ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 201

Москва 2021

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 201

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ,
ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Москва 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 201 (2021). С. 3–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-201-3-15

УДК 517.968.74

ОБРАТНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МНОГОМЕРНЫМ ОПЕРАТОРОМ БЕННИ—ЛЮКА И НЕЛИНЕЙНЫМИ МАКСИМУМАМИ

© 2021 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ**

Аннотация. Рассмотрены вопросы однозначной обобщенной разрешимости и построения решения нелинейной многомерной обратной смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Бенни—Люка четвёртого порядка с вырожденным ядром и нелинейными максимумами. Установлены достаточные коэффициентные условия однозначной разрешимости поставленной обратной смешанной задачи. Показано, что решение прямой смешанной задачи непрерывно зависит от заданных начальных функций и функции переопределения. Использованы метод Фурье, основанный на разделении переменных, метод сжимающих отображений, метод последовательных приближений и метод интегральных и суммарных неравенств.

Ключевые слова: обратная смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение, вырожденное ядро, нелинейный максимум, обобщенная разрешимость.

AN INVERSE MIXED PROBLEM FOR AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH A MULTIDIMENSIONAL BENNEY–LUKE OPERATOR AND NONLINEAR MAXIMUMS

© 2021 **T. K. YULDASHEV**

Abstract. In this paper, we examine the unique generalized solvability and construct solutions to a nonlinear multidimensional inverse mixed problem for a nonlinear fourth-order Benney–Luke integro-differential equation with a degenerate kernel and nonlinear maximums. Sufficient coefficient conditions for the unique solvability of the problem are established. We prove that the solution of the direct mixed problem continuously depends on the initial functions and the overdetermination function. Our research is based on the Fourier method of separation of variables, the method of contraction mappings, the method of successive approximations, and the method of integral and sum inequalities.

Keywords and phrases: inverse mixed problem, integro-differential equation, degenerate kernel, nonlinear maximгъ, generalized solvability.

AMS Subject Classification: 34K29, 35A01, 35B35, 35D30.

1. Постановка задачи. Как известно, многие задачи механики сплошных сред являются смешанными. Смешанные задачи играют важную роль в решении задач математической физики. В [13] изучены необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала. В [6,15] изучены вопросы обобщенной разрешимости смешанных задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка параболического и гиперболического типов. В [1,3,14,16] изучены вопросы обобщенной разрешимости смешанных задач для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго и четвертого порядков. Теоретические особенности решения дифференциальных уравнений с максимумами показаны в [17]. Приложение дифференциальных уравнений с максимумами в решении задач планирования производственных процессов показано в [18]. Интегро-дифференциальные уравнения первого порядка с особенностями в ядре изучены в [4,5]. Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных с вырожденными ядрами изучены в [19–22].

Для нахождения решения прямых смешанных задач математической физики требуется задать коэффициенты уравнения, границу области, начальные и граничные условия. Обычно бывает, что во время решения практических задач экспериментальным путем количественные характеристики исследуемого объекта недоступны для непосредственного наблюдения или проведение самого эксперимента по тем или иным причинам невозможно. Тогда на практике исследователь может получить некоторую косвенную информацию и сделать заключение о свойствах изучаемого объекта. Часто возникают нелокальные интегральные условия, которые дают усредненную информацию об объекте. В условиях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, ставится проблема переопределения математической модели. Такие задачи относятся к классу обратных задач математической физики. Разные обратные задачи рассматривались в [2,8–12,21,22].

В настоящей работе рассматриваются вопросы обобщенной разрешимости и построения решения обратной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Бенни—Люка четвертого порядка с вырожденным ядром и нелинейными максимумами. Для регулярных значений параметра при интегральном члене получены необходимые и достаточные условия существования обобщенного решения обратной задачи. Решение разложено в ряд Фурье, доказана абсолютная и равномерная сходимость полученных рядов Фурье. Удивительным эффектом является тот факт, что после определения функции переопределения в решении основной неизвестной функции исчезает нелинейная часть.

В многомерной области $\Omega = \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ 0 < x < l\}$ рассматривается уравнение вида

$$U_{tt} - \sum_{i=1}^{m} [U_{ttx_ix_i} + U_{x_ix_i} - U_{x_ix_ix_ix_i}] = \nu \int_0^T K(t,s) U(s,x) ds +$$
$$+ \alpha(t) \left[\beta(x) + f\left(x, \int_0^T \Theta(\xi, x, \max\{U(\tau,x) \mid \tau \in [r_1; r_2]\}) d\xi \right) \right], \quad (1)$$

где T и l — заданные положительные действительные числа, ν — действительный отличный от нуля спектральный параметр, $\alpha(t) \in C(\Omega_T)$, $f(x,u) \in C(\Omega_l^m \times \mathbb{R})$, $r_i = r_i(t,x,U) \in C(\Omega \times \mathbb{R})$ — нелинейные отклонения, $r_i(\xi,x,U) \neq t$, $i = 1,2$, $\beta(x)$ — многомерная функция переопределения, $\Theta(t,x,u) \in C(\Omega_T \times \Omega_l^m \times \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^m$,

$$0 \neq K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) b_i(s),$$

$a_i(t), b_i(s) \in C(\Omega_T)$, $\Omega_T \equiv [0;T]$, $\Omega_l \equiv [0;l]$. Здесь предполагается, что система функций $a_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, и система функций $b_i(s)$, $i = \overline{1,k}$, являются линейно независимыми.

Рассматривается Соболево пространство $\widehat{W}_2^2(\Omega)$, которое является классом многомерных непрерывных функций $U(t,x)$ в закрытой области $\bar{\Omega} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$ и имеющих частные производные $\partial U(t,x)/\partial x_i$, $\partial U(t,x)/\partial t$, которые принадлежат не только пространству

$L_2(\bar{\Omega})$, но и пространствам $L_2(\Omega_l)$ при фиксированных значениях $t \in \Omega_T$ и $L_2(\Omega_T)$ при фиксированных значениях $x \in \Omega_l^m$, где

$$L_2(\bar{\Omega}) = \left\{ U(t,x) : \sqrt{\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_l^m} |U(t,x)|^2 dx dt < \infty} \right\}.$$

Задача 1. Найти в области Ω пару функций $\{U(t,x) \in \widehat{W}_2^2(\Omega), \beta(x) \in C(\Omega_l^m)\}$, удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(t,x) = \varphi_1(t,x), \quad t \notin \Omega_T, \quad U(0,x) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

$$U_t(0,x) = \varphi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&U(t,0,x_2,x_3,\ldots,x_m) = U(t,l,x_2,x_3,\ldots,x_m) = 0,\\
&U(t,x_1,0,x_3,\ldots,x_m) = U(t,x_1,l,x_3,\ldots,x_m) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&U(t,x_1,\ldots,x_{m-1},0) = U(t,x_1,\ldots,x_{m-1},l) = 0,\\
&U_{x_1x_1}(t,0,x_2,x_3,\ldots,x_m) = U_{x_1x_1}(t,l,x_2,x_3,\ldots,x_m) = 0,\\
&U_{x_1x_1}(t,x_1,0,x_3,\ldots,x_m) = U_{x_1x_1}(t,x_1,l,x_3,\ldots,x_m) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&U_{x_1x_1}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},0) = U_{x_1x_1}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},l) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&U_{x_mx_m}(t,0,x_2,x_3,\ldots,x_m) = U_{x_mx_m}(t,l,x_2,x_3,\ldots,x_m) = 0,\\
&U_{x_mx_m}(t,x_1,0,x_3,\ldots,x_m) = U_{x_mx_m}(t,x_1,l,x_3,\ldots,x_m) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&U_{x_mx_m}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},0) = U_{x_mx_m}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},l) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\int\limits_0^T G(t)U(t,x)dt = \omega(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

где $0 \neq G(t) \in C[0;T]$, $\varphi_1(t,x) \in C([(-\infty;0) \cup (T;\infty)] \times \Omega_l^m)$, $\varphi_1(0,x) = \varphi_1(x)$, $\omega(x)$, $\varphi_i(x)$— заданные достаточно гладкие многомерные функции в области $\Omega_l^m = \{0 \leqslant x \leqslant l\}$, $i = 1, 2$.

Обобщенное решение прямой задачи (1)—(4) в пространстве $\widehat{W}_2^2(\Omega)$ определяется, следуя работ [6,7]. Множество значений спектрального параметра $\nu \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$ разделяется на два регулярных и иррегулярных подмножества. Для множества регулярных значений получаются достаточные условия существования единственного обобщенного решения прямой задачи. Доказывается устойчивость решения $U(t,x)$ интегро-дифференциального уравнения (1) по заданным функциям $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$ и по функции переопределения $\beta(x)$.

2. Разложение решения прямой задачи в ряд Фурье. С учетом граничных условий типа Бенара (4) решение уравнения (1) в области Ω разыскивается в виде следующего ряда Фурье

$$U(t,x) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{6}$$

где

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = \int\limits_{\Omega_l^m} U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, \tag{7}$$

$$\int\limits_{\Omega_l^m} U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx = \int\limits_0^l \ldots \int\limits_0^l U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_m,$$

$$\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \sin\frac{\pi n_1}{l}x_1 \cdot \ldots \cdot \sin\frac{\pi n_m}{l}x_m,$$

$$\Omega_l^m = [0,l]^m, \quad n_1,\ldots,n_m = 1,2,\ldots$$

Кроме того, мы предположим, что:

$$f(x,u) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{8}$$

где

$$f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot) = \int\limits_{\Omega_l^m} f(x,u)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx; \tag{9}$$

$$\varphi_i(x) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \varphi_{i,n_1,\ldots,n_m}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{10}$$

где

$$\varphi_{i,n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \varphi_i(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, \quad i=1,2, \tag{11}$$

$$\beta(x) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \beta_{n_1,\ldots,n_m}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{12}$$

где

$$\beta_{n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \beta(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx. \tag{13}$$

Подставляем ряды (6), (8), (10)—(12) в уравнение (1) и получаем следующую счетную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$u''_{n_1,\ldots,n_m}(t) + \mu^2_{n_1,\ldots,n_m}u_{n_1,\ldots,n_m}(t) =$$
$$= \frac{1}{1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}}\left(\nu\int\limits_0^T \sum_{i=1}^k a_i(t)b_i(s)u_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds + \alpha(t)[\beta_{n_1,\ldots,n_m} + f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)]\right), \tag{14}$$

где

$$\mu_{n_1,\ldots,n_m} = \frac{\pi}{l}\sqrt{n_1^2+\ldots+n_m^2}.$$

Условие (2) с учетом формул (10), (11) принимает следующий вид

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(0) = \int\limits_{\Omega_l} U(0,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx = \int\limits_{\Omega_l} \varphi_1(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx = \varphi_{1,n_1,\ldots,n_m}. \tag{15}$$

Аналогично условие (3) принимает следующий вид

$$u'_{n_1,\ldots,n_m}(0) = \int\limits_{\Omega_l} U_t(0,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx = \int\limits_{\Omega_l} \varphi_2(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx = \varphi_{2,n_1,\ldots,n_m}. \tag{16}$$

Применяем к (14) метод вырожденного ядра. Тогда с учетом начальных условий (15) и (16) и формул (8)—(13) из (14) придем к следующей счетной системе нелинейных функционально-интегральных уравнений:

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = \mathrm{Im}(t; u_{n_1,\ldots,n_m}) \equiv$$
$$\equiv \varphi_{1,n_1,\ldots,n_m} V_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) + \varphi_{2,n_1,\ldots,n_m} V_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) + V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\Bigg[\beta_{n_1,\ldots,n_m} +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_l^m} f\Bigg(x, \int\limits_0^T \Theta\Bigg(\xi, x, \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \max\{u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) | \tau \in [r_1; r_2]\} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg) d\xi\Bigg) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx\Bigg], \tag{17}$$

в котором

$$V_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = \cos\mu_{n_1,\ldots,n_m} t + \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{1,i,n_1,\ldots,n_m}(\nu)}{\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu)} h_{i,n_1,\ldots,n_m}(t),$$
$$V_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = \frac{\sin\mu_{n_1,\ldots,n_m} t}{\mu_{n_1,\ldots,n_m}} + \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{2,i,n_1,\ldots,n_m}(\nu)}{\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu)} h_{i,n_1,\ldots,n_m}(t),$$
$$V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = \delta_{1,n_1,\ldots,n_m}(t) + \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{3,i,n_1,\ldots,n_m}(\nu)}{\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu)} h_{i,n_1,\ldots,n_m}(t),$$

$\varphi_{i,n_1,\ldots,n_m}$ являются коэффициентами Фурье в разложений (10) и определяются соответственно из (11),

$$\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11} & \nu H_{12} & \ldots & \nu H_{1k} \\ \nu H_{21} & 1+\nu H_{22} & \ldots & \nu H_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu H_{k1} & \nu H_{k2} & \ldots & 1+\nu H_{kk} \end{vmatrix},$$
$$\Delta_{\varpi,i,n_1,\ldots,n_m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11} & \ldots & \nu H_{1(i-1)} & \Phi_{\varpi 1} & \nu H_{1(i+1)} & \ldots & \nu H_{1k} \\ \nu H_{21} & \ldots & \nu H_{2(i-1)} & \Phi_{\varpi 2} & \nu H_{2(i+1)} & \ldots & \nu H_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu H_{k1} & \ldots & \nu H_{k(i-1)} & \Phi_{\varpi k} & \nu H_{k(i+1)} & \ldots & 1+\nu H_{kk} \end{vmatrix}, \quad \varpi = 1,2,3,$$
$$H_{i,j,n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_0^T b_i(s) h_{j,n_1,\ldots,n_m}(s) ds, \quad \Phi_{1,i,n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_0^T b_i(s) \cos\mu_{n_1,\ldots,n_m} s ds,$$
$$\Phi_{2,i,n_1,\ldots,n_m} = \frac{1}{\mu_{n_1,\ldots,n_m}} \int\limits_0^T b_i(s) \sin\mu_{n_1,\ldots,n_m} s ds, \quad \Phi_{3,i,n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_0^T b_i(s) \delta_{n_1,\ldots,n_m}(s) ds,$$
$$h_{i,n_1,\ldots,n_m}(t) = \frac{1}{\bar{\mu}_{n_1,\ldots,n_m}} \int\limits_0^t \sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}(t-s) a_i(s) ds, \quad i = \overline{1,k},$$
$$\delta_{n_1,\ldots,n_m}(t) = \frac{1}{\bar{\mu}_{n_1,\ldots,n_m}} \int\limits_0^t \sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}(t-s) \alpha(s) ds,$$
$$\bar{\mu}_{n_1,\ldots,n_m} = \mu_{n_1,\ldots,n_m}(1+\mu_{n_1,\ldots,n_m}^2),$$
$$r_i = r_i\Bigg(\xi, x, \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u_{n_1,\ldots,n_m}(\xi,\nu) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg), \quad i = 1,2.$$

Система (17) однозначно разрешима, если выполняется условие $\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu) \neq 0$. Значения параметра ν, при которых выполняется условие $\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu) \neq 0$, назовем регулярными. На множестве регулярных значений параметра ν будем изучать однозначную разрешимость системы (17).

3. Однозначная разрешимость системы (17)**.** Как и в [23, 24], воспользуемся известными банаховыми пространствами. Пространство $B_2(T)$ последовательностей непрерывных функций $\{u_{n_1,\ldots,n_m}(t)\}_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}$ на отрезке Ω_T с нормой

$$\|u(t)\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left(\max_{t\in\Omega_T} |u_{n_1,\ldots,n_m}(t)|\right)^2} < \infty.$$

Гильбертово координатное пространство ℓ_2 числовых последовательностей $\{\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\}_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\varphi_{n_1,\ldots,n_m}|^2} < \infty.$$

Пространство $L_2(\Omega_l)$ суммируемых с квадратом функций в области $\Omega_l^2 = \Omega_l \times \Omega_l$ с нормой

$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(\Omega_l)} = \sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} |\vartheta(x)|^2 dx} < \infty.$$

Теорема 1. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

$$\chi_1 = \max\{\|V_1(t,\nu)\|_{B_2(T)}; \|V_2(t,\nu)\|_{B_2(T)}; \|V_3(t,\nu)\|_{B_2(T)}\} < \infty;$$
$$\chi_2 = \|f(x,\gamma)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty;$$
$$|f(x,\gamma_1) - f(x,\gamma_2)| \leqslant L_0(x)|\gamma_1 - \gamma_2|;$$
$$|\Theta(\xi,x,u_1) - \Theta(\xi,x,u_2)| \leqslant \Theta_0(x)|u_1 - u_2|;$$
$$|r_i(\xi,x,u_1) - r_i(\xi,x,u_2)| \leqslant L_i(x)|u_1 - u_2|, \quad i = 1, 2;$$
$$\rho = \chi_1 \Delta_1 T(1 + \Delta_2) < 1,$$

где $\Delta_1 = \|L_0(x)\Theta_0(x)\|_{L_2(\Omega_l)}$, $\Delta_2 = \|f(\cdot)(L_1(x) + L_2(x))\|_{L_2(\Omega_l)}$. *Тогда система* (17) *при фиксированных* $\beta_{n_1,\ldots,n_m}$ *однозначно разрешима в пространстве* $B_2(T)$.

Доказательство. Воспользуемся методом сжимающих отображений в $B_2(T)$. Последовательные приближения определяются следующим образом:

$$\begin{cases} u^0_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = \varphi_{1,n_1,\ldots,n_m} V_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) + \varphi_{2,n_1,\ldots,n_m} V_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu), \\ u^{k+1}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = \mathrm{Im}(t; u^k_{n_1,\ldots,n_m}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{18}$$

Для нулевого приближения $u^0_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)$ с нормой в $B_2(T)$ применяем неравенство Коши—Буняковского и в силу первого условия теоремы из (20) получаем оценку

$$\|u^0(t,\nu)\|_{B_2(T)} \leqslant \|\varphi_1\|_{\ell_2} \|V_1(t,\nu)\|_{B_2(T)} + \|\varphi_2\|_{\ell_2} \|V_2(t,\nu)\|_{B_2(T)} \leqslant \chi_0 \chi_1 < \infty, \tag{19}$$

где $\chi_0 = \|\varphi_1\|_{\ell_2} + \|\varphi_2\|_{\ell_2}$.

Применением неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя для первой разности по норме из (18) получаем оценку

$$\|u^1(t,\nu) - u^0(t,\nu)\|_{B_2(T)} \leqslant \chi_1 \|f(x,\gamma^0)\|_{L_2(\Omega_l)} \leqslant \chi_1 \chi_2. \tag{20}$$

Аналогично (20) применяем неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя для произвольной разности $u^{k+1}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) - u^k_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)$ с нормой в $B_2(T)$. В силу третьего, четвертого и пятого условий теоремы из (18) получаем оценку

$$\left\|u^{k+1}(t,\nu) - u^k(t,\nu)\right\|_{B_2(T)} \leqslant \chi_1 \left\|f(x,\gamma^k) - f(x,\gamma^{k-1})\right\|_{L_2(\Omega_l)} \leqslant$$
$$\leqslant \chi_1 \int\limits_{\Omega_l^m} L_0(x)\left|\gamma^k - \gamma^{k-1}\right| dx \leqslant \chi_1 \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_l^m} L_0(x)\Theta_0(x)|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \times$$

$$\times \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left| \max\left\{ u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \;\middle|\; \tau\in[r_1^k;r_2^k] \right\} - \max\left\{ u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \;\middle|\; \tau\in[r_1^{k-1};r_2^{k-1}] \right\} \right| dxd\xi \leqslant$$

$$\leqslant \chi_1\Delta_1 \int_0^T \left\| \max\left\{ u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \;\middle|\; \tau\in[r_1^k;r_2^k] \right\} - \max\left\{ u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \;\middle|\; \tau\in[r_1^{k-1};r_2^{k-1}] \right\} \right\|_{B_2(T)} d\xi, \tag{21}$$

где

$$\gamma^k = \int_0^T \Theta\left(\xi, x, \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \max\left\{ u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \;\middle|\; \tau\in[r_1^k;r_2^k] \right\} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right) d\xi,$$

$$r_i^k = r_i\left(\xi, x, \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\xi,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right), \quad i=1,2,$$

$$k=0,1,2,\ldots, \quad \Delta_1 = \|L_0(x)\Theta_0(x)\|_{L_2(\Omega_l)}.$$

Учтем, что справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\left\| \max\left\{ u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \;\middle|\; \tau\in[r_1^k;r_2^k] \right\} - \max\left\{ u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \;\middle|\; \tau\in[r_1^{k-1};r_2^{k-1}] \right\} \right\|_{B_2(T)} \leqslant \\
&\leqslant \left\| \max\left\{ u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \;\middle|\; \tau\in[r_1^k;r_2^k] \right\} - \max\left\{ u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \;\middle|\; \tau\in[r_1^k;r_2^k] \right\} \right\|_{B_2(T)} + \\
&+ \left\| \max\left\{ u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \;\middle|\; \tau\in[r_1^k;r_2^k] \right\} - \max\left\{ u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \;\middle|\; \tau\in[r_1^{k-1};r_2^{k-1}] \right\} \right\|_{B_2(T)} \leqslant \\
&\leqslant \left\| u^k_{n_1,\ldots,n_m}(t) - u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(t) \right\|_{B_2(T)} + \int_{\Omega_l^m} |f(\cdot)| \left[\left| r_1\left(t,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u^k_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right) - \right.\right. \\
&- r_1\left(t,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right) \Bigg| + \Bigg| r_2\left(t,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u^k_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right) - \\
&\left.\left. - r_2\left(t,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right) \right| \right] dx \leqslant \left\| u^k(t) - u^{k-1}(t) \right\|_{B_2(T)} + \\
&+ \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left| u^k_{n_1,\ldots,n_m}(t) - u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(t) \right| \int_{\Omega_l^m} \left| f(\cdot)(L_1(x)+L_2(x))\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) \right| dx \leqslant \\
&\leqslant (1+\Delta_2) \left\| u^k(t) - u^{k-1}(t) bn \right\|_{B_2(T)},
\end{aligned}$$

где

$$\Delta_2 = \|f(\cdot)(L_1(x)+L_2(x))\|_{L_2(\Omega_l)}.$$

Тогда из (21) придем к следующей оценке:

$$\|u^{k+1}(t,\nu) - u^k(t,\nu)\|_{B_2(T)} \leqslant \rho\cdot\|u^k(t) - u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}. \tag{22}$$

Согласно последнего условия теоремы справедливо $\rho = \chi_1\Delta_1 T(1+\Delta_2) < 1$. Поэтому из оценок (19), (20) и (22) следует, что оператор в правой части (17) является сжимающим и здесь существует единственная неподвижная точка этого оператора. Следовательно, система (17) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$. Теорема доказана. □

4. Сходимость ряда Фурье. Теперь для получения формального разложения решения прямой смешанной задачи (1)—(4) систему (17) подставляем в ряд Фурье (6)

$$U(t,x,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg\{\varphi_{1,n_1,\ldots,n_m}V_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+\varphi_{2,n_1,\ldots,n_m}V_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+$$
$$+V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\Bigg[\beta_{n_1,\ldots,n_m}+\int\limits_{\Omega_l^m}f\Bigg(x,\int\limits_0^T\Theta\Bigg(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\max\Big\{u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu)\ \Big|$$
$$\tau\in[r_1;r_2]\Big\}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg)d\xi\Bigg)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx\Bigg]\Bigg\},\quad (23)$$

где

$$r_i=r_i\Bigg(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u_{n_1,\ldots,n_m}(\xi,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg),\quad i=1,2.$$

Наряду с (23) мы рассмотрим и следующий ряд Фурье последовательных приближений:

$$U^{k+1}(t,x,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg\{\varphi_{1,n_1,\ldots,n_m}V_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+\varphi_{2,n_1,\ldots,n_m}V_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+$$
$$+V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\Bigg[\beta_{n_1,\ldots,n_m}+\int\limits_{\Omega_l^m}f\Bigg(x,\int\limits_0^T\Theta\Bigg(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\max\Big\{u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu)\ \Big|$$
$$\tau\in[r_1^k;r_2^k]\Big\}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg)d\xi\Bigg)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx\Bigg]\Bigg\},\quad (24)$$

где

$$r_i^k=r_i\Bigg(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\xi,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg),\quad i=1,2.$$

Теорема 2. *Предположим, что выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда последовательность функций* $\{U^k(t,x,\nu)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к функции* $U(t,x,\nu)$, *которая является решением прямой задачи* (1)—(4) *при фиксированных значениях* $\beta(x)$. *Кроме того, решение интегро-дифференциального уравнения* (1) *непрерывно зависит от функций* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. *Если функции* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *малы, то и решение смешанной задачи* (1)—(4) *мало при* $\nu\in(-1;0)\cup(0;1)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим разницу операторов (17) и (18). Из справедливости теоремы 1, в частности, следует следующий результат. Применяем неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя. В силу первых двух условий теоремы 1 для первой разности по норме в $B_2(T)$ получим следующую оценку

$$\|u(t,\nu)-u^0(t,\nu)\|_{B_2(T)}\leqslant\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}|V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)|\times$$
$$\times\int\limits_{\Omega_l^m}\Bigg|f\Bigg(x,\int\limits_0^T\Theta\Bigg(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\max\Big\{u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu)\ \Big|\ \tau\in[r_1;r_2]\Big\}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg)d\xi\Bigg)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg|dx\leqslant$$
$$\leqslant\chi_1\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\Bigg[\int\limits_{\Omega_l^m}\big|f(x,\gamma)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\big|dx\Bigg]^2}\leqslant\chi_1\|f(x,\gamma)\|_{L_2(\Omega_l)}\leqslant\chi_1\chi_2.\quad (25)$$

Для второй разности, в силу третьего и четвертого условий теоремы 1, и аналогично оценке (22) получим

$$\left\|u(t,\nu)-u^1(t,\nu)\right\|_{B_2(T)} \leqslant \chi_1 \int\limits_{\Omega_l^m} L_0(x)|\gamma-\gamma^0|dx \leqslant$$

$$\leqslant \chi_1 \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_l^m} L_0(x)\Theta_0(x) \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \Big| \max\Big\{u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \Bigm| \tau\in[r_1;r_2]\Big\} -$$

$$- \max\Big\{u^0_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \Bigm| \tau\in[r^0_1;r^0_2]\Big\}\Big| \cdot \big|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\big| dx d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \chi_1 \int\limits_0^T \big\|L_0(x)\Theta_0(x)\big\|_{L_2(\Omega_l)} \Big\| \max\Big\{u(\tau,\nu) \Bigm| \tau\in[r_1;r_2]\Big\} \max\Big\{u^0(\tau,\nu) \Bigm| \tau\in[r^0_1;r^0_2]\Big\}\Big\|_{B_2(T)} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant (\chi_1)^2 T \chi_2 \Delta_1 (1+\Delta_2). \quad (26)$$

Аналогично (26) для третьей разности по норме имеем оценку

$$\left\|u(t,\nu)-u^2(t,\nu)\right\|_{B_2(T)} \leqslant$$

$$\leqslant \chi_1 T\Delta_1(1+\Delta_2) \Big\| \max\{u(\tau,\nu) \Bigm| \tau\in[r_1;r_2]\Big\} - \max\Big\{u^1(\tau,\nu) \Bigm| \tau\in[r^1_1;r^1_2]\Big\}\Big\|_{B_2(T)} \leqslant$$

$$\leqslant \chi_1\chi_2 \Big[\chi_1 T\Delta_1(1+\Delta_2)\Big]^2 = \chi_1\chi_2\rho^2.$$

Продолжая этот процесс, методом математической индукции получаем, что

$$\left\|u(t,\nu)-u^k(t,\nu)\right\|_{B_2(T)} \leqslant \chi_1\chi_2\rho^k. \quad (27)$$

Согласно теореме 1 имеет место неравенство $\rho = \chi_1 T\Delta_1(1+\Delta_2) < 1$. Поэтому из (27) следует, что

$$\left\|u(t,\nu)-u^k(t,\nu)\right\|_{B_2(T)} \to 0, \quad k\to\infty. \quad (28)$$

Теперь для разности рядов (23) и (24) по модулю получаем, что

$$\big|U(t,x,\nu)-U^{k+1}(t,x,\nu)\big| \leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \Big|u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)-u^{k+1}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\Big| \cdot \big|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \Big|u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)-u^{k+1}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \big|W_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\big| \int\limits_{\Omega_l^m} \big|f(x,\gamma)-f(x,\gamma^k)\big| \cdot \big|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\big| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} T\chi_1 \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \Big|\max\Big\{u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \Bigm| \tau\in[r_1;r_2]\Big\} - \max\Big\{u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \Bigm| \tau\in[r^k_1;r^k_2]\Big\}\Big| \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_l^m} L_0(x)\Theta_0(x)\big|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\big| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l}\chi_1\Delta_1 T \Big\| \max\times\{u(\tau,\nu) \Bigm| \tau\in[r_1;r_2]\Big\} - \max\Big\{u^k(\tau,\nu) \Bigm| \tau\in[r^k_1;r^k_2]\Big\}\Big\|_{B_2(T)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l}\rho\cdot\left\|u(t,\nu)-u^k(t,\nu)\right\|_{B_2(T)}. \quad (29)$$

Из оценки (29) с учетом (28) получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \big|U(t,x,\nu)-U^{k+1}(t,x,\nu)\big| = 0$$

для всех $t\in\Omega_T$.

Покажем непрерывность решения прямой смешанной задачи (1)—(4) по заданным начальным функциям $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Пусть $u_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)$ и $u_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)$ — два разные решения системы (17), соответствующие разным значениям $\varphi_{11,n_1,\ldots,n_m}$ и $\varphi_{12,n_1,\ldots,n_m}$; $\varphi_{21,n_1,\ldots,n_m}$ и $\varphi_{22,n_1,\ldots,n_m}$.

Положим

$$\left|\varphi_{11,n_1,\ldots,n_m}-\varphi_{12,n_1,\ldots,n_m}\right|<\delta_{1n_1,\ldots,n_m},$$
$$\left|\varphi_{21,n_1,\ldots,n_m}-\varphi_{22,n_1,\ldots,n_m}\right|<\delta_{2n_1,\ldots,n_m},$$

где $0<\delta_{i,n_1,\ldots,n_m}$ таково, что величина $\|\delta_i\|_{\ell_2}$ мала, $i=1,2$. Тогда с учетом этого факта в силу условий теоремы из системы (17) получаем, что

$$\begin{aligned}\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}&\left|u_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)-u_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\right|\leqslant\\ &\leqslant\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left|\varphi_{11,n_1,\ldots,n_m}-\varphi_{12,n_1,\ldots,n_m}\right|\cdot\left|V_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\right|+\\ &+\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left|\varphi_{21,n_1,\ldots,n_m}-\varphi_{22,n_1,\ldots,n_m}\right|\cdot\left|V_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\right|+\\ &+\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left|V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\right|\int_{\Omega_l^m}\left|f(x,\gamma_1)-f(x,\gamma_2)\right|\cdot|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)|dx.\end{aligned}$$

Применяем неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя к последней оценке. Тогда в силу условий теоремы 1 получим

$$\begin{aligned}&\left\|u_1(t,\nu)-u_2(t,\nu)\right\|_{B_2(T)}\leqslant\left\|\varphi_{11}-\varphi_{12}\right\|_{\ell_2}\left\|V_1(t,\nu)\right\|_{B_2(T)}+\left\|\varphi_{21}-\varphi_{22}\right\|_{\ell_2}\left\|V_2(t,\nu)\right\|_{B_2(T)}+\\ &+T\|V_3(t,\nu)\|_{B_2(T)}\|L_0(x)\Theta_0(x)\|_{L_2(\Omega_l)}\times\\ &\times\left\|\max\left\{u_1(\tau,\nu)\;\middle|\;\tau\in[r_{11};r_{12}]\right\}-\max\left\{u_2(\tau,\nu)\;\middle|\;\tau\in[r_{21};r_{22}]\right\}\right\|_{B_2(T)}<\\ &<\chi_1\big(\|\delta_1\|_{\ell_2}+\|\delta_2\|_{\ell_2}\big)+\rho\chi_1\left\|u_1(t,\nu)-u_2(t,\nu)\right\|_{B_2(T)},\end{aligned}$$

где

$$r_{ij}=r_i\left(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u_{j,n_1,\ldots,n_m}(\xi,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right),\quad i,j=1,2,$$
$$\rho=T\chi_1\Delta_1(1+\Delta_2)<1.$$

Отсюда имеем, что

$$\left\|u_1(t,\nu)-u_2(t,\nu)\right\|_{B_2(T)}<\frac{l}{2\rho}\varepsilon,$$

где

$$\varepsilon=\frac{2\rho}{l}\frac{\chi_1(\|\delta_1\|_{\ell_2}+\|\delta_2\|_{\ell_2})}{1-\rho\chi_1}.$$

Из этой оценки окончательно следует, что

$$\left|U_1(t,x,\nu)-U_2(t,x,\nu)\right|\leqslant\frac{2\rho}{l}\cdot\left\|u_1(t,\nu)-u_2(t,\nu)\right\|_{B_2(T)}<\varepsilon.$$

Аналогично можно показать, что из малости функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ при $\nu\in(-1;0)\cup(0;1)$ следует, что решение смешанной задачи (1)—(4) мало. Теорема доказана. $\square$

5. Определение коэффициента в обратной задаче. Теперь определим неизвестный коэффициент $\beta(x)$. С этой целью воспользуемся условием (5). Тогда из (23) получаем

$$\omega_{n_1,\ldots,n_m}=\int\limits_{\Omega_l}\omega(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\int\limits_{\Omega_l}\int\limits_0^T G(t)U(t,x)dt\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\int\limits_0^T G(t)u_{n_1,\ldots,n_m}(t)dt=$$

$$=\varphi_{1,n_1,\ldots,n_m}\chi_{1,n_1,\ldots,n_m}+\varphi_{2,n_1,\ldots,n_m}\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}+\chi_{3,n_1,\ldots,n_m}\Bigg[\beta_{n_1,\ldots,n_m}+$$

$$+\int\limits_{\Omega_l^m}f\left(x,\int\limits_0^T\Theta\left(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\max\left\{u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu)\;\Big|\;\tau\in[r_1;r_2]\right\}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right)d\xi\right)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx\Bigg],$$

где

$$\chi_{i,n_1,\ldots,n_m}=\int\limits_0^T G(t)V_{i,n_1,\ldots,n_m}(t)dt,\quad i=1,2,3.$$

Отсюда определяем, что

$$\beta_{n_1,\ldots,n_m}=\frac{\omega_{n_1,\ldots,n_m}-\varphi_{1,n_1,\ldots,n_m}\chi_{1,n_1,\ldots,n_m}-\varphi_{2,n_1,\ldots,n_m}\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}}{\chi_{3,n_1,\ldots,n_m}}-$$

$$-\int\limits_{\Omega_l^m}f\left(x,\int\limits_0^T\Theta\left(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\max\{u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu)\mid\tau\in[r_1;r_2]\}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right)d\xi\right)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, \tag{30}$$

где

$$r_i=r_i\left(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u_{n_1,\ldots,n_m}(\xi,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right),\quad i=1,2.$$

Проверяем условие, что в (30) $\chi_{3,n_1,\ldots,n_m}\neq 0$. Предположим, что

$$\chi_{3,n_1,\ldots,n_m}=\int\limits_0^T G(t)V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t)dt=0. \tag{31}$$

Применяем теорему о среднем. По условию постановки задачи $G(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$. Тогда из (31) получим, что

$$\int\limits_0^T V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t)dt=0.$$

Анализ функций $V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t)$ показывает, что это возможно, если справедливы следующие равенства

$$\int\limits_0^T\sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}(T-t)a_i(t)dt=0,\quad \int\limits_0^T\sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}(T-t)\alpha(t)dt=0. \tag{32}$$

Применяем теорему о среднем к равенству (32). По условию постановки задачи $a_i(t)\neq 0$, $\alpha(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$. Тогда из (32) получаем, что

$$\int\limits_0^T\sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}(T-t)dt=0.$$

Вычисляя этот интеграл, приходим к тригонометрическому уравнению

$$\cos\mu_{n_1,\ldots,n_m}T=\mu^{-1}_{n_1,\ldots,n_m},\quad \mu_{n_1,\ldots,n_m}=\frac{\pi}{l}\sqrt{n_1^2+\ldots+n_m^2}.$$

Множество положительных решений T_k этого уравнения исключаем из рассмотрения. Для всех других значений T выполняется условие $\chi_{3,n_1,\ldots,n_m} \neq 0$.

Представление (30) подставляем в ряд (12)

$$\beta(x) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) \times \left[\frac{\omega_{n_1,\ldots,n_m} - \varphi_{1,n_1,\ldots,n_m}\chi_{1,n_1,\ldots,n_m} - \varphi_{2,n_1,\ldots,n_m}\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}}{\chi_{3,n_1,\ldots,n_m}} - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\Omega_l^m} f\left(x, \int\limits_0^T \Theta\left(\xi, x, \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \max\{u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu) \mid \tau \in [r_1; r_2]\} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right) d\xi\right) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx \right], \tag{33}$$

где

$$r_i = r_i\left(\xi, x, \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u_{n_1,\ldots,n_m}(\xi,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right), \quad i = 1, 2.$$

Подставляя (30) также в ряд (23), получаем

$$U(t,x,\nu) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)[\varphi_{1,n_1,\ldots,n_m} W_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) +$$
$$+ \varphi_{2,n_1,\ldots,n_m} W_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) + \omega_{n_1,\ldots,n_m} W_{3,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)], \tag{34}$$

где

$$W_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = V_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) - V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\frac{\chi_{1,n_1,\ldots,n_m}}{\chi_{3,n_1,\ldots,n_m}},$$
$$W_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = V_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) - V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\frac{\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}}{\chi_{3,n_1,\ldots,n_m}},$$
$$W_{3,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = \frac{V_{3,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)}{\chi_{3,n_1,\ldots,n_m}}.$$

Как видно, в (34) отсутствует нелинейная функция f. Сходимость рядов (33) и (34) доказывается аналогично доказательству сходимости ряда (23).

Нетрудно показать, что решение интегро-дифференциального уравнения (1) $U(t,x)$ устойчиво по функции переопределения $\beta(x)$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1. При всевозможных $n_1, \ldots, n_m$ и регулярных ν решения обратной задачи* (1)—(5) *однозначно определяются из формул* (33) *и* (34). *При этом решение интегро-дифференциального уравнения* (1) $U(t,x)$ *устойчиво по функции переопределения $\beta(x)$ и по заданным начальным функциям $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагабов А. И.* Обобщенный метод Фурье решения смешанных задач для нелинейных уравнений// Диффер. уравн. — 1996. — *32*, № 1. — С. 90–100.
2. *Волков В. М.* Обратная задача для квазилинейного уравнения параболического типа// Диффер. уравн. — 1983. — *19*, № 12. — С. 2166–2169.
3. *Дыйканов Г. А.* Смешанная задача для одного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка// Вестн. ОшГУ. — 2017. — *2*. — С. 41–48.
4. *Зарипов С. К.* Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной точкой в ядре// Вестн. Томск. ун-та. Мат. Мех. — 2017. — *46*. — С. 24–36.
5. *Зарипов С. К.* Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2017. — *21*, № 2. — С. 236–248.
6. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений// Усп. мат. наук. — 1960. — *15*, № 2. — С. 97–154.

7. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничного управления колебаниями струны упругой силой// Диффер. уравн. — 2006. — *42*, № 12. — С. 1699–1711.
8. *Кабанихин С. И., Шишленин М. А.* Восстановление коэффициента диффузии, зависящего от времени, по нелокальным данным// Сиб. ж. вычисл. мат. — 2018. — *21*, № 1. — С. 55–63.
9. *Камынин В. Л.* Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболических уравнений с условием финального переопределения// Мат. заметки. — 2003. — *73*, № 2. — С. 217–227.
10. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением// Мат. сб. — 1992. — *183*, № 4. — С. 49–68.
11. *Саватеев Е. Г.* О задаче определения функции источника и коэффициента параболического уравнения// Докл. РАН. — 1995. — *344*, № 5. — С. 597–598.
12. *Соловьев В. В.* О разрешимости обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке для параболического уравнения// Диффер. уравн. — 1989. — *25*, № 9. — С. 1577–1583.
13. *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала// Диффер. уравн. — 2019. — *55*, № 5. — С. 717–731.
14. *Чандиров Г. И.* Смешанная задача для квазилинейных уравнений гиперболического типа/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Баку, 1970.
15. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. — М.: МГУ, 1992.
16. *Шабадиков К. Х.* Исследование решений смешанных задач для квазилинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей смешанной производной/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Фергана, 1984.
17. *Юлдашев Т. К.* Предельная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с двухточечными смешанными максимумами// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2008. — *1*. — С. 15–22.
18. *Юлдашев Т. К.* Приближенное решение системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с максимумами и приближенное вычисление функционала качества// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Систем. анал. информ. техн. — 2015. — *2*. — С. 13–20.
19. *Юлдашев Т. К.* Обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения высокого порядка с вырожденным ядром// Изв. ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2017. — *50*. — С. 121–132.
20. *Юлдашев Т. К.* Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *145*. — С. 95–109.
21. *Юлдашев Т. К.* Определение коэффициента в нелокальной задаче для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Владикавказ. мат. ж. — 2019. — *21*, № 2. — С. 67–84.
22. *Юлдашев Т. К.* Обратная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *149*. — С. 129–140.
23. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 9. — С. 1703–1711.
24. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 1. — С. 112–123.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 201 (2021). С. 16–32
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-201-16-32

УДК 517. 968

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПСЕВДОПАРАБОЛО-ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2021 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, Б. И. ИСЛОМОВ**

Аннотация. Рассмотрены вопросы разрешимости нелокальной обратной краевой задачи для одного смешанного псевдопараболо-псевдогиперболического интегро-дифференциального уравнения со спектральными параметрами. Найдены регулярные и иррегулярные значения спектральных параметров. Для регулярных значений спектральных параметров установлен критерий однозначной разрешимости поставленной обратной краевой задачи. Для иррегулярных значений спектральных параметров установлен критерий существования бесконечного множества решений поставленной обратной краевой задачи.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, уравнение смешанного типа, спектральный параметр, интегральное условие, разрешимость.

INVERSE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A PSEUDOPARABOLIC-PSEUDOHYPERBOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

© 2021 **T. K. YULDASHEV, B. I. ISLOMOV**

Abstract. In this paper, we examine the solvability of a nonlocal inverse boundary-value problem for a mixed pseudoparabolic-pseudohyperbolic integro-differential equation with spectral parameters. Regular and irregular values of the spectral parameters are found. For regular values of spectral parameters, we obtain a criterion for the unique solvability of the inverse boundary-value problem. For irregular values of spectral parameters, we establish a criterion for the existence of an infinite set of solutions.

Keywords and phrases: integro-differential equation, mixed-type equation, spectral parameter, integral condition, solvability.

AMS Subject Classification: 35A01, 35A02, 35R09, 35M12

1. Постановка задачи. С точки зрения приложений представляют большой интерес дифференциальные уравнения третьего и четвертого порядков [15, 16, 29]. Присутствие интегрального члена в дифференциальном уравнении играет важную роль [19, 24, 27, 30]. Если граница области протекания физического процесса недоступна для измерений или дорого, то достаточным условием для однозначной разрешимости задачи может служить нелокальное условие в интегральной форме [3, 9].

Задачи, где меняется тип дифференциального уравнения в рассматриваемой области, имеют важные приложения (см. [2, 18, 20]). Дифференциальные уравнения смешанного типа изучались в работах многих авторов, в частности, в [1, 4, 5, 7, 10–12, 14, 17, 21, 22]. Изучению прямой краевой задачи для смешанного интегро-дифференциального уравнения посвящены работы [25, 31].

Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения со спектральными параметрами рассматривались в [6, 8, 13, 23, 26, 28]. В настоящей работе изучается однозначная разрешимость нелокальной обратной краевой задачи для смешанного псевдопараболо-псевдогиперболического интегро-дифференциального уравнения со спектральными параметрами.

В прямоугольной области $\Omega = \{(t,x) \mid -T < t < T,\ 0 < x < l\}$ рассматривается смешанное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\begin{cases} U_t - \sum\limits_{i=1}^{m}[U_{tx_ix_i} + U_{x_ix_i}] = \nu \int\limits_0^T K_1(t,s)U(s,x)ds + f_1(t)g_1(x), & t > 0, \\ U_{tt} - \sum\limits_{i=1}^{m}[U_{ttx_ix_i} + \omega^2 U_{x_ix_i}] = \nu \int\limits_{-T}^0 K_2(t,s)U(s,x)ds + f_2(t)g_2(x), & t < 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где T и l — заданные положительные действительные числа, ω — положительный спектральный параметр, $x \in \mathbb{R}^m$, ν — действительный ненулевой спектральный параметр, $0 \neq K_j(t,s) = a_j(t)b_j(s)$, $a_j(t), b_j(s) \in C[-T;T]$, $f_1(t) \in C[0;T]$, $f_2(t) \in C[-T;0]$, $g_j(x) \in C(\Omega_l^m)$ — функции переопределения, $j = 1, 2$.

Задача 1. Найти в многомерной области Ω тройку неизвестных функций

$$\begin{aligned} &U(t,x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega') \cap C^{1,2}(\Omega_+) \cap C^{2,2}(\Omega_-) \cap C^{1+2}_{t,x}(\Omega_+) \cap C^{2+2}_{t,x}(\Omega_-) \cap \\ &\qquad \cap C^{1+2+0+\ldots+0}_{t,x_1,x_2,\ldots,x_m}(\Omega_+) \cap C^{2+2+0+\ldots+0}_{t,x_1,x_2,\ldots,x_m}(\Omega_-) \cap C^{1+0+2+0+\ldots+0}_{t,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m}(\Omega_+) \cap \\ &\qquad \cap C^{2+0+2+0+\ldots+0}_{t,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m}(\Omega_-) \cap \ldots \cap C^{1+0+\ldots+0+2}_{t,x_1,\ldots,x_{m-1},x_m}(\Omega) \cap C^{2+0+\ldots+0+2}_{t,x_1,\ldots,x_{m-1},x_m}(\Omega), \\ &g_i(x) \in C^1(\Omega_l^m), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

удовлетворяющую смешанным интегро-дифференциальным уравнениям (1.1) и следующим нелокальным краевым условиям:

$$\int\limits_0^T U(t,x)dt = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &U(t,0,x_2,x_3,\ldots,x_m) = U(t,l,x_2,x_3,\ldots,x_m) = 0, \\ &U(t,x_1,0,x_3,\ldots,x_m) = U(t,x_1,l,x_3,\ldots,x_m) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &U(t,x_1,\ldots,x_{m-1},0) = U(t,x_1,\ldots,x_{m-1},l) = 0, \\ &U_{x_1x_1}(t,0,x_2,x_3,\ldots,x_m) = U_{x_1x_1}(t,l,x_2,x_3,\ldots,x_m) = 0, \\ &U_{x_1x_1}(t,x_1,0,x_3,\ldots,x_m) = U_{x_1x_1}(t,x_1,l,x_3,\ldots,x_m) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &U_{x_1x_1}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},0) = U_{x_1x_1}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},l) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &U_{x_mx_m}(t,0,x_2,x_3,\ldots,x_m) = U_{x_mx_m}(t,l,x_2,x_3,\ldots,x_m) = 0, \\ &U_{x_mx_m}(t,x_1,0,x_3,\ldots,x_m) = U_{x_mx_m}(t,x_1,l,x_3,\ldots,x_m) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &U_{x_mx_m}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},0) = U_{x_mx_m}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},l) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{aligned} \tag{1.3}$$

и дополнительным условиям

$$U(t_i,x) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.4}$$

где $\varphi(x)$, $\psi_i(x)$ — заданные гладкие функции,

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi_i(0) = \psi_i(l) = 0, \quad i = 1, 2, \quad t_1 \in (0;T), \quad t_2 \in (-T;0),$$

$$\Omega_- = \Big\{(t,x)\;\Big|\; -T<t<0,\ 0<x<l\Big\},\quad \Omega_+ = \Big\{(t,x)\;\Big|\; 0<t<T,\ 0<x<l\Big\},$$
$$\Omega' = \Omega\cup\{x=0\}\cup\{x=l\},\quad \bar\Omega = \Big\{(t,x)\;\Big|\; -T\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x\leqslant l\Big\}.$$

2. Разложение решения прямой задачи (1.1)-(1.3) **в ряд Фурье.** Решение интегро-дифференциального уравнения (1.1) в области Ω разыскивается в виде ряда Фурье

$$U(t,x)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{2.1}$$

где

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\int\limits_{\Omega_l} U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_l} U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\int\limits_0^l\ldots\int\limits_0^l U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx_1\cdot\ldots\cdot dx_m, \tag{2.2}$$

$$\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)=\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \sin\frac{\pi n_1}{l}x_1\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\pi n_m}{l}x_m,$$
$$\Omega_l^m=[0,l]^m, n_1,\ldots,n_m=1,2,\ldots$$

Также предположим, что

$$g_i(x)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} g_{in_1,\ldots,n_m}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{2.3}$$

где

$$g_{in_1,\ldots,n_m}=\int\limits_{\Omega_l} g_i(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx,\quad i=1,2.$$

Подставляя ряды (2.1) и (2.3) в уравнение (1.1), получаем счетную систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений

$$u'_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}u_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\nu\int\limits_0^T a_1(t)b_1(s)u_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds+f_1(t)g_{1n_1,\ldots,n_m},\quad t>0, \tag{2.4}$$

$$u''_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}\omega^2u_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\nu\int\limits_{-T}^0 a_2(t)b_2(s)u_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds+f_2(t)g_{2n_1,\ldots,n_m},\quad t<0, \tag{2.5}$$

где

$$\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}=\frac{\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}}{1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}},\quad \mu_{n_1,\ldots,n_m}=\frac{\pi}{l}\sqrt{n_1^2+\ldots+n_m^2}.$$

Используя обозначения

$$\alpha_{n_1,\ldots,n_m}=\int\limits_0^T b_1(s)u_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds, \tag{2.6}$$

$$\beta_{n_1,\ldots,n_m}=\int\limits_{-T}^0 b_2(s)u_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds \tag{2.7}$$

счетные системы уравнений (2.4) и (2.5) запишем в виде

$$u'_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}u_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\nu a_1(t)\alpha_{n_1,\ldots,n_m}+f_1(t)g_{1n_1,\ldots,n_m},\quad t>0, \tag{2.8}$$

$$u''_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}\omega^2u_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\nu a_2(t)\beta_{n_1,\ldots,n_m}+f_2(t)g_{2n_1,\ldots,n_m},\quad t<0. \tag{2.9}$$

Счетные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.8) и (2.9) решаются методом вариации произвольных постоянных

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = A_{n_1,\ldots,n_m} \exp\{-\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m} t\} + \eta_{1n_1,\ldots,n_m}(t), \qquad t > 0, \tag{2.10}$$

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = B_{n_1,\ldots,n_m} \cos \lambda_{n_1,\ldots,n_m} \omega t + C_{n_1,\ldots,n_m} \sin \lambda_{n_1,\ldots,n_m} \omega t + \eta_{2n_1,\ldots,n_m}(t), \quad t < 0, \tag{2.11}$$

где $A_{n_1,\ldots,n_m}$, $B_{n_1,\ldots,n_m}$, $C_{n_1,\ldots,n_m}$ — неизвестные постоянные, подлежащие однозначному определению,

$$\eta_{1n_1,\ldots,n_m}(t) = \nu \alpha_{n_1,\ldots,n_m} h_{1n_1,\ldots,n_m}(t) + g_{1n_1,\ldots,n_m} h_{2n_1,\ldots,n_m}(t),$$
$$\eta_{2n_1,\ldots,n_m}(t) = \nu \beta_{n_1,\ldots,n_m} \delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t) + g_{2n_1,\ldots,n_m} \delta_{2n_1,\ldots,n_m}(t),$$
$$h_{1n_1,\ldots,n_m}(t) = \int\limits_0^t \exp\{-\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}(t-s)\} a_1(s) ds,$$
$$h_{2n_1,\ldots,n_m}(t) = \int\limits_0^t \exp\{-\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}(t-s)\} f_1(s) ds,$$
$$\delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t) = \frac{1}{\lambda_{n_1,\ldots,n_m}\omega} \int\limits_0^t \sin \lambda_{n_1,\ldots,n_m} \omega (t-s) a_2(s) ds,$$
$$\delta_{2n_1,\ldots,n_m}(t) = \frac{1}{\lambda_{n_1,\ldots,n_m}\omega} \int\limits_0^t \sin \lambda_{n_1,\ldots,n_m} \omega (t-s) f_2(s) ds.$$

Из характера постановки задачи следует, что выполняется условие непрерывного сопряжения $U(0+0,x) = U(0-0,x)$. Отсюда с учетом формулы (2.2) имеем

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(0+0) = \int\limits_{\Omega_l^m} U(0+0,x) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx = \int\limits_{\Omega_l^m} U(0-0,x) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx = u_{n_1,\ldots,n_m}(0-0). \tag{2.12}$$

Дифференцируя функции (2.2) один раз по t, аналогично (2.12) получаем

$$u'_{n_1,\ldots,n_m}(0+0) = \int\limits_{\Omega_l^m} U_t(0+0,x) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx = \int\limits_{\Omega_l^m} U_t(0-0,x) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx = u'_{n_1,\ldots,n_m}(0-0). \tag{2.13}$$

Из представления (2.10) и (2.11) с учетом условий (2.12) и (2.13) находим

$$B_{n_1,\ldots,n_m} = A_{n_1,\ldots,n_m}, \quad C_{n_1,\ldots,n_m} = -\frac{\lambda_{n_1,\ldots,n_m}}{\omega} A_{n_1,\ldots,n_m}.$$

Тогда функции (2.10) и (2.11) принимают вид

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = A_{n_1,\ldots,n_m} \exp\{-\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m} t\} + \eta_{1n_1,\ldots,n_m}(t), \qquad t > 0, \tag{2.14}$$

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = A_{n_1,\ldots,n_m} \cos \lambda_{n_1,\ldots,n_m} \omega t - \frac{\lambda_{n_1,\ldots,n_m}}{\omega} A_{n_1,\ldots,n_m} \sin \lambda_{n_1,\ldots,n_m} \omega t + \eta_{2n_1,\ldots,n_m}(t),\ t < 0. \tag{2.15}$$

Условие (1.2) с учетом формулы (2.2) принимает следующий вид:

$$\int\limits_0^T u_{n_1,\ldots,n_m}(t) dt = \int\limits_{\Omega_l^m} \int\limits_0^T U(t,x) dt \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx = \int\limits_{\Omega_l^m} \varphi(x) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx = \varphi_{n_1,\ldots,n_m}. \tag{2.16}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $A_{n_1,\ldots,n_m}$ в (2.14) и (2.15) используем условие (2.16):

$$\int\limits_0^T u_{n_1,\ldots,n_m}(t)dt = \int\limits_0^T [A_{n_1,\ldots,n_m}\exp\{-\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}t\} + \eta_{1n_1,\ldots,n_m}(t)]dt =$$
$$= -\frac{A_{n_1,\ldots,n_m}}{\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}}(\exp\{-\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}T\} - 1) + \xi_{1n_1,\ldots,n_m} = \varphi_{n_1,\ldots,n_m}, \quad (2.17)$$

где

$$\xi_{1n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_0^T \eta_{1n_1,\ldots,n_m}(t)dt.$$

Так как $0 < T < \infty$, $0 < \lambda^2_{n_1,\ldots,n_m} < 1$, то в (2.17) очевидно, что $\exp\{-\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}T\} \neq 1$. Поэтому из (2.17) однозначно определяется $A_{n_1,\ldots,n_m}$:

$$A_{n_1,\ldots,n_m} = \frac{\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}}(\varphi_{n_1,\ldots,n_m} - \xi_{1n_1,\ldots,n_m}(t)),$$

где $\sigma_{n_1,\ldots,n_m} = 1 - \exp\{-\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}T\}$. Подставляя найденные значения $A_{n_1,\ldots,n_m}$ в формулы (2.14) и (2.15), приходим к следующим представлениям:

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = \frac{\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}}(\varphi_{n_1,\ldots,n_m} - \xi_{1n_1,\ldots,n_m})\exp\{-\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}t\} + \eta_{1n_1,\ldots,n_m}(t), \quad t > 0, \quad (2.18)$$

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = \frac{\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}}(\varphi_{n_1,\ldots,n_m} - \xi_{1n_1,\ldots,n_m})\times$$
$$\times\left[\cos\lambda_{n_1,\ldots,n_m}\omega t - \frac{\lambda_{n_1,\ldots,n_m}}{\omega}\sin\lambda_{n_1,\ldots,n_m}\omega t\right] + \eta_{2n_1,\ldots,n_m}(t), \quad t < 0. \quad (2.19)$$

С учетом того, что

$$\xi_{1n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_0^T \eta_{1n_1,\ldots,n_m}(t)dt,$$
$$\eta_{1n_1,\ldots,n_m}(t) = \nu\alpha_{n_1,\ldots,n_m}h_{1n_1,\ldots,n_m}(t) + g_{1n_1,\ldots,n_m}h_{2n_1,\ldots,n_m}(t),$$
$$\eta_{2n_1,\ldots,n_m}(t) = \nu\beta_{n_1,\ldots,n_m}\delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t) + g_{2n_1,\ldots,n_m}\delta_{2n_1,\ldots,n_m}(t),$$

представления (2.18) и (2.19) записываются в следующем виде:

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = \varphi_{n_1,\ldots,n_m}M_{1n_1,\ldots,n_m}(t) + \nu\alpha_{n_1,\ldots,n_m}M_{2n_1,\ldots,n_m}(t) + g_{1n_1,\ldots,n_m}M_{3n_1,\ldots,n_m}(t),\ t > 0, \quad (2.20)$$
$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = \varphi_{n_1,\ldots,n_m}N_{1n_1,\ldots,n_m}(t) - \nu\alpha_{n_1,\ldots,n_m}N_{2n_1,\ldots,n_m}(t) +$$
$$+ g_{1n_1,\ldots,n_m}N_{3n_1,\ldots,n_m}(t) + \nu\beta_{n_1,\ldots,n_m}\delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t) + g_{2n_1,\ldots,n_m}\delta_{2n_1,\ldots,n_m}(t),\ t < 0, \quad (2.21)$$

где

$$M_{1n_1,\ldots,n_m}(t) = \frac{\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}}\exp\{-\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}t\},$$

$$M_{2n_1,\ldots,n_m}(t) = h_{1n_1,\ldots,n_m}(t) - M_{1n_1,\ldots,n_m}(t)\int\limits_0^T h_{1n_1,\ldots,n_m}(t)dt,$$

$$M_{3n_1,\ldots,n_m}(t) = h_{2n_1,\ldots,n_m}(t) - M_{1n_1,\ldots,n_m}(t)\int\limits_0^T h_{2n_1,\ldots,n_m}(t)dt,$$

$$N_{1n_1,\dots,n_m}(t)=\frac{\lambda^2_{n_1,\dots,n_m}}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}}\left[\cos\lambda_{n_1,\dots,n_m}\omega t-\frac{\lambda_{n_1,\dots,n_m}}{\omega}\sin\lambda_{n_1,\dots,n_m}\omega t\right],$$

$$N_{2n_1,\dots,n_m}(t)=N_{1n_1,\dots,n_m}(t)\int\limits_0^T h_{1n_1,\dots,n_m}(t)dt,$$

$$N_{3n_1,\dots,n_m}(t)=N_{1n_1,\dots,n_m}(t)\int\limits_0^T h_{2n_1,\dots,n_m}(t)dt,$$

$$\sigma_{n_1,\dots,n_m}=1-\exp\{-\lambda^2_{n_1,\dots,n_m}T\}.$$

Подставляем (2.20) и (2.21) в (2.7) и (2.8), соответственно. Тогда получаем систему из двух счетных систем алгебраических уравнений (СДССАУ):

$$\begin{cases}\alpha_{n_1,\dots,n_m}(1-\nu P_{12n_1,\dots,n_m})=\varphi_{n_1,\dots,n_m}P_{11n_1,\dots,n_m}+g_{1n_1,\dots,n_m}P_{13n_1,\dots,n_m},\\ \alpha_{n_1,\dots,n_m}\nu P_{22n_1,\dots,n_m}+\beta_{n_1,\dots,n_m}(1-\nu Q_{1n_1,\dots,n_m})=\\ \qquad =\varphi_{n_1,\dots,n_m}P_{21n_1,\dots,n_m}+g_{1n_1,\dots,n_m}P_{23n_1,\dots,n_m}+g_{2n_1,\dots,n_m}Q_{2n_1,\dots,n_m},\end{cases}\tag{2.22}$$

где

$$P_{1in_1,\dots,n_m}=\int\limits_0^T b_1(s)M_{in_1,\dots,n_m}(s)ds,$$

$$P_{2in_1,\dots,n_m}=\int\limits_{-T}^0 b_2(s)N_{in_1,\dots,n_m}(s)ds,\quad i=1,2,3,$$

$$Q_{jn_1,\dots,n_m}=\int\limits_{-T}^0 b_2(s)\delta_{jn_1,\dots,n_m}(s)ds,\quad j=1,2.$$

Для однозначной разрешимости СДССАУ (2.22) требуется выполнение следующих условий:

$$\nu=\nu_{n_1,\dots,n_m}\neq\frac{1}{P_{12n_1,\dots,n_m}},\quad \nu=\nu_{n_1,\dots,n_m}\neq\frac{1}{Q_{1n_1,\dots,n_m}}.\tag{2.23}$$

Пусть выполняются условия (2.23). Решим сначала СДССАУ (2.22), а затем прямую задачу (1.1)—(1.3). Подставляя решения СДССАУ (2.22)

$$\alpha_{n_1,\dots,n_m}=\frac{\varphi_{n_1,\dots,n_m}P_{11n_1,\dots,n_m}+g_{1n_1,\dots,n_m}P_{13n_1,\dots,n_m}}{1-\nu P_{12n_1,\dots,n_m}},$$

$$\beta_{n_1,\dots,n_m}=\frac{\varphi_{n_1,\dots,n_m}P_{21n_1,\dots,n_m}+g_{1n_1,\dots,n_m}P_{23n_1,\dots,n_m}+g_{2n_1,\dots,n_m}Q_{2n_1,\dots,n_m}}{1-\nu Q_{1n_1,\dots,n_m}}-$$
$$-\nu\frac{P_{22n_1,\dots,n_m}}{1-\nu Q_{1n_1,\dots,n_m}}\cdot\frac{\varphi_{n_1,\dots,n_m}P_{11n_1,\dots,n_m}+g_{1n_1,\dots,n_m}P_{13n_1,\dots,n_m}}{1-\nu P_{12n_1,\dots,n_m}}$$

в (2.20) и (2.21), получаем следующие представления:

$$u_{n_1,\dots,n_m}(t,\nu)=\varphi_{n_1,\dots,n_m}\Phi_{1n_1,\dots,n_m}(t,\nu)+g_{1n_1,\dots,n_m}\Phi_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu),\qquad t>0,\tag{2.24}$$

$$u_{n_1,\dots,n_m}(t,\nu)=\varphi_{n_1,\dots,n_m}\Psi_{1n_1,\dots,n_m}(t,\nu)+$$
$$+g_{1n_1,\dots,n_m}\Psi_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu)+g_{2n_1,\dots,n_m}\Psi_{3n_1,\dots,n_m}(t,\nu),\quad t<0,\tag{2.25}$$

где

$$\Phi_{1n_1,\dots,n_m}(t,\nu)=M_{1n_1,\dots,n_m}(t)+\nu M_{2n_1,\dots,n_m}(t)\frac{P_{11n_1,\dots,n_m}}{1-\nu P_{12n_1,\dots,n_m}},$$

$$\Phi_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu)=\nu M_{2n_1,\dots,n_m}(t)\frac{P_{13n_1,\dots,n_m}}{1-\nu P_{12n_1,\dots,n_m}},$$

$$\Psi_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)=N_{1n_1,\ldots,n_m}(t)-\nu N_{2n_1,\ldots,n_m}(t)\frac{P_{11n_1,\ldots,n_m}}{1-\nu P_{12n_1,\ldots,n_m}}+$$
$$+\nu\delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t)\left[\frac{P_{21n_1,\ldots,n_m}}{1-\nu Q_{1n_1,\ldots,n_m}}-\nu\frac{P_{22n_1,\ldots,n_m}}{1-\nu Q_{1n_1,\ldots,n_m}}\frac{P_{11n_1,\ldots,n_m}}{1-\nu P_{12n_1,\ldots,n_m}}\right],$$

$$\Psi_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)=N_{3n_1,\ldots,n_m}(t)-\nu N_{2n_1,\ldots,n_m}(t)\frac{P_{13n_1,\ldots,n_m}}{1-\nu P_{12n_1,\ldots,n_m}}+$$
$$+\nu\delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t)\left[\frac{P_{23n_1,\ldots,n_m}}{1-\nu Q_{1n_1,\ldots,n_m}}-\nu\frac{P_{22n_1,\ldots,n_m}}{1-\nu Q_{1n_1,\ldots,n_m}}\frac{P_{13n_1,\ldots,n_m}}{1-\nu P_{12n_1,\ldots,n_m}}\right],$$

$$\Psi_{3n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)=\delta_{2n_1,\ldots,n_m}(t)+\nu\delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t)\frac{Q_{2n_1,\ldots,n_m}}{1-\nu Q_{1n_1,\ldots,n_m}}.$$

Теперь представления (2.24) и (2.25) подставляем в ряд Фурье (2.1) и получаем формальное решение прямой задачи (1.1)—(1.3):

$$U(t,x,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\times$$
$$\times\Big[\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\Phi_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+g_{1n_1,\ldots,n_m}\Phi_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\Big],\quad t>0, \tag{2.26}$$

$$U(t,x,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big[\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\Psi_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+$$
$$+g_{1n_1,\ldots,n_m}\Psi_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+g_{2n_1,\ldots,n_m}\Psi_{3n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\Big],\quad t<0. \tag{2.27}$$

3. Иррегулярные значения спектральных параметров. Рассмотрим равенства

$$\nu_{1n_1,\ldots,n_m}=\frac{1}{P_{12n_1,\ldots,n_m}},\quad \nu_{2n_1,\ldots,n_m}=\frac{1}{Q_{1n_1,\ldots,n_m}}.$$

Из неравенства

$$\int\limits_0^T\exp\{-\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}t\}dt=\frac{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}}{\lambda^2_{n_1,\ldots,n_m}}\neq 0$$

следует $P_{12n_1,\ldots,n_m}\neq 0$. Величина $Q_{1n_1,\ldots,n_m}$ зависит от параметра ω. Покажем, что при любых значениях параметра ω будет $Q_{1n_1,\ldots,n_m}=Q_{1n_1,\ldots,n_m}(\omega)\neq 0$. Действительно, если положим $Q_{1n_1,\ldots,n_m}(\omega)=0$, то отсюда получим тригонометрическое уравнение

$$\sin 2y_{n_1,\ldots,n_m}-2\sin y_{n_1,\ldots,n_m}=y_{n_1,\ldots,n_m},$$

где $y_{n_1,\ldots,n_m}=\lambda_{n_1,\ldots,n_m}\omega T$. Данное тригонометрическое уравнение не имеет положительных решений. Следовательно, $Q_{1n_1,\ldots,n_m}=Q_{1n_1,\ldots,n_m}(\omega)\neq 0$.

Значения

$$\nu_{1n_1,\ldots,n_m}=\frac{1}{P_{12n_1,\ldots,n_m}},\quad \nu_{2n_1,\ldots,n_m}=\frac{1}{Q_{1n_1,\ldots,n_m}}$$

спектрального параметра ν назовём иррегулярными и обозначим множество таких чисел через $\Im_1=\{\nu_{1n_1,\ldots,n_m},\nu_{2n_1,\ldots,n_m}\}$. Это множество отнимем из следующего множества $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. Получившиеся множество $\Lambda_1=[(-\infty;0)\cup(0;\infty)]\setminus\Im_1$ назовем множеством регулярных значений параметра ν. Для всех значений $\nu\in\Lambda_1$ выполняются условия (2.23).

Для чисел

$$(n_1,\ldots,n_m,\nu,\omega)\in\aleph_1=\Big\{(n_1,\ldots,n_m,\nu,\omega):\ n_1,\ldots,n_m\in\mathbb{N},\ \nu\in\Lambda_1,\ \omega\in(0;\infty)\Big\}$$

формальное решение прямой задачи (1.1)—(1.3) представляется в виде рядов (2.26) и (2.27), и это представление единственно в области Ω.

Для тройки чисел

$$(n_1, \ldots, n_m, \nu, \omega) \in \aleph_2 = \Big\{(n_1, \ldots, n_m, \nu, \omega) : \ n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}, \ \nu \in \Im_1, \ \omega \in (0; \infty)\Big\}$$

формальное решение прямой задачи (1.1)—(1.3) представляется в области Ω в виде следующих рядов Фурье:

$$U(t, x, \nu) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\times \\ \times [\nu C_{1n_1,\ldots,n_m} M_{2n_1,\ldots,n_m}(t) + g_{1n_1,\ldots,n_m} M_{4n_1,\ldots,n_m}(t)], \quad t > 0, \tag{3.1}$$

$$U(t, x, \nu) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)[\nu C_{2n_1,\ldots,n_m} \delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t) + \\ + g_{1n_1,\ldots,n_m} N_{4n_1,\ldots,n_m}(t) + g_{2n_1,\ldots,n_m} N_{5n_1,\ldots,n_m}(t)], \quad t < 0, \tag{3.2}$$

где $C_{in_1,\ldots,n_m}$ $(i = 1, 2)$ — произвольные постоянные,

$$M_{4n_1,\ldots,n_m}(t) = M_{3n_1,\ldots,n_m}(t) - \frac{P_{13n_1,\ldots,n_m}}{P_{11n_1,\ldots,n_m}} M_{1n_1,\ldots,n_m}(t),$$

$$N_{4n_1,\ldots,n_m}(t) = N_{3n_1,\ldots,n_m}(t) - N_{1n_1,\ldots,n_m}(t)\frac{P_{13n_1,\ldots,n_m}}{P_{11n_1,\ldots,n_m}} - \\ - N_{2n_1,\ldots,n_m}(t)\left[\frac{P_{13n_1,\ldots,n_m} P_{21n_1,\ldots,n_m}}{P_{11n_1,\ldots,n_m} P_{22n_1,\ldots,n_m}} - \frac{P_{23n_1,\ldots,n_m}}{P_{11n_1,\ldots,n_m}}\right],$$

$$N_{5n_1,\ldots,n_m}(t) = \delta_{2n_1,\ldots,n_m}(t) - \frac{Q_{2n_1,\ldots,n_m}}{P_{22n_1,\ldots,n_m}} N_{2n_1,\ldots,n_m}(t),$$
$$P_{11n_1,\ldots,n_m} \neq 0, \quad P_{22n_1,\ldots,n_m} \neq 0.$$

4. Обратная задача (1.1)—(1.4)**. Регулярный случай.** Воспользуемся дополнительными условиями (1.4) и из рядов Фурье (2.26) и (2.27) получаем, что

$$\psi_1(x) = U(t_1, x, \nu) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\times \\ \times [\varphi_{n_1,\ldots,n_m} \Phi_{1n_1,\ldots,n_m}(t_1, \nu) + g_{1n_1,\ldots,n_m} \Phi_{2n_1,\ldots,n_m}(t_1, \nu)], \quad t > 0, \tag{4.1}$$

$$\psi_2(x) = U(t_2, x, \nu) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)[\varphi_{n_1,\ldots,n_m} \Psi_{1n_1,\ldots,n_m}(t_2, \nu) + \\ + g_{1n_1,\ldots,n_m} \Psi_{2n_1,\ldots,n_m}(t_2, \nu) + g_{2n_1,\ldots,n_m} \Psi_{3n_1,\ldots,n_m}(t_2, \nu)], \quad t < 0. \tag{4.2}$$

Предположим, что функции $\psi_i(x)$ разлагаются в ряд Фурье

$$\psi_i(x) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \psi_{in_1,\ldots,n_m} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{4.3}$$

где

$$\psi_{in_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \psi_i(x) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx, \quad i = 1, 2, n_1, \ldots, n_m = 1, 2, \ldots$$

Тогда с учетом (4.3) из (4.1) и (4.2) получаем

$$\psi_{1n_1,\ldots,n_m} = \varphi_{n_1,\ldots,n_m} \Phi_{1n_1,\ldots,n_m}(t_1, \nu) + g_{1n_1,\ldots,n_m} \Phi_{2n_1,\ldots,n_m}(t_1, \nu),$$
$$\psi_{2n_1,\ldots,n_m} = \varphi_{n_1,\ldots,n_m} \Psi_{1n_1,\ldots,n_m}(t_2, \nu) + g_{1n_1,\ldots,n_m} \Psi_{2n_1,\ldots,n_m}(t_2, \nu) + g_{2n_1,\ldots,n_m} \Psi_{3n_1,\ldots,n_m}(t_2, \nu).$$

Отсюда находим соотношения для функций переопределения:

$$g_{1n_1,\dots,n_m} = \frac{\psi_{1n_1,\dots,n_m} - \varphi_{n_1,\dots,n_m}\Phi_{1n_1,\dots,n_m}(t_1,\nu)}{\Phi_{2n_1,\dots,n_m}(t_1,\nu)}, \Phi_{2n_1,\dots,n_m}(t_1,\nu) \neq 0, \tag{4.4}$$

$$g_{2n_1,\dots,n_m} = \frac{\psi_{2n_1,\dots,n_m} - \psi_{1n_1,\dots,n_m} + \varphi_{n_1,\dots,n_m}(\Phi_{1n_1,\dots,n_m}(t_1,\nu) - \Psi_{1n_1,\dots,n_m}(t_2,\nu))}{\Psi_{3n_1,\dots,n_m}(t_2,\nu)}, \tag{4.5}$$

где $\Psi_{3n_1,\dots,n_m}(t_2,\nu) \neq 0$. Подставляя представления (4.4) и (4.5) в ряд Фурье (2.3), получаем

$$g_1(x) = \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} [-\varphi_{n_1,\dots,n_m}\chi_{2n_1,\dots,n_m} + \psi_{1n_1,\dots,n_m}\chi_{1n_1,\dots,n_m}]\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x), \tag{4.6}$$

$$g_2(x) = \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\times$$
$$\times [\varphi_{n_1,\dots,n_m}\chi_{4n_1,\dots,n_m} - \psi_{1n_1,\dots,n_m}\chi_{3n_1,\dots,n_m} + \psi_{2n_1,\dots,n_m}\chi_{3n_1,\dots,n_m}], \tag{4.7}$$

где

$$\chi_{1n_1,\dots,n_m} = (\Phi_{2n_1,\dots,n_m}(t_1,\nu))^{-1}, \qquad \chi_{2n_1,\dots,n_m} = \frac{\Phi_{1n_1,\dots,n_m}(t_1,\nu)}{\Phi_{2n_1,\dots,n_m}(t_1,\nu)},$$
$$\chi_{3n_1,\dots,n_m} = (\Psi_{3n_1,\dots,n_m}(t_2,\nu))^{-1}, \qquad \chi_{4n_1,\dots,n_m} = \frac{\Phi_{1n_1,\dots,n_m}(t_1,\nu) - \Psi_{1n_1,\dots,n_m}(t_2,\nu)}{\Psi_{3n_1,\dots,n_m}(t_2,\nu)}.$$

Теперь подставляем представления (4.4) и (4.5) в основные ряды (2.26) и (2.27)

$$U(t,x,\nu) = \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\times$$
$$\times [\varphi_{n_1,\dots,n_m}V_{1n_1,\dots,n_m}(t,\nu) + \psi_{1n_1,\dots,n_m}V_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu)], \quad t > 0, \tag{4.8}$$

$$U(t,x,\nu) = \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)[\varphi_{n_1,\dots,n_m}W_{1n_1,\dots,n_m}(t,\nu)+$$
$$+ \psi_{1n_1,\dots,n_m}W_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu) + \psi_{2n_1,\dots,n_m}W_{3n_1,\dots,n_m}(t,\nu)], \quad t < 0, \tag{4.9}$$

где

$$V_{1n_1,\dots,n_m}(t,\nu) = \Phi_{1n_1,\dots,n_m}(t,\nu) - \chi_{2n_1,\dots,n_m}\Phi_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu),$$
$$V_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu) = \chi_{1n_1,\dots,n_m}\Phi_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu),$$
$$W_{1n_1,\dots,n_m}(t,\nu) = \Psi_{1n_1,\dots,n_m}(t,\nu) - \chi_{2n_1,\dots,n_m}\Psi_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu) + \chi_{4n_1,\dots,n_m}\Psi_{3n_1,\dots,n_m}(t,\nu),$$
$$W_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu) = \chi_{1n_1,\dots,n_m}\Psi_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu) - \chi_{3n_1,\dots,n_m}\Psi_{3n_1,\dots,n_m}(t,\nu),$$
$$W_{3n_1,\dots,n_m}(t,\nu) = \chi_{3n_1,\dots,n_m}\Psi_{3n_1,\dots,n_m}(t,\nu).$$

5. Сходимость рядов (4.6)—(4.9)**.** Покажем, что при определенных условиях относительно функции $\varphi(x)$, $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ ряды (4.6)—(4.9) сходятся абсолютно и равномерно в области $\bar{\Omega}$. Действительно, согласно постановке задачи функции $V_{1n_1,\dots,n_m}(t,\nu)$, $V_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu)$ ограничены равномерно на отрезке $[0;T]$, а функции, $W_{1n_1,\dots,n_m}(t,\nu)$, $W_{2n_1,\dots,n_m}(t,\nu)$ и $W_{3n_1,\dots,n_m}(t,\nu)$, в силу выполнения условия (2.23), равномерно ограничены на отрезке $[-T;0]$. Поэтому

$$|V_{in_1,\dots,n_m}(t,\nu)| < \infty \quad \text{для всех } t \in [0;T],\ i = 1,2,$$
$$|W_{jn_1,\dots,n_m}(t,\nu)| < \infty \quad \text{для всех } t \in [-T;0],\ j = 1,2,3.$$

Кроме того,

$$|\chi_{kn_1,\dots,n_m}| < \infty, \quad k = \overline{1,4}.$$

Так как $0 < \lambda_{n_1,\ldots,n_m} < 1$, то для любых натуральных $n_1, \ldots, n_m$ существуют такие конечные постоянные числа C_j, что имеют место оценки

$$\max_{n_1,\ldots,n_m\in\mathbb{N}} \Big\{|\chi_{1n_1,\ldots,n_m}|;\ |\chi_{2n_1,\ldots,n_m}|;\ |\chi_{3n_1,\ldots,n_m}|;\ |\chi_{4n_1,\ldots,n_m}|\Big\} \leqslant C_1, \tag{5.1}$$

$$\max_{n_1,\ldots,n_m\in\mathbb{N}} \Big\{\max_{t\in[0;T]} |V_{in_1,\ldots,n_m}(t,\nu)|;\ \max_{t\in[-T;0]} |W_{jn_1,\ldots,n_m}(t,\nu)|\Big\} \leqslant C_2, \tag{5.2}$$

$$\max_{n_1,\ldots,n_m\in\mathbb{N}} \max_{t\in[0;T]} \left|V'_{in_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\right| \leqslant C_3, \quad i=1,2, \tag{5.3}$$

$$\max_{n_1,\ldots,n_m\in\mathbb{N}} \max_{t\in[-T;0]} \left|W''_{jn_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\right| \leqslant C_4, \quad j=1,2,3. \tag{5.4}$$

Условия А. Пусть функции $\varphi(x), \psi_i(x) \in C^2[0;l]$, $i=1,2$ на сегменте $[0;l]$ имеют кусочно непрерывные производные третьего порядка. Тогда путем трехкратного интегрирования по частям по переменной x_1 в интегралах

$$\varphi_{n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \varphi(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, \quad \psi_{in_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \psi_i(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, \quad i=1,2,$$

получаем:

$$\varphi_{n_1,\ldots,n_m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{\varphi'''_{n_1,\ldots,n_m}}{n_1^3}, \quad \psi_{in_1,\ldots,n_m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{\psi'''_{in_1,\ldots,n_m}}{n_1^3}, \tag{5.5}$$

где

$$\varphi'''_{n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \frac{\partial^3\varphi(x)}{\partial x_1^3}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, \quad \psi'''_{in_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \frac{\partial^3\psi_i(x)}{\partial x_1^3}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx. \tag{5.6}$$

Интегрируя по частям три раза по переменной x_2, из (5.6) получаем

$$\varphi'''_{n_1,\ldots,n_m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{\varphi^{(6)}_{n_1,\ldots,n_m}}{n_2^3}, \quad \psi'''_{in_1,\ldots,n_m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{\psi^{(6)}_{in_1,\ldots,n_m}}{n_2^3}, \tag{5.7}$$

где

$$\varphi^{(6)}_{n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \frac{\partial^6\varphi(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, \quad \psi^{(6)}_{in_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \frac{\partial^6\psi_i(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\varphi^{(3m-3)}_{n_1,\ldots,n_m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{\varphi^{(3m)}_{n_1,\ldots,n_m}}{n_m^3}, \quad \psi^{(3m-3)}_{in_1,\ldots,n_m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{\psi^{(3m)}_{in_1,\ldots,n_m}}{n_m^3}, \tag{5.8}$$

где

$$\varphi^{(3m)}_{n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \frac{\partial^{3m}\varphi(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3\ldots\partial x_m^3}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, \quad \psi^{(3m)}_{in_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \frac{\partial^{5m}\psi_i(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3\ldots\partial x_m^3}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx.$$

Здесь использованы неравенства Бесселя

$$\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left[\varphi^{(3m)}_{n_1,\ldots,n_m}\right]^2 \leqslant \left(\frac{2}{l}\right)^m \int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m}\varphi(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3\ldots\partial x_m^3}\right]^2 dx, \tag{5.9}$$

$$\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left[\psi^{(3m)}_{in_1,\ldots,n_m}\right]^2 \leqslant \left(\frac{2}{l}\right)^m \int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m}\psi_i(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3\ldots\partial x_m^3}\right]^2 dx. \tag{5.10}$$

Из (5.5), (5.7) и (5.8) следует, что

$$\varphi_{n_1,\ldots,n_m} = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{3m} \frac{\varphi^{(3m)}_{n_1,\ldots,n_m}}{n_1^3\ldots n_m^3}, \quad \psi_{in_1,\ldots,n_m} = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{3m} \frac{\psi^{(3m)}_{in_1,\ldots,n_m}}{n_1^3\ldots n_m^3}, \quad i=1,2. \tag{5.11}$$

Учитывая формулы (5.2), (5.9)—(5.11) и применяя неравенства Коши—Буняковского и Бесселя, для ряда (4.8) при $t > 0$ получим

$$
\begin{gathered}
|U(t,x,\nu)| \leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)| \cdot |\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \leqslant \\
\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m C_2 \Big(\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\varphi_{n_1,\ldots,n_m}| + \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\psi_{1n_1,\ldots,n_m}| \Big) \leqslant \\
\leqslant \gamma_1 \Big(\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^3 \ldots n_m^3} |\varphi^{(3m)}_{n_1,\ldots,n_m}| + \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^3 \ldots n_m^3} |\psi^{(3m)}_{1n_1,\ldots,n_m}| \Big) \leqslant \\
\leqslant \gamma_1 \left[\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^6 \ldots n_m^6}} \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \big[\varphi^{(3m)}_{n_1,\ldots,n_m}\big]^2} + \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^6 \ldots n_m^6}} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \big[\psi^{(3m)}_{1n_1,\ldots,n_m}\big]^2} \right] \leqslant \\
\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \gamma_1 \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^6 \ldots n_m^6}} \left[\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m} \varphi(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3} \right]^2 dx} + \sqrt{\int\limits_{\Omega_l}^{m} \left[\frac{\partial^{3m} \psi_1(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3} \right]^2 dx} \right] < \infty,
\end{gathered} \tag{5.12}
$$

где $\gamma_1 = \big(\sqrt{2/l}\big)^m \big(l/\pi\big)^{3m} C_2$.

Аналогично (5.12) для ряда (4.9) при $t < 0$ получим

$$
\begin{gathered}
|U(t,x,\nu)| \leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)| \cdot |\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \leqslant \\
\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m C_2 \Big[\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\varphi_{n_1,\ldots,n_m}| + \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\psi_{1n_1,\ldots,n_m}| + \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\psi_{2n_1,\ldots,n_m}| \Big] \leqslant \\
\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \gamma_1 \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^6 \ldots n_m^6}} \left[\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m} \varphi(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3} \right]^2 dx} + \right. \\
\left. + \sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m} \psi_1(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3} \right]^2 dx} + \sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m} \psi_2(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3} \right]^2 dx} \right] < \infty.
\end{gathered} \tag{5.13}
$$

Из оценок (5.12) и (5.13) следует, что ряды (4.8) и (4.9) абсолютно и равномерно сходятся в области $\bar{\Omega}$ для всевозможных $(n_1, \ldots, n_m, \nu, \omega) \in \aleph_1$. С учетом (5.1) в подобие оценок (5.12) и (5.13) можно получить для рядов (4.6) и (4.7), что справедливы оценки

$$
\begin{gathered}
|g_1(x)| \leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |-\varphi_{n_1,\ldots,n_m} \chi_{2n_1,\ldots,n_m} + \psi_{1n_1,\ldots,n_m} \chi_{1n_1,\ldots,n_m}| \cdot |\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \leqslant \\
\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m C_1 \Big(\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\varphi_{n_1,\ldots,n_m}| + \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\psi_{1n_1,\ldots,n_m}| \Big) \leqslant \\
\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \gamma_2 \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^6 \ldots n_m^6}} \left[\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m} \varphi(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3} \right]^2 dx} + \sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m} \psi_1(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3} \right]^2 dx} \right] < \infty,
\end{gathered} \tag{5.14}
$$

где $\gamma_2 = \left(\sqrt{2/l}\right)^m (l/\pi)^{3m} C_1$. Кроме того,

$$|g_2(x)| \leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \times$$
$$\times \left|\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\chi_{4n_1,\ldots,n_m} - \psi_{1n_1,\ldots,n_m}\chi_{3n_1,\ldots,n_m} + \psi_{2n_1,\ldots,n_m}\chi_{3n_1,\ldots,n_m}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m C_1 \left(\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\varphi_{n_1,\ldots,n_m}| + \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\psi_{1n_1,\ldots,n_m}| + \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\psi_{2n_1,\ldots,n_m}|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \gamma_2 \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^6 \ldots n_m^6}} \left[\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m}\varphi(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3}\right]^2 dx} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m}\psi_1(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3}\right]^2 dx} + \sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m}\psi_2(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3}\right]^2 dx}\right] < \infty. \quad (5.15)$$

Из оценок (5.14) и (5.15) следует, что ряды (4.6) и (4.7) абсолютно и равномерно сходятся в Ω_l^m.

6. Почленное дифференцирование рядов (4.8) **и** (4.9)**.** Функции (4.8) и (4.9) формально дифференцируем нужное число раз:

$$U_t(t,x,\nu) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) \times$$
$$\times \left[\varphi_{n_1,\ldots,n_m} V'_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) + \psi_{1n_1,\ldots,n_m} V'_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\right], \quad t > 0, \quad (6.1)$$

$$U_{tt}(t,x,\nu) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) [\varphi_{n_1,\ldots,n_m} W''_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) +$$
$$+ \psi_{1n_1,\ldots,n_m} W''_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) + \psi_{2n_1,\ldots,n_m} W''_{3n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)], \quad t < 0, \quad (6.2)$$

$$U_{x_1x_1}(t,x,\nu) = -\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n_1}{l}\right)^2 \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) \times$$
$$\times \left[\varphi_{n_1,\ldots,n_m} V_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) + \psi_{1n_1,\ldots,n_m} V_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\right], \quad t > 0, \quad (6.3)$$

$$U_{x_1x_1}(t,x,\nu) = -\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n_1}{l}\right)^2 \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) [\varphi_{n_1,\ldots,n_m} W_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) +$$
$$+ \psi_{1n_1,\ldots,n_m} W_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) + \psi_{2n_1,\ldots,n_m} W_{3n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)], \quad t < 0, \quad (6.4)$$

$$U_{x_2x_2}(t,x,\nu) = -\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n_2}{l}\right)^2 \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) \times$$
$$\times \left[\varphi_{n_1,\ldots,n_m} V_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) + \psi_{1n_1,\ldots,n_m} V_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\right], \quad t > 0, \quad (6.5)$$

$$U_{x_2x_2}(t,x,\nu) = -\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n_2}{l}\right)^2 \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) [\varphi_{n_1,\ldots,n_m} W_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) +$$
$$+ \psi_{1n_1,\ldots,n_m} W_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) + \psi_{2n_1,\ldots,n_m} W_{3n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)], \quad t < 0. \quad (6.6)$$

Аналогично (6.1)—(6.6) в области $\bar{\Omega}$ для всевозможных $(n_1,\dots,n_m,\nu,\omega)\in\aleph_1$ определяются разложения в ряды Фурье следующих функций: $U_{x_3x_3}(t,x,\nu)$, …, $U_{x_mx_m}(t,x,\nu)$, $U_{tx_1x_1}(t,x,\nu)$, $U_{tx_2x_2}(t,x,\nu)$, …, $U_{tx_mx_m}(t,x,\nu)$, $U_{ttx_1x_1}(t,x,\nu)$, $U_{ttx_2x_2}(t,x,\nu)$, …, $U_{ttx_mx_m}(t,x,\nu)$.

Сходимость рядов (6.1) и (6.2) доказывается аналогично доказательству сходимости рядов (4.8) и (4.9). При этом воспользуемся оценкой (5.3). Покажем сходимость рядов (6.3)—(6.6). Поступаем по аналогию получения оценок (5.14) и (5.15):

$$|U_{x_1x_1}(t,x,\nu)|\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\left(\frac{\pi}{l}\right)^2C_2\biggl(\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}n_1^2|\varphi_{n_1,\dots,n_m}|+\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}n_1^2|\psi_{1n_1,\dots,n_m}|\biggr)\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_3\biggl(\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2^3\dots n_m^3}\left|\varphi^{(3m)}_{n_1,\dots,n_m}\right|+\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2^3\dots n_m^3}\left|\psi^{(3m)}_{1n_1,\dots,n_m}\right|\biggr)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\gamma_3\sqrt{\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^2n_2^6\dots n_m^6}}\left[\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m}\left[\frac{\partial^{3m}\varphi(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3\dots\partial x_m^3}\right]^2dx}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m}\left[\frac{\partial^{3m}\psi_1(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3\dots\partial x_m^3}\right]^2dx}\right]<\infty,\quad t>0;\quad(6.7)$$

$$|U_{x_1x_1}(t,x,\nu)|\leqslant\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2n_1^2|u_{n_1,\dots,n_m}(t,\nu)|\cdot|\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\left(\frac{\pi}{l}\right)^2C_2\biggl(\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}n_1^2|\varphi_{n_1,\dots,n_m}|+\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}n_1^2|\psi_{1n_1,\dots,n_m}|+\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}n_1^2|\psi_{2n_1,\dots,n_m}|\biggr)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\gamma_3\sqrt{\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^2n_2^6\dots n_m^6}}\left[\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m}\left[\frac{\partial^{3m}\varphi(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3\dots\partial x_m^3}\right]^2dx}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m}\left[\frac{\partial^{3m}\psi_1(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3\dots\partial x_m^3}\right]^2dx}+\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m}\left[\frac{\partial^{3m}\psi_2(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3\dots\partial x_m^3}\right]^2dx}\right]<\infty,\quad t<0,\quad(6.8)$$

где $\gamma_3=\left(\sqrt{2/l}\right)^m\left(l/\pi\right)^{3m-2}C_2$. Аналогично оценкам (6.7) и (6.8) получаем:

$$|U_{x_2x_2}(t,x,\nu)|\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\left(\frac{\pi}{l}\right)^2C_2\biggl(\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}n_2^2|\varphi_{n_1,\dots,n_m}|+\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}n_2^2|\psi_{1n_1,\dots,n_m}|\biggr)\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_3\biggl(\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^3n_2^1n_2^3\dots n_m^3}\left|\varphi^{(3m)}_{n_1,\dots,n_m}\right|+\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^3n_2^1n_2^3\dots n_m^3}\left|\psi^{(3m)}_{1n_1,\dots,n_m}\right|\biggr)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\gamma_3\sqrt{\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^6n_2^2n_2^6\dots n_m^6}}\left[\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m}\left[\frac{\partial^{3m}\varphi(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3\dots\partial x_m^3}\right]^2dx}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m}\left[\frac{\partial^{3m}\psi_1(x)}{\partial x_1^3\partial x_2^3\dots\partial x_m^3}\right]^2dx}\right]<\infty,\quad t>0,\quad(6.9)$$

$$|U_{x_2x_2}(t,x,\nu)| \leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n_2^2 |u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)| \cdot |\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 C_2 \Bigg(\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} n_2^2 |\varphi_{n_1,\ldots,n_m}| + \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} n_2^2 |\psi_{1n_1,\ldots,n_m}| + \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} n_2^2 |\psi_{2n_1,\ldots,n_m}| \Bigg) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \gamma_3 \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^6 n_2^2 n_2^6 \ldots n_m^6}} \left[\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m}\varphi(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3}\right]^2 dx} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m}\psi_1(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3}\right]^2 dx} + \sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{3m}\psi_2(x)}{\partial x_1^3 \partial x_2^3 \ldots \partial x_m^3}\right]^2 dx} \right] < \infty, \quad t < 0. \quad (6.10)$$

Аналогично (6.7)—(6.10) получаем оценки для сходимости разложений функций $U_{x_3x_3}(t,x,\nu)$, $\ldots, U_{x_mx_m}(t,x,\nu), U_{tx_1x_1}(t,x,\nu), U_{tx_2x_2}(t,x,\nu), \ldots, U_{tx_mx_m}(t,x,\nu), U_{ttx_1x_1}(t,x,\nu), U_{ttx_2x_2}(t,x,\nu), \ldots$, $U_{ttx_mx_m}(t,x,\nu)$ в ряд Фурье в области $\bar{\Omega}$ для всевозможных $(n_1,\ldots,n_m,\nu,\omega) \in \aleph_1$. Точно таким же образом доказывается гладкость функций переопределения $g_1(x)$ и $g_2(x)$.

Следовательно, в области Ω функции $U(t,x)$, $g_1(x)$ и $g_2(x)$, определенные рядами (4.6)—(4.9), удовлетворяют условиям задачи.

Для установления единственности функции $U(t,x)$ предположим, что существуют два решения $U_1(t,x)$ и $U_2(t,x)$ этой задачи. Тогда их разность $U_1(t,x) - U_2(t,x)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), (1.3) с функцией $\varphi(x) \equiv 0$. Так как для тождественно нулевой функции $\varphi_{n_1,\ldots,n_m} = 0$, то из формул (4.8) и (4.9) в области Ω следует, что

$$\int\limits_{\Omega_l^m} U(t,x,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx = 0.$$

Отсюда и в силу полноты систем собственных функций

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_1}{l}x_1\right\}, \quad \left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_2}{l}x_2\right\}, \quad \ldots, \quad \left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_m}{l}x_m\right\}$$

в $L_2(\Omega_l)$ заключаем, что $U(t,x,\nu) \equiv 0$ для всех $x \in [0,l]^m$ и $t \in [-T;T]$.

Единственность функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$, удовлетворяющих условиям (1.4), устанавливается аналогично. Следовательно, при выполнении условий (2.23) для обратной задачи существует решение и это решение единственно в области Ω.

7. Обратная задача (1.1)—(1.4)**. Иррегулярный случай.** И здесь воспользуемся дополнительными условиями (1.4) и из рядов Фурье (3.1) и (3.2) получаем, что

$$\psi_1(x) = U(t_1,x,\nu) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) \times$$
$$\times [\nu C_{1n_1,\ldots,n_m} M_{2n_1,\ldots,n_m}(t_1,\nu) + g_{1n_1,\ldots,n_m} M_{4n_1,\ldots,n_m}(t_1,\nu)], \quad t_1 > 0, \quad (7.1)$$

$$\psi_2(x) = U(t_2,x,\nu) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) [\nu C_{2n_1,\ldots,n_m} \delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu) +$$
$$+ g_{1n_1,\ldots,n_m} N_{4n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu) + g_{2n_1,\ldots,n_m} N_{5n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu)], \quad t_2 < 0. \quad (7.2)$$

С учетом (4.3) из соотношения (7.1) и (7.2) получаем

$$\psi_{1n_1,\ldots,n_m} = \nu C_{1n_1,\ldots,n_m} M_{2n_1,\ldots,n_m}(t_1,\nu) + g_{1n_1,\ldots,n_m} M_{4n_1,\ldots,n_m}(t_1,\nu), \qquad t_1 > 0,$$
$$\psi_{2n_1,\ldots,n_m} = \nu C_{2n_1,\ldots,n_m} \delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu) + g_{1n_1,\ldots,n_m} N_{4n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu) + g_{2n_1,\ldots,n_m} N_{5n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu), \ t_2 < 0.$$

Из выполнения условий $M_{4n_1,\ldots,n_m}(t_1,\nu)\neq 0$, $N_{5n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu)\neq 0$ мы из последних представлений получаем формулы для функций переопределения

$$g_{1n_1,\ldots,n_m}=\psi_{1n_1,\ldots,n_m}\tau_{11n_1,\ldots,n_m}-\nu C_{1n_1,\ldots,n_m}\tau_{12n_1,\ldots,n_m}, \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned} g_{2n_1,\ldots,n_m}=-\psi_{1n_1,\ldots,n_m}\tau_{11n_1,\ldots,n_m}\tau_{23n_1,\ldots,n_m}+\psi_{2n_1,\ldots,n_m}\tau_{21n_1,\ldots,n_m}+\\ +\nu C_{1n_1,\ldots,n_m}\tau_{12n_1,\ldots,n_m}\tau_{23n_1,\ldots,n_m}-\nu C_{2n_1,\ldots,n_m}\tau_{22n_1,\ldots,n_m}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

где

$$\begin{aligned} &\tau_{11n_1,\ldots,n_m}=(M_{4n_1,\ldots,n_m}(t_1,\nu))^{-1}, \qquad \tau_{12n_1,\ldots,n_m}=\frac{M_{2n_1,\ldots,n_m}(t_1,\nu)}{M_{4n_1,\ldots,n_m}(t_1,\nu)},\\ &\tau_{21n_1,\ldots,n_m}=(N_{5n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu))^{-1}, \qquad \tau_{22n_1,\ldots,n_m}=\frac{\delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu)}{N_{5n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu)},\\ &\tau_{23n_1,\ldots,n_m}=\frac{N_{4n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu)}{N_{5n_1,\ldots,n_m}(t_2,\nu)}. \end{aligned}$$

Подставляя представления (7.3) и (7.4) в ряд Фурье (2.3), получаем

$$g_1(x)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\Big[\psi_{1n_1,\ldots,n_m}\tau_{11n_1,\ldots,n_m}-C_{1n_1,\ldots,n_m}\tau_{12n_1,\ldots,n_m}\Big]\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned} g_2(x)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big[-\psi_{1n_1,\ldots,n_m}\tau_{11n_1,\ldots,n_m}\tau_{23n_1,\ldots,n_m}+\\ +\psi_{2n_1,\ldots,n_m}\tau_{21n_1,\ldots,n_m}+\nu C_{1n_1,\ldots,n_m}\tau_{12n_1,\ldots,n_m}\tau_{23n_1,\ldots,n_m}-\nu C_{2n_1,\ldots,n_m}\tau_{22n_1,\ldots,n_m}\Big]. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Подстановка представления (7.5) и (7.6) в ряды (3.1) и (3.2) дает

$$\begin{aligned} U(t,x,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\times\\ \times\Big[\nu C_{n_1,\ldots,n_m}Z_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+\psi_{1n_1,\ldots,n_m}Z_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\Big], \quad t>0, \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} U(t,x,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big[\nu C_{1n_1,\ldots,n_m}Y_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+\nu C_{2n_1,\ldots,n_m}Y_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+\\ +\psi_{1n_1,\ldots,n_m}Y_{3n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+\psi_{2n_1,\ldots,n_m}Y_{4n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\Big], \quad t<0, \end{aligned} \tag{7.8}$$

где

$$\begin{aligned} &Z_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)=M_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)-\tau_{12n_1,\ldots,n_m}M_{4n_1,\ldots,n_m}(t,\nu),\\ &Z_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)=\tau_{11n_1,\ldots,n_m}M_{4n_1,\ldots,n_m}(t,\nu),\\ &Y_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)=\tau_{12n_1,\ldots,n_m}\tau_{23n_1,\ldots,n_m}N_{5n_1,\ldots,n_m}(t,\nu),\\ &Y_{2n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)=\delta_{1n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)-\tau_{22n_1,\ldots,n_m}N_{5n_1,\ldots,n_m}(t,\nu),\\ &Y_{3n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)=\tau_{11n_1,\ldots,n_m}N_{4n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)-\tau_{11n_1,\ldots,n_m}\tau_{23n_1,\ldots,n_m}N_{5n_1,\ldots,n_m}(t,\nu),\\ &Y_{4n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)=\tau_{21n_1,\ldots,n_m}N_{5n_1,\ldots,n_m}(t,\nu). \end{aligned}$$

Отметим, что $Z_{in_1,\ldots,n_m}(t,\nu)$ и $Y_{jn_1,\ldots,n_m}(t,\nu)$ — равномерно ограниченные функции, $\psi_i(x)$ — достаточно гладкие функции, $C_{in_1,\ldots,n_m}$ — произвольные постоянные. Эти постоянные можно выбрать так, чтобы ряды (7.5)—(7.8) сходились.

8. Формулировка теоремы. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия A. Тогда для чисел* $(n_1, \ldots, n_m, \nu, \omega) \in \aleph_1$ *обратная задача* (1.1)—(1.4) *однозначно разрешима в области* Ω*, и это решение представляется в виде рядов* (4.6)—(4.9). *Для чисел* $(n_1, \ldots, n_m, \nu, \omega) \in \aleph_2$ *обратная задача* (1.1)—(1.4) *в области* Ω *имеет бесконечное множество решений. Эти решения в области* Ω *представляются в виде рядов* (7.5)—(7.8). *При этом необходимым условием существования решений задачи является* $\varphi(x) \equiv 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апаков Ю. П.* Трехмерный аналог задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения// Сиб. ж. индустр. мат. — 2011. — *14*, № 2. — С. 34–44.
2. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 1959. — *14*, № 3. — С. 3–19.
3. *Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А.* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды// Мат. модел. — 2000. — *12*, № 1. — С. 94–103.
4. *Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. — Ташкент: Фан, 1986.
5. *Исломов Б.* Аналоги задачи Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с двумя линиями и различным порядком вырождения// Диффер. уравн. — 1991. — *27*, № 6. — С. 1007–1014.
6. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. — М.: МГУ, 1988.
7. *Моисеев Е. И.* О разрешимости одной нелокальной краевой задачи// Диффер. уравн. — 2001. — *37*, № 11. — С. 1565–1567.
8. *Полосин А. А.* О задаче Геллерстедта с наклонной производной для уравнения смешанного типа со спектральным параметром// Диффер. уравн. — 2019. — *55*, № 10. — С. 1416–1425.
9. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени// Изв. вузов. Мат. — 2012. — *10*. — С. 32–44.
10. *Репин О. А.* Аналог задачи Нахушева для уравнения Бицадзе—Лыкова// Диффер. уравн. — 2002. — *38*, № 10. — С. 1412–1417.
11. *Рузиев М. Х.* О краевой задаче для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области// Мат. заметки. — 2012. — *92*, № 1. — С. 74–83.
12. *Сабитов К. Б.* К теории уравнений смешанного типа. — М.: Физматлит, 2014.
13. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. — Ташкент: Фан, 1997.
14. *Салахитдинов М. С., Исломов Б. И.* Нелокальная краевая задача с конормальной производной для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями и различными порядками вырождения// Изв. вузов. Мат. — 2011. — *1*. — С. 49–58.
15. *Турбин М. В.* Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель—Балкли// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2013. — *2*. — С. 246–257.
16. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
17. *Уринов А. К., Нишонова Ш. Т.* Задача с интегральными условиями для эллиптико-параболического уравнения// Мат. заметки. — 2017. — *102*, № 1. — С. 81–95.
18. *Уфлянд Я. С.* К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях// Инж.-физ. ж. — 1964. — *7*, № 1. — С. 89–92.
19. *Ушаков Е. И.* Статическая устойчивость электрических цепей. — Новосибирск: Наука, 1988.
20. *Франкль Ф. И.* Избранные труды в газовой динамике. — М.: Наука, 1973.
21. *Юлдашев Т. К.* Смешанное дифференциальное уравнение типа Буссинеска// Вестн. ВолГУ. Сер. 1. Мат. Физ. — 2016. — *2 (33)*. — С. 13–26.
22. *Юлдашев Т. К.* Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка// Изв. ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2016. — *47*, № 1. — С. 119–128.
23. *Юлдашев Т. К.* О разрешимости одной краевой задачи для дифференциального уравнения типа Буссинеска// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 10. — С. 1411–1419.

24. *Юлдашев Т. К.* Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 12. — С. 1687–1694.
25. *Юлдашев Т. К.* Смешанное интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка с вырожденными ядрами// в кн.: Математический форум. Исследования по математике и математическому образованию/ Итоги науки. Юг России. — Владикавказ: ВНЦ РАН, 2018. — *12.* — С. 126–138.
26. *Юлдашев Т. К.* Определение коэффициента и классическая разрешимость нелокальной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Бенни—Люка с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *156.* — С. 89–102.
27. *Юлдашев Т. К.* О разрешимости одной краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 2. — С. 252–263.
28. *Юлдашев Т. К.* Определение коэффициента в нелокальной задаче для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Владикавказ. мат. ж. — 2019. — *21*, № 2. — С. 67–84.
29. *Benney D. J., Luke J. C.* Interactions o f permanent waves of finite amplitude// J. Math. Phys. — 1964. — *43.* — P. 309–313.
30. *Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Ferreira J.* Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping// Math. Meth. Appl. Sci. — 2001. — *24.* — P. 1043–1053.
31. *Yuldashev T. K.* On an integro-differential equation of pseudoparabolic-pseudohyperbolic type with degenerate kernels// Уч. зап. Ереван. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *52*, № 1. — С. 19–26.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Исломов Бозор Исломович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: islomovbozor@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 201 (2021). С. 33–43
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-201-33-43

УДК 517.968

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МНОГОМЕРНЫМ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ И НЕЛИНЕЙНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ

© 2021 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, Ф. Д. РАХМОНОВ**

Аннотация. Изучены вопросы однозначной обобщенной разрешимости и построения решения нелинейной многомерной смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа четвёртого порядка с вырожденным ядром и нелинейным отклонением. Установлены достаточные коэффициентные условия однозначной разрешимости поставленной нелокальной задачи при регулярных значениях спектрального параметра. Исследование основано на методе Фурье разделения переменных, методе последовательных приближений и методе сжимающих отображений.

Ключевые слова: многомерная смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение, вырожденное ядро, нелинейное отклонение, обобщенная разрешимость.

MIXED PROBLEM FOR AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH A MULTIDIMENSIONAL PSEUDOPARABOLIC OPERATOR AND NONLINEAR DEVIATION

© 2021 **T. K. YULDASHEV, F. D. RAKHMONOV**

Abstract. In this paper, we examine the unique generalized solvability and construct a solution to a nonlinear multidimensional mixed problem for a fourth-order nonlinear pseudoparabolic integro-differential equation with a degenerate kernel and nonlinear deviation. We establish sufficient coefficient conditions for the unique solvability of the nonlocal problem for regular values of the spectral parameter. The research is based on the Fourier method of separation of variables, the method of successive approximations, and the method of contraction mappings.

Keywords and phrases: multidimensional mixed problem, integro-differential equation, degenerate kernel, nonlinear deviation, generalized solvability.

AMS Subject Classification: 35A01, 35B35, 35D30

1. Постановка задачи. Как известно, многие задачи механики сплошных сред являются смешанными. Смешанные задачи имеют приложения при решении задач, связанные с расчетом различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии; с расчетом фундаментов и оснований сооружений; с концентрацией напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок (см. [1]). Смешанные задачи играют важную роль и в решении задач математической физики.

В [8] изучены необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала. В [6,10] изучены вопросы обобщенной разрешимости смешанных задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка параболического и гиперболического типов. В [2,3,9,11] изучены вопросы обобщенной разрешимости смешанных задач для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго и четвертого порядков.

Интегро-дифференциальные уравнения первого порядка с особенностями в ядре изучены в [4,5]. Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных с вырожденными ядрами изучены в [12–15].

В настоящей работе рассматриваются вопросы обобщенной разрешимости и построения решения нелокальной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа четвертого порядка с вырожденным ядром и нелинейным отклонением. Для регулярных значений параметра при интегральном члене получены необходимые и достаточные условия существования обобщенного решения нелокальной задачи. Решение разложено в ряд Фурье, доказана абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье.

В многомерной области $\Omega = \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ 0 < x < l\}$ рассматривается уравнение вида

$$U_t - \sum_{i=1}^{m} [U_{tx_ix_i} + U_{x_ix_i} - U_{x_ix_ix_ix_i}] = \nu \int_0^T K(t,s)U(s,x)ds +$$
$$+ \alpha(t) f\left(x, \int_0^T \Theta(\xi, x, U(\tau(\xi, x, U(\xi, x), x))d\xi\right), \quad (1)$$

где T и l — заданные положительные действительные числа, ν — действительный отличный от нуля спектральный параметр, $\alpha(t) \in C(\Omega_T)$, $f(x,u) \in C(\Omega_l^m \times \mathbb{R})$, $\tau(t,x,U) \in C(\Omega \times \mathbb{R})$ — нелинейное отклонение, $\tau(t,x,U) \neq t$, $\Theta(t,x,u) \in C(\Omega \times \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^m$,

$$0 \neq K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) b_i(s),$$

$a_i(t), b_i(s) \in C(\Omega_T)$, $\Omega_T \equiv [0;T]$, $\Omega_l \equiv [0;l]$. Здесь предполагается, что система функций $a_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, и система функций $b_i(s)$, $i = \overline{1,k}$, являются линейно независимыми.

Рассматривается пространство Соболева $\widehat{W}_2^1(\Omega)$, являющееся классом многомерных непрерывных функций $U(t,x)$ в замкнутой области $\bar{\Omega} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$ и имеющих частные производные $\partial U(t,x)/\partial x_i$, которые принадлежат не только в пространству $L_2(\bar{\Omega})$, но и пространству $L_2(\Omega_l)$ при фиксированных значениях $t \in \Omega_T$, где

$$L_2(\bar{\Omega}) = \left\{ U(t,x) : \sqrt{\int_0^T \int_{\Omega_l^m} |U(t,x)|^2 dx dt} < \infty \right\}.$$

Задача 1. Найти в области Ω функцию $U(t,x) \in \widehat{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(t,x) = \varphi(t,x), \quad t \notin \Omega_T, \qquad U(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (2)$$

$$
\begin{aligned}
&U(t,0,x_2,x_3,\ldots,x_m)=U(t,l,x_2,x_3,\ldots,x_m)=0,\\
&U(t,x_1,0,x_3,\ldots,x_m)=U(t,x_1,l,x_3,\ldots,x_m)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&U(t,x_1,\ldots,x_{m-1},0)=U(t,x_1,\ldots,x_{m-1},l)=0,\\
&U_{x_1x_1}(t,0,x_2,x_3,\ldots,x_m)=U_{x_1x_1}(t,l,x_2,x_3,\ldots,x_m)=0,\\
&U_{x_1x_1}(t,x_1,0,x_3,\ldots,x_m)=U_{x_1x_1}(t,x_1,l,x_3,\ldots,x_m)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&U_{x_1x_1}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},0)=U_{x_1x_1}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},l)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&U_{x_mx_m}(t,0,x_2,x_3,\ldots,x_m)=U_{x_mx_m}(t,l,x_2,x_3,\ldots,x_m)=0,\\
&U_{x_mx_m}(t,x_1,0,x_3,\ldots,x_m)=U_{x_mx_m}(t,x_1,l,x_3,\ldots,x_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&U_{x_mx_m}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},0)=U_{x_mx_m}(t,x_1,\ldots,x_{m-1},l)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $\varphi(t,x)\in C([(-\infty;0)\cup(0;\infty)]\times\Omega_l^m)$, $\varphi(0,x)=\varphi(x)$, $\varphi(x)$ — заданная достаточно гладкая многомерная функция в области $\Omega_l^m=\{0\leqslant x\leqslant l\}$.

Следуя [6, 7], определим обобщенное решение рассматриваемой задачи (1)—(3) в многомерном пространстве $\widehat{W}_2^1(\Omega)$. Множество значений спектрального параметра $\nu\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ разделяется на два регулярных и иррегулярных подмножества. Для множества регулярных значений получаются достаточные условия существования единственного обобщенного решения. Доказывается устойчивость решения $U(t,x)$ интегро-дифференциального уравнения (1) по заданной функции $\varphi(x)$.

2. Разложение решения задачи в ряд Фурье. С учетом граничных условий типа Бенара (3) решение уравнения (1) в области Ω разыскивается в виде ряда Фурье

$$U(t,x)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x),\tag{4}$$

где

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\int\limits_{\Omega_l^m}U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_l^m}U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\int\limits_0^l\ldots\int\limits_0^l U(,,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx_1\cdot\ldots\cdot dx_m,\tag{5}$$

$$\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)=\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\sin\frac{\pi n_1}{l}x_1\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\pi n_m}{l}x_m, n_1,\ldots,n_m=1,2,\ldots$$

Кроме того, предположим, что

$$f(x,u)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x),\tag{6}$$

где

$$f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)=\int\limits_{\Omega_l^m}f(x,u)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx,\tag{7}$$

$$\varphi(x)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x),\tag{8}$$

$$\varphi_{n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \varphi(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx. \tag{9}$$

Подставляем ряды (4), (6), (8) в уравнение (1) и получаем следующую счетную систему дифференциальных уравнений

$$u'_{n_1,\ldots,n_m}(t) + \mu^2_{n_1,\ldots,n_m} u_{n_1,\ldots,n_m}(t) =$$
$$= \frac{1}{1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}} \left(\nu \int\limits_0^T \sum_{i=1}^k a_i(t) b_i(s) u_{n_1,\ldots,n_m}(s) ds + \alpha(t) f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot) \right), \tag{10}$$

где

$$\mu_{n_1,\ldots,n_m} = \frac{\pi}{l}\sqrt{n_1^2 + \ldots + n_m^2}.$$

Введя обозначение

$$\psi_{i,n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_0^T b_i(s) u_{n_1,\ldots,n_m}(s) ds, \tag{11}$$

перепишем счетную систему (10) в следующем виде:

$$u'_{n_1,\ldots,n_m}(t) + \mu^2_{n_1,\ldots,n_m} u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = \frac{1}{1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}} \left(\nu \sum_{i=1}^k a_i(t)\psi_{i,n_1,\ldots,n_m} + \alpha(t) f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot) \right). \tag{12}$$

Счетная система дифференциальных уравнений (12) решается методом вариации произвольных постоянных:

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = C_{n_1,\ldots,n_m} \exp\{-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m} t\} + \eta_{n_1,\ldots,n_m}(t), \tag{13}$$

где

$$\eta_{n_1,\ldots,n_m}(t) = \nu \sum_{i=1}^k \psi_{i,n_1,\ldots,n_m} h_{i,n_1,\ldots,n_m}(t) + f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)\delta_{1,n_1,\ldots,n_m}(t),$$

$$h_{i,n_1,\ldots,n_m}(t) = \frac{1}{\mu_{n_1,\ldots,n_m}} \int\limits_0^t \exp\{-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}(t-s)\} a_i(s) ds, \quad i = \overline{1,k},$$

$$\delta_{1,n_1,\ldots,n_m}(t) = \frac{1}{\mu_{n_1,\ldots,n_m}} \int\limits_0^t \exp\{-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}(t-s)\} \alpha(s) ds.$$

Условие (2) в силу формул (5) и (9) приобретает следующий вид:

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(0) = \int\limits_{\Omega_l^m} U(0,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx = \int\limits_{\Omega_l^m} \varphi(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx = \varphi_{n_1,\ldots,n_m}. \tag{14}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $C_{n_1,\ldots,n_m}$ в (13) воспользуемся начальным условием (14). Тогда получаем представление

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = \varphi_{n_1,\ldots,n_m} \exp\{-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m} t\} + \nu \sum_{i=1}^k \psi_{i,n_1,\ldots,n_m} h_{i,n_1,\ldots,n_m}(t) + f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)\delta_{1,n_1,\ldots,n_m}(t). \tag{15}$$

Подставляя (15) в формулу (11), получаем совокупность счетных систем алгебраических уравнений (СССАУ)

$$\psi_{i,n_1,\ldots,n_m} - \nu \sum_{j=1}^k \psi_{j,n_1,\ldots,n_m} H_{i,j,n_1,\ldots,n_m} = \varphi_{n_1,\ldots,n_m}\Phi_{i,n_1,\ldots,n_m} + f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)\Psi_{i,n_1,\ldots,n_m}, \quad i = \overline{1,k}, \tag{16}$$

где

$$H_{i,j,n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_0^T b_i(s) h_{j,n_1,\ldots,n_m}(s)ds, \quad \Phi_{i,n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_0^T b_i(s)\exp\{-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}s\}ds,$$

$$\Psi_{i,n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_0^T b_i(s)\delta_{1,n_1,\ldots,n_m}(s)ds.$$

Отметим, что из линейной независимости системы функций $a_i(t)$, $i=\overline{1,k}$ и системы функций $b_i(s)$, $i=\overline{1,k}$, следует, что $H_{i,j,n_1,\ldots,n_m} \neq 0$.

Рассмотрим следующие определители:

$$\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1-\nu H_{11} & \nu H_{12} & \ldots & \nu H_{1k} \\ \nu H_{21} & 1-\nu H_{22} & \ldots & \nu H_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu H_{k1} & \nu H_{k2} & \ldots & 1-\nu H_{kk} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{i,n_1,\ldots,n_m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1-\nu H_{11} & \ldots & \nu H_{1(i-1)} & \Phi_1 & \nu H_{1(i+1)} & \ldots & \nu H_{1k} \\ \nu H_{21} & \ldots & \nu H_{2(i-1)} & \Phi_2 & \nu H_{2(i+1)} & \ldots & \nu H_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu H_{k1} & \ldots & \nu H_{k(i-1)} & \Phi_k & \nu H_{k(i+1)} & \ldots & 1-\nu H_{kk} \end{vmatrix},$$

$$\bar{\Delta}_{i,n_1,\ldots,n_m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1-\nu H_{11} & \ldots & \nu H_{1(i-1)} & \Psi_1 & \nu H_{1(i+1)} & \ldots & \nu H_{1k} \\ \nu H_{21} & \ldots & \nu H_{2(i-1)} & \Psi_2 & \nu H_{2(i+1)} & \ldots & \nu H_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu H_{k1} & \ldots & \nu H_{k(i-1)} & \Psi_k & \nu H_{k(i+1)} & \ldots & 1-\nu H_{kk} \end{vmatrix}, \quad i=\overline{1,k}.$$

Система (16) однозначно разрешима при любых конечных правых частях, если выполняется условие $\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu) \neq 0$. Значения параметра ν, при которых выполняется условие $\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu) \neq 0$, назовем регулярными. На множестве регулярных значений параметра ν решения системы (16) записываются в виде

$$\psi_{i,n_1,\ldots,n_m} = \varphi_{n_1,\ldots,n_m}\frac{\Delta_{i,n_1,\ldots,n_m}(\nu)}{\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu)} + f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)\frac{\bar{\Delta}_{i,n_1,\ldots,n_m}(\nu)}{\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu)}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (14), с учетом формул (6) и (7) получаем счетную систему нелинейных функционально-интегральных уравнений

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = \mathrm{Im}(t;u_{n_1,\ldots,n_m}) \equiv \varphi_{n_1,\ldots,n_m}V_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) + W_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\times$$
$$\times\int\limits_{\Omega_l^m} f\left(x, \int\limits_0^T \Theta\Big(\xi, x, \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big)d\xi\right)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, \tag{18}$$

в которой

$$V_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = \exp\{-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}t\} + \nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{i,n_1,\ldots,n_m}(\nu)}{\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu)}h_{i,n_1,\ldots,n_m}(t),$$

$$W_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) = \delta_{1,n_1,\ldots,n_m}(t) + \nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\bar{\Delta}_{i,n_1,\ldots,n_m}(\nu)}{\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu)}h_{i,n_1,\ldots,n_m}(t),$$

функция $\varphi_{n_1,\ldots,n_m}$ является коэффициентом Фурье в разложении (8) и определяется соответственно из (9),

$$\tau = \tau\Big(\xi, x, \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u_{n_1,\ldots,n_m}(\xi,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big).$$

Теперь для получения формального разложения решения смешанной задачи (1)—(3) для системы (18) подставляем в ряд Фурье (4)

$$U(t,x,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\left[\varphi_{n_1,\ldots,n_m}V_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+W_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{\Omega_l^m} f\left(x,\int\limits_0^T\Theta\Big(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big)d\xi\right)\vartheta(x)dx\right], \quad (19)$$

где

$$\tau=\tau\Big(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u_{n_1,\ldots,n_m}(\xi,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big).$$

3. Однозначная разрешимость системы (18)**.** Как и в [16, 17], введем следующие пространства: банахово пространство $B_2(T)$ последовательностей непрерывных функций $\{u_{n_1,\ldots,n_m}(t)\}_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}$ на отрезке Ω_T с нормой

$$\|u(t)\|_{B_2(T)}=\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\Big(\max_{t\in\Omega_T}|u_{n_1,\ldots,n_m}(t)|\Big)^2}<\infty,$$

гильбертово координатное пространство ℓ_2 числовых последовательностей $\{\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\}_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\ell_2}=\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}|\varphi_{n_1,\ldots,n_m}|^2}<\infty,$$

пространство $L_2(\Omega_l)$ суммируемых с квадратом функций в области Ω_l^m с нормой

$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(\Omega_l)}=\sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m}|\vartheta(x)|^2dx}<\infty.$$

Теорема 1. *Предположим, что выполняются следующие условия*:

$$\chi_1=\max\{\|V_\ell(t,\nu)\|_{B_2(T)},\|W_\ell(t,\nu)\|_{B_2(T)}\}<\infty,\quad \chi_2=\|f(x,\gamma)\|_{L_2(\Omega_l)}<\infty,$$
$$|f(x,\gamma_1)-f(x,\gamma_2)|\leqslant L_0(x)|\gamma_1-\gamma_2|,\quad |\Theta(\xi,x,u_1)-\Theta(\xi,x,u_2)|\leqslant\Theta_0(x)|u_1-u_2|,$$
$$|\tau(\xi,x,u_1)-\tau(\xi,x,u_2)|\leqslant L_1(x)|u_1-u_2|,\quad \chi_1\Delta_1T(1+\Delta_2)<1,$$

где

$$\Delta_1=\|L_0(x)\Theta_0(x)\|_{L_2(\Omega_l)},\quad \Delta_2=\|f(\cdot)L_1(x)\|_{L_2(\Omega_l)}.$$

Тогда система (18) *однозначно разрешима в пространстве* $B_2(T)$.

Доказательство. Воспользуемся методом сжимающих отображений в $B_2(T)$. Последовательные приближения определяются следующим образом:

$$\begin{cases}u^0_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)=\varphi_{n_1,\ldots,n_m}V_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu),\\ u^{k+1}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)=\mathrm{Im}(t;u^k_{n_1,\ldots,n_m}),\quad k=0,1,2,\ldots.\end{cases}\quad (20)$$

Для нулевого приближения $u^0_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)$ с нормой в $B_2(T)$ применяем неравенство Коши—Буняковского; в силу первого условия теоремы из (20) получаем оценку

$$\|u^0(t,\nu)\|_{B_2(T)}\leqslant\|\varphi\|_{\ell_2}\|V(t,\nu)\|_{B_2(T)}\leqslant\chi_0\chi_1<\infty,\quad (21)$$

где $\chi_0=\|\varphi\|_{\ell_2}$. Применяя неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя, для первой разности по норме из (20) получаем оценку

$$\|u^1(t,\nu)-u^0(t,\nu)\|_{B_2(T)}\leqslant\chi_1\|f(x,\gamma^0)\|_{L_2(\Omega_l)}\leqslant\chi_1\chi_2.\quad (22)$$

Аналогично (22), применяя неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя для произвольной разности $u^{k+1}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)-u^{k}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)$ с нормой в $B_2(T)$. В силу третьего, четвертого и пятого условий теоремы из (20) получаем оценку

$$\Big\|u^{k+1}(t,\nu)-u^k(t,\nu)\Big\|_{B_2(T)}\leqslant\chi_1\Big\|f(x,\gamma^k)-f(x,\gamma^{k-1})\Big\|_{L_2(\Omega_l)}\leqslant\chi_1\int\limits_{\Omega_l^m}L_0(x)\big|\gamma^k-\gamma^{k-1}\big|dx\leqslant$$
$$\leqslant\chi_1\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_l^m}L_0(x)\Theta_0(x)\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\Big|u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\tau^k,\nu)-u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(\tau^{k-1},\nu)\Big|\times\big|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\big|dx\,d\xi\leqslant$$
$$\leqslant\chi_1\Delta_1\int\limits_0^T\big\|u^k(\tau^k,\nu)-u^{k-1}(\tau^{k-1},\nu)\big\|_{B_2(T)}d\xi,\quad(23)$$

где $\Delta_1=\|L_0(x)\Theta_0(x)\|_{L_2(\Omega_l)}$,

$$\gamma^k=\int\limits_0^T\Theta\Big(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\tau^k,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big)d\xi,$$
$$\tau^k=\tau\Big(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\xi,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big),\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Учтем, что справедлива оценка

$$\big\|u^k(\tau^k)-u^{k-1}(\tau^{k-1})\big\|_{B_2(T)}=$$
$$=\Big\|u^k\Big(\tau\Big(t,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^k_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big)\Big)-$$
$$-u^{k-1}\Big(\tau\Big(t,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big)\Big)\Big\|_{B_2(T)}\leqslant$$
$$\leqslant\Big\|u^k\Big(\tau\Big(t,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^k_{n_1,\ldots,n_m}(t)b_n(x)\Big)\Big)-$$
$$-u^{k-1}\Big(\tau\Big(t,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^k_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big)\Big)\Big\|_{B_2(T)}+$$
$$+\Big\|u^{k-1}\Big(\tau\Big(t,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^k_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big)\Big)-$$
$$-u^{k-1}\Big(\tau\Big(t,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big)\Big)\Big\|_{B_2(T)}\leqslant$$
$$\leqslant\|u^k(t)-u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}+\int\limits_0^l|f(\cdot)|\Big|\tau\Big(t,y,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^k_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)\Big)-$$
$$-\tau\Big(t,y,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)\Big)\Big|dy\leqslant$$

$$\leqslant \|u^k(t)-u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}+\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}|u^k_{n_1,\ldots,n_m}(t)-u^{k-1}_{n_1,\ldots,n_m}(t)|\int\limits_0^l|f(\cdot)L_1(y)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)|dy\leqslant$$
$$\leqslant(1+\Delta_2)\|u^k(t)-u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)},$$

где $\Delta_2=\|f(\cdot)L_1(x)\|_{L_2(\Omega_l)}$. Тогда из (23) придем к следующей оценке:

$$\|u^{k+1}(t,\nu)-u^k(t,\nu)\|_{B_2(T)}\leqslant\chi_1\Delta_1T(1+\Delta_2)\|u^k(t)-u^{k-1}(t)\|_{B_2(T)}. \tag{24}$$

Согласно последнему условию теоремы справедливо неравенство $\chi_1\Delta_1T(1+\Delta_2)<1$. Поэтому из оценок (21), (22) и (24) вытекает, что оператор в правой части (18) является сжимающим и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку. Следовательно, система (18) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$. Теорема доказана. □

4. Сходимость ряда Фурье (19)**.** Наряду с (19), мы рассмотрим следующий ряд Фурье последовательных приближений:

$$U^{k+1}(t,x,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg[\varphi_{n_1,\ldots,n_m}V_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)+W_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\times$$
$$\times\int\limits_{\Omega_l^m}f\left(x,\int\limits_0^T\Theta\Bigg(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\tau^k,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg)d\xi\right)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx\Bigg], \tag{25}$$

где

$$\tau^k=\tau\Bigg(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\xi,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg).$$

Теорема 2. *Предположим, что выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда последовательность функций* $\{U^k(t,x,\nu)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к функции* $U(t,x,\nu)$, *которая является решением задачи* (1)—(3). *Кроме того, решение интегро-дифференциального уравнения* (1) *непрерывно зависит от функции* $\varphi(x)$. *Если функция* $\varphi(x)$ *мала, то и решение задачи* (1)—(3) *мало при* $\nu\in(-1;0)\cup(0;1)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим разность операторов (18) и (20). Из справедливости теоремы 1, в частности, вытекает следующий результат. Применяем неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя. В силу первых двух условий теоремы 1 для первой разности по норме в $B_2(T)$ получим следующую оценку:

$$\|u(t,\nu)-u^0(t,\nu)\|_{B_2(T)}\leqslant\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}|W_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)|\times$$
$$\times\int\limits_{\Omega_l^m}\left|f\left(x,\int\limits_0^T\Theta\Bigg(\xi,x,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg)d\xi\right)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\right|dx\leqslant$$
$$\leqslant\chi_1\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left[\int\limits_{\Omega_l^m}|f(x,\gamma)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)|dx\right]^2}\leqslant\chi_1\|f(x,\gamma)\|_{L_2(\Omega_l)}\leqslant\chi_1\chi_2. \tag{26}$$

Для второй разности в силу третьего и четвертого условий теоремы 1 и оценки (26), получим

$$\|u(t,\nu)-u^1(t,\nu)\|_{B_2(T)}\leqslant \chi_1\int\limits_{\Omega_l^m} L_0(x)|\gamma-\gamma^0|dx\leqslant$$

$$\leqslant \chi_1\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_l^m} L_0(x)\Theta_0(x)\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}|u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu)-u^0_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu)|\cdot|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)|dxd\xi\leqslant$$

$$\leqslant \chi_1\int\limits_0^T\|L_0(x)\Theta_0(x)\|_{L_2(\Omega_l)}\|u(\tau,\nu)-u^0(\tau,\nu)\|_{B_2(T)}d\xi\leqslant(\chi_1)^2T\chi_2\Delta_1(1+\Delta_2). \quad (27)$$

Аналогично (27) для третьей разности по норме имеем оценку

$$\big\|u(t,\nu)-u^2(t,\nu)\big\|_{B_2(T)}\leqslant \chi_1T\Delta_1(1+\Delta_2)\big\|u(\tau,\nu)-u^1(\tau^1,\nu)\big\|_{B_2(T)}\leqslant \chi_1\chi_2\big[\chi_1T\Delta_1(1+\Delta_2)\big]^2.$$

Продолжая этот процесс, методом математической индукции получаем, что

$$\big\|u(t,\nu)-u^k(t,\nu)\big\|_{B_2(T)}\leqslant \chi_1\chi_2\big[\chi_1T\Delta_1(1+\Delta_2)\big]^k. \quad (28)$$

Согласно теореме 1 имеет место неравенство $\chi_1T\Delta_1(1+\Delta_2)<1$. Поэтому из (28) следует, что

$$\|u(t,\nu)-u^k(t,\nu)\|_{B_2(T)}\to 0 \quad \text{при } k\to\infty. \quad (29)$$

Теперь для модуля разности рядов (19) и (25) получаем:

$$\big|U(t,x,\nu)-U^{k+1}(t,x,\nu)\big|\leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\big|u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)-u^{k+1}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\big|\cdot\big|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{l}\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}|u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)-u^{k+1}_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{l}\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\big|W_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)\big|\int\limits_{\Omega_l^m}\big|f(x,\gamma)-f(x,\gamma^k)\big|\cdot\big|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\big|dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{l}T\chi_1\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\Big|u_{n_1,\ldots,n_m}(\tau,\nu)-u^k_{n_1,\ldots,n_m}(\tau^k,\nu)\Big|\int\limits_{\Omega_l^m}L_0(x)\Theta_0(x)\big|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\big|dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{l}\chi_1\Delta_1T\big\|u(\tau,\nu)-u^k(\tau^k,\nu)\big\|_{B_2(T)}\leqslant\frac{2}{l}T\chi_1\Delta_1\big(1+\Delta_2\big)\big\|u(t,\nu)-u^k(t,\nu)\big\|_{B_2(T)}. \quad (30)$$

Из оценки (30) с учетом (29) получаем, что

$$\lim_{k\to\infty}|U(t,x,\nu)-U^{k+1}(t,x,\nu)|=0 \quad \text{для всех } t\in\Omega_T.$$

Покажем непрерывность решения задачи (1)—(3) по заданной интегральной функции $\varphi(x)$. Пусть $u_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)$ and $u_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)$ — два разные решения системы (18), соответствующие разным значениям $\varphi_{1,n_1,\ldots,n_m}$ и $\varphi_{2,n_1,\ldots,n_m}$. Предположим, что

$$\big|\varphi_{1,n_1,\ldots,n_m}-\varphi_{2,n_1,\ldots,n_m}\big|<\delta_{n_1,\ldots,n_m},$$

где $0 < \delta_{n_1,\ldots,n_m}$ таково, что величина $\|\delta\|_{\ell_2}$ мала. Тогда с учетом этого факта в силу условий теоремы из системы (18) получаем, что

$$\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |u_{1,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu) - u_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |\varphi_{1,n_1,\ldots,n_m} - \varphi_{2,n_1,\ldots,n_m}| \cdot |V_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)| +$$
$$+ \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} |W_{n_1,\ldots,n_m}(t,\nu)| \int_{\Omega_l^m} |f(x,\gamma_1) - f(x,\gamma_2)| \cdot |\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| dx.$$

Применяя к последней оценке неравенство Коши—Буняковского и неравенство Бесселя, в силу условий теоремы 1 получим

$$\big\|u_1(t,\nu) - u_2(t,\nu)\big\|_{B_2(T)} \leqslant \big\|\varphi_1 - \varphi_2\big\|_{\ell_2} \big\|V(t,\nu)\big\|_{B_2(T)} +$$
$$+ T\big\|W(t,\nu)\big\|_{B_2(T)} \big\|L_0(x)\Theta_0(x)\big\|_{L_2(\Omega_l)} \big\|u_1(\tau_1,\nu) - u_2(\tau_2,\nu)\big\|_{B_2(T)} <$$
$$< \chi_1 \|\delta\|_{\ell_2} + \rho\chi_1 \big\|u_1(t,\nu) - u_2(t,\nu)\big\|_{B_2(T)},$$

где $\rho = T\chi_1\Delta_1(1+\Delta_2)$. Отсюда имеем, что

$$\big\|u_1(t,\nu) - u_2(t,\nu)\big\|_{B_2(T)} < \frac{l}{2\rho}\varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = \frac{2\rho}{l} \frac{\chi_1 \|\delta\|_{\ell_2}}{1 - \rho\chi_1}.$$

Из этой оценки окончательно следует, что

$$\big|U_1(t,x,\nu) - U_2(t,x,\nu)\big| \leqslant \frac{2\rho}{l} \cdot \big\|u_1(t,\nu) - u_2(t,\nu)\big\|_{B_2(T)} < \varepsilon.$$

Аналогично можно показать, что из малости функции $\varphi(x)$ при $\nu \in (-1;0) \cup (0;1)$ следует, что решение нелокальной задачи (1)—(3) мало. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. — М.: Наука, 1986.
2. *Вагабов А. И.* Обобщенный метод Фурье решения смешанных задач для нелинейных уравнений// Диффер. уравн. — 1996. — *32*, № 1. — С. 90–100.
3. *Дыйканов Г. А.* Смешанная задача для одного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка// Вестн. ОшГУ. — 2017. — *2*. — С. 41–48.
4. *Зарипов С. К.* Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной точкой в ядре// Вестн. Томск. ун-та. Мат. Мех. — 2017. — *46*. — С. 24–36.
5. *Зарипов С. К.* Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2017. — *21*, № 2. — С. 236–248.
6. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений// Усп. мат. наук. — 1960. — *15*, № 2. — С. 97–154.
7. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничного управления колебаниями струны упругой силой// Диффер. уравн. — 2006. — *42*, № 12. — С. 1699–1711.
8. *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала// Диффер. уравн. — 2019. — *55*, № 5. — С. 717–731.

9. *Чандиров Г. И.* Смешанная задача для квазилинейных уравнений гиперболического типа/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Баку: АзГУ, 1970.
10. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. — М.: МГУ, 1992.
11. *Шабадиков К. Х.* Исследование решений смешанных задач для квазилинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей смешанной производной/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Фергана: ФерГПИ, 1984.
12. *Юлдашев Т. К.* Обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения высокого порядка с вырожденным ядром// Изв. ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2017. — *50*. — С. 121–132.
13. *Юлдашев Т. К.* Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *145*. — С. 95–109.
14. *Юлдашев Т. К.* Об одной нелокальной обратной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Benney–Luke с вырожденным ядром// Вестн. Твер. ун-та. Сер. Прикл. мат. — 2018. — *3*. — С. 19–41.
15. *Юлдашев Т. К.* Обратная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *149*. — С. 129–140.
16. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 9. — С. 1703–1711.
17. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 1. — С. 112–123.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

Рахмонов Фарход Дустмуродович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `mr.haker-frd@bk.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 201 (2021). С. 44–52
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-201-44-52

УДК 517.955.2

ОБ ОБРАТНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МНОГОМЕРНЫМ ОПЕРАТОРОМ УИЗЕМА ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ

© 2021 г. **Г. А. ДЫЙКАНОВ, К. Х. ШАБАДИКОВ, Т. К. ЮЛДАШЕВ**

Аннотация. Изучены вопросы разрешимости обратной начальной задачи для одного квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных с многомерным оператором Уизема высокой степени. Выражение дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволило представить рассматриваемое уравнение высшего порядка как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль характеристик. Методом последовательных приближений доказана однозначная разрешимость прямой начальной задачи. Получена оценка сходимости итерационного процесса Пикара. Определение неизвестного коэффициента сведено к решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода.

Ключевые слова: обратная задача, многомерный оператор Уизема, метод последовательных приближений, интегральное уравнение Вольтерра первого рода, однозначная разрешимость.

ON THE INVERSE INITIAL-VALUE PROBLEM FOR A QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH A HIGH-DEGREE MULTIDIMENSIONAL WHITHAM OPERATOR

© 2021 **G. A. DYIKANOV, K. Kh. SHABADIKOV, T. K. YULDASHEV**

Abstract. In this paper, we examine the solvability of the inverse initial-value problem for a quasilinear partial differential equation with a high-degree multidimensional Whitham operator. The expression of high-order partial differential equations as the superposition of first-order partial differential operators allowed us to represent the higher-order equation as an ordinary differential equation for an unknown function along characteristics. The unique solvability of the direct initial-value problem is proved by the method of successive approximations. An estimate for the convergence of the Picard iterative process is obtained. The problem of the search for the unknown coefficient is reduced to a Volterra integral equation of the first kind.

Keywords and phrases: inverse problem, multidimensional Whitham operator, method of successive approximations, Volterra integral equation of the first kind, unique solvability.

AMS Subject Classification: 35A30, 35C15, 35G55, 35L30.

1. Постановка задачи. Много приложений имеют дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Например, многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков (см. [1,5,18]). Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков рассматривались в работах многих авторов, в частности, в [8–10, 12–14, 17].

Выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволяет применять методы решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка локально решаются методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи сведения их к характеристической системе. Применение метода характеристик к решению дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка позволяет свести изучение эволюции волн к изучению распространения частиц (см. [4]). В [6, 7] разработаны методики интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. Вопросы определения коэффициента в разных задачах для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений рассмотрены многими авторами, в частности, в [2, 3, 11, 15, 19, 20].

В настоящей работе изучаются вопросы разрешимости и определения неизвестного коэффициента в обратной начальной задаче для одного квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных с многомерным оператором Уизема высокой степени. Данная работа является дальнейшим развитием работы [16].

В области $\Omega \equiv \Omega_T \times \mathbb{R}^n$ рассматривается многомерное квазилинейное уравнение Уизема вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) = \\ = \alpha(t)\beta(x_1,x_2,\ldots,x_n) + F\big(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)\big) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{gathered} u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)|_{t=0} = \phi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ \frac{\partial^i}{\partial t^i}u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)\Big|_{t=0} = \phi_{i+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n), \quad x_1,x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{R}, \quad i=\overline{1,m-1}, \end{gathered} \quad (2)$$

где $u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — искомая функция, $\alpha(t)$ — функция переопределения, $\beta(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in C^m(\mathbb{R}^n)$, $F(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,u) \in C^{m,m,m}(\Omega_T \times R^{n+1})$, $\phi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in C^m(\mathbb{R}^n)$, $i=\overline{1,m}$, $\Omega_T \equiv [0,T]$, $0<T<\infty$, $\mathbb{R} \equiv (-\infty,\infty)$, n, m — заданные натуральные числа.

Требуется определить неизвестную коэффициентную функцию $\alpha(t)$ в задаче (1), (2) с помощью условия

$$u(t,x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0) = \psi(t), \quad (3)$$

где $x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0 \in \mathbb{R}$, $\psi(t) \in C^m(\Omega_T), \psi(0)=0$.

2. Сведение задачи (1), (2) к интегральному уравнению. Начальную задачу (1), (2) сводим к решению следующего интегрального уравнения:

$$u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv \Theta(t,x_1,x_2,\ldots,x_n;u,p_1,\ldots,p_n) = \\ = \sum_{i=1}^{m}\phi_i(p_1(t,0,x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,p_n(t,0,x_1,x_2,\ldots,x_n))\frac{t^{m-i}}{(m-i)!} + \\ + \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\Big[\alpha(s)\beta(p_1(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,p_n(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n)) + \\ + F\Big(s,\ p_1\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big), \\ u\Big(s,\ p_1\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)\Big)\Big]ds, \quad (4)$$

где $p_i(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $i=\overline{1,n}$, определяются из системы интегральных уравнений

$$p_i\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=x_i-\int\limits_s^t u\Big(\theta,\ p_1\big(t,\theta,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,\theta,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)d\theta; \tag{5}$$

$p_i\big(t,t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=x_i$ и $x_1,x_2,\ldots,x_n$ играют роль параметров. Действительно, левую часть уравнения (1) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\big(t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m u=D_n^m[u],$$

где

$$D_n=\frac{\partial}{\partial t}+u\big(t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}$$

— n-мерный оператор Уизема. Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$D_n^m[u]=\alpha(t)\beta\big(x_1,x_2,\ldots,x_n\big)+F\Big(t,\ x_1,x_2,\ldots,x_n,\ u\big(t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big). \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет характеристики

$$x_i-\int\limits_0^t u\big(s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)ds=C_i,$$

где C_i — произвольные постоянные, $i=\overline{1,n}$. Введем обозначения

$$p_i\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=x_i-\int\limits_s^t u\big(\theta,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)d\theta,\quad p_i\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=x_i,\quad i=\overline{1,n}.$$

Введем новую неизвестную функцию $n+2$ аргументов

$$w\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=u\Big(s,\ p_1\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big),$$

которая при $t=s$ принимает вид

$$w\big(t,t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=u\Big(t,\ p_1\big(t,t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)=u\big(t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big).$$

Дифференцируя, находим

$$\begin{gathered}
w_s\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=u_s\Big(s,\ p_1\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)+\\
+u_{p_1}\Big(s,\ p_1\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)\cdot p_{1s}\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)+\ldots+\\
+u_{p_n}\Big(s,\ p_1\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)\cdot p_{ns}\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=\\
=u_s\Big(s,\ p_1\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)+\\
+u\Big(s,\ p_1\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)\times\\
\times\Bigg[u_{p_1}\Big(s,p_1\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)+\ldots+\\
+u_{p_n}\Big(s,\ p_1\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)\Bigg],
\end{gathered}$$

Тогда уравнение (6) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m} w\big(t,s,x_1,x_2,\dots,x_n\big) = \alpha(s)\beta\Big(p_1\big(t,s,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big) + \\ + F\Big(s,\ p_1\big(t,s,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,s,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ w\big(t,s,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big). \quad (7)$$

m-Кратное интегрирование уравнения (7) вдоль характеристик дает

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} w\big(t,s,x_1,x_2,\dots,x_n\big) = \Phi_1\Big(p_1\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big) + \\ + \int\limits_0^s \Bigg[\alpha(\varsigma)\beta\Big(p_1\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big) + \\ + F\Big(\varsigma,\ p_1\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ w\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big)\Bigg] d\varsigma, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial s^{m-2}} w\big(t,s,x_1,x_2,\dots,x_n\big) = \Phi_2\Big(p_1\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big) + \\ + \Phi_1\Big(p_1\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big)s + \\ + \int\limits_0^s (s-\varsigma)\Bigg[\alpha(\varsigma)\beta(p_1\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big) + \\ + F\Big(\varsigma,\ p_1\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ w\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big)\Bigg] d\varsigma, \quad (9)$$

. . . .

$$w\big(t,s,x_1,x_2,\dots,x_n\big) = \sum_{i=1}^m \Phi_i\Big(p_1\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big)\frac{t^{m-i}}{(m-i)!} + \\ + \int\limits_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m-1}}{(m-1)!}\Bigg[\alpha(\varsigma)\beta\Big(p_1\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big) + \\ + F\Big(\varsigma,\ p_1\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ w\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big)\Bigg] d\varsigma, \quad (10)$$

где

$$\Phi_i\Big(p_1\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\big), \quad i=\overline{1,m},$$

— произвольные постоянные вдоль характеристик, которые подлежат определению.

Начальные условия (2) для уравнения (7) запишем в виде

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} w\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big) = \phi_m\Big(p_1\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big), \\ \frac{\partial^{m-2}}{\partial s^{m-2}} w\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big) = \phi_{m-1}\Big(p_1\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big), \quad \dots, \\ w\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big) = \phi_1\Big(p_1\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big),\ \dots,\ p_n\big(t,0,x_1,x_2,\dots,x_n\big)\Big).$$

С учетом этих начальных условий из (8)—(10) придем к следующему интегральному уравнению:

$$w\big(t,s,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=\sum_{i=1}^{m}\phi_i\Big(p_1\big(t,0,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,0,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)\frac{t^{m-i}}{(m-i)!}+$$
$$+\int_0^s\frac{(s-\varsigma)^{m-1}}{(m-1)!}\bigg[\alpha(\varsigma)\beta\Big(p_1\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)+$$
$$+F\Big(\varsigma,\ p_1\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ w\big(t,\varsigma,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)\bigg]d\varsigma. \quad (11)$$

При $t=s$ из (11) получаем интегральное уравнение (4) вместе с системой (5).

3. Разрешимость интегрального уравнения (4)**.** Изучим интегральное уравнение (4) при фиксированных значениях $\alpha(t)$.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются следующие условия*:

$$\Big|\phi_i\big(x_1^1,\ldots,x_n^1\big)-\phi_i\big(x_1^2,\ldots,x_n^2\big)\Big|\leqslant\chi_i\Big(\big|x_1^1-x_1^2\big|+\ldots+\big|x_n^1-x_n^2\big|\Big),\quad 0<\chi_i=\mathrm{const},\quad i=\overline{1,m};$$
$$\Big|\beta\big(x_1^1,\ldots,x_n^1\big)-\beta\big(x_1^2,\ldots,x_n^2\big)\Big|\leqslant\omega\Big(\big|x_1^1-x_1^2\big|+\ldots+\big|x_n^1-x_n^2\big|\Big),\quad 0<\omega=\mathrm{const};$$
$$\max_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\Big|f\big(t,x_1,\ldots,x_n,u\big)\Big|\leqslant M(t),\quad 0<M(t)\in C(\Omega_T);$$
$$\Big|f\big(t,x_1^1,\ldots,x_n^1,u_1\big)-f\big(t,x_1^2,\ldots,x_n^2,u_2\big)\Big|\leqslant Q(t)\Big(\big|x_1^1-x_1^2\big|+\ldots+\big|x_n^1-x_n^2\big|\Big)+N(t)|u_1-u_2|;$$
$$0<\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\big[nQ(s)(t-s)+N(s)\big]ds<\infty.$$

Тогда при фиксированных значениях $\alpha(t)$ *нелинейное интегральное уравнение* (4) *имеет единственное решение в области* Ω. *Это решение можно найти методом последовательных приближений*:

$$\begin{gathered}u^0\big(t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=0,\\ u^{k+1}\big(t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\equiv\Theta\Big(t,\ x_1,x_2,\ldots,x_n;\ u^k,\ p_1^k,\ldots,p_n^k\Big),\quad k=0,1,2,\ldots,\end{gathered}\qquad(12)$$

где $p_i^k(s,t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *определяются из следующих итераций*:

$$p_i^0\big(s,t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=x_i,$$

$$p_i^k\big(s,t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)=$$
$$=x_i-\int_s^t u^k\Big(\theta,\ p_1^{k-1}\big(\theta,t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big),\ \ldots,\ p_n^{k-1}\big(\theta,t,x_1,x_2,\ldots,x_n\big)\Big)d\theta,\quad i=\overline{1,n}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы получаем, что для первой разности приближения (12) справедлива следующая оценка:

$$\Big|u^1(t,x_1,\ldots,x_n)-u^0(t,x_1,\ldots,x_n)\Big|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\max_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\big|\phi_i(x_1,\ldots,x_n)\big|\frac{T^{m-i}}{(m-i)!}+$$
$$+\max_{(t,x_1,\ldots,x_n)\in\Omega}\int_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\big|\alpha(s)\beta(x_1,\ldots,x_n)\big|ds+\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}M(s)ds\leqslant$$
$$\leqslant\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2,\quad(13)$$

где

$$\Delta_0 = \max_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} \left|\phi_i(x_1,\ldots,x_n)\right| \frac{T^{m-i}}{(m-i)!} < \infty,$$

$$\Delta_1 = \max_{t\in\Omega_T} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} M(s)ds < \infty,$$

$$\Delta_2 = \max_{(t,x_1,\ldots,x_n)\in\Omega} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \left|\alpha(s)\beta(x_1,\ldots,x_n)\right| ds < \infty.$$

С учетом (13) и условий теоремы получаем, что для второй разности приближения (12) справедлива следующая оценка:

$$\left|u^2(t,x_1,\ldots,x_n) - u^1(t,x_1,\ldots,x_n)\right| \leqslant n \sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_i T^{m-i}}{(m-i)!} \int\limits_0^t \left|u^1(s,x_1,\ldots,x_n) - u^0(s,x_1,\ldots,x_n)\right| ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \Bigg[n(Q(s)+\omega|\alpha(s)|) \int\limits_s^t \Big|u^1\big(\theta,x_1,\ldots,x_n\big) - u^0\big(\theta,x_1,\ldots,x_n\big)\Big| d\theta +$$

$$+ N(s)\left|u^1(s,x_1,\ldots,x_n) - u^0(s,x_1,\ldots,x_n)\right| \Bigg] ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t H(t,s)|u^1(s,x_1,\ldots,x_n) - u^0(s,x_1,\ldots,x_n)|ds \leqslant (\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2) \int\limits_0^t H(t,s)ds, \quad (14)$$

где

$$H(t,s) = n \sum_{i=1}^{m} \frac{\chi_i T^{m-i}}{(m-i)!} + \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \big[n(Q(s)+\omega|\alpha(s)|)(t-s) + N(s) \big].$$

С учетом (14) для третьей разности приближения (12) аналогично получим следующую оценку:

$$\left|u^3(t,x_1,\ldots,x_n) - u^2(t,x_1,\ldots,x_n)\right| \leqslant \int\limits_0^t H(t,s)\left|u^2(s,x_1,\ldots,x_n) - u^1(s,x_1,\ldots,x_n)\right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \big(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2\big) \int\limits_0^t H(t,s) \int\limits_0^s H(s,\theta)d\theta ds = \frac{\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2}{2!} \left[\int\limits_0^t H(t,s)ds \right]^2.$$

Продолжим этот процесс по индукции, придем к оценке

$$\left|u^{k+1}(t,x_1,\ldots,x_n) - u^k(t,x_1,\ldots,x_n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t H(t,s)\left|u^k(s,x_1,\ldots,x_n) - u^{k-1}(s,x_1,\ldots,x_n)\right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2}{k!} \left[\int\limits_0^t H(t,s)ds \right]^k. \quad (15)$$

Из оценки (15) следует, что последовательность функций $\{u^k(t,x_1,\ldots,x_n)\}_{k=1}^{\infty}$, определенная формулой (12), в пространстве достаточно гладких функций сходится абсолютно и равномерно в области Ω. Отсюда следует существование решения интегрального уравнения (4).

Докажем единственность этого решения с помощью интегральных неравенств. Предположим, что интегральное уравнение (4) имеет два решения: $u(t,x_1,\ldots,x_n)$ и $\vartheta(t,x_1,\ldots,x_n)$ в области Ω. Тогда для разности этих решений получим оценку

$$\left|u(t,x_1,\ldots,x_n)-\vartheta(t,x_1,\ldots,x_n)\right| \leqslant \int\limits_0^t H(t,s)\left|u(s,x_1,\ldots,x_n)-\vartheta(s,x_1,\ldots,x_n)\right|ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла—Беллмана к последнему неравенству, получаем, что

$$\left|u(t,x_1,\ldots,x_n)-\vartheta(t,x_1,\ldots,x_n)\right| \equiv 0$$

в области Ω. □

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда для итерационного процесса* (12) *справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\left|u^k(t,x_1,\ldots,x_n)-u(t,x_1,\ldots,x_n)\right| \leqslant (\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2)\frac{r^k}{k!}\cdot\exp\{r\}, \tag{16}$$

где

$$r=\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t H(t,s)ds<\infty.$$

Доказательство. Действительно, в силу условий теоремы с учетом (15) имеем оценку

$$\begin{aligned}&\left|u^k(t,x_1,\ldots,x_n)-u(t,x_1,\ldots,x_n)\right| \leqslant\\ &\leqslant \left|u^{k+1}(t,x_1,\ldots,x_n)-u^k(t,x_1,\ldots,x_n)\right|+\left|u^{k+1}(t,x_1,\ldots,x_n)-u(t,x_1,\ldots,x_n)\right|\leqslant\\ &\leqslant (\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2)\frac{r^k}{k!}+\int\limits_0^t H(t,s)\left|u^k(s,x_1,\ldots,x_n)-u(s,x_1,\ldots,x_n)\right|ds.\end{aligned}$$

Применяя неравенство Гронуолла—Беллмана к последнему неравенству, получаем оценку (16). □

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда для любых* $x_1^1,x_1^2,\ldots,x_n^1,x_n^2\in\mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\left|u(t,x_1^1,\ldots,x_n^1)-u(t,x_1^2,\ldots,x_n^2)\right| \leqslant \Psi(t)\Big(\left|x_1^1-x_1^2\right|+\ldots+\left|x_n^1-x_n^2\right|\Big), \tag{17}$$

где

$$\Psi(t)=\mu\cdot\exp\left\{\int\limits_0^t H(t,s)ds\right\}<\infty,$$

$$\mu=\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t\left\{\sum_{i=1}^m\frac{\chi_iT^{m-i}}{(m-i)!}+\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}(Q(s)+\omega|\alpha(s)|)(t-s)\right\}ds.$$

Доказательство. Действительно, в силу условий теоремы для любых $x_1^1,x_1^2,\ldots,x_n^1,x_n^2\in\mathbb{R}$ имеем оценку

$$\begin{aligned}&\left|u(t,x_1^1,\ldots,x_n^1)-u(t,x_1^2,\ldots,x_n^2)\right| \leqslant\\ &\leqslant\sum_{i=1}^m\frac{\chi_iT^{m-i}}{(m-i)!}\int\limits_0^t\Big(\left|x_1^1-x_1^2\right|+\ldots+\left|x_n^1-x_n^2\right|+n\Big|u\big(s,x_1^1,\ldots,x_n^1\big)-u\big(s,x_1^2,\ldots,x_n^2\big)\Big|\Big)ds+\\ &+\omega\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}|\alpha(s)|\int\limits_s^t\Big(\left|x_1^1-x_1^2\right|+\ldots+\left|x_n^1-x_n^2\right|+n\Big|u\big(\theta,x_1^1,\ldots,x_n^1\big)-u\big(\theta,x_1^2,\ldots,x_n^2\big)\Big|\Big)d\theta ds+\end{aligned}$$

$$
+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}Q(s)\int\limits_s^t \Big(\big|x_1^1-x_1^2\big|+\ldots+\big|x_n^1-x_n^2\big|+n\Big|u\big(\theta,x_1^1,\ldots,x_n^1\big)-u\big(\theta,x_1^2,\ldots,x_n^2\big)\Big|\Big)d\theta ds+
$$

$$
+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}N(s)\Big|u\big(s,x_1^1,\ldots,x_n^1\big)-u\big(s,x_1^2,\ldots,x_n^2\big)\Big|ds\leqslant
$$

$$
\leqslant\mu\cdot\Big(\big|x_1^1-x_1^2\big|+\ldots+\big|x_n^1-x_n^2\big|\Big)+\int\limits_0^t H(t,s)\Big|u\big(s,x_1^1,\ldots,x_n^1\big)-u\big(s,x_1^2,\ldots,x_n^2\big)\Big|ds,
$$

где

$$
\mu=\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t\left\{\sum_{i=1}^m\frac{\chi_i T^{m-i}}{(m-i)!}+\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\big(Q(s)+\omega|\alpha(s)|\big)(t-s)\right\}ds.
$$

Применяя неравенство Гонуолла—Беллмана к последней оценке, получаем, что

$$
|u(t,x_1^1,\ldots,x_n^1)-u(t,x_1^2,\ldots,x_n^2)|\leqslant\mu(|x_1^1-x_1^2|+\ldots+|x_n^1-x_n^2|)\exp\left\{\int\limits_0^t H(t,s)ds\right\}.
$$

Отсюда следует справедливость оценки (17). □

Из доказанных теорем вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Предположим, что выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда при фиксированных значениях* $\alpha(t)$ *начальная задача* (1), (2) *имеет единственное решение в области* Ω. *Это решение может быть найдено при помощи итерационного процесса Пикара* (12). *Для решения начальной задачи* (1), (2) *справедливы оценки* (16) *и* (17).

4. Определение коэффициента переопределения. В данной работе, кроме основной неизвестной функции $u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, неизвестным является и коэффициент $\alpha(t)$. С помощью дополнительного условия (3) из интегрального уравнения (4) придем к интегральному уравнению Вольтерра первого рода

$$
\int\limits_0^t K(t,s)\alpha(s)ds=g(t), \tag{18}
$$

где

$$
K(t,s)=\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\beta\Big(p_1\big(t,s,x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\big)\Big),
$$

$$
g(t)=\psi(t)-\sum_{i=1}^m\phi_i\Big(p_1\big(t,0,x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,0,x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\big)\Big)\frac{t^{m-i}}{(m-i)!}-
$$

$$
-\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}F\Big(s,\ p_1\big(t,s,x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\big),\ \ldots,\ p_n\big(t,s,x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\big),\ \psi(s)\Big)ds.
$$

В силу постановки задачи интегральное уравнение Вольтерра первого рода (18) имеет единственное решение на отрезке Ω_T. Это уравнение сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода путем m-кратного дифференцирования по t и последующего применения метода последовательных приближений.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда обратная задача* (1)—(3) *имеет единственную пару решений* $\{u(t,x_1,\ldots,x_n),\alpha(t)\}$ *в области* Ω.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек. — М.: Наука, 2006.
2. *Алиев Ф. А., Исмаилов Н. А., Намазов А. А., Магаррамов И. А.* Асимптотический метод определения коэффициента гидравлического сопротивления на разных участках трубопровода при добыче нефти// Proc. Inst. Appl. Math. — 2017. — *6*, № 1. — С. 3–15.
3. *Гамзаев Х. М.* Численный метод решения коэффициентной обратной задачи для уравнения диффузии–конвекции–реакции// Вестн. Томск. ун-та. Мат. мех. — 2017. — *50*. — С. 67–78.
4. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка. — М.: МГУ, 1999.
5. *Замышляева А. А.* Математические модели соболевского типа высокого порядка// Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Мат. модел. програм. — 2014. — *7*, № 2. — С. 5–28.
6. *Иманалиев М. И., Ведь Ю. А.* О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом// Диффер. уравн. — 1989. — *23*, № 3. — С. 465–477.
7. *Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н.* К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема// Докл. РАН. — 1992. — *325*, № 6. — С. 111–115.
8. *Каримов Ш. Т.* Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя// Изв. вузов. Мат. — 2017. — *8*. — С. 27–41.
9. *Кошанов Б. Д., Солдатов А. П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 12. — С. 1666–1681.
10. *Похожаев С. И.* О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка// Мат. сб. — 1982. — *117*, № 2. — С. 251–265.
11. *Романов В. Г.* Об определении коэффициентов в уравнениях вязкоупругости// Сиб. мат. ж. — 2014. — *55*, № 3. — С. 617–626.
12. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — Киев: Наукова думка, 1973.
13. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 1. — С. 112–123.
14. *Юлдашев Т. К.* Обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения высокого порядка с вырожденным ядром// Изв. ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2017. — *50*. — С. 121–132.
15. *Юлдашев Т. К.* Разрешимость и определение коэффициента в одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром// Докл. НАН Украины. — 2017. — *5*. — С. 8–16.
16. *Юлдашев Т. К.* Интегро-дифференциальное уравнение с двумерным оператором Уизема высокой степени// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *156*. — С. 117–125.
17. *Юлдашева А. В.* Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2017. — *140*. — С. 43–49.
18. *Benney D. J., Luke J. C.* Interactions of permanent waves of finite amplitude// J. Math. Phys. — 1964. — *43*. — P. 309–313.
19. *Yuldashev T. K.* Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel// Lobachevskii J. Math. — 2017. — *38*, № 3. — P. 547–553.
20. *Yuldashev T. K.* On inverse boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and spectral parameter// Lobachevskii J. Math. — 2019. — *40*, № 2. — P. 230–239.

Дыйканов Гапар Аскарович
Баткенский государственный университет;
Кызыл-Кийский педагогический институт
E-mail: dyykanov1960@mail.ru

Шабадиков Конак Хусейнович
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
E-mail: konak4426@gmail.com

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 201 (2021). С. 53–64
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-201-53-64

УДК 517.955.2

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ

© 2021 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, И. У. НАЗАРОВ**

Аннотация. Изучены вопросы разрешимости начальной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором произвольной натуральной степени и вырожденным ядром. Выражение дифференциального оператора в частных производных высокого порядка в левой части уравнения через суперпозицию дифференциальных операторов первого порядка позволило представить рассматриваемое уравнение как интегральное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль характеристик. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости начальной задачи и устойчивости этого решения по начальным функциям.

Ключевые слова: начальная задача, характеристика, суперпозиция дифференциальных операторов, гиперболический оператор высокой степени, вырожденное ядро, однозначная разрешимость.

NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH A HIGH-DEGREE HYPERBOLIC OPERATOR

© 2021 **T. K. YULDASHEV, I. U. NAZAROV**

Abstract. In this paper, we examine the solvability of the initial-value problem for a nonlinear integro-differential equation with a hyperbolic operator of arbitrary natural degree and a degenerate kernel. The expression of the high-order partial differential operator on the left-hand side of the equation through the superposition of first-order differential operators allowed us to represent the equation considered as an integral equation for unknown function along the characteristics. Also, we prove the unique solvability of the initial-value problem and the stability of solutions with respect to initial data.

Keywords and phrases: initial-value problem, characteristic, superposition of differential operators, high-degree hyperbolic operator, degenerate kernel, unique solvability.

AMS Subject Classification: 35A30, 35C15, 35G55

1. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков имеют много приложений в математической физике и нелинейной механике. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков рассматривались в работах многих авторов, в частности, в [5–9, 12–15].

Интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром рассматривались ранее в [1, 2, 10, 11, 16, 17].

Отметим, что дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка локально решаются методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи сведения их к характеристической системе. Применение метода характеристик к решению дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка позволяет свести изучение эволюции волн к изучению распространения частиц (см. [3]). В [4] разработана методика интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка.

В настоящей работе рассматриваются вопросы разрешимости начальной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором произвольной натуральной степени и вырожденным ядром. Выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволяет применять методов решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В области $\Omega \equiv \Omega_T \times \mathbb{R}$ рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n u(t,x) - \lambda \int\limits_0^T K(t,s) u(s,x) ds = f(h(t,x), x, u(h(t,x),x)) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(t,x)|_{t=0} = \varphi_{i+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n-1, \qquad (2)$$

$$u(t,x)|_{t \notin \Omega_T} = \varphi_1(t,x), \qquad (3)$$

где

$$K(t,s) = \sum_{\tau=1}^{k} a_\tau(t) b_\tau(s),$$

$a_\tau(t), b_\tau(s) \in C(\Omega_T)$, λ — действительный спектральный параметр, $u(t,x)$ — искомая функция, $f(t,x,u) \in C(\Omega_T \times \mathbb{R}^2)$, $h(t,x) \in C(\Omega)$ — отклонение, $h(t,x) \neq t$, $\varphi_1(t,x) \in C(\Omega)$, $\varphi_1(0,x) = \varphi_1(x)$, $\varphi_i(x) \in C(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, $\Omega_T \equiv [0;T]$, $0 < T < \infty$, $\mathbb{R} \equiv (-\infty, \infty)$, $0 < \alpha = \mathrm{const}$, n и k — натуральные числа. Системы функций $\{a_\tau(t)\}_{\tau=1}^{infty}$ и $\{b_\tau(t)\}_{\tau=1}^{infty}$ являются линейно независимыми.

2. Сведение начальной задачи к интегральному уравнению. Левую часть дифференциального уравнения (1) запишем в виде суперпозици двух дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x}\right)^n u = D_1^n[D_2^n[u]],$$

где $D_1[u] \equiv u_t - \alpha u_x$, $D_2[u] \equiv u_t + \alpha u_x$. Введем обозначение

$$c_\tau(x) = \int\limits_0^T b_\tau(s) u(s,x) ds; \qquad (4)$$

тогда уравнения (1) можно переписать в виде

$$D_1^n[D_2^n[u]] = \lambda \sum_{\tau=1}^{k} a_\tau(t) c_\tau(x) + f(h(t,x), x, u(h(t,x),x)). \qquad (5)$$

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$D_1[u] \equiv u_t - \alpha u_x.$$

Положим $p(t,s,x) = x + \alpha(t-s)$ и произведем замену $u(t,x) = \vartheta(t,z)$, $z = p(t,0,x)$ (см. [4]). После дифференцирования имеем $u_t(t,x) = \vartheta_t(t,z) + \vartheta_z(t,z) z_t$. Так как $\vartheta_z(t,z) = u_x(t,x)$, $z_t = \alpha$, получаем

$$\vartheta_t(t,z) = u_t(t,x) - \alpha u_x(t,x). \qquad (6)$$

С учетом (6) уравнение (5) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}[D_2^n[\vartheta(t,z)]] = \lambda \sum_{\tau=1}^{k} a_\tau(t) c_\tau(z - \alpha t) + f(h(t, z-\alpha t), z - \alpha t, \vartheta(h(t, z-\alpha t), z - \alpha t)). \qquad (7)$$

Интегрируя уравнения (7) n раз, получаем

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\big[D_2^n[\vartheta(t,z)]\big] = \Phi_1(z) + \int\limits_0^t \left[\lambda \sum_{\tau=1}^k a_\tau(\theta) c_\tau(z-\alpha\theta) + \right.$$

$$\left. + f\Big(h(\theta, z-\alpha\theta),\ z-\alpha\theta,\ \vartheta(h(\theta, z-\alpha\theta),\ z-\alpha\theta)\Big)\right] d\theta, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\big[D_2^n[\vartheta(t,z)]\big] = \Phi_2(z) + \Phi_1(z)t + \int\limits_0^t (t-\theta)\left[\lambda \sum_{\tau=1}^k a_\tau(\theta) c_\tau(z-\alpha\theta) + \right.$$

$$\left. + f\Big(h(\theta,\ z-\alpha\theta),\ z-\alpha\theta,\ \vartheta\big(h(\theta, z-\alpha\theta), z-\alpha\theta\big)\Big)\right] d\theta, \quad (9)$$

$$D_2^n[\vartheta(t,z)] = \sum_{i=1}^n \Phi_i(z)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\lambda \sum_{\tau=1}^k a_\tau(\theta) c_\tau(z-\alpha\theta) + \right.$$

$$\left. + f\Big(h(\theta, z-\alpha\theta),\ z-\alpha\theta,\ \vartheta\big(h(\theta, z-\alpha\theta), z-\alpha\theta\big)\Big)\right] d\theta, \quad (10)$$

где $\Phi_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$ — произвольные постоянные вдоль характеристики $x + \alpha t = C_1$, которые подлежат определению, $C_1 = \text{const}$. Начальные условия (2) для (8)—(10) имеют вид

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}[D_2^n[\vartheta(0,z)]] = \varphi_{2n}(z), \quad \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}[D_2^n[\vartheta(0,z)]] = \varphi_{2n-2}(z), \dots,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[D_2^n[\vartheta(0,z)]] = \varphi_4(z), \quad D_2^n[\vartheta(0,z)] = \varphi_2(z).$$

В силу этих условий из (8)—(10) получаем

$$D_2^n[\vartheta(t,z)] = \sum_{i=1}^n \varphi_{2i}(z)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\lambda \sum_{\tau=1}^k a_\tau(\theta) c_\tau(z-\alpha\theta) + \right.$$

$$\left. + f\Big(h(\theta, z-\alpha\theta),\ z-\alpha\theta,\ \vartheta\big(h(\theta, z-\alpha\theta), z-\alpha\theta\big)\Big)\right] d\theta. \quad (11)$$

Учтя, что $\vartheta(t,z) = u(t,x)$, $z = p(t,0,x) = x + \alpha t$, перепишем интегро-дифференциальное уравнение (11) в следующем виде:

$$D_2^n[u(t,x)] = \sum_{i=1}^n \varphi_{2i}(x+\alpha t)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\lambda \sum_{\tau=1}^k a_\tau(s) c_\tau(p(t,s,x)) + \right.$$

$$\left. + f\Big(h(s, p(t,s,x)),\ p(t,s,x),\ u\big(h(s,p(t,s,x)), p(t,s,x)\big)\Big)\right] ds, \quad (12)$$

где $p(t,s,x) = x + \alpha(t-s)$.

Теперь рассмотрим дифференциальное выражение $D_2[u] \equiv u_t + \alpha u_x$. Введем обозначение $q(t,s,x) = x - \alpha(t-s)$ и положим $u(t,x) = w(t,\eta)$, $\eta = q(t,0,x)$. Дифференцируя, получаем $u_t(t,x) = w_t(t,\eta) - \alpha w_\eta(t,\eta)$. Так как $w_\eta(t,\eta) = u_x(t,x)$, получаем, что

$$w_t(t,\eta) = u_t(t,x) + \alpha u_x(t,x). \quad (13)$$

С учетом (13) уравнение (12) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}[w(t,\eta)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{2i}(\eta+2\alpha t)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\Bigg[\lambda\sum_{\tau=1}^{k} a_\tau(s)c_\tau\big(p(t,s,\eta+\alpha t)\big)+$$
$$+f\Big(h\big(s,p(t,s,\eta+\alpha t)\big),\ p\big(t,s,\eta+\alpha t\big),\ w\big(h(s,p(t,s,x)),p(t,s,\eta+\alpha t)\big)\Big)\Bigg]ds. \quad (14)$$

n-Кратное интегрирование уравнения (14) дает

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}[w(t,\eta)] = \Phi_{n+1}(\eta) + \sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t \varphi_{2j}(\eta+2\alpha s)\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}ds + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}\Bigg[\lambda\sum_{\tau=1}^{k} a_\tau(s)c_\tau(p(t,s,q))+$$
$$+f\Big(h(s,p(t,s,q)),\ p(t,s,q),\ w\big(h(s,p(t,s,x)),p(t,s,q)\big)\Big)\Bigg]ds, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}[w(t,\eta)] = \Phi_{n+2}(\eta) + \Phi_{n+1}(\eta)t+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t (t-s)\varphi_{2j}(\eta+2\alpha s)\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}ds + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg[\lambda\sum_{\tau=1}^{k} a_\tau(s)c_\tau(p(t,s,q))+$$
$$+f\Big(h(s,p(t,s,q)),\ p(t,s,q),\ w\big(h(s,p(t,s,x)),p(t,s,q)\big)\Big)\Bigg]ds, \quad (16)$$

. . . .

$$w(t,\eta) = \sum_{i=n+1}^{2n}\Phi_i(\eta)\frac{t^{2n-i}}{(2n-i)!}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{2j}(\eta+2\alpha s)\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}ds + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}\Bigg[\lambda\sum_{\tau=1}^{k} a_\tau(s)c_\tau(p(t,s,q))+$$
$$+f\Big(h(s,p(t,s,q)),\ p(t,s,q),\ w\big(h(s,p(t,s,x)),p(t,s,q)\big)\Big)\Bigg]ds, \quad (17)$$

где $\Phi_i(\eta)$, $i=n+1,n+2,\dots,2n$ — произвольные постоянные вдоль характеристики $x-\alpha t = C_2$, которые подлежат определению, $C_2 = \text{const}$.

Начальные условия (2) для (15)—(17) имеют вид

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}w(0,\eta) = \varphi_{2n-1}(\eta), \quad \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}w(0,\eta) = \varphi_{2n-3}(\eta), \quad \dots, \quad w(0,\eta) = \varphi_1(\eta).$$

В силу этих условий из (15)—(17) получаем:

$$w(t,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_{2i-1}(\eta)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{2j}(\eta+2\alpha s)\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}ds + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}\Bigg[\lambda\sum_{\tau=1}^{k} a_\tau(s)c_\tau(p(t,s,q))+$$
$$+f(h(s,p(t,s,q)),p(t,s,q),w(h(s,p(t,s,q)),p(t,s,q)))\Bigg]ds. \quad (18)$$

Учитывая, что $w(t,\eta) = u(t,x)$, $\eta = q(t,0,x) = x-\alpha t$, $\eta+2\alpha s = x-\alpha(t-2s)$, $p(t,s,q) = x$, перепишем уравнение (18) в следующем виде:

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{2i-1}(x-\alpha t)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{2j}(x-\alpha(t-2s))\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}ds+$$
$$+\int_0^t H(t,s)\left[\lambda\sum_{\tau=1}^{k}a_\tau(s)c_\tau(x)+f(h(s,x),x,u(h(s,x),x))\right]ds, \quad (19)$$

где x играет роль параметра,

$$H(t,s)=\frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Теперь левую часть уравнения (1) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n u=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)^n u=D_2^n[D_1^n[u]],$$

где $D_1[u]\equiv u_t-\alpha u_x$, $D_2[u]\equiv u_t+\alpha u_x$.

Повторяя все процедуры (6)—(18), аналогично (19) получим

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{2i-1}(x+\alpha t)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{2j}(x+\alpha(t-2s))\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}ds+$$
$$+\int_0^t H(t,s)\left[\lambda\sum_{\tau=1}^{k}a_\tau(s)c_\tau(x)+f(h(s,x),x,u(h(s,x),x))\right]ds. \quad (20)$$

Из (19) и (20) получаем, что

$$u(t,x)=G(t,x)+\int_0^t H(t,s)\left[\lambda\sum_{\tau=1}^{k}a_\tau(s)c_\tau(x)+f(h(s,x),x,u(h(s,x),x))\right]ds, \quad (21)$$

где x играет роль параметра,

$$H(t,s)=\frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$G(t,x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\varphi_{2i-1}(x-\alpha t)+\varphi_{2i-1}(x+\alpha t)]\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}[\varphi_{2j}(x-\alpha(t-2s))+\varphi_{2j}(x+\alpha(t-2s))]\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}ds.$$

Путем $2n$-кратного дифференцирования вдоль соответствующих характеристик из (21) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^{2n}u}{dt^{2n}}=\lambda\sum_{\tau=1}^{k}a_\tau(t)c_\tau(x)+f(h(t,x),x,u(h(t,x),x)). \quad (22)$$

Для левой части (22) имеем соотношение

$$\frac{d^{2n}u}{dt^{2n}}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)^n u=D_1^n[D_2^n[u]].$$

Отсюда с учетом (22) получаем интегро-дифференциальное уравнение (1). Подставляя (21) в формулу (4), получаем систему функциональных уравнений

$$c_\tau(x)-\lambda\sum_{\nu=1}^{k}c_\nu(x)A_{\tau\nu}=B_\tau(x,u),\quad \tau=\overline{1,k}, \quad (23)$$

где

$$A_{\tau\nu} = \int_0^T b_\tau(s) \int_0^s H(s,\theta) a_\nu(\theta) d\theta ds,$$
$$B_\tau(x,u) = \int_0^T b_\tau(s) G(s,x) ds + \int_0^T b_\tau(s) \int_0^s H(s,\theta) f(h(\theta,x), x, u(h(\theta,x),x)) d\theta ds. \tag{24}$$

Система (23) однозначно разрешима при любых $B_\tau(x,u)$, если выполняется следующее условие:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \ldots & \lambda A_{1k} \\ \lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & \ldots & \lambda A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{k1} & \lambda A_{k2} & \ldots & 1-\lambda A_{kk} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{25}$$

Определитель $\Delta(\lambda)$ в (25) есть многочлен относительно λ степени не выше k. Уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет не более k различных корней. Через Λ обозначим множество корней этого алгебраического уравнения. При других значениях параметра, т.е. при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$, условие (25) выполняется. Для таких значений λ система (23) имеет единственное решение при любой конечной правой части. Поэтому для $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$ решения системы (23) записываются в виде

$$c_\tau(x) = \frac{\Delta_\tau(\lambda, x, u)}{\Delta(\lambda)}, \quad \tau = 1, 2, \ldots, k, \tag{26}$$

где

$$\Delta_\tau(\lambda, x, u) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \ldots & \lambda A_{1(\tau-1)} & B_1(x,u) & \lambda A_{1(\tau+1)} & \ldots & \lambda A_{1k} \\ \lambda A_{21} & \ldots & \lambda A_{2(\tau-1)} & B_2(x,u) & \lambda A_{2(\tau+1)} & \ldots & \lambda A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{k1} & \ldots & \lambda A_{k(\tau-1)} & B_k(x,u) & \lambda A_{k(\tau+1)} & \ldots & 1-\lambda A_{kk} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Из (27) видно, что определители $\Delta_\tau(\lambda, x, u)$ зависят и от самой неизвестной функции $u(t,x)$. Подстановка (26) в уравнение (21) дает следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$u(t,x) \equiv \Theta(t,x;u) =$$
$$= G(t,x) + \int_0^t H(t,s) \left[\lambda \sum_{\tau=1}^k a_\tau(s) \frac{\Delta_\tau(\lambda,x,u)}{\Delta(\lambda)} + f(h(s,x), x, u(h(s,x),x)) \right] ds. \tag{28}$$

Таким образом, начальная задача (1)—(3) сведена к нелинейному функционально-интегральному уравнению (28).

3. Разрешимость начальной задачи (1)—(3).

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

(i) $\max_{(t,x)\in\Omega} |G(t,x)| \leqslant \beta_0 < \infty$;

(ii) $\max_{x\in\mathbb{R}} |f(t,x,u)| \leqslant M(t), \quad 0 < M(t) \in C(\Omega_T)$;

(iii) $\left| f(t,x,u_1) - f(t,x,u_2) \right| \leqslant N(t) |u_1 - u_2|, \quad 0 < N(t) \in C(\Omega_T)$;

(iv) $0 < |\lambda| \sum_{\tau=1}^k \max_{(t,x)\in\Omega} \int_0^t H(t,s) |a_\tau(s)| \left| \frac{\Delta_\tau(\lambda,x,u)}{\Delta(\lambda)} \right| ds \leqslant \beta_1 < \infty$;

(v) $0 < \max_{t\in\Omega_T} \int_0^t H(t,s) M(s) ds \leqslant \beta_2 < \infty$;

$$\text{(vi)}\quad \max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t H(t,s)\left[N(s)+|\lambda|\sum_{\tau=1}^k\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 1})}{\Delta(\lambda)}\right||a_\tau(s)|\right]ds<\infty,$$

где $\Delta_\tau(\lambda,\,\mu_{\tau 1})$ *определяются ниже из формулы* (33). *Тогда для* $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\Lambda$ *нелинейное интегральное уравнение* (28) *имеет единственное решение в области* Ω. *Это решение можно найти методом последовательных приближений*:

$$u_0(t,x)=0,\quad u_{m+1}(t,x)\equiv\Theta(t,x;u_m),\quad m=0,1,2,\ldots. \tag{29}$$

Доказательство. В силу условий теоремы получаем, что для первой разности приближения (29) справедлива следующая оценка:

$$|u_1(t,x)-u_0(t,x)|\leqslant \max_{(t,x)\in\Omega}|G(t,x)|+$$

$$+|\lambda|\sum_{\tau=1}^k\max_{(t,x)\in\Omega}\int\limits_0^t H(t,s)|a_\tau(s)|\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,x,u)}{\Delta(\lambda)}\right|ds+\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t H(t,s)M(s)ds\leqslant\beta_0+\beta_1+\beta_2<\infty. \tag{30}$$

С учетом (30) и условий теоремы получаем, что для второй разности приближения (29) справедлива оценка

$$\big|u_2(t,x)-u_1(t,x)\big|\leqslant|\lambda|\sum_{\tau=1}^k\max_{(t,x)\in\Omega}\int\limits_0^t H(t,s)|a_\tau(s)|\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,x,u_1)-\Delta_\tau(\lambda,x,u_0)}{\Delta(\lambda)}\right|ds+$$

$$+\int\limits_0^t H(t,s)N(s)|u_1(s,x)-u_0(s,x)|ds. \tag{31}$$

С учетом (24) имеем следующую оценку:

$$\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,x,u_1)-\Delta_\tau(\lambda,x,u_0)}{\Delta(\lambda)}\right|\leqslant\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 1})}{\Delta(\lambda)}\right|\cdot\big|u_1(t,x)-u_0(t,x)\big|, \tag{32}$$

где

$$\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 1})=\begin{vmatrix}1-\lambda A_{11} & \ldots & \lambda A_{1(\tau-1)} & \mu_{11} & \lambda A_{1(\tau+1)} & \ldots & \lambda A_{1k}\\ \lambda A_{21} & \ldots & \lambda A_{2(\tau-1)} & \mu_{21} & \lambda A_{2(\tau+1)} & \ldots & \lambda A_{2k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda A_{k1} & \ldots & \lambda A_{k(\tau-1)} & \mu_{k1} & \lambda A_{k(\tau+1)} & \ldots & 1-\lambda A_{kk}\end{vmatrix},$$

$$\mu_{\tau 1}=\int\limits_0^T|b_\tau(s)|\int\limits_0^s H(s,\theta)N(\theta)d\theta ds,\quad \tau=1,2,\ldots,k. \tag{33}$$

С учетом (32) неравенство (31) перепишем в виде

$$|u_2(t,x)-u_1(t,x)|\leqslant|\lambda|\int\limits_0^t H(t,s)\sum_{\tau=1}^k\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 1})}{\Delta(\lambda)}\right||a_\tau(s)|\cdot\big|u_1(s,x)-u_0(s,x)\big|ds+$$

$$+\int\limits_0^t H(t,s)N(s)|u_1(s,x)-u_0(s,x)|ds\leqslant\int\limits_0^t W(t,s)|u_1(s,x)-u_0(s,x)|ds\leqslant$$

$$\leqslant(\beta_0+\beta_1+\beta_2)\int\limits_0^t W(t,s)ds, \tag{34}$$

где

$$W(t,s)=H(t,s)\left[N(s)+|\lambda|\sum_{\tau=1}^{k}\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 1})}{\Delta(\lambda)}\right|\left|a_\tau(s)\right|\right].$$

С учетом (34) для третьей разности приближения (29) получим оценку

$$\left|u_3(t,x)-u_2(t,x)\right|\leqslant\int\limits_0^t W(t,s)\left|u_2(s,x)-u_1(s,x)\right|ds\leqslant$$

$$\leqslant\left(\beta_0+\beta_1+\beta_2\right)\int\limits_0^t W(t,s)\int\limits_0^s W(s,\theta)d\theta ds=\frac{\left(\beta_0+\beta_1+\beta_2\right)}{2!}\left[\int\limits_0^t W(t,s)ds\right]^2.$$

Продолжая этот процесс, по индукции получаем, что

$$\left|u_{m+1}(t,x)-u_m(t,x)\right|\leqslant\frac{\left(\beta_0+\beta_1+\beta_2\right)}{m!}\left[\int\limits_0^t W(t,s)ds\right]^m. \tag{35}$$

Оценка (35) показывает, что итерация (29) сходится абсолютно и равномерно в области Ω.

Покажем единственность решения нелинейного интегрального уравнения (28). Пусть нелинейное функционально-интегральное уравнение (28) имеет два решения: $u(t,x)$ и $\vartheta(t,x)$ в области Ω. Тогда для разности этих решений справедлива оценка

$$\left|u(t,x)-\vartheta(t,x)\right|\leqslant\int\limits_0^t W(t,s)\left|u(s,x)-\vartheta(s,x)\right|ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла—Беллмана к последнему неравенству, получаем, что $|u(t,x)-\vartheta(t,x)|\equiv 0$ в области Ω. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда для итерационного процесса* (29) *справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\left|u(t,x)-u_m(t,x)\right|\leqslant(\beta_0+\beta_1+\beta_2)\frac{\rho^m}{m!}\cdot\exp\{\rho\}, \tag{36}$$

где

$$\rho=\max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t W(t,s)ds<\infty.$$

Доказательство. Действительно, в силу условий теоремы с учетом (35) имеем оценку

$$\left|u(t,x)-u_m(t,x)\right|\leqslant\left|u_{m+1}(t,x)-u_m(t,x)\right|+\left|u_{m+1}(t,x)-u(t,x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant(\beta_0+\beta_1+\beta_2)\frac{\rho^m}{m!}+\int\limits_0^t W(t,s)|u_m(s,x)-u(s,x)|ds.$$

Применяя к последнему неравенству неравенство Гронуолла—Беллмана, получаем оценку (36). Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия*:

(i) $\left|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)\right|\leqslant\chi_i|x_1-x_2|$, $0<\chi_i=\mathrm{const}<\infty$, $i=\overline{1,2n}$;

(ii) $\left|f(t,x_1,u_1)-f(t,x_2,u_2)\right|\leqslant Q_0|x_1-x_2|+N(t)|u_1-u_2|$, $Q_0=\mathrm{const}<\infty$, $0<N(t)\in C(\Omega_T)$;

(iii) $0<\max\limits_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t H(t,s)(Q_0+N(s))ds<\infty$.

Тогда для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\big|u(t,x_1) - u(t,x_2)\big| \leqslant \Psi(t)|x_1 - x_2|, \tag{37}$$

где

$$\Psi(t) = \mu \cdot \exp\left\{\int\limits_0^t W(t,s)ds\right\} < \infty, \quad 0 < \mu = \text{const} < \infty.$$

Доказательство. Сначала оценим разность $\big|B_\tau(x_1,u_1) - B_\tau(x_2,u_2)\big|$ из (24). Тогда, в силу условий теоремы, имеем

$$\big|B_\tau(x_1,u_1) - B_\tau(x_2,u_2)\big| \leqslant \int\limits_0^T |b_\tau(s)| \cdot |G(s,x_1) - G(s,x_2)|ds +$$

$$+ \int\limits_0^T |b_\tau(s)| \int\limits_0^s H(s,\theta)\Big|f\big(\theta, x_1, u(\theta,x_1)\big) - f\big(\theta, x_2, u(\theta,x_2)\big)\Big|d\theta ds \leqslant$$

$$\leqslant \mu_{\tau 0}|x_1 - x_2| + \mu_{\tau 1} \max_{s\in\Omega_T}\big|u(s,x_1) - u(s,x_2)\big|,$$

где

$$\mu_{\tau 0} = \int\limits_0^T |b_\tau(s)| \left[\sum_{i=1}^n \chi_{2i-1}\frac{s^{n-i}}{(n-i)!} + \sum_{j=1}^n \chi_{2j}\int\limits_0^s \frac{(s-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\theta^{n-j}}{(n-j)!}d\theta + Q_0\int\limits_0^s H(s,\theta)d\theta\right] ds,$$

$$\mu_{\tau 1} = \int\limits_0^T |b_\tau(s)| \int\limits_0^s H(s,\theta)N(\theta)d\theta ds, \quad \tau = 1,2,\ldots,k.$$

Тогда из (27) получаем оценку

$$\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,x_1,u_1) - \Delta_\tau(\lambda,x_2,u_2)}{\Delta(\lambda)}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 0})}{\Delta(\lambda)}\right| |x_1 - x_2| + \left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 1})}{\Delta(\lambda)}\right| \max_{s\in\Omega_T}\big|u(s,x_1) - u(s,x_2)\big|, \tag{38}$$

где $\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 1})$ определяются из (33),

$$\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 0}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \ldots & \lambda A_{1(\tau-1)} & \mu_{10} & \lambda A_{1(\tau+1)} & \ldots & \lambda A_{1k} \\ \lambda A_{21} & \ldots & \lambda A_{2(\tau-1)} & \mu_{20} & \lambda A_{2(\tau+1)} & \ldots & \lambda A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{k1} & \ldots & \lambda A_{k(\tau-1)} & \mu_{k0} & \lambda A_{k(\tau+1)} & \ldots & 1-\lambda A_{kk} \end{vmatrix}.$$

С учетом (38) имеем

$$\big|u(t,x_1) - u(t,x_2)\big| \leqslant \mu_2|x_1 - x_2| +$$

$$+ \max_{t\in\Omega_T}\int\limits_0^t H(t,s)\left[Q_0 + |\lambda|\sum_{\tau=1}^k \left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 0})}{\Delta(\lambda)}\right| |a_\tau(s)|\right] ds \cdot |x_1 - x_2| +$$

$$+ \int\limits_0^t H(t,s)\left[N(s) + |\lambda|\sum_{\tau=1}^k \left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 1})}{\Delta(\lambda)}\right| |a_\tau(s)|\right] \cdot |u(s,x_1) - u(s,x_2)|ds =$$

$$= \mu_3|x_1 - x_2| + \int\limits_0^t W(t,s)\big|u(s,x_1) - u(s,x_2)\big|ds,$$

где

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{n} \chi_{2i-1} \frac{T^{n-i}}{(n-i)!} + \max_{t \in \Omega_T} \sum_{j=1}^{n} \chi_{2j} \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{s^{n-j}}{(n-j)!} ds,$$

$$\mu_3 = \mu_2 + \max_{t \in \Omega_T} \int_0^t H(t,s) \Big[Q_0 + |\lambda| \sum_{\tau=1}^{k} \Big| \frac{\Delta_\tau(\lambda, \mu_{\tau 0})}{\Delta(\lambda)} \Big| |a_\tau(s)| \Big] ds,$$

$$W(t,s) = H(t,s) \Big[N(s) + |\lambda| \sum_{\tau=1}^{k} \Big| \frac{\Delta_\tau(\lambda, \mu_{\tau 1})}{\Delta(\lambda)} \Big| |a_\tau(s)| \Big].$$

Применяя неравенство Гроноулла—Беллмана к последней оценке, получаем, что

$$|u(t,x_1) - u(t,x_2)| \leqslant \mu_3 |x_1 - x_2| \cdot \exp \left\{ \int_0^t W(t,s) ds \right\}.$$

Отсюда следует справедливость оценки (37). Теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3. *Тогда решение начальной задачи* (1), (2) *устойчиво по начальным функциям.*

Доказательство. Пусть $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ два различных решения начальной задачи (1), (2), соответствующие двум различным значениям функций $\varphi_{1i}(x)$ и $\varphi_{2i}(x)$ соответственно. Положим

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \big| \varphi_{1,i}(x) - \varphi_{2,i}(x) \big| < \delta_i, \quad 0 < \delta_i = \mathrm{const}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Тогда из (24) получаем, что

$$\big| B_\tau(x,u_1) - B_\tau(x,u_2) \big| \leqslant \int_0^T |b_\tau(s)| \sum_{i=1}^{n} \big| \varphi_{1,(2i-1)}(x) - \varphi_{2,(2i-1)}(x) \big| \frac{s^{n-i}}{(n-i)!} ds +$$

$$+ \int_0^T |b_\tau(s)| \sum_{j=1}^{n} \big| \varphi_{1,(2j)}(x) - \varphi_{2,(2j)}(x) \big| \int_0^s \frac{(s-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\theta^{n-j}}{(n-j)!} d\theta ds +$$

$$+ \int_0^T |b_\tau(s)| \int_0^s H(s,\theta) N(\theta) \big| u_1(\theta,x) - u_2(\theta,x) \big| d\theta ds <$$

$$< \gamma_{\tau 1} \sum_{i=1}^{2n} \delta_i + \mu_{\tau 1} \max_{s \in \Omega_T} |u_1(s,x) - u_2(s,x)|,$$

где

$$\gamma_{\tau 1} = \int_0^T |b_\tau(s)| \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{s^{n-i}}{(n-i)!} + \int_0^s \frac{(s-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\theta^{n-i}}{(n-i)!} d\theta \right] ds,$$

$$\mu_{\tau 1} = \int_0^T |b_\tau(s)| \int_0^s H(s,\theta) N(\theta) d\theta ds.$$

Отсюда с учетом (27) получаем оценку

$$\left| \frac{\Delta_\tau(\lambda,x,u_1) - \Delta_\tau(\lambda,x,u_2)}{\Delta(\lambda)} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{2n} \delta_i \left| \frac{\Delta_\tau(\lambda, \gamma_{\tau 1})}{\Delta(\lambda)} \right| + \left| \frac{\Delta_\tau(\lambda, \mu_{\tau 1})}{\Delta(\lambda)} \right| \max_{s \in \Omega_T} \big| u_1(s,x) - u_0(s,x) \big|, \qquad (39)$$

где $\Delta_\tau(\lambda,\gamma_{\tau 1})$ получаются из определителей $\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 1})$ в (33) путем замены столбца $\mu_{\tau 1}$ на $\gamma_{\tau 1}$, $\tau=1,2,\ldots,k$. С учетом (39) имеем

$$\begin{aligned}\big|u_1(t,x)-u_2(t,x)\big| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\big|\varphi_{1,(2i-1)}(x)-\varphi_{2,(2i-1)}(x)\big|\frac{T^{n-i}}{(n-i)!}+\\
+\sum_{j=1}^{n}\big|\varphi_{1,(2j))}(x)-\varphi_{2,(2j)}(x)\big|\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}ds+\\
+|\lambda|\sum_{i=1}^{2n}\delta_i\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t H(t,s)\sum_{\tau=1}^{k}\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\gamma_{\tau 0})}{\Delta(\lambda)}\right||a_\tau(s)|ds+\\
+\int_0^t H(t,s)\left[N(s)+|\lambda|\sum_{\tau=1}^{k}\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\mu_{\tau 1})}{\Delta(\lambda)}\right||a_\tau(s)|\right]\cdot\big|u_1(s,x)-u_2(s,x)\big|ds<\\
<\sum_{i=1}^{2n}\delta_i\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{T^{n-i}}{(n-i)!}+\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{s^{n-i}}{(n-i)!}ds\right]+\\
+|\lambda|\sum_{i=1}^{2n}\delta_i\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t H(t,s)\sum_{\tau=1}^{k}\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\gamma_{\tau 0})}{\Delta(\lambda)}\right||a_\tau(s)|ds+\\
+\int_0^t W(t,s)\big|u_1(s,x)-u_2(s,x)\big|ds. \quad (40)\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned}\delta=\sum_{i=1}^{2n}\delta_i\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{T^{n-i}}{(n-i)!}+\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{s^{n-i}}{(n-i)!}ds\right]+\\
+|\lambda|\sum_{i=1}^{2n}\delta_i\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t H(t,s)\sum_{\tau=1}^{k}\left|\frac{\Delta_\tau(\lambda,\gamma_{\tau 0})}{\Delta(\lambda)}\right||a_\tau(s)|ds.\end{aligned}$$

Тогда из (40) приходим к неравенству

$$\big|u_1(t,x)-u_2(t,x)\big|<\delta+\int_0^t W(t,s)\big|u_1(s,x)-u_2(s,x)\big|ds. \quad (41)$$

Применяя неравенство Гроноулла—Беллмана к оценке (41), получим

$$\big|u_1(t,x)-u_2(t,x)\big|<\varepsilon,$$

где

$$\varepsilon=\delta\cdot\exp\left\{\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t W(t,s)ds\right\}.$$

Отсюда получим утверждение теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойчук А. А., Страх А. П.* Нетеровы краевые задачи для систем линейных интегро-динамических уравнений с вырожденным ядром на временной шкале// Нелинейные колебания. — 2014. — *17*, № 1. — С. 32–38.

2. *Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А.* Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром// Нелинейные колебания. — 2015. — *18*, № 4. — С. 489–506.
3. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка. — М.: МГУ, 1999.
4. *Иманалиев М. И., Ведь Ю. А.* О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом// Диффер. уравн. — 1989. — *23*, № 3. — С. 465–477.
5. *Замышляева А. А.* Математические модели соболевского типа высокого порядка// Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Мат. модел. програм. — 2014. — *7*, № 2. — С. 5–28.
6. *Каримов Ш. Т.* Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя// Изв. вузов. Мат. — 2017. — *8*. — С. 27–41.
7. *Кошанов Б. Д., Солдатов А. П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 12. — С. 1666–1681.
8. *Похожаев С. И.* О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка// Мат. сб. — 1982. — *117*, № 2. — С. 251–265.
9. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — Киев: Наукова думка, 1973.
10. *Юлдашев Т. К.* Разрешимость и определение коэффициента в одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром// Докл. НАН Украины. — 2017. — *5*. — С. 8–16.
11. *Юлдашев Т. К.* Об одной нелокальной задаче для неоднородного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2017. — *159*, № 1. — С. 88–99.
12. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 1. — С. 112–123.
13. *Юлдашев Т. К.* Интегро-дифференциальное уравнение с двумерным оператором Уизема высокой степени// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *156*. — С. 117–125.
14. *Юлдашева А. В.* Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2017. — *140*. — С. 43–49.
15. *Karimov Sh. T.* Multidimensional generalized Erdélyi–Kober operator and its application to solving Cauchy problems for differential equations with singular coefficients// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2015. — *18*, № 4. — P. 845–861.
16. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Boundary-value problems for systems of integro-differential equations with degenerate kernel// Ukr. Math. J. — 1996. — *48*, № 11. — P. 1785–1789.
17. *Yuldashev T. K.* Determination of the coefficient and boundary regime in boundary-value problem for integro-differential equation with degenerate kernel// Lobachevskii J. Math. — 2017. — *38*, № 3. — P. 547–553.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

Назаров Илхомжон Усмоналиевич
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `ilhomnazarov1967@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 201 (2021). С. 65–79
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-201-65-79

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

© 2021 г. **Б. И. ИСЛОМОВ, А. А. АБДУЛЛАЕВ**

Аннотация. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости нелокальной задачи с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, т.е. для уравнения, в котором линия вырождения является характеристикой. Разработан новый принцип экстремума для такого типа уравнения второго рода. С помощью этого принципа экстремума доказана единственность поставленной задачи. Исследование существования решения задачи сведено с помощью функциональных соотношений к сингулярному интегральному уравнению нормального типа. Определен класс функций, обеспечивающих разрешимость полученного сингулярного уравнения. Методом регуляризации Карлемана—Векуа сингулярное интегральное уравнение сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, разрешимость которого устанавливается исходя из единственности решения поставленной задачи.

Ключевые слова: эллиптико-гиперболическое уравнение, уравнение второго рода, нелокальная краевая задача, принцип экстремума, метод регуляризации, класс обобщенного решения.

ON A NONLOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A MIXED-TYPE EQUATION OF THE SECOND KIND

© 2021 **B. I. ISLOMOV, A. A. ABDULLAEV**

Abstract. In this paper, we discuss the unique solvability of a nonlocal problem with the Poincaré condition for an equation of elliptic-hyperbolic type of the second kind, i.e., for an equation whose degeneracy line is a characteristic. We develop a new extremum principle for equations of this type. Using this extremum principle, we prove the uniqueness of the problem considered. Using functional relations, we reduce the study of the existence of a solution to the problem for a singular integral equation of the normal type. We find a class of functions that provide the solvability of the singular equation. Using the Carleman–Vekua regularization method, we reduce the singular integral equation to a Fredholm integral equation of the second kind whose solvability is established based on the uniqueness of the solution.

Keywords and phrases: elliptic-hyperbolic equation, equation of the second kind, nonlocal boundary-value problem, extremum principle, regularization method, class of generalized solutions.

AMS Subject Classification: 35D50, 35J25, 35J40, 45B05, 45E05

1. Введение. Изучение краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений и уравнений смешанного типа находится в центре внимания специалистов по дифференциальным уравнениям с частными производными. Такие типы уравнений имеют многочисленные приложения при исследовании задач механики, физики, техники и биологии. Начиная с [7, 16] в теории уравнений эллиптического и смешанного типов появилось новое направление, в котором рассматриваются нелокальные краевые задачи (задачи со смещением) и задачи Бицадзе—Самарского. Задачи со смещением для уравнения смешанного типа с одной и с двумя линиями вырождения изучены в [9, 11]. Нелокальная краевая задача для гиперболического уравнения с вырождающимися интегральными условиями рассмотрена в [30]. Задача Бицадзе—Самарского для уравнений смешанного типа изучена в [2]. Отметим учебник [22], который является настольной книгой для многих специалистов по смешанным дифференциальным уравнениям.

Нелокальные краевые условия возникают при решении задач прогнозирования почвенной влаги (см. [17]), при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах (см. [24]), при математическом моделировании процессов излучения лазера и при решении проблем физики плазмы (см. [28]), а также при решении вопросов математической биологии (см. [15]). Спектральные вопросы разрешимости для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями рассмотрены в [25–27]. В [3] исследуется задача с наклонной производной для уравнения Лаврентьева—Бицадзе в полуплоскости. При этом областью эллиптичности также является полуплоскость, а областью гиперболичности — полоса. Решению различных краевых задач с условиями Пуанкаре или с конормальной производной для уравнения Трикоми, Лаврентьева—Бицадзе и для более общих уравнений посвящено огромное количество статей (см., например, [9, 13, 18, 19, 21, 23]). Исследование локальных и нелокальных краевых задач с конормальной производной для уравнений эллиптико-гиперболического типа второго рода является весьма актуальным. Здесь мы продолжаем исследование, начатое в [1, 29].

В настоящей работе изучается нелокальная краевая задача с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, т.е. для уравнения, где линия вырождения является характеристикой.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -1 < m < 0. \tag{1}$$

Пусть D — конечная односвязная область плоскости независимых переменных x, y, ограниченная при $y > 0$ кривой σ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком AB $(y = 0)$, а при $y < 0$ характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1). Далее, пусть $D_1 = D \cap \{y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{y < 0\}$, $J = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$, $D = D_1 \cup D_2 \cup J$, $2\beta = m/(m + 2)$, причем

$$-1 < 2\beta < 0. \tag{2}$$

Относительно кривой σ будем предполагать следующее:

(i) функции $x(s)$, $y(s)$ являются параметрическими уравнениями кривой σ, имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$, не обращающиеся одновременно в нуль, и имеют вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера порядка κ $(0 < \kappa < 1)$ на отрезке $0 \leqslant s \leqslant l$;

(ii) в окрестностях конечных точек кривой σ выполняется неравенство

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leqslant Cy^{m+1}(s), \tag{3}$$

причем $x(l) = y(0) = 0$, $x(0) = 1$, $y(l) = 0$, C — постоянная.

Задача C. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

(i) $u(x, y) \in C(\bar{D})$ является регулярным решением уравнения (1) в области D_1, а в области D_2 — обобщенным решением из класса R_2 (см. [22]);

(ii) выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to+0} u_y(x, y) = -\lim_{y\to-0} u_y(x, y); \tag{4}$$

(iii) функция $u(x, y)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\{\delta(s)A_s[u] + \rho(s)u\}|_\sigma = \varphi(s), \quad 0 < s < l, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}u[\Theta_0(x)] + b\frac{d}{dx}u[\Theta_1(x)] = c(x), \quad (x, 0) \in J, \tag{6}$$

где l — длина всей кривой σ, s — длина дуги σ, отсчитываемой от точки $B(1,0)$, а $\rho(s)$, $\delta(s)$, $\phi(s)$, $c(x)$ — заданные функции, причём $b = \mathrm{const} \neq 0$,

$$\rho(s)\delta(s) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant l, \tag{7}$$

$$\rho(s), \delta(s), \varphi(s) \in C[0,l], \quad c(x) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1); \tag{8}$$

здесь

$$\Theta_0\left(\frac{x}{2};\; -\left(\frac{m+2}{4}x\right)^{\frac{2}{m+2}}\right), \quad \Theta_1\left(\frac{x+1}{2};\; -\left(\frac{m+2}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right) \tag{9}$$

— точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $x \in (0;1)$, с характеристиками AC и BC соответственно а $A_s[u]$ определяется из формулы

$$A_s[u] \equiv y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Заметим, что если $\delta(s) \equiv 0$, то задача C совпадает с задачей T из [10]. Поэтому в дальнейшем мы естественно будем предполагать, что $\delta(s) \neq 0$.

3. Основные функциональные соотношения. При исследовании задачи C важную роль играют функциональные соотношения между $\nu^{\pm}(x)$ и $\tau(x)$ из эллиптической и гиперболической частях области D, где

$$u(x,0) = \tau(x), \quad (x,0) \in \bar{J}, \tag{10}$$

$$\lim_{y\to -0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu^-(x), \quad \lim_{y\to +0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu^+(x), \quad (x,0) \in J. \tag{11}$$

Обобщенное решение задачи Коши с данными (10), (11) для уравнения (1) из класса R_2 в области D_2 дается следующей формулой (см. [22, с. 230, формула (27.5)] и [8]):

$$u(\xi,\eta) = \int_0^{\xi} (\eta - t)^{-\beta}(\xi - t)^{-\beta} T(t)dt + \int_{\xi}^{\eta} (\eta - t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta} N(t)dt, \tag{12}$$

где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \gamma_2 = [2(1-2\beta)]^{2\beta-1}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}, \tag{13}$$

$$N(t) = T(t)/2\cos\pi\beta - \gamma_2\nu^-(t), \quad \tau(x) = \int_0^x (x-t)^{-2\beta}T(t)dt, \tag{14}$$

функции $T(x)$ и $\nu^-(x)$ непрерывны в $(0,1)$ и интегрируемы на $[0,1]$, а $\tau(x)$ обращается в нуль порядка не меньше -2β при $x \to 0$.

Положив $\xi = 0$, $\eta = x$ и $\xi = x$, $\eta = 1$, соответственно в (12), с учетом (9), после некоторых преобразований получим

$$u[\Theta_0(x)] = \int_0^x (x-t)^{-\beta} t^{-\beta} N(t)dt, \tag{15}$$

$$u[\Theta_1(x)] = \int_0^x (x-t)^{-\beta}(1-t)^{-\beta} T(t)dt + \int_x^1 (t-x)^{-\beta}(1-t)^{-\beta} N(t)dt. \tag{16}$$

Подставим (15) и (16) в краевое условие (6):

$$-\beta\int_0^x (x-t)^{-\beta-1} t^{-\beta} N(t)dt - b\beta\int_0^x (1-t)^{-\beta}(x-t)^{-\beta-1}T(t)dt + b\beta\int_x^1 (1-t)^{-\beta}(t-x)^{-\beta-1}N(t)dt = c(x).$$

Отсюда, применяя операторы дробного интегрирования

$$D_{ax}^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\quad D_{xb}^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b(t-x)^{\alpha-1}f(t)dt$$

(см. [22]), получим

$$D_{0x}^{\beta}x^{-\beta}N(x)+bD_{0x}^{\beta}(1-x)^{-\beta}T(x)-bD_{x1}^{\beta}(1-x)^{-\beta}N(x)=\frac{c(x)}{\Gamma(1-\beta)}. \tag{17}$$

Применяя к обеим частям равенства (17) оператор дифференцирования

$$D_{0x}^{-\beta}[\cdot]=\frac{d}{dx}D_{0x}^{-\beta-1}[\cdot],$$

с учетом формул

$$D_{ax}^{-\beta}D_{ax}^{\beta}f(x)=f(x),\quad D_{0x}^{-\beta}D_{x1}^{\beta}f(x)=\cos\pi\beta f(x)-\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{-\beta}\frac{f(t)}{t-x}dt$$

(см. [22, с. 18—24; формулы (4.7) и (4.27)]) имеем

$$x^{-\beta}N(x)+b(1-x)^{-\beta}T(x)-b\cos\pi\beta\cdot(1-x)^{-\beta}N(x)+\frac{b\sin\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{-\beta}\frac{(1-t)^{-\beta}N(t)}{t-x}dt=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{-\beta}c(x). \tag{18}$$

В силу (13) из (18) находим

$$-\gamma_2x^{-\beta}\nu^-(x)+b(1-x)^{-\beta}T(x)+b\gamma_2\cos\pi\beta\cdot(1-x)^{-\beta}\nu^-(x)+$$
$$+\frac{x^{-\beta}T(x)}{2\cos\pi\beta}-b\cos\pi\beta\cdot(1-x)^{-\beta}\frac{T(x)}{2\cos\pi\beta}+\frac{b\sin\pi\beta}{2\pi\cos\pi\beta}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{-\beta}\frac{(1-t)^{-\beta}T(t)}{t-x}dt-$$
$$-\frac{b\gamma_2\sin\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{-\beta}\frac{(1-t)^{-\beta}\nu^-(t)}{t-x}dt=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{-\beta}c(x)$$

или

$$\gamma_2(x^{-\beta}-b\cos\pi\beta\cdot(1-x)^{-\beta})\nu^-(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^{-\beta}}{\cos\pi\beta}+b(1-x)^{-\beta}\right)T(x)-$$
$$-\frac{b\,\mathrm{tg}\,\pi\beta}{2\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{-\beta}\frac{(1-t)^{-\beta}T(t)}{t-x}dt+(1-x)^{-\beta}\frac{\gamma_2b\sin\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{-\beta}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-\beta}\frac{\nu^-(t)}{t-x}dt=$$
$$=-\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{-\beta}c(x). \tag{19}$$

Теперь, применяя оператор

$$D_{x1}^{-\beta}[\cdot]\equiv-\frac{d}{dx}D_{x1}^{-\beta-1}[\cdot]$$

к обеим частям равенства (17), с учётом формулы (13) и

$$D_{xb}^{-\beta}D_{xb}^{\beta}f(x)=f(x),$$
$$D_{x1}^{-\beta}D_{0x}^{\beta}f(x)=\cos\pi\beta\cdot f(x)+\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-\beta}\frac{f(t)}{t-x}dt$$

получаем

$$\gamma_2(\cos\pi\beta\cdot x^{-\beta}-b(1-x)^{-\beta})\cdot\nu^-(x)-\frac{1}{2}\left(x^{-\beta}+\frac{b\cos 2\pi\beta}{\cos\pi\beta}(1-x)^{-\beta}\right)T(x)+$$
$$-\frac{\operatorname{tg}\pi\beta}{2\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-\beta}\frac{t^{-\beta}T(t)}{t-x}dt+x^{-\beta}\frac{\gamma_2\sin\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-\beta}\left(\frac{t}{x}\right)^{-\beta}\frac{\nu^-(t)}{t-x}dt-$$
$$-\frac{b\sin\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-\beta}\frac{(1-t)^{-\beta}T(t)}{t-x}dt=-\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}D_{x1}^{-\beta}c(x). \quad (20)$$

Умножая равенства (19) и (20) соответственно на $x^{-\beta}$ и $b(1-x)^{-\beta}$ и вычитая одно из другого, получим функциональное соотношение между $T(x)$ и $\nu^-(x)$, перенесенное из области D_2 на J:

$$\gamma_2(x^{-2\beta}-2b\cos\pi\beta\cdot x^{-\beta}(1-x)^{-\beta}+b^2(1-x)^{-2\beta})\nu^-(x)-$$
$$-\frac{1}{2\cos\pi\beta}(x^{-2\beta}+b^2\cos 2\pi\beta(1-x)^{-2\beta})T(x)-\frac{b^2\sin\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{-2\beta}T(t)}{x-t}dt=$$
$$=-\frac{x^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{-\beta}c(x)+\frac{b(1-x)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}D_{x1}^{-\beta}c(x). \quad (21)$$

Решение задачи DK с условиями (5) и (10) для уравнения (1) в области D_1 существует, единственно и представимо в следующем виде (см. [22, формула (10.78)]):

$$u(x,y)=\int\limits_0^1\tau(\xi)\frac{\partial}{\partial\eta}G_2(\xi,0;x,y)d\xi+\int\limits_0^l\frac{\varphi(s)}{\delta(s)}G_2(\xi,\eta;x,y)ds, \quad (22)$$

где $G_2(\xi,\eta;x,y)$ — функция Грина задачи DK для уравнения (1), имеющая вид

$$G_2(\xi,\eta;x,y)=G_{02}(\xi,\eta;x,y)+H_2(\xi,\eta;x,y) \quad (23)$$

(см. [22]); здесь $G_{02}(\xi,\eta;x,y)$ — функция Грина задачи DK для уравнения (1) для нормальной области D_{10}, ограниченной отрезком $\overline{AB}$ и нормальной кривой

$$\sigma_0:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=\frac{1}{4},$$

а функция H_2 имеет вид

$$H_2(\xi,\eta;x,y)=G_2(\xi,\eta;x,y)-G_{02}(\xi,\eta;x,y)=$$
$$=\int\limits_0^l\lambda_2(s;\xi,\eta)\left\{A_s[G_{02}(\xi(s),\eta(s);x,y)]+\frac{\rho(s)}{\delta(s)}G_{02}(\xi(s),\eta(s);x,y)\right\}ds,$$

где $\lambda_2(s;\xi,\eta)$ — решение интегрального уравнения

$$\lambda_2(s;\xi,\eta)+2\int\limits_0^l\lambda_2(t;\xi,\eta)\left\{A_s[q_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s))]+\frac{\rho(s)}{\delta(s)}q_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s))\right\}dt=$$
$$=-2q_2(\xi(s),\eta(s);\xi,\eta),$$

а $q_2(\xi,\eta,x,y)$ — фундаментальное решение уравнения (1), имеющее вид

$$q_2(\xi,\eta,x,y)=k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}(r_1^2)^{-\beta}(1-w)^{1-2\beta}F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;1-w), \quad (24)$$

где

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (\xi - x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(\eta^{\frac{m+2}{2}} \mp y^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$w = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)}, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0, \quad k_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)},$$

а $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса (см. [4]). Дифференцируя уравнения (22) по y и устремляя затем y к нулю, с учётом (23), (24) получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu^+(x)$, перенесенное из области D_1 на J:

$$\nu(x) = k_2\int\limits_0^1 |t-x|^{2\beta-2}\tau(t)dt - k_2\int\limits_0^1 \frac{\tau(t)dt}{(t+x-2tx)^{2-2\beta}} + \\ + \int\limits_0^1 \tau(t)\frac{\partial^2 H_2(t,0;x,0)}{\partial\eta\partial y}dt + \int\limits_0^l \chi(s)\frac{\partial q_2(t,\eta;x,0)}{\partial y}ds, \quad (25)$$

где $\chi(s)$ есть решение интегрального уравнения

$$\chi(s) + 2\int\limits_0^l \chi(t)\left\{A_s[q_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s))] + \frac{\rho(s)}{\delta(s)}q_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s))\right\}dt = \frac{2\varphi(s)}{\delta(s)}.$$

Подставляя (14) в (25) и учитывая тождества

$$beginmultline* \int\limits_0^x (x-t)^{2\beta-2}\tau(t)dt = \frac{\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1-2\beta)}{2\beta(2\beta-1)}D_{0x}^{1-2\beta}D_{0x}^{2\beta-1}T(x) = \frac{\pi T(x)}{(2\beta-1)\sin 2\pi\beta},$$

$$\int\limits_x^1 (t-x)^{2\beta-2}\tau(t)dt = \frac{\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1-2\beta)}{2\beta(2\beta-1)}D_{x1}^{1-2\beta}D_{0x}^{2\beta-1}T(x) = \\ = \frac{\pi\operatorname{ctg} 2\beta\pi}{1-2\beta}T(x) + \frac{1}{1-2\beta}\int\limits_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\frac{T(t)}{t-x}dt,$$

$$\int\limits_0^1 (t+x-2tx)^{2\beta-2}\tau(t)dt = \frac{1}{1-2\beta}\int\limits_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\frac{T(t)dt}{x+t-2xt},$$

получим функциональное соотношение между $T(x)$ и $\nu^+(x)$, перенесенное из области D_1 на J:

$$\nu^+(x) = -\frac{\pi k_2\operatorname{tg}\beta\pi}{1-2\beta}T(x) + \frac{k_2}{1-2\beta}\int\limits_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t-2xt}\right]T(t)dt + \\ + \int\limits_0^1 T(t)dt\int\limits_0^t (t-z)^{-2\beta}\frac{\partial^2 H_2(z,0;x,0)}{\partial\eta\partial y}dz + \int\limits_0^l \frac{\partial q_2(t,\eta;x,0)}{\partial y}\chi(s)ds, \quad (x,0)\in J. \quad (26)$$

4. Единственность решения задачи C. Для доказательства единственности решения задачи C потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Если функция $\tau'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $k > -2\beta$ при $0 < x < 1$, то функцию*

$$T(x) = \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{1-2\beta} \tau(x) \tag{27}$$

можно представить в виде

$$T(x) = \frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta} \tau'(t) dt. \tag{28}$$

Доказательство. В силу определения оператора интегро-дифференцирования дробного порядка (см. [22, § 4, формулы (4.1), (4,6)]) и $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin\pi z$ из (14) имеем

$$T(x) = \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{1-2\beta} \tau(x) = \frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \tau(t)(x-t)^{2\beta} dt.$$

Интегрируя по частям последний интеграл, с учетом (2) и $\tau(0) = 0$ получим

$$T(x) = \frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta} \tau'(t) dt,$$

откуда и следует (28). □

Лемма 2. *Пусть выполняются условия*

$$\tau(x) \in C[0,1] \cap C^{(1,k)}(0,1), \quad k > -2\beta, \tag{29}$$

и функция $\tau(x)$ в точке $x = x_0 (x_0 \in (0,1))$ принимает наибольшее положительное значение (НПЗ) или наименьшее отрицательное значение (НОЗ). Тогда функцию

$$E(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{-2\beta} T(t)}{x-t} dt \tag{30}$$

в точке $x = x_0$ можно представить в виде

$$E(x_0) = (1-x_0)^{-2\beta} \left\{ [x_0 2\beta - 1 \cos 2\beta\pi + (1-x_0)^{2\beta-1}]\tau(x_0) - \tau(1)(1-x)^{2\beta-1} + \right.$$
$$\left. +(1-2\beta) \left[\cos 2\beta\pi \int_0^{x_0} \frac{\tau(x_0)-\tau(t)}{(x_0-t)^{2-2\beta}} dt - \int_{x_0}^1 \frac{\tau(t)-\tau(x_0)}{(t-x_0)^{2-2\beta}} dt \right] \right\}. \tag{31}$$

Доказательство. Подставляя (28) в (30), получим

$$E(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{-2\beta} T(t)}{x-t} dt = \frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta} \int_0^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}}{x-t} \left[\frac{d}{dt} \int_0^t \tau'(z)(t-z)^{2\beta} dz \right] dt.$$

Рассмотрим функцию

$$E_\varepsilon(x) = \frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta} \int_\varepsilon^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}}{x-t} \left[\frac{d}{dt} \int_0^{t-\varepsilon} \tau'(z)(t-z)^{2\beta} dz \right] dt =$$
$$= \frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta} \int_\varepsilon^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}}{x-t} \left[\varepsilon^{2\beta}\tau'(t-\varepsilon) + 2\beta \int_0^{t-\varepsilon} (t-z)^{2\beta-1} \tau'(z) dz \right] dt. \tag{32}$$

Нетрудно показать, что
$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_\varepsilon(x) = E(x).$$
Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле (32), а затем используя соотношение
$$\frac{1}{(x-t)(t-z)} = \frac{1}{(x-z)(t-z)} + \frac{1}{(z-x)(t-x)},$$
имеем
$$E_\varepsilon(x) = \varepsilon^{2\beta}\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}\tau'(t-\varepsilon)}{x-t}dt+ \\ + \frac{\sin 2\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{\tau'(z)}{x-z}dz\int\limits_{z+\varepsilon}^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}(t-z)^{2\beta}}{t-z}dt+ \\ + \frac{\sin 2\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{\tau'(z)}{z-x}dz\int\limits_{z+\varepsilon}^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}(t-z)^{2\beta}}{t-x}dt. \quad (33)$$
Используя интегральное представление гипергеометрической функции (см. [22, § 2, формула (2.10)]) и формул
$$F(a,b,c;w) = (1-w)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c;w), \quad |\arg(1-w)| < \pi, \quad (34)$$
$$F(a,b,c;w) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b,a+b-c+1;1-w)+ \\ + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-w)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c-a-b+1;1-w), \quad (35)$$
где $c-a-b \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots, |\arg(1-w)| < \pi$, из третьего интеграла (33) получим
$$\int\limits_{z+\varepsilon}^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}(t-z)^{2\beta}}{t-z}dt = \\ = \frac{\varepsilon^{2\beta}(1-z-\varepsilon)^{1-2\beta}}{(1-2\beta)(1-z)}\left\{\frac{(1-2\beta)\Gamma(-2\beta)}{\Gamma(1-2\beta)}F\left(1,1,2\beta;1-\frac{1-z-\varepsilon}{1-z}\right)+ \right. \\ \left. + \Gamma(2-2\beta)\Gamma(2\beta)\left(\frac{\delta}{1-z}\right)^{-2\beta}F\left(1-2\beta,1-2\beta,1-2\beta;1-\frac{1-z-\delta}{1-z}\right)\right\}. \quad (36)$$
Подставляя (36) в (33) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом соотношений $F(a,b,c,0) = 1$, $\Gamma(w)\Gamma(1-w) = \pi/\sin\pi w$ имеем
$$E(x) = -\int\limits_0^1 \frac{\tau'(z)}{z-x}dz + \frac{\sin 2\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\tau'(z)}{z-x}dz\int\limits_z^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}(t-z)^{2\beta}}{t-x}dt. \quad (37)$$
Теперь представим правую часть формулы (37) в виде
$$E(x) = -\int\limits_0^1 \frac{\tau'(z)}{z-x}dz+ \\ + \frac{\sin 2\pi\beta}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_0^{x-\varepsilon}\frac{\tau'(z)}{z-x}dz\int\limits_z^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}(t-z)^{2\beta}}{t-x}dt + \int\limits_{x+\varepsilon}^1\frac{\tau'(z)}{z-x}dz\int\limits_z^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}(t-z)^{2\beta}}{t-x}dt\right\}. \quad (38)$$

Перейдем к вычислению интеграла

$$E_1(x) = \int\limits_z^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}(t-z)^{2\beta}}{t-x} dt.$$

Используя свойств гипергеометрической функции (см. [22, § 2, формулы (2.10), (2.18), (2.22)]) и формулу

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{\theta-1}dt}{[w+(1-w)t]^\kappa (1-t)} = \pi \operatorname{ctg}(\theta-\kappa)\pi + w^{\theta-\kappa}\frac{\Gamma(\theta)\Gamma(\kappa-\theta)}{\Gamma(\kappa)} F(\theta, \theta-\kappa, \theta-\kappa+1; w),$$

$$0 < \theta < k+1, \quad \theta > k$$

(в нашем случае $\theta = 1-2\beta$, $k=1$) из (37) находим

$$E_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sin 2\beta\pi}\left[1-\cos 2\beta\pi\left(\dfrac{x-z}{1-x}\right)^{2\beta}\right], & \text{при } z<x, \\ \dfrac{\pi}{\sin 2\beta\pi}\left[1-\left(\dfrac{z-x}{1-x}\right)^{2\beta}\right], & \text{при } z>x. \end{cases} \tag{39}$$

Подставляя (39) в (38), имеем

$$E(x) = (1-x)^{-2\beta}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\cos 2\beta\pi \int\limits_0^{x-\varepsilon}(x-z)^{2\beta-1}\tau'(z)dz - \int\limits_{x+\varepsilon}^1 (z-x)^{2\beta-1}\tau'(z)dz\right\}. \tag{40}$$

Интегрируя (40) по частям и производя некоторые вычисления, получим

$$E(x) = (1-x)^{-2\beta}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\cos 2\beta\pi\left[\frac{\tau(x-\varepsilon)-\tau(x)}{\varepsilon}\varepsilon^{2\beta} - \tau(0)x^{2\beta-1} + \tau(x)x^{2\beta-1} + \right.\right.$$

$$\left. + (1-2\beta)\int\limits_0^{x-\varepsilon}\frac{\tau(x)-\tau(z)}{(x-z)^{2-2\beta}}dz\right] - \tau(1)(1-x)^{2\beta-1} + (1-x)^{2\beta-1}\tau(x) +$$

$$\left. + \frac{\tau(x+\varepsilon)-\tau(x)}{\varepsilon}\varepsilon^{2\beta} - (1-2\beta)\int\limits_{x+\varepsilon}^1 \frac{\tau(z)-\tau(x)}{(z-x)^{2-2\beta}}dz\right\}. \tag{41}$$

Полагая в формуле (41) $x = x_0$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом $\tau(0) = 0$ получим формулу (31). □

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (2), (29) *и функция* $\tau(x)$ *в точке* $x = x_0 (x_0 \in (0,1))$ *принимает НПЗ (НОЗ). Тогда функцию* $T(x)$ *в точке* $x = x_0$ *можно представить в виде*

$$T(x_0) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)\Big|_{x=x_0} = = \frac{\sin 2\beta\pi}{\pi}\left[x_0 2\beta - 1\tau(x_0) + (1-2\beta)\int\limits_0^{x_0}\frac{\tau(x_0)-\tau(t)}{(x_0-t)^{2-2\beta}}dt\right],$$

причём

$$T(x_0) < 0 \quad (T(x_0) > 0), \quad x_0 \in J. \tag{42}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2. □

Докажем аналог принципа экстремума А. В. Бицадзе.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (2) *и* $b < 0$, *то решение* $u(x,y)$ *задачи* C *при* $c(x) \equiv 0$ *и* $\tau(1) = 0$ *своего НПЗ и НОЗ в замкнутой области* $\bar{D}_1$ *достигает лишь на* $\bar{\sigma}$.

Доказательство. Действительно, в силу принципа экстремума для эллиптических уравнений (см. [5, 6]) решение $u(x, y)$ уравнения (1) внутри области D_1 не может достигать своего НПЗ и НОЗ. Покажем, что решение $u(x, y)$ уравнения (1) не достигает своего НПЗ и НОЗ на отрезке J. Предположим обратное, т.е. пусть функция $u(x, y)$ в некоторой точке $(x_0, 0)$ отрезка J достигает своего НПЗ (НОЗ). На основании леммы 2, если функция $\tau(x)$ в точке $(x_0, 0)$ принимает НПЗ (НОЗ), то $E(x)$ в точке $x = x_0$ можно представить в виде (31), причем

$$E(x_0) > 0 \quad (E(x_0) < 0), \quad (x_0, 0) \in J. \tag{43}$$

Теперь определим знак $\nu^-(x)$ в точке $(x_0, 0) \in J$. В силу (42) и (43) из (21) при $c(x) \equiv 0$ получим

$$\nu^-(x_0) < 0 \quad (\nu^-(x_0) > 0), \quad (x_0, 0) \in J. \tag{44}$$

С другой стороны, в силу принципа Заремба—Жиро (см. [6]), для решения уравнения (1) с учетом (11) справедливо неравенство

$$\nu^+(x_0) < 0 \quad (\nu^+(x_0) > 0), \quad (x_0, 0) \in J. \tag{45}$$

Принимая во внимание (4), из (44) находим

$$\nu^+(x_0) > 0 \quad (\nu^+(x_0) < 0), \quad (x_0, 0) \in J.$$

Это неравенство противоречит неравенству (45). Таким образом, $u(x, y)$ не достигает своего НПЗ (НОЗ) на открытом отрезке J. □

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы* 1, *а функции* $\delta(s)$ *и* $\rho(s)$ *вблизи точек* $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ *удовлетворяют условиям* (7) *и*

$$\rho(0) \neq 0, \quad \rho(l) \neq 0, \tag{46}$$

$$|\delta(s)| \leqslant \mathrm{const}[s(l - s)]^{\varepsilon_0} - \frac{m^2 + 2m - 2}{m + 2}, \quad 1 < m < 0, \quad \varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0, \tag{47}$$

то в области D *не может существовать более одного решения задачи* C.

Доказательство. Пусть $\varphi(s) \equiv c(x) \equiv 0$; тогда в силу теоремы 1 достаточно показать, что решение задачи C не может достигать своего положительного максимума и отрицательного минимума на σ.

Предположим, что положительный максимум (отрицательный минимум) достигается в некоторой точке $s_0 \in \sigma$, отличной от точек $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$. Тогда в этой точке в силу принципа Заремба—Жиро (см. [6]) имеем $A_{s_0}[u] > 0$ ($A_{s_0}[u] < 0$), а граничное условие (5) принимает вид

$$A_{s_0}[u] = -\frac{\rho(s_0)\delta(s_0)}{\delta^2(s_0)}u.$$

Но это невыполнимо в силу условия (7).

Следовательно, во внутренних точках σ функция $u(x, y)$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума).

В точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, с учетом (2), (3), (47) имеем

$$\lim_{s \to 0} \delta(s) A_s[u] = 0, \quad \lim_{s \to l} \delta(s) A_s[u] = 0, \tag{48}$$

соответственно.

Если положительный максимум (отрицательный минимум) достигается в точке $A(0, 0)$ или $B(1, 0)$, то в силу (48) граничное условие (5) примет вид

$$\rho(0)u(0, 0) = 0 \quad \text{или} \quad \rho(l)u(1, 0) = 0.$$

Отсюда, учитывая (46), получим

$$u(A) = u(0, 0) = \tau(0) = 0, \quad u(B) = u(1, 0) = \tau(1) = 0. \tag{49}$$

Значит, $u(x, y)$ не достигает положительного максимума (отрицательного минимума) в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$. Таким образом, $u(x, y)$ не достигает положительного максимума (отрицательного минимума) на кривой $\bar{\sigma}$.

На основании принципа экстремума заключаем, что $u(x,y) = \mathrm{const}$ в $\bar{D}_1$. Следовательно, учитывая (49), имеем $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{D}_1$. В силу единственности решения задачи Коши в областях D_{2j} $(j = \overline{1,3})$ для уравнения (1), получим, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{D}_{2j}$ $(j = \overline{1,3})$. Отсюда следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{D}$. Тем самым доказана единственность решения задачи C. □

5. Существование решения задачи C.

Теорема 3. *Если выполняются условия* (2), (3) *и* (8), *то в области D решение задачи C существует.*

Доказательство. Исключив $\nu^{\pm}(x)$ из соотношений (21) и (26) с учетом (4) и (11) имеем

$$P_1(x)T(x) + \frac{P_2(x)}{\pi i}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-2\beta}\left[\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{x+t-2xt}\right]T(t)dt - \int_0^1 K(x,t)T(t)dt = F(x), \quad (50)$$

где $0 < x < 1$, и

$$P_1(x) = \frac{\pi k_2 \operatorname{tg}\beta\pi}{1-2\beta}d_1(x) - \frac{1}{2\cos\pi\beta}d_2(x), \quad (51)$$

$$P_2(x) = \frac{\pi i k_2}{1-2\beta}d_1(x) + ib^2\sin\pi\beta(1-x)^{-2\beta}, \quad (52)$$

$$K(x,t) = d_1(x)\int_0^t (t-z)^{-2\beta}\frac{\partial^2 H_2(z,0;x,0)}{\partial\eta\partial y}dz + \frac{b^2\sin\pi\beta}{\pi}\frac{(1-2t)(1-t)^{-2\beta}}{x+t-2xt} =$$
$$= K_1(x,t) + K_2(x,t), \quad (53)$$

$$d_1(x) \equiv \gamma_2[x^{-2\beta} - 2b\cos\pi\beta\cdot x^{-\beta}(1-x)^{-\beta} + b^2(1-x)^{-2\beta}] > 0, \quad \forall x\in\bar{J}, \quad (54)$$

$$d_2(x) \equiv x^{-2\beta} + b^2\cos 2\pi\beta(1-x)^{-2\beta} > 0, \quad \forall x\in\bar{J}, \quad (55)$$

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x), \quad (56)$$

$$F_1(x) = d_1(x)\int_0^l \frac{\partial q_2(t,\eta;x,0)}{\partial y}\chi(s)ds, \quad (57)$$

$$F_2(x) = -\frac{x^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{-\beta}c(x) + \frac{b(1-x)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}D_{x1}^{-\beta}c(x).$$

Исследуем ядро и правую часть сингулярного интегрального уравнения (50). Пусть $0 < x < 1$, $0 < z < 1$; тогда имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial^2 H_2(z,0;x,0)}{\partial\eta\partial y}\right| < C_1(x+z-2xz)^{2\beta-1} \quad (58)$$

(см. [22, с. 181]), где C_1 — постоянная, зависящая только от области D_1. В силу (58) из (53) имеем

$$|K_1(x,t)| \leqslant C_1|d_1(x)|\left|\int_0^t (t-z)^{-2\beta}(x+z-2xz)^{2\beta-1}dz\right|. \quad (59)$$

Производя замену переменных $z = t(1-\sigma)$ и используя интегральное представление гипергеометрической функции (см. [22, § 2, формула (2.10)]), из (59) получим

$$|K_1(x,t)| \leqslant C_1C_2\left(\frac{t}{x+t-2xt}\right)^{1-2\beta}\int_0^1 \sigma^{-2\beta}\left[1 - \frac{(1-2x)t}{x+t-2xt}\sigma\right]^{2\beta-1}d\sigma =$$

$$= \frac{C_1 C_2}{1-2\beta}\left(\frac{t}{x+t-2xt}\right)^{1-2\beta} F\left(1-2\beta, 1-2\beta, 2-2\beta; \frac{t(1-2x)}{x+t-2xt}\right); \quad (60)$$

здесь

$$C_2 = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |d_1(x)|.$$

Так как $c-a-b = 2-2\beta-2+4\beta = 2\beta < 0$, то используя формулы (34) и оценки

$$F(a,b,c,z) \leqslant \begin{cases} \text{const} & \text{при } c-a-b>0,\ 0\leqslant z\leqslant 1,\\ \text{const}(1-z)^{c-a-b} & \text{при } c-a-b<0,\ 0<z<1,\\ \text{const}[1+\ln(1-z)] & \text{при } c-a-b=0,\ 0<z<1 \end{cases} \quad (61)$$

(см. [20]), из (60) с учетом $0\leqslant t\leqslant 1$ получим оценку

$$|K_1(x,t)| \leqslant \frac{C_1C_2}{1-2\beta}\left(\frac{t}{x+t-2xt}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{x}{x+t-2xt}\right)^{2\beta} \leqslant \frac{C_3x^{2\beta}}{x+t-2xt}. \quad (62)$$

В силу (62) из (53) имеем

$$|K(x,t)| \leqslant \frac{C_3x^{2\beta}}{x+t-2xt} + |K_2(x,t)| \leqslant \frac{C_3x^{2\beta}}{x+t-2xt} + \frac{C_4(1-t)^{1-2\beta}}{x+t-2xt} + \frac{C_4t(1-t)^{-2\beta}}{x+t-2xt} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_3x^{2\beta}}{x+t-2xt} + \frac{C_4}{x+t-2xt};$$

здесь

$$C_3 = \frac{C_1C_2}{1-2\beta}, \quad C_4 = \frac{2b^2\sin\pi\beta}{\pi}.$$

Теперь оценим правую часть (50). Дифференцируя (24) по y и полагая $y=0$, получим

$$\frac{\partial q_2(\xi,\eta;t,0)}{\partial y} = k_2\eta\left[(\xi-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}\right]^{\beta-1}. \quad (63)$$

Подставляя (63) в (57), имеем

$$F_1(x) = k_2 d_1(x)\int_0^l \left[(\xi(s)-x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\eta(s)^{m+2}\right]^{\beta-1}\eta(s)\chi(s)ds. \quad (64)$$

Отсюда видно, что функция $F_1(x)$ имеет производные любого порядка в интервале $(0,1)$. Выясним поведение функции $F(x)$ и её производной при $x\to 0$ и $x\to 1$.

Оценим выражение (64). В силу (8), для достаточно малых $x>0$ имеем

$$|F_1(x)| \leqslant k_2|d_1(x)|\int_{l-\varepsilon}^{l} \eta|\chi(s)|\left[(\xi-x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}\right]^{\beta-1}ds + C_5 <$$
$$< C_6C_7\int_{l-\varepsilon}^{l} \eta\left[(\xi-x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}\right]^{\beta-1}ds + C_5, \quad (65)$$

где $|d_1(x)|\leqslant C_6$, $|\chi(s)|\leqslant C_7$. При достаточно малом $\varepsilon>0$ получаем

$$\frac{1}{(\xi-x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}} < \frac{C_8}{x^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}}.$$

Отсюда и из (65) с учетом (3) получим

$$|F_1(x)| \leqslant C_9\int_{l-\varepsilon}^{l}\left[x^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}\right]^{-\beta-\frac{1}{2}}\eta^{\frac{m}{2}}\left|\frac{d\eta}{ds}\right|ds + C_5. \quad (66)$$

Полагая в (66)

$$\frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2} = \tilde{\eta},$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем

$$|F_1(x)| \leqslant \frac{1}{2}C_{10}\int\limits_0^\delta \frac{\tilde{\eta}^{-\frac{1}{2}}d\tilde{\eta}}{[x^2+\tilde{\eta}]^{\beta+\frac{1}{2}}} + C_5. \tag{67}$$

Выполняя замену $\tilde{\eta} = \delta\mu$ в (67) и используя интегральное представление гипергеометрической функции, имеем

$$|F_1(x)| \leqslant \frac{\sqrt{\delta}}{2}C_{10}\int\limits_0^1 \frac{\mu^{-\frac{1}{2}}d\mu}{[x^2+\delta\mu]^{\beta+\frac{1}{2}}} + C_5 = \frac{\sqrt{\delta}}{2}C_{10}\int\limits_0^1 \frac{(1-\mu)^{-\frac{1}{2}}d\mu}{[x^2+\delta-\delta\mu]^{\beta+\frac{1}{2}}} + C_5 =$$

$$= \sqrt{\delta}C_{10}(x^2+\delta)^{-\beta-\frac{1}{2}}F\left(1, \beta+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\delta}{x^2+\delta}\right) + C_5.$$

Так как

$$c-a-b = \frac{3}{2} - \beta - 1 - \frac{1}{2} = -\beta > 0,$$

то, используя оценки (61), из последнего неравенства получим

$$|F_1(x)| \leqslant \sqrt{\delta}C_{10}C_{11}(x^2+\delta)^{-\beta-\frac{1}{2}} + C_5 \leqslant C_{12}x^{-2\beta-1} + C_5, \tag{68}$$

где $C_{12} = \sqrt{\delta}C_{10}C_{11}$,

$$F\left(1, \beta+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\delta}{x^2+\delta}\right) \leqslant C_{11}.$$

Если $1-x$ достаточно мало, то аналогично находим

$$|F_1(x)| = C_5(1-x)^{-2\beta-1}. \tag{69}$$

Проводя те же самые рассуждения, получим

$$|F_1'(x)| < C_6x^{-2\beta-2}, \quad |F_1'(x)| = C_7(1-x)^{-2\beta-2}. \tag{70}$$

В силу (8), (68)—(70) из (64) заключаем, что $F_1(x) \in C^1(J)$ и $F_1(x)$ функция обращается в бесконечность порядка меньше $2\beta+1$ при $x \to 0$ и $x \to 1$.

В силу (8) точно так же как выше, можно выяснить поведение функции $F_2(x)$ и её производной при $x \to 0$ и $x \to 1$. Тогда функции $F_2(x)$ и $F_2'(x)$ допускают оценки

$$|F_2(x)| \leqslant C_{13}, \quad |F_2'(x)| \leqslant C_{14}, \quad x \in [0,1]. \tag{71}$$

Производя замену переменных

$$\zeta = \frac{t^2}{1-2t+2t^2}, \quad z = \frac{x^2}{1-2x+2x^2},$$

приведем уравнение (50) к виду

$$P_3(z)T_2(z) + \frac{P_4(z)}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{T_2(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_0^1 K_2(z,\zeta)T_2(\zeta)d\zeta = F_2(z), \quad 0 < z < 1; \tag{72}$$

здесь

$$\begin{gathered} T_2(z) = (1-z)^{-\beta}T(x), \quad P_3(z) = P_1(x), \quad P_4(z) = P_2(x), \\ x = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}+\sqrt{1-z}}, \quad t = \frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}+\sqrt{1-\zeta}}, \end{gathered} \tag{73}$$

$$K(z,\zeta) = -\left(\frac{\sqrt{\zeta}+\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{z}+\sqrt{1-z}}\right)^{2-2\beta}\left(\frac{1-z}{1-\zeta}\right)^{-\beta}\frac{K(x,t)}{2\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + \frac{P_2(x)}{\pi i}\frac{1}{\zeta - z}\left[\left(\frac{\sqrt{z}+\sqrt{1-z}}{\sqrt{\zeta}+\sqrt{1-\zeta}}\right)^{2-2\beta} - 1\right],$$

$$F_2(z) = (1-z)^{-\beta} F(x).$$

Переходя к вопросу о разрешимости сингулярного интегрального уравнения (72), прежде всего заметим, что это уравнение является уравнением нормального типа (см. [14]), так как из (51), (52), (54), (55) и (73) следует, что

$$P_3^2(z) - P_4^2(z) \neq 0, \quad \forall z \in [0,1].$$

Учитывая (8), (68), (69), (70) и (71), из (56) нетрудно убедиться, что функция $F_2(z) \in C^1(0,1)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $(1+2\beta)/2$ при $z \to 0$, а при $z \to 1$ ограничена. Ядро $K_2(z,\zeta)$ имеет слабую особенность.

Таким образом, решение $T_2(z)$ уравнения (73) ищем в классе функций, ограниченных при $z \to 1$ и неограниченных при $z \to 0$, т.е. в классе $h(1)$ (см. [14]).

Применяя к уравнению (72) метод регуляризации Карлемана—Векуа (см. [14]), развитый С. Г. Михлиным в [12] и М. М. Смирновым в [22], получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи C. Следовательно, из обозначения $T_2(z) = (1-z)^{-\beta} T(x)$ находим функцию $T(x)$, где функция $T(x)$ непрерывна на $(0,1)$ и интегрируема на $[0,1]$.

Подставляя $T(x)$ в (14), найдем $\tau(x)$, а затем из (21) и (26) находим $\nu^{\pm}(x)$. Далее, зная функцию $\tau(x)$, решение задачи C для уравнения (1) в области D_1 восстановим как решение задачи DK для уравнения (1) с условиями (5) и (10), а в D_2 — как обобщенное решение задачи Коши с данными (10), (11) для уравнения (1).

Таким образом, существование решение задачи C при $\delta(s) \neq 0$ доказано. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев А. А.* О единственности решения задачи типа Франкля для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода// Вестн. Харьков. политех. ин-та. Сер. Информ. модел. — 2019. — *13 (1338)*. — С. 5–12.
2. *Абрегов М. Х.* Некоторые задачи типа задачи Бицадзе—Самарского для уравнения смешанного типа// Диффер. уравн. — 1974. — *10*, № 1. — С. 3–6.
3. *Алгазин О. Д., Копаев А. В.* К задаче о наклонной производной для уравнения Лаврентьева—Бицадзе в полуплоскости// Мат. мат. модел. — 2016. — *2*. — С. 1–8.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1965.
5. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Наука, 1966.
6. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
7. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.
8. *Вострова Л. К.* Смешанная краевая задачи для общего уравнения Лаврентьева—Бицадзе// Уч. зап. Куйбышев. гос. педагог. ин-та. — 1959. — *29*. — С. 45–66.
9. *Исломов Б.* О локальных и нелокальных краевых задачах для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями вырождения// Узбек. мат. ж. — 1993. — *2*. — С. 36–42.
10. *Кароль И. Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа// Докл. АН СССР. — 1953. — *88*, № 2. — С. 197–200.
11. *Мирсабуров М.* Нелокальная краевая задача для уравнения Геллерстетдта// Мат. заметки. — 2000. — *67*, № 5. — С. 721–729.
12. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1959.
13. *Моисеев Е. И., Моисеев Т. Е., Вафодорова Г. О.* Об интегральном представлении задачи Неймана—Трикоми для уравнения Лаврентьева—Бицадзе// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 8. — С. 1070–1075.
14. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
15. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения// Диффер. уравн. — 1983. — *19*, № 1. — С. 86–94.
16. *Нахушев А. М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа// Диффер. уравн. — 1969. — *5*, № 1. — С. 44–59.

17. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод// Диффер. уравн. — 1982. — *18*, № 1. — С. 72–81.
18. *Салахитдинов М. С., Исломов Б.* Краевые задачи типа задачи Геллерстедта для общего линейного уравнения смешанного типа// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1986. — *2.* — С. 39–43.
19. *Салахитдинов М. С., Аманов Д.* Краевые задачи типа задач Пуанкаре и Трикоми для уравнения смешанного типа с разрывными коэффициентами// 1 Респ. конф. по дифференциальным уравнениям. — Ашхабад, 1972. — С. 29–32.
20. *Салахитдинов М. С., Исломов Б. И.* Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. — Ташкент, 2010.
21. *Салахитдинов М. С., Кадыров З.* Задача с нормальной производной для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения// Диффер. уравн. — 1986. — *22*, № 1. — С. 103–114.
22. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. — М.: Высшая школа, 1985.
23. *Чубенко Л. С.* Задачи с конормальной производной для общего уравнения смешанного типа первого рода на плоскости// Волж. мат. сб. — 1968. — *6.* — С. 271–286.
24. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах// Диффер. уравн. — 1982. — *18*, № 4. — С. 689–699.
25. *Юлдашев Т. К.* Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *145.* — С. 95–109.
26. *Юлдашев Т. К.* Определение коэффициента в нелокальной задаче для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Владикавказ. мат. ж. — 2019. — *21*, № 2. — С. 67–84.
27. *Юлдашев Т. К.* Обратная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *149.* — С. 129–140.
28. *Bassanini P., Calaverni M.* Contrazioni multi sistemi iperbolici, eprobemia del laser// Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Madena — 1982. — *31*, № 1. — P. 32–50.
29. *Islomov B., Abdullayev A. A.* On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition// J. Nanosyst. Phys. Chem. Math. — 2018. — *9*, № 3. — P. 307–318.
30. *Pulkina L. S.* Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral conditions// Electron. J. Differ. Equations. — 2016.

Исломов Бозор Исломович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `islomovbozor@yandex.com`

Абдуллаев Акмалжон Абдужалилович
Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: `akmal09.07.85@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 201 (2021). С. 80–97
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-201-80-97

УДК 517.588

ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2021 г. **Т. Г. ЭРГАШЕВ**

Аннотация. В теории гипергеометрических функций важную роль играют формулы разложения, позволяющие представить гипергеометрическую функцию многих переменных через бесконечную сумму произведений нескольких гипергеометрических функций одной переменной. В работе введены в рассмотрение новые символические операторы типа Берчнелла—Ченди, изучены их свойства и найдены некоторые разложения для гипергеометрических функций двух переменных.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, формула разложения, символическая форма, оператор Берчнелла, оператор Ченди.

EXPANSION FORMULAS FOR HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

© 2021 **T. G. ERGASHEV**

Abstract. In the theory of hypergeometric functions, an important role is played by expansion formulas that allows one to express hypergeometric functions of several variables as infinite sums of products of several hypergeometric functions of one variable. In this paper, for hypergeometric functions of two variables, we introduce new symbolic Burchnall–Chaundy operators, examine their properties, and construct some expansions.

***Keywords and phrases*:** hypergeometric function, expansion formula, symbolic form, Burchnall operator, Chaundy operator.

***AMS Subject Classification*:** 33C05, 33C15, 33C20, 33C65

1. Постановка задачи. Нет необходимости говорить о важности свойств гипергеометрических функций. Любой исследователь, имеющий дело с практическими применениями дифференциальных или интегральных уравнений с ними встречается. Решение самых разных задач, относящихся к теплопроводности и динамике, электромагнитным колебаниям и аэродинамике, квантовой механике и теории потенциалов, приводит к изучению гипергеометрических функций.

Разнообразие задач, приводящих к гипергеометрическим функциям, вызвало быстрый рост их числа. Особенно большие успехи в теории гипергеометрической функции одной переменной стимулировали развитие соответствующих теорий для функций двух и многих переменных. Аппель определил в 1889 г. четыре ряда F_1—F_4 (см. ниже равенства (10)—(13)), каждый из которых аналогичен ряду Гаусса $F(a, b; c; z)$. Пикар указал, что один из этих рядов тесно связан с функцией, изученной Похгаммером в 1870 г., а Пикар и Гурса построили теорию рядов Аппеля, которая аналогична теории Римана для гауссовского гипергеометрического ряда. Гумберт изучил конфлюэнтный (вырожденный) гипергеометрический ряд двух переменных. Изложение этих результатов французской школы со ссылками на оригинальную литературу содержатся в монографии Аппеля и Кампе де Ферье [6], которая является основным трудом в этой области. Эта работа содержит также обширную библиографию, содержащую все существенные работы до 1926 г.

В конце первой половины прошлого столетия был организован крупный проект (проект Бейтмена) по подготовке материалов и созданию многотомного энциклопедического издания по теории специальных функций. Проект был начат в 1946 году после смерти выдающегося прикладного математика Гарри Бейтмена, который собрал и начал обработку большого количества материалов по теории специальных функций, но не успел полностью систематизировать их и подготовить к печати. Проводился в течение нескольких лет группой математиков под руководством Артура Эрдейи. В группу входили известные математики, в числе которых были В. Магнус и Ф. Трикоми. В первом томе этого пятитомного издания изложена теория гипергеометрических функций двух переменных (см. [1, 10]).

Монография [22] посвящена систематическому изложению результатов по 205 полным гипергеометрическим функциям трех переменных. Конфлюэнтные гипергеометрические функции во всех отношениях значительно мало изучены по сравнению с полными, особенно когда размерность переменных превышает две. Отметим лишь работы [13, 17], в которых былы рассмотрены некоторые конфлюэнтные гипергеометрические функции трех переменных. До сих пор даже не определен возможный набор тройных конфлюэнтных гипергеометрических рядов. Недавно появились работы [3, 11, 12, 14], авторы которых ввели в рассмотрение конфлюэнтные гипергеометрические функции трех и более переменных, изучали свойства и применяли к нахождению в явном виде фундаментальных решений и решений краевых задач для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами.

В литературе принято делить гипергеометрические функции на два вида: полные и конфлюэнтные и, как правило, конфлюэнтные функции являются предельными формами для полных функций. Согласно *списку Горна* (см. [1]) существуют 14 полных и 20 конфлюэнтных функций двух переменных.

С целью облегчить процесс изучения свойств функций многих переменных Дж. Берчнелл и Т. Ченди впервые разложили 4 полные и 7 конфлюэнтные гипергеометрические функции из списка Горна в бесконечную сумму произведений двух гипергеометрических функций Гаусса (см. [8, 9]).

Настоящая работа посвящена нахождению формул разложения для 23 (10 полных и 13 конфлюэнтных) гипергеометрических функций двух переменных из списка Горна.

2. Предварительные сведения из теории специальных функций. *Эйлеровы интегралы*, т.е. *бета-* и *гамма-функции* определяются формулами

$$B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\quad \operatorname{Re}x>0,\quad \operatorname{Re}y>0, \tag{1}$$

$$\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\quad \operatorname{Re}z>0, \tag{2}$$

соответственно, и между ними имеется связь

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{3}$$

Положим

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)};$$

иными словами,

$$(a)_0=1,\quad (a)_n=a(a+1)\dots(a+n-1),\quad n=1,2,3,\dots.$$

Символ $(a)_n$ называют *символом Похгаммера.*

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется внутри круга $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда

$$F(a,b;c;z) \equiv F\left[\begin{matrix} a,b; \\ c; \end{matrix}\; x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{4}$$

(см. [1, с. 69, формула (2)]), а при $|z| \geqslant 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда (см. [6]). В формуле (4) параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, причем $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, а $(a)_n$ — символ Похгаммера.

Если $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, то имеет место формула Эйлера

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tz)^{-a}dt \tag{5}$$

(см. [1, с. 72, формула (10)]). Правая часть этого равенства является однозначной аналитической функцией от z в области $|\arg(1-z)| < \pi$; таким образом, равенство (5) дает аналитическое продолжение для $F(a,b;c;z)$.

Если положить $z = 1$, то правая часть равенства (5) станет бета-интегралом, и из (1) и (3) вытекает, что

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0 \tag{6}$$

(см. [1, с. 73, формула (14)]). Заметим, что при подстановках

$$s = 1-t, \frac{1-t}{1-tz}, \frac{t}{1-z+tz}$$

интеграл Эйлера (5) преобразуется в интеграл того же самого вида. Отсюда получаем

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{-b} F\left(c-a, b; c; \frac{z}{z-1}\right), \tag{7}$$

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z). \tag{8}$$

(см. [1, с. 76, формулы (22) и (23)]). Соотношение (7) справедливо, если $|z| < 1$ и $|z/(z-1)| < 1$; так как правая часть равенства (7) определена при $\operatorname{Re} z < 1/2$, то это равенство можно использовать для аналитического продолжения $F(a,b;c;z)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} z < 1/2$. Равенство (8) справедливо лишь при $|z| < 1$ в случае, если a, b, $c-a$ или $c-b$ не являются неположительными целыми числами.

Гипергеометрический ряд Гаусса $F(a,b;c;z)$ может быть обобщен путем введения p параметров, играющих ту же роль, что a и b, и q параметров, играющих ту же роль, что c. При этом получается ряд

$${}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1,\ldots,a_p; \\ c_1,\ldots,c_q; \end{matrix}\; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(c_1)_n \ldots (c_q)_n n!} z^n \tag{9}$$

(см. [1, с. 183, формула (1)]), который называют *обобщенным гипергеометрическим рядом.* Ряд Гаусса (4) в этих обозначениях имеет вид

$${}_2F_1(a,b;c;z) \equiv F(a,b;c;z).$$

Здесь $a_1,\ldots,a_p$, $c_1,\ldots,c_q$ — комплексные параметры и z — комплексное переменное. Вообще говоря (то есть за исключением некоторых целых значений параметра, для которых ряд состоит из конечного числа членов или не имеет смысла), ряд ${}_pF_q$ сходится для всех конечных значений z, если $p \leqslant q$, сходится при $|z| < 1$, если $p = q+1$, и расходится при всех $z \neq 0$, если $p > q+1$.

Числа $a_1,\ldots,a_p$ называют параметрами числителя (верхними параметрами), а числа $c_1,\ldots,c_q$ — параметрами знаменателя (нижними параметрами).

Следует отметить, что ряды (9) не являются единственными обобщениями ряда Гаусса (4) (о других обобщениях см. [1]).

Формулы дифференцирования играют важную роль в дальнейших исследованиях: для гипергеометрической функции Гаусса $F(a,b;c;z)$

$$\frac{d^m}{dx^m}F(a,b;c;z)=\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}F(a+m,b+m;c+m;z)$$

(см. [1, с. 110, формула (20)]) и, вообще, для обобщенной гипергеометрической функции ${}_pF_q$

$$\frac{d^m}{dx^m}{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_p;\\ c_1,\dots,c_q;\end{matrix}\ z\right]=\frac{(a_1)_m\dots(a_p)_m}{(c_1)_m\dots(c_q)_m}{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1+m,\dots,a_p+m;\\ c_1+m,\dots,c_q+m;\end{matrix}\ z\right]$$

(см. [2, с. 442, формула 47]).

Горн дал следующее общее определение (см. [15]): двойной степенной ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{mn}x^my^n$$

является гипергеометрическим рядом, если два отношения

$$\frac{A_{m+1,n}}{A_{mn}}=f(m,n),\quad \frac{A_{m,n+1}}{A_{mn}}=g(m,n)$$

являются рациональными функциями от m и n. Горн изучил сходимость гипергеометрических рядов от двух переменных и установил систему дифференциальных уравнений в частных производных, которым они удовлетворяют. Горн положил

$$f(m,n)=\frac{F(m,n)}{F'(m,n)},\quad g(m,n)=\frac{G(m,n)}{G'(m,n)},$$

где F, F', G, G' — многочлены от m и n, имеющие соответственно степени p, p', q, q'. При этом предполагается, что F' имеет множитель $m+1$, а G' — множитель $n+1$; F и F' не имеют общих множителей, за исключением, быть может, $m+1$, а G и G' не имеют общих множителей, за исключением, быть может, $n+1$. Наибольшее из четырех чисел p, p', q, q' называют *порядком* гипергеометрического ряда. Горн исследовал, в частности, гипергеометрические ряды *второго порядка*. Он установил, что, кроме некоторых рядов, выражаемых через ряды от одного переменного или через произведения двух гипергеометрических рядов, каждый из которых зависит от одного переменного, существуют 34 существенно различных сходящихся ряда порядка 2 (см. [16], исправления см. в [23, с. 58]).

Существуют 14 *полных* (*complete*) рядов, для которых $p=p'=q=q'=2$:

$$F_1(a,b,c;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(c)_n}{(d)_{m+n}m!n!}x^my^n, \tag{10}$$

$$F_2(a,b,c;d,e;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(c)_n}{(d)_m(e)_nm!n!}x^my^n, \tag{11}$$

$$F_3(a,b,c,d;e;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_n(c)_m(d)_n}{(e)_{m+n}m!n!}x^my^n, \tag{12}$$

$$F_4(a,b;c,d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m(d)_nm!n!}x^my^n, \tag{13}$$

$$G_1(a,b,c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{n-m}(c)_{m-n}}{m!n!}x^my^n, \tag{14}$$

$$G_2(a,b,c,d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_n(c)_{n-m}(d)_{m-n}}{m!n!}x^my^n, \tag{15}$$

$$G_3(a,b;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2n-m}(b)_{2m-n}}{m!n!}x^m y^n, \tag{16}$$

$$H_1(a,b,c;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_{m+n}(c)_n}{(d)_m m!n!}x^m y^n, \tag{17}$$

$$H_2(a,b,c,d;e;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_m(c)_n(d)_n}{(e)_m m!n!}{}^m y^n, \tag{18}$$

$$H_3(a,b;c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m+n}(b)_n}{(c)_{m+n} m!n!}x^m y^n, \tag{19}$$

$$H_4(a,b;c,d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m+n}(b)_n}{(c)_m(d)_n m!n!}x^m y^n, \tag{20}$$

$$H_5(a,b;c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m+n}(b)_{n-m}}{(c)_n m!n!}x^m y^n, \tag{21}$$

$$H_6(a,b;c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m-n}(b)_{n-m}(c)_n}{m!n!}x^m y^n, \tag{22}$$

$$H_7(a,b,c;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m-n}(b)_n(c)_n}{(d)_m m!n!}x^m y^n. \tag{23}$$

Кроме того, существуют 20 *конфлюэнтных* (*confluent*) рядов, которые являются предельными формами для полных рядов и для которых $p \leqslant p' = 2$, $q \leqslant q' = 2$, причем p и q не могут одновременно равняться двум:

$$\Phi_1(a,b,c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m}{(c)_{m+n} m!n!}x^m y^n, \qquad |x|<1, \tag{24}$$

$$\Phi_2(a,b;c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_n}{(c)_{m+n} m!n!}x^m y^n, \tag{25}$$

$$\Phi_3(a;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m}{(d)_{m+n} m!n!}x^m y^n, \tag{26}$$

$$\Psi_1(a,b;c,d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m}{(c)_m(d)_n m!n!}x^m y^n, \qquad |x|<1, \tag{27}$$

$$\Psi_2(a;b,d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}}{(b)_m(d)_n m!n!}x^m y^n, \tag{28}$$

$$\Xi_1(a,b,c;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_n(c)_m}{(d)_{m+n} m!n!}x^m y^n, \qquad |x|<1, \tag{29}$$

$$\Xi_2(a,b;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(d)_{m+n} m!n!}x^m y^n, \qquad |x|<1, \tag{30}$$

$$\Gamma_1(a,b,c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_{n-m}(c)_{m-n}}{m!n!}x^m y^n, \quad |x|<1, \tag{31}$$

$$\Gamma_2(b,c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(b)_{n-m}(c)_{m-n}}{m!n!}x^m y^n, \tag{32}$$

$$\mathrm{H}_1(a,b;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_{m+n}}{(d)_m m!n!}x^m y^n,\qquad |x|<1, \tag{33}$$

$$\mathrm{H}_2(a,b,c;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_m(c)_n}{(d)_m m!n!}x^m y^n,\qquad |x|<1, \tag{34}$$

$$\mathrm{H}_3(a,b;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_m}{(d)_m m!n!}x^m y^n,\qquad |x|<1, \tag{35}$$

$$\mathrm{H}_4(a,b;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_n}{(d)_m m!n!}x^m y^n, \tag{36}$$

$$\mathrm{H}_5(a;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}}{(d)_m m!n!}x^m y^n, \tag{37}$$

$$H_6(a;c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m+n}}{(c)_{m+n} m!n!}x^m y^n,\qquad |x|<\frac{1}{4}, \tag{38}$$

$$\mathrm{H}_7(a;d,e;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m+n}}{(d)_m(e)_n m!n!}x^m y^n,\qquad |x|<\frac{1}{4}, \tag{39}$$

$$H_8(a,b;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m-n}(b)_{n-m}}{m!n!}x^m y^n,\qquad |x|<\frac{1}{4}, \tag{40}$$

$$\mathrm{H}_9(a,b;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m-n}(b)_n}{(d)_m m!n!}x^m y^n,\qquad |x|<\frac{1}{4}, \tag{41}$$

$$\mathrm{H}_{10}(a;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m-n}}{(d)_m m!n!}x^m y^n,\qquad |x|<\frac{1}{4}, \tag{42}$$

$$\mathrm{H}_{11}(a,b,c;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_n(c)_n}{(d)_m m!n!}x^m y^n,\qquad |y|<1. \tag{43}$$

3. Символические формы. С целью нахождения формул разложения для полных гипергеометрических функций Аппеля F_1—F_4, определенных формулами (10)—(13) и конфлюэнтных функций Φ, Ψ и Ξ, определенных формулами (24)—(30), Дж. Берчнелл и Т. Ченди ввели операторы (см. [8, 9])

$$\nabla(h)=\frac{\Gamma(h)\Gamma(h+\delta+\sigma)}{\Gamma(h+\delta)\Gamma(h+\sigma)}, \tag{44}$$

$$\Delta(h)=\frac{\Gamma(\delta+h)\Gamma(\sigma+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\delta+\sigma+h)}, \tag{45}$$

где

$$\delta\equiv x\frac{\partial}{\partial x},\quad \sigma\equiv y\frac{\partial}{\partial y}, \tag{46}$$

а $\Gamma(z)$ — гамма-функция, определенная формулой (2). С помощью этих операторов можно получить следующие символические формы (см. [8, 9]):

$$F_1(a,b,c;d;x,y)=\nabla(a)\Delta(d)F(a,b;d;x)F(a,c;d;y), \tag{47}$$

$$F_2(a,b,c;d,e;x,y)=\nabla(a)F(a,b;d;x)F(a,c;e;y), \tag{48}$$

$$F_3(a,b,c,d;e;x,y)=\Delta(e)F(a,c;e;x)F(b,d;e;y), \tag{49}$$

$$F_4(a,b;c,d;x,y)=\nabla(a)\nabla(b)F(a,b;c;x)F(a,b;d;y), \tag{50}$$

$$\Phi_1(a,b,c;x,y)=\nabla(a)\nabla(c)F(a,b;c;x)\,{}_1F_1(a;c;y), \tag{51}$$

$$\Phi_2(a,b;c;x,y)=\Delta(c)_1F_1(a;c;x)_1F_1(b;c;y), \tag{52}$$
$$\Phi_3(a;d;x,y)=\Delta(d)_1F_1(a;d;x)_0F_1(d;y), \tag{53}$$
$$\Psi_1(a,b;c,d;x,y)=\nabla(a)F(a,b;c;x)_1F_1(a;d;y), \tag{54}$$
$$\Psi_2(a;b,d;x,y)=\nabla(a)_1F_1(a;b;x)_1F_1(a;d;y), \tag{55}$$
$$\Xi_1(a,b,c;d;x,y)=\Delta(d)F(a,c;d;x)_1F_1(b;d;y), \tag{56}$$
$$\Xi_2(a,b;d;x,y)=\Delta(d)F(a,b;d;x)_0F_1(d;y). \tag{57}$$

Введем в рассмотрение операторы типа Берчнелла—Ченди:

$$\tilde{\nabla}_{\alpha x;\beta y}(h) \coloneqq \frac{\Gamma(h)\Gamma(h+\alpha\delta+\beta\sigma)}{\Gamma(h+\alpha\delta)\Gamma(h+\beta\sigma)}, \tag{58}$$
$$\tilde{\Delta}_{\alpha x;\beta y}(h) \coloneqq \frac{\Gamma(\alpha\delta+h)\Gamma(\beta\sigma+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\alpha\delta+\beta\sigma+h)}, \tag{59}$$

где α и β — целые числа, отличные от нуля, т.е. $\alpha,\beta=\pm1,\pm2,\ldots$, а δ и σ — выражения, определенные в (46). Нетрудно заметить, что в случае $\alpha=1$ и $\beta=1$ операторы, определенные формулами (58) и (59), совпадают с операторами Берчнелла—Ченди (44) и (45), соответственно.

С помощью оператора (58) можно представить функции, определенные формулами (14)—(23) и (31)—(43), в виде

$$G_1(a,b,c;x,y)=\tilde{\nabla}_{x;y}(a)\tilde{\nabla}_{-x;y}(b)\tilde{\nabla}_{x;-y}(c)F(a,c;1-b;-x)F(a,b;1-c;-y), \tag{60}$$
$$G_2(a,b,c,d;x,y)=\tilde{\nabla}_{-x;y}(c)\tilde{\nabla}_{x;-y}(d)F(a,d;1-c;-x)F(b,c;1-d;-y), \tag{61}$$
$$G_3(a,b;x,y)=\tilde{\nabla}_{-x;2y}(a)\tilde{\nabla}_{2x;-y}(b)F\left(\frac{b}{2},\frac{b+1}{2};1-a;-4x\right)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};1-b;-4y\right), \tag{62}$$
$$H_1(a,b,c;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{x;-y}(a)\tilde{\nabla}_{x;y}(b)F(a,b;d;x)F(b,c;1-a;-y), \tag{63}$$
$$H_2(a,b,c,d;e;x,y)=\tilde{\nabla}_{x,y}(a)F(a,b;e;x)F(c,d;1-a;-y), \tag{64}$$
$$H_3(a,b;c;x,y)=\tilde{\nabla}_{2x;y}(a)\tilde{\nabla}_{-x;-y}(1-c)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};c;4x\right)F(a,b;c;y), \tag{65}$$
$$H_4(a,b;c,d;x,y)=\tilde{\nabla}_{2x;y}(a)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};c;4x\right)F(a,b;d;y), \tag{66}$$
$$H_5(a,b;c;x,y)=\tilde{\nabla}_{2x;y}(a)\tilde{\nabla}_{-x;y}(b)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};1-b;-4x\right)F(a,b;c;y), \tag{67}$$
$$H_6(a,b;c;x,y)=\tilde{\nabla}_{2x;-y}(a)\tilde{\nabla}_{-x;y}(b)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};1-b;-4x\right)F(b,c;1-a;-y), \tag{68}$$
$$H_7(a,b,c;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{2x;-y}(a)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};d;4x\right)F(b,c;1-a;-y), \tag{69}$$
$$\Gamma_1(a,b,c;x,y)=\tilde{\nabla}_{-x;y}(b)\tilde{\nabla}_{x;-y}(c)F(a,c;1-b;-x)_1F_1(b;1-c;-y), \tag{70}$$
$$\Gamma_2(b,c;x,y)=\tilde{\nabla}_{-x;y}(b)\tilde{\nabla}_{x;-y}(c)_1F_1(c;1-b;-x)_1F_1(b;1-c;-y), \tag{71}$$
$$\mathrm{H}_1(a,b;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{x;-y}(a)\tilde{\nabla}_{x;y}(b)F(a,b;d;x)_1F_1(b;1-a;-y), \tag{72}$$
$$\mathrm{H}_2(a,b,c;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{x,-y}(a)F(a,b;d;x)_1F_1(c;1-a;-y), \tag{73}$$
$$\mathrm{H}_3(a,b;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{x,-y}(a)F(a,b;d;x)_0F_1(1-a;-y), \tag{74}$$
$$\mathrm{H}_4(a,b;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{x,-y}(a)_1F_1(a;d;x)_1F_1(b;1-a;-y), \tag{75}$$
$$\mathrm{H}_5(a;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{x,-y}(a)_1F_1(a;d;x)_0F_1(1-a;-y), \tag{76}$$
$$H_6(a;c;x,y)=\tilde{\nabla}_{2x;y}(a)\tilde{\nabla}_{-x;-y}(1-c)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};c;4x\right){}_1F_1(a;c;y), \tag{77}$$

$$\mathrm{H}_7(a;d,e;x,y)=\tilde{\nabla}_{2x;y}(a)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};d;4x\right){}_1F_1(a;e;y), \tag{78}$$

$$H_8(a,b;x,y)=\tilde{\nabla}_{2x;-y}(a)\tilde{\nabla}_{-x;y}(b)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};1-b;-4x\right){}_1F_1(b;1-a;-y), \tag{79}$$

$$\mathrm{H}_9(a,b;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{2x;-y}(a)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};d;4x\right){}_1F_1(b;1-a;-y), \tag{80}$$

$$\mathrm{H}_{10}(a;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{2x;-y}(a)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};d;4x\right){}_0F_1(1-a;-y), \tag{81}$$

$$\mathrm{H}_{11}(a,b,c;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{x,-y}(a){}_1F_1(a;d;x)F(b,c;1-a;-y), \tag{82}$$

Подействовав оператором (59), из отношений (60)—(82) получим так называемые обратные символические формы:

$$F(a,c;1-b;-x)F(a,b;1-c;-y)=\tilde{\Delta}_{x;-y}(c)\tilde{\Delta}_{-x;y}(b)\tilde{\Delta}_{x;y}(a)G_1(a,b,c;x,y), \tag{83}$$

$$F(a,d;1-c;-x)F(b,c;1-d;-y)=\tilde{\Delta}_{x;-y}(d)\tilde{\Delta}_{-x;y}(c)G_2(a,b,c,d;x,y), \tag{84}$$

$$F\left(\frac{b}{2},\frac{b+1}{2};1-a;-4x\right)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};1-b;-4y\right)=\tilde{\Delta}_{2x;-y}(b)\tilde{\Delta}_{-x;2y}(a)G_3(a,b;x,y), \tag{85}$$

$$F(a,b;d;x)F(b,c;1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{x;y}(b)\tilde{\Delta}_{x;-y}(a)H_1(a,b,c;d;x,y), \tag{86}$$

$$F(a,b;e;x)F(c,d;1-a;y)=\tilde{\Delta}_{x,y}(a)H_2(a,b,c,d;e;x,-y), \tag{87}$$

$$F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};c;4x\right)F(a,b;c;y)=\tilde{\Delta}_{-x;-y}(1-c)\tilde{\Delta}_{2x;y}(a)H_3(a,b;c;x,y), \tag{88}$$

$$F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};c;4x\right)F(a,b;d;y)=\tilde{\Delta}_{2x;y}(a)H_4(a,b;c,d;x,y), \tag{89}$$

$$F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};1-b;-4x\right)F(a,b;c;y)=\tilde{\Delta}_{-x;y}(b)\tilde{\Delta}_{2x;y}(a)H_5(a,b;c;x,y), \tag{90}$$

$$F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};1-b;-4x\right)F(b,c;1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{-x;y}(b)\tilde{\Delta}_{2x;-y}(a)H_6(a,b;c;x,y), \tag{91}$$

$$F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};d;4x\right)F(b,c;1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{2x;-y}(a)H_7(a,b,c;d;x,y), \tag{92}$$

$$F(a,c;1-b;-x){}_1F_1(b;1-c;-y)=\tilde{\Delta}_{x;-y}(c)\tilde{\Delta}_{-x;y}(b)\Gamma_1(a,b,c;x,y), \tag{93}$$

$${}_1F_1(c;1-b;-x){}_1F_1(b;1-c;-y)=\tilde{\Delta}_{x;-y}(c)\tilde{\Delta}_{-x;y}(b)\Gamma_2(b,c;x,y), \tag{94}$$

$$F(a,b;d;x){}_1F_1(b;1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{x;y}(b)\tilde{\Delta}_{x;-y}(a)\mathrm{H}_1(a,b;d;x,y), \tag{95}$$

$$F(a,b;d;x){}_1F_1(c;1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{x,-y}(a)\mathrm{H}_2(a,b,c;d;x,y), \tag{96}$$

$$F(a,b;d;x){}_0F_1(1-a;y)=\tilde{\Delta}_{x,-y}(a)\mathrm{H}_3(a,b;d;x,-y), \tag{97}$$

$${}_1F_1(a;d;x){}_1F_1(b;1-a;y)=\tilde{\Delta}_{x,-y}(a)\mathrm{H}_4(a,b;d;x,-y), \tag{98}$$

$${}_1F_1(a;d;x){}_0F_1(1-a;y)=\tilde{\Delta}_{x,-y}(a)\mathrm{H}_5(a;d;x,-y), \tag{99}$$

$$F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};c;4x\right){}_1F_1(a;c;y)=\tilde{\Delta}_{-x;-y}(1-c)\tilde{\Delta}_{2x;y}(a)H_6(a;c;x,y), \tag{100}$$

$$F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};d;4x\right){}_1F_1(a;e;y)=\tilde{\Delta}_{2x;y}(a)\mathrm{H}_7(a;d,e;x,y), \tag{101}$$

$$F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};1-b;-4x\right){}_1F_1(b;1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{-x;y}(b)\tilde{\Delta}_{2x;-y}(a)H_6(a,b;x,y), \tag{102}$$

$$F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};d;4x\right){}_1F_1(b;1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{2x;-y}(a)\mathrm{H}_9(a,b;d;x,y), \tag{103}$$

$$F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};d;4x\right){}_0F_1(1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{2x;-y}(a)\mathrm{H}_{10}(a;d;x,y), \tag{104}$$

$${}_1F_1(a;d;x)F(b,c;1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{x,-y}(a)\mathrm{H}_{11}(a,b,c;d;x,y). \tag{105}$$

4. Формулы разложения. Символические формы (47)—(57) были использованы для нахождения разложений функций Аппеля по другим функциям, а также функций Аппеля по произведениям обычных гипергеометрических функций и обратно. Чтобы дать пример, заметим, что в силу формулы (6) для $F(a,b;c;1)$ имеем символическую запись

$$\nabla(h)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\delta)_r(-\sigma)_r}{(h)_r r!}.$$

Таким образом,

$$(-\delta)_r F(a,b;c;x)=(-1)^r\frac{(a)_r(b)_r}{(c)_r}x^r F(a+r,b+r;c+r;x) \tag{106}$$

и, следовательно, символическая форма (48) приводит к разложению

$$F_2(a,b,c;d,e;x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r(b)_r(c)_r}{r!(d)_r(e)_r}x^r y^r F(a+r,b+r;c+r;x)F(a+r,d+r;e+r;y). \tag{107}$$

Используя обращение символической формы (48) в виде

$$F(a,b;c;x)F(a,d;e;y)=\Delta(a)F_2(a,b,c;d,e;x,y) \tag{108}$$

и соответствующее разложение $\Delta(a)$, наряду с (107) получаем формулу обратного разложения

$$F(a,b;c;x)F(a,d;e;y)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(a)_r(b)_r(c)_r}{r!(d)_r(e)_r}x^r y^r F_2(a+r,b+r,c+r;d+r,e+r;x,y).$$

С помощью этого метода Берчнелл и Ченди в [8, 9] получили 15 пар разложений, содержащих функции Аппеля и обычные гипергеометрические функции, а также значительное число разложений, содержащих гипергеометрические ряды высшего порядка и конфлюэнтные гипергеометрические ряды Гумберта Φ, Ψ и Ξ.

Как отмечалось, формула (106) играла важную роль в исследованиях Берчналла и Ченди, но для нахождения разложений функций, определенных формулами (14)—(23) и (31)—(43) этой одной формулы недостаточно.

Теорема 1. *Если $f(z)$ — произвольная бесконечно раз дифференцируемая функция, то при любых $i,m=0,1,2,\ldots$ справедливы следующие равенства*:

$$\left(-z\frac{d}{dz}\right)_i f(z)=(-1)^i z^i f^{(i)}(z), \tag{109}$$

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)_i f(z)=\sum_{p=0}^{i}\binom{i}{p}(p)_{i-p}z^p f^{(p)}(z), \tag{110}$$

$$\left(-z\frac{d}{dz}\right)_i [z^m f(z)]=\sum_{p=0}^{i}\binom{i}{p}(-1)^p(-m)_{i-p}z^{m+p}f^{(p)}(z), \tag{111}$$

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)_i [z^m f(z)]=\sum_{p=0}^{i}\binom{i}{p}(m+p)_{i-p}z^{m+p}f^{(p)}(z), \tag{112}$$

$$\left(-2z\frac{d}{dz}\right)_i f(z)=\frac{(-1)^i i!}{i_0!}\sum_{p=0}^{i_0}\binom{i_0}{p}\frac{2^{p-i_0}p!}{p_i!}(2z)^{i_1+p}f^{(i_1+p)}(z). \tag{113}$$

Здесь и далее

$$i_0=\left[\frac{i}{2}\right],\quad i_1=\left[\frac{i+1}{2}\right],\quad p_i=2p+\frac{1-(-1)^i}{2},$$

знак $[s]$ *обозначает целую часть числа* s, *а* $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ — *биномиальные коэффициенты.*

Доказательство. Равенства (109)—(113) доказываются методом математической индукции. □

Заметим, что при $f(x) = F(a,b;c;x)$ равенства (106) и (109) совпадают.

Рассмотрим более подробно символическую форму (60). Согласно определению (58) имеем

$$\tilde{\nabla}_{x;y}(a) := \frac{\Gamma(a)\Gamma(a+\delta+\sigma)}{\Gamma(a+\delta)\Gamma(a+\sigma)}, \quad \tilde{\nabla}_{-x;y}(b) := \frac{\Gamma(b)\Gamma(b-\delta+\sigma)}{\Gamma(b-\delta)\Gamma(b+\sigma)}, \quad \tilde{\nabla}_{x;-y}(c) := \frac{\Gamma(c)\Gamma(c+\delta-\sigma)}{\Gamma(c+\delta)\Gamma(c-\sigma)}.$$

В силу формулы (6), получим

$$\tilde{\nabla}_{x;y}(a) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\delta)_i(-\sigma)_i}{i!(a)_i}, \quad \tilde{\nabla}_{-x;y}(b) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\delta)_j(-\sigma)_j}{j!(b)_j}, \quad \tilde{\nabla}_{x;-y}(c) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\delta)_k(\sigma)_k}{k!(c)_k}. \tag{114}$$

С учетом равенств (114) символическая форма (60) принимает вид

$$G_1(a,b,c;x,y) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \frac{(-\delta)_i(-\sigma)_i(\delta)_j(-\sigma)_j(-\delta)_k(\sigma)_k}{i!j!k!(a)_i(b)_j(c)_k} F(a,c;1-b;-x)F(a,b;1-c;-y). \tag{115}$$

Воспользовавшись равенствами (109)—(112) из теоремы 1, получим

$$(-\delta)_i F(a,c;1-b;-x) = \frac{(a)_i(c)_i}{(1-b)_i} x^i F(a+i,c+i;1-b+i;-x), \tag{116}$$

$$(-\sigma)_i F(a,b;1-c;-y) = \frac{(a)_i(b)_i}{(1-c)_i} y^i F(a+i,b+i;1-c+i;-y), \tag{117}$$

$$(-\delta)_k[x^i F(a+i,c+i;1-b+i;-x)] = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \frac{(-i)_{k-m}(a+i)_m(c+i)_m}{(1-b+i)_m} \times \\ \times x^{i+m} F(a+i+m,c+i+m;1-b+i+m;-x), \tag{118}$$

$$(-\sigma)_j[y^i F(a+i,b+i;1-c+i;-y)] = \sum_{q=0}^{j} \binom{j}{q} \frac{(-i)_{j-q}(a+i)_q(b+i)_q}{(1-c+i)_q} \times \\ \times y^{i+q} F(a+i+q,b+i+q;1-c+i+q;-y), \tag{119}$$

$$(\delta)_j[x^{i+m} F(a+i+m,c+i+m;1-b+i+m;-x)] = \\ = \sum_{p=0}^{j} \binom{j}{p} \frac{(-1)^p(i+m+p)_{j-p}(a+i)_m(c+i)_m}{(1-b+i)_m} \times \\ \times x^{i+m} F(a+i+m,c+i+m;1-b+i+m;-x), \tag{120}$$

$$(\sigma)_k[y^{i+q} F(a+i+q,b+i+q;1-c+i+q;-y)] = \\ = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \frac{(-1)^n(i+n+q)_{k-n}(a+i+q)_n(b+i+q)_n}{(1-c+i+q)_n} \times \\ \times y^{i+n+q} F(a+i+n+q,b+i+n+q;1-c+i+n+q;-y). \tag{121}$$

Подставив готовые формулы (116)—(121) в (115), окончательно получим разложение для $G_1(a,b,c;x,y)$ в виде

$$G_1(a,b,c;x,y)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\sum_{m,n=0}^{k}\sum_{p,q=0}^{j}(-1)^{n+p}\binom{k}{m}\binom{k}{n}\binom{j}{p}\binom{j}{q}\times$$
$$\times\frac{(-i)_{k-m}(-i)_{j-q}(i+m+p)_{j-p}(i+n+q)_{k-n}(a)_{i+m+p}(c)_{i+m+p}(a)_{i+n+q}(b)_{i+n+q}}{(a)_i(b)_j(1-b)_{i+m+p}(c)_k(1-c)_{i+n+q}i!j!k!}\times$$
$$\times x^{i+m+p}F(a+i+m+p,c+i+m+p;1-b+i+m+p;-x)\times$$
$$\times y^{i+n+q}F(a+i+n+q,b+i+n+q;1-c+i+n+q;-y). \quad (122)$$

Выполнив аналогичные вычисления в символических формах (61)—(82), получим

$$G_2(a,b,c,d;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p,q=0}^{i,j}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(-1)^{p+q}(j+p)_{i-p}(i+q)_{j-q}(a)_{j+p}(b)_{i+q}(c)_{i+q}(d)_{j+p}}{i!j!(c)_i(1-c)_{j+p}(d)_j(1-d)_{i+q}}\times$$
$$\times x^{j+p}F(a+j+p,d+j+p;1-c+j+p;-x)\times$$
$$\times y^{i+q}F(b+i+q,c+i+q;1-d+i+q;-y), \quad (123)$$

$$G_3(a,b;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{m,n=0}^{i,j}\sum_{p,q=0}^{i_0,j_0}\binom{i}{m}\binom{j}{n}\binom{i_0}{p}\binom{j_0}{q}\frac{p!q!(-1)^{i+j+i_1+j_1+m+n+p+q}}{i_0!j_0!p_i!q_j!}\times$$
$$\times\frac{2^{2p+2q+i_1+j_1-i_0-j_0}(j_1+m+q)_{i-m}(i_1+n+p)_{j-n}(a)_{2i_1+2n+2p}(b)_{2j_1+2m+2q}}{(a)_i(b)_j(1-a)_{j_1+m+q}(1-b)_{i_1+n+p}}\times$$
$$\times x^{j_1+m+q}F\left(\frac{b}{2}+j_1+m+q,\frac{b+1}{2}+j_1+m+q;1-a+j_1+m+q;-4x\right)\times$$
$$\times y^{i_1+n+p}F\left(\frac{a}{2}+i_1+n+p,\frac{a+1}{2}+i_1+n+p;1-b+i_1+n+p;-4y\right),$$
$$j_0=\left[\frac{j}{2}\right],\quad j_1=\left[\frac{j+1}{2}\right],\quad q_j=2q+\frac{1-(-1)^j}{2}, \quad (124)$$

$$H_1(a,b,c,d;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i}\sum_{q=0}^{j}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(-1)^{i+j+p}(-i)_{j-q}(j+p)_{i-p}(a)_{i+q}(b)_{i+q}}{i!j!(a)_i(d)_{i+q}}\times$$
$$\times\frac{(b)_{j+p}(c)_{j+p}}{(1-a)_{j+p}(b)_j}x^{i+q}F(a+i+q,b+i+q;d+i+q;x)\times$$
$$\times y^{j+p}F(b+j+p,c+j+p;1-a+j+p;-y), \quad (125)$$

$$H_2(a,b,c,d;e;x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\binom{i}{j}\frac{(-1)^{i+j}(j)_{i-j}(b)_i(c)_j(d)_j}{i!(e)_i(1-a)_j}\times$$
$$\times x^iy^jF(a+i,b+i;e+i;x)F(c+j,d+j;1-a+j;-y), \quad (126)$$

$$H_3(a,b;c;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i_0}\sum_{m,q=0}^{j}\binom{i_0}{p}\binom{j}{m}\binom{j}{q}\times$$
$$\times\frac{p!2^{2p+i_1-i_0}(i_1+p+q)_{j-q}(i+m)_{j-m}(a)_{2i_1+2p+2q}(a)_{i+m}(b)_{i+m}}{i_0!j!p_i!(a)_i(c)_{i+m}(1-c)_j(c)_{i_1+p+q}}\times$$

$$\times x^{i_1+p+q}F\left(\frac{a}{2}+i_1+p+q,\frac{a+1}{2}+i_1+p+q;c+i_1+p+q;4x\right)\times$$
$$\times y^{i+m}F(a+i+m,b+i+m;c+i+m;y), \quad (127)$$

$$H_4(a,b;c,d;x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i_0}\binom{i_0}{p}\frac{p!2^{2p+i_1-i_0}(a)_{2i_1+2p}(b)_i}{i_0!p_i!(c)_{i_1+p}(d)_i}x^{i_1+p}y^i\times$$
$$\times F\left(\frac{a}{2}+i_1+p,\frac{a+1}{2}+i_1+p;c+i_1+p;4x\right)F(a+i,b+i;d+i;y), \quad (128)$$

$$H_5(a,b;c;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i_0}\sum_{m,q=0}^{j}\binom{i_0}{p}\binom{j}{m}\binom{j}{q}\times$$
$$\times\frac{p!(-1)^{i_1+m+p+q}2^{i_1-i_0+2p}(i_1+p+q)_{j-q}(-i)_{j-m}(a)_{i+m}(a)_{2i_1+2p+2q}(b)_{i+m}}{i_0!j!p_i!(a)_i(b)_j(1-b)_{i_1+p+q}(c)_{i+m}}\times$$
$$\times x^{i_1+p+q}F\left(\frac{a}{2}+i_1+p+q,\frac{a+1}{2}+i_1+p+q;1-b+i_1+p+q;-4x\right)\times$$
$$\times y^{i+m}F(a+i+m,b+i+m;c+i+m;y), \quad (129)$$

$$H_6(a,b;c;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i_0}\sum_{m=0}^{i}\sum_{q=0}^{j}\binom{i_0}{p}\binom{i}{m}\binom{j}{q}\times$$
$$\times\frac{p!(-1)^{i+i_1+m+p+q}2^{i_1-i_0+2p}(i_1+p+q)_{j-q}(j+m)_{i-m}(a)_{2i_1+2p+2q}(b)_{j+m}(c)_{j+m}}{i_0!j!p_i!(a)_i(b)_j(1-a)_{j+m}(1-b)_{i_1+p+q}}\times$$
$$\times x^{i_1+p+q}F\left(\frac{a}{2}+i_1+p+q,\frac{a+1}{2}+i_1+p+q;1-b+i_1+p+q;-4x\right)\times$$
$$\times y^{j+m}F(b+j+m,c+j+m;1-a+j+m;-y), \quad (130)$$

$$H_7(a,b,c;d;x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i_0}\sum_{q=0}^{i}\binom{i_0}{p}\binom{i}{q}\frac{p!(-1)^{i+q}2^{i_1-i_0+2p}(q)_{i-q}(a)_{2i_1+2p}(b)_q(c)_q}{i_0!p_i!(a)_i(1-a)_q(d)_{i_1+p}}\times$$
$$\times x^{i_1+p}y^qF\left(\frac{a}{2}+i_1+p,\frac{a+1}{2}+i_1+p;d+i_1+p;4x\right)F(b+q,c+q;1-a+q;-y), \quad (131)$$

$$\Gamma_1(a,b,c;x,y)==\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p,q=0}^{i,j}\sum_{i,j=0}^{p,q}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(-1)^{p+q}(i+q)_{j-q}(j+p)_{i-p}(a)_{j+p}(b)_{i+q}(c)_{j+p}}{i!j!(b)_i(c)_j(1-b)_{j+p}(1-c)_{i+q}}\times$$
$$\times x^{j+p}y^{i+q}F(a+j+p,c+j+p;1-b+j+p;-x)_1F_1(b+i+q;1-c+i+q;-y), \quad (132)$$

$$\Gamma_2(b,c;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p,q=0}^{i,j}\sum_{i,j=0}^{p,q}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(-1)^{p+q}(i+q)_{j-q}(j+p)_{i-p}(b)_{i+q}(c)_{j+p}}{i!j!(b)_i(c)_j(1-b)_{j+p}(1-c)_{i+q}}\times$$
$$\times x^{j+p}y^{i+q}{}_1F_1(c+j+p;1-b+j+p;-x)_1F_1(b+i+q;1-c+i+q;-y), \quad (133)$$

$$\mathrm{H}_1(a,b;d;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p,q=0}^{i,j}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(-1)^{i+p+q}(-i)_{j-q}(j+p)_{i-p}(a)_{i+q}(b)_{i+q}(b)_{j+p}}{(-1)^{i+p+q}(-i)_{j-q}(j+p)_{i-p}(a)_{i+q}(b)_{i+q}(b)_{j+p}}\times$$
$$\times x^{i+q}y^{j+p}F(a+i+q,b+i+q;d+i+q;x)_1F_1(b+j+p;1-a+j+p;-y), \quad (134)$$

$$\mathrm{H}_2(a,b,c;d;x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{(-1)^{i+k}(k)_{i-k}(b)_i(c)_k}{i!(d)_i(1-a)_k}\times \\ \times x^iy^kF(a+i,b+i;d+i;x)\,{}_1F_1(c+k;1-a+k;-y), \quad (135)$$

$$\mathrm{H}_3(a,b;d;x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{(-1)^{i+k}(k)_{i-k}(b)_i}{i!(1-a)_k(d)_i}\times \\ \times x^iy^kF(a+i,b+i;d+i;x)\,{}_0F_1(1-a+k;-y), \quad (136)$$

$$\mathrm{H}_4(a,b;d;x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{(-1)^{i+k}(k)_{i-k}(b)_k}{i!(1-a)_k(d)_i}\times \\ \times x^iy^k\,{}_1F_1(a+i;d+i;x)\,{}_1F_1(b+k;1-a+k;-y), \quad (137)$$

$$\mathrm{H}_5(a;d;x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{(-1)^{i+k}(k)_{i-k}}{i!(1-a)_k(d)_i}x^iy^k\,{}_1F_1(a+i;d+i;x)\,{}_0F_1(1-a+k;-y), \quad (138)$$

$$\mathrm{H}_6(a;c;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i_0}\sum_{m,q=0}^{j}\binom{i_0}{p}\binom{j}{m}\binom{j}{q}\times \\ \times\frac{p!2^{2p+i_1-i_0}(i+q)_{j-q}(i_1+m+p)_{j-m}(a)_{2i_1+2m+2p}(a)_{i+q}}{i_0!j!p_i!(a)_i(c)_{i+q}(1-c)_j(c)_{i_1+m+p}}\times \\ \times F\left(\frac{a}{2}+i_1+m+p,\frac{a+1}{2}+i_1+m+p;c+i_1+m+p;4x\right)\times \\ \times x^{i_1+m+p}y^{i+q}\,{}_1F_1(a+i+q;c+i+q;y), \quad (139)$$

$$\mathrm{H}_7(a;d,e;x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i_0}\binom{i_0}{p}\frac{p!2^{2p+i_1-i_0}(a)_{2i_1+2p}}{i_0!p_i!(d)_{i_1+p}(e)_i}x^{i_1+p}y^i\times \\ \times F\left(\frac{a}{2}+i_1+p,\frac{a+1}{2}+i_1+p;d+i_1+p;4x\right){}_1F_1(a+i;e+i;y), \quad (140)$$

$$\mathrm{H}_8(a;c;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i_0}\sum_{m,q=0}^{i,j}\binom{i_0}{p}\binom{i}{m}\binom{j}{q}\times \\ \times\frac{p!(-1)^{i+i_1+m+p+q}2^{2p+i_1-i_0}(j+m)_{i-m}(i_1+p+q)_{j-q}(a)_{2i_1+2p+2q}(b)_{j+m}}{i_0!j!p_i!(a)_i(b)_j(1-a)_{j+m}(1-b)_{i_1+p+q}}\times \\ \times x^{i_1+p+q}F\left(\frac{a}{2}+i_1+p+q,\frac{a+1}{2}+i_1+p+q;1-b+i_1+p+q;-4x\right)\times \\ \times y^{j+m}\,{}_1F_1(b+j+m;1-a+j+m;-y), \quad (141)$$

$$\mathrm{H}_9(a,b;d;x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i_0}\sum_{m=0}^{i}\binom{i_0}{p}\binom{i}{m}\frac{p!(-1)^{i+m}2^{i_1-i_0+2p}(m)_{i-m}(a)_{2i_1+2p}(b)_m}{i_0!p_i!(a)_i(1-a)_m(d)_{i_1+p}}\times \\ \times x^{i_1+p}y^mF\left(\frac{a}{2}+i_1+p,\frac{a+1}{2}+i_1+p;d+i_1+p;4x\right){}_1F_1(b+m;1-a+m;-y), \quad (142)$$

$$\mathrm{H}_{10}(a;d;x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i_0}\sum_{m=0}^{i}\binom{i_0}{p}\binom{i}{m}\frac{p!(-1)^{i+m}2^{i_1-i_0+2p}(m)_{i-m}(a)_{2i_1+2p}}{i_0!p_i!(a)_i(1-a)_m(d)_{i_1+p}}\times$$
$$\times x^{i_1+p}y^mF\left(\frac{a}{2}+i_1+p,\frac{a+1}{2}+i_1+p;d+i_1+p;4x\right){}_0F_1(1-a+m;-y),\quad(143)$$

$$\mathrm{H}_{11}(a,b,c;d;x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i}\binom{i}{p}\frac{(-1)^{i+p}(p)_{i-p}(b)_p(c)_p}{i!(1-a)_p(d)_i}\times$$
$$\times x^iy^p{}_1F_1(a+i;d+i;x)F(b+p,c+p;1-a+p;-y).\quad(144)$$

Проведя аналогичные выкладки над некоторыми из обратных символических форм (83)–(105), получим следующие формулы обратного разложения, т.е. разложения, которые выражаются через гипергеометрическую функцию двух переменных:

$$F(a,c;1-b;-x)F(a,b;1-c;-y)=$$
$$=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\sum_{m,n=0}^{k}\sum_{p,q=0}^{i,j}\binom{k}{m}\binom{k}{n}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(i+m+p)_{k-m}(j+n+q)_{k-n}}{i!j!k!}\times$$
$$\times\frac{(i+p)_{i-p}(j+q)_{j-q}(a)_{i+j+m+n+p+q}(b)_{-i+j-p+q-m+n}(c)_{i-j+p-q+m-n}}{(1-c)_i(1-b)_j(1-a)_k}x^{i+m+p}y^{i+n+q}\times$$
$$\times G_1(a+i+j+m+n+p+q,b-i+j-p+q-m+n,c+i-j+m-n+p-q;x,y),\quad(145)$$

$$F(a,d;1-c;-x)F(b,c;1-d;-y)=$$
$$=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p,q=0}^{i,j}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(j+p)_{i-p}(i+q)_{j-q}(a)_{i+q}(b)_{j+p}(c)_{j-i+p-q}(d)_{i-j+q-p}}{i!j!(1-c)_i(1-d)_j}\times$$
$$\times x^{j+p}y^{i+q}G_2(a+j+p,b+i+q,c+i-j+q-p,d-i+j+p-q;x,y),\quad(146)$$

$$F(a,b;d;x)F(b,c;1-a;y)=$$
$$=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\sum_{p,q=0}^{i,j}\binom{j}{k}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(-1)^q(k)_{j-k}(k+p)_{i-p}(i+q)_{j-q}(a)_{k-i+p-q}(b)_{k+i+p+q}(c)_{i+q}}{i!j!(1-a)_i(1-b)_j(d)_{k+p}}\times$$
$$\times x^{k+p}y^{i+q}H_1(a-i+k+p-q,b+i+k+p+q,c+i+q;d+k+p;x,-y),\quad(147)$$

$$F(a,b;e;x)F(c,d;1-a;y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p,q=0}^{i}\binom{i}{p}\binom{i}{q}\frac{(-1)^q(p)_{i-p}(q)_{i-q}(a)_{p-q}(b)_p(c)_q(d)_q}{i!(1-a)_i(e)_p}\times$$
$$\times x^py^qH_2(a+p-q,b+p,c+q,d+q;e+p;x,y),\quad(148)$$

$$F(a,c;1-b;x){}_1F_1(b;1-c;y)=$$
$$=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p,q=0}^{i,j}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(-1)^{p+q}(i+q)_{j-q}(j+p)_{i-p}(a)_{i+q}(b)_{j-i+p-q}(c)_{i-j+q-p}}{i!j!(1-b)_i(1-c)_j}\times$$
$$\times x^{i+q}y^{j+p}\Gamma_1(a+i+q,b+j-i+p-q,c+i-j+q-p;-x,-y),\quad(149)$$

$$
{}_1F_1(c;1-b;x)\,{}_1F_1(b;1-c;y)=
$$
$$
=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p,q=0}^{i,j}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(-1)^{p+q}(i+q)_{j-q}(j+p)_{i-p}(b)_{j-i+p-q}(c)_{i-j+q-p}}{i!j!(1-b)_i(1-c)_j}\times
$$
$$
\times\, x^{i+q}y^{j+p}\Gamma_2(b+j-i+p-q,c+i-j+q-p;-x,-y), \quad (150)
$$

$$
F(a,b;d;x)\,{}_1F_1(b;1-a;y)=
$$
$$
=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\sum_{p,q=0}^{i,j}\binom{j}{k}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(-1)^{q}(k)_{j-k}(k+p)_{i-p}(i+q)_{j-q}(a)_{k-i+p-q}(b)_{k+i+p+q}}{i!j!(1-a)_i(1-b)_j(d)_{k+p}}\times
$$
$$
\times\, x^{k+p}y^{i+q}\mathrm{H}_1(a-i+k+p-q,b+i+k+p+q;d+k+p;x,-y), \quad (151)
$$

$$
F(a,b;d;x)\,{}_1F_1(c;1-a;y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{(k)_{i-k}(a)_{k-i}(b)_k(c)_i}{i!(1-a)_i(d)_k}\times
$$
$$
\times\, x^k y^i\mathrm{H}_2(a-i+k,b+k,c+i;d+k;x,-y), \quad (152)
$$

$$
F(a,b;d;x)\,{}_0F_1(1-a;y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{(k)_{i-k}(a)_{k-i}(b)_k}{i!(1-a)_i(d)_k}\times
$$
$$
\times\, x^k y^i\mathrm{H}_3(a-i+k,b+k;d+k;x,-y), \quad (153)
$$

$$
{}_1F_1(a;d;x)\,{}_1F_1(b;1-a;y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{(k)_{i-k}(a)_{k-i}(b)_i}{i!(1-a)_i(d)_k}\times
$$
$$
\times\, x^k y^i\mathrm{H}_4(a-i+k,b+i;d+k;x,-y), \quad (154)
$$

$$
{}_1F_1(a;d;x)\,{}_0F_1(1-a;y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{(k)_{i-k}(a)_{k-i}}{i!(1-a)_i(d)_k}\; x^k y^i\mathrm{H}_5(a-i+k;d+k;x,-y), \quad (155)
$$

$$
{}_1F_1(a;d;x)\,F(b,c;1-a;y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{(k)_{i-k}(a)_{k-i}(b)_i(c)_i}{i!(1-a)_i(d)_k}\times
$$
$$
\times\, x^k y^i\mathrm{H}_{11}(a-i+k,b+i,c+i;d+k;x,-y). \quad (156)
$$

Разложения (122)–(156) могут быть доказаны без использования символических методов, путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x и y в обеих частях.

5. Применение формул разложения. Известно, что фундаментальные решения играют важную роль в исследовании дифференциальных уравнений в частных производных, потому что формулировка и решение многих локальных и нелокальных краевых задач основаны на этих решениях. Более того, например, потенциалы простого и двойного слоев выписываются с помощью этих фундаментальных решений.

Рассмотрим уравнение

$$
\sum_{i=1}^{m}u_{x_ix_i}+\frac{2\alpha}{x_1}u_{x_1}+\lambda^2u=0 \quad (157)
$$

в области $\mathbb{R}_m^+=\{(x_1,\dots,x_m):x_1>0\}$, где $m>2$ — размерность евклидова пространства; α — действительное постоянное, причем $0<2\alpha<1$; λ — действительное или чисто мнимое постоянное.

Явный вид фундаментальных решений дает возможность подробно исследовать рассматриваемое уравнение. Оказывается, фундаментальные решения уравнения (157) выписываются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию $\mathrm{H}_3(a,b;d;x,y)$, определяемую формулой (35), в следующем виде (см. [19]):

$$q_0(x,\xi)=k_0r^{-2\beta}\mathrm{H}_3(\beta,\alpha;2\alpha;\sigma,\rho),$$
$$q_1(x,\xi)=k_1r^{-2\gamma}x_1^{1-2\alpha}\xi_1^{1-2\alpha}\mathrm{H}_3(\gamma,1-\beta;2-2\beta;\sigma,\rho),$$

где

$$\begin{gathered}\beta=\frac{m-2}{2}+\alpha,\quad k_0=2^{2\beta-m}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\pi^{m/2}\Gamma(2\alpha)},\\ \gamma=\frac{m}{2}-\alpha,\quad k_1=2^{2\gamma-m}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\pi^{m/2}\Gamma(2-2\alpha)};\\ x=(x_1,x_2,\dots,x_m),\quad \xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m),\quad \sigma=1-\frac{r_1^2}{r^2},\quad \rho=\frac{\lambda^2}{4}r^2,\\ r^2=\sum_{k=1}^m(x_k-\xi_k)^2,\quad r_1^2=(x_1-\xi_1)^2+\sum_{k=2}^m(x_k-\xi_k)^2.\end{gathered}\tag{158}$$

Определим порядок особенности фундаментальных решений $q_0(x,\xi)$ и $q_1(x,\xi)$ при $r\to0$. Сначала рассмотрим фундаментальное решение $q_0(x,\xi)$. В силу разложения (136) это фундаментальное решение можно записать в виде

$$q_0(x,\xi)=k_0r^{-2\beta}\sum_{i=0}^\infty\sum_{k=0}^i\binom{i}{k}\frac{(-1)^{i+k}(k)_{i-k}(\alpha)_i}{i!(1-\beta)_k(2\alpha)_i}\times$$
$$\times\sigma^i\lambda^{2k}r^{2k}F(\beta+i,\alpha+i;2\alpha+i;\sigma)_0F_1(1-\beta+k;-\rho).$$

Воспользовавшись формулой (7), получим

$$q_0(x,\xi)=\frac{r_1^{-2\alpha}}{r^{m-2}}\tilde q_0(x,\xi),\tag{159}$$

где

$$\tilde q_0(x,\xi)=k_0\sum_{i=0}^\infty\sum_{k=0}^i\binom{i}{k}\frac{(-1)^{i+k}(k)_{i-k}(\alpha)_i}{i!(1-\beta)_k(2\alpha)_i}\left(\frac{r^2}{r_1^2}-1\right)^i\times$$
$$\times\lambda^{2k}r^{2k}F\left(\alpha-\frac{m-2}{2},\alpha+i;2\alpha+i;1-\frac{r^2}{r_1^2}\right){}_0F_1\left(1-\beta+k;-\frac{\lambda^2}{4}r^2\right).$$

Теперь в $\tilde q_0(x,\xi)$ перейдем к пределу при $r\to0$:

$$\lim_{r\to0}\tilde q_0(x,\xi)=k_0F\left(\alpha-\frac{m-2}{2},\alpha;2\alpha;1\right).$$

Используя формулу суммирования (6) и формулу (158) для определения множителя k_0, получим

$$\lim_{r\to0}\tilde q_0(x,\xi)=2^{2\alpha-2}\pi^{-m/2}\Gamma((m-2)/2).\tag{160}$$

Таким образом, из (159) и (160) заключаем, что фундаментальное решение $q_0(x,\xi)$ уравнения (157) имеет особенность порядка r^{2-m} при $r\to0$.

Аналогично устанавливается, что фундаментальное решение $q_1(x,\xi)$ уравнения (157) имеет такой же порядок особенности при $r\to0$. Кроме того, разложение (107) успешно применялось в [4, 5, 7, 21] при исследовании двойного потенциала для двуосесимметрического уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y=0$$

в первой четверти $\mathbb{R}_2^+=\{(x,y):x>0,\ y>0\}$, где α и β — действительные постоянные, причем $0<2\alpha,2\beta<1$.

В [18, 20] изучены задачи Дирихле и Дирихле—Неймана для пространственного уравнения с двумя сингулярными коэффициентами:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y = 0, \quad 0 < 2\alpha, 2\beta < 1,$$

в первом октанте шара, и именно благодаря разложению (107) авторам удалось выписать решения поставленных задач в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен А., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1973.
2. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Допольнительные главы. — М.: Наука, 1986.
3. *Уринов А. К., Эргашев Т. Г.* Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами// Вестн. Томск. ун-та. Мат. Мех. — 2018. — *55.* — С. 45–56.
4. *Эргашев Т. Г.* Третий потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца// Уфим. мат. ж. — 2018. — *10*, № 4. — С. 111–122.
5. *Эргашев Т. Г.* Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца// Вестн. Томск. ун-та. Мат. Мех. — 2017. — *50.* — С. 45–56.
6. *Appell P. and Kampe de Feriet J.* Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques. Polynomes d'Hermite. — Paris: Gauthier-Villars, 1926.
7. *Berdyshev A. S, Hasanov A., Ergashev T. G.* Double-layer potentials for a generalized biaxially symmetric Helmholtz equation, II// Compl. Var. Elliptic Equations. — 2019. — *65.* — P. 1–17.
8. *Burchnall J. L., Chaundy T. W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions// Q. J. Math. Oxford. — 1940. — *11.* — P. 249–270.
9. *Burchnall J. L., Chaundy T. W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions, II// Q. J. Math. Oxford. — 1941. — *12.* — P. 112–128.
10. *Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher Transcendental Functions. Vol. I. — New York–Toronto–London: McGraw-Hill, 1953.
11. *Ergashev T. G.* On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients// Comput. Math. Appl. — 2019. — *77.* — P. 69–76.
12. *Ergashev T. G., Hasanov A.* Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation// Uzbek Math. J. — 2018. — *1.* — P. 55–64.
13. *Exton H.* On certain confluent hypergeometric functions of three variables// Ganita — 1970. — *21*, № 2. — P. 79–92.
14. *Hasanov A.* Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation// Compl. Var. Elliptic Equations. — 2007. — *52*, № 8. — P. 673–683.
15. *Horn J.* Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen// Math. Ann. — 1889. — *34.* — P. 544–600.
16. *Horn J.* Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen// Math. Ann. — 1931. — *105.* — P. 381–407.
17. *Jain R. N.* The confluent hypergeometric functions of three variables// Proc. Natl. Acad. Sci. India Sect. A. — 1966. — *36.* — P. 395–408.
18. *Karimov E. T., Nieto J. J.* The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients// Comput. Math. Appl. — 2011. — *62.* — P. 214–224.
19. *Mavlyaviev R. M., Garipov I. B.* Fundamental solution of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation// Compl. Var. Elliptic Equations. — 2016. — *62*, № 3. — P. 287–296.
20. *Salakhitdinov M. S., Karimov E. T.* Spatial boundary problem with the Dirichlet-Neumann condition for a singular elliptic equation// Appl. Math. Comput. — 2012. — *219.* — P. 3469–3476.
21. *Srivastava H. M., Hasanov A., Choi J.* Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation// Sohag J. Math. — 2015. — *2*, № 1. — P. 1–10.
22. *Srivastava H. M., Karlsson P. W.* Multiple Gaussian Hypergeometric Series. — New York: Halsted Press, 1985.

23. *Srivastava H. M., Manocha H. L.* A Treatise on Generating Functions. — New York: Halsted Press, 1984.

Эргашев Тухтасин Гуламжанович
Институт математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Ташкент
E-mail: ergashev.tukhtasin@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 201 (2021). С. 98–102
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-201-98-102

УДК 517.928.2

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

© 2021 г. **Д. А. ТУРСУНОВ, К. Г. КОЖОБЕКОВ**

Аннотация. В работе обобщенным методом пограничных функций построено полное равномерное асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи Неймана для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку на границе заданного отрезка.

Ключевые слова: задача Неймана, асимптотическое решение, пограничная функция, бисингулярная задача, нерегулярная особая точка, обобщенный метод пограничных функций, сингулярное возмущение.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE NEUMANN PROBLEM WITH AN IRREGULAR SINGULAR POINT

© 2021 **D. A. TURSUNOV, K. G. KOZHOBEKOV**

Abstract. Using the generalized method of boundary-layer functions, we construct a complete uniform asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed Neumann problem for a second order, linear, inhomogeneous ordinary differential equation in the case where the corresponding unperturbed equation has an irregular singular point on the boundary of the segment.

Keywords and phrases: Neumann problem, asymptotic solution, boundary-layer function, bisingular problem, irregular singular point, generalized method of boundary-layer functions, singular perturbation.

AMS Subject Classification: 34E20

1. Введение. Дифференциальные уравнения с особыми точками возникают во многих математических моделях физики, техники, биологии, океанологии и в других областях науки (см. [2,4,8]). Дифференциальные уравнения с особыми точками исследованы в работах многих авторов, в частности, в [1–7,9]. На практике обычно для построения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач с особыми точками исследователи применяют много разных методов, например, метод сращивания (метод согласования) (см. [2]) или метод регуляризации С. А. Ломова (см. [4]). Но до сих пор в таких исследованиях не применяли метод пограничных функций.

Нами предлагается аналог метода пограничных функций (см. [3,5–7]), с помощью которого нам удалось построить полные, равномерные асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач с особыми точками. Здесь развиваем предлагаемый нами метод для построения асимптотического решения задачи Неймана, когда соответствующее невозмущенное дифференциальное уравнение имеет нерегулярную особую точку на границе заданного отрезка.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача Неймана

$$\varepsilon y''_\varepsilon(x) - x^3 p(x) y'_\varepsilon(x) - q(x) y_\varepsilon(x) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

$$y'_\varepsilon(0) = a, \quad y'_\varepsilon(1) = b, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр, $p(x), q(x) > 0$, $x \in [0,1]$, $p, q, f \in C^\infty[0,1]$, a, b — постоянные.

Задача Неймана (1), (2) однозначно разрешима. В работе будет построено асимптотическое разложение решения этой задачи при $\varepsilon \to 0$. Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что малый параметр ε присутствует при старшей производной, и соответствующее невозмущенное уравнение

$$x^3 p(x) y'_0(x) + q(x) y_0(x) = -f(x)$$

имеет нерегулярную особую точку при $x = 0$.

3. Построение формального асимптотического решения. Так как соответствующее невозмущенное уравнение имеет особую точку $x = 0$, то постоянную интегрирования выберем так, чтобы $y_0(x) \in C^\infty[0,1]$ (см. [3, 5–7]). В данном случае решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет вид

$$y_0(x) = -\frac{f(x)}{q(x)} + e^{-Q(x)} \int_0^x \left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)} ds,$$

где

$$Q(x) = \int_1^x \frac{q(t)}{t^3 p(t)} dt.$$

Отметим, что данное нулевое решение $y_0(x)$ не удовлетворяет заданным краевым условиям (2).

Асимптотическое решение задачи Неймана (1), (2) будем искать в виде

$$y_\varepsilon(x) = V_\varepsilon(x) + \Pi_\mu(t) + Z_\varepsilon(\tau), \tag{3}$$

где

$$V_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k v_k(x), \quad \Pi_\mu(t) = \sum_{k=0}^\infty \mu^k \pi_k(t), \quad t = x/\mu,$$

$$Z_\varepsilon(\tau) = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k z_k(\tau), \quad \tau = (1-x)/\varepsilon, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon}.$$

Вычисляя $y'_\varepsilon(x)$ и $y''_\varepsilon(x)$, имеем:

$$y'_\varepsilon(x) = V'_\varepsilon(x) + \frac{1}{\mu}\Pi'_\mu(t) - \frac{1}{\varepsilon} Z'_\varepsilon(\tau), \quad y''_\varepsilon(x) = V''_\varepsilon(x) + \frac{1}{\mu^2}\Pi''_\mu(t) + \frac{1}{\varepsilon^2} Z''_\varepsilon(\tau). \tag{4}$$

Подставляя соотношения (4) и (3) в дифференциальное уравнение (1), получаем:

$$\varepsilon V''_\varepsilon(x) - x^3 p(x) V'_\varepsilon(x) - q(x) V_\varepsilon(x) = f(x). \tag{5}$$

Потребуем, чтобы функции $v_k(x)$ удовлетворяли условию $v_k(x) \in C^\infty[0,1]$. Для функции $\Pi_\mu(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$\Pi''_\mu(t) - \mu^2 t^3 p(\mu t) \Pi'_\mu(t) - q(\mu t) \Pi_\mu(t) = 0. \tag{6}$$

Потребуем, чтобы функции $\pi_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, удовлетворяли следующим условиям:

$$\pi'_{2k}(0) = 0, \quad \pi'_1(0) = a - v'_0(0), \quad \pi'_{2k+3}(0) = -v'_{k+1}(0), \quad \lim_{t\to\infty} \pi'_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \ldots$$

Для $Z_\varepsilon(\tau)$ имеем дифференциальное уравнение

$$Z''_\varepsilon(\tau) + (1-\varepsilon\tau)^3 p(1-\varepsilon\tau) Z'_\varepsilon(\tau) - \varepsilon q(1-\varepsilon\tau) Z_\varepsilon(\tau) = 0 \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$z'_0(0) = 0, \quad z'_1(0) = v'_0(1) - b, \quad z'_{k+2}(0) = v'_{k+1}(1), \quad \lim_{\tau\to\infty} z'_k(\tau) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Из равенства (5) получаем:

$$x^3p(x)v_0'(x)+q(x)v_0(x)=-f(x), \tag{8}$$

$$x^3p(x)v_k'(x)+q(x)v_k(x)=v_{k-1}''(x), \quad k\in\mathbb{N}, \tag{9}$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Интегрируя дифференциальные уравнения первого порядка с условием $v_k(x)\in C^\infty[0,1]$, имеем:

$$v_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int\limits_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds; \quad v_0\in C^\infty[0,1],$$

$$v_k(x)=\frac{v_{k-1}''(x)}{q(x)}-e^{-Q(x)}\int\limits_0^x\left(\frac{v_{k-1}''(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds, \quad v_k\in C^\infty[0,1], \quad k\in\mathbb{N},$$

где

$$Q(x)=\int\limits_1^x\frac{q(t)}{t^3p(t)}dt.$$

Перейдем к задаче (6). Для $\pi_k(t)$ имеем следующие задачи:

$$\pi_0''(t)-q(0)\pi_0(t)=0, \quad t\in(0,\infty), \quad \pi_0'(0)=0, \quad \lim_{t\to\infty}\pi_0'(t)=0; \tag{10}$$

$$\pi_1''(t)-q(0)\pi_1(t)=0, \quad t\in(0,\infty), \quad \pi_1'(0)=a-v_0'(0), \quad \lim_{t\to\infty}\pi_1'(t)=0; \tag{11}$$

$$\pi_k''(t)-q(0)\pi_k(t)=G_k(t,\pi_0,\pi_0',\dots,\pi_{k-1},\pi_{k-1}'), \quad t\in(0,\infty), \quad \lim_{t\to\infty}\pi_k'(t)=0, \quad 1<k\in\mathbb{N}, \tag{12}$$

$$\pi_k'(0)=-v_n'(0)\text{ при }k=2n+1, \quad \pi_k'(0)=0\text{ при }k=2n, \quad n\in\mathbb{N},$$

где правые части $G_k(t,\pi_0,\pi_0',\dots,\pi_{k-1},\pi_{k-1}')$ линейно зависят от предыдущих $\pi_0,\pi_1,\dots,\pi_{k-1}$, также линейно зависят от производных этих функции и полиномиально от t.

Задачи (10), (11), (12) имеют единственные решения, представимые следующим образом:

$$\pi_0(t)\equiv 0, \quad \pi_1(t)=-\frac{a-v_0'(0)}{\sqrt{q(0)}}e^{-\sqrt{q(0)}t},$$

$$\pi_{2k+1}(t)=\frac{v_k'(0)}{\sqrt{q(0)}}e^{-\sqrt{q(0)}t}+te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k}(t), \quad \pi_{2k}(t)=te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k-1}(t), \quad k\in\mathbb{N},$$

где $H_k(t)$ — полиномиальная функция, $\pi_k(t)\in C^\infty[0,\infty)$, $k\in\mathbb{N}_0$.

Теперь переходим к задаче (7):

$$\begin{cases} z_0''(\tau)+p(1)z_0'(\tau)=0, & \tau\in(0,\infty),\\ z_0'(0)=0, \quad \lim\limits_{\tau\to\infty}z_0'(\tau)=0; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} z_1''(\tau)+p(1)z_1'(\tau)=q(1)z_0(\tau)+(3-p'(1))\tau z_0'(\tau), & \tau\in(0,\infty),\\ z_1'(0)=v_0'(1)-b, \quad \lim\limits_{\tau\to\infty}z_1'(\tau)=0; \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} z_k''(\tau)+p(1)z_k'(\tau)=\widetilde{G}_k(\tau,z_0,z_0',\dots,z_{k-1},z_{k-1}'), & \tau\in(0,\infty),\\ z_{k+1}'(0)=v_k'(1), \quad \lim\limits_{\tau\to\infty}z_{k+1}'(\tau)=0, \quad k\in\mathbb{N}; \end{cases} \tag{15}$$

где правые части $\widetilde{G}_k(\tau,z_0,z_0',\dots,z_{k-1},z_{k-1}')$ тоже линейно зависят от предыдущих $z_0,z_1,\dots,z_{k-1}$, от производных первого порядка этих функций и полиномиально зависят от τ.

Задачи (13), (14), (15) имеют единственные решения (см. [2]), представимые в виде

$$z_0(\tau)\equiv 0, \quad z_1(\tau)=\frac{v_0'(1)-b}{p(1)}e^{-p(1)\tau},$$

$$z_{k+1}(\tau)=-\frac{v_k'(1)}{p(1)}e^{-p(1)\tau}+\tau e^{-p(1)\tau}\widetilde{H}_k(\tau), \quad k\in\mathbb{N},$$

где $\widetilde{H}_k(\tau)$ — полиномы. Заметим, что $z_k(\tau) \in C^\infty[0,\infty)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

4. Оценка остаточного члена. Пусть

$$y_\varepsilon(x) = V_{\varepsilon,m}(x) + \Pi_{\mu,2m}(t) + Z_{\varepsilon,m}(\tau) + R_{\varepsilon,m}(x),$$

где

$$V_{\varepsilon,m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k v_k(x), \quad \Pi_{\mu,2m}(t) = \sum_{k=0}^{2m} \mu^k \pi_k(t), \quad Z_{\varepsilon,m}(\tau) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k z_k(\tau),$$

$R_{\varepsilon,m}(x)$ — остаточная функция. Тогда для остаточной функций получим краевую задачу Неймана:

$$\varepsilon R''_{\varepsilon,m}(x) - x^3 p(x) R'_{\varepsilon,m}(x) - q(x) R_{\varepsilon,m}(x) = O(\varepsilon^{m+1/2}), \quad \varepsilon \to 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{16}$$

$$R'_{\varepsilon,m}(0) = O(e^{-1/\varepsilon}), \quad R'_{\varepsilon,m}(1) = O(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}), \quad \varepsilon \to 0. \tag{17}$$

Для решения задачи Неймана (16)—(17), применяя принцип максимума (см. [2, 10]), получаем оценку

$$R_{\varepsilon,m}(x) = O(\varepsilon^{m+1/2}), \quad \varepsilon \to 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Асимптотическое решение задачи Неймана* (1), (2) *при* $\varepsilon \to 0$ *представимо в следующем виде*:

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau),$$

а также справедливо предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(x) = y_0(x), \quad x \in (0,1).$$

5. Заключение. Методом пограничных функций построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Неймана для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное дифференциальное уравнение имеет нерегулярную особую точку. Получена оценка для остаточного члена асимптотического разложения решения задачи Неймана. Построенное разложение является асимптотическим в смысле Эрдейи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В. Ф.* Асимптотика погранслойного решения стационарной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения// Мат. сб. — 2019. — *210*, № 11. — С. 76–102.
2. *Ильин А. М., Данилин А. Р.* Асимптотические методы в анализе. — М.: Физматлит, 2009.
3. *Кожобеков К. Г., Турсунов Д. А.* Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2019. — *29*, № 3. — С. 332–340.
4. *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011.
5. *Турсунов Д. А.* Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем// Изв. вузов. Мат. — 2018. — *3*. — С. 70–78.
6. *Турсунов Д. А.* Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений»// Вестн. Томск. ун-та. Мат. Мех. — 2018. — *54*. — С. 46–57.
7. *Турсунов Д. А., Алымкулов К., Азимов Б. А.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Дирихле со слабой особой точкой// Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Мат. модел. програм. — 2018. — *10*, № 1. — С. 21–26.
8. *Ширяев О. Б.* Асимптотическая теория пондеромоторной динамики электрона в поле сфокусированного релятивистски интенсивного электромагнитного волнового пакета// Квант. электрон. — 2019. — *49*, № 10. — С. 936–946.
9. *Alymkulov K., Tursunov D. A., Azimov B. A.* Generalized method of boundary layer function for bisingularly perturbed differential Cole equation// Far East J. Math. Sci. — 2017. — *101*, № 3. — P. 507–516.

10. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum Principles in Differential Equations. — New Jersey: Prentice Hall, 1967.
11. *Wasow W.* Linear Turning Point Theory. — New York: Springer-Verlag, 1985.

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович
Ошский государственный университет, Ош, Киргизия
E-mail: `tdaosh@gmail.com`

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич
Ошский государственный университет, Ош, Киргизия
E-mail: `kudayberdi.kozhobekov@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 201 (2021). С. 103–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-201-103-106

УДК 515.12, 515.17

ЛОКАЛЬНАЯ τ-ПЛОТНОСТЬ СУММЫ И СУПЕРРАСШИРЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

© 2021 г. **Ф. Г. МУХАМАДИЕВ**

Аннотация. В статье изучена плотность и локальная плотность суперрасширения топологических пространств. Показано, что если X_α — локально τ-плотное пространство для каждого $\alpha \in A$, то $X = \bigoplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — также локально τ-плотное пространство. Также доказано, что для любого бесконечного T_1-пространства неравенство $ld(\lambda_c X) \leqslant ld(X)$ всегда верно.

Ключевые слова: топологическое пространство, локальная плотность, сепарабельность, суперрасширение, кардинальное число.

LOCAL τ-DENSITY OF THE SUM AND THE SUPEREXTENSION OF TOPOLOGICAL SPACES

© 2021 **F. G. MUKHAMADIEV**

Abstract. In this paper, we study the density and the local density of the superextension of topological spaces. We prove that if X_α is a locally τ-dense space for each $\alpha \in A$, then $X = \bigoplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ is also a locally τ-dense space. We also prove that for any infinite T_1-space, the inequality $ld(\lambda_c X) \leqslant ld(X)$ is always valid.

Keywords and phrases: topological space, local density, separability, superextension, cardinal number.

AMS Subject Classification: 54B20, 54A25

1. Введение. Система $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств пространства X называется *сцепленной*, если любые два элемента из ξ пересекаются. Всякая сцепленная система может быть дополнена до максимальной сцепленной системы (МСС), но такое дополнение, как правило, не однозначно (см. [3]).

Предложение 1 (см. [3]). *Сцепленная система ξ пространства X является максимальной тогда и только тогда, когда она обладает следующим свойством полноты: если замкнутое множество $A \subset X$ пересекается с каждым элементом из ξ, то $A \in \xi$.*

Обозначим через λX множество всех МСС пространства X. Для замкнутого множества $A \subset X$ положим

$$A^+ = \Big\{\xi \in \lambda X : A \in \xi\Big\}.$$

Для открытого множества $U \subset X$ положим

$$O(U) = \Big\{\xi \in \lambda X : \text{ существует такое } F \in \xi, \text{ что } F \subset U\Big\}.$$

Семейство множеств вида $O(U)$ покрывает множество $\lambda X (O(X) = \lambda X)$. Поэтому оно образует открытую предбазу топологии на λX. Множество λX, снабженное этой топологией, называется *суперрасширением* пространства X.

Определение 1 (см. [2]). Пусть X — топологическое пространство, λX — его суперрасширение. МСС $\xi \in \lambda X$ назовем *компактной* и обозначим через КМСС, если она содержит хотя бы один компактный элемент F.

Определение 2 (см. [2]). *Компактным суперядром* (или *компактным суперрасширением*) топологического пространства X назовем пространство

$$\lambda_c X = \Big\{\xi \in \lambda X : \xi - \text{КМСС}\Big\}.$$

Ясно, что пространство $\lambda_c X$ является подпространством пространства λX.

Определение 3 (см. [2]). Топологическое пространство X назовем *суперкомпактным*, если $\lambda_c X = \lambda X$.

Вербек доказал (см. [6]), что $d(\lambda X) \leqslant d(X)$ для любого нормального пространства X.

Пусть задано семейство $\{X_s\}_{s\in S}$ попарно непересекающихся топологических пространств, т.е. $X_S \cap X_{S'} = \varnothing$ для $s \neq s'$. Рассмотрим множество

$$X = \bigcup_{s\in S} X_s$$

и семейство τ всех таких множеств $U \subset X$, что $U \cap X_s$ открыто в X_s для каждого $s \in S$. Легко видеть, что семейство τ удовлетворяет условиям определений 1—3 и потому определяет некоторую топологию на множестве X. Множество X с этой топологией называется *суммой пространств* $\{X_s\}_{s\in S}$ и обозначается

$$\bigoplus_{s\in S} X_s$$

или $X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k$, если $S = \{1, 2, \ldots, k\}$ (см. [4]).

Приведем основные (см., например, [4]) факты о плотности пространства.

Предложение 2. *Плотность топологических пространств обладает следующими свойствами*:

D1. *Если Y — всюду плотное подмножество топологического пространства X, то $d(Y) \geqslant d(X)$.*

D2. *Пусть Y — непрерывный образ топологического пространства X. Тогда $d(Y) \leqslant d(X)$.*

D3. *Если Y открыто в X, то $d(Y) \leqslant d(X)$.*

D4. *Теорема Хьютта—Марчевского—Пондицери*: *если $d(X_s) \leqslant \tau$ для каждого $s \in S$ и $|S| \leqslant 2^\tau$, то*

$$d\bigg(\prod_{s\in S} X_s\bigg) \leqslant \tau.$$

Топологическое пространство X называется *локально сепарабельным*, если оно локально сепарабельно в каждой точке $x \in X$ (см. [4]).

Определение 4 (см. [5]). Топологическое пространство X называется *локально τ-плотным в точке $x \in X$*, если τ — такое наименьшее кардинальное число, что x имеет окрестность плотности τ в X. Топологическое пространство X называется *локально τ-плотным*, если оно локально τ-плотно в каждой точке $x \in X$.

Локальную плотность в точке x обозначим через $ld(x)$. Локальная плотность пространства X обозначается следующим образом:

$$ld(X) = \sup\{ld(x) : x \in X\}.$$

Определение 5 (см. [1]). *Слабой плотностью* топологического пространства X называется такое наименьшее кардинальное число $\tau \geqslant \aleph_0$, что в X существует π-база, распадающаяся на τ центрированных систем открытых множеств, т.е. существует π-база

$$B = \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha,$$

в которой B_α — центрированная система открытых множеств для каждого $\alpha \in A$ и $|A| = \tau$.

Слабая плотность топологического пространства X обозначается через $wd(X)$. Если $wd(X) = \aleph_0$, то топологическое пространство X называется слабо сепарабельным.

Предложение 3 (см. [4])**.** *Если $d(X) = \tau$ и G — произвольное открытое подмножество пространства X, то $d(G) \leqslant \tau$.*

Предложение 4 (см. [1])**.** *Слабая плотность топологических пространств обладает следующими свойствами*:

Wd1. *$wd(X) \leqslant d(X)$ для любого топологического пространства X.*
Wd2. *Пусть Y — непрерывный образ топологического пространства X. Тогда $wd(Y) \leqslant wd(X)$.*
Wd3. *$wd(X) = d(X)$ для любого*
  (a) *локального компакта X;*
  (b) *метрического пространства X;*
  (c) *топологического линейно упорядоченного пространства X.*
Wd4. *Если Y — всюду плотное подмножество топологического пространства X, то $wd(Y) = d(X)$.*
Wd5. *Если Y открыто в X, то $wd(Y) \leqslant wd(X)$.*
Wd6. *Если $wd(X_s) \leqslant \tau$ для каждого $s \in S$ и $|S| \leqslant 2^\tau$, то*

$$wd\Big(\prod_{s\in S} X_s\Big) \leqslant \tau.$$

2. Локальная τ-плотность суммы топологических пространств. Напомним, что множество называется *канонически замкнутым*, если оно является замыканием своей внутренности.

Теорема 1. *Пусть X — локально τ-плотное множество и G — некоторое его подмножество. Предположим, что G удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий*:

(i) *G открыто в X;*
(ii) *G всюду плотно в X;*
(iii) *G канонически замкнуто в X.*

Тогда G также является локально τ-плотным множеством.

Доказательство. (i) Пусть G — непустое открытое подмножество пространства X. Для любой точки $x \in G$ по определению существует окрестность $Ox \subset X$, являющаяся τ-плотной. Тогда $Ox \cap G = O_1x$ — непустое открытое множество в G, содержащее точку x. Так как всякое открытое подмножество τ-плотного пространства τ-плотно, то O_1x является τ-плотным.

(ii) Пусть $M \subset X$ — всюду плотное подмножество пространства X. Рассмотрим произвольную точку $y \in M$. Так как пространство X локально τ-плотно, то существует окрестность $Oy \subset X$ точки y, являющаяся Oy τ-плотной. Рассмотрим $Oy \cap M = O_1y$. Тогда O_1y — непустое открытое подмножество в M. Кроме того, $O_1y \subseteq Oy$ и O_1y всюду плотно в Oy. Так как всякое всюду плотное подмножество τ-плотного пространства τ-плотно (см. предложение 4), то O_1y является τ-плотным.

(iii) Пусть G — канонически замкнутое подмножество пространства X. Тогда существует такое открытое множество U, что $G = [U]$. Тогда в силу п. (i) множество U локально τ-плотно. Возьмем произвольную точку $z \in G$ и τ-плотную окрестность $Oz \subset X$. Тогда $O_1z = Oz \cap G$ — непустое открытое подмножество в G. Рассмотрим множество $V = Oz \cap U$. Так как всякое открытое подмножества τ-плотного пространства τ-плотно, то V является τ-плотным. С другой стороны, V всюду плотно в O_1z. Тогда в силу предложения 4(Wd4) окрестность O_1z точки z является τ-плотной. Теорема 1 доказана. ☐

Предложение 5. *Пусть X_α — локально τ-плотное пространство для каждого $\alpha \in A$. Тогда*

$$X = \bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$$

также локально τ-плотное пространство.

Доказательство. Пусть $x \in X$ — произвольная точка. Тогда существует такой индекс $\alpha \in A$, что $x_\alpha \in X_\alpha$. Так как пространство X_α локально τ-плотно, то существует окрестность $Ox_\alpha \subset X_\alpha$ точки x_α, являющаяся τ-плотной. Так как пространство X_α открыто-замкнуто в X, то Ox_α открыто и τ-плотно в X. Предложение доказано. □

3. Локальная τ-плотность суперрасширения топологического пространства.

Предложение 6. *Пусть X — бесконечное T_1-пространство. Тогда $ld(\lambda_c X) \leqslant ld(X)$.*

Доказательство. Пусть $ld(X) = \tau \geqslant \aleph_0$ и $\xi \in \lambda_c X$. Тогда в $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ существует компактный элемент $F_\alpha \in \xi$. Рассмотрим любой элемент $x_s \in F_\alpha$. Тогда существует такая окрестность Ox_s, что $d(Ox_s) \leqslant \tau$. Рассмотрим $\bigcup\limits_{x_s \in F_\alpha} Ox_s$. Так как F_α — компакт, то существуют такие конечные множества $Ox_{s_1}, Ox_{s_2}, \ldots, Ox_{s_k}$, что

$$F_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{k} Ox_{s_i} = U.$$

Ясно, что $d(U) \leqslant \tau$. Отсюда следует, что $ld(\lambda_c X) \leqslant \tau$. Предложение доказано. □

Следствие 1. *Пусть X — бесконечное компактное множество. Тогда $ld(\lambda X) \leqslant ld(X)$.*

Предложение 7. *Пусть X — бесконечное T_1-пространство и $ld(\lambda_c X) \leqslant \tau \geqslant \aleph_0$. Тогда $ld(X) \leqslant \tau$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Тогда $\{x\}$ компактно. Рассмотрим множество

$$\xi_x = \Big\{F : F \text{ замкнуто и } x \in FB\Big\}.$$

Тогда $\xi_x \in \lambda_c X$. Так как $\{x\}$ компактно, то существует такая окрестность $O(U)$ точки ξ_x, что $d(O(U)) \leqslant \tau$. Пусть $M = \{\xi_\alpha : \alpha \in A\}$, где $|A| \leqslant \tau$ и МСС ξ_α всюду плотно в $O(U)$. Каждое $O(U)$ содержит такое замкнутое подмножество $F_\alpha \in \xi_\alpha$, что $F_\alpha \subset U$ для каждого $\alpha \in A$. Из каждого F_α выберем произвольную точку $x_\alpha \in F_\alpha$. Положим $L = \{x_\alpha : x_\alpha \in F_\alpha \in \xi_\alpha,\ \alpha \in A\}$. Ясно, что $|L| \leqslant \tau$. Пусть L — всюду плотное множество в U, где U — открытое множество в X, содержащее точку x. Пусть $U_1 \subset U$ — произвольное открытое множество. Тогда $O(U_1) \subset O(U)$. Так как $O(U_1)$ — открытое подмножество в $O(U)$, то в силу всюду плотности множество M в $O(U)$ содержит точку $\xi_\alpha \in O(U_1) \cap M$. Благодаря выбору точки $x_\alpha \in U_1$ множество L всюду плотно в U_1, т.е. $ld(X) \leqslant \tau$. Предложение доказано. □

Следствие 2. *Пусть X — бесконечное компактное пространство. Тогда $ld(\lambda X) \geqslant ld(X)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бешимов Р. Б.* О слабой плотности топологических пространств// Докл. АН РУз. — 2000. — *11*. — С. 10–13.
2. *Махмуд Т.* Кардинальнозначные инварианты пространств сцепленных систем/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — М.: МГУ, 1993.
3. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. — М.: Физматлит, 2006.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
5. *Beshimov R. B., Mukhamadiev F. G., Mamadaliev N. K.* The local density and the local weak density of hyperspaces// Int. J. Geom. — 2015. — *4*, № 1. — P. 42–49.
6. *Van Mill J.* Supercompactness and Wallman Spaces. — Amsterdam, 1977.

Мухамадиев Фарход Гафуржанович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: farhod8717@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 201 (2021). С. 107–122
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-201-107-122

УДК 517.955.2

КАРДИНАЛЬНЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА СИММЕТРИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ

© 2021 г. **Р. Б. БЕШИМОВ, Р. М. ЖУРАЕВ**

Аннотация. В работе рассмотрены кардинальные и топологические свойства пространства симметрической степени. Изучены такие топологические характеристики для пространства симметрической степени, как вес, характер, локально слабая плотность, теснота и аксиома отделимости.

Ключевые слова: фактор-топология, открытое отображение, теснота, вес, характер, локально слабая плотность.

CARDINAL AND TOPOLOGICAL PROPERTIES OF THE SPACE OF SYMMETRIC DEGREE

© 2021 **R. B. BESHIMOV, R. M. ZHURAEV**

Abstract. In this paper, we discuss cardinal and topological properties of the space of symmetric degree such as the weight, the character, the locally weak density, the tightness, and the separation axioms.

Keywords and phrases: factor topology, open mapping, tightness, weight, character, locally weak density.

AMS Subject Classification: 35A30, 35C15, 35G55.

1. Постановка задачи. На Пражском топологическом симпозиуме 1981 г. В. В. Федорчук поставил следующие общие проблемы теории ковариантных функторов, определившие новое направление для исследований в области топологии. Пусть P — некоторое геометрическое свойство, а F — некоторый ковариантный функтор. Если топологическое пространство X обладает свойством P, то обладает ли $F(X)$ таким же свойством P? В. В. Федорчук поставил и обратный вопрос: если $F(X)$ обладает свойством P, следует ли из этого, что топологическое пространство X обладает этим свойством P?

Пусть X — бесконечный компакт. Рассмотрим отображение

$$\pi_n \colon X^n \to \exp_n X,$$

ставящее в соответствие точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$ множество ее координат $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Тогда π_n — непрерывное отображение компакта X^n на компакт $\exp_n X$.

Таким образом, гиперсимметрическая n-степень компакта X является факторпространством его n-й степени относительно разбиения, порождаемого следующим отношением эквивалентности: точки $x, y \in X^n$ эквивалентны, если они имеют одинаковые множества координат.

На n-й степени X^n компакта X действует симметрическая группа S_n всех перестановок как группа перестановок координат. Множество орбит этого действия с фактортопологией обозначим через SP^nX. Рассмотрим в качестве факторотображения

$$\pi_n^s\colon X^n \to SP^nX,$$

ставящее в соответствие точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ орбиту этой точки.

Таким образом, точки пространства SP^nX — это конечные подмножества (классы эквивалентности) произведения X^n. При этом две точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ считаются эквивалентными, если существует такая перестановка $\sigma \in S_n$, что $y_i = x_{\sigma(i)}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

В [6] изучены плотность, слабая плотность, калибр, прекалибр, число Шанина, предчисло Шанина для пространства X и для пространства SP^nX. Кроме того, в [10] изучена локальная плотность пространства X и пространства SP^nX.

Пространство SP^nX называется *n-й симметрической степенью* пространства X. Назовем отношения эквивалентности, посредством которых пространства SP^nX и $\exp_n X$ получаются из X^n, соответственно, отношениями *симметрической* и *гиперсимметрической эквивалентности.* Всякие симметрично эквивалентные точки из X^n будут и гиперсимметрично эквивалентны. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Так, для $x \neq y$ точки (x, x, y), $(x, y, y) \in X^3$ гиперсимметрично эквивалентны, но не эквивалентны симметрично.

Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Для класса эквивалентности $[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \in SP^nX$ положим

$$SP^nf[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = [(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))].$$

Тем самым определяем отображение

$$SP^nf\colon SP^nX \to SP^nY.$$

Легко проверить, что построенная таким образом операция SP^n является ковариантным функтором в категории компактов. Этот функтор называется *функтором n-й симметрической степени.* В самом деле, класс симметрической эквивалентности $[(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ однозначно определяет содержащий его класс гиперсимметрической эквивалентности $[(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^{hc}$. Тем самым определяем отображение

$$\pi_n^h\colon SP^nX \to \exp_n X,$$

представляющее функтор $\exp_n$ в качестве факторфунктора функтора SP^n (см. [2]).

В настоящей работе изучаются кардинальные и топологические свойства пространства симметрической степени. Данная работа является дальнейшим развитием работ [4–8].

2. Необходимые понятия и предложения. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *замкнутым* (*открытым*) отображением, если для каждого замкнутого (открытого) множества $A \subset X$ образ $f(A)$ замкнут (открыт) в Y. Отображения, которые одновременно замкнуты и открыты, называются *открыто-замкнутыми* отображениями (см. [3]).

Наименьшее кардинальное число вида $|B|$, где B — база топологического пространства X, называется *весом* топологического пространства X и обозначается через $w(X)$.

Характер точки x в топологическом пространстве X есть наименьшее кардинальное число вида $|B(x)|$, где $B(x)$ — база X в точке x; это кардинальное число обозначается через $\chi(x, X)$. *Характер топологического пространства* X есть точная верхняя грань всех кардинальных чисел $\chi(x, X)$ для $x \in X$; это кардинальное число обозначается через $\chi(X)$.

Теснота точки x в топологическом пространстве X есть наименьшее кардинальное число $\tau \geqslant \aleph_0$, обладающее следующим свойством: если $x \in [C]$, то существует такое $C_0 \subset C$, что $|C_0| \leqslant \tau$ и $x \in [C_0]$. Это кардинальное число обозначается через $t(x, X)$. *Теснота топологического пространства* X есть точная верхняя грань всех чисел $t(x, X)$ для $x \in X$. Это кардинальное число обозначается через $t(X)$ (см. [3]).

Будем говорить, что топологическое пространство X *локально сепарабельно в точке* $x \in X$, если x имеет сепарабельную окрестность. Топологическое пространство X называется *локально сепарабельным*, если оно локально сепарабельно в каждой точке $x \in X$.

Будем говорить, что топологическое пространство X *локально τ-плотно в точке* $x \in X$, если τ — такое наименьшее кардинальное число, что x имеет окрестность плотности τ в X. Локальную плотность в точке $x \in X$ обозначим через $ld(x)$. *Локальная плотность пространства X*

есть точная верхняя грань всех кардинальных чисел $ld(x)$ для $x \in X$. Это кардинальное число обозначим через $ld(X)$:
$$ld(X) = \sup\big\{ld(x) : x \in X\big\}.$$

Топологическое пространство X называется *локально слабо τ-плотным в точке* $x \in X$, если τ — такое наименьшее кардинальное число, что x имеет окрестность слабой плотности τ в X. Локальную слабую плотность в точке $x \in X$ обозначим через $lwd(x)$. *Локальная слабая плотность пространства* X есть точная верхняя грань всех кардинальных чисел $lwd(x)$ для $x \in X$. Это кардинальное число обозначим через $lwd(X)$ (см. [7]):
$$lwd(X) = \sup\big\{lwd(x) : x \in X\big\}.$$

Теорема 1 (см. [3]). *Если $w(X_s) \leqslant \tau$ для каждого $s \in S$ и $|S| \leqslant \tau$, то*
$$w\bigg(\prod_{s\in S} X_s\bigg) \leqslant \tau.$$
Аналогично, если $\chi(X_s) \leqslant \tau$ для каждого $s \in S$ и $|S| \leqslant \tau$, то
$$\chi\bigg(\prod_{s\in S} X_s\bigg) \leqslant \tau.$$

Теорема 2 (см. [3]). *Произведение T_i-пространств всегда есть T_i-пространство при $i \leqslant 3\frac{1}{2}$. Если произведение*
$$\prod_{s\in S} X_s$$
есть непустое T_i-пространство, то все X_s также являются T_i-пространствами при $i \leqslant 6$.

Теорема 3 (см. [3]). *Пусть X — топологическое пространство и Y — подпространство пространства X. Верны следующие неравенства*:

(i) $w(Y) \leqslant w(X)$;
(ii) $\chi(Y) \leqslant \chi(X)$.

Теорема 4 (см. [7]). *Пусть X, Y — топологические T_1-пространства. Если $f\colon X \to Y$ — открытое отображение и $f(X) = Y$, то*
$$ld(Y) \leqslant ld(X), \quad lwd(Y) \leqslant lwd(X).$$

3. Основные результаты.

Теорема 5. *Пусть X есть T_1-пространство. Тогда отображение*
$$\pi_n^s\colon X^n \to SP^nX$$
является открыто-замкнутым.

Доказательство. Сначала покажем открытость отображения π_n^s. Возьмем произвольное открытое подмножество U пространства X^n. Покажем, что множество $\pi_n^s(U)$ открыто в SP^nX. По определению факторпространства достаточно показать, что множество $(\pi_n^s)^{-1}(\pi_n^s(U))$ открыто в X^n. Выберем произвольную точку
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\pi_n^s)^{-1}(\pi_n^s(U));$$
тогда $\pi_n^s(x) \in \pi_n^s(U)$. Отсюда заключаем, что существует такая перестановка $\sigma \in S_n$, что
$$y_i = x_{\sigma(i)} \ \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in U.$$
Тогда существуют такие окрестности $U_1, U_2, \dots, U_n \subset X$ точек $y_1, y_2, \dots, y_n$, что для множества $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \subset U$ имеет место включение
$$\pi_n^s(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) \subset \pi_n^s(U).$$
Рассмотрим след $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$: $V_i \subset X$ таково, что $V_i = U_{\theta(i)}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, где $\theta = \sigma^{-1} \in S_n$. Ясно, что множество V_i открыто в X и $x_i \in V_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Известно, что множество $Ox = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ — окрестность точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В этом случае отображение π_n^s удовлетворяет следующему равенству:

$$\pi_n^s(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) = \pi_n^s(V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n).$$

Имеем

$$\pi_n^s(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) = \pi_n^s(V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n) = \pi_n^s(Ox) \subset \pi_n^s(U).$$

Отсюда следует, что

$$Ox \subset (\pi_n^s)^{-1}(\pi_n^s(U)).$$

Значит, множество $(\pi_n^s)^{-1}(\pi_n^s(U))$ открыто в X^n, т.е. множество $\pi_n^s(U)$ открыто в SP^nX. Таким образом, открытость отображения π_n^s доказана.

Теперь покажем замкнутость отображения π_n^s. Выберем произвольное замкнутое подмножество F пространства X^n. Покажем, что множество $\pi_n^s(F)$ замкнуто в SP^nX. По определению фактор-пространства достаточно показать, что множество $(\pi_n^s)^{-1}(\pi_n^s(F))$ замкнуто в X^n, или множество $X^n \setminus (\pi_n^s)^{-1}(\pi_n^s(F))$ открыто в X^n.

Выберем произвольную точку

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n \setminus (\pi_n^s)^{-1}(\pi_n^s(F));$$

тогда $\pi_n^s(x) \notin \pi_n^s(F)$. Отсюда следует, что для каждой перестановки $\sigma \in S_n$, $y_i = x_{\sigma(i)}$, $y_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеем

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \notin F.$$

Тогда $y \in X^n \setminus F$ и известно, что $X^n \setminus F$ открыто в X^n. В силу открытости множества $X^n \setminus F$ существуют такие окрестности $U_1^\sigma, U_2^\sigma, \ldots, U_n^\sigma \subset X$ точек $y_1, y_2, \ldots, y_n$, что

$$U_1^\sigma \times U_2^\sigma \times \ldots \times U_n^\sigma \subset X^n \setminus F,$$

т.е.

$$(U_1^\sigma \times U_2^\sigma \times \ldots \times U_n^\sigma) \cap F = \varnothing.$$

Рассмотрим системы множеств

$$U_1 = \bigcap_{\sigma \in S_n} U_{\sigma_1}^\sigma, \quad U_2 = \bigcap_{\sigma \in S_n} U_{\sigma_2}^\sigma, \quad \ldots, \quad U_n = \bigcap_{\sigma \in S_n} U_{\sigma_n}^\sigma,$$

где

$$x_1 \in U_{\sigma_1}^\sigma, \quad x_2 \in U_{\sigma_2}^\sigma, \quad \ldots, \quad x_n \in U_{\sigma_n}^\sigma \quad \forall \sigma \in S_n.$$

Тогда множества $U_1, U_2, \ldots, U_n \subset X$ являются окрестностями точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соответственно. Отсюда мы получаем, что

$$\pi_n^s(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) \cap \pi_n^s(F) = \varnothing.$$

Значит,

$$(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) \cap (\pi_n^s)^{-1}(\pi_n^s(F)) = \varnothing.$$

Следовательно,

$$(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) \subset X^n \setminus (\pi_n^s)^{-1}(\pi_n^s(F)).$$

Легко видеть, что множество $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ есть окрестность точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Таким образом, замкнутость отображения π_n^s доказана. $\square$

Теорема 6. *Для любого бесконечного топологического T_1-пространства X верны следующие равенства*:

(i) $w(X) = w(X^n) = w(SP^nX)$;
(ii) $\chi(X) = \chi(X^n) = \chi(SP^nX)$;
(iii) $lwd(X) = lwd(X^n) = lwd(SP^nX)$.

Доказательство. (i) Сначала покажем, что

$$w(SP^nX) \leqslant w(X^n).$$

Предположим, что $w(X^n) = \tau \geqslant \aleph_0$, и пусть семейство $\Im = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ является базой в X^n. Рассмотрим в SP^nX семейство

$$\Im' = \bigl\{\pi_n^s(U_\alpha) : \alpha \in A\bigr\}.$$

Ясно, что $|\Im'| \leqslant \tau$. Покажем, что $\Im'$ является базой в SP^nX. Каждый элемент семейства $\Im'$ является открытым множеством, так как π_n^s есть открытое отображение.

Пусть $y \in SP^nX$ — произвольная точка и G — непустое открытое подмножество в SP^nX, содержащее точку y. Тогда существует такая точка $x \in X^n$, что $y = \pi_n^s(x)$. Множество $(\pi_n^s)^{-1}(G)$ открыто в X^n, так как отображение π_n^s непрерывно. Тогда существует такое $U_\alpha \in \Im$, что $x \in U_\alpha \subset (\pi_n^s)^{-1}(G)$. Отсюда получаем, что

$$y = \pi_n^s(x) \in \pi_n^s(U_\alpha) \subset G.$$

Значит, система $\Im'$ есть база в пространстве SP^nX. Поэтому $w(SP^nX) \leqslant w(X^n)$. В силу теоремы 1 отсюда получаем, что $w(X^n) \leqslant w(X)$.

Докажем обратное неравенство $w(X) \leqslant w(SP^nX)$. Для этого убедимся, что X вложено в SP^nX для всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим подмножество

$$K = \bigl\{[(z, z, \dots, z)] : z \in X\bigr\} \subset SP^nX,$$

где $[(z, z, \dots, z)] = \pi_n^s((z, z, \dots, z))$ для каждой точки $z \in X$. Тогда пространство X — гомеоморфное подпространство K. В качестве гомеоморфизма возьмем отображение $f\colon X \to K$ при $f(z) = [(z, z, \dots, z)]$. Действительно, это отображение является непрерывным и взаимно однозначным. Кроме того, биекция и отображение, обратное данному, тоже непрерывны. Это означает, что X вложено в SP^nX. В силу теоремы 3 имеем $w(X) \leqslant w(SP^nX)$. Следовательно,

$$w(X^n) \leqslant w(X) \leqslant w(SP^nX) \leqslant w(X^n).$$

Отсюда следует, что $w(X) = w(X^n) = w(SP^nX)$. Равенство (i) доказано.

(ii) Сначала покажем, что

$$\chi(SP^nX) \leqslant \chi(X^n). \tag{1}$$

Предположим, что $\chi(X^n) = \tau \geqslant \aleph_0$. Возьмем произвольную точку $y \in SP^nX$. Тогда существует такая точка $x \in X^n$, что $y = \pi_n^s(x)$. Пусть семейство $\Im = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — база X^n в точке x. Рассмотрим семейство

$$\Im' = \bigl\{\pi_n^s(U_\alpha) : \alpha \in A\bigr\} \subset SP^nX.$$

Ясно, что $|\Im'| \leqslant \tau$. Покажем, что $\Im'$ есть база SP^nX в точке y. Каждый элемент семейства $\Im'$ является открытым множеством и содержит точку y, так как отображение π_n^s является открытым. Пусть G — непустое открытое подмножество в SP^nX, содержащее точку y. Тогда множество $(\pi_n^s)^{-1}(G)$ является открытым множеством и содержит точку x. Поэтому существует такое $U_\alpha \in \Im$, что $U_\alpha \subset (\pi_n^s)^{-1}(G)$. Отсюда имеем, что $\pi_n^s(U_\alpha) \subset G$. Значит, система $\Im'$ есть база SP^nX в точке y. В этом случае $\chi(y, SP^nX) \leqslant \tau$ и неравенство (1) выполняется. В силу теоремы 1 имеем

$$\chi(X^n) \leqslant \chi(X).$$

Докажем обратное неравенство. Пространство X вложено в SP^nX для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 3 отсюда получаем, что

$$\chi(X) \leqslant \chi(SP^nX).$$

Следовательно,

$$\chi(X^n) \leqslant \chi(X) \leqslant \chi(SP^nX) \leqslant \chi(X^n).$$

Значит,

$$\chi(X) = \chi(X^n) = \chi(SP^nX).$$

Равенство (ii) доказано.

(iii) Сначала покажем, что

$$lwd(SP^nX) \leqslant lwd(X^n). \tag{2}$$

Рассмотрим отображение $\pi_n^s \colon X^n \to SP^n X$, где $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что отображение π_n^s открыто. Тогда в силу теоремы 4 имеем (2). Докажем обратное неравенство. Отображение $\pi_n^s \colon X^n \to SP^n X$ является конечно кратным, потому что для каждого $y \in SP^n X$ выполняется отношение $|(\pi_n^s)^{-1}(y)| \leqslant n!$. Тогда верно неравенство

$$lwd(X^n) \leqslant lwd(SP^n X).$$

Теперь покажем, что

$$lwd(X^n) \leqslant lwd(X), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Пусть $lwd(X) = \tau \geqslant \aleph_0$; возьмем произвольную точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$, где $x_i \in X$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае существуют такие окрестности $O_1 x_1, O_2 x_2, \ldots, O_n x_n$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, что $wd(O_i x_i) \leqslant \tau$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. В силу аналога теоремы Хьюитта—Марчевского—Пондицери (см. [4]) имеем

$$wd\biggl(\prod_{i=1}^{n} O_i x_i\biggr) \leqslant \tau.$$

Множество $\prod\limits_{i=1}^{n} O_i x_i$ есть окрестность точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, $lwd(X^n) \leqslant \tau$, так как $lwd(x) \leqslant \tau$ для каждой точки $x \in X^n$. Значит, неравенство (3) верно. Докажем обратное неравенство. Ясно, что проекция $\mathrm{pr} \colon X^n \to X$ при $\mathrm{pr}(x) = x_1$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$, является открытым отображением. В силу теоремы 4 имеем, что $lwd(X) \leqslant lwd(X^n)$. Итак, $lwd(X) = lwd(X^n)$. Тогда верно равенство

$$lwd(X) = lwd(X^n) = lwd(SP^n X). \qquad \square$$

Следствие 1. *Для любого бесконечного топологического T_1-пространства X следующие условия равносильны*:

(i) *пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности*;
(ii) *пространство $SP^n X$ удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Следствие 2. *Для любого бесконечного топологического T_1-пространства X следующие условия равносильны*:

(i) *пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности*;
(ii) *пространство $SP^n X$ удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Следствие 3. *Для любого бесконечного топологического T_1-пространства X следующие условия равносильны*:

(i) *X локально сепарабельно*;
(ii) *пространство $SP^n X$ локально сепарабельно.*

Следствие 4. *Для любого бесконечного топологического T_1-пространства X следующие условие равносильны*:

(i) *пространство X локально слабо сепарабельно*;
(ii) *пространство $SP^n X$ локально слабо сепарабельно.*

В 1972 году Малыхин доказал следующую теорему.

Теорема 7 (см. [1]). *Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, то для каждого хаусдорфова пространства Y имеет место неравенство*

$$t(X \times Y) \leqslant \max\{t(X), t(Y)\}.$$

Теорема 8. *Если X — бесконечное локально компактное хаусдорфово пространство, то имеет место равенство*

$$t(X) = t(X^n) = t(SP^n X).$$

Доказательство. Сначала покажем, что
$$t(SP^n X) \leqslant t(X^n).$$
Пусть $t(X^n) = \tau \geqslant \aleph_0$. Покажем, что $t(y, SP^n X) \leqslant \tau$ для каждой точки $y \in SP^n X$. В этом случае существует такая точка $x \in X^n$, что $y = \pi_n^s(x)$. Известно, что $t(x, X^n) \leqslant \tau$, т.е. если $C \subset X^n$ и $x \in [C]$, то существует такое множество $C_0 \subset C$, что
$$|C_0| \leqslant \tau, \quad x \in [C_0].$$
Тогда
$$y = \pi_n^s(x) \in \pi_n^s([C]).$$
В силу замкнутости отображения π_n^s имеем
$$\pi_n^s([C]) = [\pi_n^s(C)], \quad y \in [\pi_n^s(C)].$$
Из $C_0 \subset C$ и $x \in [C_0]$ следует, что
$$\pi_n^s(C_0) \subset \pi_n^s(C), \quad y = \pi_n^s(x) \in \pi_n^s([C_0]) = [\pi_n^s(C_0)].$$
Если $|C_0| \leqslant \tau$, то $|\pi_n^s(C_0)| \leqslant \tau$. Следовательно, $t(y, SP^n X) \leqslant \tau$.

Теперь покажем, что
$$t(X) \leqslant t(SP^n X).$$
Ясно, что пространство X гомеоморфно подпространству K пространства $SP^n X$, где
$$K = \{[(z, z, \ldots, z)] : z \in X\}.$$
Тогда верно равенство $t(X) = t(K)$. Покажем, что
$$t(K) \leqslant t(SP^n X).$$
Пусть $t(SP^n X) = \tau \geqslant \aleph_0$. Покажем, что $t(y, K) \leqslant \tau$ для каждого $y \in K$. Имеем $t(y, X) \leqslant \tau$, так как $y \in K \subset SP^n X$. Если $C \subset SP^n X$ и поскольку $y \in [C]_{SP^n X}$, то существует такое множество $C_0 \subset C$, что
$$|C_0| \leqslant \tau, \quad y \in [C_0]_{SP^n X}.$$
Из определения подпространства следует, что $y \in [C]_K$ и $y \in [C_0]_K$. В этом случае $t(y, K) \leqslant \tau$. Значит, $t(X) \leqslant t(SP^n X)$. Имеем
$$t(X) \leqslant t(X^n).$$
Докажем обратное неравенство при помощи метода математической индукции. В случае $n = 1$ неравенство верно. В случае $n = 2$ верно неравенство $t(X^2) \leqslant t(X)$, так как
$$t(X^2) = t(X \times X) \leqslant \max(t(X), t(X)) = t(X).$$
Предположим, что неравенство $t(X^n) \leqslant t(X)$ верно для $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $t(X^{n+1}) \leqslant t(X)$. Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, то X^n — также локально компактное хаусдорфово пространство. В этом случае
$$t(X^{n+1}) = t(X^n \times X) \leqslant \max(t(X^n), t(X)) = t(X).$$
Так как $t(X) \leqslant t(SP^n X) \leqslant t(X^n) \leqslant t(X)$, то $t(X) = t(X^n) = t(SP^n X)$. □

Пусть X — произвольное бесконечное множество, x_0 — некоторая фиксированная точка в X и θ — семейство, состоящее из всех подмножеств множества X, не содержащих x_0, и всех подмножеств множества X, имеющих конечное дополнение. Легко установить, что (X, θ) — топологическое пространство (см. [3]). Все одноточечные подмножества X, за исключением множества $\{x_0\}$, открыто-замкнуты; множество $\{x_0\}$ замкнуто, но не открыто. Семейство $\Im = \{\{x\} : x \neq x_0\} \cup \{X \setminus F : F \text{ конечно}\}$ образует базу пространства X. Эта база имеет наименьшую мощность, поэтому вес пространства X равен мощности множества X. Для каждого $A \subset X$ имеем $[A] = A$, если A — конечно; $[A] = A \cup \{x_0\}$, если A бесконечно.

Пространство, полученное таким определением из множества мощности $\tau \geqslant \aleph_0$, будем обозначать через $A(\tau)$. Пространство $A(\tau)$ обладают следующими свойствами:

(i) пространство $A(\tau)$ является T_1-пространством;
(ii) пространство $A(\tau)$ является T_4-пространством.

Из определения пространства $A(\tau)$ вытекает, что оно является T_1-пространством. Покажем, что $A(\tau)$ является T_4-пространством. Пусть F_1 и F_2 — произвольные дизъюнктные замкнутые подмножества пространства $A(\tau)$.

1. Если $x_0 \in F_1$, но $x_0 \notin F_2$, то F_2 открыто в $A(\tau)$. Значит, множества $X \setminus F_2$ и F_2 будут окрестностями замкнутых множеств F_1 и F_2 соответственно. Кроме того, множества $X \setminus F_2$ и F_2 не пересекаются.
2. Если $x_0 \notin F_1$, но $x_0 \in F_2$, рассуждаем аналогично случаю 1.
3. Если $x_0 \notin F_1$ и $x_0 \notin F_2$, то множества F_1 и F_2 открыты. Значит, множества F_1 и F_2 будут окрестностями замкнутых множеств F_1 и F_2 соответственно. Известно, что $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

Легко видеть, что пространство $A(\tau)$ является нормальным.

Пример 1. Существуют такие нормальные пространства Y, что $t(Y) < t(Y^2)$. В качестве Y возьмем сумму континуума копий пространства $A(\aleph_0)$, в которой все предельные точки отождествлены, т.е.

$$Y = \bigoplus_{\alpha \in C} A_\alpha(\aleph_0),$$

где $|C| = \aleph_1$ и $A_\alpha(\aleph_0) = A(\aleph_0)$ для каждого $\alpha \in C$ [3].

Семейство $\Re(A)$ открытых подмножеств пространства X называется базой множества A в пространстве X, если все элементы семейства $\Re(A)$ содержат A и для любого открытого множества V, содержащего A, существует такое множество $U \subset \Re(A)$, что $A \subset U \subset V$. Характером множества A в топологическом пространстве X называется наименьшее кардинальное число вида $|\Re(A)|$, где $\Re(A)$ — база множества A в X. Это кардинальное число обозначается так $\chi(A, X)$.

Для любого хаусдорфова пространства X обозначим через $h(X)$ такой наименьший кардинал τ, что, какова бы ни была точка $x \in X$, найдется компакт $F(x) \subset X$, обладающий свойствами $x \in F(x)$ и $\chi(F(x), X) \leqslant \tau$.

Хаусдорфово пространство X называется *пространством точечного счетного типа*, если $h(X) \leqslant \aleph_0$.

Теорема 9. *Пусть X — хаусдорфово пространство, τ — бесконечный кардинал, что $t(X) \leqslant \tau$ и $h(X) \leqslant \tau$. Тогда имеет место равенство*

$$t(X) = t(X^n) = t(SP^n X).$$

Доказательство. Сначала покажем, что $t(X^n) \leqslant t(X)$. По условию теоремы пространство X хаусдорфово. Кроме того, $t(X) \leqslant \tau$ и $h(X) \leqslant \tau$. Следовательно, $t(X^n) \leqslant \tau$. Теперь достаточно показать, что $t(SP^n X) \leqslant t(X^n)$. Допустим, что $t(X^n) = \tau \geqslant \aleph_0$. Покажем, что

$$t(y, SP^n X) \leqslant \tau \quad \forall y \in SP^n X.$$

Существует такая точка $x \in X^n$, что $y = \pi_n^s(x)$. Известно, что $t(x, X^n) \leqslant \tau$. Если $C \subset X^n$ и $x \in [C]$, то существует такое $C_0 \subset C$, что

$$|C_0| \leqslant \tau, \quad x \in [C_0].$$

Тогда $y = \pi_n^s(x) \in \pi_n^s([C])$. В силу замкнутости π_n^s имеем

$$\pi_n^s([C]) = [\pi_n^s(C)], \quad y \in [\pi_n^s(C)].$$

Из соотношений $C_0 \subset C$ и $x \in [C_0]$ следует, что

$$\pi_n^s(C_0) \subset \pi_n^s(C), \quad y = \pi_n^s(x) \in \pi_n^s([C_0]) = [\pi_n^s(C_0)].$$

Если $|C_0| \leqslant \tau$, то $|\pi_n^s(C_0)| \leqslant \tau$. Следовательно, $t(y, SP^n X) \leqslant \tau$. Ясно, что $t(X) \leqslant t(SP^n X)$. Так как X является подпространством $SP^n X$, то теснота наследуется всякому подпространству. Из неравенств

$$t(X) \leqslant t(SP^n X) \leqslant t(X^n) \leqslant t(X)$$

получаем

$$t(X) = t(X^n) = t(SP^n X). \qquad \square$$

Теорема 10. *Пусть X — топологическое пространство. Имеют место следующие факты.*

(i) *Топологическое пространство X является T_1-пространством тогда и только тогда, когда пространство $SP^n X$ есть T_1-пространство.*

(ii) *Топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда пространство $SP^n X$ есть хаусдорфово.*

(iii) *Топологическое пространство X регулярно тогда и только тогда, когда пространство $SP^n X$ регулярно.*

(iv) *Топологическое пространство X вполне регулярно тогда и только тогда, когда пространство $SP^n X$ вполне регулярно.*

Доказательство. (i) Пусть X — T_1-пространство. Тогда по теореме 2 пространство X^n также является T_1-пространством. Достаточно показать, что каждое одноточечное подмножество $\{y\}$ пространства $SP^n X$, где $y \in SP^n X$, замкнуто в $SP^n X$. Поэтому существует такое $x \in X^n$, что $\pi_n^s(x) = y$, т.е. $\{y\} = \pi_n^s(\{x\})$. Множество $\{x\}$ замкнуто в X^n, потому что X^n есть T_1-пространство. В силу замкнутости отображения π_n^s множество $\{y\}$ замкнуто в $SP^n X$. Так как X является подпространством $SP^n X$ и T_1-пространство наследует всякому подпространству, то X является T_1-пространством.

(ii) Пусть пространство X — хаусдорфово. В силу теоремы 1 произведение X^n тоже хаусдорфово. Предположим, что y_1, y_2 — любые две различные точки пространства $SP^n X$. Прообразы $(\pi_n^s)^{-1}(y_1)$ и $(\pi_n^s)^{-1}(y_2)$ конечны и не пересекаются в X^n. Допустим, что

$$(\pi_n^s)^{-1}(y_1) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}, \quad (\pi_n^s)^{-1}(y_2) = \{z_1, z_2, \dots, z_q\}.$$

Зафиксируем точку x_1 в $(\pi_n^s)^{-1}(y_1)$. Известно, что $x_1 \neq z_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, q$. Тогда существуют такие окрестность $U_i(x_1)$ точки x_1 и окрестность $V(z_i)$ точки x_i, что $U_i(x_1) \cap V(z_i) = \varnothing$ для каждого $i = 1, 2, \dots, q$. Легко проверить, что множества

$$U(x_1) = \bigcap_{i=1}^{q} U_i(x_1), \quad V_{x_1} = \bigcup_{i=1}^{q} V(z_i)$$

являются окрестностями точки x_1 и множества $(\pi_n^s)^{-1}(y_2)$ соответственно, и они дизъюнктные. Аналогично, множества $U(x_p)$ и V_{x_p} являются окрестностями точки x_p и множества $(\pi_n^s)^{-1}(y_2)$ соответственно, и они дизъюнктные. Очевидно, что множества

$$U = \bigcup_{i=1}^{p} U(x_i), \quad V = \bigcap_{j=1}^{q} V_{x_j}$$

является окрестностями множества $(\pi_n^s)^{-1}(y_1)$ и $(\pi_n^s)^{-1}(y_2)$ и они дизъюнктны. Множества

$$SP^n X \setminus (\pi_n^s(X^n \setminus U), \quad SP^n X \setminus (\pi_n^s(X^n \setminus V)$$

открыты в $SP^n X$, причем первое из них содержит y_1, а второе содержит y_2. Далее,

$$(SP^n X \setminus (\pi_n^s(X^n \setminus U)) \cap (SP^n X \setminus (\pi_n^s(X^n \setminus V)) = \varnothing.$$

Обратное ясно, так как X является подпространством $SP^n X$ и хаусдорфовость наследует всякому подпространству.

(iii) Пусть X — регулярное пространство. По теореме 2 пространство X^n тоже регулярно. В силу (i) $SP^n X$ является T_1-пространством. Возьмем произвольную точку $y \in SP^n X$ и рассмотрим ее произвольную окрестность Oy. Тогда существует такая точка $x \in X^n$, что $y = \pi_n^s(x)$. В силу регулярности пространства X^n для каждой окрестности Ox точки x существует такая окрестность $O_1 x$ точки x, что

$$[O_1 x] \subset (\pi_n^s)^{-1}(Oy).$$

Более того,

$$\pi_n^s([O_1 x]) \subset Oy.$$

В силу замкнутости отображения π_n^s имеем

$$\pi_n^s([O_1 x]) = [\pi_n^s(O_1 x)],$$

а в силу открытости отображения π_n^s множество $O_1y = \pi_n^s(O_1x)$ является окрестностью точки $y \in SP^nX$. Значит, $[O_1y] \subset Oy$. Следовательно, SP^nX — регулярное пространство. Обратное ясно, так как X является подпространством SP^nX, и регулярность наследует всякому подпространству.

(iv) Пусть X — вполне регулярное пространство. Тогда по теореме 2 пространство X^n тоже вполне регулярно. Ясно, что SP^nX является T_1-пространством. Возьмем произвольную точку $y \in SP^nX$ и произвольное замкнутое подмножество F пространства SP^nX, не содержащее этой точки. Тогда существует такая точка $x \in X^n$, что $y = \pi_n^s(x)$. Ясно, что $x \notin (\pi_n^s)^{-1}(F)$ и множество $(\pi_n^s)^{-1}(F)$ замкнуто в X^n, так как отображение π_n^s непрерывно. Тогда существует такое непрерывное отображение $g\colon X^n \to [0,1]$, что $g(x) = 0$ и $g(z) = 1$ для всех $z \in (\pi_n^s)^{-1}(F)$.

Рассмотрим отображение

$$G\colon SP^nX \to [0,1], \quad G(t) = \inf\Big\{g(\xi) : \ \xi \in (\pi_n^s)^{-1}(t)\Big\}.$$

В этом случае имеем

$$G(y) = \inf\Big\{g(\xi) : \ \xi \in (\pi_n^s)^{-1}(y)\Big\} = 0,$$
$$G(y') = \inf\Big\{g(\xi) : \ \xi \in (\pi_n^s)^{-1}(y')\Big\} = 1, \quad y' \in F.$$

Теперь покажем, что отображение $G\colon SP^nX \to [0,1]$ непрерывно. Предположим, что $G(t) = g(x_0)$, где t — фиксированная точка в SP^nX, $x_0 \in (\pi_n^s)^{-1}(t)$. Ясно, что $g(x_0) \leqslant g(x)$ для всех $x \in (\pi_n^s)^{-1}(t)$. Возьмем произвольную окрестность $Og(x_0)$ точки $g(x_0) \in [0,1]$. В силу непрерывности отображения g существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $g(U(x_0)) \subset Og(x_0)$. Более того, множество $\pi_n^s(U(x_0))$ открыто в SP^nX, так как отображение π_n^s открыто. Тогда множество $V(t) = \pi_n^s(U(x_0))$ будет окрестностью точки t и

$$G(V(t)) \subset g(U(x_0)) \subset Og(x_0).$$

Это означает, что отображение $G\colon SP^nX \to [0,1]$ непрерывно в точке t. Значит, отображение G непрерывно. Следовательно, SP^nX есть вполне регулярное пространство.

Так как X является подпространством SP^nX и вполне регулярность наследуется всякому подпространству, то X является вполне регулярным пространством. $\square$

Замечание 1. Функтор SP^n не сохраняет нормальность топологических пространств. Это следует из того, что SP^2X и $\exp_2 X$ гомеоморфны.

Рассмотрим пространство «стрелка» $X^* = [0,1)$, базу которой образуют подмножества вида $[\alpha,\beta)$, где $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. Ясно, что пространство X^* нормально. В этом случае пространство $\exp_2 X^*$ не является нормальным (см. [5]).

Топологическое пространство X называется *нульмерным*, если X — непустое T_1-пространство, обладающее базой из открыто-замкнутых множеств. Ясно, что каждое нульмерное пространство является вполне регулярным пространством (см. [3]).

Теорема 11. *Топологическое пространство X нульмерно тогда и только тогда, когда пространство SP^nX нульмерно.*

Доказательство. Пусть топологическое пространство X нульмерно. Покажем, что пространство X^n также нульмерно. Действительно, пусть множества вида

$$\prod_{i=1}^n W_i,$$

где W_i — открыто-замкнутые подмножества в $X_i = X$, $i = 1,2,\ldots,n$, составляют базу пространства X^n. Предположим, что семейство $\Omega = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ составляет базу пространства X^n и его элементы открыто-замкнуты. Рассмотрим семейство $\pi_n^s(\Omega)$ в SP^nX. В силу открыто-замкнутости отображения π_n^s заключаем, что множество $\pi_n^s(U_\alpha)$ открыто-замкнуто для каждого $\alpha \in A$. Покажем, что семейство $\pi_n^s(\Omega)$ есть база в пространстве SP^nX. Выберем произвольную точку

$y \in SP^n X$. Тогда существует такая точка $x \in X^n$, что $y = \pi_n^s(x)$. В силу непрерывности отображения π_n^s для каждой окрестности Oy точки $y \in SP^n X$ существует такая окрестность U точки x, что $\pi_n^s(U) \subset Oy$. Тогда существует такая окрестность $U_\alpha \in \Omega$, что $x \in U_\alpha \subset U$. Отсюда имеем

$$y = \pi_n^s(x) \in \pi_n^s(U_\alpha) \subset \pi_n^s(U) \subset Oy.$$

Это означает, что семейство $\pi_n^s(\Omega)$ есть база в пространстве $SP^n X$. Так как нульмерность наследует всякому подпространству, то из нульмерности $SP^n X$ следует нульмерность пространства X. $\square$

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *совершенным*, если X — хаусдорфово пространство, f — замкнутое отображение и все прообразы $f^{-1}(y)$ являются компактными подмножествами в X.

Теорема 12. *Пусть X хаусдорфово пространство. Тогда отображение*

$$\pi_n^s\colon X^n \to SP^n X$$

является совершенным.

Доказательство. В силу теоремы 5 отображение π_n^s открыто-замкнуто, в частности, оно замкнуто. Подмножество $(\pi_n^s)^{-1}(y)$ конечно в X^n, так как для каждого $y \in SP^n X$ выполняется неравенство

$$\left|(\pi_n^s)^{-1}(y)\right| \leqslant n!.$$

Значит, все прообразы $\pi_n^s)^{-1}(y)$ являются компактными подмножествами в X^n. В силу теоремы 1 произведения n экземпляров хаусдорфова пространства X тоже является хаусдорфовым. Следовательно, отображение π_n^s является совершенным. $\square$

Замечание 2. Если X — наследственно нормальное пространство, то пространство $SP^n X$, $n \geqslant 2$, не всегда является наследственно нормальным (см. [8]).

Топологическое пространство X *метризуемо*, если существует такая метрика ρ на множестве X, что индуцированная этой метрикой топология совпадает с исходной топологией пространства X. Те метрики, которые индуцируют исходную топологию пространства X, называются метриками на пространстве X (см. [3]).

Теорема 13. *Пространство X метризуемо тогда и только тогда когда, пространство $SP^n X$ метризуемо.*

Доказательство. Так как X метризуемо, то произведение X^n тоже метризуемо для всех $n = 1, 2, \ldots$. В этом случае пространство X^n регулярно и имеет σ-локально конечную базу по теореме Нагаты—Смирнова (см. [3]). В силу теоремы 10 пространство $SP^n X$ тоже регулярно. Пусть семейство

$$\Im = \bigcup_{w=1}^{\infty} \Im_w$$

есть база в X^n, где семейство $\Im_w = \{M_\alpha^w : \alpha \in A_w\}$ локально конечно для каждого $w \in \mathbb{N}$. В силу открытости отображения π_n^s семейство $\pi_n^s(\Im)$ есть база в $SP^n X$. Более того,

$$\pi_n^s(\Im) = \bigcup_{w=1}^{\infty} \pi_n^s(\Im_w).$$

Покажем, что семейство $\pi_n^s(\Im_w)$ является локально конечным для каждого $w \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольную точку $y \in SP^n X$. Рассмотрим прообраз точки y при π_n^s. Ясно, что множество $(\pi_n^s)^{-1}(y)$ конечно, т.е.

$$(\pi_n^s)^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}.$$

Тогда существует такая окрестность $U(x_j)$ точки x_j, что множество

$$I_j = \Big\{\alpha_j \in A_w : \; U(x_j) \cap M_{\alpha_j} \neq \varnothing\Big\}$$

конечно для каждого $j = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно,

$$U(y) = \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)$$

открыто в X^n и для каждого

$$\alpha \in A_w \setminus \bigcup_{i=1}^{k} I_i$$

имеем $U(y) \cap M_\alpha^w = \varnothing$. Значит, найдется открытое множество $U(y) \subset X^n$, содержащее $(\pi_n^s)^{-1}(y)$ и пересекающееся лишь с конечным числом членов семейства $\Im_w$. Из соотношения

$$(\pi_n^s)^{-1}(y) \subset U(y)$$

вытекает, что

$$y \in SP^n X \setminus \pi_n^s(X^n \setminus U(y)).$$

Так как отображение π_n^s замкнуто, множество $V(y) = SP^n X \setminus \pi_n^s(X^n \setminus U(y))$ открыто в $SP^n X$ и является окрестностью точки y. Кроме того,

$$(\pi_n^s)^{-1}(V(y)) = X^n \setminus (\pi_n^s)^{-1}\pi_n^s(X^n \setminus U(y)) \subset U(y).$$

Очевидно, окрестность $V(y)$ пересекается лишь с конечным числом членов семейства $\pi_n^s(\Im_w)$. Значит, семейство $\pi_n^s(\Im)$ есть σ-локально конечная база в $SP^n X$. Следовательно, пространство $SP^n X$ метризуемо по теореме Нагаты—Смирнова. Обратное ясно, так как X является подпространством $SP^n X$ и метризуемость наследует всякому подпространству. □

Лемма 1. *Пусть топологическое пространство X обладает счетной базой и каждое открытое в X множество имеет тип F_σ. Тогда и каждое открытое в X^n множество имеет тип F_σ.*

Доказательство. Предположим, что семейство $\Re = \{W_\alpha : \alpha \in A\}$ — база в X и $|\Re| \leqslant \aleph_0$. Тогда подсемейство, состоящее из всех множеств

$$\prod_{i=1}^{n} W_{\alpha_i}, \quad W_{\alpha_i} \in \Re, \quad W_{\alpha_i} \neq X, \tag{4}$$

также образует счетную базу ($\alpha_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, n$) произведения X^n. Выберем произвольное открытое подмножество $G \subset X^n$ и покажем, что оно имеет тип F_σ. Множество

$$G = \bigcup \left(\prod_{i=1}^{n} W_{\alpha_i} \right)$$

состоит из не более чем счетного объединения множеств вида (4). По условию теоремы, множества W_{α_i} имеют тип F_σ, т.е.

$$W_{\alpha_i} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{\alpha_i},$$

где $F_k^{\alpha_i}$ замкнуты в X для всех $k \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\prod_{i=1}^{n} W_{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{\alpha_i} \right) = \bigcup_{k_i \in \mathbb{N} \ (i=\overline{1.n})} \left(\prod_{i=1}^{n} F_{k_i}^{\alpha_i} \right).$$

Ясно, что каждое множество вида

$$\prod_{i=1}^{n} F_{k_i}^{\alpha_i}$$

замкнуто в X^n. Следовательно,

$$G = \bigcup \Bigl(\bigcup_{k_i \in \mathbb{N} \ (i=\overline{1.n})} \Bigl(\prod_{i=1}^{n} F_{k_i}^{\alpha_i} \Bigr) \Bigr). \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть X — топологическое пространство и каждое открытое в X множество имеет тип F_σ. Тогда и каждое открытое в $Y \subset X$ множество имеет тип F_σ.*

Доказательство. Выберем произвольное открытое подмножество O в Y. Тогда существуют такие открытые подмножества U в X, что $O = U \cap Y$. По условию леммы имеем

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Значит,

$$O = \Bigl(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \Bigr) \cap Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap Y).$$

Ясно, что каждое множество $\Phi_k = F_k \cap Y$ замкнуто в Y. $\square$

Теорема 14. *Пусть топологическое пространство X обладает счетной базой. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *каждое открытое в X множество имеет тип F_σ*;
(ii) *каждое открытое в SP^nX множество имеет тип F_σ.*

Доказательство. Предположим, что пространство X обладает счетной базой и каждое открытое в X множество имеет тип F_σ. В силу леммы 1 каждое открытое в X^n множество имеет тип F_σ. Выберем произвольное открытое подмножество G в SP^nX. Тогда множество $(\pi_n^s)^{-1}(G)$ открыто в X^n. В этом случае имеем

$$(\pi_n^s)^{-1}(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

где F_i замкнуто в X^n для всех $i \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что

$$G = \pi_n^s \Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \Bigr) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \pi_n^s(F_i).$$

Множество $\Phi_i = \pi_n^s(F_i)$ замкнуто в SP^nX, так как отображение π_n^s замкнуто. Значит,

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i.$$

Тогда множество G имеет тип F_σ. Предположим, что каждое открытое множество в SP^nX имеет тип F_σ. Ясно, что пространство X гомеоморфно подпространству K пространства SP^nX, где

$$K = \{[(z, z, \dots, z)] : z \in X\}, \quad [(z, z, \dots, z)] = \pi_n^s((z, z, \dots, z)).$$

В силу леммы 2 каждое открытое множество в $K \subset SP^nX$ имеет тип F_σ. Тогда каждое открытое множество в X имеет тип F_σ. $\square$

Теорема 15. *Для любого топологического пространства X следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *пространство X компактно*;
(ii) *пространство SP^nX компактно*;
(iii) *пространство $\exp_n X$ компактно.*

Топологическое пространство X называется *секвенциально компактным* (см. [3]), если каждая последовательность точек в X содержит сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 16. *Для любого топологического пространства X следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *пространство X секвенциально компактно*;
(ii) *пространство SP^nX секвенциально компактно*;
(iii) *пространство $\exp_n X$ секвенциально компактно.*

Доказательство. Пусть пространство X секвенциально компактно. Так как произведение любого счетного семейства секвенциально компактных пространств является секвенциально компактным, то X^n — секвенциально компактное пространство. Непрерывные отображения сохраняют секвенциальную компактность. Поэтому пространство SP^nX является секвенциально компактным. Аналогично, пространство $\exp_n X$ также секвенциально компактно. Поскольку секвенциальная компактность наследует всякому замкнутому подпространству, то из секвенциальной компактности $\exp_n X$ следует секвенциальная компактность пространства X. □

Семейство подмножеств $\Im$ пространства X называется *k-сетью* (см. [5]), если для каждого компактного подмножества K пространства X и любого открытого множества U, содержащего K, в X существует такое конечное подсемейство $\Im' \subset \Im$, что $K \subset \cup\Im' \subset U$. Напомним, что пространство X есть $\aleph$-пространство, если X имеет σ-локально конечную k-сеть.

Пространство X называется $\Pi\aleph$-*пространством*, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ произведение X^n есть $\aleph$-пространство.

Теорема 17. *Пусть топологическое пространство X есть $\Pi\aleph$-пространство. Тогда пространство SP^nX есть $\aleph$-пространство.*

Доказательство. Из определения $\Pi\aleph$-пространства следует, что пространство X^n является $\aleph$-пространством. Предположим, что семейство $\Im = \{M_\alpha : \alpha \in A\}$ есть k-сеть и σ-локально конечно в X^n. Достаточно показать, что семейство $\pi_n^s(\Im)$ есть k-сеть и σ-локально конечно в SP^nX. Выберем произвольное компактное подмножество K пространства SP^nX и любое открытое множество U, содержащее K в SP^nX. Сначала покажем, что множество $(\pi_n^s)^{-1}(K)$ является компактным в X^n. Требуется показать, что для каждого центрированного семейства $\Phi = \{F_c\}_{c\in C}$ замкнутых множеств в $(\pi_n^s)^{-1}(K)$ пересечение $\bigcap\{F_c : c \in C\}$ непусто. При этом можно предполагать, что все конечные пересечения элементов семейства Φ входят в Φ, ибо, добавив к Φ эти пересечения, мы снова получим центрированное семейство. Ясно, что сужение

$$(\pi_n^s)_K \colon (\pi_n^s)^{-1}(K) \to K$$

является замкнутым отображением. Значит, $\Phi' = \{\pi_n^s(F_c)\}_{c\in C}$ — центрированное семейство замкнутых множеств в K и существует точка

$$y \in \bigcap_{c\in C} \pi_n^s(F_c).$$

Таким образом, для всех $c \in C$ имеем

$$(\pi_n^s)^{-1}(y) \cap F_c \neq \varnothing.$$

Так как $(\pi_n^s)^{-1}(y)$ конечно, в частности, компактно, а Φ замкнуто относительно конечных пересечений, найдется точка

$$y \in \bigcap_{c\in C}((\pi_n^s)^{-1}(y) \cap F_c) \subset \bigcap_{c\in C} F_c.$$

Следовательно, множество $(\pi_n^s)^{-1}(U)$ открыто в X^n и содержит компактное множество $(\pi_n^s)^{-1}(K)$. Так как семейство $\Im$ — k-сеть в X^n, существует такое конечное подсемейство $\Im' \subset \Im$, что

$$(\pi_n^s)^{-1}(K) \subset \bigcup \Im' \subset (\pi_n^s)^{-1}(U).$$

Следовательно,

$$K \subset \cup\pi_n^s(\Im') \subset U.$$

Легко проверить, что подсемейство $\pi_n^s(\Im') \subset \pi_n^s(\Im)$ конечно. Значит, семейство $\pi_n^s(\Im)$ — k-сеть в SP^nX. Так как $\Im$ — σ-локально конечно, то

$$\Im = \bigcup_{w=1}^{\infty} \Im_w,$$

где $\Im_w = \{M_\alpha^w : \alpha \in A_w\}$ — локально конечное семейство для всех $w \in \mathbb{N}$. Более того,

$$\pi_n^s(\Im) = \bigcup_{w=1}^{\infty} \pi_n^s(\Im_w).$$

Покажем, что семейство $\pi_n^s(\Im_w)$ является локально конечным для каждого $w \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольную точку $y \in SP^nX$ и рассмотрим ее прообраз при отображении π_n^s. Ясно, что множество $(\pi_n^s)^{-1}(y)$ конечно, т.е. $(\pi_n^s)^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Тогда существует такая окрестность $U(x_j)$ точки x_j, что множество

$$I_j = \left\{\alpha_j \in A_w : \ U_{x_j} \cap M_{\alpha_j} \neq \varnothing\right\}$$

конечно для каждого $j = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно,

$$U(y) = \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)$$

открыто в X^n и для каждого

$$\alpha \in A_w \setminus \bigcup_{i=1}^{k} I_i$$

имеем $U(y) \cap M_\alpha^w = \varnothing$. Значит, найдется открытое множество $U(y) \subset X^n$, содержащее $(\pi_n^s)^{-1}(y)$ и пересекающееся лишь с конечным числом членов семейства $\Im_w$. Из соотношения

$$(\pi_n^s)^{-1}(y) \subset U(y)$$

вытекает, что

$$y \in SP^nX \setminus \pi_n^s(X^n \setminus U(y)).$$

Так как π_n^s замкнуто, заключаем, что $V(y) = SP^nX \setminus \pi_n^s(X^n \setminus U(y))$ открыто в SP^nX и является окрестностью точки y. Кроме того,

$$(\pi_n^s)^{-1}(V(y)) = X^n \setminus (\pi_n^s)^{-1}\pi_n^s(X^n \setminus U(y)) \subset U(y).$$

Очевидно, окрестность $V(y)$ пересекается лишь с конечным числом членов семейства $\pi_n^s(\Im_w)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малыхин В. И.* О тесноте и числе Суслина в произведении пространств// Докл. АН СССР. — 1972. — *203.* — С. 1001–1003.
2. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Топология гиперпространств и ее приложения. — М.: Знание, 1989.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
4. *Beshimov R. B.* Some cardinal properties of topological space connected with weakly density// Meth. Funct. Anal. Topol. — 2004. — *10*, № 3. — P. 17–22.
5. *Beshimov R. B.* On some cardinal invariants of hyperspaces// Math. Stud. — 2005. — *24*, № 2. — P. 197–202.
6. *Beshimov R. B., Mukhamadiev F. G., Zhuraev R. M.* Cardinal properties of the space of permutation degree// Tashkent State Pedagogical Univ. Sci. Inform. — 2014. — *2.* — P. 76–83.
7. *Beshimov R. B., Mukhamadiev F. G., Mamadaliev N. K.* The local density and the local weak density of hyperspaces// Int. J. Geom. — 2015. — *4*, № 1. — P. 42–49.
8. *Beshimov R. B., Safarova D. T.* Normal functors and Aleksandrov's two arrows// Caspian J. Appl. Math. Ecology and Economics. — 2013. — *1*, № 2. — P. 50–59.
9. *Fucai Lin, Chuan Liu* The k-spaces property of the free Abelian topological groups over non-metrizable Lašnev spaces// Topol. Appl. — 2017. — *220.* — P. 31–42.

10. *Mukhamadiev F.* Some cardinal and topological properties of the n-permutation degree of a topological spaces and locally τ-density of hyperspaces// Bull. Natl. Univ. of Uzbekistan. Math. Natural Sci. — 2018. — *1*, № 1. — P. 30–35.

Бешимов Рузиназар Бебутович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: rbeshimov@mail.ru

Жураев Рустам Мехриддинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: rmjurayev@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 201 (2021). С. 123–131
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-201-123-131

УДК 514.752.4, 517.956.2

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПО ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЕ И РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МОНЖА—АМПЕРА

© 2021 г. А. АРТИКБАЕВ, Н. М. ИБОДУЛЛАЕВА

Аннотация. В работе обобщено понятие сферического отображения поверхности евклидова пространства. Нормальное отображение поверхности, введенной И. Я. Бакельманом, является частным случаем обобщенной кривизны. Доказаны общие свойства обобщенной кривизны и особые свойства обобщенной кривизны, перенесенной на гиперболический цилиндр. С помощью этих свойств доказаны существование и единственность решения уравнения Монжа—Ампера в многосвязной области.

Ключевые слова: сферическое отображение, внешняя кривизна, нормальное отображение, обобщенная условная кривизна, гиперболический цилиндр, многосвязная область.

THE PROBLEM OF RECOVERING A SURFACE BY THE GIVEN EXTERNAL CURVATURE AND SOLUTIONS OF THE MONGE–AMPÈRE EQUATION

© 2021 A. ARTYKBAEV, N. M. IBODULLAEVA

Abstract. In this paper, we generalize the concept of the spherical mapping of a surface in Euclidean space. The normal mapping of a surface introduced by I. Ya. Bakelman is a special case of the generalized curvature. We prove general properties of the generalized curvature and special properties of the generalized curvature extended to a hyperbolic cylinder. Using these properties, we prove the existence and uniqueness of a solution of the Monge–Ampère equation in a multiply connected domain.

Keywords and phrases: spherical mapping, external curvature, normal mapping, generalized conditional curvature, hyperbolic cylinder, multiply connected domain.

AMS Subject Classification: 35R09, 45K05, 45J05

1. Постановка задачи. Связь задачи с уравнением Монжа—Ампера. Пусть D — выпуклая область, ограниченная выпуклым многоугольником Γ. Пространственная ломаная L однозначно проектируется на многоугольник Γ, причем вершины L проектируются в вершины Γ. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — отмеченные точки области D. Рассмотрим множество W выпуклых многогранников с краем L и вершинами A_i', проектирующиеся в точку A_i.

Задача (А. Д. Александров)**.** Заданы числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Существует ли многогранник $K \in W$ с внешней кривизной α_i в вершине A_i'?

В этой задаче под внешней кривизной понимается площадь сферического отображения. А. Д. Александров решил эту задачу в 1942 г. при помощи метода, называемого «лемма об отображении». При этом он доказал следующую теорему.

Работа выполнена при поддержке МРУ-ОТ-9/2017.

Теорема 1 (см. [1]). *Если* $\alpha_i > 0$ *и*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 2\pi,$$

то существует единственный выпуклый многогранник $F \subset W$ *с внешними кривизнами в вершине* A_i', *равными* α_i.

А. В. Погорелов решил данную задачу в 1956 г. методом, основанным на экстремальном свойстве внешней кривизны. Этот метод позже стал называться экстремальным приемом Погорелова (см. [7]).

Задача Дирихле в классе регулярных поверхностей ставится следующим образом. Пусть D — выпуклая область с границей $\partial D = \Gamma$, пространственная кривая L однозначно проектируется на границу области D, $\mu(M)$ — вполне аддитивная неотрицательная функция борелевских множеств $M \subset D$, причем $\overline{M} \subset D$.

Задача (Дирихле). Существует ли поверхность F, у которой внешняя кривизна $\omega_F(M)$ равна $\mu(M)$, т.е. справедлива ли формула

$$\omega_F(M) = \mu(M)$$

для площади сферического отображения?

Если $z = f(x, y)$ и $z \in C^2(D)$, то внешняя кривизна множества $M \subset D$ вычисляется по формуле

$$\omega(M) = \iint\limits_M \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dy.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение Монжа—Ампера

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \varphi(x, y, z, z_x, z_y). \tag{1}$$

Интегрирование уравнения (1) сводится к решению геометрической задачи о восстановлении выпуклой поверхности по внешней кривизне, заданной на борелевских множествах в области D. Этот метод решения уравнения (1) применен А. Д. Александровым именно для решения задачи восстановления поверхности с заданной внешней кривизной (см. [9]).

Поясним, каким образом решение уравнения (1) сводится к решению геометрической задачи в евклидовом пространстве. Для удобства рассмотрим тот случай, когда функция φ имеет вид

$$\varphi(x, y, z, z_x, z_y) = \psi(x, y)(1 + z_x^2 + z_y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Пусть функция $\psi(x, y) > 0$ определена для всех (x, y) из ограниченной открытой области D, что обеспечивает эллиптичность уравнения (1). Будем предполагать, что функция $z(x, y) \in C^2(D)$ является решением уравнения (1); тогда $z(x, y)$ — выпуклая функция. Рассмотрим поверхность Φ, заданную уравнением $z = z(x, y)$, и её сферическое отображение ω в области D.

Обозначим через M произвольное борелевское множество, содержащееся в D вместе с замыканием $\overline{M}$. Тогда площадь сферического отображения $\omega(M)$ вычисляется по формуле

$$\omega(M) = \iint\limits_M \psi(x, y) dx dy = \iint\limits_M \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dy.$$

Таким образом, интегрирование уравнения (1) в этом случае сводится к решению геометрической задачи о восстановление выпуклой поверхности по площади сферического отображения, заданной на борелевских множествах области D.

А. Артикбаев обобщил понятие сферического отображения выпуклых поверхностей для всех пространств с проективной метрикой. Одним из частных случаев этого обобщения является галилеево пространство (см. [8]).

В известных работах А. Д. Александрова [1], А. В. Погорелова [7], И. Я. Бакельмана [9] и А. Л. Вернера [6] задача Дирихле для уравнения Монжа—Ампера решена только для выпуклых областей на плоскости. А. Артикбаев исследовал эту задачу для случаев невыпуклых и неодносвязных областей (см. [8]). Целью данной статьи является исследовать аналог задачи А. Д. Александрова для многосвязных областей, когда многогранник проектируется на сферу.

2. Теорема А. В. Погорелова о существовании многогранников с данной монотонной функцией на вершинах. Сначала определим функцию, названную нами обобщенной условной кривизной выпуклой поверхности. Пусть V — выпуклый многогранный угол и A — его вершина. Если из точки A можно провести полупрямую, параллельную оси z в направлении $z>0$, вовнутрь угла V, то будем говорить, что угол V обращен выпуклостью в сторону $z<0$ (см. [7]).

На выпуклых многогранных углах, обращенных выпуклостью в сторону $z<0$, будем рассматривать функцию v, удовлетворяющую следующим условиям:

(i) функция v непрерывна, неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда угол вырождается (в двугранный угол или в плоскость);

(ii) если углы V_1 и V_2 имеют общую вершину и угол V_1 содержится в V_2, то $v(V_1)\geqslant v(V_2)$, причем равенство имеет место только тогда, когда углы совпадают;

(iii) если угол V_2 получается из V_1 сдвигом в направлении $z<0$, то $v(V_1)\leqslant v(V_2)$.

Примером функции v является кривизна угла — площадь сферического отображения. В дальнейшем всякую функцию v, удовлетворяющую условиям (i)–(iii), назовем монотонной функцией угла.

Обозначим через Ω_p совокупность многогранников P с краем γ, однозначно проектирующихся на плоскость Oxy, обращенных выпуклостью в сторону $z<0$, вершины которых лежат на прямых g_k. Пусть γ — пространственная замкнутая ломаная. При помощи прямых, параллельных оси z, эта ломаная однозначно проектируется в выпуклую ломаную $\overline{\gamma}$ на плоскости Oxy, причем выпуклая ломаная $\overline{\gamma}$ ограничивает многоугольник G, так что вершинам ломаной γ соответствуют вершины $\overline{\gamma}$. Пусть $g_1,g_2,\dots,g_n$ — любая конечная система прямых, параллельных оси z и пересекающих многоугольник G; $v_1,v_2,\dots,v_n$ — любые положительные числа; v — монотонная функция, заданная на многогранных углах, обращенных выпуклостью в сторону $z<0$ и с вершинами на прямых g_k.

Теорема 2. *Предположим, что в множестве Ω_p найдется такой многогранник P_0, что для его многогранных углов с вершинами в точках A_k имеет место оценка*

$$v(A_k)\leqslant v_k,\quad k=\overline{1,n}.$$

Предположим также, что для каждого многогранника из Ω_p, пересекающего плоскость $z=$ const, имеет место неравенство

$$\sum_k v(A_k)\geqslant\sum_k v_k.$$

Тогда в Ω_p существует многогранник, на многогранных углах которого функция v принимает заданные значения v_k, т.е.

$$v(A_k)=v_k,\quad k=\overline{1,n}.$$

3. Обобщение внешней кривизны выпуклых поверхностей. Внешняя кривизна поверхности, определенная как площадь сферического отображения, является функцией, обладающей замечательными свойствами. По аналогии с внешней кривизной И. Я. Бакельман построил функцию условной кривизны поверхности, которая обладает свойствами внешней кривизны (см. [6]).

Выясним геометрическую конструкцию определения условной кривизны. Пусть $F: z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ и $z\in C^2(D)$. Тогда уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0,y_0)$ имеет вид:

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).\tag{2}$$

Введем обозначения $p=f_x(x_0,y_0)$ и $q=f_y(x_0,y_0)$. Каждой касательной плоскости (2) ставится в соответствие точка

$$M^*\left\{\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}};-\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\}$$

на единичной сфере, которая называется *сферическим отображением* точки $M(x_0, y_0)$ относительно поверхности F.

При нормальном отображении каждой касательной плоскости, заданной уравнением (2), ставится в соответствие точка $M^*\{p, q\}$ на плоскости π с декартовыми координатами $\{0, p, q\}$.

Рассмотрим единичную сферу

$$S: \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{3}$$

и проведем к ней в точке $(0, 0, 1)$ касательную плоскость T, уравнение которой, очевидно, $z = 1$. Пусть точка M^* — сферическое отображение точки $M(x_0, y_0)$ относительно поверхности F на сфере, заданной уравнением (3). Спроектируем точку M^* из начала координат на касательную плоскость T. Легко показать, что проекция M^+ точки M^* имеет координаты $\{p, q\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Нормальное отображение является центральной проекцией сферического отображения на касательную плоскость.*

Данная связь между сферическим и нормальным отображениями поверхности позволяет обобщать свойства сферического отображения относительно поверхностей однозначно проектирующихся на сферу или на ее части. Рассмотрим поверхность Φ.

Определение 1. Поверхность Φ называется *звездно расположенной относительно сферы S*, если любой луч, выходящий из начала координат, пересекает Φ не более чем в одной точке.

Например, любой выпуклый овалоид, содержащий начало координат, будет звездно расположенной поверхностью. Введем понятие обобщенного отображения поверхности F и дадим определение обобщенной кривизны поверхности. Пусть Φ — поверхность, звездно расположенная относительно сферы S. Луч, выходящий из центра сферы и пересекающий S в точке X, может пересекать поверхность Φ (в этом случае точку пересечения обозначим $X(\Phi)$), а может не пересекать. Точку $X(\Phi)$ (если она существует) назовем проекцией точки $X \in S$ на поверхность Φ.

Определение 2 (см. [4])**.** Если точка $X \in S$ — сферическое отображение точки $M(x_0, y_0)$ относительно поверхности F, то точку $X(\Phi)$ назовем обобщенным отображением точки $M(x_0, y_0)$ относительно поверхности F на поверхность Φ.

Известно (см. [2]), что любая плоскость, проходящая через центр сферы, пересекает ее по большой окружности, которая является кратчайшей для точек, лежащих на этом сечении (когда точки не являются диаметрально противоположными). Кривую, образованную пересечением поверхности Φ с плоскостью α, назовем кратчайшей на Φ. Она проходит через начало координат.

Пусть M^* — некоторое множество точек на S. Тогда центральная проекция этого множества на Φ образует множество M^+.

С учетом вышеприведенных определений и свойств центральной проекции можно доказать следующие свойства обобщенного отображения.

Свойство 1. Если

$$M = \sum_{i=1}^{k} M_i,$$

то

$$M^+ = \sum_{i=1}^{k} M_i^+.$$

Свойство 2. Если M — выпуклое множество на S, то M^+ выпукло на Φ.

Свойство 3. Если M измеримо, то M^+ также измеримо.

Пусть M — множество в области D, в котором определена поверхность F, и $\overline{M}$ — множество точек на поверхности F, проекцией которого является $M \subset D$. Рассмотрим точки $\overline{M} \in F$ проекции $M \in D$. Обозначим через M^+ обобщенное отображение точки $\overline{M} \subset F$. Образом обобщенного отображения множества $M \subset D$ является в общем случае некоторое множество $M^+ \subset \Phi$, называемое *обобщенным отображением множества* $M \subset D$ *относительно поверхности* F *на поверхность* Φ.

Определение 3. Площадь множества $M^+ \subset \Phi$ назовем *обобщенной внешней кривизной множества* M *относительно поверхности* F и обозначим

$$\omega_F(M) = S_\Phi(M^+).$$

Используя свойства центральной проекции и свойства сферического отображения, нетрудно доказать следующие свойства обобщенной внешней кривизны:

(i) $\omega_F(M) \geqslant 0$ для любой $M \subset D$;

(ii) $\omega_F(M_1 + M_2) = \omega_F(M_1) + \omega_F(M_2)$ (аддитивность обобщенной внешней кривизны).

Мы привели определение и свойства обобщенной внешней кривизны для поверхности Φ, звездно расположенной относительно единичной сферы S. Однако эти свойства справедливы для любой другой звездно расположенной поверхности. Кроме того, для конкретных поверхностей из класса $\{\Phi\}$, звездно расположенных относительно сферы, можно установить индивидуальные свойства $\omega_F(M)$.

4. Обобщение задачи А. Д. Александрова. Обобщим задачу А. Д. Александрова о существовании и единственности выпуклого многогранника с однозначной проекцией на плоскость на случай, когда многогранник проектируется на сферу.

4.1. Постановка задачи. Пусть G — выпуклый многоугольник, содержащийся на полусфере единичной сферы S с центром в точке O. Пространственная замкнутая ломаная L из центра O сферы S однозначно проектируется на край ∂G многоугольника G, причём вершины L проектируются в вершину ∂G. В многоугольнике G отмечены точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ и проведены лучи OA_i $(i = \overline{1, n})$. Рассмотрим класс выпуклых многогранников с краем L и вершинами на лучах OA_i. Предположим W — выпуклый замкнутый многогранник, содержащий замкнутую ломаную L. Существование многогранника W легко можно показать. Ломаная L разделит многогранник W на два многогранника с краем L, причём один из них относительно точки O является выпуклым снаружи, а другой — выпуклым изнутри. Это следует из того, что любой луч, выходящий из точки O и пересекающий W, пересекает его в двух точках. Выпуклую относительно точки O часть выпуклого многогранника W с краем L обозначим $W(O)$. Обозначим через V выпуклый многогранный угол с вершиной в точке O и с направляющим L. Заметим, что ребра многогранного угла L являются лучами, которые проходят через вершины выпуклого многогранника G.

Как в [3], внешнюю кривизну вершины выпуклого многогранника назовем площадью сферического отображения. Обозначим через $\omega(A_i)$ внешнюю кривизну вершины A_i многогранника $W \in W(O)$, а $\omega(V)$ — внешняя кривизна выпуклого многогранника V.

Задача (аналог задачи А. Д. Александрова)**.** Пусть заданы числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Существует ли выпуклый многогранник из класса $W(O)$ с краем L, вершинами A_i на лучах OA_i, внешняя кривизна вершин A_i которого равна α_i:

$$\omega(A_i) = \alpha_i?$$

4.2. Решение задачи. Обозначим через V_L многогранный угол, образованный лучами, выходящими из точки O и проходящими через точки ломаной L. Край ∂G сферического многоугольника G также лежит на V.

Пусть $\omega(V_L)$ — полный угол вокруг вершины многогранного угла V_L. Когда V_L не вырождается в плоскую область или на луч, имеет место неравенство $\omega(V_L) > 0$.

Теорема 3. *Пусть заданы числа* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, *причем*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \omega(V_L).$$

Тогда существует единственный многогранник $W_0 \in W_0(G)$ *внешней кривизной вершин на лучах* OA_i, *равной* α_i.

Доказательство. Сначала докажем, что существует многогранник, принадлежащий классу $W_0(G)$. Для этого рассмотрим выпуклую оболочку пространственной ломаной L. В общем случае выпуклая оболочка L является замкнутым выпуклым многогранником с вершинами, совпадающими с вершинами ломаной L. Так как лучи l_i содержатся внутри V_L, то они пересекаются с выпуклой оболочкой пространственной ломаной L. Если считать также пересечение l_i с выпуклой оболочкой L плоскими вершинами, то часть выпуклой оболочки L принадлежит классу многогранников $W_0(L)$, который не имеет внутренних вершин, отличных от плоских вершин. Обозначим через A_i^0 точки пересечения луча l_i с выпуклой оболочкой пространственной ломаной L и e_i^0 — длина отрезка OA_i^0. □

Приведем некоторые свойства многогранников $W \in W_0(L)$.

Лемма 2. *Внешняя кривизна многогранника $W \in W_0(L)$ является монотонной функцией относительно $e_i = OA_i$.*

Доказательство. Сначала докажем лемму для случая, когда вершина многогранника единственна, т.е. W_1. Выпуклая оболочка края L с точкой A_1, лежащей на отрезке OA_1^0, является многогранник с вершиной A_1 и краем L. Когда вершину A_1 сдвигаем по отрезку OA_1^0 в точку A_1', образуется новый многогранник с вершиной в точке A_1' и с краем L, причем следующий многогранник содержит предыдущий, так как у них край общий и вершина A_1 находится внутри многогранника с вершиной A_1'.

Из свойства монотонности внешней кривизны следует, что $W(A_1) \geqslant W(A_1')$. Отсюда следует утверждение леммы. Когда вершин две или больше, лемма доказывается таким же образом. При этом используется монотонность сферического отображения. □

Лемма 3. *Пусть $\omega(A_i)$ — внешняя кривизна вершины A_i, принадлежащей отрезку OA_i^0, и сумма внешних кривизн всех вершин $W \in W(L)$ равна*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(A_i).$$

Имеет место предельное равенство

$$\lim_{l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(A_i) = \omega(V_L).$$

Доказательство. Для доказательства леммы возьмем произвольную вершину $A_k \in \{A_i\}$, где $k \in [1, n]$. Предположим, что $l_k \to 0$. Так как многогранник $W \subset W(K)$ является выпуклой оболочкой ломаной L и всех вершин A_i, лежащих на отрезках OA_i^0, то он содержится внутри многогранника V_L. Тогда хотя бы одна вершина A_k совпадает с вершиной O многоугольника V_L, а выпуклая оболочка W совпадает с V_L. Причем все остальные $(n-1)$ вершин также совпадают с вершиной O. Следовательно, совпадение одной вершины многогранника $W \in W(L)$ с вершиной многогранного угла V влечет за собой совпадение всех других вершин W с точкой O.

Когда какая-нибудь вершина A_k стремится к точке O, то расстояние $OA_k = l_k \to 0$. Отсюда следует справедливость леммы. □

5. Существование и единственность решения уравнения Монжа—Ампера в различных областях с новыми краевыми условиями. Заметим, что в качестве функции Φ можно взять любую звездно расположенную относительно сферы S поверхность. Если Φ — замкнутый выпуклый овалоид, то определенная обобщенная внешняя кривизна мало отличается от обычной внешней кривизны поверхности.

Представляет наибольший интерес случай, когда поверхность неограниченна или нерегулярна, например, когда Φ — цилиндр и определенная обобщенная кривизна совпадает с внешней кривизной выпуклой поверхности галилеева пространства (см. [8]).

Рассмотрим случай, когда Φ является частью поверхности, заданной уравнением

$$z^2 - x^2 = 1, \quad z > 0; \tag{4}$$

это гиперболический цилиндр, асимптотическим конусом которого является двугранный угол, а ребром служит ось Oy. Заметим, что поверхность Φ звездно расположена относительно единичной сферы S. Обозначим через

$$\Phi : z = |x| \tag{5}$$

асимптотический конус Φ, а через G — область на сфере S, являющуюся внутренней частью пересечения поверхностей $\overline{\Phi}$ и S.

Нетрудно видеть, что если X — внутренняя точка области G, вектор $\overrightarrow{OX}$ пересекается с поверхностью Φ в одной точке. Если же точка X стремится к краю области G, образ точки X на Φ стремится к бесконечности.

Касательной плоскости, заданной уравнением (5), поставим в соответствие точку Φ с координатами

$$\left\{-\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}; -\frac{q}{\sqrt{1-p^2}}; \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\right\}.$$

Тогда обобщенная кривизна поверхности F вычисляется по формуле

$$\omega_F(M) = \iint\limits_M \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1-z_x^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy.$$

Итак, мы рассмотрели выпуклые поверхности однозначно проектирующиеся в ограниченную область D, для которых выполняется условие $|p| < 1$.

Пусть задана кривая L, однозначно проектирующаяся на границу ∂D области D. Рассмотрим плоскости

$$z = \pm x + a, \tag{6}$$

которые касаются кривой L, лежащей в одном из образованных этими плоскостями полупространств. Рассмотрим выпуклое тело $W(L)$, образованное выпуклой оболочкой L и плоскостями (6). Любая выпуклая поверхность с краем L, однозначно проектирующаяся в область D и содержащаяся внутри $W(L)$, удовлетворяет условию $|p| < 1$. Следовательно, поверхности, обладающие обобщенной кривизной, не пусты.

В теле $W(L)$ рассмотрим конус K_n с краем L и вершиной в точке X_n. Предположим, что последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, стремится к точке x, причем конусы K_n не имеют опорных плоскостей, параллельных плоскостям (6), а конус $K = K(x)$ имеет опорную плоскость, параллельную плоскостям (6).

Теорема 4. *Если последовательность конусов K_n, не имеющих опорных плоскостей, параллельных плоскостям* (6), *стремится к конусу $K(x)$, то обобщенная внешняя кривизна $\omega(K_n)$ не ограничена.*

Доказательство. Доказательство теоремы следует из свойства обобщенного отображения. Когда конусы стремятся к конусу с опорной плоскостью, параллельной плоскости (5), обобщенное отображение превращается в бесконечную полосу на гиперболическом цилиндре. □

6. Решение аналога задачи А. Д. Александрова в многосвязных областях. Пользуясь понятием обобщенной внешней кривизной выпуклой поверхности, определенным выше, докажем существование и единственность аналога задачи А. Д. Александрова, когда заданное значение кривизны равно обобщенной кривизне.

Пусть на плоскости Oxy заданы выпуклые замкнутые ломаные G, G_1 и G_2, причем G_1, G_2 содержатся внутри G, а области, ограниченные ломаными G_1, G_2, не имеют общих точек. Рассмотрим цилиндрические поверхности $H(G_1)$ и $H(G_2)$ с направляющими G_1, G_2, соответственно, и образующими, параллельными оси Oz. Обозначим через L_i многоугольник, образованный пересечением плоскости $z = |x| + a_i$ с цилиндром $H(G_i)$. Пространственная ломаная L однозначно проектируется на G, причем вершина L проектируется в вершину G.

Пусть $W(L, L_1, L_2)$ — выпуклые многогранники с краями L, L_1 и L_2. Эти выпуклые многогранники не имеют опорных плоскостей, параллельных плоскостям $z = |x|$ и однозначно проектируются на область $M = G/G_1 \cup G_2$. Область $M = G/G_1 \cup G_2$ — это трехсвязная область на плоскости Oxy.

Пусть в области M отмечены точки A_i $(i = \overline{1,n})$, заданы числа $\omega_i > 0$ $(i = \overline{1,n})$ и лучи l_i, выходящие из точек A_i и параллельные оси Oz.

Теорема 5. *Если*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i < \infty,$$

то существует единственный многогранник из класса $W(L, L_1, L_2)$ с вершинами на лучах l_i и обобщенной внешней кривизной ω_i.

Доказательство. Рассмотрим многогранники $N \in W(L, L_1, L_2)$ с такими обобщенными внешними кривизнами вершин $\widetilde{A_i}$, что $\widetilde{\omega_i} \leqslant \omega_i$. Этот класс многогранников обозначим через $T\{N\}$. Докажем, что класс $T\{N\}$ не пуст. Действительно, этому классу выпуклых многогранников принадлежит часть выпуклой оболочки ломаных L, L_1 и L_2. Этот многогранник является многогранником с краями L, L_1, L_2 и без вершин, т.е. $\omega_i = 0$.

Расстояние от точки A_i до вершины $\widetilde{A_i}$ многогранника обозначим через h_i. Рассмотрим линейную функцию

$$f(h_i) = \sum_{i=1}^{n} h_i.$$

Эта функция линейна относительно h_i и определена в замкнутой области $W(L, L_1, L_2)$. Следовательно, она достигает своих экстремальных значений. Пусть при h_i^0 $(i = \overline{1,n})$ функция $f(h_i)$ достигает своего минимума для многогранника $N_0 \in W(L, L_1, L_2)$.

Докажем, что многогранник N_0 является искомым. Для этого нужно показать, что обобщенная внешняя кривизна во всех вершинах $\widetilde{A_i}$ равна ω_i. Предположим, существует вершина $\widetilde{A_k}$, где обобщенная внешняя кривизна $\widetilde{\omega_k} \leqslant \omega_k$. Тогда вершину $\widetilde{A_k}$ сдвинем по лучу l_k в сторону плоскости Oxy. При этом обобщенная внешняя кривизна вершины $\widetilde{A_k}$ увеличивается, а расстояние h_k уменьшается. Причем обобщенная внешняя кривизна других вершин не увеличивается. Полученный новый многогранник также находится в классе $T\{N\}$. Но это противоречит тому, что многогранник N_0 соответствует минимуму функции $f(h_i)$. Это противоречие доказывает, что обобщенная внешняя кривизна $\widetilde{\omega_i}$ во всех вершинах $\widetilde{A_i}$ равна ω_i. ☐

Теорему 5 можно доказать и в классе регулярных поверхностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Д.* Существование и единственность выпуклой поверхности с заданной интегральной кривизной// Докл. АН УССР. — 1942. — *35*, № 5. — С. 143–147.
2. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
3. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
4. *Артыкбаев А., Вернер А. Л.* Неодносвязные выпуклые поверхности заданной интегральной условной внешней кривизной// в кн.: Вопросы дифференциальной геометрии «в целом». — Л.: ЛГУ, 1983. — С. 3–8.
5. *Артыкбаев А., Соколов Д. Д.* Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. — Ташкент: Фан, 1991.
6. *Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е.* Введение в дифференциальную геометрию «в целом». — М.: Наука, 1973.
7. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969.
8. *Артыкбаев А.* Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в галилеевом пространстве// Мат. сб. — 1982. — *119 (161)*, № 2 (10). — С. 204–224.

9. *Bakelman I. Ya.* Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.

Артикбаев Абдуллаазиз
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `aartykbaev@mail.ru`

Ибодуллаева Нафиса Мухитдиновна
Навоийский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан
E-mail: `nafisa.28.02.1991@mail.ru`