B}$.*

*Доказательство.* Пусть $(a,b)\in\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B}$ и $(c,d)\in\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B}$. Тогда

$$\pi_{\mathbb{A}}(a)=\pi_{\mathbb{B}}(b),\ \pi_{\mathbb{A}}(c)=\pi_{\mathbb{B}}(d)\implies \pi_{\mathbb{A}}(a)+\pi_{\mathbb{A}}(c)=\pi_{\mathbb{B}}(b)+\pi_{\mathbb{B}}(d)\implies \pi_{\mathbb{A}}(a+c)=\pi_{\mathbb{B}}(b+d);$$

значит, $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ является элементом $\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B}$. Аналогично,

$$t(a,b)\in\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B}\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

В силу того, что $\pi_{\mathbb{A}}$, $\pi_{\mathbb{B}}$ — гомоморфизмы, получим

$$\pi_{\mathbb{A}}(ac)=\pi_{\mathbb{B}}(bd)\implies (a,b)(c,d)=(ac,bd)\in\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B}.$$

Таким образом, $\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B}$ — подалгебра алгебры $\mathbb{A}\oplus\mathbb{B}$. Далее,

$$\delta=(1,1),\ \pi_{\mathbb{A}}(\delta)=\pi_{\mathbb{B}}(\delta)\implies\delta\in\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B},$$

т.е. алгебра $\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B}$ унитальна. Утверждение доказано. □

**Предложение 7.** *Прямая сумма $\overset{0}{\mathbb{A}}\oplus\overset{0}{\mathbb{B}}$ радикалов $\overset{0}{\mathbb{A}}$, $\overset{0}{\mathbb{B}}$ алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно, является радикалом алгебры $\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B}$.*

*Доказательство.* Пусть $(a,b)$ — нильпотентный элемент алгебры $\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B}$. Тогда существует такое натуральное число $k$, что $(a,b)^k=0$. Отсюда $a^k=0_{\mathbb{A}}$, $b^k=0_{\mathbb{B}}$, т.е. $a$ — нильпотентный элемент алгебры $\mathbb{A}$, $b$ — нильпотентный элемент алгебры $\mathbb{B}$. Значит, $(a,b)\in\overset{0}{\mathbb{A}}\oplus\overset{0}{\mathbb{B}}$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Rd}(\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B})\subset\overset{0}{\mathbb{A}}\oplus\overset{0}{\mathbb{B}}.$$

Обратно, пусть $(x,y)\in\overset{0}{\mathbb{A}}\oplus\overset{0}{\mathbb{B}}$. Тогда $\pi_{\mathbb{A}}(x)=\pi_{\mathbb{B}}(y)=0$ и $(x,y)^{s+1}=(x^{s+1},y^{s+1})=0$, если $s=\max\{p,q\}$, где $p$ — высота алгебры $\mathbb{A}$, $q$ — высота алгебры $\mathbb{B}$. Отсюда следует, что $(x,y)\in\mathrm{Rd}(\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B})$. Таким образом,

$$\mathrm{Rd}(\mathbb{A}\oplus_W\mathbb{B})=\overset{0}{\mathbb{A}}\oplus\overset{0}{\mathbb{B}}.$$

□

**Предложение 8.** *Алгебра* $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ *является алгеброй Вейля.*

*Доказательство.* Проверим выполнимость условий (i)—(iii) определения 1. Условие (i) выполняется, поскольку $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ является подалгеброй алгебры $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$, которая коммутативна и ассоциативна. Единицей алгебры $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ является пара $(1,1)$ — единица алгебры $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$.

Для проверки выполнимости условия (ii) положим $s = \max\{p, q\}$, где $p$ — высота алгебры $\mathbb{A}$, $q$ — высота алгебры $\mathbb{B}$. Тогда

$$(\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}})^s \neq \{0\}, \quad (\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}})^{s+1} = \{0\}.$$

Алгебра $\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$ является идеалом алгебры $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$.

Рассмотрим факторалгебру $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}/\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$. Если

$$(a,b) \equiv (c,d) \pmod{\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}},$$

то

$$a \equiv c \pmod{\overset{0}{\mathbb{A}}}, \quad b \equiv d \pmod{\overset{0}{\mathbb{B}}}.$$

Верно и обратное утверждение. Из последних двух сравнений следует, что

$$\pi_{\mathbb{A}}(a) = \pi_{\mathbb{A}}(c), \quad \pi_{\mathbb{B}}(b) = \pi_{\mathbb{B}}(d).$$

Ввиду того, что

$$(a,b) \in \mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}, \quad (c,d) \in \mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B},$$

получаем, что

$$\pi_{\mathbb{A}}(a) = \pi_{\mathbb{B}}(b), \quad \pi_{\mathbb{A}}(c) = \pi_{\mathbb{B}}(d).$$

Следовательно,

$$\pi_{\mathbb{A}}(a) = \pi_{\mathbb{A}}(c) = \pi_{\mathbb{B}}(b) = \pi_{\mathbb{B}}(d) = a_0.$$

Отсюда

$$(a,b) = (a_0, b_0) + (a_1, b_1), \quad \text{где} \quad a_1 \in \overset{0}{\mathbb{A}}, \quad b_1 \in \overset{0}{\mathbb{B}}.$$

Это означает, что

$$(a,b) \equiv a_0(1,1) \pmod{\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}}.$$

Таким образом, элементами факторалгебры $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}/\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$ являются классы $\overline{(a,b)} = a_0\overline{(1,1)}$.

Рассмотрим отображение

$$\psi\colon \mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}/\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}} \to \mathbb{R}, \quad \psi(\overline{(a,b)}) = \pi_{\mathbb{A}}(a)\overline{(1,1)}.$$

Покажем, что $\psi$ — изоморфизм. Для любых $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$ выполняются равенства

$$\psi(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}) = \psi(\overline{(a+c, b+d)}) = \pi_{\mathbb{A}}(a+c)\overline{(1,1)} = \\ = \pi_{\mathbb{A}}(a)\overline{(1,1)} + \pi_{\mathbb{A}}(c)\overline{(1,1)} = \psi(\overline{(a,b)}) + \psi(\overline{(c,d)}).$$

Если $t \in \mathbb{R}$, то

$$\psi(t\overline{(a,b)}) = \psi(\overline{(ta,tb)}) = \pi_{\mathbb{A}}(ta)\overline{(1,1)} = t\psi(\overline{(a,b)}).$$

Далее,

$$\psi(\overline{(a,b)(c,d)}) = \psi(\overline{(ac,bd)}) = \pi_{\mathbb{A}}(ac)\overline{(1,1)} = \pi_{\mathbb{A}}(a)\pi_{\mathbb{A}}(b)\overline{(1,1)} = \\ = (\pi_{\mathbb{A}}(a)\overline{(1,1)})(\pi_{\mathbb{A}}(c)\overline{(1,1)}) = \psi(\overline{(a,b)})\psi(\overline{(c,d)}).$$

Полученные соотношения означают, что $\psi$ — гомоморфизм. Покажем, что $\operatorname{Ker}\ \psi = \{0\}$. Действительно, если $\psi(\overline{(x,y)}) = 0_{\mathbb{R}}$, то $\pi_{\mathbb{A}}(x) = 0_{\mathbb{R}}$, так как $\overline{(1,1)} = 1_{\mathbb{R}}$; поэтому $x \in \overset{0}{\mathbb{A}}$, $y \in \overset{0}{\mathbb{B}}$. Отсюда следует, что $\overline{(x,y)}$ — нулевой элемент факторалгебры $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}/\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$. Сюръективность гомоморфизма $\psi$ вытекает из того, что для любого $a_0 \in \mathbb{R}$, $\psi(\overline{(a_0, a_0)}) = a_0\overline{(1,1)} = a_0$. Таким образом, $\psi$ — изоморфизм. Условие (iii) определения 1 также выполнено. □

Доказанное предложение позволяет ввести следующее понятие.

**Определение 4.** Алгебра Вейля $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ называется суммой Уитни алгебр Вейля $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$.

Из рассмотренного выше следует, что сумма Уитни $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ алгебр Вейля $\mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus \overset{0}{\mathbb{A}}$, $\mathbb{B} = \mathbb{R} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$ изоморфна алгебре Вейля с радикалом $\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$:

$$\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B} \cong \mathbb{R} + (\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}).$$

**Замечание.** Алгебра $\mathbb{R} + (\overset{\circ}{\mathbb{A}} + \overset{\circ}{\mathbb{B}})$ была введена В. В. Шурыгиным в [12].

**Замечание.** Сумма Уитни конечного числа алгебр Вейля $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_k$ можно ввести индуктивным образом:

$$\mathbb{A}_1 \oplus_W \mathbb{A}_2 \oplus_W \ldots \oplus_W \mathbb{A}_k = \mathbb{A}_1 \oplus_W (\mathbb{A}_2 \oplus_W \ldots \oplus_W \mathbb{A}_k).$$

Радикал этой алгебры представляет собой прямую сумму радикалов слагаемых, т.е.

$$\mathbb{A}_1 \oplus_W \mathbb{A}_2 \oplus_W \ldots \oplus_W \mathbb{A}_k \cong \mathbb{R} + (\overset{\circ}{\mathbb{A}}_1 \oplus \overset{\circ}{\mathbb{A}}_2 \oplus \overset{\circ}{\mathbb{A}}_k).$$

Введенная операция обладает следующим свойством: она не сохраняет свойство фробениусовости.

**Определение 5.** Унитальная ассоциативная алгебра $\mathbb{A}$ конечного ранга над полем $\mathbb{R}$ называется фробениусовой, если существует невырожденная билинейная форма $q$ на $\mathbb{A}$ со значениями в $\mathbb{R}$ такая, что $q(a, bc) = q(ab, c)$ для любых $a, b, c \in \mathbb{A}$.

Выясним, как определить все билинейные формы $q$, удовлетворяющие условию ассоциативности $q(ab, c) = q(a, bc)$. Пусть $q$ — такая билинейная форма. Положив $q(\delta, y) = q^l(y)$, получим линейную форму $q^l \in \mathbb{A}$. Тогда

$$q(x, y) = q(x \cdot \delta, y) = q(\delta, xy) = q^l(xy).$$

Таким образом,

$$q(x, y) = q^l(xy).$$

Отсюда следует, что если алгебра $\mathbb{A}$ — коммутативна, то билинейная форма $q$ является симметрической.

Обратно, пусть $a^*$ — произвольная линейная форма из $\mathbb{A}^*$. Зададим форму

$$p \colon \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}, \quad p(x, y) = a^*(x \cdot y), \quad x, y \in \mathbb{A}.$$

Прямые вычисления показывают, что $p$ — билинейная форма. Кроме того, выполняются условия ассоциативности

$$p(xy, z) = a^*((xy)z).$$

Так как алгебра $\mathbb{A}$ ассоциативна, то $(xy)z = x(yz)$. Поэтому

$$p(xy, z) = a^*((xy)z) = a^*(x(yz)) = p(x, yz)$$

для любых $x, y, z \in \mathbb{A}$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Билинейная форма $q$ удовлетворяет условию ассоциативности тогда и только тогда, когда существует линейная форма $a^* \in \mathbb{A}$ такая, что $q(x, y) = a^*(xy)$.*

Фробениусовы алгебры Вейля существуют. Для доказательства этого утверждения возьмем линейные алгебры
$$\mathbb{R}(\varepsilon^m) = \{a_0\varepsilon^0 + a_1\varepsilon^1 + \ldots + a_m\varepsilon^m \mid \varepsilon^{m+1} = \theta\}$$
с базисом $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m$, где $\varepsilon^0 = 1$ — единица алгебры, а операция умножения подчиняется условию
$$\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta = \varepsilon^{\alpha+\beta},$$
$\theta$ — фиксированное число, равное $-1$, 0, 1. Если $\theta = -1$, то алгебра $\mathbb{R}(\varepsilon^m)$ называется алгеброй антициклических чисел, при $\theta = 0$ — алгеброй плюральных чисел, а при $\theta = 1$ — алгеброй циклических чисел. Для каждой линейной формы $a^* \in \mathbb{A}$ определим билинейную форму $q$, удовлетворяющую условию ассоциативности равенством $q(x, y) = a^*(x)y$. Составим матрицу $Q$ билинейной формы $q$ относительно базиса $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m$. Элементами этой матрицы будут числа $q^{\alpha\beta} = q(\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta)$. В силу условия $\varepsilon^{m+1} = \theta$ получим
$$q^{\alpha\beta} = a^*(\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta) = a^*(\varepsilon^{\alpha+\beta}) = \theta^s a^*(\varepsilon^r) = \theta^s a^r.$$
Здесь $s = l\left[\dfrac{\alpha+\beta}{m+1}\right]$ — целая часть дроби $\dfrac{\alpha+\beta}{m+1}$, $r = \operatorname{rest}(\alpha+\beta, m+1)$ — остаток от деления натурального числа $\alpha+\beta$ на $m+1$. По определению считается, что $0^0 = 1$. Такое соглашение принято в теории рекурсивных функций.

Используя введенные функции, находим элементы матрицы $Q$. Элементы ее первой строки будут следующими:
$$\begin{gathered}
q^{00} = q(\varepsilon^0, \varepsilon^0) = \theta^0 a^*(\varepsilon^0) = a^0, \\
q^{01} = q(\varepsilon^0, \varepsilon^1) = \theta^0 a^*(\varepsilon^1) = a^1, \ldots, \\
q^{0m} = q(\varepsilon^0, \varepsilon^m) = \theta^0 a^*(\varepsilon^m) = a^m.
\end{gathered}$$
Аналогично вычисляются элементы остальных строк. Матрица $Q$ имеет вид
$$Q = \begin{pmatrix}
a^0 & a^1 & \ldots & a^{m-1} & a^m \\
a^1 & a^2 & \ldots & a^m & \theta a^0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a^{m-1} & a^m & \ldots & \theta a^{m-3} & \theta a^{m-2} \\
a^m & \theta a^0 & \ldots & \theta a^{m-2} & \theta a^{m-1}
\end{pmatrix}.$$
Получили матрицу произвольной билинейной формы $q$, удовлетворяющей условию ассоциативности. Во множестве этих матриц легко выделить самую простую невырожденную матрицу, положив $a^0 = a^1 = \ldots = a^{m-1} = 0$, $a^m = 1$:
$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1 & 0 & \ldots & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$
Отсюда следует, что рассматриваемые алгебры являются фробениусовыми. Частными случаями являются: при $\theta = -1$ — алгебра комплексных чисел
$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\};$$
при $\theta = 0$ — алгебра дуальных чисел
$$\mathbb{R}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{R},\ \varepsilon^2 = 0\};$$
при $\theta = 1$ — алгебра двойных чисел
$$\mathbb{R}(e) = \{a + be \mid a, b \in \mathbb{R},\ e^2 = 1\}.$$
Фробениусовые билинейные формы этих алгебр могут быть заданы матрицей
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выясним, как ведет себя сумма Уитни фробениусовых алгебр.

**Предложение 9.** *Сумма Уитни любого конечного числа фробениусовых алгебр Вейля не является фробениусовой.*

*Доказательство.* Докажем утверждение для суммы Уитни двух фробениусовых алгебр Вейля. Пусть $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ — фробениусовы алгебры Вейля, $\mathbb{C} = \mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ — их сумма Уитни. Выберем базис в $\mathbb{C}$ следующим образом: $\varepsilon^0 = \delta_{\mathbb{C}}$, $\varepsilon^\alpha$, $e^\beta$, подчиненный цепочке вложенных идеалов $\mathbb{I}_1 \supset \mathbb{I}_1^2 \supset \ldots \supset \mathbb{I}_1^{p_1}$, где $(\varepsilon^\alpha)$ — базис идеала $\mathbb{I}_1 \cong \overset{0}{\mathbb{A}}$, $(e^\beta)$, базис идеала $\mathbb{I}_2 \cong \overset{0}{\mathbb{B}}$, подчиненный цепочке $\mathbb{I}_2 \supset \mathbb{I}_2^2 \supset \ldots \supset \mathbb{I}_2^{p_2}$, где $p_1$ — высота алгебры $\mathbb{A}$, $p_2$ — высота алгебры $\mathbb{B}$. Обозначим через $q$ произвольную билинейную форму, удовлетворяющую условию $q(a, bc) = q(ab, c)$ для любых $a, b, c \in \mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$.

Для базисных элементов $\varepsilon^{\alpha_1} \in \mathbb{I}_1^p$, $e^{\beta_1} \in \mathbb{I}_2^q$ найдем значения

$$q(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^0) = q^{\alpha_1 0}, \quad q(e^{\beta_1}, \varepsilon^0) = \widetilde{q}^{\beta_1 0};$$

$$q(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2}) = q^{\alpha_1\alpha_2}, \quad \alpha_2 \neq 0; \qquad q(e^{\beta_1}, \varepsilon^{\beta_2}) = \widetilde{q}^{\beta_1\beta_2}, \quad \beta_2 \neq 0;$$

$$q(\varepsilon^{\alpha_1}, e^{\beta_2}) = q^{\alpha_1\beta_2}, \quad \beta_2 \neq 0; \qquad q(e^{\beta_1}, \varepsilon^{\alpha_2}) = \widetilde{q}^{\beta_1\alpha_2}, \quad \alpha_2 \neq 0.$$

Так как $\varepsilon^{\alpha_2}\varepsilon^0 = \varepsilon^0\varepsilon^{\alpha_2} = \varepsilon^{\alpha_2}$, то

$$q^{\alpha_1\alpha_2} = q(\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^0\varepsilon^{\alpha_2}) = q(\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}, \varepsilon^0) = q(0, \varepsilon^0) = 0.$$

Здесь $\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2} \in \mathbb{I}^{p+1}$, поэтому $\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2} = 0$. Далее,

$$q^{\alpha_1\beta_2} = q(\varepsilon^{\alpha_1}, e^{\beta_2}\varepsilon^0) = q(\varepsilon^{\alpha_1}e^{\beta_2}, \varepsilon^0) = q(0, \varepsilon^0) = 0.$$

Таким образом, матрица билинейной формы $q$ имеет строку $(q^{\alpha_1 0}, 0, \ldots, 0)$. Аналогично устанавливается наличие строки $(\widetilde{q}^{\beta_1 0}, 0, \ldots, 0)$. Отсюда следует вырожденность билинейной формы $q$. Утверждение доказано. ☐

Доказательство утверждения для произвольного числа алгебр Вейля аналогично.

Имея фробениусовы алгебры, можно построить новые фробениусовы алгебры, основываясь на следующих теоремах.

**Теорема 3** (см. [3]). *Тензорное произведение фробениусовых алгебр является фробениусовой алгеброй.*

**Теорема 4** (см. [14]). *Тензорное произведение алгебр Вейля над полем $\mathbb{R}$ является алгеброй Вейля.*

**4. Гипотеза В. В. Вишневского.** В. В. Вишневский выдвинул следующее предположение (см. [1]): из всех локальных алгебр $\mathbb{A}$ только алгебра плюральных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^m)$ относится к классу фробениусовых алгебр; остальные алгебры, имеющие ширину больше 1, не являются фробениусовыми. Эта гипотеза не имеет места в силу приведенных теорем. Действительно, выше было отмечено, что алгебра дуальных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon)$ является фробениусовой. Тензорное произведение $\mathbb{R}(\varepsilon) \otimes \mathbb{R}(\varepsilon)$ этих алгебр является фробениусовой алгеброй Вейля (которая локальна), а ширина алгебры $\mathbb{R}(\varepsilon) \otimes \mathbb{R}(\varepsilon)$ равна 2.

Более того, теоремы 3 и 4 позволяют доказать следующее утверждение.

**Предложение 10.** *Пусть $\mathbb{A}$ — фробениусова алгебра Вейля ширины $m_{\mathbb{A}}$ и высоты $p_{\mathbb{A}}$, $\mathbb{B}$ — фробениусова алгебра Вейля ширины $m_{\mathbb{B}}$, высоты $p_{\mathbb{B}}$. Тогда тензорное произведение $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ — фробениусова алгебра Вейля ширины $m_{\mathbb{A}} + m_{\mathbb{B}}$ и высоты $p_{\mathbb{A}} + p_{\mathbb{B}}$.*

*Доказательство.* Фробениусовость и вейлевость алгебры $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ следует из приведенных выше теорем. Пусть $\delta_{\mathbb{A}}$, $\delta_{\mathbb{B}}$ — главные единицы этих алгебр, $\mathbb{I}$ — радикал алгебры $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ и $\varepsilon^\alpha_{\mathbb{A}}$, $\varepsilon^\beta_{\mathbb{B}}$ — базисные элементы радикалов $\overset{0}{\mathbb{A}}$ и $\overset{0}{\mathbb{B}}$, соответственно, причем будем считать, что они подчинены композиционным рядам

$$\overset{0}{\mathbb{A}} \supset \overset{0}{\mathbb{A}}{}^2 \supset \ldots \supset \overset{0}{\mathbb{A}}{}^{p_{\mathbb{A}}}, \quad \overset{0}{\mathbb{B}} \supset \overset{0}{\mathbb{B}}{}^2 \supset \ldots \supset \overset{0}{\mathbb{B}}{}^{p_{\mathbb{B}}}.$$

В качестве базисных элементов тензорного произведения можно взять всевозможные тензорные произведения

$$\delta_{\mathbb{A}} \otimes \delta_{\mathbb{B}}, \quad \delta_{\mathbb{A}} \otimes e^{\beta}_{\mathbb{B}}, \quad \varepsilon^{\alpha}_{\mathbb{A}} \otimes \delta_{\mathbb{B}}, \quad \varepsilon^{\alpha}_{\mathbb{A}} \otimes \varepsilon^{\beta}_{\mathbb{B}}.$$

Тогда, выбрав псевдобазис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m_{\mathbb{A}}}$ в $\overset{0}{\mathbb{A}}$ и псевдобазис $e_1, e_2, \ldots, e_{m_{\mathbb{B}}}$ в $\overset{0}{\mathbb{B}}$, можно построить псевдобазис радикала $\mathbb{I}$ алгебры $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ следующим образом:

$$\delta_{\mathbb{A}} \otimes e_1,\ \delta_{\mathbb{A}} \otimes e_2,\ \ldots,\ \delta_{\mathbb{A}} \otimes e_{m_{\mathbb{B}}},\ \varepsilon_1 \otimes \delta_{\mathbb{B}},\ \varepsilon_2 \otimes \delta_{\mathbb{B}},\ \ldots,\ \varepsilon_{m_{\mathbb{A}}} \otimes \delta_{\mathbb{B}}. \tag{5}$$

Каждый базисный элемент радикала тензорного произведения $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ является произведением конечного числа элементов системы (5). Число элементов в системе (5) равно ширине алгебры $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$. Легко заметить, что существует отличный от нуля элемент в $\mathbb{I}^{p_{\mathbb{A}}+p_{\mathbb{B}}}$, а $\mathbb{I}^{p_{\mathbb{A}}+p_{\mathbb{B}}+1} = \{0\}$. Следовательно, высота алгебры $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ равна $p_{\mathbb{A}} + p_{\mathbb{B}}$. □

Из доказанного предложения вытекает следующий факт.

**Предложение 11.** *Для любых натуральных чисел $m$ и $p$, удовлетворяющих условию $m \leqslant p$, существует фробениусова алгебра Вейля ширины $m$ и высоты $p$.*

*Доказательство.* При $m = p$ рассмотрим тензорное произведение $\bigotimes\limits_{i=1}^{m} \mathbb{R}(\varepsilon_i)$ $m$ экземпляров алгебры $\mathbb{R}(\varepsilon)$. Методом математической индукции покажем, что ширина этой алгебры равна высоте и равна $m$. При $m = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для тензорных произведений $m$ алгебр дуальных чисел. Рассмотрим тензорное произведение

$$\bigotimes_{i=1}^{m+1} \mathbb{R}(\varepsilon_i) \cong \bigotimes_{i=1}^{m} \mathbb{R}(\varepsilon_i) \otimes \mathbb{R}(\varepsilon_{m+1}).$$

Псевдобазис радикала алгебры $\bigotimes\limits_{i=1}^{m} \mathbb{R}(\varepsilon_i)$ составляют произведения

$$1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \varepsilon_m,\ 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes \varepsilon_{m-1} \otimes 1,\ \ldots,\ \varepsilon_1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1. \tag{6}$$

Псевдобазис радикала алгебры $\bigotimes\limits_{i=1}^{m} \mathbb{R}(\varepsilon_i) \otimes \mathbb{R}(\varepsilon_{m+1})$ получим, умножив тензорно элементы системы (6) на единицу алгебры $\mathbb{R}(\varepsilon_{m+1})$ и единицу $1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1$ алгебры $\bigotimes\limits_{i=1}^{m} \mathbb{R}(\varepsilon_i)$ на $\varepsilon_{m+1}$:

$$1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \varepsilon_m \otimes 1,\ 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes \varepsilon_{m-1} \otimes 1 \otimes 1,\ \ldots,\ \varepsilon_1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes 1,\ 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \varepsilon_{m+1}. \tag{7}$$

Высота алгебры $\bigotimes\limits_{i=1}^{m} \mathbb{R}(\varepsilon_i)$ равна $m+1$, поскольку произведение всех элементов псевдобазиса (7) равно $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 \otimes \ldots \otimes \varepsilon_{m+1} \neq 0$, а произведение любых $m+2$ элементов из системы (7) равно нулю.

Если $m < p$, то рассмотрим тензорное произведение

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \mathbb{R}(\varepsilon_i)\right) \otimes \mathbb{R}(\varepsilon^{p-m+1}),$$

где $\mathbb{R}(\varepsilon_i)$ — алгебры дуальных чисел, а $\mathbb{R}(\varepsilon^{p-m+1})$ — алгебра плюральных чисел высоты $p-m+1$. Тогда по доказанному предложению 9 ширина построенной алгебры будет равна $m - 1 + 1 = m$, а высота равна

$$m - 1 + p - m + 1 = p.$$ □

Используя приведенные в этом параграфе свойства алгебр Вейля приведем классификацию алгебр Вейля размерностей $m \leqslant 4$.

Из определения алгебры Вейля следует, что $\dim\ \mathbb{A} \geqslant 2$ для каждой алгебры Вейля $\mathbb{A}$.

**Предложение 12.**

1. *Если* $\dim\ \mathbb{A} = 2$, *то алгебра Вейля* $\mathbb{A}$ *изоморфна алгебре дуальных чисел*

$$\mathbb{R}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{R},\ \varepsilon^2 = 0\}.$$

2. *Если* $\dim\ \mathbb{A} = 3$, *то* $\mathbb{A}$ *изоморфна одной из следующих алгебр*:
   (2i) *алгебре плюральных чисел*
   $$\mathbb{R}(\varepsilon^2) = \{a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R},\ \varepsilon^3 = 0\};$$
   (2ii) *сумме Уитни* $\mathbb{R}(\varepsilon_1) \oplus_W \mathbb{R}(\varepsilon_2)$ *алгебр дуальных чисел.*
3. *Если* $\dim\ \mathbb{A} = 4$, *то* $\mathbb{A}$ *изоморфна одной из следующих пяти алгебр Вейля*:
   (3i) *алгебре плюральных чисел*
   $$\mathbb{R}(\varepsilon^3) = \{a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \varepsilon^4 = 0\};$$
   (3ii) *сумме Уитни* $\mathbb{R}(\varepsilon_1) \oplus_W \mathbb{R}(\varepsilon_2^2)$ *алгебры* $\mathbb{R}(\varepsilon_1)$ *дуальных чисел и алгебры плюральных чисел* $\mathbb{R}(\varepsilon_2^2)$;
   (3iii) *сумме Уитни* $\bigoplus\limits_{i=1_W}^{3} \mathbb{R}(\varepsilon_i)$ *алгебр дуальных чисел*;
   (3iv) *алгебре Вейля* $\mathbb{A}$ *ширины* 2 *и высоты* 2 *с псевдобазисом* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$; *базис алгебры* $\mathbb{A}$ *составляют элементы* $1$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_1^2$. *Определяющие соотношения алгебры* $\mathbb{A}$:
   $$\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_2^2 = q\varepsilon_1^2, \quad q = \pm 1.$$

*Доказательство.* Доказательство опирается на классификацию неприводимых ассоциативных унитальных алгебр (см. [2]). Поскольку всякая алгебра Вейля ассоциативна, неприводима и унитальна, то из рассматриваемой классификации выделим алгебры Вейля. □

Из предложения 12 следует, что каждая алгебра Вейля размерности 2 или 3 является свободной. Среди алгебр Вейля, размерности которых больше трех, возможны как свободные, так и несвободные алгебры.

Среди алгебр Вейля размерности 4 алгебры (3i) и (3iii) — свободные, а алгебры (3ii), (3iv) — несвободные. Определяющим соотношением алгебры (3ii) является соотношение $\varepsilon_1^2 = 0$.

**5. Расслоения Вейля.** Расслоение Вейля строится при помощи гладкого многообразия $M$ и алгебры Вейля. Опишем вкратце, как определяется расслоение Вейля. Пусть $M$ — гладкое класса $C^\infty$ связное $n$-мерное многообразие, $C^\infty(M)$ — алгебра гладких класса $C^\infty$ функций, заданных на $M$. Обозначим через $M_q^{\mathbb{A}}$ множество всевозможных гомоморфизмов $j_q\colon C^\infty(M) \to A$, где $q \in M$, удовлетворяющих условию $j_q(f) = f(q) \pmod{\mathbb{I}}$. Обозначим через $M^{\mathbb{A}}$ множество $\bigcup\limits_{q\in M} M_q^{\mathbb{A}}$. Отображение
$$\pi\colon M^A \to M, \quad \pi(j_q) = q,$$
называется канонической проекцией, а тройка $(M^A, \pi, M)$ — расслоением Вейля. Множество $M^{\mathbb{A}}$ естественным образом можно наделить структурой гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ и гладкой структурой над $\mathbb{R}$. Построение продолжений тензорных полей и линейных связностей в основе своей имеют продолжение функций $f \in C^\infty(M)$ в $C^\infty(M^{\mathbb{A}})$.

Для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом функции $f$ в $M^{\mathbb{A}}$, а функция $f^{\mathbb{A}}$, определенная условием $f^{\mathbb{A}}(j_q) = j_q(f)$ для каждого гомоморфизма $j_q$, называется естественным продолжением функции $f$ в расслоение Вейля $M^{\mathbb{A}}$. Функция $f^{\mathbb{A}}$ принимает свои значения в алгебре $\mathbb{A}$. Эти функции были построены А. Вейлем.

Для построения вещественнозначных лифтов функции из $C^\infty(M)$ нам потребуется векторное пространство $A^*$ линейных форм, заданных на $\mathbb{A}$, со значениями в поле $\mathbb{R}$. На этом векторном пространстве определим дополнительно внешнюю операцию умножения на элементы алгебры $\mathbb{A}$ следующим образом: произведением линейной формы $a^* \in A^*$ и элемента $b \in A$ будем называть линейную форму $a^* \cdot b$, определенную условием $a^* \cdot b(c) = a^*(bc)$ для любого элемента $c \in \mathbb{A}$. Тогда $A^*$, снабженное естественной операцией сложения и введенной внешней операцией умножения на элементы алгебры $\mathbb{A}$, будет $\mathbb{A}$-модулем. Этим модулем мы будем пользоваться при построении вещественнозначных продолжений функций с $M$ в $\mathbb{M}^{\mathbb{A}}$. Пусть $a^* \in \mathbb{A}$. $(a^*)$-лифтом функции

$f \in C^\infty(M)$ в расслоение Вейля $M^{\mathbb{A}}$ называется функция $f_{(a^*)}$, принимающая значения в $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $f_(a^*) = a^* \circ f^{\mathbb{A}}$. Ясно, что

$$f_{(\lambda a^* + \mu b^*)} = \lambda f_{(a^*)} + \mu f_{(b^*)}, \quad (f+g)_{(a^*)} = f_{(a^*)} + g_{(a^*)}, \quad (\lambda f)_{(a^*)} = \lambda f_{(a^*)}$$

для всех $f, g \in C^\infty(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{M}$. Имеет место тождество

$$(fg)_{(a^*)} = f_{(a^* \cdot e^\alpha)} g_{(e_\alpha)},$$

где $(e^\alpha)$ — базис алгебры $\mathbb{A}$, $(e_\alpha)$ — базис векторного пространства $\mathbb{A}*$, дуальный базису $(e^\alpha)$.

Пусть $X$ — гладкое векторное поле на $M$, $a \in \mathbb{A}$ — произвольный элемент алгебры $\mathbb{A}$. На тотальном многообразии $\mathbb{M}^{\mathbb{A}}$ расслоения Вейля существует единственное векторное поле $X^{(a)}$, удовлетворяющее условию

$$X^{(a)} f_{(b*)} = (Xf)_{(b* \cdot a)}$$

для любой функции $f \in C^\infty(M)$.

Векторное поле $X^{(a)}$ называется $(a)$-лифтом векторного поля $X$. Предположим, что $K$ — тензорное поле типа $(1, r)$ на $M$. Тогда на $M^{\mathbb{A}}$ существует единственное тензорное поле $K^{(a)}(a \in \mathbb{A})$, которое удовлетворяет тождеству

$$K^{(a)}(X_1^{(b_1)}, \ldots, X_r^{(b_r)}) = (K(X_1, X_2, \ldots, X_r))^{(ab_1 \ldots b_r)}$$

для любых векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_r$ на $M$ и любых $b_1, b_2, \ldots, b_r \in \mathbb{A}$.

Если $\omega$ — $r$-форма на $M_n$, $b* \in A*$, то на $M_n^{\mathbb{A}}$ существует единственная $r$-форма $\omega_{(b*)}$, удовлетворяющая условию

$$\omega_{(b*)}(X_1^{(b_1)}, \ldots, X_r^{(b_r)}) = (\omega(X_1, \ldots, X_r))_{(b* \cdot (b_1, \ldots, b_r))}.$$

Известные лифты тензорных полей в теории касательных расслоений, суммы Уитни $T(M) \oplus_W T(M)$, получаются по указанному правилу. Здесь в качестве алгебры Вейля выступают алгебра плюральных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^r)$ и сумма Уитни $\mathbb{R}(\varepsilon) \oplus_W \mathbb{R}(\varepsilon)$ двух экземпляров алгебры дуальных чисел, соответственно. Лифты $l$-формы, заданной равенством $\omega = \omega_i dx^i$, соответствующие базисным линейным формам $e_0$, $e_1$, $e_2$, которые образуют базис, дуальный базису $e^0 = 1$, $e^1$, $e^2$ алгебры $\mathbb{R}(\varepsilon) \oplus_W \mathbb{R}(\varepsilon)$, имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega_{(0)} &= (\omega_i)_{(0)} dx_0^i, \\
\omega_{(1)} &= (\partial_j \omega_i)_{(0)} x_1^j dx_0^i + (\omega_i)_{(0)} dx_1^i, \\
\omega_{(2)} &= (\partial_j \omega_i)_{(0)} x_2^j dx_0^i + (\omega_i)_{(0)} dx_2^i.
\end{aligned}$$

В заключение укажем способ получения линейной связности в расслоение Вейля $M^{\mathbb{A}}$, исходя из линейной связности $\nabla = \Gamma_0$ тензорных полей $\Gamma_\lambda$ типа $(1,2)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \dim \mathbb{I})$, заданных на базе расслоения $M$. Имеет место следующий факт: на расслоении $M^{\mathbb{A}}$ существует единственная линейная связность $\nabla^{Sh}$, удовлетворяющая условию

$$\nabla^{Sh}_{X^{(a)}} Y^b = (\Gamma_\alpha(X, Y))^{(e^\alpha ab)}$$

для всех $a, b \in \mathbb{A}$ и векторных полей $X$, $Y$, заданных на $M$.

В [5] отмечаются некоторые свойства этих связностей и приводятся оценки сверху размерностей алгебр Ли аффинных векторных полей на расслоениях Вейля, снабженных связностями А. П. Широкова.

Известно, что касательное расслоение $T(M)$ представляет собой расслоение Вейля над алгеброй дуальных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon)$. В [9] получены оценки сверху размерностей алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов в касательных расслоениях со связностью полного лифта в случае, когда связность в базовом пространстве является непроективно-евклидовой, а тензор кривизны связности удовлетворяет специальному условию.

В [10] исследуются условия интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта над пространствами общей несимметрической связности. Получена система условий интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований в исследуемом пространстве.

Касательное расслоение порядка $m-1$ ($m \geqslant 2$) представляет собой расслоение Вейля над гладким класса $C^\infty$ многообразием $M$, возникающим при помощи алгебры $\mathbb{A} = \mathbb{R}(\varepsilon^{m-1})$ плюральных чисел размерности $m$. В [7] доказано, что максимальная размерность алгебр Ли на касательных расслоениях $T^{m-1}(M)$ ($m \geqslant 2$) гладкого многообразия $M$ ($\dim M \geqslant 2$), снабженных синектическими связностями А. П. Широкова, равна точно $(mn-1)^2+4$, где $n$ — размерность многообразия $M$.

В [6] изучаются свойства тензорных полей кручения и кривизны вещественных реализаций линейных связностей, заданных на гладком многообразии $M$ над алгеброй $\mathbb{A}$, в частности, над алгеброй Вейля. На основании этих свойств дается оценка сверху вещественных алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований вещественных реализаций $\mathbb{A}$-гладких линейных связностей на $M$.

В [8] получены необходимые и достаточные условия того, чтобы горизонтальный лифт линейной связности на расслоении дважды ковариантных тензоров являлся полусимметрической связностью.

В [11] исследуются максимальные размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта над пространствами полусимметрической связности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В. В.* Интегрируемые аффинные структуры и их плюральные интерпретации// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2002. — *73.* — С. 5–64.
2. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Пространства над алгебрами. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985.
3. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.
4. *Султанов А. Я.* О лифтах в расслоения Вейля// Тез. Междунар. конф. «Дни геометрии в Новосибирске» (Новосибирск, 28-31 августа 2013 г.). — Новосибирск: Ин-т мат. им. С. Л. Соболева СО РАН, 2013. — С. 87–88.
5. *Султанов А. Я.* Расслоения Вейля с синектическими связностями и оценки размерностей их алгебр Ли аффинных векторных полей// Тез. Междунар. конф. «Дни геометрии в Новосибирске», посв. 85-летию акад. Ю. Г. Решетняка (Новосибирск, 24-27 сентября 2014 г.). — Новосибирск: Ин-т мат. им. С. Л. Соболева СО РАН, 2014. — С. 68–69.
6. *Султанов А. Я.* Некоторые свойства вещественных реализаций линейных связностей над алгебрами// Тр. Междунар. конф. «Классическая и современная геометрия», посв. 100-летию со дня рожд. В. Т. Базылева (Москва, 22-25 апреля 2019 г.). — М., 2019. — С. 140–141.
7. *Султанов А. Я.* О максимальной размерности алгебр Ли аффинных векторных полей вещественных реализаций голоморфных линейных связностей на касательных расслоениях произвольного порядка// Мат. науч. конф. «Современная геометрия и ее приложения» (Казань, 4-7 сентября 2019 г.). — Казань, 2019. — С. 147–149.
8. *Султанов А. Я., Монахова О. А.* О полусимметрических горизонтальных лифтах линейных связностей с базы в расслоение дважды ковариантных тензоров// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *180.* — С. 96–102.
9. *Султанова Г. А.* Об оценке размерностей алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов касательных расслоений со связностью полного лифта над непроективно-евклидовой связностью// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2016. — № 47. — С. 146–153.
10. *Султанова Г. А.* Об условиях интегрируемости уравнений инфинитезимальных преобразований касательных расслоений с несимметрической связностью полного лифта// Мат. науч. конф. «Современная геометрия и ее приложения» (Казань, 4-7 сентября 2019 г.). — Казань, 2019. — С. 151–155.
11. *Султанова Г. А.* Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *180.* — С. 103–108.

12. *Шурыгин В. В.* Расслоения струй как многообразия над алгебрами// Итоги науки техн. Пробл. геом. — 1987. — *19.* — С. 3–22.
13. *Шурыгин В. В.* Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2 (290). — С. 75–106.
14. *Morimoto A.* Liftings of some types of tensor fields and connections to tangent bundles of $p^v$-velocities// Nagoya Math. J. — 1970. — *40.* — P. 13–31.
15. *Weil A.* Theorie des points proches sur les varietetes differentiables// Colloq. Int. Centre Nat. Rech. Sci. — 1953. — *52.* — P. 111–117.

Султанов Адгам Яхиевич
Пензенский государственный университет
E-mail: sultanovaya@rambler.ru

Султанова Галия Алиевна
Филиал Военной Академии материально-технического обеспечения
им. генерала армии А. В. Хрулева, Пенза
E-mail: sultgaliya@yandex.ru

Монахова Оксана Александровна
Пензенский государственный университет
E-mail: oxmonakh@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 203 (2021). С. 130–138
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-203-130-138

УДК 514.76

# СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА С КВАЗИТЕНЗОРОМ КРИВИЗНЫ-КРУЧЕНИЯ

© 2021 г. **Ю. И. ШЕВЧЕНКО, Е. В. СКРЫДЛОВА**

Аннотация. С помощью двухъярусной главной связности построена интерпретация связности Картана, не являющейся связностью в главном расслоении. Получены структурные уравнения для форм связности Картана в двух видах. Показано, что в классических структурных уравнениях объект кривизны-кручения является тензором, а при приведении уравнений к более простому виду он преобразуется в квазитензор.

***Ключевые слова***: главное расслоение, продолженное главное расслоение, лемма Лаптева, полуголономность, главная связность, теорема Картана—Лаптева, тензор кривизны, приклеивание, связность Картана, тензор кривизны-кручения.

# STRUCTURAL EQUATIONS OF THE CARTAN CONNECTION WITH THE CURVATURE-TORSION QUASI-TENSOR

© 2021 **Yu. I. SHEVCHENKO, E. V. SKRYDLOVA**

Abstract. Using a two-tier principal connection, we construct an interpretation of the Cartan connection, which is not a connection in the principal bundle, and obtain its structural equations in two forms. We prove that in the classical structural equations, the curvature-torsion object is a tensor, which becomes a quasi-tensor under reduction of the equations.

***Keywords and phrases***: principal bundle, extended principal bundle, Laptev's lemma, semiholonomy, principal connection, Cartan–Laptev theorem, curvature tensor, gluing, Cartan's connection, curvature-torsion tensor.

***AMS Subject Classification***: 53B15, 58A15

**1. Введение.** Известно, что группа Ли с заданной подгруппой является главным расслоением, базой которого служит однородное факторпространство группы по подгруппе, а типовым слоем — подгруппа. Над гладким многообразием, размерность которого равна размерности однородного пространства, построено главное расслоение, типовой слой которого есть такая группа Ли. В этом двухъярусном главном расслоении задана связность способом Лаптева—Лумисте.

Получены структурные уравнения пространства с главной связностью и выражение объекта кривизны через объект связности и его пфаффовы производные. Присоединенные расслоения линейных и псевдолинейных кореперов вместе с продолженным главным расслоением позволили показать, что объект кривизны главной связности является тензором. Этот факт получается быстрее при внешнем дифференцировании структурных уравнений главной связности с последующим применением лемм Лаптева и Картана.

Каноническое приклеивание в двухъярусном пространстве главной связности превращает его в пространство картановой связности, в структурные уравнения которого входят компоненты тензора кривизны-кручения, содержащего тензор кручения. Эти уравнения приведены к другому виду, в результате к компонентам тензора кривизны-кручения добавились постоянные слагаемые. Преобразованный объект кривизны-кручения оказался квазитензором, содержащим квазитензор кручения. В редуктивном случае связность Картана с приведенными структурными уравнениями превращается в главную связность, обладающую не только тензором кривизны, но и тензором кручения, что непосредственно обобщает аффинную связность с кривизной и кручением.

**2. Группа Ли с подгруппой как главное расслоение.** Рассмотрим $(r+n)$-мерную группу Ли $G_{r+n}$ со структурными уравнениями

$$d\vartheta^I = C^I_{JK}\vartheta^J \wedge \vartheta^K \quad (I, \ldots = \overline{1, r+n}), \tag{2.1}$$

причем постоянные $C^I_{JK}$ антисимметричны и удовлетворяют тождествам Якоби

$$C^I_{(JK)} = 0, \quad C^I_{J\{K}C^J_{LM\}} = 0, \tag{2.2}$$

где круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные скобки — циклирование. Разобьем значения индексов на две серии, $I = (i, \alpha)$: $i, \ldots = \overline{1, n}$; $\alpha, \ldots = \overline{n+1, n+r}$. Уравнения (2.1) запишем подробнее:

$$d\vartheta^i = C^i_{jk}\vartheta^j \wedge \vartheta^k + 2C^i_{j\alpha}\vartheta^j \wedge \vartheta^\alpha + C^i_{\alpha\beta}\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta, \tag{2.3}$$

$$d\vartheta^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\vartheta^\beta \wedge \vartheta^\gamma + 2C^\alpha_{\beta i}\vartheta^\beta \wedge \vartheta^i + C^\alpha_{ij}\vartheta^i \wedge \vartheta^j. \tag{2.4}$$

Пусть выполняется условие

$$C^i_{\alpha\beta} = 0; \tag{2.5}$$

тогда уравнения (2.3), (2.4) принимают следующий вид:

$$d\vartheta^i = \vartheta^j \wedge (C^i_{jk}\vartheta^k + 2C^i_{j\alpha}\vartheta^\alpha), \tag{2.6}$$

$$d\vartheta^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\vartheta^\beta \wedge \vartheta^\gamma + \vartheta^i \wedge (C^\alpha_{ij}\vartheta^j - 2C^\alpha_{\beta i}\vartheta^\beta). \tag{2.7}$$

Структурные уравнения (2.6) показывают полную интегрируемость системы уравнений $\vartheta^i = 0$, которая упрощает уравнения (2.7):

$$d\overline{\vartheta}^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\overline{\vartheta}^\beta \wedge \overline{\vartheta}^\gamma \quad (\overline{\vartheta} = \vartheta|_{\vartheta^i=0}). \tag{2.8}$$

Из тождеств Якоби (2.2) следует соотношение

$$C^\alpha_{\beta\{\gamma}C^\beta_{\delta\epsilon\}} + C^\alpha_{j\{\gamma}C^j_{\delta\epsilon\}} = 0,$$

из которого с учетом условия (2.5) получим

$$C^\alpha_{\beta\{\gamma}C^\beta_{\delta\epsilon\}} = 0. \tag{2.9}$$

**Утверждение 1.** *Группа Ли $G_{r+n}$ со структурными уравнениями* (2.1) *при выполнении условия* (2.5) *содержит подгруппу Ли $H_r$ со структурными уравнениями* (2.8), *причем антисимметричные постоянные $C^\alpha_{\beta\gamma}$ удовлетворяют тождествам Якоби* (2.9). *Группа $G_{r+n}$ с заданной подгруппой $H_r$ является главным расслоением $H_r(\Pi_n)$ со структурными уравнениями* (2.6), (2.7), *базой которого служит однородное пространство $\Pi_n = G_{r+n}/H_r$, а типовым слоем — подгруппа $H_r$. При выполнении условия редуктивности $C^\alpha_{\beta i} = 0$ (см., например,* [7, с. 456], [1, с. 176], [2, с. 357]) *расслоение $H_r(\Pi_n)$ становится пространством главной связности $H_{r,n}$.*

**3. Двухъярусное расслоение.** Рассмотрим $n$-мерное гладкое многообразие $M_n$ со структурными уравнениями Лаптева (см. [5]):

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j. \tag{3.1}$$

Построим над многообразием $M_n$ главное расслоение $G_{r+n}(M_n)$, структурные уравнения для слоевых форм которого имеют вид (см. [6]):

$$d\omega^I = C^I_{JK}\omega^J \wedge \omega^K + \theta^j \wedge \omega^I_j, \tag{3.2}$$

причем $\omega^I|_{\theta^j=0} = \vartheta^I$. Используя структурные уравнения (2.6), (2.7), запишем уравнения (3.2) подробнее

$$d\omega^i = \omega^j \wedge (C^i_{jk}\omega^k + 2C^i_{j\alpha}\omega^\alpha) + \theta^j \wedge \omega^i_j, \tag{3.3}$$

$$d\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge (C^\alpha_{ij}\omega^j - 2C^\alpha_{\beta i}\omega^\beta) + \theta^j \wedge \omega^\alpha_j. \tag{3.4}$$

**Утверждение 2.** *Главное расслоение $G_{r+n}(M_n)$ является двухъярусным расслоением*

$$H_r(\Pi_n(M_n))$$

*со структурными уравнениями* (3.1), (3.3), (3.4)*. При фиксации точки базы $M_n$ вполне интегрируемой системой уравнений $\theta^i = 0$ получаются структурные уравнения* (2.6), (2.7) *главного расслоения $H_r(\Pi_n)$. Расширенная база $\Pi_n(M_n)$ есть однородное расслоение* (см. [7])*, имеющее структурные уравнения* (3.1), (3.3)*, базу $M_n$ и типовой слой — однородное пространство $\Pi_n = G_{r+n}/H_r$. При фиксации точки расширенной базы системой уравнений $\theta^i = 0$, $\omega^i = 0$ выделяется подгруппа $H_r$ со структурными уравнениями* (2.8).

**4. Приклеивание.** Произведем сечение однородного расслоения $\Pi_n(M_n)$, т.е. зададим отображение $\sigma\colon M_n \to \Pi_n(M_n)$ с помощью уравнений

$$\omega^i = \sigma^i_j\theta^j. \tag{4.1}$$

Замкнем их, используя структурные уравнения (3.1), (3.3), и разрешим полученные квадратичные уравнения по лемме Картана

$$d\sigma^i_j - \sigma^i_k\theta^k_j + 2C^i_{k\alpha}\sigma^k_j\omega^\alpha + \omega^i_j = (\sigma^i_{jk} - C^i_{ml}\sigma^m_j\sigma^l_k)\theta^k, \tag{4.2}$$

причем продолжения $\sigma^i_{jk}$ функций $\sigma^i_j$ симметричны по нижним индексам: $\sigma^i_{[jk]} = 0$, где квадратные скобки обозначают альтернирование.

Покажем, что объект сечения $\sigma^i_j$ может стать символом Кронекера. Подставим $\sigma^i_j = \delta^i_j$ в дифференциальные уравнения (4.2):

$$\theta^i_j = C^i_{jk}\theta^k + 2C^i_{j\alpha}\omega^\alpha + \omega^i_j - \sigma^i_{jk}\theta^k. \tag{4.3}$$

Уравнения сечения (4.1) примут вид

$$\omega^i = \theta^i. \tag{4.4}$$

Последнее слагаемое в выражении (4.3) можно опустить, так как коэффициенты $\sigma^i_{jk}$ симметричны по индексам $j$ и $k$, поэтому, подставляя формы $\theta^i_j$ в структурные уравнения (3.1), получим аннулирование соответствующего слагаемого: $\sigma^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k = 0$. Значит, при отождествлении (4.4) формы (4.3) можно взять в виде

$$\theta^i_j = C^i_{jk}\omega^k + 2C^i_{j\alpha}\omega^\alpha + \omega^i_j,$$

что приводит к совпадению структурных уравнений (3.1) и (3.3). Следовательно, на образе $\sigma = \sigma(M_n)$ сечения (4.4) уравнения (3.1), (3.3) и (3.4) принимают вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge (C^i_{jk}\omega^k + 2C^i_{j\alpha}\omega^\alpha + \omega^i_j), \tag{4.5}$$

$$d\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge (C^\alpha_{ij}\omega^j - 2C^\alpha_{\beta i}\omega^i + \omega^\alpha_i). \tag{4.6}$$

**Определение 1.** Будем говорить, что уравнения (4.4) задают каноническое сечение однородного расслоения $\Pi_n(M_n)$, при котором отождествляются его слоевые и базисные формы, иначе говоря, осуществляется приклеивание (см., например, [1, с. 175], [3, с. 109, 110]) однородных пространств $\Pi_n = G_{r+n}/H_r$ к точкам базы $M_n$ в соответствующих точках секущей поверхности $\sigma$.

**Утверждение 3.** *В результате канонического приклеивания* (4.4) *главное расслоение $G_{r+n}(M_n) = H_r(\Pi_n(M_n))$ превращается в главное расслоение $H_r(M_n)$ со структурными уравнениями* (4.5), (4.6).

**5. Связность в главном расслоении.** Вернемся к главному расслоению $G_{r+n}(M_n)$ со структурными уравнениями (3.1), (3.2) и зададим в нем связность способом Лаптева—Лумисте (см. [3, с. 62, 82], [10]). Преобразуем слоевые формы $\omega^I$ с помощью линейных комбинаций базисных форм $\theta^i$:

$$\tilde{\omega}^I = \omega^I - \Gamma^I_j \theta^j. \tag{5.1}$$

Найдем внешние дифференциалы этих форм с помощью структурных уравнений (3.1), (3.2):

$$d\tilde{\omega}^I = C^I_{JK}\omega^J \wedge \omega^K + \theta^j \wedge (d\Gamma^I_j - \Gamma^I_k \theta^k_j + \omega^I_j). \tag{5.2}$$

Внесем преобразованные слоевые формы (5.1) в первое слагаемое:

$$C^I_{LM}\omega^L \wedge \omega^M = C^I_{LM}(\tilde{\omega}^L \wedge \tilde{\omega}^M + \Gamma^L_j \theta^j \wedge \tilde{\omega}^M + \tilde{\omega}^L \wedge \Gamma^M_k \theta^k + \Gamma^L_j \theta^j \wedge \Gamma^M_k \theta^k).$$

Во втором и третьем слагаемых вернемся к исходным слоевым формам:

$$C^I_{LM}\omega^L \wedge \omega^M = C^I_{LM}(\tilde{\omega}^L \wedge \tilde{\omega}^M + \Gamma^L_j \theta^j \wedge \omega^M + \omega^L \wedge \Gamma^M_k \theta^k - \Gamma^L_j \theta^j \wedge \Gamma^M_k \theta^k).$$

Подставим эти выражения в уравнения (5.2):

$$d\tilde{\omega}^I = C^I_{JK}\tilde{\omega}^J \wedge \tilde{\omega}^K + \theta^j \wedge (\Delta\Gamma^I_j + \omega^I_j) - C^I_{LM}\Gamma^L_j \theta^j \wedge \Gamma^M_k \theta^k, \tag{5.3}$$

где тензорный оператор $\Delta$ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma^I_j = d\Gamma^I_j - \Gamma^I_k \theta^k_j + \Gamma^J_j \Theta^I_J, \quad \Theta^I_J = 2C^I_{JK}\omega^K. \tag{5.4}$$

По теореме Картана—Лаптева (см. [3]) формы $\tilde{\omega}^I$ будут формами связности тогда и только тогда, когда коэффициенты $\Gamma^I_j$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (см. [3, с. 63, 83])

$$\Delta\Gamma^I_j + \omega^I_j = \Gamma^I_{jk}\theta^k. \tag{5.5}$$

Учтем их в структурных уравнениях (5.3):

$$d\tilde{\omega}^I = C^I_{JK}\tilde{\omega}^J \wedge \tilde{\omega}^K + R^I_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \tag{5.6}$$

где компоненты объекта кривизны $R^I_{jk}$ выражаются по формуле (см. [3, с. 93])

$$R^I_{jk} = \Gamma^I_{[jk]} - C^I_{LM}\Gamma^L_j \Gamma^M_k. \tag{5.7}$$

**Утверждение 4.** *Связность в главном расслоении $G_{r+n}(M_n)$ со структурными уравнениями* (3.1), (3.2) *задается формами связности $\tilde{\omega}^I$* (5.1)*, которые определяются с помощью компонент объекта связности $\Gamma^I_j$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям* (5.5)*. Формы связности подчиняются структурным уравнениям* (5.6)*, в которые входят компоненты объекта кривизны $R^I_{jk}$, выражающиеся по формуле* (5.7) *через объект связности $\Gamma^I_j$ и его пфаффовы производные $\Gamma^I_{jk}$.*

**Определение 2.** Главное расслоение $G_{r+n}(M_n)$ с заданной связностью называется пространством главной связности $G_{r+n,n}$ и определяется структурными уравнениями (3.1), (5.6).

Для продолжения дифференциальных уравнений (5.5) нужно найти внешние дифференциалы входящих в них форм $\theta^i_j$, $\Theta^I_J$, $\omega^I_j$.

**6. Расслоение линейных кореперов.** Формы $\theta^i_j$ входят в структурные уравнения (3.1), которые продифференцируем внешним образом:

$$(d\theta^i_j - \theta^k_j \wedge \theta^i_k) \wedge \theta^j = 0.$$

Разрешим эти кубичные уравнения по лемме Лаптева (см. [5]):

$$d\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \theta^k \wedge \theta^i_{jk}, \tag{6.1}$$

причем выполняются условия полуголономности (см. [11])

$$\theta^i_{[jk]} = \lambda^i_{jkl}\theta^l, \quad \lambda^i_{(jk)l} = 0, \quad \lambda^i_{\{jkl\}} = 0. \tag{6.2}$$

Точка многообразия $M_n$ фиксируется системой уравнений $\theta^l = 0$, которая упрощает условие полуголономности (6.2): $\theta^i_{[jk]}|_{\theta^l=0} = 0$, т.е. формы $\theta^i_{jk}$ симметричны при фиксации точки. Тогда

$M_n$ назовем полуголономным гладким многообразием (см. [11]), или многообразием Лумисте (см. [8]). В особом случае, когда $\lambda^i_{jkl} = 0 \iff \theta^i_{[jk]} = 0$, т.е. формы $\theta^i_{jk}$ симметричны, можно говорить о голономном гладком многообразии (см. [9]), или многообразии Лаптева (см. [5]). Далее под гладким многообразием $M_n$ понимается полуголономное многообразие.

**Утверждение 5.** *Над гладким многообразием $M_n$, не являющимся параллелизуемым многообразием* (см., например, [9])*, имеется главное расслоение линейных корепперов $L_{n^2}(M_n)$ со структурными уравнениями* (3.1), (6.1)*, типовым слоем которого служит линейная группа $L_{n^2} = GL(n)$, действующая в каждом $n$-мерном векторном пространстве, касательном к многообразию $M_n$.*

**7. Расслоение псевдолинейных корепперов.** Найдем внешние дифференциалы форм $\Theta^I_J$ (5.4), присоединенных к слоевым формам $\omega^K$:

$$d\Theta^I_J = 2C^I_{JK}C^K_{LM}\omega^L \wedge \omega^M + \theta^k \wedge \Theta^I_{Jk}, \quad \Theta^I_{Jk} = 2C^I_{JK}\omega^K_k. \tag{7.1}$$

С помощью условий антисимметрии и тождеств Якоби (2.2) преобразуем следующие внешние произведения:

$$\Theta^K_J \wedge \Theta^I_K = 4C^K_{JL}C^I_{KM}\omega^L \wedge \omega^M = -4C^K_{J[L}C^I_{M]K}\omega^L \wedge \omega^M =$$
$$= -2(C^K_{JL}C^I_{MK} - C^K_{JM}C^I_{LK})\omega^L \wedge \omega^M = 2C^I_{JK}C^K_{LM}\omega^L \wedge \omega^M.$$

Учитывая это в структурных уравнениях (7.1), получим (см. [6, с. 169]):

$$d\Theta^I_J = \Theta^K_J \wedge \Theta^I_K + \theta^k \wedge \Theta^I_{Jk}. \tag{7.2}$$

При фиксации точки многообразия $M_n$ уравнения (7.2) дают структурные уравнения линейной группы $GL(r+n)$:

$$d\vartheta^I_J = \vartheta^K_J \wedge \vartheta^I_K \quad (\vartheta^I_J = \Theta^I_J|_{\theta^k=0}).$$

В силу обозначения (5.4) имеем

$$\vartheta^I_J = 2C^I_{JK}\vartheta^K \quad (\vartheta^K = \omega^K|_{\theta^k=0}), \tag{7.3}$$

где $\vartheta^K$ — базисные формы группы Ли $G_{r+n}$. Уравнения (7.3) задают отображение $f\colon G_{r+n} \to GL(r+n)$, которое является линейным представлением группы $G_{r+n}$. Обозначим ее образ через $L = f(G_{r+n})$ и назовем псевдолинейной группой.

**Утверждение 6.** *К главному расслоению $G_{r+n}(M_n)$ присоединено расслоение псевдолинейных корепперов $L(M_n)$ со структурными уравнениями* (3.1), (7.2)*, типовым слоем которого является псевдолинейная группа $L$, причем согласно уравнениям* (7.3) $\dim L \leqslant r+n$.

**8. Продолженное главное расслоение.** С помощью структурных уравнений (3.1) продифференцируем уравнения (3.2):

$$\theta^j \wedge (\theta^k_j \wedge \omega^I_k - d\omega^I_j + C^I_{JK}\omega^J_j \wedge \omega^K + C^I_{JK}\omega^J \wedge \omega^K_j) + (C^I_{M[K}C^M_{LJ]} + C^I_{M[J}C^M_{KL]})\omega^J \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0. \tag{8.1}$$

Последнее слагаемое аннулируется, так как альтернирование по трем индексам, по двум из которых имеется антисимметрия, сводится к циклированию, что приводит к тождествам Якоби (2.2):

$$C^I_{M\{K}C^M_{LJ\}} + C^I_{M\{J}C^M_{KL\}} = 0, \quad 2C^I_{M\{J}C^M_{KL\}} = 0.$$

Уравнения (8.1) принимают вид

$$(d\omega^I_j - \theta^k_j \wedge \omega^I_k - 2C^I_{JK}\omega^J_j \wedge \omega^K) \wedge \theta^j = 0.$$

Разрешим эти кубичные уравнения по лемме Лаптева (ср. [6, с. 172]):

$$d\omega^I_j = 2C^I_{JK}\omega^J_j \wedge \omega^K - \omega^I_k \wedge \theta^k_j + \theta^k \wedge \omega^I_{jk}, \tag{8.2}$$

причем

$$\omega^I_{[jk]} = \mu^I_{jkl}\theta^l, \quad \mu^I_{(jk)l} = 0, \quad \mu^I_{\{jkl\}} = 0. \tag{8.3}$$

Равенства (8.3) назовем условиями слоевой полуголономности, а расслоение $G_{r+n}(M_n)$, обладающее еще и базисной полуголономностью (6.2), — расслоением с базисно-слоевой полуголономностью.

**Утверждение 7.** *Продолжением главного расслоения $G_{r+n}(M_n)$ является главное расслоение $G_{r+n(2n+r+1)}(M_n)$ со структурными уравнениями* (3.1), (3.2), (6.1), (8.2), *типовым слоем которого служит группа Ли $G_{r+n(2n+r+1)}$, имеющая факторгруппы $G_{r+n}$ и $GL(n)$.*

**9. Тензор кривизны главной связности.** Структурные уравнения (6.1), (7.2), (8.2) дают возможность продолжить дифференциальные уравнения (5.5):

$$(\Delta\Gamma^I_{jk} + \Gamma^J_j\Theta^I_{Jk} - \Gamma^I_l\theta^l_{jk} + \omega^I_{jk}) \wedge \theta^k = 0.$$

Разрешим эти квадратичные уравнения по лемме Картана, запишем результат в виде дифференциальных сравнений по модулю базисных форм $\theta^l$ и проальтернируем

$$\Delta\Gamma^I_{[jk]} + \Gamma^J_{[j}\Theta^I_{|J|k]} - \Gamma^I_l\theta^l_{[jk]} + \omega^I_{[jk]} \cong 0 \pmod{\theta^i}.$$

С помощью дифференциальных уравнений (5.5) запишем сравнения для агрегата из формул (5.7) и используем обозначение (7.1):

$$\Delta(C^I_{LM}\Gamma^L_j\Gamma^M_k) - \frac{1}{2}\Gamma^M_k\Theta^I_{Mj} + \frac{1}{2}\Gamma^L_j\Theta^I_{Lk} \cong 0.$$

Вычтем эти сравнения из предыдущих и воспользуемся формулой (5.7):

$$\Delta R^I_{jk} - \Gamma^I_l\theta^l_{[jk]} + \omega^I_{[jk]} \cong 0.$$

Условие базисно-слоевой полуголономности (6.2), (8.3) вызывает упрощение:

$$\Delta R^I_{jk} \cong 0. \tag{9.1}$$

**Утверждение 8.** *Если пространство главной связности $G_{r+n,n}$ построено на основе главного расслоения $G_{r+n}(M_n)$ с базисно-слоевой полуголономностью, то объект кривизны $R^I_{jk}$ является тензором* (см. [3, с. 93]), *компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям* (9.1).

Естественно, что сравнения (9.1) остаются в силе, когда имеет место базисная или слоевая голономность.

**10. Тензорность кривизны как следствие структурных уравнений.** К дифференциальным сравнениям (9.1) для компонент тензора кривизны $R^I_{jk}$ можно прийти быстрее, если отталкиваться от структурных уравнений (3.1), (5.6) пространства главной связности $G_{r+n,n}$. В самом деле, дифференцируем уравнения (5.6) с помощью уравнений (3.1):

$$(dR^I_{jk} + 2C^I_{JK}R^J_{jk}\tilde\omega^K - R^I_{lk}\theta^l_j - R^I_{jl}\theta^l_k) \wedge \theta^j \wedge \theta^k + 2C^I_{J[K}C^J_{LM]} \wedge \tilde\omega^K \wedge \tilde\omega^L \wedge \tilde\omega^M = 0.$$

Второе слагаемое равно нулю в силу тождеств Якоби (2.2), поэтому уравнение можно записать в виде

$$[(dR^I_{jk} + 2C^I_{JK}R^J_{jk}\tilde\omega^K - R^I_{lk}\theta^l_j - R^I_{jl}\theta^l_k) \wedge \theta^k] \wedge \theta^j = 0.$$

Разрешим эти кубичные уравнения по лемме Лаптева

$$(dR^I_{jk} + 2C^I_{JK}R^J_{jk}\tilde\omega^K - R^I_{lk}\theta^l_j - R^I_{jl}\theta^l_k) \wedge \theta^k = \theta^k \wedge \Omega^I_{jk},$$

причем

$$\Omega^I_{[jk]} = \nu^I_{jkl}\theta^l, \quad \nu^I_{(jk)l} = 0, \quad \nu^I_{\{jkl\}} = 0. \tag{10.1}$$

Перенесем правую часть квадратичных уравнений влево, вынесем базисные формы $\theta^k$, применим лемму Картана, используем выражения форм связности (5.1) и запишем результат в виде дифференциальных сравнений:

$$dR^I_{jk} + 2C^I_{JK}R^J_{jk}\omega^K - R^I_{lk}\theta^l_j - R^I_{jl}\theta^l_k + \Omega^I_{jk} \cong 0.$$

Альтернируя эти сравнения по индексам $j$ и $k$, используя антисимметрию объекта кривизны $R^I_{(jk)} = 0$ и условие полуголономности (10.1), получим

$$dR^I_{jk} + 2C^I_{JK}R^J_{jk}\omega^K - R^I_{lk}\theta^l_j - R^I_{jl}\theta^l_k \cong 0. \tag{10.2}$$

С учетом обозначений (5.4) сравнения (9.1) и (10.2) совпадают.

**Утверждение 9.** *Структурные уравнения* (3.1), (5.6) *пространства главной связности определяют тензорность объекта кривизны $R^I_{jk}$, причем в доказательстве этого факта вместо базисно-слоевой полуголономности расслоения $G_{r+n}(M_n)$ использовано условие полуголономности* (10.1).

**11. Связность Картана.** Структурные уравнения (5.6) для слоевых форм пространства главной связности $G_{r+n,n}$ представим подробно (см. [1, с. 174]):

$$d\tilde\omega^i = C^i_{jk}\tilde\omega^j \wedge \tilde\omega^k + 2C^i_{j\alpha}\tilde\omega^j \wedge \tilde\omega^\alpha + R^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \tag{11.1}$$

$$d\tilde\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\tilde\omega^\beta \wedge \tilde\omega^\gamma + 2C^\alpha_{\beta i}\tilde\omega^\beta \wedge \tilde\omega^i + C^\alpha_{ij}\tilde\omega^i \wedge \tilde\omega^j + R^\alpha_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \tag{11.2}$$

где использовано условие существования подгруппы (2.5). Произведем в пространстве однородной связности $\Pi_{n,n}$ со структурными уравнениями (3.1), (11.1) каноническое сечение $s\colon M_n \to \Pi_{n,n}$ с уравнениями $\tilde\omega^i = \theta^i$. На секущей поверхности $s = s(M_n)$ уравнения (11.1), (11.2) примут вид

$$d\tilde\omega^i = C^i_{jk}\tilde\omega^j \wedge \tilde\omega^k + 2C^i_{j\alpha}\tilde\omega^j \wedge \tilde\omega^\alpha + R^i_{jk}\tilde\omega^j \wedge \tilde\omega^k, \tag{11.3}$$

$$d\tilde\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\tilde\omega^\beta \wedge \tilde\omega^\gamma + 2C^\alpha_{\beta i}\tilde\omega^\beta \wedge \tilde\omega^i + C^\alpha_{ij}\tilde\omega^i \wedge \tilde\omega^j + R^\alpha_{jk}\tilde\omega^j \wedge \tilde\omega^k. \tag{11.4}$$

Эти уравнения Л. Е. Евтушик (см. [1, с. 175]) назвал структурными уравнениями специализированной связности Картана с тензором кривизны-кручения $R^I_{jk}$ и подтензором кручения $R^i_{jk}$. Действительно, дифференциальные сравнения (10.2) разбиваются на две совокупности и принимают следующий вид:

$$dR^i_{jk} + 2C^i_{l\alpha}R^l_{jk}\omega^\alpha - R^i_{lk}\theta^l_j - R^i_{jl}\theta^l_k \approxeq 0 \quad (\mathrm{mod}\ \tilde\omega^l), \tag{11.5}$$

$$dR^\alpha_{jk} + 2C^\alpha_{\beta\gamma}R^\beta_{jk}\omega^\gamma - R^\alpha_{lk}\theta^l_j - R^\alpha_{jk}\theta^k_l + 2C^\alpha_{l\beta}R^l_{jk}\omega^\beta \approxeq 0. \tag{11.6}$$

**Утверждение 10.** *Компоненты тензора кривизны-кручения $R^I_{jk}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям* (11.5), (11.6), *причем компоненты тензора кручения $R^i_{jk}$ подчиняются сравнениям* (11.5). *Объект кривизны $R^\alpha_{jk}$ будет тензором в двух особых случаях*:

(i) *при выполнении условия редуктивности $C^\alpha_{l\beta} = 0$,*

(ii) *при аннулировании тензора кручения $R^i_{jk} = 0$.*

В особых случаях компоненты тензора кривизны $R^\alpha_{jk}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$dR^\alpha_{jk} + R^\beta_{jk}\Omega^\alpha_\beta - R^\alpha_{lk}\theta^l_j - R^\alpha_{jl}\theta^l_k \approxeq 0, \quad \Omega^\alpha_\beta = 2C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma.$$

Преобразуем структурные уравнения (11.3), (11.4):

$$d\tilde\omega^i = 2C^i_{j\alpha}\tilde\omega^j \wedge \tilde\omega^\alpha + K^i_{jk}\tilde\omega^j \wedge \tilde\omega^k, \tag{11.7}$$

$$d\tilde\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\tilde\omega^\beta \wedge \tilde\omega^\gamma + 2C^\alpha_{\beta i}\tilde\omega^\beta \wedge \tilde\omega^i + K^\alpha_{jk}\tilde\omega^j \wedge \tilde\omega^k, \tag{11.8}$$

где компоненты преобразованного объекта кривизны-кручения имеют вид:

$$K^I_{jk} = R^I_{jk} + C^I_{jk}. \tag{11.9}$$

**Определение 3** (см. [13])**.** Пространством со связностью Картана $C_{r,n}$ назовем параллелизуемое многообразие со структурными уравнениями (11.7), (11.8), в которые входят коэффициенты $K^I_{jk}$, составляющие объект преобразованной кривизны-кручения, содержащий подобъект $K^i_{jk}$ — объект преобразованного кручения.

Найдем дифференциальные сравнения для компонент объекта $K^I_{jk}$. Постоянные $C^I_{JK}$ группы Ли $G_{r+n}$ образуют арифметический тензор, компоненты которого в силу тождеств Якоби (2.2) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dC^I_{JK} + C^L_{JK}\Theta^I_L - C^I_{LK}\Theta^L_J - C^I_{JL}\Theta^L_K = 0.$$

Перейдем от уравнений к сравнениям

$$dC^I_{JK} + C^L_{JK}\Omega^I_L - C^I_{LK}\Omega^L_J - C^I_{JL}\Omega^L_K \approxeq 0, \quad \Omega^I_J = 2C^I_{J\alpha}\omega^\alpha,$$

откуда получим

$$\Delta C^I_{jk} + 4C^I_{\beta[j}C^\beta_{k]\alpha}\omega^\alpha \approxeq 0, \tag{11.10}$$

где

$$\Delta C^I_{jk} = dC^I_{jk} + C^L_{jk}\Omega^I_L - C^I_{lk}\Omega^l_j - C^I_{jl}\Omega^l_k.$$

При каноническом сечении $s$ отождествляются структурные уравнения (3.1) и (11.7), поэтому

$$\theta^i_j = 2C^i_{j\alpha}\tilde\omega^\alpha + K^i_{jk}\tilde\omega^k \approxeq 2C^i_{j\alpha}\omega^\alpha = \Omega^i_j.$$

Это позволяет отождествить действия дифференциального оператора $\Delta$ в уравнениях (9.1) и (11.10), из которых согласно формуле (11.9) получим

$$\Delta K^I_{jk} + 4C^I_{\beta[j}C^\beta_{k]\alpha}\omega^\alpha \approxeq 0. \tag{11.11}$$

Запишем эти сравнения подробнее, учитывая условие существования подгруппы (2.5):

$$\Delta K^i_{jk} + 4C^i_{\beta[j}C^\beta_{k]\alpha}\omega^\alpha \approxeq 0, \tag{11.12}$$

$$\Delta K^\alpha_{jk} + K^i_{jk}\Omega^\alpha_i + 4C^\alpha_{\beta[j}C^\beta_{k]\gamma}\omega^\gamma \approxeq 0. \tag{11.13}$$

**Утверждение 11.** *Преобразованный объект кривизны-кручения $K^I_{jk}$ пространства со связностью Картана $C_{r,n}$, определенного структурными уравнениями* (11.7), (11.8)*, является квазитензором* (см. [14])*, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям* (11.11)*. Квазитензор $K^I_{jk}$ содержит квазитензор кручения $K^i_{jk}$ со сравнениями* (11.12)*.*

Если выполняется условие редуктивности $C^\alpha_{\beta i} = 0$, то уравнения (11.8) и сравнения (11.12), (11.13) принимают вид

$$d\tilde\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\tilde\omega^\beta \wedge \tilde\omega^\gamma + K^\alpha_{ij}\tilde\omega^i \wedge \tilde\omega^j, \tag{11.14}$$

$$\Delta K^i_{jk} \approxeq 0, \quad K^\alpha_{jk} \approxeq 0. \tag{11.15}$$

**Утверждение 12.** *В редуктивном случае пространство картановой связности $C_{r,n}$ вырождается в пространство главной связности $H_{r,n}$ со структурными уравнениями* (11.7), (11.14)*, обладающее тензорами кручения $K^i_{jk}$ и кривизны $K^\alpha_{jk}$, которые подчиняются дифференциальным сравнениям* (11.15)*.*

**Замечание.** Ш. Кобаяси (см. [4, с. 167]) наметил интерпретацию связности Картана в противоположном направлении, отталкиваясь от главного расслоения $H_r(M_n)$, которым является пространство картановой связности $C_{r,n}$, расширяя его до главного расслоения $G_{r+n}(M_n)$ и т. д.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евтушик Л. Е.* Связности Картана и геометрия пространств Кавагути, полученные методом подвижного репера// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2002. — *30*. — С. 170–204.
2. *Евтушик Л. Е.* Структуры высших порядков. — М., 2014.
3. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Пробл. геом. — 1979. — *9*. — С. 3–248.
4. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.
5. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1966. — *1*. — С. 139–189.
6. *Лаптев Г. Ф.* Структурные уравнения главного расслоения// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1969. — *2 161–178*.
7. *Лумисте Ю. Г.* Связности в однородных расслоениях// Мат. сб. — 1966. — *69*, № 3. — С. 434–469.
8. *Лумисте Ю. Г.* Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения $p$-кореперов// Тр. геом. семин. ВИНИТИ. — 1974. — *5*. — С. 239–257.
9. *Шевченко Ю. И.* Оснащение голономных и неголономных гладких многообразий. — Калининград, 1998.
10. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2006. — № 37. — С. 179–187.

11. *Шевченко Ю. И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2015. — № 46. — С. 168–177.
12. *Шевченко Ю. И.* Тензор кривизны-кручения связности Картана// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2019. — № 50. — С. 155–168.
13. *Шевченко Ю. И., Скрыдлова Е. В.* Интерпретация связности Картана с помощью двухъярусной главной связности// Мат. Междунар. науч. конф. «Современная геометрия и ее приложения» (Казань, 4-7 сентября 2019 г.). — Казань, 2019. — С. 166–169.
14. *Шевченко Ю. И., Скрыдлова Е. В.* О кривизне-кручении пространства со связностью Картана// Мат. Междунар. науч. конф. «Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения» (Ташкент, 21-23 ноября 2019 г.). — Ташкент, 2019. — С. 178–179.

Шевченко Юрий Иванович
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград
E-mail: `IUSHevchenko@kantiana.ru`

Скрыдлова Елена Викторовна
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград
E-mail: `ESkrydlova@kantiana.ru`